

Eksperimentalna fizika delcev in jedra

Skripta po predavanjih

T. Jovanovski

23. oktober 2025

This page intentionally left blank.

1 Pregled dela

Osrednji predmet preučevanja eksperimentalne fizike delcev in jedra so osnovni gradniki snovi in interakcije med njimi. Ker teh delcev ne moremo opazovati neposredno, jih preučujemo s pomočjo visokoenergijskih trkov, v katerih nastajajo novi, pogosto kratkoživi delci. V tem poglavju bomo na kratko pregledali osnovne koncepte, ki so temelj za eksperimente v tej veji fizike.

1.1 Vrste eksperimentov: Fiksna tarča in trkalniki

V osnovi ločimo dva glavna pristopa k izvedbi eksperimentov s trki delcev.

- **Eksperimenti s fiksno tarčo:** Pri tej vrsti eksperimenta curek visokoenergijskih delcev (projektilov) usmerimo v mirujočo tarčo. Ta pristop je bil zgodovinsko prvi in se še danes uporablja za specifične meritve.
- **Eksperimenti s trkalniki:** V trkalnikih krožita dva curka delcev v nasprotnih smereh, ki ju na določenih mestih (interakcijskih točkah) križamo, da pride do čelnih trkov med delci. To je danes prevladujoč pristop pri iskanju novih delcev in mejah Standardnega modela.

Ključna razlika med obema pristopoma je v energiji, ki je na voljo za nastanek novih delcev. Energija, ki se lahko pretvori v maso novih delcev ($E = mc^2$), je energija v **težiščnem sistemu** (sistem, v katerem je skupna gibalna količina enaka nič).

Primerjava energij: Pri eksperimentu s **fiksno tarčo** se mora ohraniti gibalna količina. Ker tarča miruje, ima gibajoči se projektil na začetku gibalno količino različno od nič. Zato morajo imeti tudi delci, ki nastanejo po trku, skupno gibalno količino enako začetni. To pomeni, da del začetne kinetične energije ostane v obliki kinetične energije končnih produktov, in je ne moremo porabiti za ustvarjanje mase. Uporabna energija je torej manjša od celotne energije projektila.

Po drugi strani pa v **trkalniku**, če imata delca enaki masi in nasprotno enaki hitrosti, je skupna gibalna količina sistema pred trkom enaka nič. Posledično je lahko tudi po trku enaka nič, kar omogoča, da se **celotna kinetična energija** obeh delcev porabi za nastanek mase novih delcev. S trkalniki zato dosežemo bistveno višje efektivne energije za odkrivanje masivnih delcev, kot sta na primer Higgsov bozon ali bozon Z.

1.2 Pospeševanje delcev

Da delec doseže dovolj visoko energijo za izvedbo opisanih eksperimentov, ga je treba pospešiti. Pospeševalniki so naprave, ki z uporabo močnih električnih in magnetnih polj pospešujejo nabite delce do hitrosti blizu svetlobne.

Princip delovanja: Sodobni pospeševalniki večinoma uporabljajo **izmenična (radiofrekvenčna) električna polja** v posebnih kovinskih komorah, imenovanih resonančne votline.

- Delci potujejo skozi niz takšnih votlin.

- V vsaki votlini je vzpostavljeno nihajoče elektromagnetno valovanje. Frekvence teh valov so tipično v območju radijskih ali mikrovalov (od nekaj sto MHz do nekaj GHz).
- Prehod delcev skozi votline je sinhroniziran z nihanjem polja. Ko delec vstopi v votlino, je polje usmerjeno tako, da ga pospeši. Ko zapušča votlino, polje zaniha v nasprotno smer, tako da delec v vsaki fazi pridobi dodaten sunek energije. Na ta način delec potuje "na vrhu" elektromagnetnega vala in postopoma nabira energijo.

Omeniti velja, da je hitrost širjenja valovanja v takšni votlini (fazna hitrost) manjša od hitrosti svetlobe v vakuumu ($v_f < c_0$). To je ključno, saj se mora hitrost vala ujemati s hitrostjo delca, ki je vedno manjša od c_0 , da lahko pride do efektivnega in kontinuiranega pospeševanja.

1.3 Energija in luminoznost kot ključna parametra

Uspešnost eksperimenta v fiziki delcev ni odvisna le od zasnove detektorja, temveč predvsem od zmožnosti pospeševalnika. Dva najpomembnejša parametra, ki določata doseg in natančnost eksperimentov, sta energija delcev in luminoznost.

1.3.1 Energija trkov in Livingstonov graf

Kot smo že omenili, je energija v težiščnem sistemu (E_{CM}) ključna za ustvarjanje novih, masivnih delcev. Zgodovinski razvoj pospeševalnikov kaže na izjemen, eksponencialen napredek v doseganju visokih energij, kar najlepše ponazarja **Livingstonov graf**. Ta graf prikazuje, kako se je maksimalna energija pospeševalnikov povečevala skozi čas, pri čemer je vsaka nova tehnologija omogočila skokovit porast. Ta napredek nam je omogočil prehod od preučevanja jeder do odkrivanja delcev Standardnega modela.

1.3.2 Luminoznost

Medtem ko energija določa, *katere* delce lahko ustvarimo, pa luminoznost določa, *kako pogosto* se bodo zgodili zanimivi dogodki. Luminoznost (L) je merilo za intenzivnost oziroma svetlost trkov v pospeševalniku. Višja luminoznost pomeni večje število trkov na časovno enoto. Povezavo med luminoznostjo, fizikalnim procesom in številom opazovanih dogodkov podaja temeljna enačba:

$$\frac{dN}{dt} = L \cdot \sigma \quad (1)$$

kjer je $\frac{dN}{dt}$ hitrost dogodkov, L luminoznost, σ pa **sipalni presek** (verjetnost za interakcijo, enota *barn*).

Integrirana luminoznost Ker se luminoznost med delovanjem pospeševalnika spreminja, je za analizo pomembna skupna, nabrana luminoznost. To imenujemo **integrirana luminoznost** (L_{int}):

$$L_{int} = \int L(t) dt \quad (2)$$

Celotno število dogodkov (N) je potem enako $N = L_{int} \cdot \sigma$. Iskanje redkih procesov z majhnim sipalnim presekom zahteva veliko nabrane luminoznosti.

1.4 Detekcija in analiza produktov trka

Ko v pospeševalniku pride do trka, je naslednji ključni korak ugotoviti, kaj je pri tem nastalo. To je naloga detektorja, ki obdaja točko trka. Cilj analize je rekonstruirati dogodek in izmeriti lastnosti vseh nastalih delcev.

Rekonstrukcija dogodka Prvi korak je določitev točke interakcije, t.i. **primarnega temena** (angl. *primary vertex*). Od te točke izhajajo sledi delcev, ki so nastali neposredno v trku. Številni delci so nestabilni in razpadejo zelo hitro, včasih tudi nekaj milimetrov stran od točke nastanka, kar ustvari **sekundarno teme**.

Za določanje lastnosti delcev merimo predvsem njihovo gibalno količino in energijo.

- **Gibalna količina nabitih delcev:** Celoten detektor je potopljen v **močno magnetno polje**. Nabit delec, ki leti skozi to polje, zaradi Lorentzeve sile potuje po ukrivljeni (vijačni) poti. Iz polmera ukrivljenosti (R) lahko natančno določimo gibalno količino delca (p):

$$p = qBR \quad (3)$$

kjer je q naboj delca (poznan), B pa jakost magnetnega polja (poznana). Polmer R izmerimo s pomočjo sledilnikov, ki natančno zabeležijo pot delca. Predznak naboja določi smer ukrivljenosti.

- **Energija nenabitih delcev:** Delci brez naboja (npr. fotoni, nevtroni) v magnetnem polju ne spreminjajo smeri in ne puščajo sledi v sledilnikih. Njihovo energijo merimo s kalorimetri, v katerih se delec absorbira in odloži vso svojo energijo.

Celoten sistem detektorjev, ki omogoča merjenje gibalne količine, energije in drugih lastnosti, s čimer lahko določimo **identiteto delca** (ali je elektron, mion, proton...), deluje kot kompleksen **spektrometer**.

Identifikacija razpadlih delcev Kako vemo, da je v trku nastal nek nestabilen delec (npr. bozon Z), če pa ga ne vidimo neposredno? Odgovor je v rekonstrukciji njegove mase iz delcev, na katere je razpadel. Iz izmerjenih energij (E_i) in gibalnih količin (\vec{p}_i) vseh razpadnih produktov izračunamo t.i. **invariantno maso** sistema (m_{inv}):

$$m_{inv}^2 c^4 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c \right)^2 \quad (4)$$

Ta invariantna masa je enaka masi delca, ki je razpadel.

Če v velikem številu trkov računamo invariantno maso izbranih produktov (npr. para elektron-pozitron) in jo narišemo na histogram, bomo opazili naslednje:

- **Signal:** Če je v trkih res nastajal določen delec (npr. Z z maso $\approx 91 \text{ GeV } c_0^{-2}$), se bo na histogramu pri tej vrednosti mase pojavil vrh (resonančni vrh).
- **Ozadje:** Vrh ni ostra črta (delta funkcija) zaradi **merilne nedoločenosti** pri merjenju gibalnih količin in energij. Širši kot je vrh, slabša je ločljivost detektorja. Pod vrhom in okoli njega pa se nahaja gladko porazdeljeno ozadje, ki izvira iz naključnih kombinacij delcev (angl. *random coincidences*), ki niso nastali pri razpadu iskanega delca.

Statistično značilen vrh nad pričakovanim ozadjem je dokaz za obstoj novega delca.

1.5 Osnove detektorjev delcev

Detektorji v fiziki delcev so kompleksne naprave, zasnovane z namenom, da zajamejo in izmerijo lastnosti vseh delcev, ki nastanejo v trku. Njihova zasnova temelji na osnovnih fizikalnih principih, kot je ohranitev gibalne količine, ki narekuje, da morajo biti produkti trka v splošnem porazdeljeni v vse smeri.

Zgradba in oblika Zaradi potrebe po zajetju čim večjega deleža produktov je večina sodobnih detektorjev zgrajena v **sodčasti obliki** okoli cevi, po kateri potujeta curka. Takšna zasnova, ki pokrije skoraj celoten prostorski kot (4π), zagotavlja, da nam uide čim manj delcev. Celotna struktura je pogosto ogromna, dolga tudi do 20 metrov, in je sestavljena iz več plasti, pri čemer je vsaka specializirana za merjenje določenih lastnosti delcev. Obstajajo tudi **asimetrični detektorji** (npr. pri nekaterih trkalnikih elektronov in pozitronov), ki so prilagojeni specifičnim pogojem trkov, kjer težiščni sistem ni v mirovanju glede na laboratorij.

Princip detekcije: Interakcija s snovjo Temeljni princip, na katerem delujejo vsi detektorji, je, da delec ob prehodu skozi snov z njo interagira. Za nabite delce je prevladujoč proces ionizacija – delec vzdolž svoje poti izbija elektrone iz atomov snovi, s čimer izgublja energijo.

- Količino izgubljene energije na enoto poti (dE/dx) opisuje Bethe-Blochova formula. Kot grobo pravilo velja, da delec z visoko energijo v trdni snovi izgubi približno 2 MeV cm^{-1} na enoto gostote (g cm^{-3}).
- V redkejših snoveh, kot so tekočine in plini, je izguba energije ustrezno manjša.

Sled, ki jo za seboj pusti delec, je v resnici sled elektronov in ionov, ki so nastali ob prehodu.

Sledilniki in ojačanje signala Plasti detektorja, ki so najbližje točki trka, so namenjene natančnemu določanju poti delcev.

- **Silicijevi detektorji:** Tik ob cevi s curkom se nahajajo detektorji iz polprevodniškega silicija. Ob prehodu nabitega delca v siliciju nastanejo pari elektron-vrzel. Ti detektorji omogočajo izjemno prostorsko ločljivost, reda velikosti nekaj μm , kar je ključno za natančno določitev primarnega in sekundarnih temen.
- **Plinski detektorji:** V plinskih detektorjih (npr. v žičnih komorah) je število primarnih elektron-ion parov, ki jih ustvari delec, zelo majhno in samo po sebi nezaznavno. Zato je signal treba ojačati. To dosežemo z močnim električnim poljem (npr. okoli tanke žice v valjasti komori). Elektroni, ki nastanejo pri ionizaciji, so v tem polju pospešeni do te mere, da imajo dovolj energije za nadaljnjo ionizacijo atomov plina. Sproži se proces, imenovan **ionski plaz** (angl. *avalanche*), ki prvotni signal ojača za več redov velikosti v merljiv električni pulz.

1.6 Identifikacija delcev (PID) in zmanjšanje ozadja

Merjenje gibalne količine in energije nam omogoči rekonstrukcijo invariantne mase, s katero iščemo razpade novih delcev. Vendar pa se v realnih eksperimentih soočamo z

ogromnim številom delcev, ki nastanejo v vsakem trku, in večina teh ni povezana z iskanim razpadom. To vodi do problema t.i. **kombinatoričnega ozadja**.

Predpostavimo, da želimo opazovati razpad mezona D^0 preko kanala:

$$D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \quad (5)$$

Brez dodatnih informacij bi morali vzeti vsako sled z negativnim nabojem in jo združiti z vsako sledjo s pozitivnim nabojem ter za vsak tak par izračunati invariantno maso ob predpostavki, da je prva kaon, druga pa pion. Ker v trkih nastane ogromno število pionov, bi večina teh parov predstavljala naključne kombinacije, ki nimajo ničesar skupnega z razpadom delca D^0 . Signal, ki ga iščemo, bi bil popolnoma skrit pod tem ogromnim ozadjem.

Tu nastopi ključna vloga **identifikacije delcev** (angl. *Particle Identification* - PID). To so specializirani sistemi detektorjev, ki omogočajo ločevanje med različnimi vrstami delcev (npr. med pioni, kaoni in protoni). Delujejo na podlagi različnih fizikalnih principov, kot so:

- merjenje specifične izgube energije (dE/dx),
- merjenje časa preleta (Time of Flight - ToF),
- detekcija Čerenkovovega sevanja.

Z uporabo PID lahko za vsako sled z določeno verjetnostjo rečemo: "Ta delec je najverjetneje kaon" in "Ta delec je najverjetneje pion". S tem lahko iz analize izločimo ogromno večino napačnih kombinacij. To drastično zmanjša naključno ozadje na histogramu invariantne mase in omogoči, da signal postane viden kot vrh.

Dober primer, kjer je PID nujen, je tudi rekonstrukcija delca $\phi \rightarrow K^+ K^-$. Brez identifikacije delcev bi bil signal ϕ mezona popolnoma prekrit z ozadjem iz veliko pogostejših pionov. Skratka, v mnogih primerih se na porazdelitvi invariantne mase brez uporabe PID signal sploh ne bi videl – izstopil bi šele po tem, ko s selekcijo odstranimo večino ozadja.

1.7 Metode za identifikacijo delcev

Identifikacija vrste delca temelji na dveh glavnih principih: na določanju njegove **mase** in na opazovanju njegovega specifičnega **načina interakcije** z detektorskim materialom. Spodaj je seznam najpogostejših nabitih delcev, ki jih opazujemo v detektorjih, in njihove približne mirovne mase:

- Elektroni/pozitroni (e^\pm): $\approx 0.511 \text{ MeV } c_0^{-2}$
- Mioni (μ^\pm): $\approx 106 \text{ MeV } c_0^{-2}$
- Pioni (π^\pm): $\approx 140 \text{ MeV } c_0^{-2}$
- Kaoni (K^\pm): $\approx 494 \text{ MeV } c_0^{-2}$
- Protoni/antiprotoni (p, \bar{p}): $\approx 938 \text{ MeV } c_0^{-2}$

Osnovna kinematična relacija, ki povezuje gibalno količino (p), maso (m) in hitrost delca, je:

$$p = \gamma m v = (\gamma \beta) m c \quad (6)$$

kjer sta $\beta = v/c$ in $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ Lorentzova faktorja. Izraz lahko preoblikujemo v:

$$m c = \frac{p}{\gamma \beta} \quad (7)$$

Ta enačba je temelj za identifikacijo delcev. Sledilni sistem v magnetnem polju nam natančno izmeri gibalno količino p . Če lahko z dodatnimi detektorji izmerimo še hitrost delca (oziroma β ali $\gamma\beta$), lahko neposredno izračunamo njegovo maso m in ga tako identificiramo.

Dve najpogostejši metodi za merjenje faktorja $\gamma\beta$ sta:

Energijske izgube (dE/dx) Kot smo omenili, nabiti delci ob prehodu skozi snov izgubljajo energijo, kar opisuje Bethe-Blochova formula. Količina izgubljene energije je odvisna od hitrosti delca, natančneje od faktorja $\gamma\beta$. Pri isti gibalni količini p bodo imeli delci z različnimi masami različne hitrosti, saj velja:

$$\gamma\beta = \frac{p}{m c}$$

To pomeni, da bodo pri enaki gibalni količini težji delci (npr. protoni) počasnejši (manjši $\gamma\beta$) in bodo zato drugače izgubljali energijo kot lažji delci (npr. pioni). Z merjenjem energijskih izgub v plinskih ali polprevodniških detektorjih lahko torej ločimo med različnimi vrstami delcev, še posebej učinkovito pri nižjih gibalnih količinah.

Kot Čerenkovega sevanja Ko nabit delec potuje skozi snov s hitrostjo v , ki je večja od fazne hitrosti svetlobe v tej snovi (c/n , kjer je n lomni količnik), oddaja t.i. Čerenkovovo sevanje. To sevanje se oddaja pod točno določenim kotom θ_C glede na smer gibanja delca:

$$\cos \theta_C = \frac{1}{n\beta} \quad (8)$$

Z merjenjem kota θ_C lahko neposredno določimo hitrost delca β . Ta metoda je izjemno uporabna pri višjih energijah, kjer metoda energijskih izgub izgubi svojo moč ločevanja.

1.8 Specifične interakcije in detekcija

Poleg splošnih metod za merjenje gibalne količine in energije obstajajo tudi bolj specializirani detektorji in tehnike, ki izkoriščajo edinstvene lastnosti interakcij različnih delcev s snovjo.

Uporaba Čerenkovega in prehodnega sevanja Kot smo omenili, je Čerenkovo sevanje ključno za merjenje hitrosti delcev. Sevanje nastane le, če je hitrost delca v večja od hitrosti svetlobe v snovi, c/n . To postavlja pragovno hitrost $\beta_t = 1/n$.

- Če je $\beta < \beta_t$, delec ne seva.
- Če je $\beta > \beta_t$, delec seva pod kotom $\cos \theta_C = 1/(n\beta)$.

Z izbiro materiala z ustreznim lomnim količnikom n lahko detektor zasnujemo tako, da ločuje med delci z različnimi masami. Lažji delec bo pri isti gibalni količini prej presegel pragovno hitrost kot težji.

Druga sorodna tehnika uporablja **prehodno sevanje** (angl. *Transition Radiation*). To sevanje nastane, ko ultra-relativističen nabiti delec prečka mejo med dvema sredstvom z različnima dielektričnima konstantama. Intenziteta sevanja je močno odvisna od Lorenzovega faktorja γ , zato so ti detektorji izjemno učinkoviti pri ločevanju visokoenergijskih elektronov (γ je velik) od težjih delcev, kot so pioni.

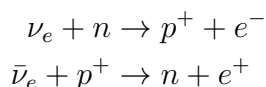
Razlike v interakcijah s snovjo Način, kako delec interagira z detektorjem, je neposredno povezan s fundamentalnimi interakcijami, ki jih občuti.

- **Mion (μ^\pm):** Kot lepton mion občuti le **elektromagnetno in šibko interakcijo**. Ker ne interagira močno, je izjemno prodoren. V detektorju pušča čisto sled v sledilnikih in kalorimetrih, ne da bi povzročil obsežen plaz delcev. Pogosto prebije celoten detektor.
- **Pion (π^\pm):** Kot mezon je sestavljen iz kvarkov in zato občuti **močno interakcijo** (poleg EM in šibke). Ko pion zadene gost material kalorimetra, interagira z atomskimi jedri, kar sproži t.i. **hadronski plaz** – kaskado novih hadronov. Ta plaz je po obliki zelo drugačen od čistega EM plazmu, ki ga povzroči elektron.

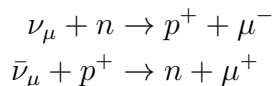
Te razlike v "podpisu", ki ga delci pustijo v detektorju, so osnova za njihovo identifikacijo.

Izziv: Detekcija nevtrinov Nevtrini so posebni, saj občutijo **samo šibko interakcijo**. Posledično je njihov sipalni presek za interakcijo s snovjo izjemno majhen. Verjetnost, da nevtrino interagira med prehodom skozi Zemljo, je praktično nič. Za njihovo detekcijo so zato potrebni ogromni detektorji z maso več tisoč ton (npr. velikanske posode z ultra-čisto vodo ali tekočim scintilatorjem), da se poveča verjetnost za vsaj nekaj interakcij.

Nevtrina ne detektiramo neposredno, ampak preko produktov njene interakcije z jedri. Tipični reakciji sta (preko nabitega toka):



Podobno velja za mionske nevtrine, ki v reakciji proizvedejo mion:



Pri višjih energijah sipalni presek sicer narašča, a ostaja izredno majhen. Ključno je, da v teh reakcijah nastane **nabit lepton** (elektron, mion). Ta lepton, če ima dovolj energije, v mediju (npr. vodi) potuje hitreje od svetlobe in pri tem oddaja **Čerenkovo sevanje**. Ob stene detektorja so nameščeni izjemno občutljivi svetlobni senzorji (fotopomnoževalke), ki zaznajo ta svetlobni blisk in iz oblike svetlobnega stožca rekonstruirajo smer in energijo prvotnega nevtrina.

2 Prehod nabitih delcev in fotonov skozi snov

V tem poglavju si bomo podrobneje ogledali fizikalne procese, ki se zgodijo, ko delec potuje skozi snov. Razumevanje teh procesov je ključno za načrtovanje in razumevanje delovanja detektorjev delcev. Vsebino bomo razdelili na tri glavne dele:

1. Prehod nabitih delcev (težki ioni, mioni, elektroni).
2. Prehod fotonov.
3. Razvoj elektromagnetnih plazov.

2.1 Interakcija nabitih delcev s snovjo

Ko nabit delec potuje skozi snov, interagira z atomi preko elektromagnetne interakcije. Posledica teh interakcij je, da delec postopoma izgublja svojo kinetično energijo, dokler se na koncu ne ustavi. Način interakcije je odvisen od mase vpadnega delca (M) v primerjavi z maso elektrona (m_e). Ločimo dva glavna primera:

1. **Težki nabiti delci:** V to kategorijo spadajo vsi delci, katerih masa je bistveno večja od mase elektrona ($M \gg m_e$), na primer protoni, mioni ($m_\mu \approx 200 m_e$), delci alfa, in težji ioni.
2. **Elektroni in pozitroni:** Tu je masa vpadnega delca enaka masi delcev v snovi, s katerimi interagira ($M = m_e$). To vodi do pomembnih razlik v obravnavi.

Interakcije lahko v osnovi razdelimo na dva procesa:

- **Neelastično sipanje na atomskih elektronih:** To je daleč najpomembnejši proces za izgubo energije. Vpadni delec preda del svoje energije elektronom v atomih snovi, kar povzroči njihovo **vzbujanje** (ekscitacijo) na višja energijska stanja ali pa **ionizacijo** (elektron se odcepi od atoma). Sipalni presek za ta proces je relativno velik, reda velikosti $\sigma \approx 10^{-17} \text{ cm}^2 - 10^{-16} \text{ cm}^2$, kar pomeni, da se na poti delca zgodi ogromno število takšnih trkov. Posledica je, da delec izgublja energijo skoraj zvezno. Na primer, proton z energijo 10 MeV se v bakru (Cu) popolnoma ustavi na razdalji le 250 μm .
- **Elastično sipanje na atomskem jedru:** Pri tem procesu se delec siplje na precej težjem jedru. Ker je jedro masivno, delec izgubi zanemarljivo malo energije, spremeni pa svojo smer. Ta proces je znan kot Rutherfordovo sipanje in je pomemben predvsem pri nizkih energijah.

2.1.1 Klasična izpeljava energijskih izgub (Bohrov približek)

Oglejmo si klasičen izračun energije, ki jo težak nabit delec (z nabojem ze in maso M) prenese na en sam elektron v snovi. Pri tem bomo uporabili nekaj poenostavljajočih predpostavk:

- Elektron (z nabojem $-e$ in maso m_e) je prost in na začetku miruje.
- Vpadni delec se giblje s konstantno hitrostjo v po premici. Zaradi velike mase ($M \gg m_e$) predpostavimo, da se njegova smer med interakcijo ne spremeni.

- Razdalja med mirovno lego elektrona in potjo delca se imenuje **parameter trka** (b).

Na elektron deluje Coulombova sila s strani težkega delca. Zaradi simetrije bo rezultanta sile v smeri gibanja delca (longitudinalna komponenta) po celotni poti enaka nič. Spremembo gibalne količine elektrona povzroči le komponenta sile, ki je pravokotna na pot delca (F_T).

Celotna sprememba gibalne količine elektrona (Δp_e) je enaka sunku sile:

$$\Delta p_e = \int_{-\infty}^{\infty} F_T(t) dt \quad (9)$$

Ker je $F_T = eE_T$ (kjer je E_T prečna komponenta električnega polja) in čas lahko izrazimo s potjo $dt = dx/v$, dobimo:

$$\Delta p_e = \int_{-\infty}^{\infty} eE_T \frac{dx}{v} = \frac{e}{v} \int_{-\infty}^{\infty} E_T dx \quad (10)$$

Integral prečne komponente električnega polja vzdolž celotne poti lahko elegantno izračunamo z uporabo **Gaussovega zakona**. Ob poti delca si zamislimo neskončno dolg valj s polmerom b . Celoten električni pretok skozi plašč valja je:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{-\infty}^{\infty} E_T \cdot (2\pi b) dx \quad (11)$$

Po Gaussovem zakonu je ta pretok enak skupnemu naboju v notranjosti, deljenim z ϵ_0 . Naboj v notranjosti je kar naboj delca, ze .

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_T(2\pi b) dx = \frac{ze}{\epsilon_0} \quad (12)$$

Iz tega neposredno sledi vrednost integrala, ki ga potrebujemo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_T dx = \frac{ze}{2\pi b\epsilon_0} \quad (13)$$

Ko to vstavimo nazaj v izraz za spremembo gibalne količine, dobimo:

$$\Delta p_e = \frac{e}{v} \left(\frac{ze}{2\pi b\epsilon_0} \right) = \frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 vb} \quad (14)$$

Energija, ki jo pri tem trku prejme elektron, je enaka njegovi končni kinetični energiji:

$$\Delta E(b) = \frac{(\Delta p_e)^2}{2m_e} = \frac{1}{2m_e} \left(\frac{ze^2}{2\pi\epsilon_0 vb} \right)^2 = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m_e v^2 b^2} \quad (15)$$

Ta enačba nam podaja energijo, ki jo težak delec izgubi v enem samem trku z elektronom na razdalji b . Celotno izgubo energije na enoto poti (dE/dx) dobimo tako, da ta izraz integriramo po vseh možnih parametrih trka b in upoštevamo število elektronov v snovi.

2.2 Prehod težkih nabitih delcev

2.2.1 Splošna obravnava interakcije delec-snov

Oglejmo si splošen opis interakcije delca z maso M , gibalno količino \vec{p} in hitrostjo $v = \beta c$, ki potuje skozi snov. Snov (medij) opišemo z njeno dielektrično konstanto $\varepsilon(\omega)$, ki je v splošnem kompleksna funkcija frekvence: $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$.

Interakcijo obravnavamo kvantno-mehansko. Delec pri prehodu skozi medij izmenja energijo in gibalno količino z medijem. Ta izmenjava poteka v obliki kvantov polja (virtualnih fotonov), ki v mediju vzbudijo osnovna stanja (npr. plazmone, ekscitone). Iz ohranitve energije in gibalne količine sledi:

$$E' = E - \hbar\omega \quad (16)$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - \hbar\vec{k} \quad (17)$$

kjer sta E' in \vec{p}' energija in gibalna količina delca po interakciji, $\hbar\omega$ in $\hbar\vec{k}$ pa energija in gibalna količina, ki ju je sprejel medij.

Za večino procesov velja, da je prenos energije in gibalne količine v posameznem trku zelo majhen v primerjavi z energijo in gibalno količino delca:

$$\hbar\omega \ll E \quad \text{in} \quad \hbar k \ll p$$

Spremembo energije delca $\Delta E = E' - E = -\hbar\omega$ lahko povežemo s spremembo gibalne količine. Za majhne spremembe velja relativistična zveza $\Delta E \approx \vec{v} \cdot \Delta\vec{p}$. Ker je $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p} = -\hbar\vec{k}$, dobimo:

$$-\hbar\omega \approx \vec{v} \cdot (-\hbar\vec{k}) \quad \Rightarrow \quad \omega = \vec{v} \cdot \vec{k} \quad (18)$$

Če z θ_k označimo kot med smerjo gibanja delca (\vec{v}) in smerjo prenosa gibalne količine (\vec{k}), lahko zgornji izraz zapišemo kot:

$$\omega = vk \cos \theta_k \quad (19)$$

Ta enačba povezuje energijo in gibalno količino, ki ju delec lahko odda mediju. Hkrati pa mora biti ta prenos v skladu z disperzijsko relacijo, ki velja za valovanje v mediju:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} \quad (20)$$

Če združimo obe enačbi (kvadriramo prvo in vstavimo drugo), dobimo pogoj za kot θ_k :

$$\frac{\omega^2}{v^2 \cos^2 \theta_k} = \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2}$$

$$v^2 \cos^2 \theta_k \varepsilon(\omega) = c^2$$

Iz tega sledi izraz za kot:

$$\cos \theta_k = \frac{c}{v\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{1}{\beta n(\omega)} \quad (21)$$

kjer je $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ lomni količnik snovi.

Čerenkovovo sevanje Zgornja enačba ima realno rešitev za kot θ_k le, če je desna stran manjša ali enaka 1. To vodi do pogoja:

$$\beta n(\omega) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad v \geq \frac{c}{n(\omega)}$$

Ta pogoj nam pove, da lahko delec realno odda energijo v obliki sevanja (fotona) le, če je njegova hitrost v večja od fazne hitrosti svetlobe v snovi. Ta proces imenujemo **Čerenkovovo sevanje**, kot θ_k pa postane **kot Čerenkovovega sevanja** θ_C .

2.2.2 Vpliv dielektrične konstante na interakcijo

Lastnosti snovi, opisane z dielektrično konstanto $\varepsilon(\omega)$, določajo, kateri proces bo prevladoval pri določeni frekvenci (oziroma preneseni energiji $\hbar\omega$). Grobo lahko ločimo tri območja:

- **Optično območje** ($\hbar\omega \lesssim 10 \text{ eV}$): V tem območju je snov prozorna. Absorpcijski del dielektrične konstante je zanemarljiv ($\varepsilon_2 \approx 0$), realni del pa je večji od ena ($\varepsilon_1 > 1$). Kot smo videli, v tem primeru obstaja realen kot θ_C , če je hitrost delca dovolj velika ($v \geq c/\sqrt{\varepsilon_1}$). To ustreza oddajanju realnih fotonov v obliki **Čerenkovovega sevanja**.
- **Absorpcijsko območje** ($10 \text{ eV} \lesssim \hbar\omega \lesssim 5 \text{ keV}$): To je območje, kjer snov močno absorbira sevanje. Absorpcijski del ε_2 je pomemben ($\varepsilon_2 > 0$), medtem ko je ε_1 tipično manjši od ena. V tem režimu delec oddaja virtualne fotone, ki jih snov absorbira, kar vodi do **ionizacije in vzbujanja atomov**. To je glavni mehanizem za izgubo energije težkih nabitih delcev.
- **Rentgensko območje** ($\hbar\omega > 5 \text{ keV}$): Pri zelo visokih energijah se snov obnaša skoraj kot plazma prostih elektronov. Velja $\varepsilon_2 \ll 1$ in $\varepsilon_1 \approx 1 - (\omega_p/\omega)^2 < 1$, kjer je ω_p plazemska frekvenca. Ionizacija je manj pogosta, postane pa pomembno **prehodno sevanje**, ki nastane ob prehodu delca med dvema snovema z različnima ε .

Analiza polja in doseg interakcije Iz pogoja $\omega = \vec{v} \cdot \vec{k}$ sledi, da je komponenta valovnega vektorja v smeri gibanja delca (smer x) enaka $k_x = \omega/v$. Iz disperzijske relacije $k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$ lahko izrazimo transverzalno komponento k_y :

$$k_y^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - k_x^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{v^2} = \frac{\omega^2}{v^2} \left(\frac{v^2\varepsilon}{c^2} - 1 \right) \quad (22)$$

Definirajmo fazno hitrost svetlobe v snovi $c_m = c/\sqrt{\varepsilon}$ in relativno hitrost delca glede na njo, $\beta' = v/c_m$. Potem je:

$$k_y = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta'^2 - 1} \quad (23)$$

Obravnavajmo dva primera:

- $\beta' > 1$ (**Čerenkovljev režim**): k_y je realen. To pomeni, da se polje širi stran od poti delca kot valovanje oblike $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Imamo oddajanje energije v obliki Čerenkovovega sevanja.

- $\beta' < 1$ (**Režim ionizacijskih izgub**): k_y je imaginaren. Zapišemo ga lahko kot $k_y = i|k_y| = i\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta'^2}$. Transverzalni del polja ima obliko $e^{ik_y y} = e^{-|k_y|y}$. Polje je torej v transverzalni smeri **eksponentno dušeno**. Doseg interakcije v prečni smeri je določen z karakteristično razdaljo y_0 :

$$y_0 = \frac{1}{|k_y|} = \frac{v}{\omega\sqrt{1-\beta'^2}} \quad (24)$$

Relativistični dvig in nasičenje Izraz za doseg interakcije y_0 lahko zapišemo z uporabo Lorentzovega faktorja $\gamma' = 1/\sqrt{1-\beta'^2}$: $y_0 = \frac{v\gamma'}{\omega}$. Ker sta β' in γ' odvisna od energije vpadnega delca ($\beta\gamma$), doseg interakcije y_0 narašča z energijo delca. To pomeni, da lahko visokoenergijski delec interagira tudi z bolj oddaljenimi atomi od svoje poti, kar poveča skupno izgubo energije. Ta pojav imenujemo **relativistični dvig** energijskih izgub.

Ta dvig pa ni neomejen. Pri zelo visokih energijah dielektrična konstanta pade pod 1 ($\varepsilon < 1$), kar prepreči, da bi izraz $1 - \beta'^2 = 1 - \beta^2\varepsilon$ postal poljubno majhen. Ta pojav imenujemo **efekt nasičenja** (angl. *density effect*). Velikost efekta je odvisna od gostote snovi ρ , saj je odstopanje ε od 1 sorazmerno z gostoto elektronov. Posledica tega je:

- V **gostih snoveh** (trdnine, tekočine) pride do nasičenja prej, zato je relativistični dvig manj izrazit.
- V **redkih snoveh** (plini) je efekt nasičenja šibkejši in relativistični dvig se nadaljuje do višjih energij.

To je razlog, da se plinski detektorji uporabljajo za identifikacijo delcev pri visokih energijah z merjenjem energijskih izgub.

2.2.3 Fotoabsorpcijski model in diferencialni presek

Sodoben pristop k opisu energijskih izgub obravnava interakcijo med vpadnim delcem in snovjo kot izmenjavo virtualnih fotonov. Spekter teh virtualnih fotonov je povezan s poljem vpadnega delca, medtem ko je odziv snovi v celoti opisan z njeno dielektrično konstanto $\varepsilon(\omega)$, oziroma, kar je ekvivalentno, s sipalnim presekom za fotoabsorpcijo, $\sigma_\gamma(\omega)$.

Diferencialni sipalni presek za prenos energije $T = \hbar\omega$ z nabitega delca na atom snovi lahko zapišemo v splošni obliki, ki vključuje vse glavne procese:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\text{bližnji}} + \left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\text{oddaljeni}} \quad (25)$$

kjer ločimo:

- **Bližnji trki (velik prenos gibalne količine)**: Ti trki se zgodijo pri majhnih parametrih trka. Pri njih je prenos energije tako velik, da lahko elektrone obravnavamo kot proste. Ta del preseka ustreza Rutherfordovemu sipanju na elektronih in vodi do nastanka t.i. **delta elektronov** – elektronov, ki dobijo dovolj energije, da sami ionizirajo snov.

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\text{bližnji}} \propto \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{T^2}$$

- **Oddaljeni trki (majhen prenos gibalne količine):** To so trki z velikim parametrom trka, kjer delec interagira s celotnim atomom koherentno. Ta del je odvisen od kolektivnega odziva snovi in ga opišemo s fotoabsorpcijskim presekom.

$$\left(\frac{d\sigma}{dT}\right)_{\text{oddaljeni}} \propto \frac{z^2}{\beta^2} \frac{\sigma_\gamma(T)}{T} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{T} \right) - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) \right]$$

V drugem členu se skriva vsa kompleksnost odziva snovi. Izraz v logaritmu opisuje **vzbujanje in ionizacijo**, člen β^2 pa je korekcija. Člen $\delta(\beta\gamma)$ opisuje efekt nasičenja, ki smo ga omenili prej. Ta formalizem naravno vključuje tudi procese, kot sta **Čerenkovovo in prehodno sevanje**, ki izhajata iz polov v izrazu za odziv snovi.

2.2.4 Energijske izgube težkih nabitih delcev

Osredotočimo se sedaj na specifičen primer težkih nabitih delcev (vsi razen e^- in e^+), kjer je daleč najpomembnejši proces postopna izguba energije preko velikega števila trkov z atomskimi elektroni. Kljub temu, da je sprememba energije v posameznem trku majhna, je njihovo skupno število ogromno, saj je sipalni presek velik ($\sigma \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$).

Maksimalni in minimalni prenos energije Pri izračunu povprečne izgube energije je ključno poznati kinematične meje za prenos energije T v enem samem trku.

Maksimalni prenos energije (T_{max}): Največja energija se prenese pri čelnem trku med vpadnim delcem (masa M , energija E) in mirujočim elektronom (masa m_e). Z upoštevanjem relativistične kinematike dobimo:

$$T_{max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \quad (26)$$

Ta izraz se poenostavi v dveh pogostih limitah:

- **Nerelativistična limita** ($\beta \ll 1, \gamma \approx 1$): $T_{max} \approx 2m_e v^2$.
- **Za $M \gg m_e$:** imenovalac postane približno 1 in dobimo zelo uporaben približek:

$$T_{max} \approx 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$$

Minimalni prenos energije (T_{min}): Energija, ki jo delec prenese na atom, ne more biti poljubno majhna. Elektron je v atomu vezan, zato mora biti prenesena energija vsaj enaka energiji, potrebni za vzbuditev atoma v prvo vzbujeno stanje, $E_{exc,min}$. Torej velja:

$$T_{min} \approx E_{exc,min}$$

Za poenostavitev računa se namesto minimalne vzbujevalne energije uporablja povprečna vzbujevalna energija snovi, I .

2.2.5 Bethe-Blochova formula za energijske izgube

Z združitvijo kvantno-mehanskega izračuna in kinematičnih mej dobimo **Bethe-Blochovo formulo**, ki opisuje povprečno izgubo energije na enoto poti (dE/dx), imenovano tudi **ustavljalna moč** (angl. *stopping power*), za težke nabite delce:

$$-\frac{dE}{dx} = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \frac{Z}{A} \rho \frac{z_p^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{max}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right] \quad (27)$$

Pojasnilo posameznih členov:

- N_A : Avogadrovo število.
- r_e : Klasični radij elektrona ($r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$).
- $m_e c^2$: Mirovna energija elektrona.
- Z, A, ρ : Vrsto število, masno število in gostota absorpcijskega materiala.
- z_p : Naboj vpadnega delca v enotah osnovnega naboja e .
- β, γ : Lorentzova faktorja vpadnega delca.
- T_{max} : Maksimalni prenos energije v enem trku.
- I : **Povprečni ionizacijski potencial** materiala. To je ključni parameter, ki povzema vse atomske lastnosti. Eksperimentalno je določeno, da zanj velja približek $I/Z \approx 10 \text{ eV}$ za $Z > 20$.
- $\delta(\beta\gamma)$: **Popravek za gostoto** (efekt nasičenja), ki postane pomemben pri visokih energijah.

Formula kaže, da je izguba energije sorazmerna s kvadratom naboja vpadnega delca (z_p^2) in obratno sorazmerna s kvadratom njegove hitrosti ($1/\beta^2$). Logaritemski člen opisuje odvisnost od energije in lastnosti snovi.

Lastnosti energijskih izgub Iz oblike Bethe-Blochove formule lahko razberemo značilno odvisnost energijskih izgub od energije delca (običajno se jo prikazuje v odvisnosti od $\beta\gamma = p/Mc$):

- Pri **nizkih energijah** prevladuje člen $1/\beta^2$, zato energijske izgube z naraščajočo energijo hitro padajo.
- Pri $\beta\gamma \approx 3 - 4$ formula doseže minimum. Delci v tem območju izgubljajo najmanj energije in jih imenujemo **minimalno ionizirajoči delci** (MIP - *Minimum Ionizing Particle*). Na primer, za mion ($M \approx 106 \text{ MeV } c_0^{-2}$) to ustreza gibalni količini $p = \beta\gamma Mc \approx 3 \cdot 106 \text{ MeV}/c \approx 300 \text{ MeV}/c$.
- Pri **visokih energijah** ($\beta\gamma > 4$) začne naraščati logaritemski člen, kar povzroči počasen, logaritemski porast energijskih izgub. To je **relativistični dvig**.
- Pri **zelo visokih energijah** postane pomemben popravek za gostoto δ , ki šplóšči"krivuljo in prepreči neskončen porast (nasičenje).

Ker so energijske izgube sorazmerne z gostoto snovi (ρ), se za primerjavo med materiali pogosto uporablja **masna ustavljajna moč**, $-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$, z enotami $\text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Razmerje Z/A je za večino snovi (razen vodika) približno konstantno in enako $\approx 1/2$.

Doseg delca in Braggov vrh Doseg (R) delca je definirana kot pot, ki jo delec z začetno energijo E_0 opravi, preden se ustavi. Izračunamo ga z integriranjem:

$$R(E_0) = \int_{E_0}^0 \frac{dE'}{dE'/dx} = \int_0^{E_0} \frac{1}{-dE/dx} dE' \quad (28)$$

Ključna lastnost težkih nabitih delcev je, kako izgubljajo energijo vzdolž svoje poti. Ko delec potuje skozi snov, se njegova energija zmanjšuje. Ker je $dE/dx \propto 1/\beta^2$, se pri zmanjševanju hitrosti (energije) ustavljalna moč močno poveča. To pomeni, da delec **največ energije odloži tik preden se ustavi**. Graf, ki kaže odvisnost dE/dx od globine prodiranja v snov, ima zato značilno obliko z ostrim vrhom na koncu poti, ki ga imenujemo **Braggov vrh**.

Ta lastnost je izjemno pomembna v medicini, še posebej pri **protonski terapiji** raka. S prilagoditvijo začetne energije protonov lahko dosežemo, da se Braggov vrh nahaja natančno v tumorju. Na ta način protoni Terapija omogoča, da se večina doze sevanja odloži v tarčnem območju, medtem ko je zdravo tkivo pred in za tumorjem izpostavljeno bistveno manjši dozi.

3 Vaje 21.10.2025

V tem poglavju so rešene tipske naloge, povezane z energijskimi izgubami težkih nabitih delcev po Bethe-Blochovi enačbi. Za referenco uporabljamo Sliki 1a in 1b iz zapiskov.

3.1 Naloga 1.1.1: Energijske izgube protona v svincu

Naloga Izračunaj energijske izgube za protone z gibalno količino $p = 3 \text{ GeV}/c$ v svincu ($\rho = 11.3 \text{ g cm}^{-3}$, $Z = 82$, $A = 207.2$, $I = 823 \text{ eV}$).

Rešitev Najprej izračunamo ključne kinematične količine za proton ($m_p c^2 \approx 938.3 \text{ MeV}$).

- Produkt $\beta\gamma$ je najlažje izračunati iz gibalne količine:

$$\beta\gamma = \frac{p}{m_p c} = \frac{3000 \text{ MeV}/c}{938.3 \text{ MeV}/c} \approx 3.197$$

- Iz tega lahko izračunamo γ in β :

$$\gamma = \sqrt{1 + (\beta\gamma)^2} = \sqrt{1 + 3.197^2} \approx 3.351$$

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \frac{3.197}{3.351} \approx 0.954$$

Natančen izračun z Bethe-Blochovo formulo je zapleten zaradi popravkov (δ , C/Z), ki niso podani. Zato bomo nalogo rešili z uporabo priloženega grafa (Slika 1a), ki že vključuje vse popravke.

1. Na spodnji osi grafa poiščemo gibalno količino za proton $p = 3 \text{ GeV}/c$ (kar ustreza $\beta\gamma \approx 3.2$).
2. Sledimo navpični črti do krivulje za svinec (Pb).
3. Na levi ordinatni osi odčitamo vrednost masne ustavljalne moči:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \approx 1.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

4. To vrednost pomnožimo z gostoto svinca, da dobimo iskano izgubo energije na enoto poti:

$$-\frac{dE}{dx} = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \rho = 1.15 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \cdot 11.3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 13.0 \text{ MeV cm}^{-1}$$

Rešitev se ujema s pričakovano vrednostjo.

3.2 Naloga 1.1.2: Minimum energijskih izgub

Naloga Poišči minimum funkcije $-dE/dx$ glede na $\beta\gamma$.

Rešitev Minimum energijskih izgub nastopi, ko naraščanje logaritemskega člena v Bethe-Blochovi formuli postane večje od padanja člena $1/\beta^2$. Točna lokacija minimuma je odvisna od materiala (predvsem od ionizacijskega potenciala I in popravka za gostoto δ). Kot je navedeno v nalogi, bi natančen izračun zahteval odvajanje Bethe-Blochove enačbe in numerično iskanje ničle odvoda, kar v programu Mathematica privede do rezultata $\beta\gamma \approx 2.867$.

Iz grafa (Slika 1a) lahko razberemo, da se minimum za vse prikazane materiale nahaja v območju $\beta\gamma \in [3, 4]$. Delci s takšno energijo se imenujejo minimalno ionizirajoči delci (MIP).

3.3 Naloga 1.1.3: Energijske izgube v svinčevem fluoridu

Naloga Izračunaj energijske izgube za protone z $p = 3 \text{ GeV}/c$ v svinčevem fluoridu (PbF_2 , $\rho = 7.77 \text{ g cm}^{-3}$). Podatki za fluor: $Z = 9$, $A = 19$.

Rešitev Za spojine uporabimo **Braggovo aditivno pravilo**, ki pravi, da je masna ustavljajna moč spojine uteženo povprečje masnih ustavljajnih moči njenih elementov. Uteži so masni deleži elementov v spojini.

1. Izračunamo masne deleže (w_i) za Pb in F v PbF_2 : Relativna molekulska masa $M_r(\text{PbF}_2) = A(\text{Pb}) + 2 \cdot A(\text{F}) = 207.2 + 2 \cdot 19 = 245.2$.

$$w_{\text{Pb}} = \frac{A(\text{Pb})}{M_r(\text{PbF}_2)} = \frac{207.2}{245.2} \approx 0.845$$

$$w_{\text{F}} = \frac{2 \cdot A(\text{F})}{M_r(\text{PbF}_2)} = \frac{38}{245.2} \approx 0.155$$

2. Določimo masne ustavljajne moči za vsak element pri $\beta\gamma \approx 3.2$:

- Za svinec (Pb) smo vrednost že odčitali v nalogi 1.1.1: $(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx})_{\text{Pb}} \approx 1.15 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$.
- Fluor (F, $Z=9$) ni na grafu. Nahaja se med ogljikom (C, $Z=6$) in aluminijem (Al, $Z=13$). Z grafa odčitamo vrednosti za C (≈ 1.65) in Al (≈ 1.58). Ocenimo vrednost za F z interpolacijo: $(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx})_{\text{F}} \approx 1.62 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$.

3. Izračunamo masno ustavljajno moč za PbF_2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}\right)_{\text{PbF}_2} &= w_{\text{Pb}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}\right)_{\text{Pb}} + w_{\text{F}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}\right)_{\text{F}} \\ &= 0.845 \cdot 1.15 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} + 0.155 \cdot 1.62 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \\ &\approx 0.972 + 0.251 = 1.223 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \end{aligned}$$

4. Pomnožimo z gostoto PbF_2 :

$$-\frac{dE}{dx} = 1.223 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \cdot 7.77 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 9.50 \text{ MeV cm}^{-1}$$

Rezultat se ujema s pričakovano vrednostjo.

3.4 Naloga 1.1.4: Ocena dosega protonov

Naloga Iz vrednosti $-dE/dx$ grobo oceni, kakšna debelina svinca ustavi protone z gibalno količino $p = 3 \text{ GeV}/c$.

Rešitev Naloga zahteva grobo oceno ob predpostavki, da je izguba energije konstantna na celotni poti. To je močna poenostavitev, saj v resnici dE/dx narašča, ko se delec upočasnjuje.

1. Izračunamo začetno kinetično energijo (W_k) protona: Najprej potrebujemo celotno energijo E_{total} :

$$E_{total} = \sqrt{(pc)^2 + (m_p c^2)^2} = \sqrt{(3000 \text{ MeV})^2 + (938.3 \text{ MeV})^2} \\ \approx \sqrt{9 \times 10^6 + 8.8 \times 10^5} \approx 3143 \text{ MeV}$$

Kinetična energija je razlika med celotno in mirovno energijo:

$$W_k = E_{total} - m_p c^2 = 3143 \text{ MeV} - 938.3 \text{ MeV} = 2204.7 \text{ MeV}$$

2. Ocenimo doseg (R) z deljenjem kinetične energije s konstantno izgubo energije:

$$R \approx \frac{W_k}{-dE/dx} = \frac{2204.7 \text{ MeV}}{13.0 \text{ MeV cm}^{-1}} \approx 169.6 \text{ cm} \approx 170 \text{ cm}$$

Groba ocena dosega protonov v svincu je 170 cm.

3.5 Porazdelitev energijskih izgub (energijsko stresanje)

Bethe-Blochova formula opisuje *povprečno* izgubo energije. V resnici je izguba energije stohastičen proces; delec včasih izgubi malo, včasih pa veliko energije v posameznem trku. Zato energijska izguba za monoenergijske delce, ki prečkajo enako debelino snovi, ni enaka, ampak sledi statistični porazdelitvi. Ta pojav imenujemo **energijsko stresanje** (angl. *energy straggling*).

Oblika te porazdelitve je odvisna od debeline absorberja, kar opišemo s parametrom κ (kappa):

$$\kappa = \frac{\langle \Delta E \rangle}{T_{max}} \quad (29)$$

kjer je $\langle \Delta E \rangle = (-dE/dx) \cdot \Delta x$ povprečna izguba energije v absorberju debeline Δx , T_{max} pa je maksimalna možna energija, prenesena na elektron v enem samem trku.

Debeli absorberji ($\kappa > 10$): Če je absorber debel, se zgodi zelo veliko število trkov. Po centralnem limitnem izreku je porazdelitev energijskih izgub v tem primeru simetrična in jo lahko dobro opišemo z **Gaussovo porazdelitvijo**. Povprečna izguba energije, ki jo da Bethe-Blochova formula, se v tem primeru ujema z najverjetnejšo izgubo energije (vrhom porazdelitve).

Primer 3.1 (Proton v svincu). Proton z gibalno količino $3 \text{ GeV}/c$ ima v svincu $-dE/dx \approx 13 \text{ MeV cm}^{-1}$. Njegov T_{max} je:

$$T_{max} \approx 2m_e c^2 (\beta\gamma)^2 = 2 \cdot 0.511 \text{ MeV} \cdot (3.197)^2 \approx 10.4 \text{ MeV}$$

Če opazujemo prehod skozi 10 cm debelo plast svinca, je povprečna izguba $\langle \Delta E \rangle = 130 \text{ MeV}$. V tem primeru je:

$$\kappa = \frac{130 \text{ MeV}}{10.4 \text{ MeV}} \approx 12.5$$

Ker je $\kappa > 10$, pričakujemo Gaussovo porazdelitev energijskih izgub.

Tanki absorberji ($\kappa \ll 1$): V tankih absorberjih, kot so na primer silicijevi detektorji v sledilnikih, je število trkov majhno. Porazdelitev postane močno asimetrična. To je posledica redkih trkov z velikim prenosom energije (nastanek delta elektronov), ki ustvarijo dolg rep porazdelitve proti visokim energijskim izgubam. V tem primeru povprečna vrednost ni več dober opis meritve. Porazdelitev opiše **Landauova porazdelitev**.

Najpomembnejša količina v tem primeru je **najverjetnejša energijska izguba** (Δ_p), ki ustreza vrhu Landauove porazdelitve. Izračunamo jo po formuli:

$$\Delta_p = \xi \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) + \ln \left(\frac{\xi}{I} \right) + j - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) \right] \quad (30)$$

kjer so novi členi:

- ξ (ksi): parameter, ki je sorazmeren s povprečnim številom trkov v snovi. Definiran je kot:

$$\xi = \frac{K}{2} \frac{Z}{A} \rho \frac{\Delta x}{\beta^2} \quad (31)$$

Tu je K konstanta ($K \approx 0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$), Δx pa je debelina snovi. Pogosto se uporablja ploskovna gostota $d = \rho \Delta x$ z enotami g cm^{-2} .

- j : konstanta, $j \approx 0.2$.

Približna širina Landauove porazdelitve (polovična širina, FWHM) je odvisna le od parametra ξ :

$$w \approx 4\xi \quad (32)$$

Ta formula je ključna za razumevanje delovanja in ločljivosti tankih polprevodniških detektorjev.

3.6 Naloga 1.2: Energijsko stresanje pionov v siliciju

Naloga Izračunajmo najverjetnejšo energijsko izgubo (Δ_p) in širino porazdelitve (w) za pione (π^\pm) z energijo $E_{total} = 500 \text{ MeV}$, ki prečkajo silicijev detektor ($Z = 14$, $A = 28$, $\rho = 2.32 \text{ g cm}^{-3}$) debeline $\Delta x = 320 \mu\text{m}$.

Rešitev Najprej izračunamo kinematične količine za pion ($m_\pi c^2 \approx 139.6 \text{ MeV}$).

- Gibalna količina: $pc = \sqrt{E_{total}^2 - (m_\pi c^2)^2} = \sqrt{(500 \text{ MeV})^2 - (139.6 \text{ MeV})^2} \approx 480.2 \text{ MeV}$.
- Faktor β : $\beta = \frac{pc}{E_{total}} = \frac{480.2 \text{ MeV}}{500 \text{ MeV}} \approx 0.96$.
- Faktor γ : $\gamma = \frac{E_{total}}{m_\pi c^2} = \frac{500 \text{ MeV}}{139.6 \text{ MeV}} \approx 3.58$.
- Produkt $\beta\gamma$: $\beta\gamma = \frac{p}{m_\pi c} = \frac{480.2 \text{ MeV}/c}{139.6 \text{ MeV}/c} \approx 3.44$.

Ker gre za tanek absorber, pričakujemo Landauovo porazdelitev. Izračunamo parameter ξ :

$$\xi = \frac{K}{2} \frac{Z}{A} \rho \frac{\Delta x}{\beta^2} = \frac{0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}}{2} \cdot \frac{14}{28} \cdot 2.32 \text{ g cm}^{-3} \cdot \frac{0.032 \text{ cm}}{0.96^2}$$

$$\xi \approx 0.00618 \text{ MeV} = 6.18 \text{ keV}$$

Sedaj lahko izračunamo najverjetnejšo energijsko izgubo Δ_p . Uporabimo $I = 172 \text{ eV}$ za silicij in zanemarimo gostotni popravek δ .

$$\begin{aligned} \Delta_p &= \xi \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) + \ln \left(\frac{\xi}{I} \right) + j - \beta^2 \right] \\ &= 6.18 \text{ keV} \left[\ln \left(\frac{2 \cdot 511 \text{ keV} \cdot (3.44)^2}{0.172 \text{ keV}} \right) + \ln \left(\frac{6.18 \text{ keV}}{0.172 \text{ keV}} \right) + 0.2 - 0.96^2 \right] \\ &= 6.18 \text{ keV} [\ln(7.03 \times 10^4) + \ln(35.9) + 0.2 - 0.92] \\ &= 6.18 \text{ keV} [11.16 + 3.58 + 0.2 - 0.92] = 6.18 \text{ keV} \cdot (14.02) \approx 86.6 \text{ keV} \end{aligned}$$

Rezultat se dobro ujema z referenčno vrednostjo ($\approx 85.6 \text{ keV}$), majhno odstopanje je posledica neupoštevanja gostotnega popravka.

Širina porazdelitve (FWHM) je:

$$w \approx 4\xi = 4 \cdot 6.18 \text{ keV} = 24.72 \text{ keV}$$

Za konec preverimo še parameter κ . Povprečna izguba energije je $\langle \Delta E \rangle \approx 1.6 \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} \cdot 2.32 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0.032 \text{ cm} \approx 0.119 \text{ MeV}$. Maksimalni prenos energije je $T_{max} \approx 2m_e c^2 (\beta\gamma)^2 \approx 12.1 \text{ MeV}$. Torej je $\kappa = 0.119/12.1 \approx 0.01$, kar potrjuje, da smo v območju veljavnosti Landauove porazdelitve ($\kappa \ll 1$).

3.7 Sevanje Čerenkova

3.7.1 Teorija

Ko nabit delec potuje skozi dielektrično snov (medij), katere lomni količnik je n , povzroči polarizacijo atomov vzdolž svoje poti. Če je hitrost delca v večja od fazne hitrosti svetlobe v tej snovi ($c_{snov} = c_0/n$), pride do pojava, podobnega zvočnemu udarnemu valu: posamezni valovi, ki jih oddajajo polarizirani atomi, se konstruktivno seštejejo in tvorijo koherentno valovno fronto. To sevanje imenujemo **Čerenkovovo sevanje**.

Pogoj za nastanek sevanja je torej:

$$v > \frac{c_0}{n} \quad \text{ozioroma} \quad \beta > \frac{1}{n} \quad (33)$$

Sevanje se oddaja pod točno določenim kotom θ_C glede na smer gibanja delca:

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta n} \quad (34)$$

Pomembno je, da mora biti snov prozorna za valovne dolžine nastalega sevanja, da ga lahko opazujemo.

Število fotonov, ki jih delec izseva na enoto poti (dx) in na enoto intervala energije fotonov (dE), podaja Frank-Tammova formula. Njena poenostavljena oblika je:

$$\frac{d^2 N}{dE dx} \approx 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \sin^2 \theta_C = 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad (35)$$

Če predpostavimo, da sta β in n konstantna vzdolž poti Δx in v energijskem intervalu ΔE , lahko skupno število izsevanih fotonov ocenimo kot:

$$N \approx 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \Delta E \Delta x \quad (36)$$

Detekcija sevanja Čerenkovovo svetlobo detektiramo s fotodetektorji (npr. fotopomnoževalkami), ki pa niso občutljivi na vse valovne dolžine. Tipičen fotodetektor ima dober **kvantni izkoristek** (QE) – verjetnost, da foton sproži merljiv signal – v območju vidne in UV svetlobe.

- Občutljivo območje je npr. med $\lambda_{min} = 250 \text{ nm}$ in $\lambda_{max} = 800 \text{ nm}$. Spodnja meja je pogosto določena s prepustnostjo materiala okna fotodetektorja.
- To območje valovnih dolžin ustreza energijskemu intervalu $\Delta E = E_{max} - E_{min}$:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \approx \frac{1240 \text{ eV nm}}{\lambda}$$

$$E_{max} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{250 \text{ nm}} \approx 4.96 \text{ eV}, \quad E_{min} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{800 \text{ nm}} \approx 1.55 \text{ eV}$$

$$\Delta E \approx 4.96 - 1.55 = 3.41 \text{ eV} \approx 3.5 \text{ eV}$$

- Kvantni izkoristek ni konstanten, a za ocene pogosto uporabimo povprečno vrednost, npr. $QE_{povp} \approx 10\%$.

3.8 Naloga 1.4: Število fotonov Čerenkova v vodi

Naloga Proton s skupno energijo $E = 2 \text{ GeV}$ potuje skozi vodo ($n = 1.33$) na razdalji $\Delta x = 1 \text{ cm}$. Koliko fotonov Čerenkovega sevanja zazna fotodetektor s povprečnim kvantnim izkoristkom 10% v energijskem območju $\Delta E = 3.5 \text{ eV}$? Predpostavi, da je zbirni izkoristek svetlobe 100% .

Rešitev

1. **Izračun hitrosti protona:** Mirovna energija protona je $m_p c^2 \approx 938.3 \text{ MeV}$.

$$pc = \sqrt{E^2 - (m_p c^2)^2} = \sqrt{(2000 \text{ MeV})^2 - (938.3 \text{ MeV})^2} \approx 1766.4 \text{ MeV}$$

$$\beta = \frac{pc}{E} = \frac{1766.4 \text{ MeV}}{2000 \text{ MeV}} \approx 0.8832$$

2. **Preverba pogoja za Čerenkovovo sevanje:** Pragovna hitrost v vodi je $\beta_t = 1/n = 1/1.33 \approx 0.752$. Ker je $\beta \approx 0.883 > 0.752$, proton seva.

3. **Izračun števila nastalih fotonov:** Uporabimo enačbo 36 z $\Delta x = 1 \text{ cm}$ in $\Delta E = 3.5 \text{ eV}$.

$$1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} = 1 - \frac{1}{(0.8832)^2 (1.33)^2} \approx 1 - \frac{1}{0.78 \cdot 1.77} \approx 1 - 0.725 = 0.275$$

$$N_{\text{nastalih}} \approx 370 \text{ eV}^{-1} \text{ cm}^{-1} \cdot (0.275) \cdot 3.5 \text{ eV} \cdot 1 \text{ cm} \approx 356$$

4. **Izračun števila zaznanih fotonov:** Upoštevamo kvantni in zbirni izkoristek ($\epsilon_{\text{zbir}} = 1$).

$$N_{\text{zaznanih}} = N_{\text{nastalih}} \cdot \text{QE}_{\text{povp}} \cdot \epsilon_{\text{zbir}} = 356 \cdot 0.10 \cdot 1 \approx 36$$

Detektor bi v povprečju zaznal približno 36 fotonov.

3.9 Prehod fotonov skozi snov

Za razliko od nabitih delcev, ki energijo izgubljajo postopoma preko velikega števila trkov, fotoni (delci gama in rentgenskega sevanja) interagira s snovjo preko posameznih, diskretnih dogodkov. Foton v enem samem trku bodisi izgubi velik del svoje energije ali pa je popolnoma absorbiran. Posledično curek fotonov med prehodom skozi snov ne izgublja energije postopoma, temveč se redči po eksponentnem zakonu:

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x} \quad (37)$$

kjer je I_0 začetna intenziteta curka, $I(x)$ intenziteta po prehodu skozi debelino x , in μ **linearni atenuacijski koeficient**, ki opisuje verjetnost za interakcijo na enoto poti. Ta koeficient je odvisen od energije fotona in lastnosti snovi.

Trije glavni procesi interakcije fotonov s snovjo so:

1. **Fotoelektrični pojav (fotoefekt):** Foton je v celoti absorbiran s strani atoma, njegova energija pa se porabi za izbitje enega izmed vezanih elektronov. Ta proces prevladuje pri nizkih energijah in je močno odvisen od vrstnega števila snovi (Z).
2. **Comptonsko sipanje:** Foton se siplje na enem izmed šibko vezanih (skoraj prostih) elektronov. Pri tem foton preda del svoje energije elektronu in se odkloni pod določenim kotom z manjšo energijo. Ta proces je pomemben v srednjem energijskem območju (okoli 1 MeV).
3. **Tvorba para elektron-pozitron:** Če ima foton energijo, večjo od vsote mirovnih mas elektrona in pozitrona ($E_\gamma > 2m_e c^2 = 1.022 \text{ MeV}$), lahko v bližini atomskega jedra izgine in ustvari par delec-antidelec. Ta proces prevladuje pri visokih energijah.

Ti procesi so osnova za delovanje scintilacijskih detektorjev, ki se uporabljajo v medicini, na primer pri slikanju **SPECT** (Single Photon Emission Computed Tomography), kjer se detektira posamezne fotone, in pri **pozitranski emisijski tomografiji (PET)**, kjer se v koincidenca detektira dva fotona z energijo 511 keV, ki nastaneta pri anihilaciji pozitrona.

3.10 Naloga 1.8: Interakcija fotonov s snovjo

Naloga Za anihilacijske fotone z energijo 511 keV v scintilatorju LSO (Lu_2SiO_5) izračunaj:

1. Kakšen je delež interakcij preko fotoefekta?
2. Kolikšen delež fotonov se zazna (interagira) v 25 mm debelem kristalu LSO ($\rho = 7.4 \text{ g cm}^{-3}$)?

Uporabi podatke iz tabel: masni atenuacijski koeficient za Comptonsko sipanje $\sigma_{CS} = 7.282 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ in za fotoefekt $\sigma_{FE} = 3.791 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$.

Rešitev Pri energiji 511 keV je tvorba para kinematično prepovedana. Celoten sipalni presek (oziroma masni atenuacijski koeficient) je torej vsota prispevkov Comptonskega sipanja in fotoefekta.

$$\sigma_{total} = \sigma_{CS} + \sigma_{FE} = (7.282 \times 10^{-2} + 3.791 \times 10^{-2}) \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} = 0.11073 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

1. **Delež fotoefekta (P_{FE}):** Delež določenega procesa je razmerje med njegovim presekom in celotnim presekom.

$$P_{FE} = \frac{\sigma_{FE}}{\sigma_{total}} = \frac{3.791 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}}{0.11073 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}} \approx 0.342 \approx 34\%$$

Preostalih 66% interakcij je Comptonsko sipanje. Snov je pomembna, ker je presek za fotoefekt močno odvisen od vrstnega števila ($\sigma_{FE} \propto Z^4 - Z^5$). LSO vsebuje lutecij ($Z = 71$), kar poveča verjetnost za fotoefekt, ki je zaželen, saj se pri njem vsa energija fotona odloži na enem mestu.

2. **Delež zaznanih fotonov (P_z):** Najprej izračunamo linearni atenuacijski koeficient μ :

$$\mu = \sigma_{total} \cdot \rho = 0.11073 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot 7.4 \text{ g cm}^{-3} \approx 0.8194 \text{ cm}^{-1}$$

Delež fotonov, ki v detektorju debeline $d = 2.5 \text{ cm}$ interagira, je:

$$P_z = 1 - \frac{I(d)}{I_0} = 1 - e^{-\mu d}$$

$$P_z = 1 - e^{-(0.8194 \text{ cm}^{-1} \cdot 2.5 \text{ cm})} = 1 - e^{-2.0485} \approx 1 - 0.129 = 0.871$$

V 2.5 cm debelem kristalu LSO se torej zazna približno 87% vpadnih fotonov.