

Matematično fizikalni seminar

Fourierova analiza

Teodor Jovanovski, 28241125
Profesor: doc. dr. Miha Muškinja
Junij, 2025

1 Uvod

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) dt \quad (1)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) df \quad (2)$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3)$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto $1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v naši vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije: kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) spet računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n / N), \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad (4)$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(n/(N\Delta)) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko mirno pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N . Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \leq N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + df$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2.$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2 |H_n|^2$.

Z diskretno obratno transformacijo lahko rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n / N). \quad (5)$$

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Za realne h so H paroma konjugirani, $H(-f) = H(f)^*$.

Naloga:

- Izračunaj Fourierov obrat nekaj enostavnih vzorcev, npr. raznih mešanic izbranih frekvenc (kombinacija sinusnih in kosinusnih nihanj). Primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen. Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode (kako dobro se rekonstruirani vzorec ujema z originalnim). Preveri še odvisnost rezultata od dolžine vzorca in števila točk v Fourierovi analizi.
- Dodatno: iz datoteke 'waveform.txt' (najdeš jo na Spletni učilnici predmeta) izračunaj Fourierov obrat zvočnega signala, ki je zabeležen v tej datoteki. Signal je bil posnet s frekvenco 44100 Hz, zato je Nyquistova frekvenca 22050 Hz. Signal je bil dodan tudi beli šum. Ali lahko ugotoviš, katere frekvence so prisotne v signalu?

2 Implementacija metod

Osrednji del naloge je bila implementacija diskretne Fourierove transformacije (DFT) in njene inverzne transformacije (IDFT). Definiciji, ki sem ju uporabil, sta skladni z enačbama (4) in (5) iz navodil naloge:

- Diskretna Fourierova transformacija (DFT):

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

- Inverzna diskretna Fourierova transformacija (IDFT):

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp\left(-\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

kjer je h_k zaporedje vzorcev v časovni domeni, H_n zaporedje koeficientov v frekvenčni domeni, N pa je število vzorcev. Za dejanski izračun sem uporabil funkcije iz knjižnice NumPy: 'np.fft.ifft' za DFT (ustrezno skalirano z N) in 'np.fft.fft' za IDFT (ustrezno skalirano z $1/N$), kot je opisano v priloženi Python skripti:

- `Hn = N * np.fft.ifft(hk)`
- `hk_reconstructed = (1/N) * np.fft.fft(Hn)`

Poleg same transformacije sem preverjal tudi ohranitev energije s Parsevalovo enačbo:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2 \quad (8)$$

kjer H_n ustreza definiciji iz enačbe 6. Natančnost rekonstrukcije signala h_k z zaporedno uporabo DFT in IDFT sem preverjal s primerjavo originalnega in rekonstruiranega signala.

Frekvenčni spektri so prikazani z ničelno frekvenco v sredini grafa. Močnostni spekter je prikazan kot $|H_n/N|^2$, kar ustreza $|\text{np.fft.ifft}(h_k)|^2$.

3 Analiza signalov

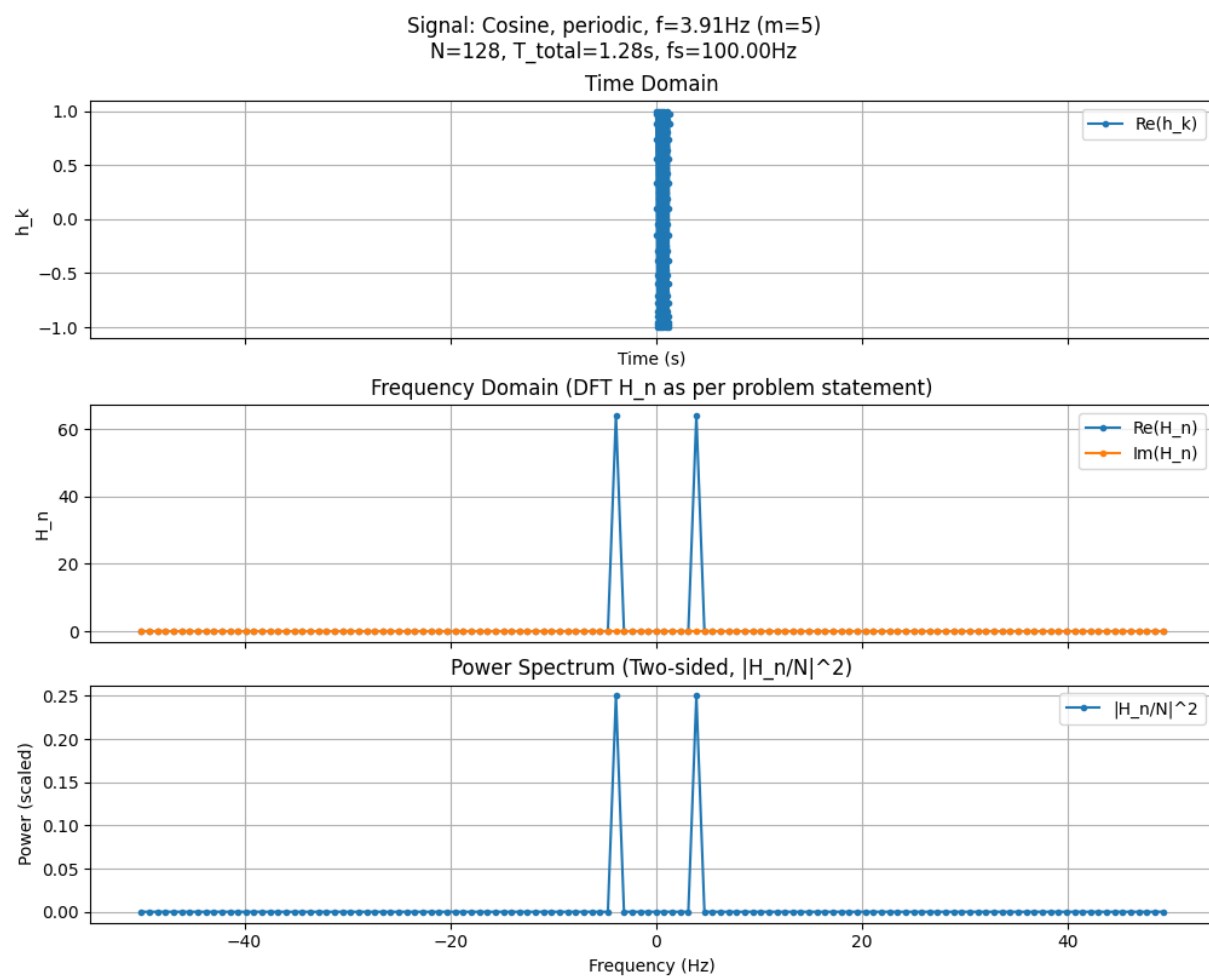
3.1 Enostavni signali

Za osnovne teste sem uporabil $N_{base} = 128$ vzorcev in časovni korak $dt_{base} = 0,01$ s. To pomeni frekvenco vzorčenja $f_s = 100$ Hz, skupno trajanje signala $T_{total} = 1,28$ s in osnovno frekvenčno ločljivost $f_0 = f_s/N_{base} \approx 0,781.25$ Hz. Nyquistova frekvenca $f_c = f_s/2 = 50$ Hz. Za vse spodnje primere je bila rekonstrukcija signala z IDFT natančna (maksimalna napaka reda 10^{-16} do 10^{-15}) in Parsevalova enačba je veljala.

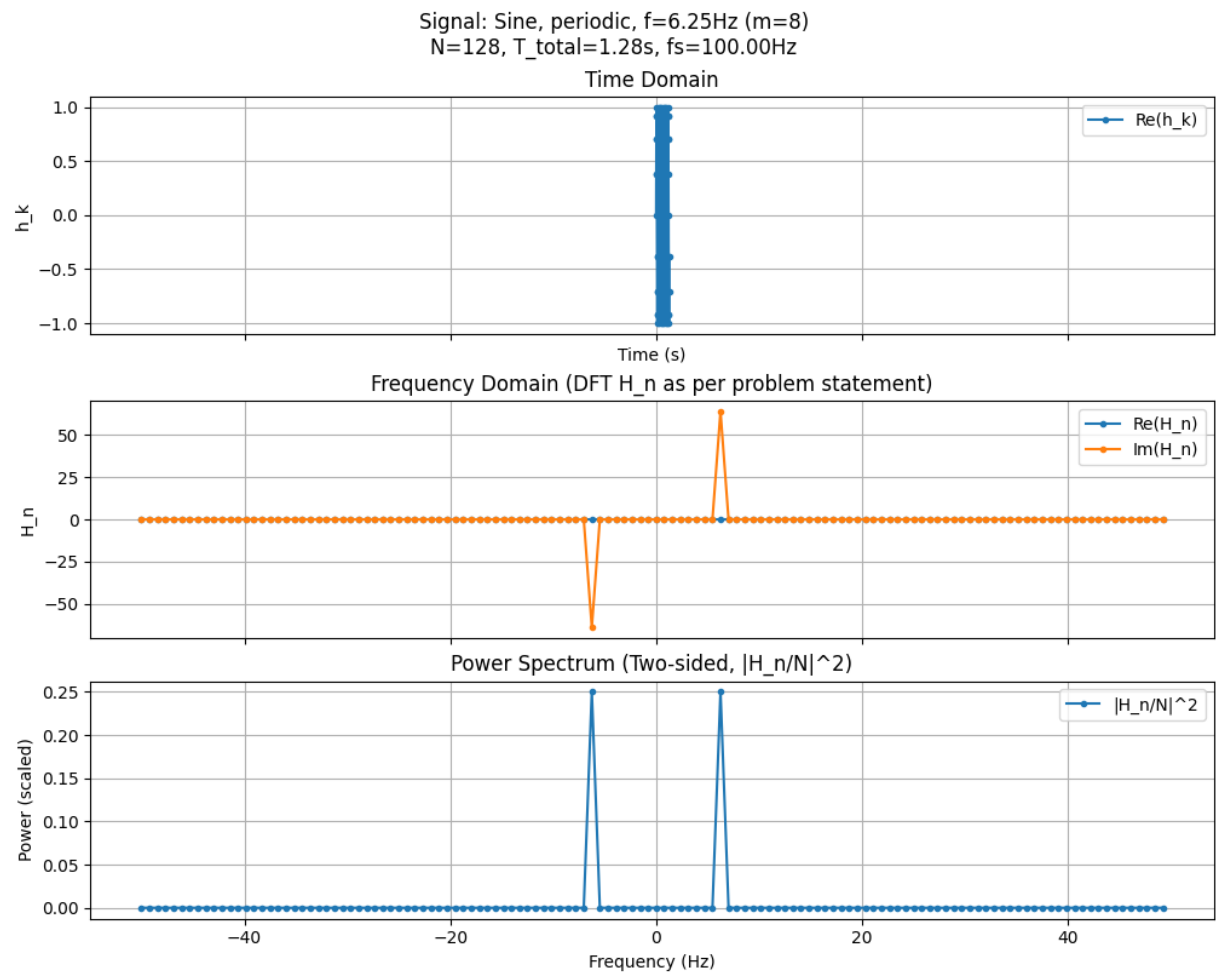
3.1.1 Periodični signali

Najprej sem analiziral signale, katerih frekvence so celoštevilski večkratniki osnovne frekvence f_0 .

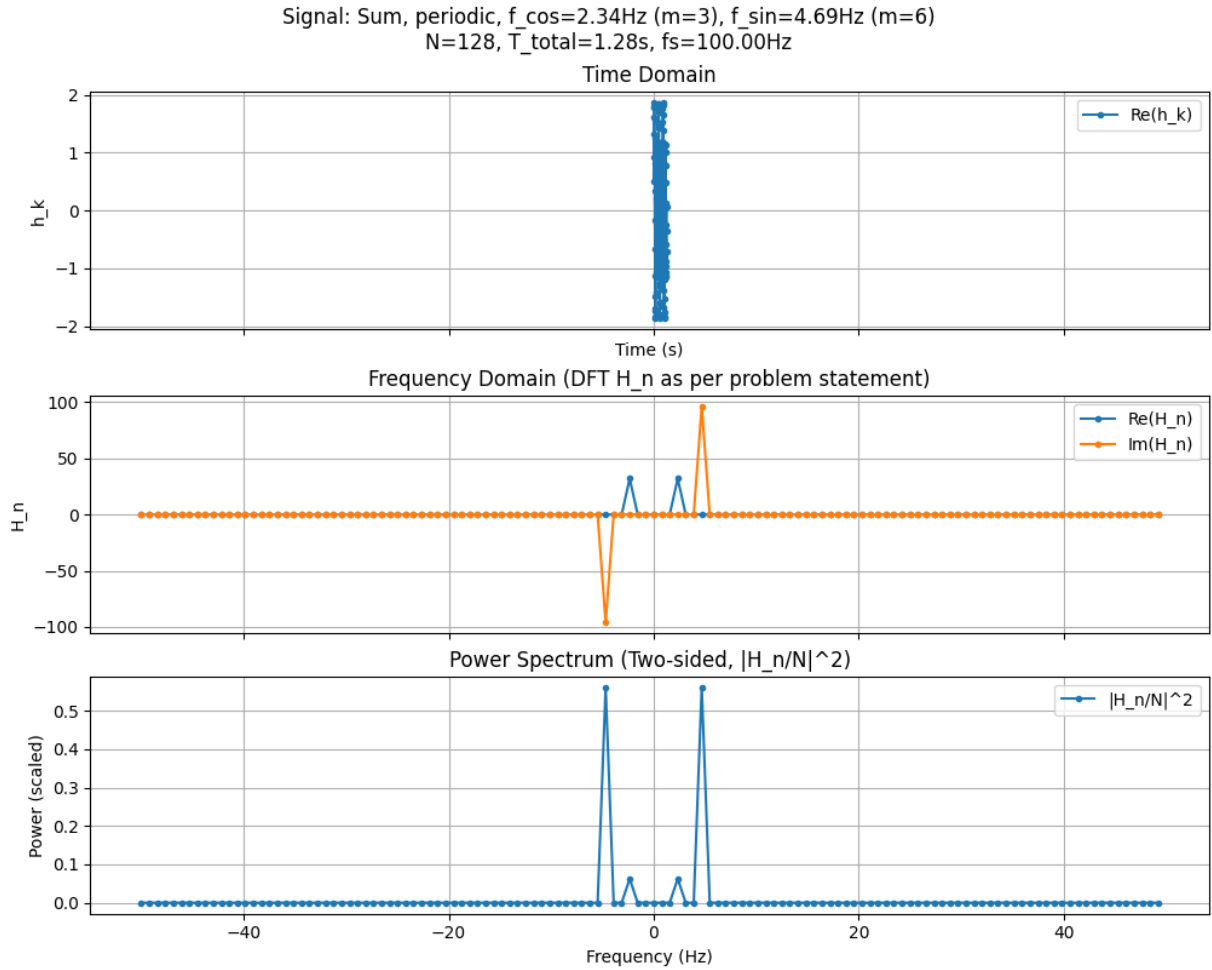
- **Kosinusni signal:** $h_k = \cos(2\pi f_{sig1} t_k)$, kjer je $f_{sig1} = 5f_0 \approx 3,91$ Hz. Kot pričakovano, je spekter H_n realen in ima ostre vrhove pri $\pm f_{sig1}$ (Slika 1).
- **Sinusni signal:** $h_k = \sin(2\pi f_{sig2} t_k)$, kjer je $f_{sig2} = 8f_0 = 6,25$ Hz. Spekter H_n je imaginaren in ima ostre vrhove pri $\pm f_{sig2}$ (Slika 2).
- **Vsota periodičnih signalov:** $h_k = 0.5 \cos(2\pi(3f_0)t_k) + 1.5 \sin(2\pi(6f_0)t_k)$. Spekter (Slika 3) jasno kaže komponente obeh signalov.



Slika 1: Analiza periodičnega kosinusnega signala ($f = 5f_0 \approx 3,91\text{ Hz}$).



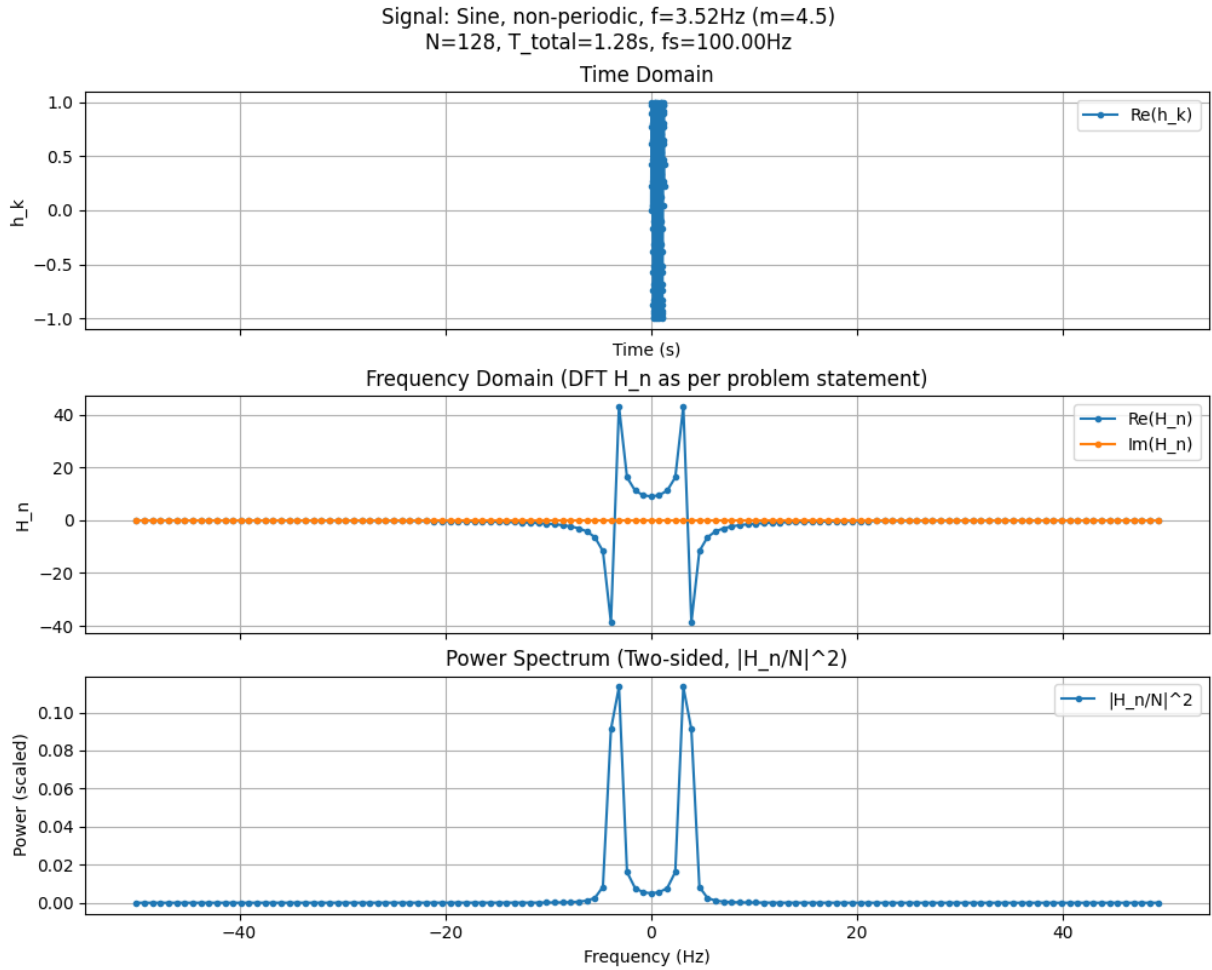
Slika 2: Analiza periodičnega sinusnega signala ($f = 8f_0 = 6,25\text{ Hz}$).



Slika 3: Analiza vsote periodičnega kosinusnega ($3f_0$) in sinusnega ($6f_0$) signala.

3.1.2 Neperiodični signal

Analiziral sem sinusni signal s frekvenco $f_{\text{sig4}} = 4.5f_0 \approx 3,52\text{ Hz}$, ki ni celoštevilski večkratnik f_0 . V spektru (Slika 4) opazim pojav spektralnega puščanja: energija signala se porazdeli med sosednje frekvenčne biné, namesto da bi bila koncentrirana v enem samem.

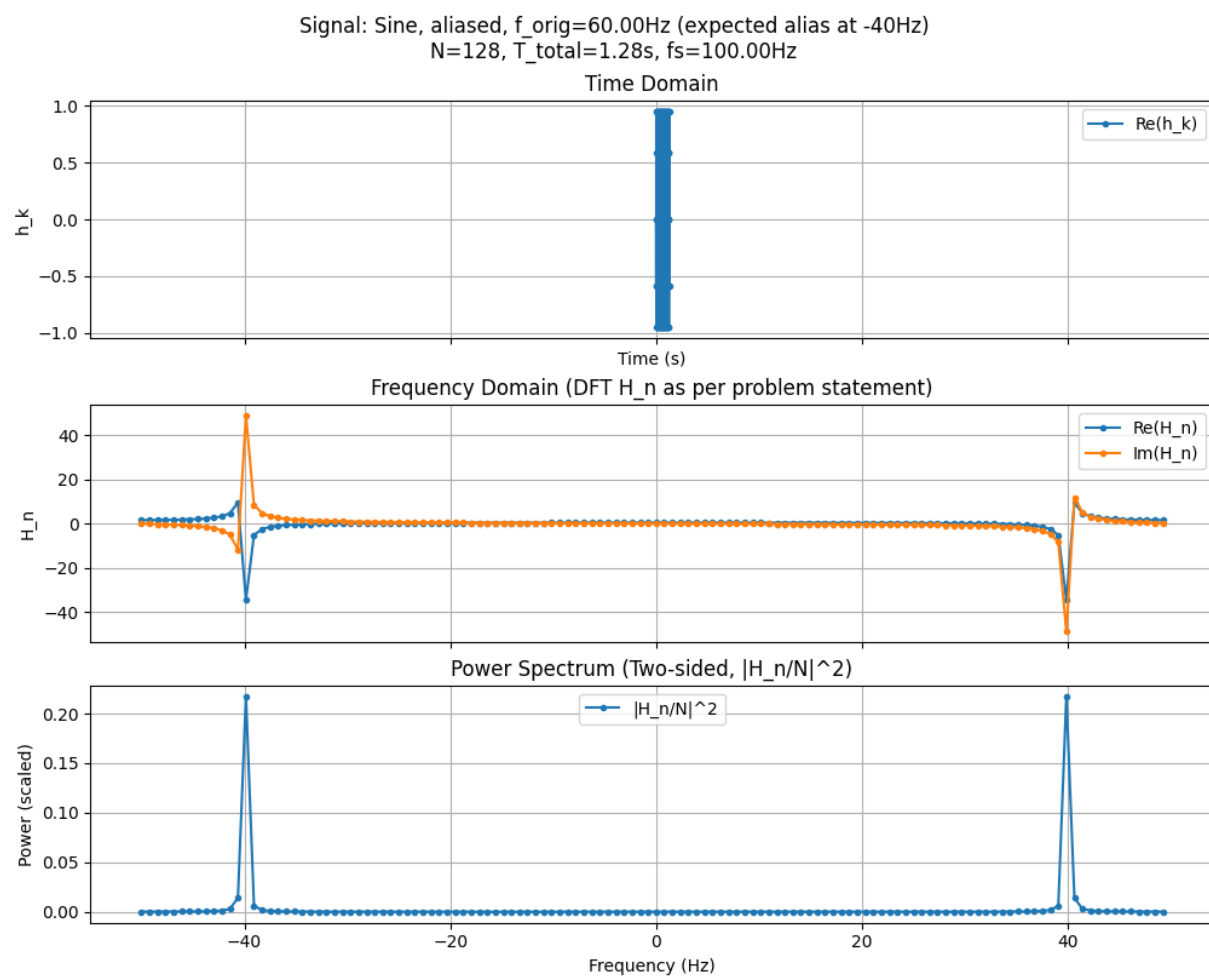


Slika 4: Analiza neperiodičnega sinusnega signala ($f = 4.5f_0 \approx 3,52\text{Hz}$), ki kaže spektralno puščanje.

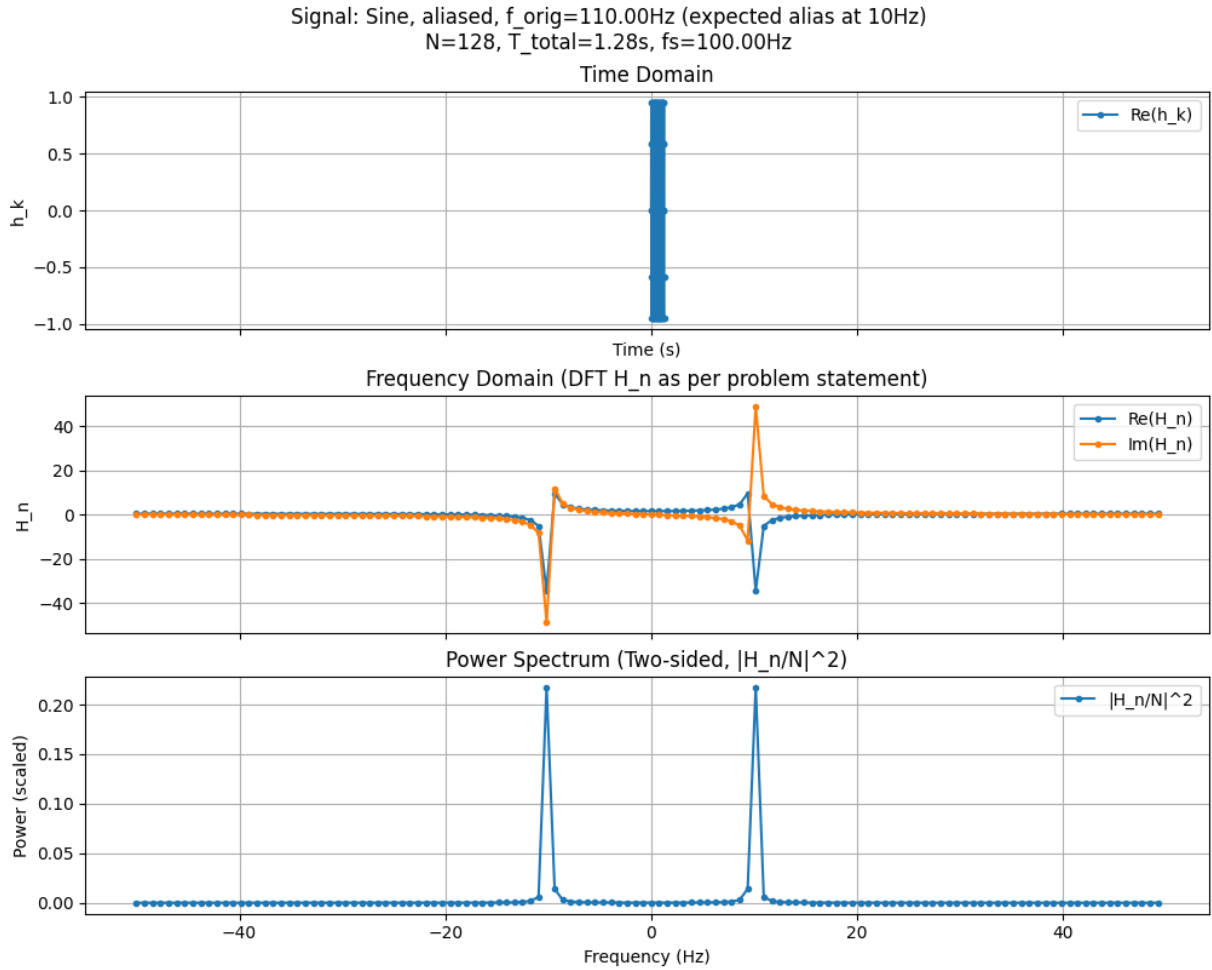
3.1.3 Potujitev (Aliasing)

Preučil sem pojav potujitve, ko frekvenca signala presega Nyquistovo frekvenco $f_c = 50\text{Hz}$.

- Signal s frekvenco $f_{\text{orig1}} = 60\text{Hz}$ ($> f_c$). V spektru (Slika 5) se ta signal pojavi pri frekvenci $f_{\text{alias1}} = f_{\text{orig1}} - f_s = 60\text{Hz} - 100\text{Hz} = -40\text{Hz}$.
- Signal s frekvenco $f_{\text{orig2}} = 110\text{Hz}$ ($> f_c$). V spektru (Slika 6) se ta signal pojavi pri frekvenci $f_{\text{alias2}} = f_{\text{orig2}} - f_s = 110\text{Hz} - 100\text{Hz} = 10\text{Hz}$.



Slika 5: Analiza sinusnega signala z originalno frekvenco 60 Hz, ki se zaradi potujitve pojavi pri -40 Hz ($f_s = 100$ Hz).



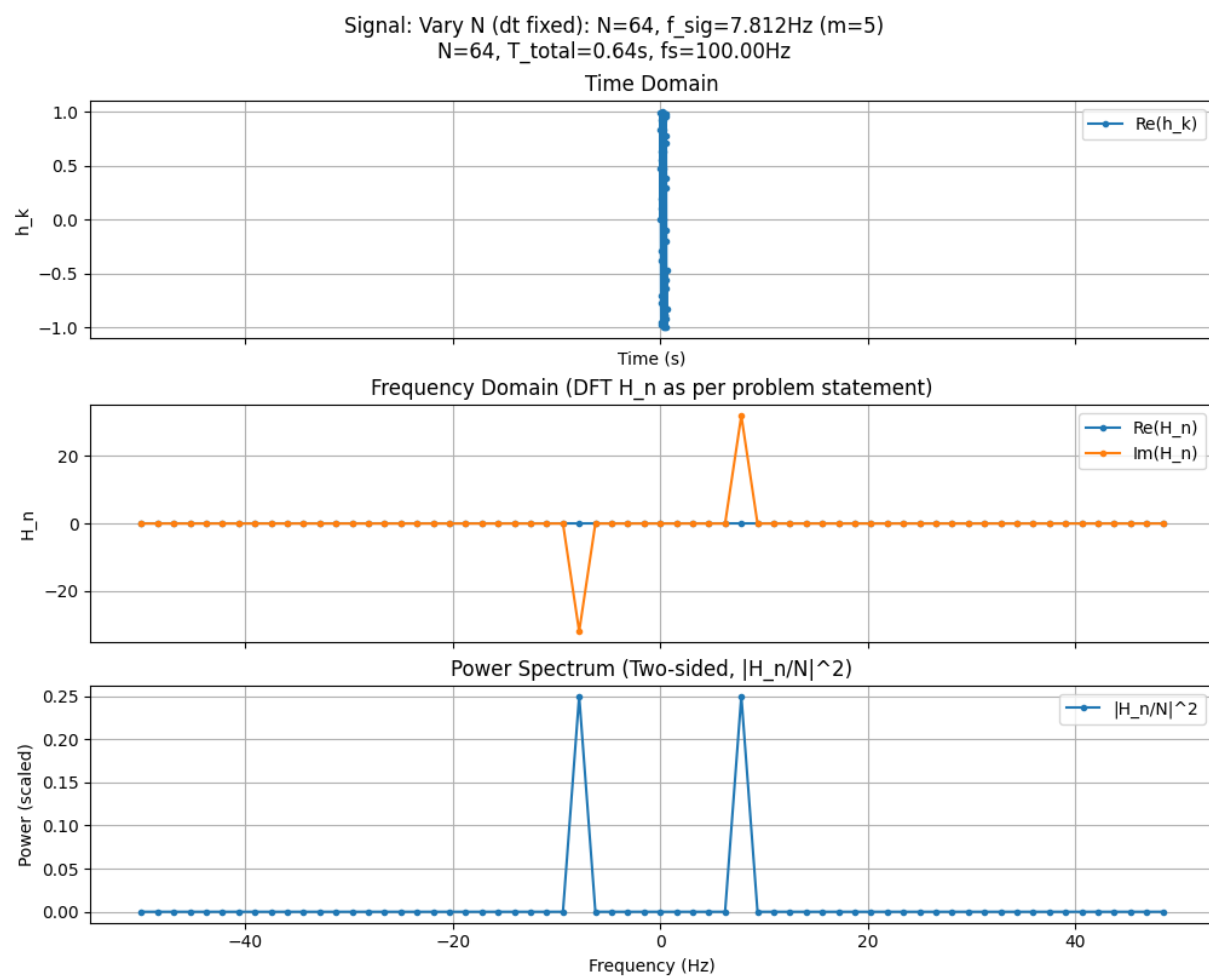
Slika 6: Analiza sinusnega signala z originalno frekvenco 110 Hz, ki se zaradi potujitve pojavi pri 10 Hz ($f_s = 100\text{ Hz}$).

3.1.4 Odvisnost od števila vzorcev N

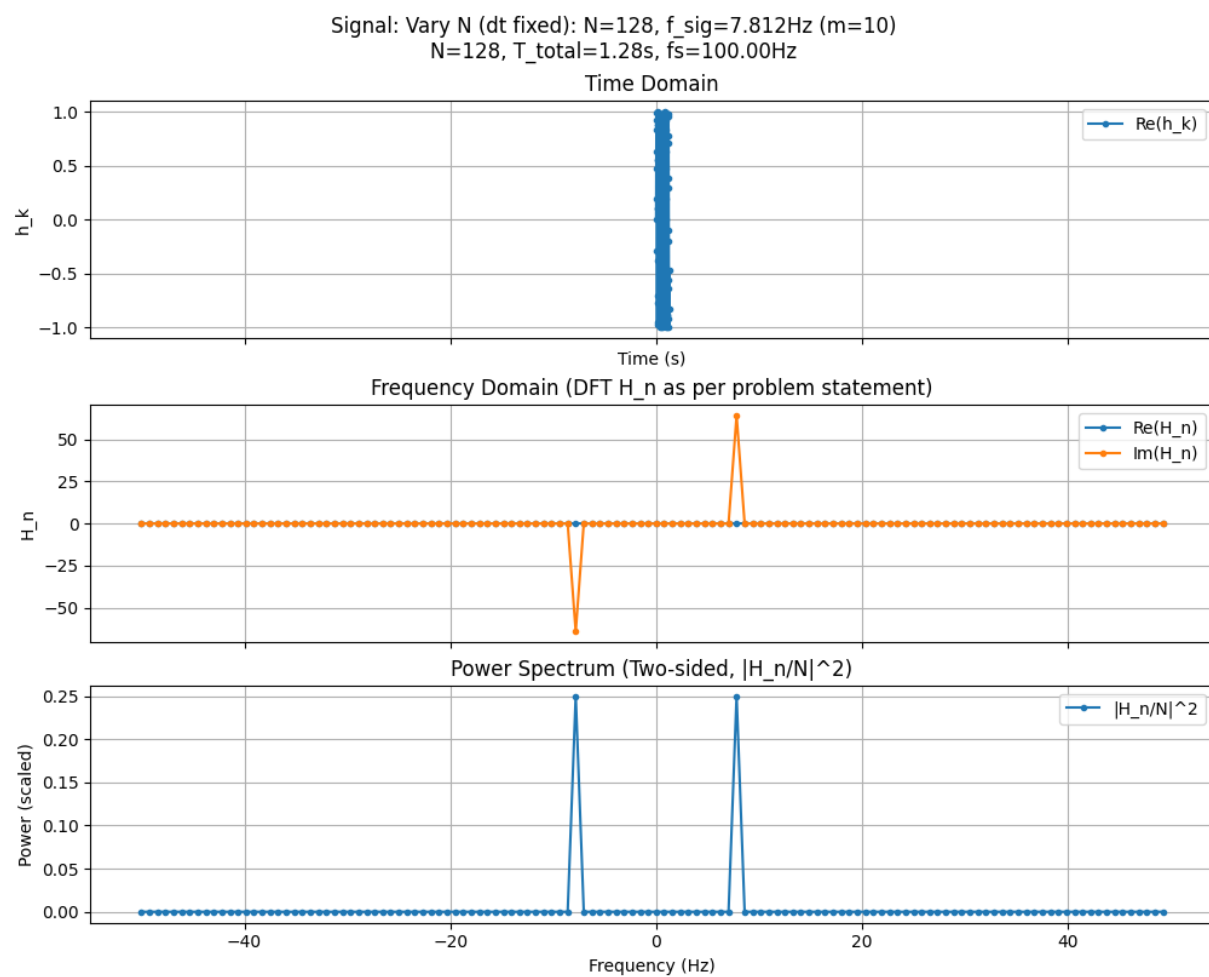
Fiksni dt , spreminjanje N (in s tem T_{total} in f_0) V tem testu sem ohranil $dt = 0,01\text{ s}$ ($f_s = 100\text{ Hz}$) in spreminjal število vzorcev N . Uporabil sem signal s frekvenco $f_{\text{sig}} \approx 7,812\text{ Hz}$.

- $N = 64$: $T_{\text{total}} = 0,64\text{ s}$, $f_0 \approx 1,56\text{ Hz}$. (Slika 7)
- $N = 128$: $T_{\text{total}} = 1,28\text{ s}$, $f_0 \approx 0,78\text{ Hz}$. (Slika 8)
- $N = 256$: $T_{\text{total}} = 2,56\text{ s}$, $f_0 \approx 0,39\text{ Hz}$. (Slika 9)

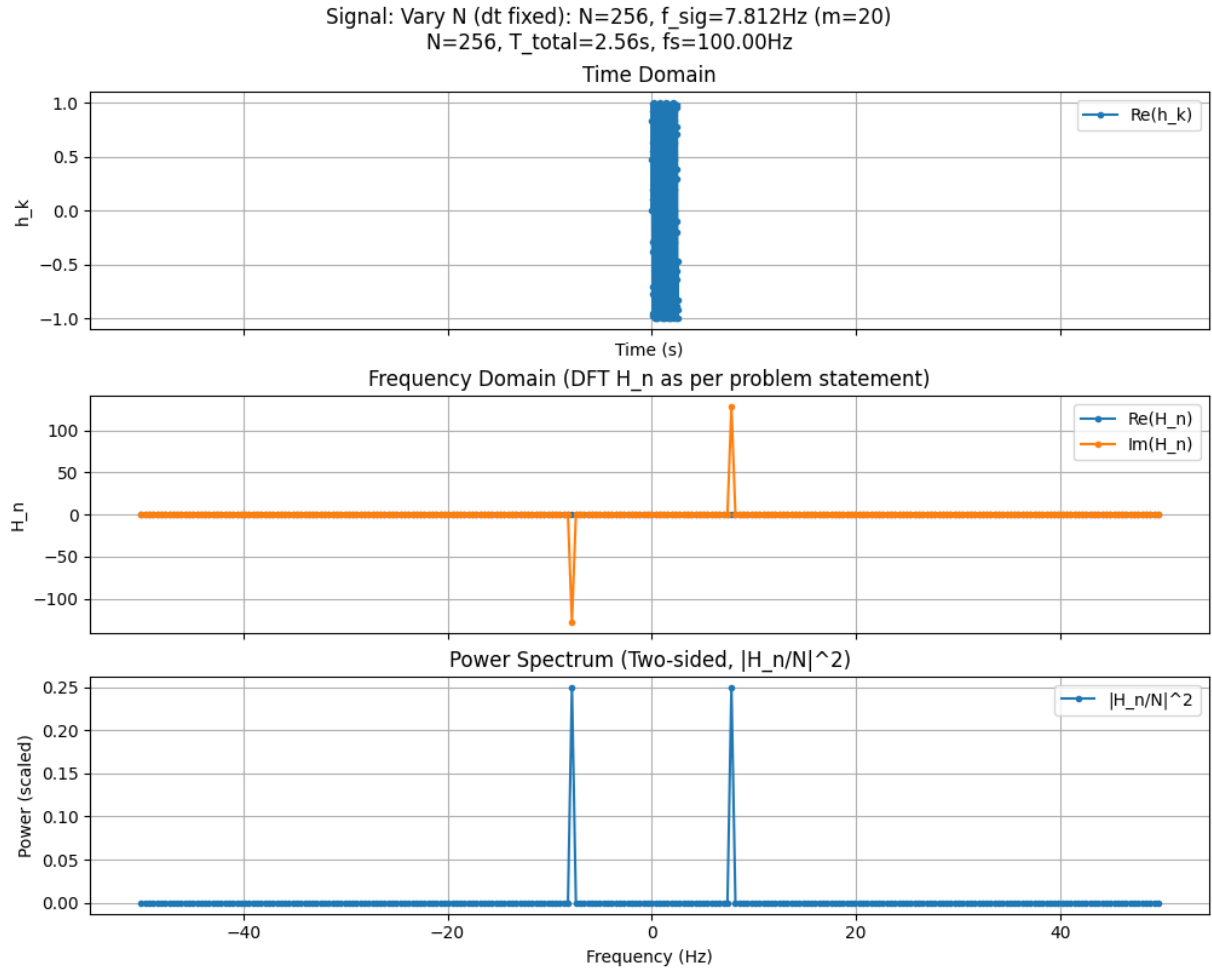
Opazil sem, da večje število vzorcev N (pri fiksnem dt) pomeni daljše skupno trajanje signala T_{total} in s tem manjšo osnovno frekvenco f_0 . To vodi do boljše frekvenčne ločljivosti (gostejši frekvenčni bini).



Slika 7: Odvisnost od N (dt fiksen): N=64.



Slika 8: Odvisnost od N (dt fiksen): $N=128$.

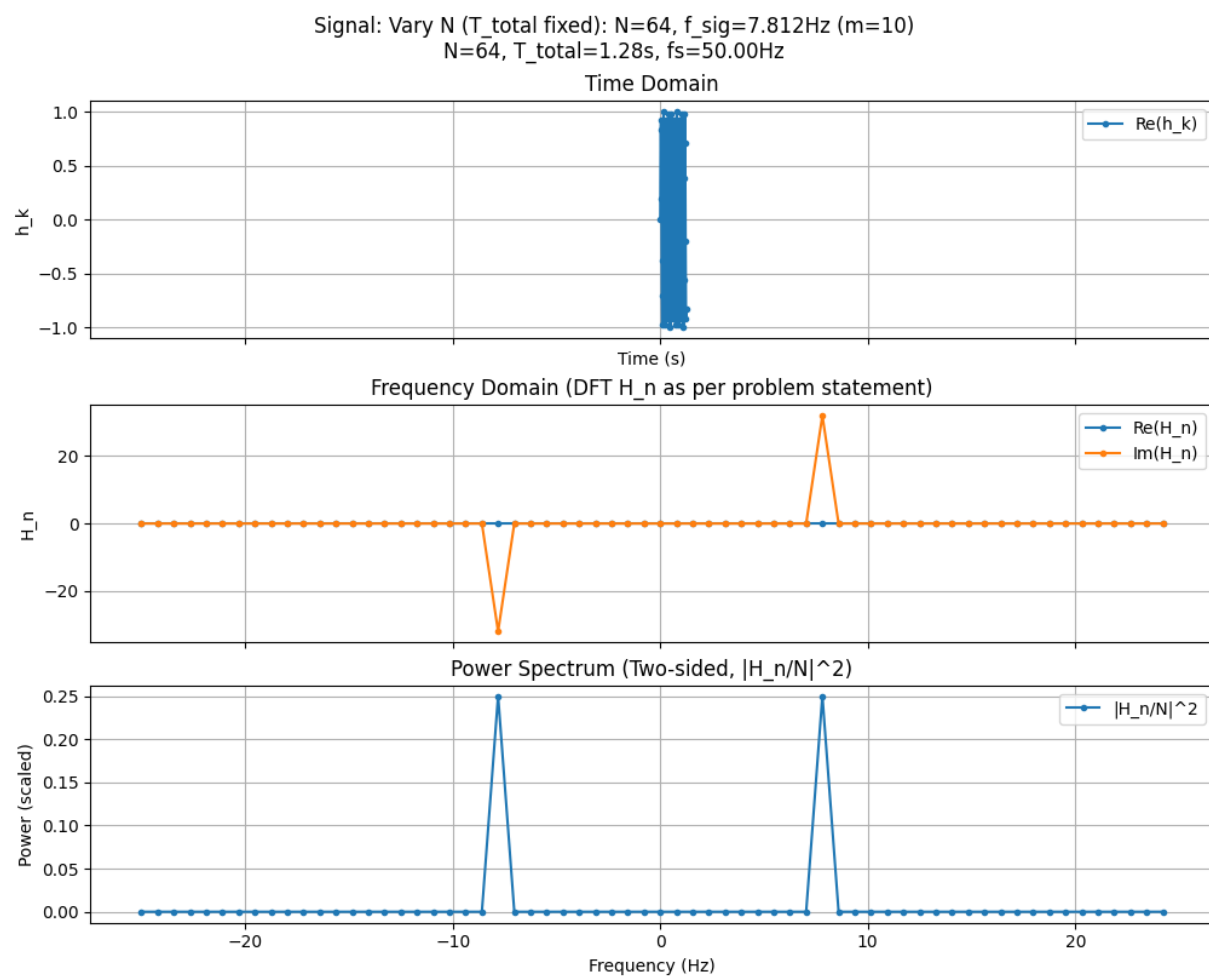


Slika 9: Odvisnost od N (dt fiksen): N=256.

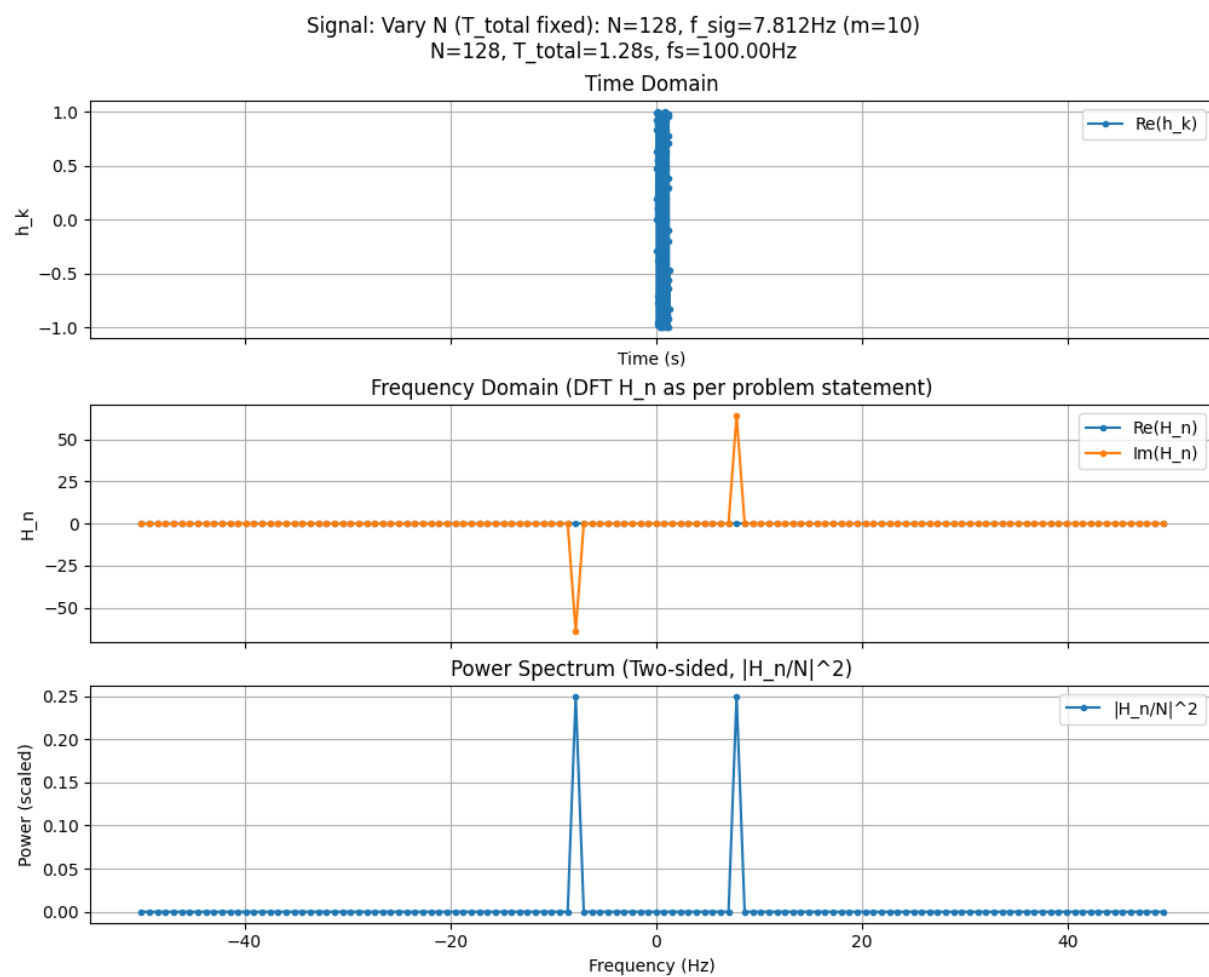
Fiksni T_{total} , spreminjanje N (in s tem dt , f_s , f_c) V tem testu sem ohranil $T_{total} = 1,28$ s in spreminjal število vzorcev N . Frekvenčna ločljivost $1/T_{total} \approx 0,781.25$ Hz je bila konstantna. Uporabil sem signal s frekvenco $f_{sig} \approx 7,812$ Hz.

- $N = 64$: $dt = 0,02$ s, $f_s = 50$ Hz, $f_c = 25$ Hz. (Slika 10)
- $N = 128$: $dt = 0,01$ s, $f_s = 100$ Hz, $f_c = 50$ Hz. (Slika 11)
- $N = 256$: $dt = 0,005$ s, $f_s = 200$ Hz, $f_c = 100$ Hz. (Slika 12)

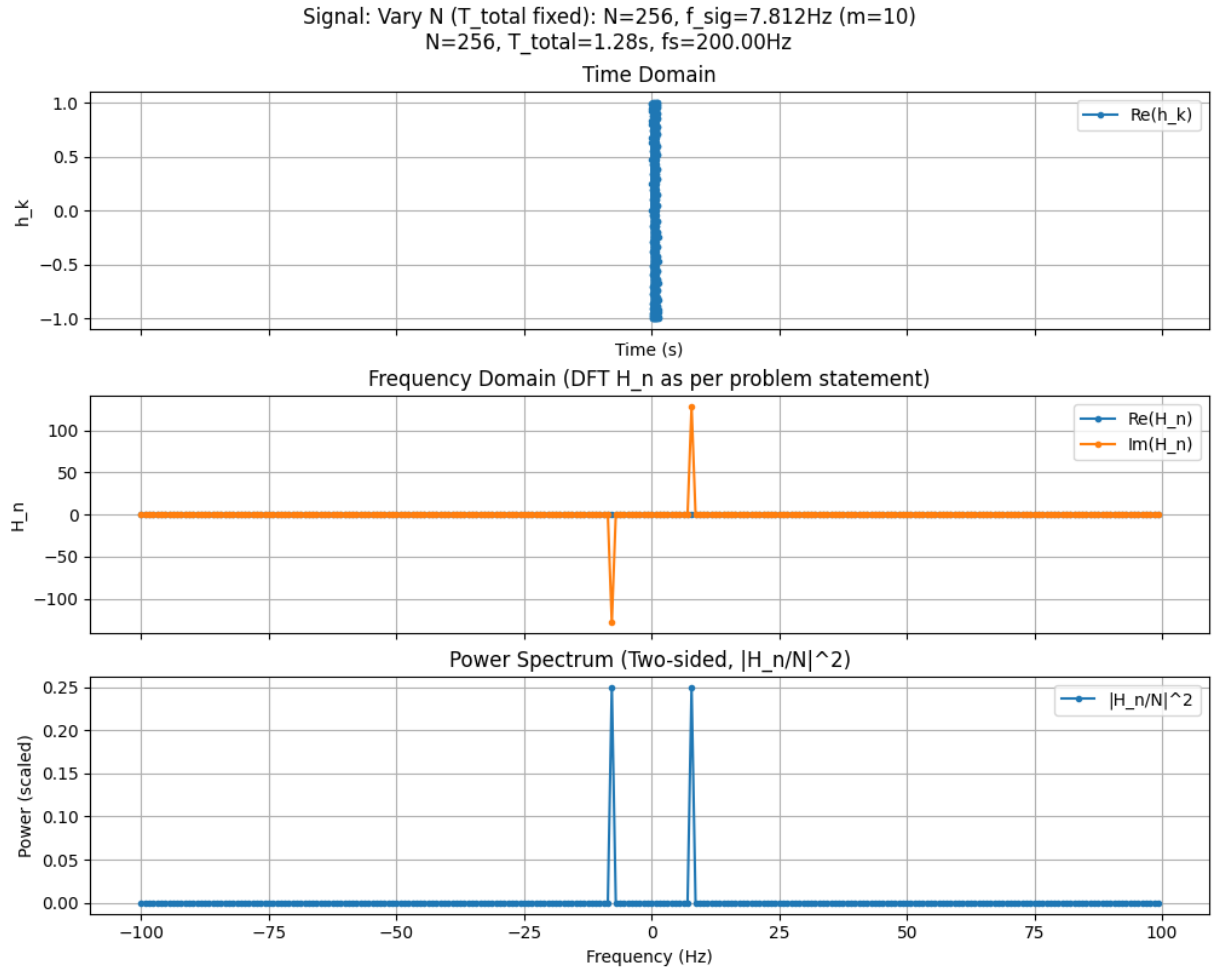
Opazil sem, da večje število vzorcev N (pri fiksnem T_{total}) pomeni manjši časovni korak dt , višjo frekvenco vzorčenja f_s in s tem višjo Nyquistovo frekvenco f_c . To omogoča predstavitev višjih frekvenc brez potujitve.



Slika 10: Odvisnost od N (T_{total} fiksen): $N=64$.



Slika 11: Odvisnost od N (T_{total} fiksen): $N=128$.

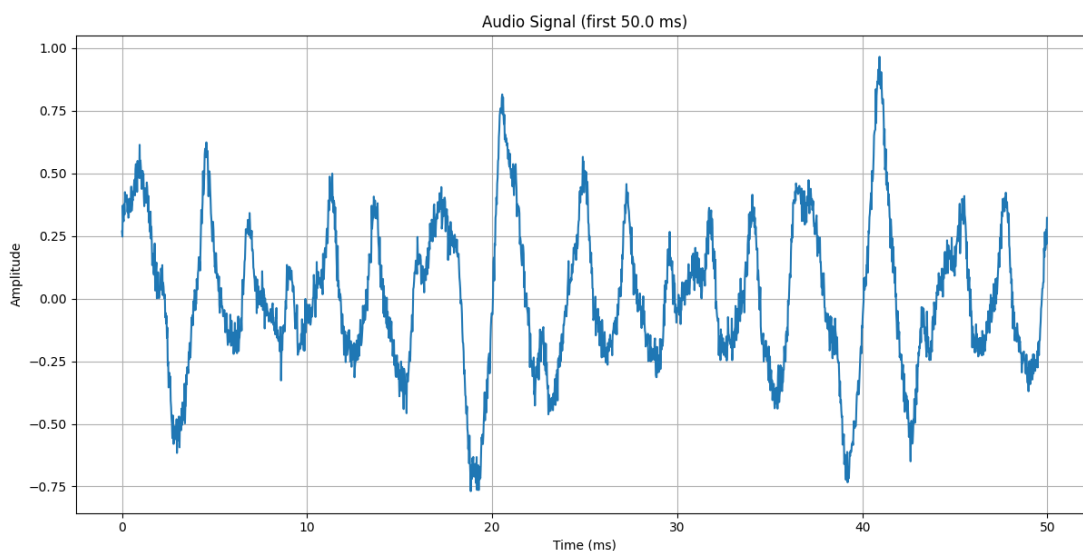


Slika 12: Odvisnost od N (T_{total} fiksen): $N=256$.

3.2 Analiza zvočnega signala

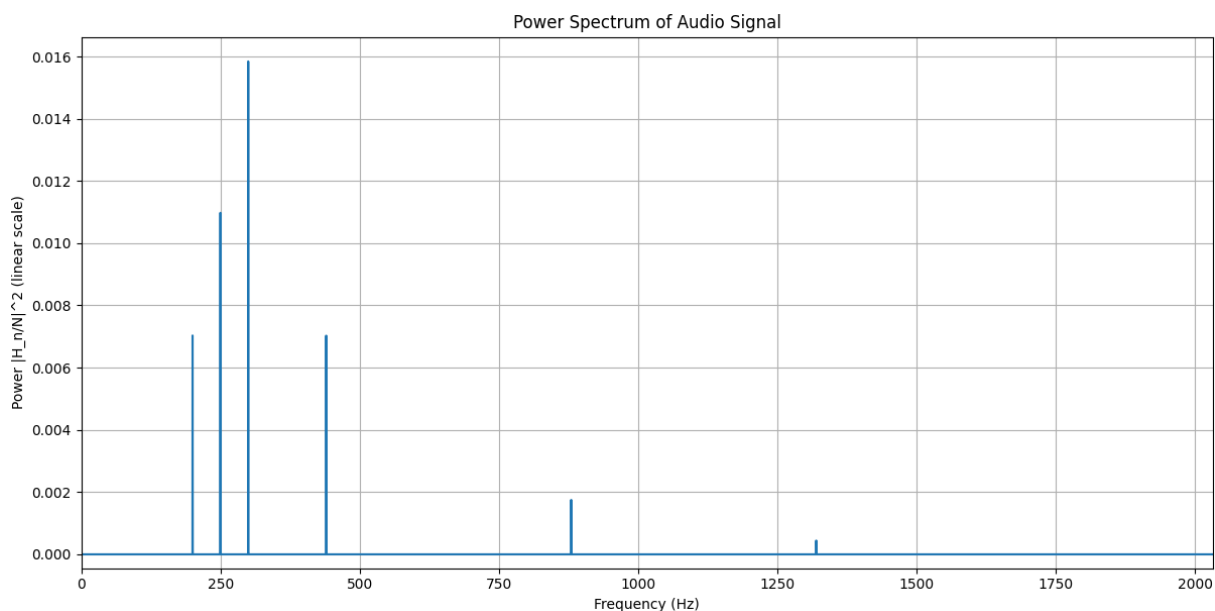
V drugem delu naloge sem analiziral zvočni signal iz datoteke 'waveform.txt'. Signal je bil vzorčen s frekvenco $f_s = 44.100\text{ Hz}$, kar pomeni Nyquistovo frekvenco $f_c = 22.050\text{ Hz}$. Datoteka vsebuje $N = 220500$ vzorcev, kar ustreza trajanju $T_{total} = 5,00\text{ s}$.

Najprej sem izrisal kratek odsek signala v časovni domeni (Slika 13).

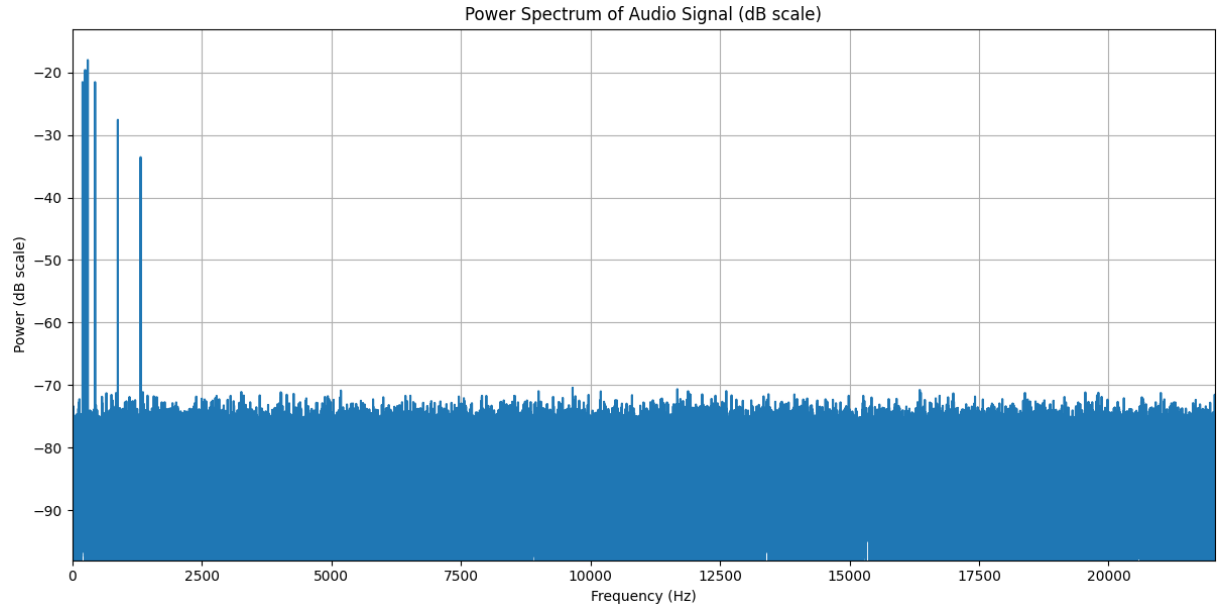


Slika 13: Prvih 50 ms zvočnega signala iz datoteke 'waveform.txt'.

Nato sem izračunal DFT celotnega signala in izrisal njegov močnostni spekter $|H_n/N|^2$, najprej na linearni (Slika 14) in nato na logaritemski (dB) skali (Slika 15). Logaritemska skala je bolj primerna za identifikacijo vrhov z različnimi amplitudami, zlasti v prisotnosti šuma.



Slika 14: Močnostni spekter zvočnega signala (linearna skala), prikazan do Nyquistove frekvence.



Slika 15: Močnostni spekter zvočnega signala (dB skala), prikazan do Nyquistove frekvence.

S pomočjo funkcije `scipy.signal.find_peaks` sem v spektru identificiral izrazite frekvenčne komponente. Detektirane frekvence in njihove moči so:

Identified prominent frequencies (using `scipy.signal.find_peaks`):

Frequency (Hz)	Power (linear)	Power (dB)
200.00	7.03e-03	-21.5
250.00	1.10e-02	-19.6
300.00	1.58e-02	-18.0
440.00	7.03e-03	-21.5
880.00	1.75e-03	-27.6
1320.00	4.42e-04	-33.5

Iz rezultatov je razvidno, da signal vsebuje več osnovnih frekvenc in nekatere njihove višje harmonike, kljub prisotnosti belega šuma, ki je bil dodan signalu po navedbah naloge. Najmočnejše komponente so pri 200 Hz, 250 Hz in 300 Hz, ter 440 Hz (standardni A4 ton) in njegovi harmoniki (880 Hz, 1.320 Hz).

4 Zaključek

Skozi to nalogo sem se podrobneje seznanil z diskretno Fourierovo transformacijo in njenimi praktičnimi vidiki. Implementacija in testiranje na preprostih signalih sta pokazala pomen pravilne izbire parametrov vzorčenja (N , dt). Opazil sem, kako periodičnost signala vpliva na ostrino vrhov v spektru, kako neperiodičnost vodi do spektralnega puščanja in kako frekvence nad Nyquistovo mejo povzročijo potujitev.

Analiza odvisnosti od števila vzorcev N je pokazala, da večanje N pri fiksnem dt izboljša frekvenčno ločljivost, medtem ko večanje N pri fiksnem skupnem trajanju T_{total} dvigne Nyquistovo frekvenco in omogoča zajem višjih frekvenc.

Analiza zvočnega signala je uspešno razkrila glavne frekvenčne komponente, kljub prisotnosti šuma. Uporaba logaritemske skale za močnostni spekter se je izkazala za ključno pri vizualizaciji manj izrazitih vrhov. Preverjanje rekonstrukcije signala in Parsevalove enačbe je potrdilo pravilnost implementacije DFT in IDFT.

Naloga je ponazorila moč DFT kot orodja za analizo signalov v frekvenčni domeni, hkrati pa opozorila na nekatere pasti, na katere moramo biti pozorni pri njeni uporabi.