

Matematično fizikalni seminar

Začetni problem PDE — diferenčna metoda

Teodor Jovanovski, 28241125
Profesor: doc. dr. Miha Muškinja
Maj, 2025

1 Uvod

Diferenčne metode za aproksimativno reševanje parcialnih diferencialnih enačb so široko uporabne, saj niso omejene na preproste geometrije in linearne robne pogoje. Pri aproksimaciji odvodov s končnimi diferencami se običajno zadovoljimo z najnižjim možnim redom, formule višjega reda so zelo rade nestabilne. Tu bomo delovanje diferenčnih metod preskusili na difuzijski in valovni enačbi.

Temperaturno polje v homogeni neskončni plasti s končno debelino a (enodimenzionalni problem) je podano z enačbo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c}, \quad 0 < x < a, \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

z začetno temperaturno sliko $T(x, t = 0) = f(x)$, podani pa morajo biti tudi robni pogoji na robovih, $T(x = 0, t) = g_0(t)$ ter $T(x = a, t) = g_1(t)$. Difuzijsko enačbo najpreprosteje aproksimiramo z (za zapis uporabimo generično funkcijo $u(x, t)$):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\kappa} = D \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + Q + O_g(\kappa + h^2) \quad (1)$$

kjer štejemo z indeksom n , kjer definiramo tudi maksimalni N ter je $0 \leq n \leq N$ za časovne sloje v razmikih $\Delta t = \kappa$, z indeksom m pa označimo krajevne točke, $0 \leq m \leq M$ v enem sloju z razmaki $\Delta x = h$. Ob času $t = 0$ je z začetnim pogojem podan prvi sloj, $n = 0$, iz njega izračunamo drugi sloj, in tako naprej. Enačba (1) velja za vse notranje točke, obe robni točki pa določata robna pogoja. Ta eksplicitna shema je preprosto izvedljiva

$$u_m^{n+1} = u_m^n + r (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + \kappa Q$$

in stabilna za $r = D\kappa/h^2 \leq 1/2$, ni pa posebno točna, saj je v časovnem odvodu le prvega reda. Nekoliko točnejša postane za $r = 1/6$, vendar napredujemo pri tem koraku zelo počasi, saj predifundira rešitev šele v $6N^2$ korakih od enega konca krajevnega intervala do drugega.

Boljša je *Crank-Nicholsonova shema*, ki je drugega reda v času: časovno diferenco na levi strani enačbe (1) izrazimo z aritmetično sredino krajevnih diferenc v sloju n in sloju $n + 1$.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\kappa} = D \frac{1}{2} \left[\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right] + Q + O_g(\kappa^2 + h^2)$$

Novih vrednosti v sloju $n + 1$ ne dobimo eksplicitno, pač pa kot rešitve tridiagonalnega sistema enačb. Ker je časovna zahtevnost takega sistema le $\sim M$, se z računom ne zamudimo dosti dlje, stabilnost pa je zagotovljena za poljubno velik korak. Ker rešujemo enačbo s konstantnimi koeficienti, je tudi matrika sistema vedno ista. Preredimo enačbo, da imamo na levi funkcijo v prihodnosti in na desni v sedanjosti:

$$u_m^{n+1} + r \frac{1}{2} [u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}] = u_m^n + r \frac{1}{2} [u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n] + \kappa Q.$$

To lahko še bolj kompaktno zapišemo v matrični obliki: Vrednosti funkcije u v točkah x_m uredimo v (M-1)-dimenzionalen vektor:

$$\vec{u}^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{M-1}^n)^T$$

in sistem prepisemo v matrično obliko

$$\left(1 - \frac{r}{2} \underline{A}\right) \vec{u}^{n+1} = \left(1 + \frac{r}{2} \underline{A}\right) \vec{u}^n + \vec{b} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kjer je vektor \vec{b} napolnjen z robnima pogoje (in po potrebi izviri Q)

$$\vec{b} = \left(\frac{r}{2}(u_0^n + u_0^{n+1}) + \kappa Q, \kappa Q, \dots, \frac{r}{2}(u_M^n + u_M^{n+1}) + \kappa Q \right)^T$$

Dobili smo torej matrični sistem, ki ga moramo rešiti v vsakem časovnem koraku, da iz stanja \mathbf{u}^i dobimo stanje \mathbf{u}^{i+1} , kar najlažje rešimo kar z Thomasovim algoritmom, ker je matrika tridiagonalna.

Nihanje strune opisuje enačba

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq a$$

kjer sta predpisana začetni odmik $u(x, t = 0) = f(x)$ in začetna hitrost $\partial u / \partial t|_{t=0} = g_{0,1}(x)$, na robovih pa je struna vpeta in je torej odmik identično enak nič. Za valovno enačbo obstaja stabilna eksplicitna metoda drugega reda v času. Dobimo jo, če v enačbi (1) zapišemo oba odvoda kot

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\rightarrow \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\kappa^2} + O_g(\kappa^2), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\rightarrow \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} + O_g(h^2). \end{aligned}$$

Vrednosti na časovnem sloju $n + 1$ izrazimo s slojema n in $n - 1$ in analogno za krajevni odvod:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + \left(\frac{c\kappa}{h}\right)^2 [u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n] + O_g(h^2 + \kappa^2).$$

Začetna sloja dobimo iz dveh začetnih pogojev: za funkcijo in za njen časovni odvod. V posebnem primeru, ko so začetne hitrosti povsod enake 0, morata biti sloja $n = 1$ in $n = -1$ enaka in velja

$$u_m^1 = u_m^0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c\kappa}{h}\right)^2 \cdot (u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0).$$

Metoda je stabilna za $\kappa c/h \leq 1$ (*Courantov pogoj*), kar pomeni, da zadošča $\sim N$ korakov za pot vala od enega konca intervala do drugega. Večji korak omogočajo implicitne metode, vendar z njimi ne moremo pridobiti dosti.

Naloga: Zasledovali bomo časovni razvoj dveh problemov z robnimi pogoji I. vrste.

1. Poišči temperaturni profil plasti, ki ima v začetku povsod temperaturo okolice, le med $0.2a$ in $0.4a$ je segreta na T_0 . Nariši temperaturo plasti za različne čase in primerjaj rezultate v odvisnosti od velikosti koraka κ in h . Uporabi metodo FTCS ali Crank-Nicholsonovo metodo. Dodatno uporabi obe metodi in ju primerjaj.
2. Poišči obliko strune, ki ima v začetku trikotno obliko z vrhom pri $x = 0.4a$, za čase $\omega_1 t / \pi = 0$ do 2 za različne velikosti koraka κ in h . Začetna hitrost naj bo povsod 0.

2 Temperaturno polje v homogeni plasti

Obravnaval sem problem temperaturnega polja $u(x, t)$ v homogeni plasti končne debeline a . Enačba, ki opisuje ta enodimenzionalni problem prevajanja toplote, je:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c'} \quad (2)$$

kjer je D termična difuznost, q specifični toplotni izvor, ρ gostota in c' specifična toplota. V moji nalogi je $q = 0$, zato je $Q = 0$ v diskretizirani obliki. Začetni pogoj je $u(x, t = 0) = f(x)$, robna pogoja pa sta $u(x = 0, t) = g_0(t)$ in $u(x = a, t) = g_1(t)$. V konkretnem primeru je plast na začetku pri temperaturi okolice (privzel sem 0), razen med $0.2a$ in $0.4a$, kjer je segreta na u_0 . Robova plasti sta ves čas na temperaturi okolice (0).

2.1 Uporabljene metode

2.1.1 Metoda FTCS (Forward Time Centered Space)

EksPLICITNA metoda FTCS je dana z diskretizacijsko shemo:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\kappa} = D \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \quad (3)$$

oziroma preurejeno:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + r (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (4)$$

kjer je $r = D\kappa/h^2$. Metoda je pogojno stabilna in zahteva $r \leq 1/2$.

2.1.2 Crank-Nicolsonova metoda

Implicitna Crank-Nicolsonova metoda je drugega reda točnosti v času in je brezpogojno stabilna. Časovno diferenco na levi strani enačbe (1) sem izrazil z aritmetično sredino krajevnih diferenc v sloju n in $n+1$:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\kappa} = \frac{D}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) \quad (5)$$

Preureditev vodi do sistema linearnih enačb za vrednosti u_m^{n+1} , ki ga je treba rešiti v vsakem časovnem koraku. V matrični obliki:

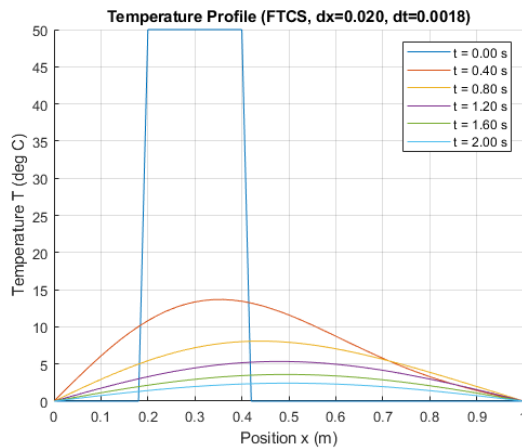
$$\left(I - \frac{r}{2}A\right) \mathbf{u}^{n+1} = \left(I + \frac{r}{2}A\right) \mathbf{u}^n + \mathbf{b} \quad (6)$$

kjer matrika A predstavlja diskretiziran prostorski odvod.

2.2 Rezultati

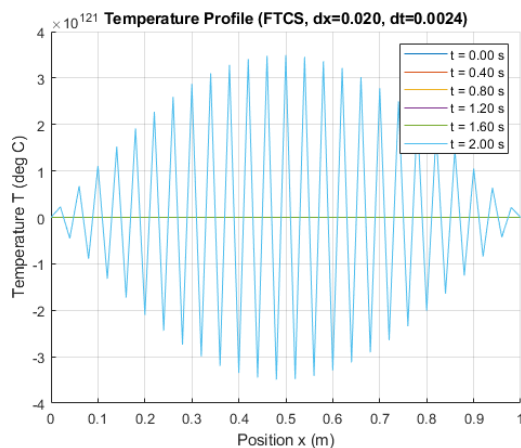
Za simulacijo sem privzel dolžino plasti $a = 1.0$, termično difuznost $D = 0.1$ in začetno temperaturo segretega dela $u_0 = 50$. Simulacije sem izvedel do časa $t_{max} = 2.0$.

Na Sliki 1 je prikazan časovni razvoj temperaturnega profila z metodo FTCS pri stabilnem koraku ($r = 0.45$). Opazil sem pričakovano difuzijo toplote iz segretega območja in postopno ohlajanje celotne plasti proti temperaturi robov.



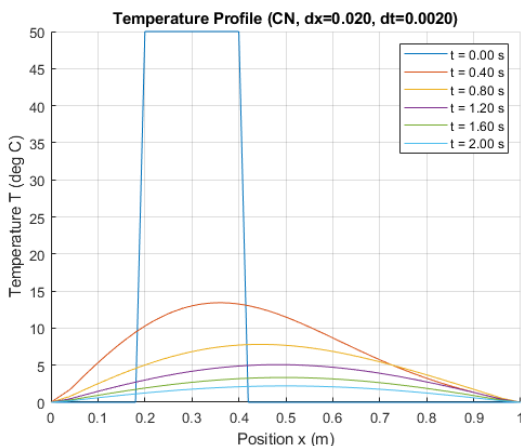
Slika 1: Temperaturni profil $u(x, t)$ z metodo FTCS ($h = 0.02, \kappa \approx 0.0018, r = 0.45$) ob različnih časih.

Če sem za metodo FTCS izbral časovni korak κ , ki ne zadošča stabilnostnemu pogoju (npr. $r = 0.6$), sem opazil numerično nestabilnost, kot je prikazano na Sliki 2. Rešitev razvije ne fizikalne oscilacije, ki hitro narastejo.



Slika 2: Primer nestabilne rešitve $u(x, t)$ z metodo FTCS ($h = 0.02, \kappa \approx 0.0024, r = 0.6$).

Crank-Nicolsonova metoda (Slika 3) omogoča uporabo večjih časovnih korakov κ brez pojava nestabilnosti. Primerjava z metodo FTCS pri enakem prostorskem koraku h in primerljivem (ali večjem) časovnem koraku κ je pokazala, da Crank-Nicolsonova metoda nudi robustnejšo rešitev, čeprav zahteva reševanje sistema enačb v vsakem koraku.



Slika 3: Temperaturni profil $u(x, t)$ s Crank-Nicolsonovo metodo ($h = 0.02, \kappa = 0.002$) ob različnih časih.

Zmanjševanje prostorskega koraka h in časovnega koraka κ (ob ohranjanju stabilnosti za FTCS) vodi k natančnejšim rešitvam, ki boljše konvergirajo k analitični rešitvi, če bi ta bila znana.

3 Nihanje vpete strune

Obravnavajmo nihanje strune dolžine a , vpete na obeh koncih. Odmik strune $u(x, t)$ od ravnovesne lege opisuje valovna enačba:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

kjer je c hitrost valovanja na struni. Začetni odmik strune je trikotne oblike z vrhom pri $x = 0.4a$, začetna hitrost strune pa je povsod enaka nič. Robna pogoja sta $u(0, t) = 0$ in $u(a, t) = 0$.

3.1 Uporabljena metoda

Uporabil sem eksplisitno diferenčno metodo drugega reda v času in prostoru (CTCS):

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{\kappa^2} = c^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \quad (8)$$

oziroma preurejeno:

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n - u_m^{n-1} + \left(\frac{c\kappa}{h}\right)^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (9)$$

Za izračun prvega časovnega koraka u_m^1 (ker poznam u_m^0 in $\partial u / \partial t|_{t=0} = 0$) sem uporabil:

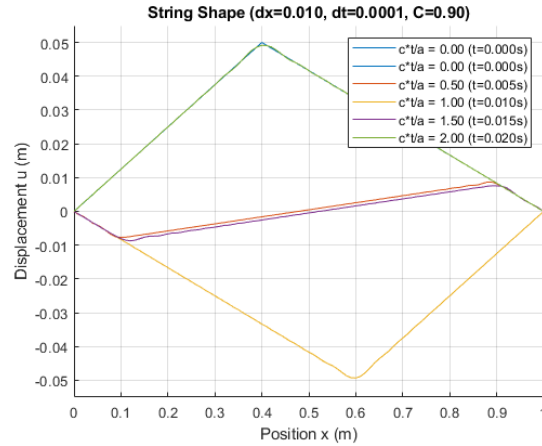
$$u_m^1 = u_m^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{c\kappa}{h}\right)^2 (u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0) \quad (10)$$

Metoda je stabilna, če je zadoščeno Courantovemu pogoju: $C = c\kappa/h \leq 1$.

3.2 Rezultati

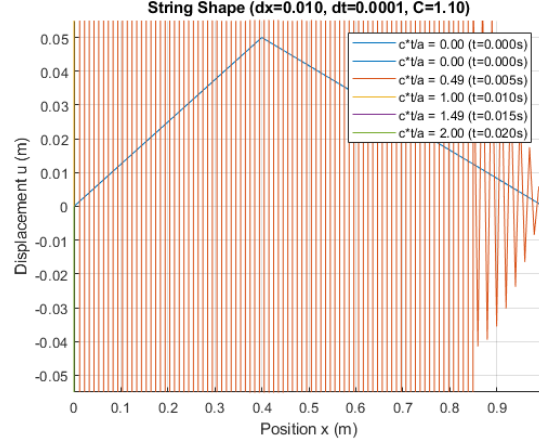
Za simulacijo sem privzel dolžino strune $a = 1.0$, hitrost valovanja $c = 100.0$ in začetno amplitudo vrha $u_{vrh} = 0.05$. Simulacije sem izvedel za čase, ki ustrezajo ct/a od 0 do 2.

Na Sliki 4 je prikazan časovni razvoj oblike strune pri Courantovem številu $C = 0.9$. Opazil sem, kako se začetna trikotna oblika razdeli na dva vala, ki potujeta proti vpetima koncema, se tam odbijeta z obrnjeno fazo in nato interferirata.



Slika 4: Oblika strune $u(x, t)$ ($h = 0.01, \kappa \approx 0.00009, C = 0.9$) ob različnih normaliziranih časih ct/a .

Če Courantov pogoj ni izpolnjen (npr. $C = 1.1$), sem opazil, da rešitev postane numerično nestabilna, kar se kaže v hitri rasti ne fizikalnih oscilacij (Slika 5).



Slika 5: Primer nestabilne rešitve $u(x, t)$ za nihanje strune ($h = 0.01, \kappa \approx 0.00011, C = 1.1$).

Zmanjševanje korakov h in κ (ob ohranjanju $C < 1$) vodi k natančnejšemu prikazu valovanja, z manj numerične disperzije. Izbira Courantovega števila blizu 1 (npr. 0.9) običajno da dobre rezultate z vidika natančnosti in učinkovitosti.

4 Zaključek

V tej domači nalogi sem preučil in primerjal različne diferenčne metode za reševanje dveh tipičnih parcialnih diferencialnih enačb: difuzijske in valovne enačbe. Implementiral sem eksplicitno metodo FTCS in implicitno Crank-Nicolsonovo metodo za difuzijsko enačbo ter eksplicitno metodo CTCS za valovno enačbo.

Rezultati obeh nalog jasno kažejo, da je natančnost numerične rešitve močno odvisna od izbrane metode ter od velikosti prostorskega koraka h in časovnega koraka κ . Za eksplicitne metode (FTCS, CTCS) je ključnega pomena izpolnjevanje stabilnostnih pogojev ($D\kappa/h^2 \leq 1/2$ za FTCS, $c\kappa/h \leq 1$ za CTCS). Kršitev teh pogojev vodi v hitro rast numeričnih napak in popolnoma ne fizikalne rešitve.

Crank-Nicolsonova metoda se je pri reševanju difuzijske enačbe izkazala za robustnejšo, saj je brezpogojno stabilna in omogoča uporabo večjih časovnih korakov κ v primerjavi z metodo FTCS. To je lahko prednost pri dolgotrajnih simulacijah, kljub temu da vsak korak zahteva reševanje tridiagonalnega sistema enačb. Izbira primerne metode in korakov je torej ključna za doseganje zelene natančnosti in stabilnosti numerične rešitve. Metode višjega reda in implicitne sheme pogosto nudijo boljše rezultate, zlasti pri problemih, kjer eksplicitne metode zahtevajo zelo majhne časovne korake za stabilnost.