Matematično fizikalni seminar

Lastne vrednosti simetričnega tenzorja

Teodor Jovanovski, 28241125
Profesor: doc. dr. Miha Muškinja
April, 2025

1 Uvod

Med najpreprostejše fizikalne modele sodijo enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je enačba za časovno odvisnost temperature majhnega, dobro prevodnega telesa, ko lahko zanemarimo krajevno odvisnost: enačbo hoda dobimo iz energijskega zakona. Vzemimo primer žarilne nitke, ki jo grejemo s tokom, pri čemer bomo uporabili tokovni sunek iz kondenzatorja:

$$mc \cdot Tt = RI_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) - \sigma S T^4.$$

Z vpeljavo brezdimenzijskih spremenljivk dobimo enoparametrično enačbo

$$ux = a \cdot \exp(-2x) - u^4. \tag{1}$$

Zanemarili smo sevalni tok, ki ga nitka prejema iz okolice, zato se bo temperatura po dovolj dolgem času poljubno približala absolutni ničli: to pomeni, da rešitve ne kaže vleči predolgo. Da se izognemo tudi preračunavanju začetne temperature, nas bodo zanimali samo zelo močni tokovni sunki, ko lahko začetno notranjo energijo nitke zanemarimo. K enačbi (1) sodi torej začetni pogoj $u(x = 0) = 0$.

Preiskali bomo uporabnost različnih metod za reševanje enačbe (1). Sledeč fizikalnemu občutku lahko v najbolj grobi inačici zapišemo (Eulerjeva metoda). To je v bistvu le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left. yx\right|_x . \tag{2}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h. Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za izboljšanje metode zapišimo odvod kot:

$$\left. yx\right|_x = f(x, y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno) je boljši približek z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right] \tag{4}$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno):

$$K_1 = h \cdot f(x_n, y_n) \tag{5}$$

$$K_2 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1) \tag{6}$$

$$y_{n+1} = y_n + K_2 \tag{7}$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd...

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Lotimo se jih, če je zahtevana spodobna natančnost (pod 1 %): tedaj tudi ne skoparimo, izberemo večinoma četrti red (globalna natančnost je reda $\mathcal{O}\left(h^4\right)$).

Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x,\, y(x)\right) \,, \\
k_2 &= f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_1\right) \,, \\
k_3 &= f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\, y(x) + \tfrac{h}{2}k_2\right) \,, \\
k_4 &= f\left(x + h,\, y(x) + hk_3\right) \,, \\
y(x+h) &= y(x) + \tfrac{h}{6}\,\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) + \mathcal{O}(h^5) \,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Naloga:

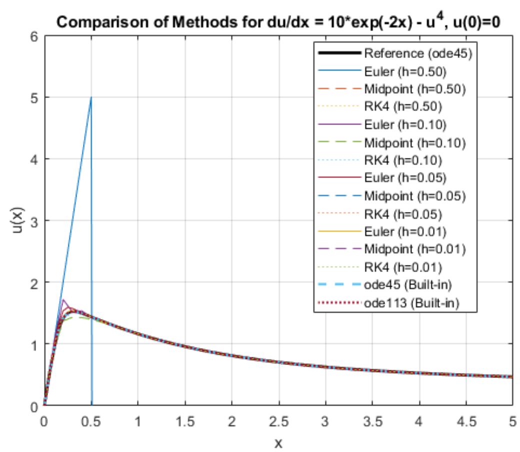
- za $a = 10$ v enačbi (1) preskusi čim več metod: Eulerjevo, Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Runge-Kutta-Fehlberg Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor ter še katero od boljših metod, ki jih najdete vgrajene v različna programska orodja. Raziščie kakšno natančnost in stabilnost lahko dosežemo s posamično metodo v odvisnosti od širine koraka? Rezultate prikažite s tabelami in/ali grafičnimi prikazi. Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri a=2 do a=18 v korakih (vsaj) po 4! *V premislek*: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?

- Z reševanjem navadne diferencialne enačbe $dy/dt = y^2 + 2t^2$ primerjaj različne metode (e.g. Eulerjeva, Midpoint, klasična Runge-Kutta 4. reda, Runge-Kutta-Fehlberg, Adams-Bashford-Moultonovo, prediktor-korektor). Privzemi, da je ob t=0, y(0)=1. Primerjajte rešitve za različne širine korakov (e.g. 0.001, 0.01, 0.1). Pozor: rešitev divergira blizu $t = 0.9$.

2 Žarilna nitka

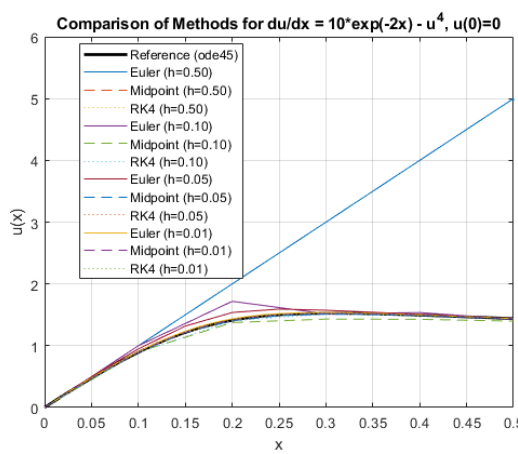
2.1 $a = 10$

V prvem delu domače naloge moramo z različnimi metodami reševanja diferencialnih enačb izračunati temperaturo žarilne nitke. Uporabil sem Eulerjevo metodo, metodo Midpoint in metodo Runge-Kutto 4.reda.



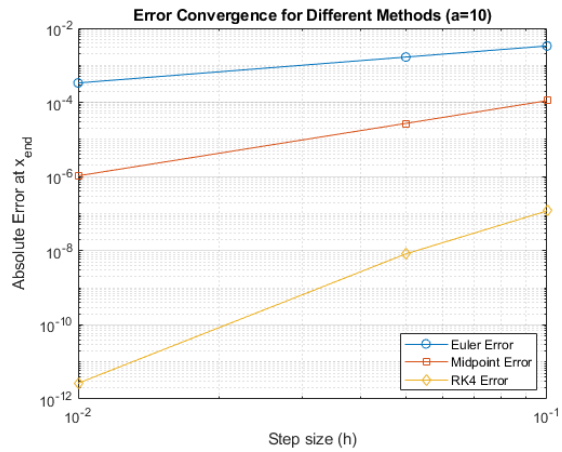
Slika 1: Graf u(x) v odvisnoti od metode in vrednosti koraka.

Iz tega zelo splošnega grafa lahko vidimo, da so skoraj vse metode dale dobre rezultate za večino vrednosti koraka h. Največje razlike so v intervalu med 0 in 0,5.



Slika 2: Graf u(x) v odvisnoti od metode in vrednosti koraka.

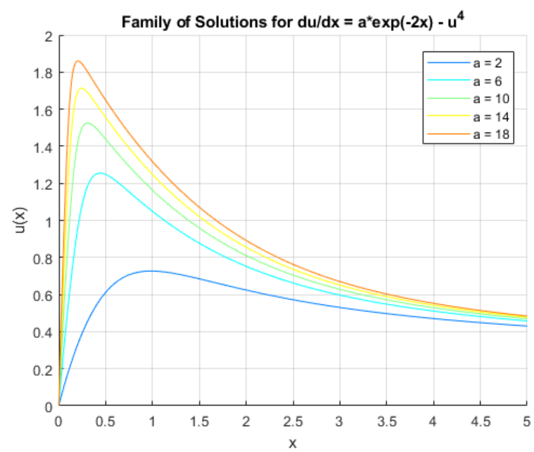
Napake metod so seveda odvisne od velikosti koraka. Manjši kot je korak, manjša je napaka. Metoda Runge-Kutto 4.reda je imela v vsakem primeru najmanjšo napako, ki se je tudi najhitreje zmanjševala z zmanjševanjem velikosti koraka.



Slika 3: Graf absolutne napake v odvisnosti od velikosti koraka pri x=5.

2.2 Družine rešitev

Za drugi del prve naloge sem se odločil, da bom uporabil MATLAB-ovo vgrajeno funkcijo *ode45,* ki uporablja metodo Dormand-Prince.



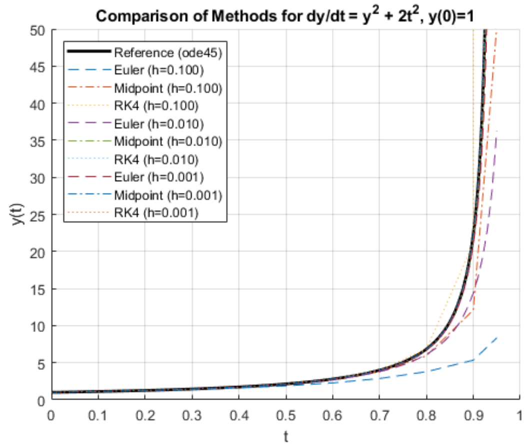
Slika 4: Spremembe krivulje temperature žarilne nitke v odvisnosti od vrednosti a..

Tabela 1: Maksimalne vrednosti u in pripadajoči x za različne vrednosti parametra a.

a	u_{max}	$x_{\text{pri max}}$
2	0,726.7	0,985.8
6	1,255.3	0,441.3
10	1,525.3	0,308.1
14	1,713.3	0,242.1
18	1,860.1	0,203.5

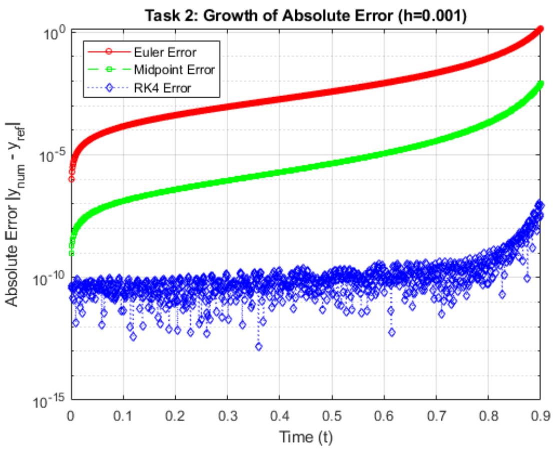
3 Reševanje DE

Pri drugi nalogi sem uporabil enake metode kot pri prvi nalogi.

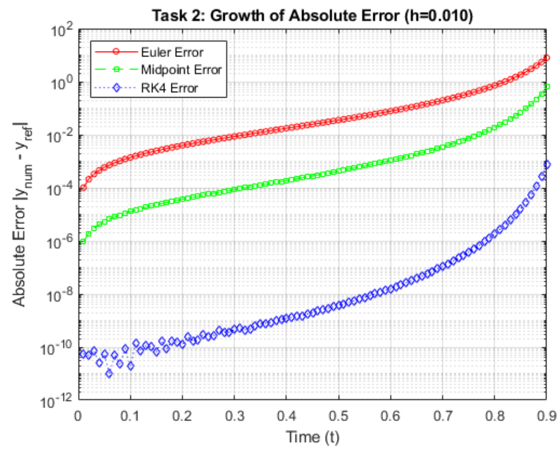


Slika 5: Graf rezultatov različnih metod pri reševanju DE.

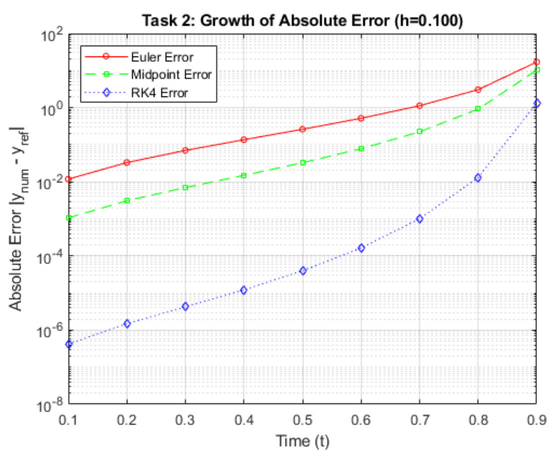
Rešitev jasno divergira, ko se t približuje vrednosti $\approx 0,9$. Pri večjih korakih je enostavna Eulerjeva metoda precej nenatančna proti koncu. Pri manjših korakih so te metode s končnimi koraki bolj natančni. Metoda RK4 je tudi tukaj najboljša. Lepi grafi absolutnih napak so prikazani na sliki 9.



Slika 6: $h = 0,001$



Slika 7: $h = 0,010$



Slika 8: $h = 0,100$

Slika 9: Absolutne napake v odvisnosti od časa t.

4 Zaključek

V tej domači nalogi sem preučil in primerjal različne numerične metode za reševanje navadnih diferencialnih enačb. Implementiral sem Eulerjevo, Midpoint in Runge-Kutta 4. reda metodo ter jih primerjal z vgrajenimi metodami in med seboj.

Rezultati obeh nalog jasno kažejo, da je natančnost močno odvisna od izbrane metode in velikosti koraka h. Metoda Runge-Kutta 4. reda je dosledno zagotavljala najmanjšo napako za dani korak in najhitrejšo konvergenco ob zmanjševanju koraka. Opazil sem tudi, da lahko metode nižjega reda, kot je Midpoint, postanejo nestabilne pri večjih korakih za nekatere vrste enačb. Pri drugi nalogi sem analiziral obnašanje metod blizu točke divergence, kjer absolutna napaka hitro narašča, še posebej pri večjih korakih h.

Izbira primerne metode in koraka je torej ključna za doseganje želene natančnosti in stabilnosti numerične rešitve, pri čemer metode višjega reda pogosto nudijo boljše rezultate.