Matematično-fizikalni seminar 2023/24

10. naloga: Fourierova analiza

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t)\, dt \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t)\, df \tag{2}$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1. \tag{3}$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto $1/\Delta$. Za tako definiran vzorec obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v naši vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije: kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) spet računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n/N), \qquad n = -N/2, \ldots, N/2, \tag{4}$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(n/(N\Delta)) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko mirno pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ($1 \le n \le \frac{N}{2} - 1$) ustreza pozitivnim frekvencam $0 < f < f_c$, gornja polovica ($\frac{N}{2} + 1 \le N - 1$) pa negativnim, $-f_c < f < 0$. Posebna vrednost pri $n = 0$ ustreza frekvenci nič ("istosmerna komponenta"), vrednost pri $n = N/2$ pa ustreza tako f_c kot $-f_c$.

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Posebej zanimivi so trije primeri:

če je	h_k realna	tedaj je	$H_{N-n} = H_n^*$
	h_k realna in soda		H_n realna in soda
	h_k realna in liha		H_n imaginarna in liha

(ostalih ni težko izpeljati). V tesni zvezi s frekvenčnim spektrom je tudi moč. *Celotna moč* nekega signala je neodvisna od reprezentacije, Parsevalova enačba pove

$$\sum_{k=0}^{N-1} |h_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |H_n|^2$$

(lahko preveriš). Pogosto pa nas bolj zanima, koliko moči je vsebovane v frekvenčni komponenti med f in $f + \mathrm{d}f$, zato definiramo enostransko spektralno gostoto moči (*one-sided power spectral density*, PSD)

$$P_n = |H_n|^2 + |H_{N-n}|^2 \, .$$

Pozor: s takšno definicijo v isti koš mečemo negativne in pozitivne frekvence, vendar sta pri realnih signalih h_k prispevka enaka, tako da je $P_n = 2\,|H_n|^2$.

Z diskretno obratno transformacijo lahko rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n/N). \tag{5}$$

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Za realne h so H paroma konjugirani, $H(-f) = H(f)^*$.

Naloga:

- Izračunaj Fourierov obrat nekaj enostavnih vzorcev, npr. raznih mešanic izbranih frekvenc (kombinacija sinusnih in kosinusnih nihanj). Primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen. Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode (kako dobro se rekonstruirani vzorec ujema z originalnim). Preveri še odvisnost rezultata od dolžine vzorca in števila točk v Fourierovi analizi.

- Dodatno: iz datoteke 'waveform.txt' (najdeš jo na Spletni učilnici predmeta) izračunaj Fourierov obrat zvočnega signala, ki je zabeležen v tej datoteki. Signal je bil posnet s frekvenco 44100 Hz, zato je Nyquistova frekvenca 22050 Hz. Signal je bil dodan tudi beli šum. Ali lahko ugotoviš, katere frekvence so prisotne v signalu?