

Fizika sevanja in dozimetrija

Skripta po predavanjih doc. dr. Tomaža Podobnika, FMF, IJS

T. Jovanovski

23. oktober 2025

This page intentionally left empty.

1 Vrste in izvori ionizirajočega sevanja

1.1 Pomembne konstante in enote

Pri delu s sevanjem in delci si pogosto pomagamo s konstantami, ki poenostavijo račune. Dve izmed najpomembnejših sta produkt reducirane Planckove konstante (\hbar) in hitrosti svetlobe (c_0) ter produkt Planckove konstante (h) in hitrosti svetlobe (c_0).

$$\hbar c_0 \approx 200 \text{ MeV fm} = 200 \text{ MeV} \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$\hbar c_0 \approx 2 \times 10^{-7} \text{ eV m} = 2 \times 10^{-4} \text{ eV mm}$$

$$hc_0 = 2\pi\hbar c_0 \approx 1240 \text{ eV nm}$$

Osnovne enote in pretvorbe: Osnovna enota za energijo v atomski in jedrski fiziki je elektronvolt (eV). En elektronvolt je definiran kot kinetična energija, ki jo pridobi elektron, ko preleti potencialno razliko 1 V v vakuumu.

- **Elektronvolt v Joule:**

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ keV} = 1.602 \times 10^{-16} \text{ J}$$

- **Povezava z enoto erg:** Enota erg je pogosta v starejši literaturi in je del CGS sistema enot.

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$$

Iz tega sledi pretvorba med elektronvoltom in ergom:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1.602 \times 10^{-19} \cdot 10^7 \text{ erg} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

1.2 Povezava med energijo in valovno dolžino fotona

Energija fotona (E) je povezana z njegovo frekvenco (ν) preko Planckove relacije:

$$E = h\nu \tag{1}$$

kjer je h Planckova konstanta. Za valovanje velja tudi zveza med valovno dolžino (λ), frekvenco (ν) in hitrostjo svetlobe (c_0):

$$\lambda\nu = c_0 \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c_0}{\lambda} \tag{2}$$

Če vstavimo izraz za frekvenco v Planckovo relacijo, dobimo iskano zvezo med energijo in valovno dolžino:

$$E = \frac{hc_0}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{hc_0}{E} \tag{3}$$

Ta enačba je ključna za preračunavanje med energijo fotona in njegovo valovno dolžino. Z uporabo konstante $hc_0 \approx 1240 \text{ eV nm}$ postanejo računi zelo enostavni, če je energija izražena v elektronvoltih in valovna dolžina v nanometrih.

Primer 1.1 (Izračun valovne dolžine). *Izračunajmo valovno dolžino fotona z energijo $E = 4\text{ eV}$.*

Rešitev: Uporabimo enačbo 3 in vstavimo vrednost za konstanto hc_0 :

$$\lambda = \frac{hc_0}{E} = \frac{1240\text{ eV nm}}{4\text{ eV}} = 310\text{ nm}$$

Fotoni z energijo 4 eV imajo torej valovno dolžino 310 nm , kar ustreza območju ultravijoličnega (UV) sevanja.

1.3 Sevanje alfa (α)

Delci alfa so jedra helija-4 (${}^4_2\text{He}$), sestavljena iz dveh protonov in dveh nevtronov. Do razpada alfa pride običajno pri težkih, nestabilnih jedrih (npr. uran, radij), ki z oddajo delca alfa preidejo v lažje, stabilnejše jedro.

Oglejmo si primer razpada radija-226:



Pri tem razpadu je pomembno upoštevati bilanco elektronov: začetni nevtralni atom radija ima 88 elektronov. Po razpadu nastane nevtralni atom radona s 86 elektroni in nevtralni atom helija z 2 elektroni. Število elektronov se ohranja. Energija, sproščena pri razpadu ($Q = 4.78\text{ MeV}$), se porazdeli kot kinetična energija med hčerinsko jedro radona in delec alfa.

Porazdelitev kinetične energije: Predpostavimo, da je jedro radija na začetku mirovalo. Njegova skupna gibalna količina je bila nič ($\vec{p}_{\text{Ra}} = 0$). Zaradi zakona o ohranitvi gibalne količine mora biti tudi skupna gibalna količina končnih produktov enaka nič:

$$\vec{p}_{\text{Rn}} + \vec{p}_{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_{\text{Rn}}| = |\vec{p}_{\alpha}| = p$$

Obe jedri se torej razletita v nasprotnih smereh z enako velikima gibalnima količinama. Kinetično energijo lahko v nerelativističnem približku (ki tukaj velja) zapišemo kot $T = p^2/(2m)$. Zapišimo razmerje kinetičnih energij:

$$\frac{T_{\text{Rn}}}{T_{\alpha}} = \frac{p^2/(2m_{\text{Rn}})}{p^2/(2m_{\alpha})} = \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Rn}}}$$

Lažji delec (alfa) torej odnese večji del kinetične energije. Celotna sproščena energija Q je vsota obeh kinetičnih energij:

$$Q = T_{\alpha} + T_{\text{Rn}} = T_{\alpha} \left(1 + \frac{T_{\text{Rn}}}{T_{\alpha}} \right) = T_{\alpha} \left(1 + \frac{m_{\alpha}}{m_{\text{Rn}}} \right) = T_{\alpha} \frac{m_{\text{Rn}} + m_{\alpha}}{m_{\text{Rn}}}$$

Iz tega lahko izrazimo kinetično energijo delca alfa:

$$T_{\alpha} = Q \cdot \frac{m_{\text{Rn}}}{m_{\text{Rn}} + m_{\alpha}} \quad (5)$$

V našem primeru sta masi približno $m_{\text{Rn}} \approx 222u$ in $m_{\alpha} \approx 4u$. Delež energije, ki jo odnese delec alfa, je:

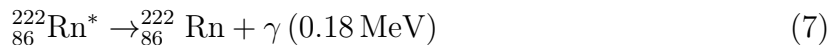
$$\frac{T_{\alpha}}{Q} = \frac{222}{222 + 4} \approx 0.982$$

Delec alfa odnese več kot 98 % razpadne energije, zato lahko v grobem približku zapišemo $T_{\alpha} \approx Q$.

Razvejitve razpada: Razpad, opisan v enačbi 4, se zgodi z verjetnostjo (razvejitveno razmerje, Br) 94.6 %. Z manjšo verjetnostjo (5.4 %) lahko radij razpade v vzbujeno stanje radona:



Jedro Rn^* je v vzbujenem stanju, kar pomeni, da ima višjo maso kot v osnovnem stanju. Zato je v tem primeru na voljo manj energije za kinetično energijo produktov. Vzbujeno jedro Rn^* nato skoraj takoj preide v osnovno stanje z oddajo fotona (sevanje gama):



Skupna sproščena energija v obeh primerih je enaka: $4.60 \text{ MeV} + 0.18 \text{ MeV} = 4.78 \text{ MeV}$.

Povprečna kinetična energija delcev alfa: Če opazujemo veliko število razpadov radija, bo povprečna kinetična energija oddanih delcev alfa tehtano povprečje kinetičnih energij iz obeh možnih razpadov:

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha \rangle &= Br_1 \cdot T_{\alpha,1} + Br_2 \cdot T_{\alpha,2} \\ &= 0.946 \cdot (4.78 \text{ MeV}) + 0.054 \cdot (4.60 \text{ MeV}) \\ &= 4.522 \text{ MeV} + 0.248 \text{ MeV} \approx 4.77 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (8)$$

Povprečna energija delcev alfa je torej le malenkost manjša od maksimalne možne.

1.4 Sevanje beta (β)

Delci beta so elektroni (β^-) ali pozitroni (β^+), ki nastanejo pri jedrskih razpadih. Zaradi svoje majhne mase so precej lažji od delcev alfa.

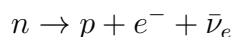
- Mirovna masa elektrona/pozitrona: $m_{e^\pm} c_0^2 \approx 511 \text{ keV} = 0.511 \text{ MeV}$.
- Naboj: $q_{e^\pm} = \mp q_0$, kjer je $q_0 = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ osnovni naboj.

Masa delca alfa ($m_\alpha c_0^2 \approx 3.7 \text{ GeV}$) je približno 7300-krat večja od mase delca beta.

1.4.1 Razpadi β^-

Razpadi β^- so značilni za jedra, ki imajo presežek nevtronov glede na število protonov. Po lupinskem modelu jedra se stanja z energijo zapolnjujejo ločeno za protone in nevtrone. Če je v jedru preveč nevtronov, postane jedro nestabilno, saj je za zadnje nevtrone energijsko ugodneje, da razpadejo, kot da bi zasedli višja energijska stanja.

Osnovni proces razpada β^- je pretvorba nevtrona v proton, pri čemer nastaneta elektron in elektronski antinevtrino ($\bar{\nu}_e$):



Elektronski antinevtrino je delec z zanemarljivo majhno maso, brez naboja in interagira preko šibke interakcije. Njegova verjetnost za interakcijo s snovjo je izjemno majhna, zato v dozimetriji njegove energije ne upoštevamo, saj praktično ne prispeva k absorbirani dozi.

Primer razpada fosforja-32: Tipičen primer β^- razpada je razpad fosforja-32 v žveplo-32:



kjer je $Q_{\beta^-} = 1.71 \text{ MeV}$ maksimalna kinetična energija, ki je na voljo produktom razpada.

Elektronska bilanca: Pri razpadu se atomsko število poveča za 1 ($15 \rightarrow 16$). Če smo na začetku imeli nevtralen atom fosforja s 15 elektroni v elektronski ovojnici, po razpadu nastane *ion* žvepla ($^{32}_{16}\text{S}^+$) s 16 protoni, a le 15 elektroni v ovojnici, ter odleteli delec β^- . Ker je žveplov ion pozitiven, bo hitro zajel prosti elektron iz okolice in postal nevtralen. Pomembno je, da se pri izračunu sproščene energije upošteva razlika mas med začetnim in končnim *nevtralnim* atomom, saj ta razlika že vključuje maso novonastalega elektrona.

Energijska bilanca in spekter: Pri dvo-delnih razpadih (kot je bil razpad α) se sproščena energija med delca porazdeli na točno določen način. Razpad β^- pa je tri-delni razpad (hčerinsko jedro, elektron, antinevtrino). Sproščena energija Q_{β^-} se porazdeli med kinetične energije elektrona (T_{e^-}) in antinevtrina ($T_{\bar{\nu}}$), pri čemer kinetično energijo hčerinskega jedra zanemarimo:

$$Q_{\beta^-} = T_{\max} = T_{e^-} + T_{\bar{\nu}} \quad (10)$$

Ker se energija porazdeli med dva delca, elektron nima vedno enake energije. Lahko prejme katerikoli delež energije med 0 in T_{\max} . Posledica tega je, da imajo delci β^- **zvezni energijski spekter**.

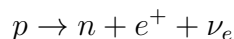
Za dozimetrične izračune je pomembna povprečna energija delcev β^- . Ta je odvisna od oblike spektra in s tem od specifičnega jedrskega razpada.

- V splošnem velja: $\langle T_{e^-} \rangle \approx (0.3 - 0.45) \cdot T_{\max}$.
- Za grobo oceno pa pogosto uporabimo približek: $\langle T_{e^-} \rangle \approx \frac{1}{3} T_{\max}$.

1.4.2 Razpadi β^+

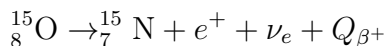
Razpadi β^+ so značilni za jedra s presežkom protonov. Pri teh jedrih je odbojna elektrostatska energija med protoni tako velika, da postane energijsko ugodno, da se en proton pretvori v nevtron. Ta proces je mogoč le znotraj jedra, saj imajo prosti protoni manjšo maso od nevtronov in zato ne razpadajo.

Osnovni proces razpada β^+ je:



Pri tem nastaneta pozitron (e^+), ki je antielektron, in elektronski nevtrino (ν_e). Podobno kot pri razpadu β^- , se tudi tukaj sproščena energija Q porazdeli med kinetične energije treh produktov, zato imajo pozitroni zvezni energijski spekter.

Primer razpada kisika-15:



Pri tem razpadu je $Q_{\beta^+} = T_{\max} = 1.73 \text{ MeV}$.

Elektronska bilanca: Začetni nevtralni atom kisika ima 8 protonov in 8 elektronov. Po razpadu nastane jedro dušika s 7 protoni, vendar ostane v elektronski ovojnici 8 elektronov. Hkrati iz jedra izleti pozitron. Končni sistem je torej sestavljen iz negativnega iona dušika ($^{15}_7\text{N}^-$) in pozitrona. Za ohranitev naboja mora biti eden izmed elektronov v ovojnici oddan. Pri računanju razpadne energije Q moramo upoštevati maso dveh elektronov (enega za kompenzacijo pozitrona in enega za oddanega elektrona iz ovojnice).

Povprečna energija: Tudi za β^+ delce velja, da je povprečna energija del spektra:

$$\bullet \langle T_{e^+} \rangle \approx (0.3 - 0.45) \cdot T_{\max}.$$

1.4.3 Delci delta (δ)

Delci delta (ali δ -žarki) so sekundarni elektroni, ki jih primarni nabiti delec (npr. α , β ali proton) med preletom snovi izbije iz atomov z dovolj veliko kinetično energijo, da lahko sami nadalje ionizirajo snov. Ti elektroni ustvarijo lastne, krajše sledi, ki se odcepijo od sledi primarnega delca.

1.5 Elektroni iz pospeševalnikov

Visokoenergijske elektrone lahko proizvedemo v pospeševalnikih, kot so linearni pospeševalniki (LINAC). Ti elektroni imajo monoenergijski spekter (vsi imajo praktično enako energijo) in se uporabljajo v medicini za obsevanje (elektronska terapija), predvsem za tarče blizu površine telesa, saj imajo omejen doseg v tkivu.

1.6 Fotoelektroni in Augerjevi elektroni

Ta dva tipa elektronov nastaneta kot posledica interakcije fotonov (npr. žarkov X ali gama) z atomi, predvsem pri fotoefektu.

Fotoefekt: Pri fotoefektu foton z energijo $h\nu$ interagira z elektronom, ki je vezan v eni od notranjih lupin atoma (npr. K, L). Foton preda vso svojo energijo elektronu in pri tem izgine. Če je energija fotona večja od vezavne energije elektrona $|E_{v,K}|$, je elektron izbit iz atoma. Njegova kinetična energija je:

$$T_0 = h\nu - |E_{v,K}| \quad (11)$$

Ta izbiti elektron imenujemo **fotoelektron**.

Sproščanje atoma in Augerjev efekt: Po izbitju fotoelektrona ostane v notranji lupini atoma (npr. K) prazno mesto oz. vrzel. Atom je v vzbujenem, ioniziranem stanju in se želi vrniti v osnovno stanje. To lahko stori na dva načina:

1. **Emisija karakterističnega žarka X:** Vrzel v lupini K zapolni elektron iz višje lupine (npr. L). Razlika v vezavni energiji se sprosti v obliki fotona z značilno energijo: $h\nu' = |E_{v,K}| - |E_{v,L}|$.
2. **Augerjev efekt:** Energija, ki se sprosti ob prehodu elektrona iz lupine L v K, se ne izseva v obliki fotona, ampak se prenese na drug elektron v eni od zunanjih lupin (npr. L ali M), ki ga izbije iz atoma. Ta izbiti elektron imenujemo **Augerjev elektron**. Njegova kinetična energija je npr. $T_1 = (|E_{v,K}| - |E_{v,L}|) - |E_{v,L}| = |E_{v,K}| - 2|E_{v,L}|$.

Kaskada Augerjevih elektronov: Augerjev efekt se lahko nadaljuje v kaskadi. Po prvem Augerjevem elektronu ostaneta v atomu dve vrzeli (ena v lupini L in ena v lupini M). Ti dve vrzeli se zapolnita z elektroni iz še višjih lupin, kar lahko sproži emisijo novih Augerjevih elektronov.

Oglejmo si energijsko bilanco za celoten proces, če predpostavimo, da se atom sprošča izključno preko Augerjevega efekta:

- **Korak 1 (Fotoefekt):** Vpadni foton izbiye fotoelektron. Skupna kinetična energija, predana elektronu, je $T_0 = h\nu - |E_{v,K}|$.
- **Korak 2 (Prvi Augerjev elektron):** Prehod $L \rightarrow K$ sprosti energijo $|E_{v,K}| - |E_{v,L}|$, ki izbiye elektron iz lupine L. Njegova kinetična energija je $T_1 = |E_{v,K}| - 2|E_{v,L}|$. Skupna kinetična energija do sedaj:

$$T_{\text{skupna}} = T_0 + T_1 = (h\nu - |E_{v,K}|) + (|E_{v,K}| - 2|E_{v,L}|) = h\nu - 2|E_{v,L}|$$

- **Korak 3 (Naslednji Augerjevi elektroni):** Sedaj imamo dve vrzeli v lupini L. Vsaka se zapolni z elektronom iz lupine M. Vsak prehod sprosti energijo $|E_{v,L}| - |E_{v,M}|$, ki izbiye elektron iz lupine M. Dobimo dva nova Augerjeva elektrona, vsak z energijo $T_2 = T_3 = |E_{v,L}| - 2|E_{v,M}|$. Skupna kinetična energija po tem koraku:

$$\begin{aligned} T_{\text{skupna}} &= T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = (h\nu - 2|E_{v,L}|) + 2 \cdot (|E_{v,L}| - 2|E_{v,M}|) \\ &= h\nu - 4|E_{v,M}| \end{aligned}$$

Kaskada se nadaljuje, dokler vse vrzeli ne dosežejo najbolj zunanje lupine. Če je na koncu N Augerjevih elektronov in en fotoelektron, bo skupna kinetična energija vseh elektronov:

$$T_{\text{skupna}} = h\nu - (N + 1)|E_{v,\text{zun}}|$$

Ker je vezavna energija zunanje lupine $|E_{v,\text{zun}}|$ zelo majhna, lahko rečemo, da se je praktično celotna energija vpadnega fotona pretvorila v kinetično energijo nabitih delcev (fotoelektrona in Augerjevih elektronov):

$$T_{\text{skupna}} \approx h\nu$$

To je ključnega pomena za dozimetrijo, saj pomeni, da se energija fotona pri fotoefektu lokalno absorbira v obliki kinetične energije elektronov.

Povprečna kinetična energija pri fotoefektu: Celotna kinetična energija, ki je predana elektronom (fotoelektronu in Augerjevim elektronom), je odvisna od tega, ali se vrzel v notranji lupini zapolni s fluorescenco (oddajo žarka X) ali z Augerjevim efektom.

Verjetnost, da se vrzel v K-lupini zapolni s fluorescenco, označimo z Y_K (fluorescenčni donos za K-lupino). Verjetnost za relaksacijo preko Augerjevega efekta je torej $1 - Y_K$.

Oglejmo si povprečno kinetično energijo $\langle T_K \rangle$, ki je predana elektronom, če fotoefekt nastane na K-lupini:

- Z verjetnostjo Y_K se izseva foton in energija $|E_{v,K}|$ se ne pretvori v kinetično energijo elektronov. Kinetično energijo ima le fotoelektron: $T_0 = h\nu - |E_{v,K}|$.
- Z verjetnostjo $1 - Y_K$ pride do Augerjevega efekta in celotna energija vpadnega fotona $h\nu$ se porazdeli med kinetične energije fotoelektrona in Augerjevih elektronov.

Povprečna kinetična energija vseh nastalih elektronov je torej:

$$\langle T_K \rangle = Y_K(h\nu - |E_{v,K}|) + (1 - Y_K)h\nu = h\nu - Y_K|E_{v,K}|$$

Podobno velja za fotoefekt na L-lupini (s fluorescenčnim donosom Y_L):

$$\langle T_L \rangle = h\nu - Y_L|E_{v,L}|$$

Višje orbitale za te izračune običajno zanemarimo.

Celotno povprečno energijo, ki jo prejmejo elektroni pri fotoefektu v nekem materialu, dobimo tako, da upoštevamo verjetnosti za interakcijo v posameznih lupinah. Označimo s P_K delež vseh fotoefektov, ki se zgodijo v K-lupini. Z $(1 - P_K)$ označimo delež tistih, ki se zgodijo v vseh ostalih lupinah. Če predpostavimo, da so vsi ostali dogodki omejeni na L-lupino (z deležem P_L znotraj teh ostalih), lahko zapišemo: $P_K + (1 - P_K)P_L \approx 1$.

Povprečna kinetična energija $\langle T \rangle$ je tehtano povprečje:

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= P_K \langle T_K \rangle + (1 - P_K)P_L \langle T_L \rangle \\ &= P_K(h\nu - Y_K|E_{v,K}|) + (1 - P_K)P_L(h\nu - Y_L|E_{v,L}|) \\ &= h\nu \underbrace{(P_K + (1 - P_K)P_L)}_{\approx 1} - P_K Y_K |E_{v,K}| - (1 - P_K)P_L Y_L |E_{v,L}| \\ &\approx h\nu - P_K Y_K |E_{v,K}| - (1 - P_K)P_L Y_L |E_{v,L}| \end{aligned} \quad (12)$$

Ta enačba nam pove, da je energija, predana elektronom, enaka energiji vpadnega fotona, zmanjšani za energijo, ki uide iz sistema v obliki fluorescenčnih žarkov X.

Posebni primeri:

- Če je $P_K = 1$ (interakcija samo v K-lupini), se enačba poenostavi v $\langle T \rangle = h\nu - Y_K|E_{v,K}| = \langle T_K \rangle$.
- Če je $P_K = 0$ (interakcija samo v L-lupini, $P_L = 1$), dobimo $\langle T \rangle = h\nu - Y_L|E_{v,L}| = \langle T_L \rangle$.

1.7 Comptonovi elektroni

Comptonov efekt je sipanje fotona na prostem ali šibko vezanem elektronu. Ta interakcija je dominantna pri srednjih energijah fotonov (npr. v območju od 100 keV do nekaj MeV za lahke materiale). Predpostavimo, da je vezavna energija elektrona zanemarljiva v primerjavi z energijo vpadnega fotona ($h\nu \gg |E_v|$).

Pri tej interakciji foton preda del svoje energije elektronu in se pri tem siplje pod kotom. Kinetična energija, ki jo prejme Comptonov elektron (T_e), je enaka razliki med energijo vpadnega ($h\nu$) in sipanega ($h\nu'$) fotona:

$$T_e = h\nu - h\nu' \quad (13)$$

1.8 Tvorba parov e^-e^+

Pri energijah fotonov, višjih od dvakratnika mirovne mase elektrona ($h\nu > 2m_e c_0^2 \approx 1.022 \text{ MeV}$), lahko foton v močnem polju (običajno v bližini atomskega jedra) izgine in ustvari par elektron-pozitron.

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$

Ta proces se ne more zgoditi v praznem prostoru, saj se pri tem ne bi ohranila gibalna količina. Foton mora interagirati z nečim (npr. jedrom), kar prevzame odvečno gibalno količino. Presežek energije fotona nad 1.022 MeV se porazdeli kot kinetična energija med nastali elektron in pozitron.

Omejitve modela Augerjevega pojava: Model kaskade Augerjevih elektronov, kot je bil opisan, je poenostavljen. Naivno bi pričakovali, da bo verjetnost za Augerjev pojav, $(1 - Y_K)$, naraščala z atomskim številom Z , saj je pri višjem Z več elektronov, ki lahko sodelujejo v procesu. V resnici pa je ravno obratno.

Kot kaže diagram, verjetnost za fluorescenco (Y_K) močno narašča z atomskim številom Z . Pri težkih elementih je torej sprostitev atoma preko emisije karakterističnih žarkov X veliko bolj verjetna kot preko Augerjevega efekta.

1.9 Žarki X (fotoni)

Žarki X so visokoenergijski fotoni. Glede na njihov izvor jih delimo v dve glavni kategoriji.

1.9.1 Elektronski prehodi v atomih (fluorescenca)

Kadar pride do vrzeli v eni od notranjih elektronskih lupin atoma, jo bo zapolnil elektron z višje energijske lupine. Razlika v vezavni energiji se izseva v obliki fotona. Ker so razlike med energijskimi nivoji v atomu diskretne in značilne za vsak element, so tudi energije izsevanih fotonov kvantizirane. Dobimo **črtast spekter**.

Primeri prehodov so $L \rightarrow K$, $M \rightarrow L$ itd. Energija fotona je enaka razliki vezavnih energij, npr. $h\nu = |E_K| - |E_L|$. Te fotone imenujemo **karakteristični žarki X**, saj so njihove energije (oziroma frekvence in valovne dolžine) značilne za posamezen atom in nam služijo kot "prstni odtis" elementa.

1.9.2 Ustavljanje elektronov in pozitronov (zavorno sevanje)

Drugi vir žarkov X je pospeševanje (ali zaviranje) hitrih nabitih delcev v zunanjem električnem polju, običajno v polju atomskega jedra. Ta proces imenujemo **zavorno sevanje** (nem. *Bremsstrahlung*).

Moč sevanja (P) pospešenega delca je sorazmerna s kvadratom njegovega pospeška (a):

$$P \propto a^2 = \left(\frac{F}{m}\right)^2 \propto \frac{1}{m^2}$$

Ker je moč sevanja obratno sorazmerna s kvadratom mase delca, je ta pojav izrazit le za lahke delce, kot sta elektron in pozitron. Težji delci, kot so mioni ali protoni, sevajo bistveno manj.

- Mion (μ^\pm): $m_\mu c^2 \approx 106 \text{ MeV}$, kar pomeni, da je $m_\mu/m_e \approx 207$. Razmerje moči sevanja je:

$$\frac{P_\mu}{P_e} = \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \approx \frac{1}{207^2} \approx \frac{1}{43000}$$

Mion pri enakem pospešku seva več kot 40.000-krat manj moči kot elektron.

Za razliko od karakterističnih žarkov X ima zavorno sevanje **zvezni energijski spekter**.

Izvori zavernega sevanja:

- **Sinhrotronsko sevanje:** Je zavno sevanje, ki ga oddajajo elektroni, ko krožijo po ukrivljenih tirih v sinhrotronih. To sevanje je lahko zelo intenzivno in se uporablja v raziskavah (npr. v biologiji za določanje strukture molekul). Z uporabo posebnih magnetnih struktur (t.i. *wigglerjev*) se tir elektronov močno ukrivi, kar še poveča intenziteto sevanja.
- **Rentgenski žarki:** Najpogosteje jih proizvajamo v rentgenskih ceveh ali linearnih pospeševalnikih. Elektrone pospešimo z visoko napetostjo (U) in jih nato ustavimo v kovinski tarči, ki je običajno iz materiala z visokim tališčem in visokim vrstnim številom Z (npr. volfram, W).

Klasifikacija žarkov X glede na energijo: Žarke X, ki se uporabljajo v medicini in tehniki, pogosto klasificiramo glede na pospeševalno napetost U , s katero so bili ustvarjeni elektroni.

Tabela 1: Klasifikacija žarkov X glede na napetost.

Napetost U (kV)	Vrsta žarkov X
0.1 – 20	Mehki
20 – 120	Diagnostični
120 – 300	Ortovoltni
300 – 1000	Srednjeenergijski
> 1000 (1 MV)	Trdi (megavoltni)

1.10 Sevanje gama (γ)

Žarki gama so prav tako fotoni, tako kot žarki X. Razlika med njimi ni v energiji, temveč v njihovem izvoru. Medtem ko žarki X izvirajo iz procesov v elektronski ovojnici atoma ali iz zavernega sevanja, žarki gama nastanejo pri jedrskih prehodih.

1.10.1 Jedrski prehodi

Po razpadu α ali β pogosto ostane hčerinsko jedro v vzbujenem energijskem stanju. Jedro nato preide v nižje energijsko ali osnovno stanje, pri čemer razliko v energiji izseva v obliki enega ali več fotonov – žarkov gama. Ker so energijski nivoji v jedru kvantizirani in značilni za vsako jedro, imajo tudi žarki gama **črtast spekter**. Z merjenjem njihovih energij lahko natančno določimo, kateri izotop je prisoten.

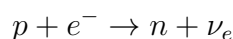
Energije žarkov gama, ki jih opazujemo pri jedrskih razpadih, se običajno gibljejo v območju:

$$2.6 \text{ keV} \lesssim h\nu \lesssim 7.1 \text{ MeV}$$

1.10.2 Zajetje elektrona (Electron Capture, EC)

Zajetje elektrona je proces, ki konkurira razpadu β^+ in je značilen za jedra s presežkom protonov. Pri tem procesu jedro zajame enega od elektronov iz lastne elektronske ovojnice (najpogosteje iz lupin K ali L). V jedru se ta elektron spoji s protonom, pri čemer

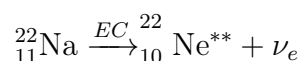
nastaneta nevtron in elektronski nevtrino.



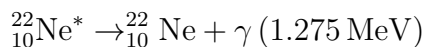
Ker ima valovna funkcija elektronov iz notranjih lupin neničelno vrednost v območju jedra, obstaja določena verjetnost za ta proces. Po zajetju elektrona ostane hčerinsko jedro pogosto v vzbujenem stanju. Celoten proces poteka v več korakih:

1. **Jedrska reakcija:** Jedro zajame elektron, odda nevtrino in preide v vzbujeno stanje (npr. $^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne}^*$).
2. **Relaksacija jedra:** Vzbujeno hčerinsko jedro preide v osnovno stanje z oddajo žarka gama ali preko notranje konverzije (izbitje elektrona iz ovojnice).
3. **Relaksacija atoma:** V elektronski ovojnici ostane vrzel na mestu zajetega elektrona. Ta vrzel se zapolni, kar povzroči emisijo karakterističnih žarkov X ali Augerjevih elektronov.

Primer razpada natrija-22: Natrij-22 razpada tako z razpadom β^+ (verjetnost 90.5 %) kot z zajetjem elektrona (verjetnost 9.5 %). Pri zajetju elektrona velja:



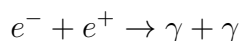
Sproščena energija pri tej jedrski pretvorbi ($m_{\text{Na}}c^2 - m_{\text{Ne}^{**}}c^2 \approx 1.568 \text{ MeV}$) se odnese kot kinetična energija nevtrina (T_{ν_e}), zmanjšana za vezavno energijo zajetega elektrona ($|E_v|$). Nato, po letu-dveh, vzbujeno jedro Ne^* preide v stabilno stanje:



Skupna energija, ki se sprosti pri razpadu ^{22}Na v ^{22}Ne (upoštevajoč razliko v masah nevtralnih atomov), je 2.843 MeV. Ta energija se porazdeli med nevtrino, žarek gama ter karakteristične žarke X (ali Augerjeve elektrone), ki nastanejo pri zapolnitvi vrzeli v elektronski ovojnici.

1.10.3 Anihilacija para elektron-pozitron

Anihilacija je proces, pri katerem se delec in njegov antidelec (npr. elektron in pozitron) srečata in izničita, pri čemer se njuna celotna energija (mirovna in kinetična) pretvori v fotone.



Če sta elektron in pozitron pred anihilacijo mirovala (imata zanemarljivo kinetično energijo), se zaradi ohranitve gibalne količine ustvarita dva fotona, ki odletita v nasprotnih smereh (sta kolinearna). Energija vsakega fotona je enaka mirovni energiji elektrona:

$$E_\gamma = m_e c_0^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

Uporaba v pozitronski emisijski tomografiji (PET): Anihilacija je osnova za medicinsko slikovno tehniko PET. Pacientu se vbrizga radiofarmak, ki vsebuje izotop, ki razpada z β^+ razpadom. Izsevani pozitron se v tkivu hitro ustavi (v nekaj milimetrih) in anihilira z enim od elektronov v tkivu. Dva nastala fotona z energijo 511 keV se zaznata s parom detektorjev. S sočasnim zaznavanjem ("koincidenca") velikega števila takih parov fotonov lahko z računalniško rekonstrukcijo določimo lokacijo izvora sevanja v telesu.

Netočnosti pri PET:

- Če se pozitron pred anihilacijo ne ustavi popolnoma, imata nastala fotona v laboratorijskem sistemu gibalno količino, ki ni enaka nič, zato ne odletita pod kotom 180° in nista več kolinearna. To povzroči napako pri določanju lokacije.
- Pozitron ne anihilira na istem mestu, kjer je nastal. Njegov doseg pred anihilacijo povzroči dodatno prostorsko nedoločenost (zameglitev slike).

1.11 Težki nabiti delci

V kategorijo težkih nabitih delcev uvrščamo vse delce, ki so znatno masivnejši od elektrona ali pozitrona. Ti delci so lahko stabilni (protoni, delci alfa, devteroni) ali nestabilni (pioni, mioni, kaoni).

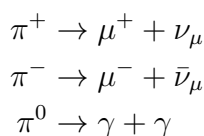
Sevanje alfa, ki nastane pri jedrskih razpadih, smo že obravnavali. Ostale težke nabite delce pa v kontekstu dozimetrije najpogosteje srečamo kot produkte jedrskih reakcij v pospeševalnikih (npr. za terapevtske namene) ali kot delce kozmičnega sevanja.

1.11.1 Kozmični mioni (μ^- , μ^+)

Mioni so nestabilni delci, ki so približno 207-krat masivnejši od elektrona ($m_\mu c^2 \approx 106 \text{ MeV}$). So pomemben vir naravnega sevalnega ozadja na površju Zemlje.

Izvor: Primarno kozmično sevanje, ki prihaja iz vesolja, je sestavljeno pretežno iz visokoenergijskih protonov. Ko ti protoni vstopijo v zgornje plasti Zemljine atmosfere, trčijo z atomskimi jedri zraka (kisika, dušika). Pri teh trkih nastane pljus sekundarnih delcev, večinoma hadronov, kot so pioni (π^+ , π^- , π^0).

Ti delci se gibljejo pretežno v smeri vpadnega protona in so večinoma zelo kratkoživi. Pioni hitro razpadejo:



Nevtralni pioni (π^0) razpadejo v visokoenergijske fotone, ki povzročijo nadaljnje elektromagnetne pljuske. Nabiti pioni (π^\pm) pa razpadejo v mione (μ^\pm) in mionske (anti)nevtrine.

Ker imajo mioni relativno dolg razpadni čas ($\tau \approx 2.2 \mu\text{s}$), lahko kljub svoji nestabilnosti zaradi relativističnega podaljšanja časa prepotujejo celotno atmosfero in dosežejo površje Zemlje.

Interakcija in pomen: Mioni interagirajo s snovjo skoraj izključno preko elektromagnetne interakcije. Zaradi svoje velike mase (v primerjavi z elektronom) sevajo zelo malo zavernega sevanja in so zato zelo prodorni. Ustavijo se šele približno 100 m globoko pod zemljo.

Mioni so pomemben in stalen vir naravnega sevalnega ozadja. Letno prispevajo k efektivni dozi, ki jo prejme prebivalstvo.

- **Doza na nivoju morja:** Absorbirana doza zaradi kozmičnih mionov je reda velikosti $50 \mu\text{J kg}^{-1}$ do $200 \mu\text{J kg}^{-1}$ (μGy) na mesec.

- **Povišana izpostavljenost:** Na višjih nadmorskih višinah je intenziteta kozmičnega sevanja večja, saj je nad nami manj atmosfere, ki bi delce absorbirala. Zato so ljudje, ki živijo na višjih legah, ali poklicne skupine, kot so piloti in letalsko osebje, izpostavljeni večji dozi. Med čezatlantskim letom na višini okoli 15 km je doza sevanja nekaj desetkrat večja kot na tleh.

1.11.2 Protoni, devteroni, tritoni, pioni in težja jedra

Poleg delcev alfa in mionov v dozimetriji obravnavamo še druge težke nabite delce. Ti so običajno proizvedeni umetno, v pospeševalnikih delcev.

- **Protoni (p):** So jedra vodika (${}^1_1\text{H}$). Uporabljajo se v hadronski radioterapiji za obsevanje globoko ležečih tumorjev. Zaradi njihove velike mase je njihova pot skozi tkivo skoraj ravna, večino energije pa oddajo na koncu svoje poti v t.i. Braggovem vrhu, kar omogoča natančno ciljanje tumorjev ob minimalni poškodbi okoliškega zdravega tkiva.
- **Devteroni (d) in tritoni (t):** So jedra vodikovih izotopov, devterija (${}^2_1\text{H}$) in tritija (${}^3_1\text{H}$). Uporabljajo se predvsem v jedrskih raziskavah in v nekaterih primerih kot vir nevtronov (npr. D-T reakcija v fuzijskih reaktorjih).
- **Pioni (π^\pm):** So nestabilni mezoni. Negativni pioni (π^-) so zanimivi za radioterapijo, ker ob zaustavitvi v snovi (na koncu svoje poti) doživijo zajetje v atomsko jedro, kar povzroči razpad jedra in sprostitve visokoenergijskih delcev (protonov, nevtronov, delcev α). To povzroči zelo lokalizirano in biološko učinkovito dozo na mestu tumorja.
- **Težja jedra:** Ioni težjih elementov (npr. ogljika) se prav tako uporabljajo v naprednih oblikah radioterapije zaradi zelo ostrega Braggovega vrha in visoke biološke učinkovitosti.

1.12 Nevtroni (n)

Nevtroni so nenabiti delci in so sestavni del atomskih jeder. Za razliko od nabitih delcev ne interagirajo z elektronsko ovojnico atomov preko Coulombove sile, temveč interagirajo neposredno z jedri. Ker so nenabiti, so zelo prodorni.

Izvori nevtronov:

- **Jedrska fisija:** Pri cepitvi težkih jeder (npr. urana v jedrskih reaktorjih) nastanejo hitri nevtroni (t.i. fisijski produkti). Za uporabo v reaktorjih jih je treba upočasniti z moderatorjem (npr. vodo).
- **Jedrske reakcije:** Nevtrone lahko proizvedemo z obstreljevanjem ustreznih tarč z nabitimi delci. Pogosta reakcija je (p, n), kjer proton (p) trešči v jedro in iz njega izbiye nevtron (n). Primer je obstreljevanje berilijeve tarče s protoni iz ciklotrona, kar se uporablja za proizvodnjo nevtronov za radioterapijo.
- **Radioaktivni viri:** Nekateri izotopi razpadajo s spontano fisijo (npr. ${}^{252}\text{Cf}$) in pri tem sevajo nevtrone. Drugi viri so mešanice izotopa, ki seva delce α (npr. ${}^{241}\text{Am}$), in elementa, kot je berilij (Be), kjer pride do reakcije (α, n).

Pomen v dozimetriji: Nevtroni so *posredno ionizirajoče sevanje*. Svojo energijo pre-dajajo snovi preko sekundarnih nabitih delcev, ki nastanejo pri jedrskih interakcijah (npr. odbojni protoni pri prožnem sipanju na vodik). Ker lahko povzročijo znatno biološko škodo, je njihova dozimetrija ključnega pomena pri delu z jedrskimi reaktorji, pospeševal-niki in v nevtronski terapiji.

2 Radioaktivni razpadi – Časovni potek

Nestabilni sistemi, kot so vzburjeni atomi, nestabilna jedra ali osnovni delci, spontano prehajajo v energijsko nižja, bolj stabilna stanja. Ta proces imenujemo razpad. Jedra lahko postanejo nestabilna naravno ali pa so umetno vzburjena (aktivirana) z jedrskimi reakcijami. V tem poglavju bomo obravnavali časovni potek teh razpadov.

2.1 Enostavni razpadi

Najpreprostejši primer je razpad, pri katerem sistem tipa B (npr. nestabilno jedro) raz-pade neposredno v sistem tipa C :

$$B \rightarrow C$$

Za opazovanje časovnega poteka predpostavimo, da imamo ob času $t_0 = 0$ začetno število delcev tipa B , ki ga označimo z $N_{B,0}$.

Definicija aktivnosti: Radioaktivni razpadi so naključni (stohastični) procesi. Posa-meznega razpada ne moremo napovedati, lahko pa opišemo statistično obnašanje velikega števila delcev.

- $N_{r,B}(t)$: Število razpadov delcev B v infinitezimalnem časovnem intervalu $[t, t + dt]$.
- $\langle N_{r,B} \rangle$: Pričakovano (povprečno) število razpadov v istem intervalu.

Aktivnost (A_B) vzorca ob času t je definirana kot pričakovano število razpadov na enoto časa:

$$A_B(t) \equiv \frac{\langle N_{r,B} \rangle}{dt} \quad (14)$$

Osnovna enota za aktivnost v SI sistemu je **becquerel** (Bq), ki ustreza enemu razpadu na sekundo ($1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Verjetnostna porazdelitev razpada: Verjetnost, da posamezen delec B , ki je obstajal ob času t_0 , razpade v časovnem intervalu $[t, t + dt]$, je podana z eksponentno porazdelitvijo:

$$f(t|t_0, \lambda_B)dt = \begin{cases} \lambda_B e^{-\lambda_B(t-t_0)}dt & \text{za } t \geq t_0 \\ 0 & \text{za } t < t_0 \end{cases} \quad (15)$$

kjer je $f(t|t_0, \lambda_B)$ gostota verjetnosti za razpad ob času t .

Razpadna konstanta in življenjski čas: Parameter λ_B v enačbi 15 je **razpadna konstanta**, ki je značilna za dani razpad. Njena enota je s^{-1} in določa hitrost razpadanja. Večja kot je λ_B , hitreje delec razpade. Obratna vrednost razpadne konstante je povprečni **življenjski čas** τ_B :

$$\tau_B = \frac{1}{\lambda_B} \quad (16)$$

Če za začetni čas postavimo $t_0 = 0$, se gostota verjetnosti poenostavi:

$$f(t) = \lambda_B e^{-\lambda_B t} \quad (\text{za } t \geq 0) \quad (17)$$

Če za začetni čas postavimo $t_0 = 0$, se gostota verjetnosti, ki jo označimo s $\theta(t)$, poenostavi:

$$\theta(t) = \lambda_B e^{-\lambda_B t} \quad (\text{za } t \geq 0) \quad (18)$$

Statistika razpadov: Verjetnost, da posamezen delec razpade v kratkem časovnem intervalu Δt , je $p = \lambda_B \Delta t$ (za $\lambda_B \Delta t \ll 1$). Ker so razpadi posameznih jeder neodvisni dogodki, lahko verjetnost za točno določeno število razpadov, $N_{r,B}$, izmed začetnega števila jeder $N_{B,0}$ v intervalu $[t, t + \Delta t]$, opišemo z binomsko porazdelitvijo.

Binomska porazdelitev

Binomska porazdelitev $P(k; N, p)$ opisuje verjetnost, da se pri N neodvisnih ponovitvah poskusa nek dogodek z verjetnostjo p zgodi natanko k -krat. Podana je z enačbo:

$$P(k; N, p) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

kjer je $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$ binomski koeficient, ki predstavlja število načinov za izbiro k elementov iz množice N elementov.

V našem primeru je $N = N_{B,0}$ (število jeder na začetku intervala), $k = N_{r,B}$ (število razpadlih jeder) in $p = \theta(t)\Delta t$ (verjetnost za razpad enega jedra v intervalu Δt). Za infinitezimalni interval dt je verjetnost podana z:

$$P(N_{r,B}; N_{B,0}, \lambda_B) = \binom{N_{B,0}}{N_{r,B}} (\theta(t)dt)^{N_{r,B}} (1 - \theta(t)dt)^{N_{B,0} - N_{r,B}}$$

Pričakovana vrednost (povprečno število) razpadov $\langle N_{r,B} \rangle$ za binomsko porazdelitev je enaka produktu števila poskusov in verjetnosti uspeha:

$$\langle N_{r,B} \rangle = N_B(t) \cdot (\lambda_B e^{-\lambda_B t} dt)$$

Tukaj smo upoštevali, da je število razpadov odvisno od števila jeder $N_B(t)$, ki so na voljo ob času t .

Vendar pa je za izpeljavo zakona o radioaktivnem razpadu bolj intuitiven pristop, ki pravi, da je število razpadov v intervalu dt sorazmerno s številom prisotnih jeder $N_B(t)$ in razpadno konstanto λ_B :

$$\langle dN_{r,B} \rangle = \lambda_B N_B(t) dt$$

Aktivnost vzorca ob času t je torej:

$$A_B(t) = \frac{\langle dN_{r,B} \rangle}{dt} = \lambda_B N_B(t) \quad (19)$$

Ker vsak razpad zmanjša število jeder B , je sprememba števila jeder $dN_B(t)$ enaka negativnemu številu razpadov:

$$dN_B(t) = -\langle dN_{r,B} \rangle = -\lambda_B N_B(t) dt$$

To je diferencialna enačba, ki opisuje radioaktivni razpad.

$$\frac{dN_B(t)}{dt} = -\lambda_B N_B(t)$$

Z ločitvijo spremenljivk in integracijo od $t = 0$ (kjer je bilo $N_{B,0}$ jeder) do časa t dobimo **zakon o radioaktivnem razpadu**:

$$N_B(t) = N_{B,0} e^{-\lambda_B t} \quad (20)$$

Če enačbo 20 vstavimo v definicijo aktivnosti 19, dobimo izraz za aktivnost kot funkcijo časa:

$$A_B(t) = \lambda_B N_{B,0} e^{-\lambda_B t} \quad (21)$$

2.2 Verižni razpadi

Pogosto se zgodi, da produkt razpada (hčerinsko jedro) prav tako ni stabilen in razpade naprej. Temu pravimo verižni razpad. Oglejmo si najpreprostejši primer verige z dvema razpadoma:



Ta proces opišemo z razpadnimi konstantami:

- λ_B : Celotna razpadna konstanta za jedro B .
- $\lambda_{B \rightarrow C}$: Delna razpadna konstanta za prehod iz B v C . Povezana je s celotno konstanto preko razvejitenega razmerja $Br(B \rightarrow C)$:

$$\lambda_{B \rightarrow C} = \lambda_B \cdot Br(B \rightarrow C)$$

Ker je $Br(B \rightarrow C) \leq 1$, vedno velja $\lambda_{B \rightarrow C} \leq \lambda_B$.

- λ_C : Celotna razpadna konstanta za jedro C .

Za analizo take verige moramo upoštevati verjetnosti za oba zaporedna dogodka.

Verjetnostna gostota za nastanek in razpad delca C:

1. **Verjetnost za razpad $B \rightarrow C$** : Verjetnostna gostota, da delec B , ki je obstajal ob času $t_0 = 0$, razpade v delec C natanko ob času t' , je podana z:

$$f(t'; \lambda_B, \lambda_{B \rightarrow C}) = \begin{cases} \lambda_{B \rightarrow C} e^{-\lambda_B t'} & \text{za } t' \geq 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (22)$$

Upoštevajte, da v eksponentu nastopa celotna razpadna konstanta λ_B , saj ta določa hitrost zmanjševanja števila jeder B , medtem ko faktor $\lambda_{B \rightarrow C}$ pred eksponentom določa verjetnost za specifičen razpadni kanal v C .

2. **Verjetnost za razpad $C \rightarrow D$:** Verjetnostna gostota, da delec C , ki je *nastal* ob času t' , razpade naprej ob kasnejšem času t , je:

$$f(t|t'; \lambda_C) = \begin{cases} \lambda_C e^{-\lambda_C(t-t')} & \text{za } t \geq t' \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (23)$$

3. **Skupna verjetnostna gostota:** Ker sta dogodka (razpad B in nato razpad C) neodvisna, je verjetnostna gostota, da delec B razpade v C ob času t' in da nato delec C razpade ob času t , enaka produktu posameznih gostot:

$$\begin{aligned} f(t, t'; \lambda_B, \lambda_{B \rightarrow C}, \lambda_C) &= f(t'; \lambda_B, \lambda_{B \rightarrow C}) \cdot f(t|t'; \lambda_C) \\ &= \begin{cases} \lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C e^{-\lambda_B t'} e^{-\lambda_C(t-t')} & \text{za } 0 \leq t' \leq t \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Ta izraz predstavlja gostoto verjetnosti za točno določeno zaporedje dogodkov. Da bi dobili celotno verjetnostno gostoto za razpad delca C ob času t , ne glede na to, kdaj je nastal, moramo integrirati po vseh možnih časih nastanka t' (od 0 do t). To bo vodilo do Batemanovih enačb za aktivnost hčerinskih jeder, kar bomo obravnavali v naslednjem razdelku.

Aktivnost hčerinskega jedra C : Da bi dobili celotno verjetnostno gostoto za razpad delca C ob času t , ne glede na to, kdaj je nastal, moramo integrirati skupno verjetnostno gostoto $f(t, t')$ po vseh možnih časih nastanka t' (od 0 do t). Označimo to gostoto z $f_C(t)$:

$$\begin{aligned} f_C(t) &= \int_0^t f(t, t') dt' = \int_0^t \lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C e^{-\lambda_B t'} e^{-\lambda_C(t-t')} dt' \\ &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C e^{-\lambda_C t} \int_0^t e^{(\lambda_C - \lambda_B)t'} dt' \\ &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C e^{-\lambda_C t} \left[\frac{e^{(\lambda_C - \lambda_B)t'}}{\lambda_C - \lambda_B} \right]_0^t \\ &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C e^{-\lambda_C t} \left(\frac{e^{(\lambda_C - \lambda_B)t} - 1}{\lambda_C - \lambda_B} \right) \\ &= \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}) \end{aligned} \quad (25)$$

Ta izraz velja za primer, ko $\lambda_C \neq \lambda_B$. Verjetnost, da eden od začetnih delcev B pripelje do razpada delca C v intervalu $[t, t + dt]$, je torej $\theta = f_C(t)dt$.

Pričakujemo, da bo število razpadov $\langle N_{r,C} \rangle$ izmed začetne populacije $N_{B,0}$ jeder tipa B v intervalu $[t, t + dt]$ enako:

$$\langle dN_{r,C} \rangle = N_{B,0} \cdot \theta = N_{B,0} f_C(t) dt$$

Aktivnost delcev C ob času t , $A_C(t)$, je torej:

$$A_C(t) = \frac{\langle dN_{r,C} \rangle}{dt} = N_{B,0} f_C(t) = N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}) \quad (26)$$

To je znana **Batemanova enačba** za drugi člen v radioaktivni verigi.

Poseben primer: $\lambda_B = \lambda_C = \lambda$ Enačba 25 ne velja, če sta razpadni konstanti enaki, saj bi to vodilo do deljenja z nič. V tem primeru se moramo vrniti k integralu in upoštevati $\lambda_B = \lambda_C = \lambda$:

$$\begin{aligned} f_C(t) &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{(\lambda - \lambda)t'} dt' \\ &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t 1 dt' \\ &= \lambda_{B \rightarrow C} \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Aktivnost delcev C je v tem posebnem primeru:

$$A_C(t) = N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C} \lambda t e^{-\lambda t} \quad (27)$$

Aktivnost hčerinskega jedra na začetku narašča linearno s časom, doseže maksimum, nato pa eksponentno pada.

Maksimalna aktivnost hčerinskega jedra: Kot smo videli, je aktivnost hčerinskega jedra C ob času $t = 0$ enaka nič ($A_C(0) = 0$), saj ob začetku ni prisotno nobeno jedro C . Prav tako aktivnost teži k nič, ko gre čas proti neskončnosti ($A_C(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$), saj vsa jedra B in posledično vsa jedra C sčasoma razpadejo. To pomeni, da mora aktivnost $A_C(t)$ vmes doseči maksimalno vrednost.

Čas, pri katerem je aktivnost maksimalna (t_{\max}), najdemo tako, da odvod aktivnosti po času izenačimo z nič:

$$\left. \frac{dA_C(t)}{dt} \right|_{t=t_{\max}} = 0$$

Odvajajmo enačbo 26 po času:

$$\begin{aligned} \frac{dA_C(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}) \right] \\ &= N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (-\lambda_B e^{-\lambda_B t} - (-\lambda_C) e^{-\lambda_C t}) \\ &= N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (\lambda_C e^{-\lambda_C t} - \lambda_B e^{-\lambda_B t}) \end{aligned}$$

Ko odvod izenačimo z nič (ob času $t = t_{\max}$), dobimo:

$$\begin{aligned} \lambda_C e^{-\lambda_C t_{\max}} - \lambda_B e^{-\lambda_B t_{\max}} &= 0 \\ \lambda_C e^{-\lambda_C t_{\max}} &= \lambda_B e^{-\lambda_B t_{\max}} \end{aligned}$$

Preuredimo enačbo, da izrazimo t_{\max} :

$$\frac{\lambda_C}{\lambda_B} = \frac{e^{-\lambda_B t_{\max}}}{e^{-\lambda_C t_{\max}}} = e^{(\lambda_C - \lambda_B) t_{\max}}$$

Logaritmiramo obe strani:

$$\ln \left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B} \right) = (\lambda_C - \lambda_B) t_{\max}$$

Iz tega sledi končni izraz za čas maksimalne aktivnosti:

$$t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_C / \lambda_B)}{\lambda_C - \lambda_B} \quad (28)$$

Ta izraz velja, dokler je $\lambda_B \neq \lambda_C$.

Približek za t_{\max} ko je $\lambda_C \gg \lambda_B$: Oglejmo si primer, ko hčerinsko jedro C razpada veliko hitreje kot starševsko jedro B . V tem primeru je razlika $\lambda_C - \lambda_B \approx \lambda_C$. Logaritemski člen lahko razvijemo v vrsto okoli $\lambda_C/\lambda_B = \infty$, kar ni praktično. Boljši vpogled dobimo, če opazujemo primer, ko se konstanti le malo razlikujeta. Naj bo $\lambda_C = \lambda_B + \epsilon$, kjer je ϵ majhen.

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_B + \epsilon}{\lambda_B}\right)}{\epsilon} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\epsilon}{\lambda_B}\right)}{\epsilon}$$

Za majhen x velja Taylorjev razvoj $\ln(1+x) \approx x - x^2/2 + \dots$. Če vstavimo $x = \epsilon/\lambda_B$, dobimo:

$$\begin{aligned} t_{\max} &\approx \frac{\frac{\epsilon}{\lambda_B} - \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{\lambda_B}\right)^2}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{\lambda_B} - \frac{\epsilon}{2\lambda_B^2} = \frac{1}{\lambda_B} \left(1 - \frac{\epsilon}{2\lambda_B}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda_B} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_B}\right)\right] \end{aligned}$$

Izraz v oklepaju $\mathcal{O}(\dots)$ pomeni "reda velikosti ...". To kaže, da je za majhne razlike v razpadnih konstantah čas maksimalne aktivnosti blizu življenjskega časa starševskega jedra $\tau_B = 1/\lambda_B$. Intuitivno je to smiselno: če sta razpadni konstanti zelo blizu, bo hčerinsko jedro doseglo maksimum aktivnosti približno takrat, ko bo starševsko jedro razpadlo za faktor $1/e$.

Razmerje aktivnosti: Pogosto nas zanima razmerje med aktivnostjo hčerinskega jedra C in aktivnostjo starševskega jedra B v odvisnosti od časa, $A_C(t)/A_B(t)$. Aktivnost starševskega jedra je $A_B(t) = \lambda_B N_B(t) = \lambda_B N_{B,0} e^{-\lambda_B t}$. Če delimo enačbo 26 z izrazom za $A_B(t)$, dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{A_C(t)}{A_B(t)} &= \frac{N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t})}{N_{B,0} \lambda_B e^{-\lambda_B t}} \\ &= \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t}) \end{aligned} \quad (29)$$

Za majhne čase t lahko eksponentni člen razvijemo v vrsto $e^{-x} \approx 1 - x$:

$$\begin{aligned} \frac{A_C(t)}{A_B(t)} &\approx \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - (1 - (\lambda_C - \lambda_B)t)) \\ &= \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \lambda_C t [1 + \mathcal{O}((\lambda_C - \lambda_B)t)] \end{aligned}$$

Začetno razmerje aktivnosti narašča linearno s časom.

Poseben primer: $Br(B \rightarrow C) = 1$ **in čas enakosti aktivnosti** Oglejmo si poseben primer, ko jedro B razpade izključno v jedro C . V tem primeru je $\lambda_{B \rightarrow C} = \lambda_B$. Enačba 29 se poenostavi v:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t}) \quad (30)$$

Zanima nas, kdaj sta aktivnosti enaki. Označimo ta čas z t_e . Takrat je razmerje $A_C(t_e)/A_B(t_e) = 1$.

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e}) \\
 \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} &= 1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e} \\
 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} &= 1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e} \\
 \frac{\lambda_B}{\lambda_C} &= e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e}
 \end{aligned}$$

Logaritmiramo obe strani:

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C}\right) &= -(\lambda_C - \lambda_B)t_e \\
 -\ln\left(\frac{\lambda_C}{\lambda_B}\right) &= -(\lambda_C - \lambda_B)t_e
 \end{aligned}$$

Končni izraz za čas enakosti aktivnosti je:

$$t_e = \frac{\ln(\lambda_C/\lambda_B)}{\lambda_C - \lambda_B} \quad (31)$$

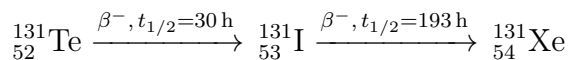
Primerjava tega izraza z enačbo 28 pokaže, da je $t_e = t_{\max}$. **Pozor:** Ta enakost velja samo v posebnem primeru, ko je $Br(B \rightarrow C) = 1$. V splošnem primeru enakost ne velja.

Analiza razmerja aktivnosti glede na λ_B in λ_C

- **Primer $\lambda_C < \lambda_B$ ($\tau_C > \tau_B$): Hčerinsko jedro je bolj dolgoživo.** V tem primeru je eksponent $(\lambda_B - \lambda_C)t$ v imenovalcu po preureditvi enačbe 29 pozitiven:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \frac{\lambda_C}{\lambda_B - \lambda_C} (e^{(\lambda_B - \lambda_C)t} - 1)$$

Ker eksponentni člen s časom narašča, tudi razmerje aktivnosti A_C/A_B neprestano narašča. Prej ali slej bo aktivnost hčerinskega jedra presegla aktivnost starševskega ($A_C/A_B > 1$). Primer tega je razpad telurija-131:



Tukaj je $\tau_C > \tau_B$, zato je $\lambda_C < \lambda_B$.

- **Primer $\lambda_C = \lambda_B = \lambda$:** V tem posebnem primeru se razmerje aktivnosti, izpeljano iz ustreznih enačb za $A_C(t)$ in $A_B(t)$, glasi:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = \frac{N_{B,0}\lambda_{B \rightarrow C}\lambda t e^{-\lambda t}}{N_{B,0}\lambda e^{-\lambda t}} = \lambda_{B \rightarrow C} \cdot t$$

Razmerje aktivnosti narašča linearno s časom. Tudi v tem primeru bo aktivnost hčerinskega jedra prej ali slej presegla aktivnost starševskega.

2.2.1 Razpolovni čas ($t_{1/2}$)

Poleg življenjskega časa τ je za karakterizacijo radioaktivnega razpada pogosto v uporabi **razpolovni čas** ($t_{1/2}$). Definiran je kot čas, v katerem aktivnost vzorca pade na polovico svoje začetne vrednosti.

Za enostavni eksponentni razpad velja:

$$A_B(t) = A_{B,0} e^{-\lambda_B t}$$

Ob času $t = t_{1/2}$ je aktivnost $A_B(t_{1/2}) = A_{B,0}/2$. Vstavimo to v enačbo:

$$\begin{aligned} \frac{A_{B,0}}{2} &= A_{B,0} e^{-\lambda_B t_{1/2}} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda_B t_{1/2}} \end{aligned}$$

Logaritmiramo obe strani:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -\lambda_B t_{1/2} \\ -\ln(2) &= -\lambda_B t_{1/2} \end{aligned}$$

Iz tega dobimo splošno znano zvezo med razpolovnim časom in razpadno konstanto:

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda_B} = \tau_B \ln(2) \approx 0.693 \tau_B \quad (32)$$

Razpolovni čas je torej vedno krajši od povprečnega življenjskega časa.

2.3 Ravnoesja pri verižnih razpadih

2.3.1 Prehodno ravnoesje ($\lambda_C > \lambda_B$)

Oglejmo si primer, ko je hčerinsko jedro C bolj kratkoživo od starševskega jedra B ($\tau_C < \tau_B$). Razmerje aktivnosti je podano z enačbo 29:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = \underbrace{\frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B}}_{Br(B \rightarrow C)} \cdot \underbrace{\frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B}}_{>1} \cdot \underbrace{(1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t})}_{\text{narašča proti 1}}$$

Analizirajmo člene v enačbi:

- $Br(B \rightarrow C)$: Razvejitevno razmerje, ki pove delež razpadov B , ki vodijo v C .
- $\frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B}$: Konstanta, ki je vedno večja od 1, saj je $\lambda_C > \lambda_B$.
- $(1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t})$: Člen, ki opisuje časovni razvoj. Ker je eksponent negativen, ta člen asimptotično narašča od 0 (pri $t = 0$) proti 1 (pri $t \rightarrow \infty$).

Ko preteče dovolj časa, tako da velja $t \gg \frac{1}{\lambda_C - \lambda_B} \approx \frac{1}{\lambda_C} = \tau_C$, eksponentni člen $e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t}$ postane zanemarljivo majhen. Oklepaj v enačbi se približa vrednosti 1. Takrat razmerje aktivnosti doseže konstantno vrednost:

$$\frac{A_C}{A_B} \approx Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} = \text{konst.} \quad (33)$$

Stanje, ko je razmerje aktivnosti hčerinskega in starševskega jedra konstantno, imenujemo **prehodno ravnoesje**. V tem stanju obe jedri razpadata z enako efektivno razpadno konstanto, ki je enaka razpadni konstanti starševskega jedra, λ_B .

Pogoj za $A_C > A_B$ v ravnovesju: V prehodnem ravnovesju je lahko aktivnost hčerinskega jedra večja ali manjša od aktivnosti starševskega. Zanima nas, kdaj velja $A_C > A_B$, torej kdaj je razmerje večje od 1:

$$\begin{aligned} Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} &> 1 \\ Br(B \rightarrow C) &> \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} \\ Br(B \rightarrow C) &> 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \end{aligned}$$

Ta pogoj je izpolnjen, če je razvejitveno razmerje dovolj veliko. Ker je $\lambda_B/\lambda_C < 1$, je desna stran enačbe vedno pozitivna in manjša od 1. Torej, če je razpadni kanal $B \rightarrow C$ dominanten (velik Br), bo aktivnost hčerinskega jedra v prehodnem ravnovesju presegla aktivnost starševskega.

Čas enakosti aktivnosti (t_e) pri prehodnem ravnovesju: Analizirajmo podrobneje, kdaj in pod kakšnimi pogoji pride do enakosti aktivnosti ($A_C = A_B$) v primeru $\lambda_C > \lambda_B$.

Razmerje aktivnosti je:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t})$$

Da bi sploh lahko prišlo do enakosti ($A_C/A_B = 1$) ob nekem času $t_e > 0$, mora biti maksimalna vrednost tega izraza (ki jo doseže, ko $t \rightarrow \infty$) večja ali enaka 1. To pomeni, da mora biti izpolnjen pogoj za prehodno ravnovesje:

$$Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} \geq 1 \quad (34)$$

Če je ta pogoj izpolnjen, lahko izračunamo čas t_e , pri katerem sta aktivnosti enaki. V enačbo za razmerje vstavimo $A_C(t_e)/A_B(t_e) = 1$:

$$1 = Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e})$$

Sedaj izrazimo eksponentni člen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} &= 1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e} \\ e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e} &= 1 - \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \left(\frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} \right) \\ e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t_e} &= 1 - \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right) \end{aligned}$$

Da bi logaritem na naslednjem koraku bil definiran, mora biti argument pozitiven. Ker je $Br(B \rightarrow C) \leq 1$, je $1/Br(B \rightarrow C) \geq 1$. Hkrati je $(1 - \lambda_B/\lambda_C) > 0$. Izraz $1/Br(B \rightarrow C) \cdot (1 - \lambda_B/\lambda_C)$ je torej vedno večji ali enak $(1 - \lambda_B/\lambda_C)$. Pogoj za obstoj realnega t_e je, da je argument logaritma manjši od 1, kar nas pripelje nazaj do začetnega pogoja $Br(B \rightarrow C) \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} \geq 1$.

Logaritmiramo obe strani:

$$-(\lambda_C - \lambda_B)t_e = \ln \left[1 - \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right) \right]$$

$$(\lambda_C - \lambda_B)t_e = -\ln[\dots] = \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)} \right]$$

Končni izraz za t_e je:

$$t_e = \frac{1}{\lambda_C - \lambda_B} \ln \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{Br(B \rightarrow C)} \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)} \right] \quad (35)$$

Razmerje med t_e in t_{\max} :

- Če je $Br(B \rightarrow C) = 1$, se izraz za t_e poenostavi:

$$t_e = \frac{1}{\lambda_C - \lambda_B} \ln \left[\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)} \right] = \frac{1}{\lambda_C - \lambda_B} \ln \left(\frac{1}{\lambda_B/\lambda_C} \right) = \frac{\ln(\lambda_C/\lambda_B)}{\lambda_C - \lambda_B} = t_{\max}$$

V tem primeru pride do enakosti aktivnosti natanko ob času maksimalne aktivnosti hčerinskega jedra.

- Če je $Br(B \rightarrow C) < 1$, je člen $1/Br(B \rightarrow C) > 1$. Zaradi tega je odštevanec v logaritmu večji, argument logaritma je večji in posledično je $t_e > t_{\max}$. Enakost aktivnosti se zgodi *po* tem, ko je aktivnost hčerinskega jedra že dosegla svoj maksimum.

2.3.2 Sekularno ravnovesje ($\lambda_C \gg \lambda_B$)

Oglejmo si skrajni primer prehodnega ravnovesja, ko je razpadna konstanta hčerinskega jedra C veliko večja od razpadne konstante starševskega jedra B ($\lambda_C \gg \lambda_B$), kar pomeni, da je življenjski čas hčerinskega jedra zanemarljivo kratek v primerjavi z življenjskim časom starševskega ($\tau_C \ll \tau_B$). V tem primeru lahko naredimo nekaj poenostavitvev:

- Imenovalec: $\lambda_C - \lambda_B = \lambda_C(1 - \lambda_B/\lambda_C) \approx \lambda_C$.
- Ker je λ_C zelo velika, bo člen $e^{-\lambda_C t}$ za vse čase, ki niso infinitezimalno majhni ($t \gg \tau_C$), praktično enak nič.

Izhajajmo iz enačbe 26 za aktivnost hčerinskega jedra:

$$A_C(t) = N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t})$$

Uporabimo zgornje poenostavitve:

$$\begin{aligned} A_C(t) &\approx N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}) \\ &= N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C} e^{-\lambda_B t} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t}) \\ &\approx \underbrace{N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C} e^{-\lambda_B t}}_{A_B(t)} \cdot \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \cdot (1 - e^{-\lambda_C t}) \end{aligned}$$

Za čase $t \gg \tau_C$ člen $e^{-\lambda_C t} \rightarrow 0$, zato se aktivnost $A_C(t)$ približa:

$$A_C(t) \approx N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C} e^{-\lambda_B t}$$

To stanje imenujemo **sekularno ravnovesje**.

Razmerje aktivnosti v sekularnem ravnovesju: Razmerje aktivnosti A_C/A_B za $\lambda_C \gg \lambda_B$ lahko izpeljemo iz splošne enačbe 29:

$$\frac{A_C(t)}{A_B(t)} = \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \frac{\lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (1 - e^{-(\lambda_C - \lambda_B)t})$$

Z uporabo približka $\lambda_C - \lambda_B \approx \lambda_C$:

$$\begin{aligned} \frac{A_C(t)}{A_B(t)} &\approx \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} \frac{\lambda_C}{\lambda_C} (1 - e^{-\lambda_C t}) \\ \frac{A_C(t)}{A_B(t)} &\approx \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} (1 - e^{-t/\tau_C}) \end{aligned}$$

Ko preteče nekaj življenjskih časov hčerinskega jedra ($t \gg \tau_C$), eksponentni člen izgine in razmerje aktivnosti postane konstantno:

$$\frac{A_C}{A_B} \approx \frac{\lambda_{B \rightarrow C}}{\lambda_B} = Br(B \rightarrow C)$$

V sekularnem ravnovesju je aktivnost hčerinskega jedra enaka delni aktivnosti starševskega jedra za ta razpadni kanal. Če je $Br(B \rightarrow C) = 1$, sta aktivnosti starševskega in hčerinskega jedra enaki: $A_C(t) \approx A_B(t)$.

2.4 Uporaba verižnih razpadov: Ekstrakcija hčerinskih jeder

Verižni razpadi so izjemno pomembni v medicini, saj omogočajo proizvodnjo kratkoživih radioizotopov za diagnostične ali terapevtske namene neposredno v bolnišnici. Sistem, kjer dolgoživo starševsko jedro razpada v kratkoživo hčerinsko jedro, imenujemo **generator radioizotopov**. Hčerinsko jedro periodično "izmolzemo" (ekstrahiramo) iz generatorja.

Čas med posameznimi ekstrakcijami želimo optimizirati tako, da bo aktivnost hčerinskega jedra C , ki jo pridobimo, maksimalna. Kot smo izpeljali, se to zgodi ob času t_{\max} :

$$t_{\max} = \frac{\ln(\lambda_C/\lambda_B)}{\lambda_C - \lambda_B}$$

Da bi izračunali vrednost maksimalne aktivnosti, $A_C(t_{\max})$, vstavimo ta čas nazaj v enačbo 26. Najprej poenostavimo eksponentna člena. Iz enačbe, kjer smo odvod izenačili z nič, vemo, da velja:

$$\lambda_C e^{-\lambda_C t_{\max}} = \lambda_B e^{-\lambda_B t_{\max}} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda_C t_{\max}} = \frac{\lambda_B}{\lambda_C} e^{-\lambda_B t_{\max}}$$

Vstavimo to v oklepaj v enačbi za aktivnost:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_B t_{\max}} - e^{-\lambda_C t_{\max}} &= e^{-\lambda_B t_{\max}} - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} e^{-\lambda_B t_{\max}} \\ &= e^{-\lambda_B t_{\max}} \left(1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right) = e^{-\lambda_B t_{\max}} \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} \end{aligned}$$

Za člen $e^{-\lambda_B t_{\max}}$ pa velja:

$$-\lambda_B t_{\max} = -\lambda_B \frac{\ln(\lambda_C/\lambda_B)}{\lambda_C - \lambda_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B} \ln \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right) = \ln \left[\left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)^{\frac{\lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B}} \right]$$

Torej je:

$$e^{-\lambda_B t_{\max}} = \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)^{\frac{\lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B}}$$

Maksimalna aktivnost je tako:

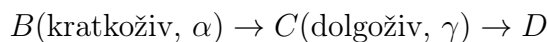
$$\begin{aligned} A_C(t_{\max}) &= N_{B,0} \frac{\lambda_{B \rightarrow C} \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} \left[e^{-\lambda_B t_{\max}} \frac{\lambda_C - \lambda_B}{\lambda_C} \right] \\ &= N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C} e^{-\lambda_B t_{\max}} \\ &= A_{B \rightarrow C}(0) \cdot e^{-\lambda_B t_{\max}} \\ &= A_{B \rightarrow C}(0) \cdot \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_C} \right)^{\frac{\lambda_B}{\lambda_C - \lambda_B}} \end{aligned} \tag{36}$$

kjer je $A_{B \rightarrow C}(0) = N_{B,0} \lambda_{B \rightarrow C}$ začetna delna aktivnost starševskega jedra. Vidimo, da je maksimalna aktivnost hčerinskega jedra vedno manjša od začetne aktivnosti starševskega jedra.

2.5 Težave pri uporabi: Ščitenje

Pri načrtovanju uporabe radioizotopov moramo biti pozorni ne le na primarni vir sevanja, temveč tudi na sevanje, ki ga oddajajo hčerinski produkti. To lahko povzroči težave pri ščitenju.

Oglejmo si hipotetičen primer:



Če potrebujemo vir delcev α (ki jih je relativno enostavno zaščititi, saj imajo kratek doseg), moramo biti pozorni na to, da sčasoma v viru nastaja vse več jeder C , ki oddajajo prodorno sevanje γ . To sevanje je veliko bolj zahtevno za ščitenje in lahko predstavlja pomembno nevarnost za osebe, če ni ustrezno upoštevano pri načrtovanju varnega dela.

2.6 Aktivacija z jedrskimi reakcijami

Poleg naravnih razpadov lahko radioaktivna jedra ustvarimo tudi umetno, z obstreljevanjem stabilnih jeder (tarče) z ustreznimi projektili (npr. nevtroni, protoni). Ta proces imenujemo **aktivacija**.

Opišimo časovni potek aktivnosti vzorca.

- Ob času $t_0 = 0$ imamo v tarči $N_{B,0}$ stabilnih jeder tipa B . Število aktiviranih jeder C je nič ($N_{C,0} = 0$).
- Na tarčo vpadajo projektili s konstantnim fluksom Φ (število delcev na enoto površine na enoto časa, $[\Phi] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$).
- Vsako jedro B predstavlja tarčo z efektivno površino σ , ki jo imenujemo **preseka** za dano jedrsko reakcijo.
- Pri reakciji projektil + $B \rightarrow C$ nastane aktivno (radioaktivno) jedro C , ki nato razpada z razpadno konstanto λ_C .

Analiza procesa: Račun za aktivnost $A_C(t)$ je matematično zelo podoben računu za aktivnost pri verižnih razpadih. Proces "aktivacije" jeder B lahko obravnavamo kot nekakšen "razpadstabilnih jeder v aktivirana jedra, kjer vlogo razpadne konstante prevzame produkt fluksa in preseka.

Definirajmo efektivno "razpadno" konstanto za aktivacijo:

$$\lambda_B \equiv \Phi \cdot \sigma \quad (37)$$

Ta konstanta λ_B opisuje verjetnost na enoto časa, da se bo posamezno jedro B pretvorilo v jedro C . Število stabilnih jeder B bo s časom upadalo po eksponentnem zakonu $N_B(t) = N_{B,0} e^{-\lambda_B t}$, če je število jeder B končno.

Sedaj lahko uporabimo enako logiko kot pri verižnih razpadih:

1. **Verjetnost za aktivacijo $B \rightarrow C$:** Verjetnostna gostota, da se posamezno jedro B aktivira v časovnem intervalu $[t', t' + dt']$, je:

$$f(t'; \lambda_B) = \lambda_B e^{-\lambda_B t'} \quad (\text{za } t' \geq 0)$$

2. **Verjetnost za razpad jedra C :** Verjetnostna gostota, da aktivirano jedro C , ki je nastalo ob času t' , razpade ob kasnejšem času t , je:

$$f(t|t'; \lambda_C) = \lambda_C e^{-\lambda_C(t-t')} \quad (\text{za } t \geq t')$$

3. **Skupna verjetnostna gostota:** Verjetnostna gostota, da pride do aktivacije ob t' in nato do razpada ob t , je produkt posameznih gostot:

$$\begin{aligned} f(t, t'; \lambda_B, \lambda_C) &= f(t'; \lambda_B) \cdot f(t|t'; \lambda_C) \\ &= \lambda_B \lambda_C e^{-\lambda_B t'} e^{-\lambda_C(t-t')} \quad (\text{za } 0 \leq t' \leq t) \end{aligned}$$

4. **Verjetnostna gostota za razpad ob času t :** Da dobimo verjetnostno gostoto za razpad jedra C ob času t , ne glede na to, kdaj je bilo aktivirano, integriramo po vseh možnih časih aktivacije t' od 0 do t . To je enak integral kot v prejšnjem razdelku:

$$f_C(t; \lambda_B, \lambda_C) = \int_0^t f(t, t'; \lambda_B, \lambda_C) dt' = \frac{\lambda_B \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t})$$

Verjetnost, da eno od začetnih jeder B pripelje do razpada jedra C v intervalu $[t, t+dt]$, je $\theta = f_C(t)dt$. Pričakujemo, da bo število razpadov $\langle dN_{r,C} \rangle$ v tem intervalu enako $N_{B,0} \cdot \theta$. Od tod sledi aktivnost jeder C ob času t :

$$A_C(t) = \frac{\langle dN_{r,C} \rangle}{dt} = N_{B,0} \frac{\lambda_B \lambda_C}{\lambda_C - \lambda_B} (e^{-\lambda_B t} - e^{-\lambda_C t}) \quad (38)$$

Ta enačba natančno opisuje naraščanje in kasnejše upadanje aktivnosti v tarči, ki je izpostavljena konstantnemu fluksu projektilov.

Poenostavljen primer: Neporabljena tarča V večini praktičnih primerov aktivacije je izpolnjen naslednji pogoj: verjetnost, da se bo posamezno jedro B v tarči aktiviralo, je v času obsevanja t zelo majhna. To lahko zapišemo kot:

$$\lambda_B t \ll 1 \quad \text{kjer je } \lambda_B = \Phi \sigma \quad (39)$$

To pomeni, da število stabilnih jeder v tarči, N_B , med obsevanjem ostane praktično konstantno in enako začetni vrednosti $N_{B,0}$. V tem primeru lahko stopnjo produkcije aktiviranih jeder C , označimo z R , štejemo za konstantno:

$$R = N_{B,0} \cdot (\Phi \sigma) = N_{B,0} \lambda_B = \text{konst.}$$

Število jeder C se torej s časom spreminja po diferencialni enačbi:

$$\frac{dN_C(t)}{dt} = \underbrace{R}_{\text{produkcija}} - \underbrace{\lambda_C N_C(t)}_{\text{razpad}}$$

Rešitev te enačbe z začetnim pogojem $N_C(0) = 0$ je:

$$N_C(t) = \frac{R}{\lambda_C} (1 - e^{-\lambda_C t})$$

Aktivnost jeder C je torej:

$$\begin{aligned} A_C(t) &= \lambda_C N_C(t) = R (1 - e^{-\lambda_C t}) \\ &= N_{B,0} \Phi \sigma (1 - e^{-t/\tau_C}) \end{aligned} \quad (40)$$

kjer je $\tau_C = 1/\lambda_C$ življenjski čas aktiviranih jeder.

Asimptotična aktivnost: Iz enačbe 40 vidimo, da aktivnost s časom eksponentno narašča in se asimptotično približuje maksimalni, t.i. **nasičeni aktivnosti** A_∞ :

$$A_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} A_C(t) = N_{B,0} \Phi \sigma \quad (41)$$

Nasičena aktivnost je dosežena, ko je hitrost razpadanja aktiviranih jeder enaka hitrosti njihove produkcije. V praksi rečemo, da je aktivnost blizu nasičene, ko preteče nekaj razpolovnih časov hčerinskega jedra (npr. po $t \approx 5 \cdot t_{1/2,C}$ je aktivnost dosegla več kot 97 % maksimalne vrednosti).

Ta poenostavljen model je ključnega pomena pri načrtovanju eksperimentov z aktivacijo, saj nam omogoča, da ocenimo potrebno trajanje obsevanja za dosego želene aktivnosti vzorca.

3 Osnovne količine za opis sevalnega polja

Za kvantitativen opis sevalnega polja v okolici neke točke T v prostoru definiramo več fizikalnih količin. Predstavljajmo si majhno kroglo s prostornino $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ in presekom $S = \pi r^2$, s središčem v točki T .

3.1 Fluena delcev (Φ)

Fluena delcev Φ je definirana kot pričakovano število delcev $\langle N \rangle$, ki vstopijo v to namišljeno kroglo v določenem časovnem intervalu Δt , deljeno s presekom krogle S , v limiti, ko gre prostornina krogle proti nič.

$$\Phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle N \rangle}{S} \quad (42)$$

Fluena je torej število delcev na enoto površine, ki prečkajo območje v okolici točke T v časovnem intervalu $[t, t + \Delta t]$. Njene enote so m^{-2} ali cm^{-2} . Fluena je groba količina, saj ne pove ničesar o energiji, smeri ali vrsti delcev.

3.2 Gostota toka delcev ali hitrost fluence (ϕ)

Gostota toka delcev ϕ (pogosto imenovana tudi *fluks* ali *hitrost fluence*) je definirana kot fluena na enoto časa. Predstavlja število delcev, ki prečkajo enoto površine na enoto časa v okolici točke T ob času t .

$$\phi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (43)$$

Enote za gostoto toka delcev so $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ali $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$. Fluenco v časovnem intervalu $[t_1, t_2]$ lahko izračunamo z integracijo gostote toka delcev:

$$\Phi([t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t') dt' \quad (44)$$

Primer: Če je gostota toka delcev konstantna ($\phi = \text{konst.}$), je fluena v intervalu Δt preprosto:

$$\Phi([t, t + \Delta t]) = \phi \int_t^{t+\Delta t} dt' = \phi \cdot \Delta t$$

3.3 Energijska fluena (Ψ)

Energijska fluena Ψ je definirana kot pričakovana vsota kinetičnih energij $\langle R \rangle$ vseh delcev, ki vstopijo v namišljeno kroglo, deljena s presekom S .

$$\Psi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle R \rangle}{S} \quad (45)$$

Enote za energijsko fluenco so J m^{-2} ali erg cm^{-2} .

Primer (monoenergijsko sevanje): Če imajo vsi delci enako kinetično energijo E_k , je skupna energija enaka $R = E_k \cdot N$. Energijska fluena je v tem primeru:

$$\Psi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{E_k \langle N \rangle}{S} = E_k \left(\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle N \rangle}{S} \right) = E_k \cdot \Phi$$

3.4 Gostota energijskega toka ali energijski fluks (ψ)

Gostota energijskega toka ψ (ali *energijski fluks*) je energijska fluenca na enoto časa. Predstavlja energijo, ki jo delci prenesejo skozi enoto površine na enoto časa.

$$\psi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Psi}{\Delta t} \quad (46)$$

Enote so $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$ ali W m^{-2} . Povezava z energijsko fluenco je:

$$\Psi([t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t') dt'$$

Primer (konstanten energijski fluks): Če je $\psi = \text{konst.}$, je $\Psi = \psi \cdot \Delta t$.

Primer (monoenergijsko sevanje): Gostota energijskega toka je v tem primeru enaka produktu kinetične energije delca in gostote toka delcev:

$$\psi = E_k \cdot \phi$$

3.5 Diferencialne količine

Osnovne količine (Φ, ϕ, Ψ, ψ) so grobi opisi polja. Za natančnejšo analizo interakcij potrebujemo porazdelitve teh količin po energiji delcev in po smeri njihovega gibanja. Smer opišemo s prostorskim kotom Ω .

Prostorski kot in koordinatni sistem

Smer gibanja delca v prostoru opišemo z dvema kotoma v sferičnem koordinatnem sistemu:

- **Polarni kot θ :** kot med smerjo delca in izbrano osjo z . Zavzame vrednosti $\theta \in [0, \pi]$.
- **Azimutni kot φ :** kot projekcije smeri delca na ravnino xy glede na os x . Zavzame vrednosti $\varphi \in [0, 2\pi]$. (V vaših zapiskih je označen z β).

Infinitezimalni element prostorskega kota $d\Omega$ je podan z:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

Včasih je pri integraciji bolj priročno uporabiti $\cos \theta$ kot spremenljivko. Ker je $d(\cos \theta) = -\sin \theta d\theta$, lahko zapišemo:

$$d\Omega = -d(\cos \theta) d\varphi$$

Celoten prostorski kot je $\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi$ steradianov.

3.5.1 Diferencialne porazdelitve

Za popoln opis sevalnega polja moramo poznati porazdelitev delcev po energiji in smeri. Definiramo diferencialne oblike fluence in gostote toka.

Diferencialna gostota toka delcev: Diferencialna gostota toka delcev, ki jo označimo s ϕ' , nam pove, koliko delcev z energijo v intervalu $[E, E + dE]$ preleti enoto površine v enoti časa znotraj prostorskega kota $d\Omega$ v smeri (θ, φ) .

$$\phi'(E, \cos \theta, \varphi) = \frac{d^3 \phi}{dE d(\cos \theta) d\varphi} = \frac{d^2 \phi}{dE d\Omega} \quad (47)$$

Enota za to količino je $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{eV}^{-1}$ ali podobna.

Celotno gostoto toka delcev ϕ dobimo z integracijo diferencialne gostote po vseh energijah in vseh prostorskih kotih:

$$\phi = \int_{4\pi} d\Omega \int_0^{E_{\max}} dE \phi'(E, \cos \theta, \varphi) \quad (48)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{E_{\max}} dE \phi'(E, \cos \theta, \varphi) \quad (49)$$

Energijski spekter gostote toka delcev: Če diferencialno gostoto toka integriramo le po prostorskem kotu, dobimo **energijski spekter gostote toka delcev**, $\phi'(E)$. Ta količina nam pove število delcev z energijo v intervalu $[E, E + dE]$, ki preletijo enoto površine na enoto časa, ne glede na smer.

$$\phi'(E) = \int_{4\pi} \phi'(E, \cos \theta, \varphi) d\Omega = \frac{d\phi}{dE} \quad (50)$$

Enota za energijski spekter gostote toka je $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{eV}^{-1}$.

Diferencialna gostota energijskega toka: Podobno definiramo diferencialno gostoto energijskega toka, ψ' , ki opisuje porazdelitev energijskega toka po energiji in smeri.

$$\psi'(E, \cos \theta, \varphi) = \frac{d^3 \psi}{dE d(\cos \theta) d\varphi} = \frac{d^2 \psi}{dE d\Omega} \quad (51)$$

Enota je npr. $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{eV}^{-1}$.

Energijski spekter gostote energijskega toka: Z integracijo po prostorskem kotu dobimo **energijski spekter gostote energijskega toka**, $\psi'(E)$:

$$\psi'(E) = \int_{4\pi} \psi'(E, \cos \theta, \varphi) d\Omega = \frac{d\psi}{dE} \quad (52)$$

Ta količina je ključna pri dozimetričnih izračunih. Pove nam, koliko energije na enoto površine in na enoto časa prinesejo delci z energijo v intervalu $[E, E + dE]$. Povezava med spektroma $\phi'(E)$ in $\psi'(E)$ je preprosta:

$$\psi'(E) = E \cdot \phi'(E)$$

3.5.2 Povezava med energijskima spektroma $\psi'(E)$ in $\phi'(E)$

Že pri integralnih količinah smo za monoenergijsko polje z energijo E_k videli preprosto zvezo $\psi = E_k \cdot \phi$. Poglejmo, kako se ta zveza posploši za polja z zveznim spektrom.

Oglejmo si ozek energijski interval $[E, E + dE]$. Če je interval dovolj ozek, lahko energijo vseh delcev v njem smatramo za približno konstantno in enako E . Gostota toka delcev v tem intervalu, $d\phi(E)$, je po definiciji energijskega spektra enaka:

$$d\phi(E) = \phi'(E)dE$$

To sledi neposredno iz definicije $d\phi/dE = \phi'(E)$. Ti delci nosijo s seboj gostoto energijskega toka $d\psi(E)$. Ker imajo vsi energijo približno E , je ta enaka:

$$d\psi(E) \approx E \cdot d\phi(E) = E \cdot \phi'(E)dE$$

Po definiciji energijskega spektra energijskega toka pa velja tudi $d\psi(E) = \psi'(E)dE$. Če primerjamo oba izraza, dobimo iskano zvezo.

Splošna zveza med spektroma

Energijski spekter gostote energijskega toka, $\psi'(E)$, je enak energijskemu spektru gostote toka delcev, $\phi'(E)$, pomnoženemu z energijo E :

$$\psi'(E) = E \cdot \phi'(E) \quad (53)$$

Ta zveza je temeljnega pomena in velja za vsako sevalno polje, ne glede na njegovo sestavo. Pove nam, kako energijo, ki jo nosijo delci, porazdelimo po energijskem spektru.

Primer 3.1 (Monoenergijsko sevalno polje). *Recimo, da je energijski spekter gostote toka delcev opisan z Diracovo delta funkcijo:*

$$\phi'(E) = \phi_0 \cdot \delta(E - E_1)$$

kjer je ϕ_0 konstanta. Izračunajmo celotno gostoto toka delcev ϕ in celotno gostoto energijskega toka ψ .

Rešitev:

Gostota toka delcev (ϕ): Celotno gostoto toka dobimo z integracijo spektra po vseh energijah. Meje integrala lahko razširimo od 0 do ∞ , saj je spekter izven fizikalno smiselnih meja tako ali tako enak nič.

$$\phi = \int_0^\infty \phi'(E)dE = \int_0^\infty \phi_0 \delta(E - E_1)dE$$

Upoštevamo lastnost Diracove delta funkcije: $\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$.

$$\phi = \phi_0 \int_0^\infty \delta(E - E_1)dE = \phi_0 \cdot 1 = \phi_0$$

Dobili smo, da je konstanta ϕ_0 kar celotna gostota toka delcev. Tak spekter opisuje **monoenergijsko sevalno polje**, kjer imajo vsi delci enako energijo E_1 . Gre torej za črtast spekter.

Gostota energijskega toka (ψ): Najprej izračunamo energijski spekter energijskega toka z enačbo 53:

$$\psi'(E) = E \cdot \phi'(E) = E \cdot \phi_0 \delta(E - E_1)$$

Sedaj integriramo po energiji:

$$\psi = \int_0^\infty \psi'(E) dE = \int_0^\infty E \cdot \phi_0 \delta(E - E_1) dE$$

Ponovno uporabimo lastnost delta funkcije, kjer je sedaj $f(E) = E \cdot \phi_0$:

$$\psi = \phi_0 \cdot E_1$$

Rezultat je skladen s pričakovanji: celotna gostota energijskega toka je enaka produktu celotne gostote toka delcev in njihove monoenergije E_1 .

Primer 3.2 (Ravni spekter gostote toka delcev). Oglejmo si sevalno polje, katerega energijski spekter gostote toka delcev je konstanten v območju od 0 do E_{max} :

$$\phi'(E) = \begin{cases} \phi'_0 & \text{za } 0 \leq E \leq E_{max} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

kjer je ϕ'_0 konstanta. Izračunajmo celotno gostoto toka delcev ϕ in celotno gostoto energijskega toka ψ .

Rešitev:

Gostota toka delcev (ϕ): Celotno gostoto toka dobimo z integracijo spektra po energiji:

$$\phi = \int_0^\infty \phi'(E) dE = \int_0^{E_{max}} \phi'_0 dE = \phi'_0 [E]_0^{E_{max}} = \phi'_0 E_{max}$$

Gostota energijskega toka (ψ): Najprej določimo energijski spekter gostote energijskega toka:

$$\psi'(E) = E \cdot \phi'(E) = \begin{cases} E \cdot \phi'_0 & \text{za } 0 \leq E \leq E_{max} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Vidimo, da spekter energijskega toka linearно narašča z energijo. Celotno gostoto energijskega toka dobimo z integracijo:

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^\infty \psi'(E) dE = \int_0^{E_{max}} E \cdot \phi'_0 dE \\ &= \phi'_0 \left[\frac{E^2}{2} \right]_0^{E_{max}} = \frac{1}{2} \phi'_0 E_{max}^2 \end{aligned}$$

Rezultat lahko izrazimo tudi s celotno gostoto toka delcev ϕ , saj velja $\phi'_0 = \phi/E_{max}$:

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{E_{max}} \right) E_{max}^2 = \frac{1}{2} E_{max} \phi$$

Celotna gostota energijskega toka je enaka produktu celotne gostote toka delcev in povprečne energije delcev, ki je v tem primeru $\langle E \rangle = E_{max}/2$.

3.6 Kotne porazdelitve

Pogosto nas zanima porazdelitev delcev le glede na smer, ne glede na njihovo energijo. Takšne količine dobimo z integracijo diferencialnih porazdelitev po celotnem energijskem spektru.

Kotna porazdelitev gostote toka delcev: Kotno porazdelitev gostote toka delcev, $\phi'(\cos \theta, \varphi)$, dobimo tako, da diferencialno gostoto toka $\phi'(E, \cos \theta, \varphi)$ integriramo po vseh energijah:

$$\phi'(\cos \theta, \varphi) = \int_0^{E_{\max}} \phi'(E, \cos \theta, \varphi) dE = \frac{d^2 \phi}{d(\cos \theta) d\varphi} \quad (54)$$

Ta količina nam pove število delcev na enoto površine na enoto časa, ki se gibljejo v smeri (θ, φ) znotraj prostorskega kota $d\Omega = d(\cos \theta) d\varphi$.

Porazdelitev po polarnem kotu: Če sevalno polje kaže cilindrično simetrijo okoli osi z (kar je pogost primer pri snopih delcev), potem kotna porazdelitev ni odvisna od azimutnega kota φ . V tem primeru lahko integriramo po vseh vrednostih φ (od 0 do 2π), da dobimo porazdelitev gostote toka delcev samo glede na polarni kot θ :

$$\phi'(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \phi'(\cos \theta, \varphi) d\varphi = \frac{d\phi}{d(\cos \theta)} \quad (55)$$

Zveza med $\phi'(\cos \theta)$ in $\phi'(\theta)$: Pomembno je ločiti med porazdelitvijo po $\cos \theta$ in porazdelitvijo po θ . Porazdelitev po kotu θ , $\phi'(\theta)$, je definirana kot:

$$\phi'(\theta) = \frac{d\phi}{d\theta}$$

Povezavo med obema porazdelitvama dobimo s pomočjo transformacije spremenljivk.

Transformacija gostote verjetnosti (Jacobijeva determinanta)

Če imamo gostoto verjetnosti $f(x)$ za spremenljivko x in želimo dobiti gostoto verjetnosti $g(y)$ za novo spremenljivko y , ki je funkcija x , tj. $y = y(x)$, moramo upoštevati, da mora biti verjetnost v infinitezimalnih intervalih enaka:

$$f(x)|dx| = g(y)|dy|$$

Od tod sledi transformacijska formula:

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

Faktor $\left| \frac{dx}{dy} \right|$ je (v eni dimenziji) Jacobijeva determinanta transformacije.

V našem primeru imamo $y = \theta$ in $x = \cos \theta$. Povezava je $\cos \theta = x$, $\theta = \arccos(x) = y$. Iščemo $\phi'(\theta) = d\phi/d\theta$.

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{d\phi}{d(\cos \theta)} \left| \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} \right|$$

Ker je odvod $\frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = -\sin \theta$ in ker $\theta \in [0, \pi]$ (kjer je $\sin \theta \geq 0$), je absolutna vrednost enaka $\sin \theta$. Tako dobimo zvezo:

$$\phi'(\theta) = \phi'(\cos \theta) \cdot \sin \theta \quad (56)$$

Primer 3.3 (Izotropno sevalno polje). *Predpostavimo, da je kotna porazdelitev delcev izotropna, kar pomeni, da je enaka v vseh smereh. V tem primeru je porazdelitev po prostorskem kotu konstantna, torej je tudi porazdelitev po $\cos \theta$ in φ konstantna.*

$$\phi'(\cos \theta, \varphi) = \text{konst.}$$

Za porazdelitev po $\cos \theta$ potem velja:

$$\phi'(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \text{konst.} d\varphi = 2\pi \cdot \text{konst.} = \frac{\phi}{2}$$

(Faktor $\phi/2$ dobimo iz normalizacije: $\phi = \int_{-1}^1 \phi'(\cos \theta) d(\cos \theta) = \text{konst.} \cdot 2\pi \cdot 2$).

Izračunajmo porazdelitev po kotu θ z uporabo enačbe 56:

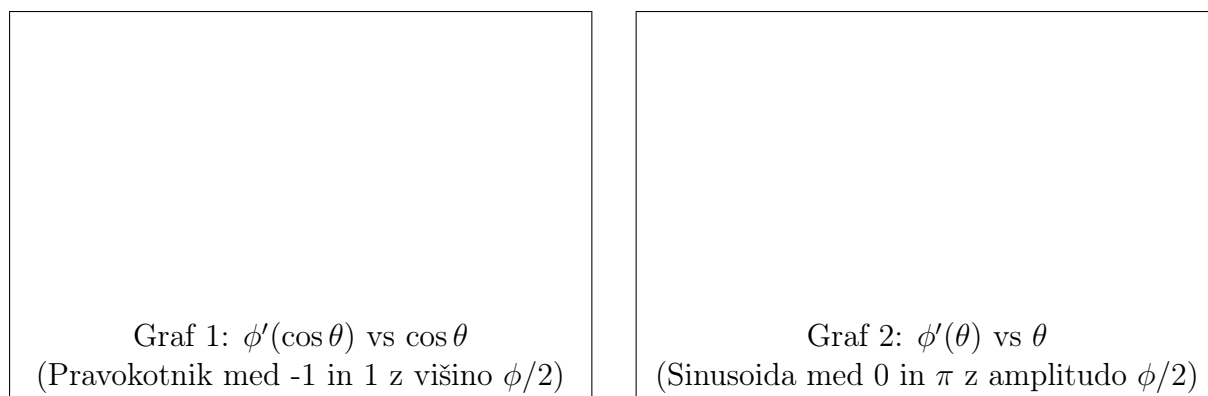
$$\phi'(\theta) = \phi'(\cos \theta) \sin \theta = \frac{\phi}{2} \sin \theta$$

Porazdelitev po kotu θ za izotropno sevanje ni konstantna, ampak sledi funkciji sinus, z maksimumom pri $\theta = \pi/2$ (90°) in vrednostjo nič pri $\theta = 0$ in $\theta = \pi$. To je posledica dejstva, da je prostorski kot na enoto kota θ največji na "ekvatorju" ($\theta = \pi/2$) in najmanjši na "polih" ($\theta = 0, \pi$).

Preverimo normalizacijo:

$$\int_0^\pi \phi'(\theta) d\theta = \int_0^\pi \frac{\phi}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\phi}{2} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{\phi}{2} (-(-1) - (-1)) = \frac{\phi}{2} \cdot 2 = \phi$$

Integracija se pravilno izide.



Slika 1: Primerjava porazdelitve gostote toka za izotropno sevalno polje. Levo: porazdelitev po $\cos \theta$ je konstantna. Desno: porazdelitev po θ sledi funkciji $\sin \theta$. Ploščina pod obema krivuljama je enaka in predstavlja celotno gostoto toka ϕ .

3.7 Alternativna definicija fluence delcev

Obstaja alternativna, a enakovredna definicija fluence, ki je pogosto bolj uporabna v simulacijah in teoretičnih izpeljavah (npr. po Chiltonu).

Predpostavimo, da imamo v okolici točke T infinitezimalno majhen volumen V . Delci sevanja, ki prehajajo skozi ta volumen, imajo v njem določeno dolžino poti. Če seštejemo dolžine poti l_i vseh delcev, ki prečkajo volumen V , in to vsoto delimo s prostornino V , dobimo fluenco.

$$\Phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle \sum_i l_i \rangle}{V} \quad (57)$$

V limiti majhnega volumna lahko poti delcev smatramo za ravne črte. Ta definicija je uporabna, ker neposredno povezuje fluenco z dolžinami sledi delcev, kar je količina, ki jo je enostavno slediti v Monte Carlo simulacijah transporta delcev. Povezava med "prečkanjem površine" in "dolžino poti v volumnu" je temeljna lastnost geometrijske verjetnosti.

3.8 Planarna fluenca (Φ_{pl})

V nekaterih primerih, posebej pri dozimetriji na mejah med snovmi, je uporabna količina, imenovana **planarna fluenca**, Φ_{pl} . Namesto krogle si tukaj predstavljamo ravno ploskev s površino S .

Planarna fluenca je definirana kot pričakovano število delcev $\langle N_{pl} \rangle$, ki prečkajo to ploskev v obeh smereh (npr. od zgoraj navzdol in od spodaj navzgor), deljeno s površino ploskve S .

$$\Phi_{pl} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\langle N_{pl} \rangle}{S} \quad (58)$$

Enota je enaka kot za navadno fluenco, m^{-2} . Podobno definiramo tudi **gostoto toka planarne fluence** $\phi_{pl} = d\Phi_{pl}/dt$.

Zveza med navadno in planarno fluenco: Razmerje med navadno in planarno fluenco je odvisno od kotne porazdelitve sevalnega polja.

- **Pravokotno vpadanje:** Če vsi delci vpadajo pravokotno na ploskev ($\theta = 0$), je planarna fluenca enaka navadni fluenci: $\Phi_{pl} = \Phi$.
- **Vpadanje pod kotom θ :** Če delci vpadajo pod kotom θ glede na normalo ploskve, se efektivna površina, ki jo "vidijo" delci, zmanjša za faktor $\cos \theta$. Posledično je planarna fluenca manjša: $\Phi_{pl} = \Phi \cdot |\cos \theta|$.
- **Izotropno polje:** V primeru popolnoma izotropnega sevalnega polja (delci prihajajo z vseh smeri z enako verjetnostjo) je razmerje med planarno in navadno fluenco $\Phi_{pl} = \Phi/2$.

Planarna fluenca je uporabna, ker neposredno opisuje število delcev, ki prestopijo mejo, kar je pomembno pri obravnavi dozimetričnih efektov na mejnih ploskvah. Pomen te količine bo postal bolj jasen kasneje pri obravnavi dozimetrije.

4 Interakcija fotonov s snovjo

Fotoni, kot so žarki X in gama, so nenabiti delci in zato interagirajo s snovjo drugače kot nabiti delci. Njihova pot skozi snov je sestavljena iz posameznih, naključnih interakcij, med katerimi potujejo neovirano. Glavni procesi interakcije fotonov s snovjo, ki so pomembni za dozimetrijo, so:

1. Comptonovo sipanje (CS)
2. Fotoelektrični pojav (FE)
3. Tvorba parov (TP)
4. Rayleighovo (koherentno) sipanje
5. Fotojedrske reakcije

Relativna pomembnost prvih treh procesov je odvisna od energije vpadnega fotona ($h\nu$) in vrstnega števila snovi (Z), kot je prikazano na diagramu Z proti $h\nu$. Na splošno velja, da pri nizkih energijah dominira fotoefekt, pri srednjih Comptonovo sipanje, pri visokih pa tvorba parov.

4.1 Comptonovo sipanje

Comptonovo sipanje je prožno sipanje fotona na (skoraj) prostem in mirujočem elektronu. Ta proces je dominanten pri srednjih energijah, ki so značilne za radioterapijo z ^{60}Co viri in linearnimi pospeševalniki.

Približek prostega in mirujočega elektrona: Model Comptonovega sipanja predpostavlja, da foton interagira s prostim elektronom, ki miruje. V resnici so elektroni v atomu vezani in se gibljejo. Ta približek je upravičen, kadar je energija vpadnega fotona veliko večja od vezavne energije elektrona v atomu ($h\nu \gg |E_v|$).

- **Vezavna energija:** Elektroni v zunanjih lupinah lahkkih elementov (npr. v vodi, tkivu) imajo vezavne energije reda velikosti nekaj eV. Že fotoni z energijo nekaj keV imajo bistveno večjo energijo, zato so ti elektroni praktično prosti.
- **Kinetična energija:** Kinetična energija elektronov v atomu je povezana z njihovo vezavno energijo.

Virialni izrek za atom

Virialni izrek povezuje povprečno kinetično energijo $\langle T_e \rangle$ in povprečno potencialno energijo $\langle E_p \rangle$ sistema delcev, ki so vezani s silami, obratno sorazmernim s kvadratom razdalje (kot je Coulombova sila v atomu). Izrek pravi:

$$2\langle T_e \rangle = -\langle E_p \rangle$$

Ker je vezavna energija $|E_v|$ enaka negativni skupni energiji ($|E_v| = -(T_e + E_p)$) in je za vezan sistem skupna energija enaka polovici potencialne energije ($E = E_p/2$), lahko zapišemo:

$$\langle T_e \rangle = -\frac{1}{2}\langle E_p \rangle = |E_v|$$

Vendar pa je bolj natančna kvantnomehanska obravnava pokazala, da je povprečna kinetična energija enaka absolutni vrednosti skupne energije, kar je enako vezavni energiji. Vendar se po navadi uporablja ocena $\langle T_e \rangle \approx \frac{1}{2}|E_v|$. To pomeni, da je kinetična energija elektronov v atomu približno enakega reda velikosti kot njihova vezavna energija. Če je energija vpadnega fotona veliko večja od obeh ($h\nu \gg |E_v| \approx \langle T_e \rangle$), lahko elektrone smatramo za mirujoče in proste.

Kinematika Comptonovega sipanja: Pri Comptonovem sipanju vpadni foton z energijo $h\nu$ in gibalno količino \vec{p}_γ trešči v mirujoč elektron. Po trku imamo sipani foton z nižjo energijo $h\nu'$ in gibalno količino \vec{p}'_γ ter elektron (Comptonov elektron) s kinetično energijo T_e in gibalno količino \vec{p}_e . Smer sipanega fotona opišemo s polarnim kotom θ glede na smer vpadnega fotona, smer odsunjenega elektrona pa s kotom ϕ .

5 Vaje 8.10.2025

Primer 5.1 (Energija pri α razpadu). Izračunajte energijo, ki se sprosti pri α razpadu jedra ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ v ${}^{222}_{86}\text{Rn}$. Uporabite naslednje podatke za mase nevtralnih atomov:

- $m({}^{226}\text{Ra}) = 226.0254 \text{ u}$
- $m({}^{222}\text{Rn}) = 222.0175 \text{ u}$
- $m({}^4\text{He}) = 4.0026 \text{ u}$

Uporabite pretvorbeni faktor za atomsko enoto mase (u):

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m({}^{12}\text{C}) = 931.5 \text{ MeV } c_0^{-2}$$

Rešitev: Sproščena energija (Q ali T) pri jedrskem razpadu je enaka razliki med mirovno energijo začetnega jedra in vsoto mirovnih energij končnih produktov. Predpostavimo, da je jedro radija na začetku mirovalo ($T_{\text{Ra}} = 0$). Iz ohranitve energije sledi:

$$m_{\text{Ra}}c^2 = m_{\text{Rn}}c^2 + m_{\text{He}}c^2 + T$$

kjer je T skupna kinetična energija produktov ($T = T_{\text{Rn}} + T_{\text{He}}$). Sproščeno energijo izračunamo kot:

$$\begin{aligned} T &= (m_{\text{Ra}} - m_{\text{Rn}} - m_{\text{He}})c^2 \\ &= (226.0254 \text{ u} - 222.0175 \text{ u} - 4.0026 \text{ u}) \cdot c^2 \\ &= 0.0053 \text{ u} \cdot c^2 \end{aligned}$$

Uporabimo pretvorbeni faktor in dobimo:

$$T = 0.0053 \cdot 931.5 \text{ MeV} = 4.94 \text{ MeV}$$

Pri razpadu se sprosti 4.94 MeV energije.

Primer 5.2 (Porazdelitev kinetične energije). Izračunajte, kolikšen del sproščene energije iz prejšnjega primera odnese delec alfa.

Rešitev: Uporabimo zakona o ohranitvi gibalne količine in energije. Ker je začetno jedro mirovalo, velja:

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{Rn}} + \vec{p}_{\text{He}} &= 0 \quad \Rightarrow \quad |\vec{p}_{\text{Rn}}| = |\vec{p}_{\text{He}}| = p \\ T &= T_{\text{Rn}} + T_{\text{He}} \end{aligned}$$

Izrazimo kinetično energijo z gibalno količino v nerelativističnem približku ($T = p^2/(2m)$):

$$p^2 = 2m_{\text{Rn}}T_{\text{Rn}} \quad \text{in} \quad p^2 = 2m_{\text{He}}T_{\text{He}}$$

Od tod sledi:

$$2m_{\text{Rn}}T_{\text{Rn}} = 2m_{\text{He}}T_{\text{He}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{Rn}} = T_{\text{He}} \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{Rn}}}$$

Vstavimo to v enačbo za skupno energijo:

$$T = T_{He} \frac{m_{He}}{m_{Rn}} + T_{He} = T_{He} \left(1 + \frac{m_{He}}{m_{Rn}} \right)$$

Končno dobimo izraz za kinetično energijo delca alfa:

$$T_{He} = \frac{T}{1 + \frac{m_{He}}{m_{Rn}}}$$

Uporabimo približni razmerji mas, ki sta enaki razmerju masnih števil: $m_{He} \approx 4$ in $m_{Rn} \approx 222$.

$$T_{He} = \frac{T}{1 + \frac{4}{222}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{55.5}} = T \cdot \frac{55.5}{56.5} \approx 0.982 \cdot T$$

Delec alfa odnese približno 98.2 % celotne sproščene energije:

$$T_{He} = 0.982 \cdot 4.937 \text{ MeV} \approx 4.85 \text{ MeV}$$

Primer 5.3 (Povprečna energija pri razvejitvi). Jedro ^{226}Ra lahko razpade na dva načina. Z verjetnostjo $\eta_A = 94\%$ razpade neposredno v osnovno stanje ^{222}Rn , pri čemer ima delec alfa energijo $T_{\alpha,A} = 4.78 \text{ MeV}$. Z verjetnostjo $\eta_B = 6\%$ pa razpade v vzbujeno stanje $^{222}\text{Rn}^*$. Kinetična energija delca alfa je v tem primeru $T_{\alpha,B}$, vzbujeno jedro pa nato preide v osnovno stanje z oddajo fotona z energijo $E_\gamma = 0.18 \text{ MeV}$. Izračunajte povprečno kinetično energijo delcev alfa.

Rešitev: Najprej izračunamo kinetično energijo delca alfa pri razpadu v vzbujeno stanje. Skupna sproščena energija pri tej veji je enaka energiji prve veje, zmanjšani za energijo fotona:

$$Q_B = T_{\alpha,A} - E_\gamma = 4.78 \text{ MeV} - 0.18 \text{ MeV} = 4.60 \text{ MeV}$$

Delec alfa v tej veji dobi večino te energije, torej $T_{\alpha,B} \approx Q_B = 4.60 \text{ MeV}$. Povprečna energija delcev alfa je tehtano povprečje energij iz obeh vej:

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha \rangle &= \eta_A \cdot T_{\alpha,A} + \eta_B \cdot T_{\alpha,B} \\ &= 0.94 \cdot (4.78 \text{ MeV}) + 0.06 \cdot (4.60 \text{ MeV}) \\ &= 4.493 \text{ MeV} + 0.276 \text{ MeV} = 4.769 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Povprečna kinetična energija oddanih delcev alfa je $\langle T_\alpha \rangle \approx 4.77 \text{ MeV}$.