Matematično fizikalni seminar

Newtonov zakon

Teodor Jovanovski, 28241125
Profesor: doc. dr. Miha Muškinja
April, 2025

1 Uvod

Gibanje masne točke v polju sil se opiše z diferencialno enačbo drugega reda

$$m\,[2]xt = F,$$

če se omejimo na gibanje vzdolž ene same koordinate x. Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m\,xt = p\,, \qquad pt = F.$$

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0) = x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$[n]yx = f(x, y, y', y'', ...),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, ...$).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor...) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je f le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak n velikosti h, $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$[2]yx = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak y_n in $v_n = y'_n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(y_n) + f(y_{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

V drugačnem zapisuje je metoda poznana tudi kot metoda "Središčne razlike" (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

kjer prvo točko y_1 izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija 'časa' x, f(x,y), le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

Naloga:

- Čim več metod uporabi za izračun preprostega matematičnega nihala $d^2x/dt^2 = -\sin x$ z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $v(0) = 0$. Primerjaj natančnost v odvisnosti od izbire koraka in poišči korak, ki zadošča za natančnost na vsaj 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost različnih metod: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in ugotovi, koliko se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Izračunaj tudi Hamiltonian, t.j. energijo $E = 1 - \cos x + \frac{1}{2}(dx/dt)^2$ in poglej kako se ohranja s časom. Dodatno lahko tudi sprogramiraš eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe (seveda pa obstajajo v ustreznih programskih paketih).

- **Dodatno**: Uporabi numerične sheme za račun poševnega meta ob prisotnosti zračnega upora sorazmernega s kvadratom hitrosti. Poišči kot, pri katerem je domet maksimalen!

2 Matematično nihalo

Pri tej nalogi sem se odločil za uporabo treh metod: Eulerjevo metodo, Verletovo metodo in metodo Runge-Kutta 4 (RK4). Definiral sem funkcije in za različne korake izračunal končni kot ter končno energijo. Vse metode sem primerjal z vgrajeno funkcijo *ode45,* ki sem jo uporabil kot referenco.

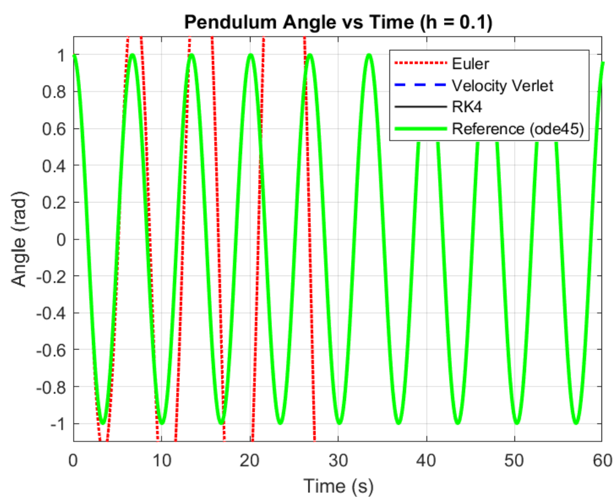
2.1 $h = 0,1$

Za večji korak je bilo pričakovati, da bojo vrednosti najbolj odstopale. To se je tudi zgodilo.

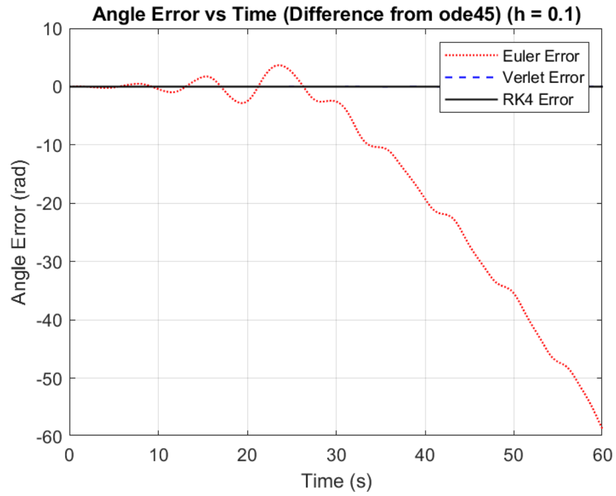
	Kot	Energija
Vgrajena	0,96234361	0,45969769
Euler	-57,88141247	3,73436480
Verlet	0,96762656	0,45965981
RK4	0,96233513	0,45969491

Tabela 1: Vrednosti kota in energije pri $T = 60$ s.

Grafi lepo prikazujejo potek simulacije.

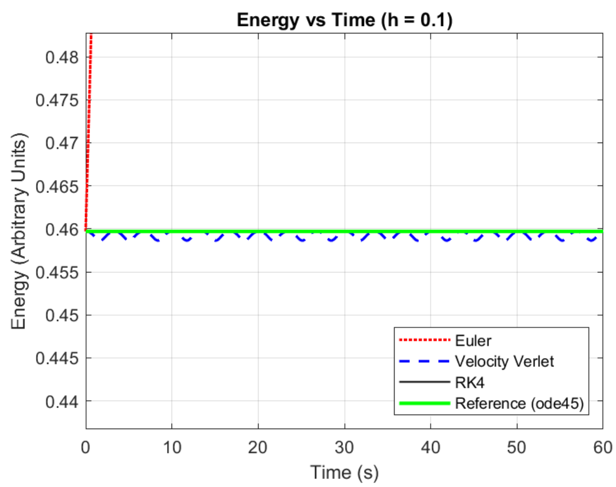


Slika 1: Vrednost kota v odvisnosti od časa.



Slika 2: Napaka kota v odvisnosti od časa.

Energija bi morala biti ves čas enaka, glede na to, da gre za preprosto matematično nihalo brez zračnega upora ali drugih izgub energije. Vendar pri simulacijah temu ni tako.



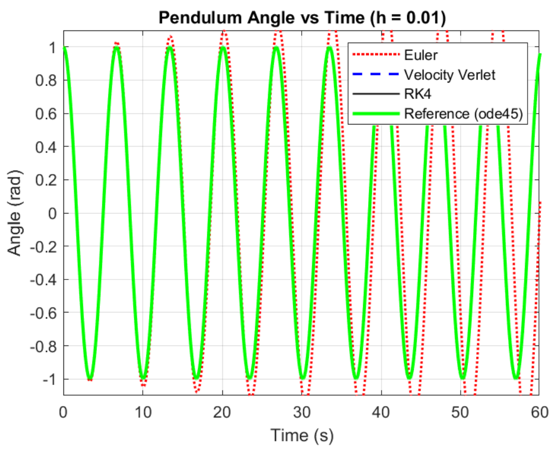
Slika 3: Energija v odvisnosti od časa.

2.2 $h = 0,01$

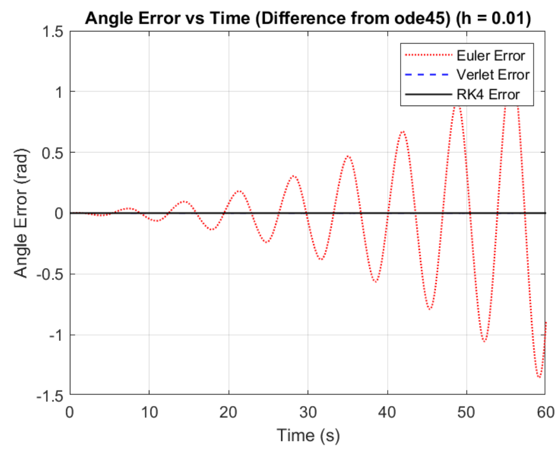
Z manjšim korakom je seveda pričakovati boljšo natančnost.

	Kot	Energija
Vgrajena	0,96234361	0,45969769
Euler	0,06853696	0,74642203
Verlet	0,96239834	0,45969725
RK4	0,96234361	0,45969769

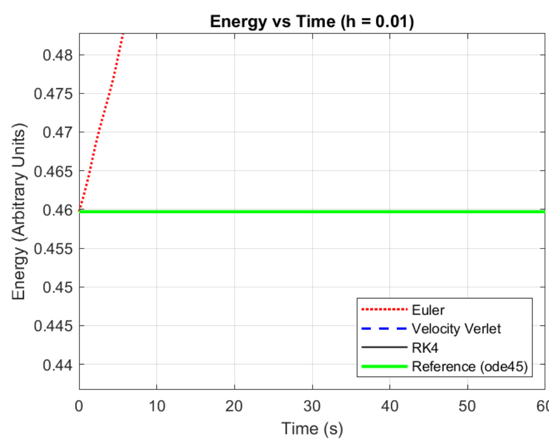
Tabela 2: Vrednosti kota in energije pri $T = 60$ s.



(a) Vrednost kota v odvisnosti od časa.



(b) Napaka kota v odvisnosti od časa.



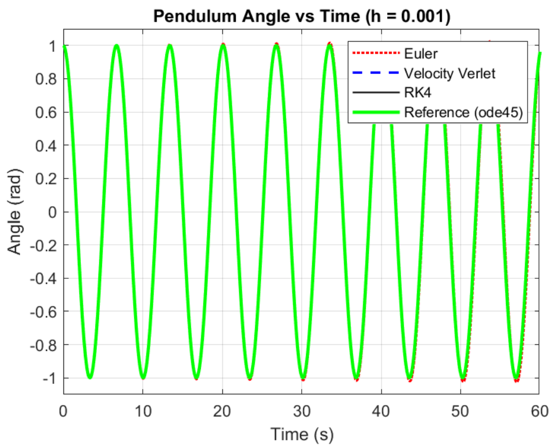
(c) Energija v odvisnosti od časa.

Slika 4: Simulacija za $h = 0,01$.

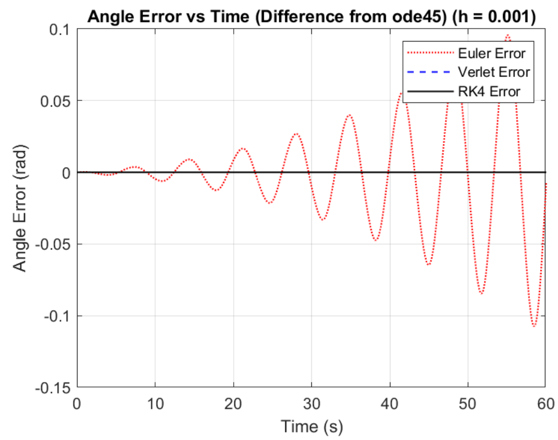
2.3 $h = 0,001$

	Kot	Energija
Vgrajena	0,96234361	0,45969769
Euler	0,95543875	0,48373005
Verlet	0,96234416	0,45969769
RK4	0,96234361	0,45969769

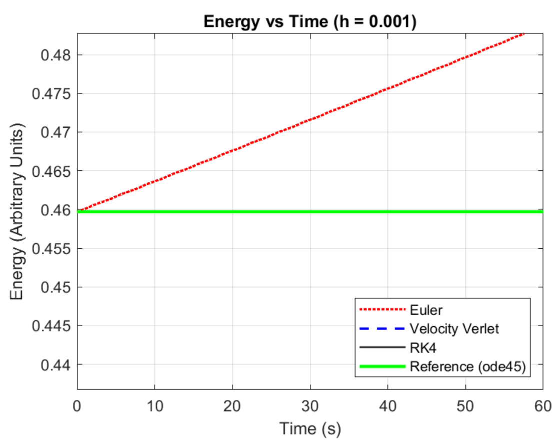
Tabela 3: Vrednosti kota in energije pri $T = 60$ s.



(a) Vrednost kota v odvisnosti od časa.



(b) Napaka kota v odvisnosti od časa.



(c) Energija v odvisnosti od časa.

Slika 5: Simulacija za $h = 0,01$.

3 Zaključek

V tej nalogi sem primerjal numerično reševanje enačbe matematičnega nihala z Eulerjevo, Verletovo in Runge-Kutta (RK4) metodo ter rezultate primerjal z referenčno rešitvijo, dobljeno z vgrajeno funkcijo *ode45*. Analiza rezultatov pri različnih časovnih korakih h je jasno pokazala razlike med metodami.

Eulerjeva metoda se je izkazala za najmanj natančno in nestabilno, z opaznim naraščanjem napake kota in predvsem velikim odstopanjem energije od začetne vrednosti, še posebej pri večjih korakih.

Verletova metoda, ki spada med simplektične integratorje, je pokazala bistveno boljšo stabilnost in ohranjanje energije. Čeprav je njena formalna natančnost reda h^2, dolgoročno dobro ohranja energijo sistema (z majhnimi nihanji, a brez drsenja), kar se odraža tudi v stabilni amplitudi nihanja.

Metoda RK4 je zagotovila najvišjo natančnost pri danem koraku h. Tako napaka kota kot odstopanje energije sta bila pri tej metodi najmanjša.

Glede na zahtevo po natančnosti na vsaj 3 decimalna mesta (tj. absolutna napaka manjša od približno 5×10^{-4} v primerjavi z referenco), sem ugotovil:

- Metoda RK4 je dosegla to natančnost že pri koraku $h = 0,1$, pri koraku $h = 0,01$ pa je bila napaka zanemarljivo majhna.
- Verletova metoda je zahtevala manjši korak; natančnost na 3 mesta je bila dosežena pri $h = 0,01$.
- Eulerjeva metoda bi za primerljivo natančnost potrebovala bistveno manjši korak od $h = 0,001$.

Izbira metode in koraka je torej odvisna od zahtevane natančnosti in pomembnosti ohranjanja fizikalnih količin, kot je energija, pri čemer Verletova in RK4 metoda predstavljata zanesljivi izbiri za simulacijo takšnih sistemov.