

# Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Teodor Jovanovski

28252048

7. oktober 2025

## Kazalo

1	Osnovni model in brezdimenzijska oblika	3
2	Poljubna končna hitrost	4
3	Druge izbire funkcionala	6
4	Omejitev velikosti hitrosti	8
5	Zaporedni semaforji in zveznost pospeška	9
6	Zaključek	10

# 1 Osnovni model in brezdimenzijska oblika

Osnovni problem je poiskati takšno hitrostno odvisnost  $v(t)$ , ki v časovnem intervalu  $[0, t_0]$  prevozi pot  $L$ , pri čemer je začetna hitrost  $v(0) = v_0$ . Optimalnost vožnje definiramo z minimizacijo “napora”, ki ga opišemo z integralom kvadrata pospeška  $a(t) = \dot{v}(t)$  čez celotno pot:

$$\min \int_0^{t_0} a(t)^2 dt = \min \int_0^{t_0} \dot{v}(t)^2 dt \quad (1)$$

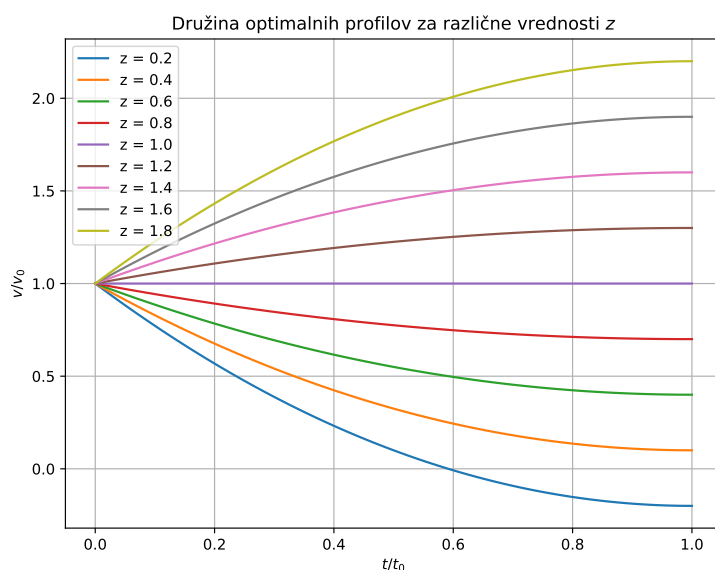
To je problem variacijskega računa. Uporaba Lagrangeovih multiplikatorjev za integralno vez  $\int_0^{t_0} v(t) dt = L$  vodi do Euler-Lagrangeove enačbe, katere rešitev je  $\ddot{v}(t) = \text{konst.}$  Profil hitrosti je parabola. Problem poenostavimo z uvedbo brezdimenzijskih spremenljivk:

- Brezdimenzijski čas:  $x = t/t_0$
- Brezdimenzijska hitrost:  $y(x) = v(t)/v_0$
- Brezdimenzijska pot:  $z = L/(v_0 t_0) = L/L_0$

Splošna oblika rešitve je  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ . Koeficiente določimo iz robnih pogojev:

1. **Začetna hitrost:**  $v(0) = v_0 \implies y(0) = 1 \implies \mathbf{C} = \mathbf{1}$ .
2. **Optimalnost na koncu poti:** Predpostavimo ničelni končni pospešek  $a(t_0) = 0 \implies y'(1) = 0$ .  $y'(x) = 2Ax + B \implies 2A + B = 0 \implies \mathbf{B} = -\mathbf{2A}$ .
3. **Prevožena pot:**  $\int_0^1 y(x) dx = z$ .  $\int_0^1 (Ax^2 - 2Ax + 1) dx = [\frac{A}{3}x^3 - Ax^2 + x]_0^1 = \frac{A}{3} - A + 1 = z$ . Iz tega sledi  $\mathbf{A} = \frac{3}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{z})$ .

Na sliki 1 je prikazana družina rešitev za različne vrednosti parametra  $z$ , ki v celoti opiše situacijo:  $z > 1$  zahteva pospeševanje,  $z < 1$  zaviranje, pri  $z = 1$  pa je optimalno ohranjati hitrost.



Slika 1: Družina optimalnih profilov za različne vrednosti parametra  $z$ .

## 2 Poljubna končna hitrost

V tej nalogi opustimo predpostavko o ničelnem končnem pospešku ( $y'(1) = 0$ ) in namesto tega predpišemo končno hitrost  $v(t_0) = v_f$ . V brezdimenzijski obliki to postane  $y(1) = y_f = v_f/v_0$ . To je nov robni pogoj, ki spremeni izračun koeficientov profila  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ .

1.  $y(0) = 1 \implies \mathbf{C} = \mathbf{1}$ .
2.  $y(1) = y_f \implies A(1)^2 + B(1) + C = y_f \implies A + B + 1 = y_f \implies \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{y_f} - \mathbf{1}$ .
3.  $\int_0^1 y(x)dx = z \implies \int_0^1 (Ax^2 + Bx + 1)dx = z \implies \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = \mathbf{z}$ .

Rešitev sistema dveh enačb z dvema neznankama ( $A, B$ ) nam da:

$$A = -6(z - 1) + 3(y_f - 1) \quad (2)$$

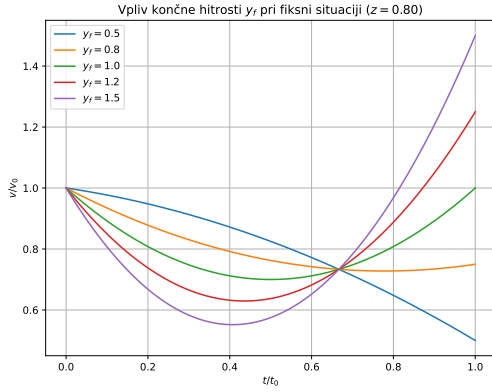
$$B = 6(z - 1) - 4(y_f - 1) \quad (3)$$

Analizo vpliva predpisane končne hitrosti razdelimo na dva komplementarna dela, da dobimo celosten vpogled v obnašanje modela.

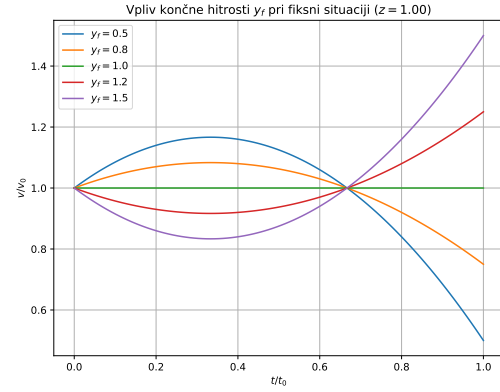
### Analiza pri fiksni situaciji (različen $z$ )

Najprej opazujemo, kako se mora vozilo obnašati v štirih različnih fiksni situacijah ( $z$ ), če mu predpišemo različne končne hitrosti. To je prikazano na sliki 2. Vsak graf ustreza eni situaciji:

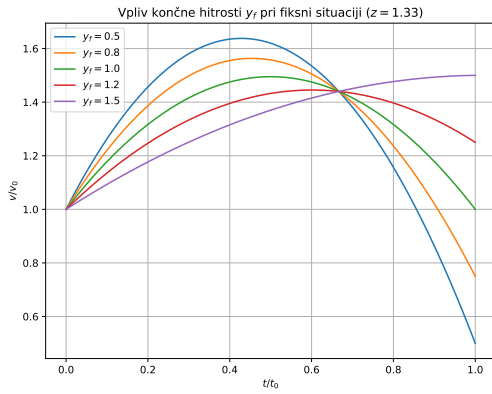
- **$z=0.8$  (zaviranje):** Osnovna strategija je zaviranje. Če želimo doseči visoko končno hitrost (npr.  $y_f = 1.5$ ), mora vozilo najprej zavirati manj strmo (ali celo rahlo pospešiti), da ne izgubi preveč poti, in nato močnejše pospešiti proti koncu.
- **$z=1.0$  (ohranjanje poti):** Brez zahteve po končni hitrosti bi vozilo ohranjalo hitrost. Za dosego nižje končne hitrosti mora zavirati, za dosego višje pa pospeševati.
- **$z=1.33$  in  $z=1.8$  (pospeševanje):** Osnovna strategija je pospeševanje. Zahteva po nizki končni hitrosti prisili vozilo v močnejše zaviranje na koncu intervala.



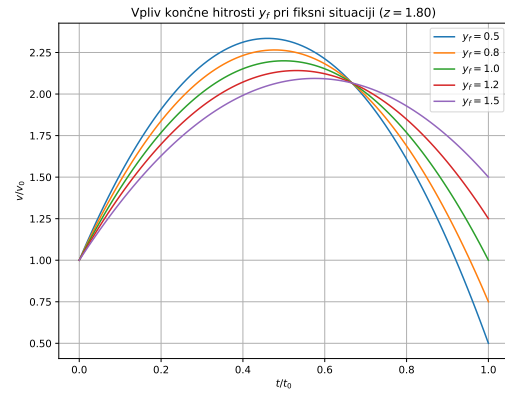
(a) Situacija zaviranja ( $z = 0.8$ ).



(b) Situacija ohranjanja poti ( $z = 1.0$ ).



(c) Situacija pospeševanja ( $z = 1.33$ ).

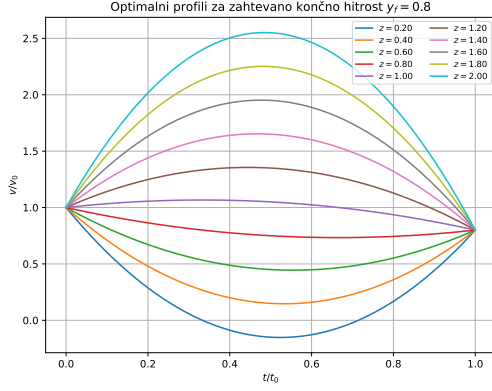


(d) Situacija močnega pospeševanja ( $z = 1.8$ ).

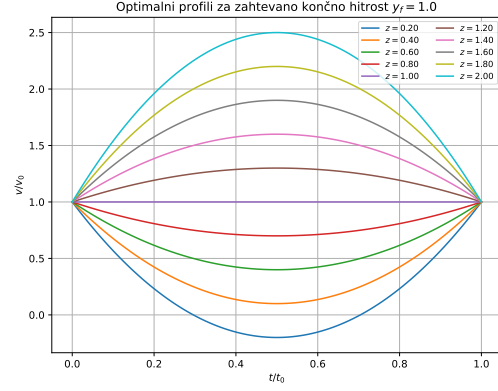
Slika 2: Vpliv predpisane končne hitrosti  $y_f$  na optimalni profil pri štirih različnih fiksnih situacijah  $z$ .

### Analiza pri fiksni končni hitrosti (različen $y_f$ )

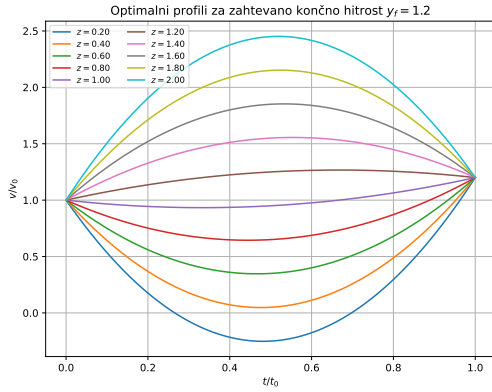
V drugem primeru analizo obrnemo: opazujemo, kako se mora vozilo obnašati v različnih situacijah (gost nabor 10 vrednosti za  $z$ ), če je končna hitrost vedno enaka. To je prikazano na sliki 3. Ta pristop je uporaben, če na primer za semaforjem velja nova omejitev hitrosti. Vsak graf prikazuje rešitve za 10 različnih vrednosti  $z$  pri fiksni končni hitrosti  $y_f$ . Večja gostota krivulj nam daje boljši vpogled v zvezno spreminjanje rešitve glede na parameter  $z$ .



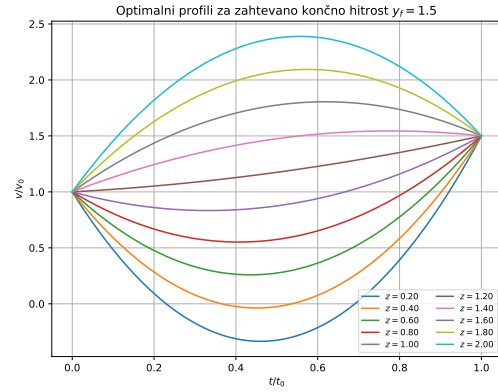
(a)  $y_f = 0.8$



(b)  $y_f = 1.0$



(c)  $y_f = 1.2$



(d)  $y_f = 1.5$

Slika 3: Optimalni profili za 10 različnih situacij  $z$  (od 0.2 do 2.0) pri štirih različnih predpisanih končnih hitrostih  $y_f$ .

### 3 Druge izbire funkcionala

#### Splošni primer: Pospeševanje in zaviranje

Problem posplošimo z minimizacijo funkcionala  $\mathcal{L} = |\dot{v}|^{2p}$ . Iz zapiskov s predavanj vemo, da je rešitev Euler-Lagrangeove enačbe za ta funkcional oblike:

$$v(t) = -\frac{2p-1}{\lambda} \left( C - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{2p}{2p-1}} + D \quad (4)$$

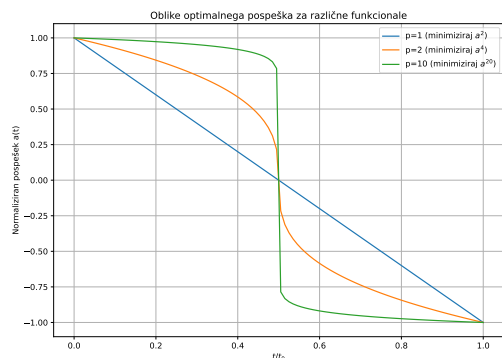
Z odvajanjem te enačbe po času dobimo profil pospeška:

$$a(t) = \left( C - \frac{\lambda t}{2p} \right)^{\frac{1}{2p-1}} = (K_1 t + K_2)^{\frac{1}{2p-1}} \quad (5)$$

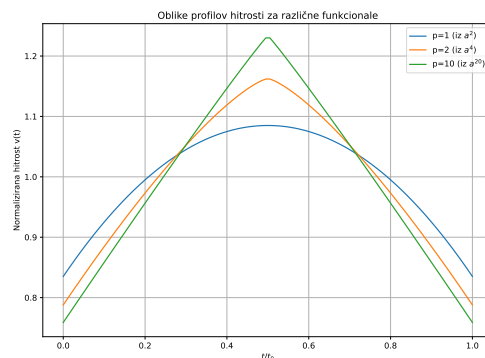
V splošnem primeru, ko vozilo pospešuje in nato zavira (npr. pri  $z > 1$ ), bo osnova  $K_1 t + K_2$  linearna funkcija, ki na intervalu  $[0, t_0]$  zamenja predznak.

Na sliki 4 sta prikazani obliki pospeška in iz njega izračunane hitrosti. Z večanjem  $p$  se profil pospeška res splošči in približuje stopničasti funkciji. Posledično je profil hitrosti sestavljen iz

dveh parabol (kjer je pospešek konstanten), kar pomeni, da je prehod med pospeševanjem in zaviranjem ostrejši, a je zato pospešek bolj enakomeren.



(a) Oblike optimalnega pospeška.



(b) Pripadajoče oblike hitrosti.

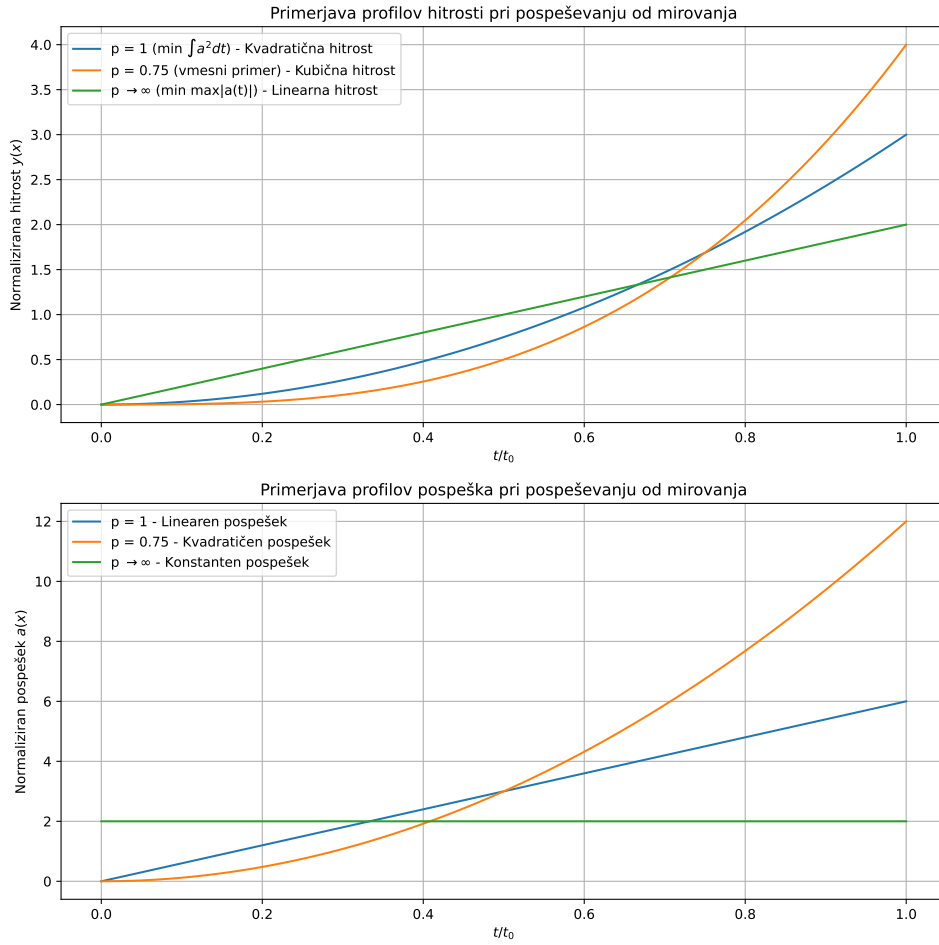
Slika 4: Primerjava oblik pospeška in hitrosti za splošni primer za različne  $p$ .

### Poseben primer: Pospeševanje iz mirovanja

Za lažjo analizo vpliva funkcionala obravnavamo poenostavljen primer pospeševanja od mirovanja ( $v(0) = 0$ ) do neke končne hitrosti. V tem primeru pospešek ne menja predznaka.

- Pri  $p = 1$  (minimizacija  $\int a^2 dt$ ) je optimalna rešitev linearno naraščajoč pospešek, kar vodi do kvadratičnega profila hitrosti.
- Pri  $p \rightarrow \infty$  (minimizacija  $\max |a(t)|$ ) pa je optimalna rešitev konstanten pospešek, kar vodi do linearno naraščajoče hitrosti. To je najbolj "enakomeren" možen pospešek.

Na sliki 5 je prikazana primerjava profilov za ta poenostavljen primer. Zgornji graf prikazuje, kako se profil hitrosti spreminja od kvadratičnega ( $p = 1$ ) proti linearnemu ( $p \rightarrow \infty$ ). Spodnji graf pa prikazuje pripadajoče profile pospeška, ki se spreminjajo od linearne proti konstantnemu. Ta poseben primer lepo ilustrira osnovni princip: višji eksponent  $p$  sili rešitev proti bolj enakomernemu pospeševanju.



Slika 5: Primerjava profilov hitrosti in pospeška za poenostavljen primer pospeševanja od mirovanja za različne  $p$ .

## 4 Omejitev velikosti hitrosti

V funkcional dodamo člen, ki kaznuje hitrost:  $\min \int (\dot{v}^2 + C v^2) dt$ . Euler-Lagrangeova enačba z upoštevanjem Lagrangeovega multiplikatorja  $\lambda$  za pot je:

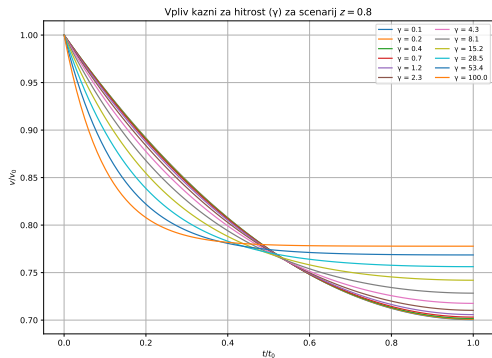
$$2\ddot{v} - 2Cv - \lambda = 0 \implies \ddot{v}(t) - Cv(t) = \lambda/2 \quad (6)$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda. Njena rešitev je vsota homogene rešitve in partikularne rešitve:  $v(t) = v_h(t) + v_p(t)$ . Homogena rešitev je  $v_h(t) = K_1 \cosh(\sqrt{C}t) + K_2 \sinh(\sqrt{C}t)$ , partikularna pa konstanta  $v_p(t) = -\lambda/(2C)$ . V brezdimenzijski obliki dobimo  $y(x) = A \cosh(\sqrt{\gamma}x) + B \sinh(\sqrt{\gamma}x) + D$ , kjer je  $\gamma = Ct_0^2$ . Z upoštevanjem robnih pogojev  $y(0) = 1, y'(1) = 0, \int y(x)dx = z$  izpeljemo koeficiente. Rešitev za  $A$  po integraciji je:

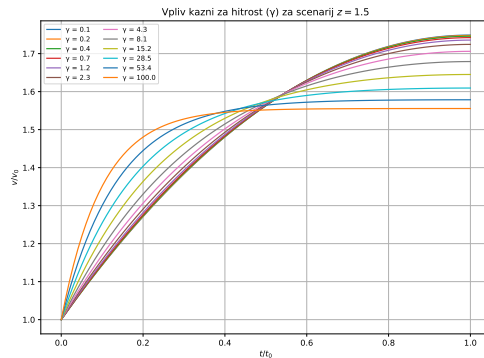
$$A = \frac{z - 1}{\frac{\tanh(\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - 1} \quad (7)$$

Na sliki 6 je prikazan vpliv kazni  $\gamma$  za dva scenarija. V obeh primerih večja vrednost  $\gamma$  vodi v bolj sploščen profil hitrosti, saj model aktivno zmanjšuje maksimalno hitrost, da se izogne visoki kazni.





(a) Scenarij zaviranja ( $z = 0.8$ ).



(b) Scenarij pospeševanja ( $z = 1.5$ ).

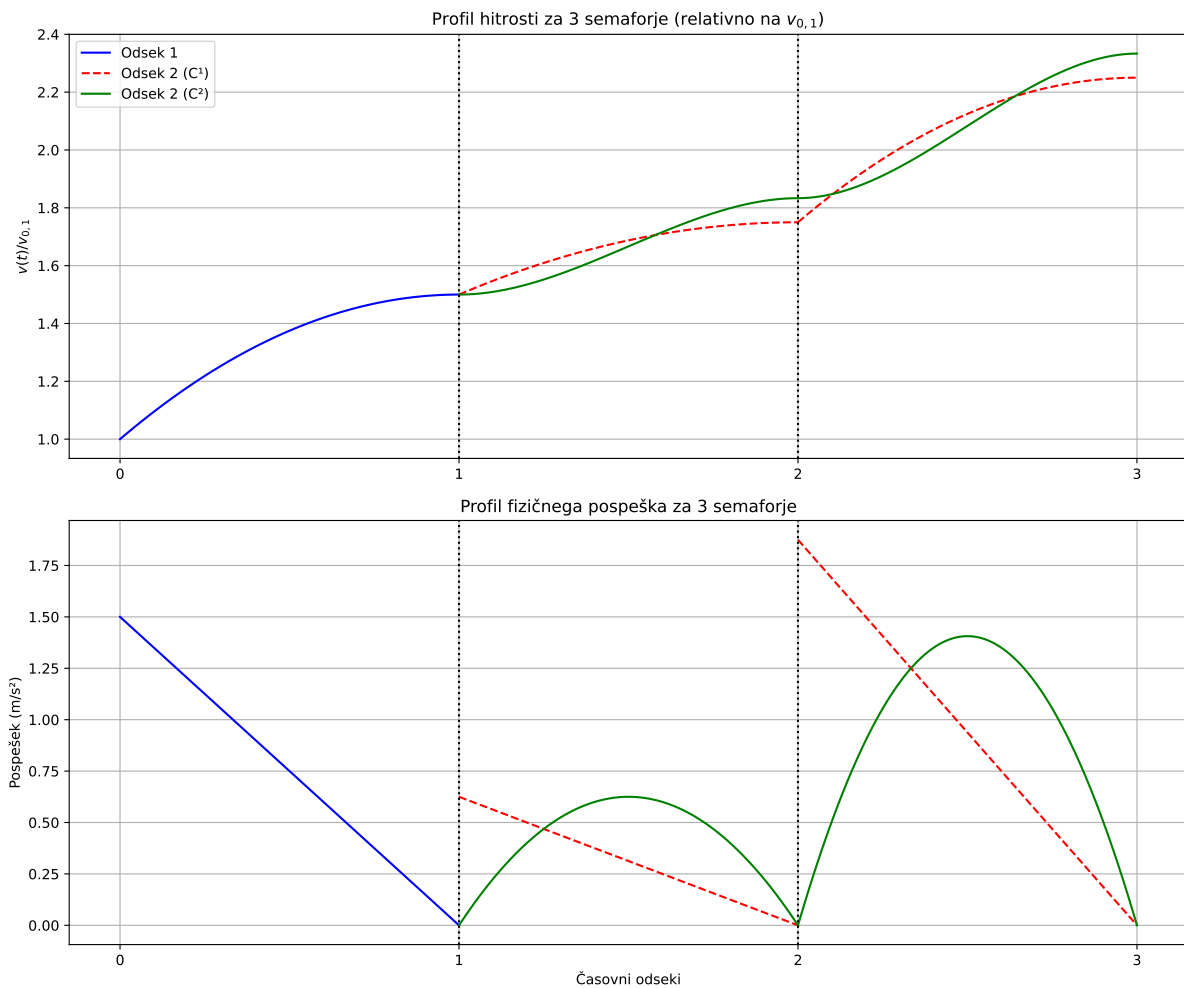
Slika 6: Vpliv kaznovalnega parametra  $\gamma$  na obliko profila hitrosti.

## 5 Zaporedni semaforji in zveznost pospeška

Problem razširimo na vožnjo skozi več zaporednih semaforjev. Tukaj je pomembna zveznost prehodov.

- **$C^1$  zveznost (nezvezni pospešek):** Zahtevamo le, da je hitrost na prehodu zvezna. Vsak odsek je rešen z optimalno parabolo iz 1. naloge.
- **$C^2$  zveznost (zvezni pospešek):** Poleg zveznosti hitrosti zahtevamo tudi zveznost pospeška:  $a_1(t_{0,1}) = a_2(t_{0,1})$ . S tem se izognemo sunku ("jerku") na prehodu. Ta dodatna zahteva pomeni, da potrebujemo bolj kompleksen model. Namesto kvadratičnega nastavka za hitrost uporabimo kubičnega:  $y(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ , ki s štirimi prostimi parametri omogoča zadostitev štirim robnim pogojem (začetna hitrost, končni pospešek, pot in začetni pospešek).

Na sliki 7 je prikazana simulacija vožnje skozi tri zaporedne semaforje. Zgornji graf prikazuje profil hitrosti, spodnji pa profil pospeška. Na profilu hitrosti vidimo, da sta obe rešitvi ( $C^1$  in  $C^2$ ) zvezni in se le rahlo razlikujeta. Ključna razlika je vidna na profilu pospeška.  $C^1$  rešitev (prekinjena črta) ima na prehodih med semaforji ostre skoke.  $C^2$  rešitev (polna črta) pa z uporabo kubičnega modela zagotovi, da je tudi pospešek na prehodih zvezen, kar predstavlja bistveno bolj udobno vožnjo.



Slika 7: Primerjava  $C^1$  in  $C^2$  rešitev za vožnjo skozi tri zaporedne semaforje. Zgoraj: profil hitrosti. Spodaj: profil pospeška.

## 6 Zaključek

Pri tej domači nalogi smo uspešno uporabili variacijski račun za modeliranje optimalne vožnje. Izkazalo se je, da je uvedba brezdimenzijskih spremenljivk izjemno uporabno orodje, ker nam poenostavi problem. Analizirali smo, kako se optimalna pot spremeni z dodajanjem različnih robnih pogojev in s spreminjanjem definicije "optimalnosti". Končno smo problem razširili na zaporedne semaforje in pokazali, da je za zagotovitev udobne vožnje brez sunkov potrebna  $C^2$  zveznost, kar zahteva uporabo modela višjega reda.