10. naloga
Fourierova analiza

Ma-Fi seminar 2023/24

Fourierove transformacije

UNIVERSITY OF LJUBLJANA
FMF Faculty of Mathematics and Physics

- Danes se bomo ukvarjali z numeričnim pristopom k **Foureirovim transformacijam (FT).**
  - Uporabne za spektralno analizo najrazličnejših oblik, od svetlobe do trgovanja z delnicami na borzi.
  - Pomembna uporaba za reševanje diferencialnih enačb.
  - …
  - Uporabili bomo naslednjo konvencijo za zapis FT in inverzne FT:
    - Uporabljamo 'f' kot frekvenco 'ν'. Če hočemo uporabiti kotno hitrost 'ω', potrebujemo v drugem integralu še faktor $1/2\pi$.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-2\pi i f t)\, dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(+2\pi i f t)\, df$$

In 1811, Joseph Fourier, the 43-year-old prefect of the French district of Isère, entered a competition in heat research sponsored by the French Academy of Sciences. The paper he submitted described a novel analytical technique that we today call the Fourier transform, and it won the competition; but the prize jury declined to publish it, criticizing the sloppiness of Fourier's reasoning. According to Jean-Pierre Kahane, a French mathematician and current member of the academy, as late as the early 1970s, Fourier's name still didn't turn up in the major French encyclopedia the Encyclopædia Universalis.

V fiziki tipično raje preslikamo čas t v $\omega=2\pi\nu$, potem $\dfrac{1}{2\pi}$ faktor spredaj…

Lastnosti FT

- Nekaj lastnosti FT (za ponavljanje in uporabo):
  - Ohranja se **parnost** (sort of…):
    - če je *h(t)* realna in soda je tudi *H(f)* **realna** in soda.
    - če je *h(t)* realna in liha je *H(f)* **imaginarna** in liha.
  - FT **realne** funkcije *h(t) : H(f)* je kompleksna z naslednjo simetrijo:

$$H(-f) = H^*(f)$$

iz tega zgornja postulata…

  - FT **imaginarne** funkcije *h(t): H(f)* je kompleksna s simetrijo:

$$H(-f) = -H^*(f)$$

Tu * označuje kompleksno konjugacijo (… za vsak slučaj …).

Grafično

$$\begin{array}{llllllllll}
\text{Time domain} & x & = & x_{RE} & + & x_{RO} & + & i\,x_{IE} & + & \underbrace{i\,x_{IO}} \\
 & \Updownarrow \mathcal{F} & & \Updownarrow \mathcal{F} & & \Updownarrow \mathcal{F} & & \Updownarrow \mathcal{F} & & \Updownarrow \mathcal{F} \\
\text{Frequency domain} & X & = & X_{RE} & + & \overbrace{i\,X_{IO}} & + & i\,X_{IE} & + & X_{RO}
\end{array}$$

- Velja tudi **Parsevalov teorem** (fizikalno: pri valovanju ohranitev energije/moči …)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Lastnosti FT

- Še ena pomembna lastnost je vedenje ob premiku funkcije:
  - Če *h(t)* **premaknemo** v *h(t+τ) , dobi H(f)* dodatno **modulacijo**.
    - Postavimo:

$$g(t) = h(t+\tau)$$

    - Izrazimo funkciji z inverzno FT na obeh straneh enačbe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(2\pi i f t)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\exp(2\pi i f(t+\tau))\,df$$

    - Tako dobimo zvezo:

$$G(f) = H(f)\exp(2\pi i f\tau)$$

$$\boxed{\mathrm{FT}\,(h(t+\tau)) = H(f)\exp(2\pi i f\tau)}$$

- Lep zgled je **premaknjena** Gaussova funkcija …
  - Več o tem kasneje…

Diskretizacija…

- Zdaj že dobro znan korak v numeričnem reševanju je, da **diskretiziramo** vrednosti iskane funkcije ***h(t)*** in njene FT ***H(f)*** na mreži:
  - Fizikalno si to lahko tu tolmačimo tudi s diskretnim **vzorčenjem s frekvenco ν_s (sampling frequency) oziroma meritev N točk v času T.**

$$\Delta = \frac{T}{N}, \quad t_n = n\Delta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1; \quad \nu_s = \frac{1}{\Delta}$$

časovni interval vzorčenja

  - Analogno definiramo tudi diskretne frekvenčne točke:

$$f_k = \frac{k}{T} = k\frac{1}{N\Delta} = k\frac{\nu_s}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1; \quad \text{ali}$$

$$k = -\frac{N}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$$

- Integral FT se torej prevede na vsoto v *N* točkah:

$$H(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-2\pi i f_k t)\,dt \simeq \sum_{n=0}^{N-1} h(t_n)\exp(-2\pi i f_k t_n)\cdot\Delta$$

prevedemo na **končno** vsoto!

Diskretizacija…

- Bistvena stvar, ki smo jo predpostavili pri tej prevedbi je **periodičnost:**
  - S to **končno** vsoto smo privzeli, da je funkcija periodična na intervalu [0,T], torej da je ***h(t+T)=h(t)***!

$$H(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-2\pi i f_k t)\,dt \simeq \sum_{n=0}^{N-1} h(t_n)\exp(-2\pi i f_k t_n)\cdot\Delta$$

v N točkah vsa informacija!

  - Zapišimo naše funkcije bolj kompaktno:

$$h_n = h(t_n)$$

$$H_k = \frac{H(f_k)}{\Delta} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp(-\frac{i2\pi kn}{N})$$

  - Funkcijska periodičnost postane očitna za obe funkciji (glej periodo N!)

$$h_{n+N} = h_n \quad\longrightarrow\quad h_{-n} = h_{N-n} \quad\longrightarrow\quad h_{-N/2} = h_{N/2},\ h_0 = h_N$$

$$H_{k+N} = H_k \quad\longrightarrow\quad H_{-k} = H_{N-k} \quad\longrightarrow\quad H_{-N/2} = H_{N/2},\ H_0 = H_N$$

Od tu očitna ekvivalenca med uporabljenim frekvenčnim intervalom [-N/2,N/2] in [0,N]! (npr $H_{N-1} = H_{-1}$)

Diskretna inverzna FT

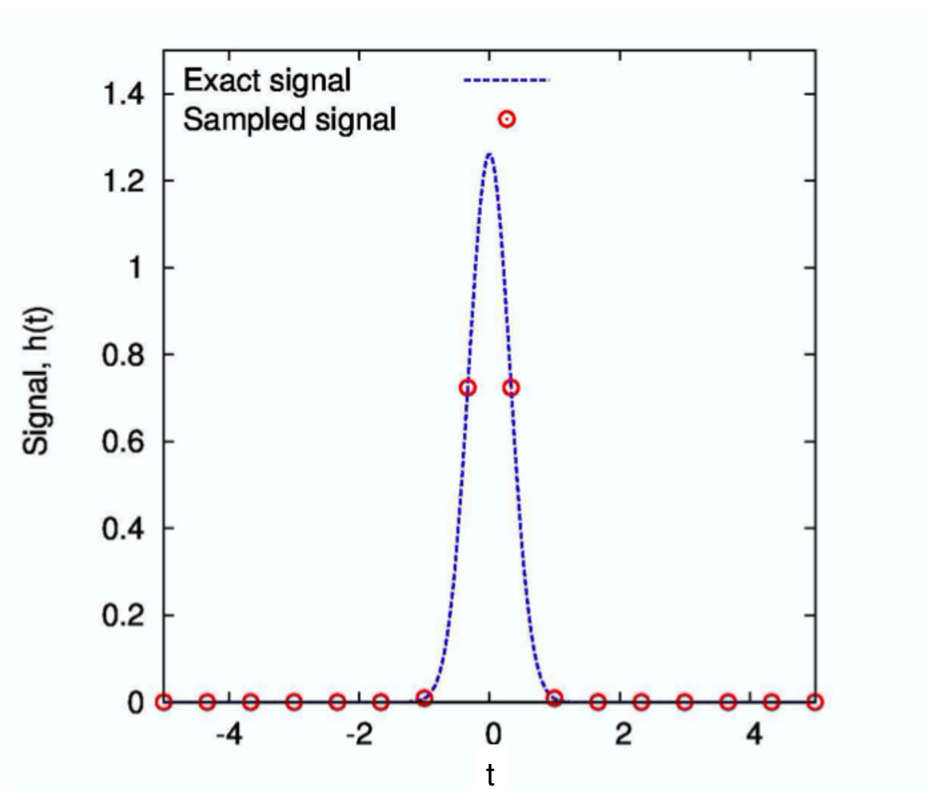
- Izrazimo še diskretiziran izraz za inverzno FT:
  - z dovolj malo truda dobimo:

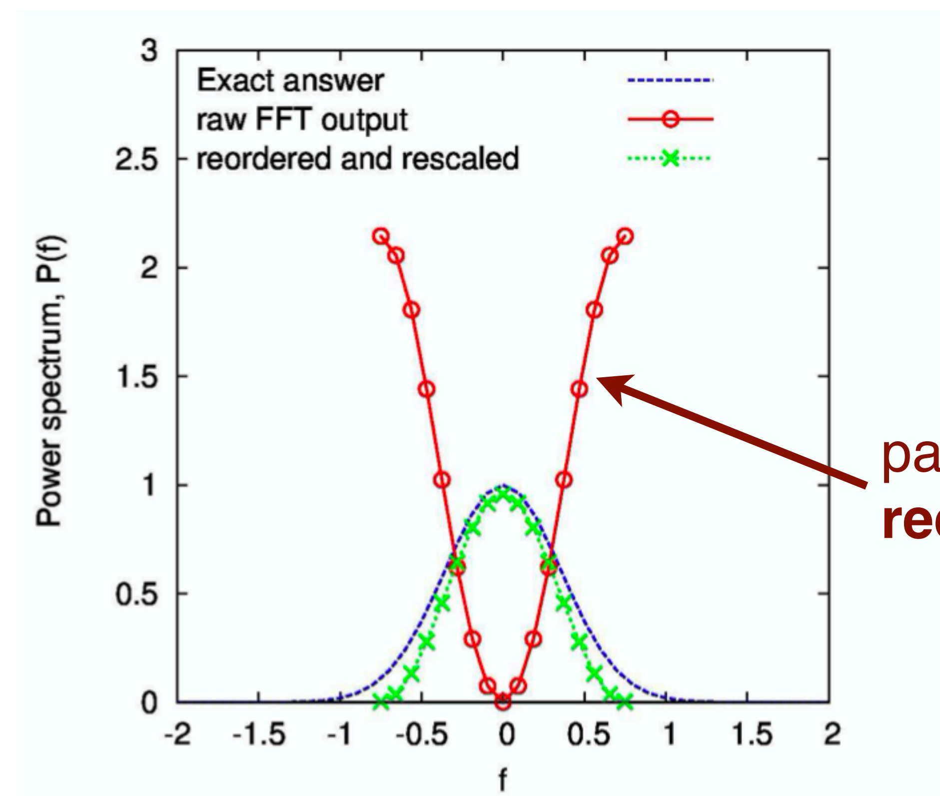
$$h(t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\exp(+2\pi i f t_n)\,df \simeq \sum_{k=0}^{N-1} H(f_k)\exp(+2\pi i f_k t_n)\cdot\frac{1}{T}$$

$$h_n = \frac{\Delta}{T}\sum_{k=0}^{N-1} H_k \exp(+\frac{i2\pi kn}{N})$$

$$h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k \exp(+\frac{i2\pi kn}{N})$$

  - Posebej pomemben je faktor 1/N v zadnjem členu: vidimo, da bo najbolje, če ga uporabimo za **normalizacijo, torej vedno pišimo in rišimo H_k/N!**





pazi tudi na **vrstni red** FT rutine !

Diskretna Parzevalova enačba v FT

UNIVERSITY OF LJUBLJANA | FMF Faculty of Mathematics and Physics

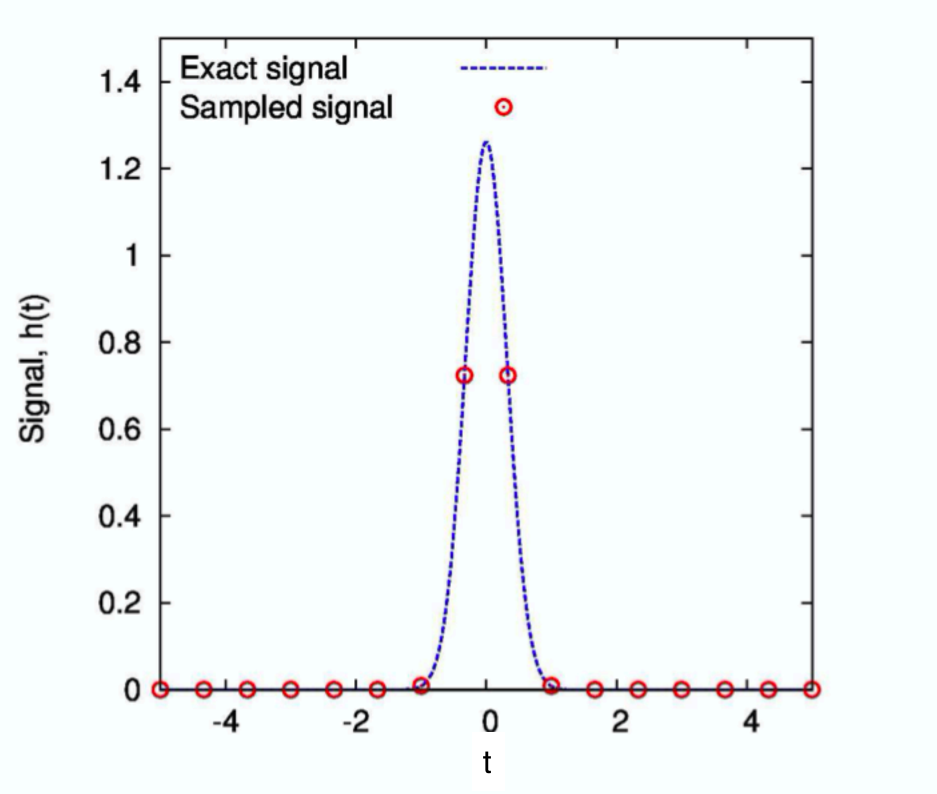
- Končno napišimo še diskretno Parzevalovo enačbo za 'moč':
  - Spet:

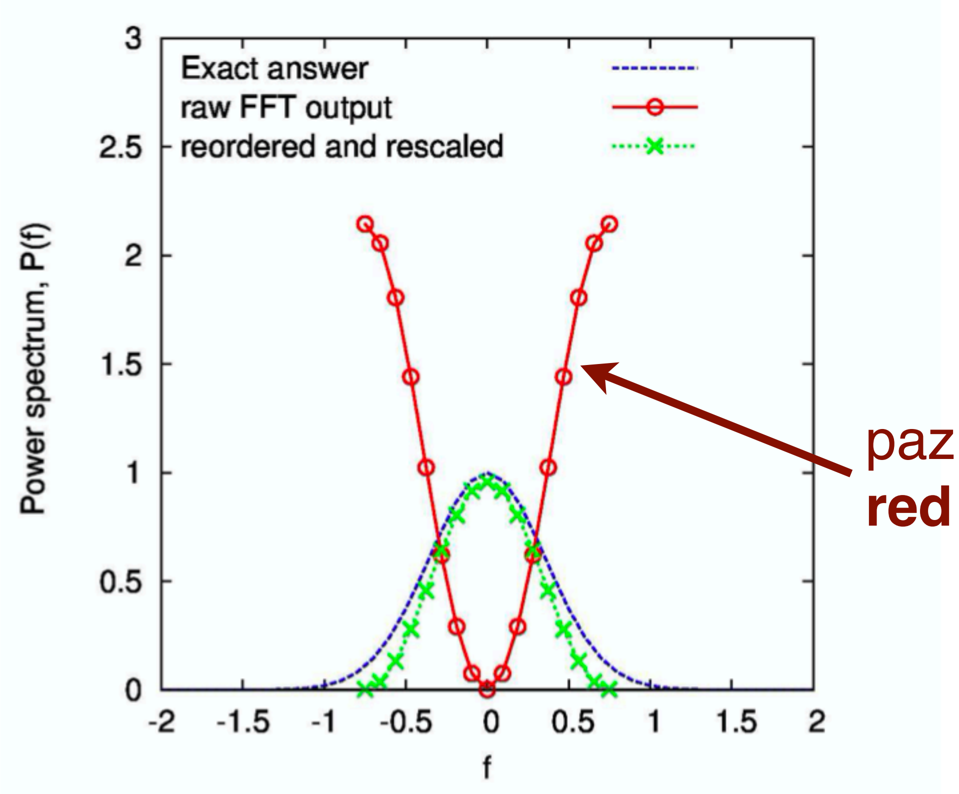
$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$dt \to \Delta; \quad df \to \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta}; \quad H_k = \frac{H(f_k)}{\Delta}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H_k|^2$$

  - Spet je pomemben faktor 1/N v zadnjem členu: vidimo, da bo najbolje, če ga uporabimo za **normalizacijo**, **torej vedno pišimo in rišimo $|H_k|^2/N$!**





pazi tudi na **vrstni red** FT rutine !

Najpreprostejši test

UNIVERSITY OF LJUBLJANA
FMF Faculty of Mathematics and Physics

- Vzamemo kar **konstantno funkcijo h(t)=1 (h_n =1).**

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \exp(-2\pi i k n/N) \longrightarrow H_0 = N,$$

AC/DC…

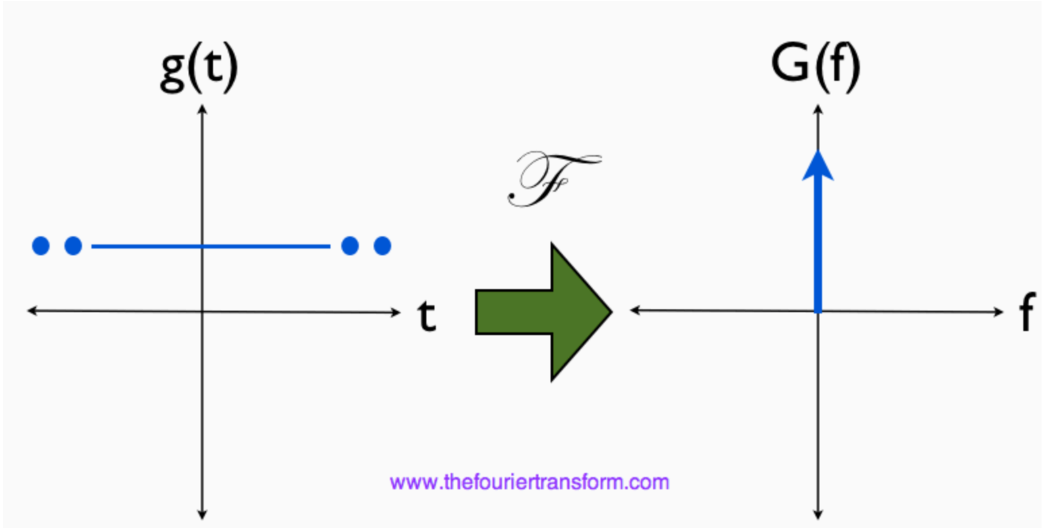
$$H_{k\neq 0} = 0\,(\text{sinus in kosinus integral...})$$

- H_0 člen je dobljen pri frekvenci nič (DC člen), ostali se 'izpovprečijo' v nič.
- Očitno je bistveno **normirati** *H_0* z 1/N pri risanju ipd, saj drugače gre proti neskončno z naraščajočim N, kar ni smiselno.

- Še **obratna transformaciia**:

$$h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k \exp(+\frac{i2\pi k n}{N}) = \frac{N}{N} = 1; \quad \forall n$$

- Reproducira original, kot bi morala.



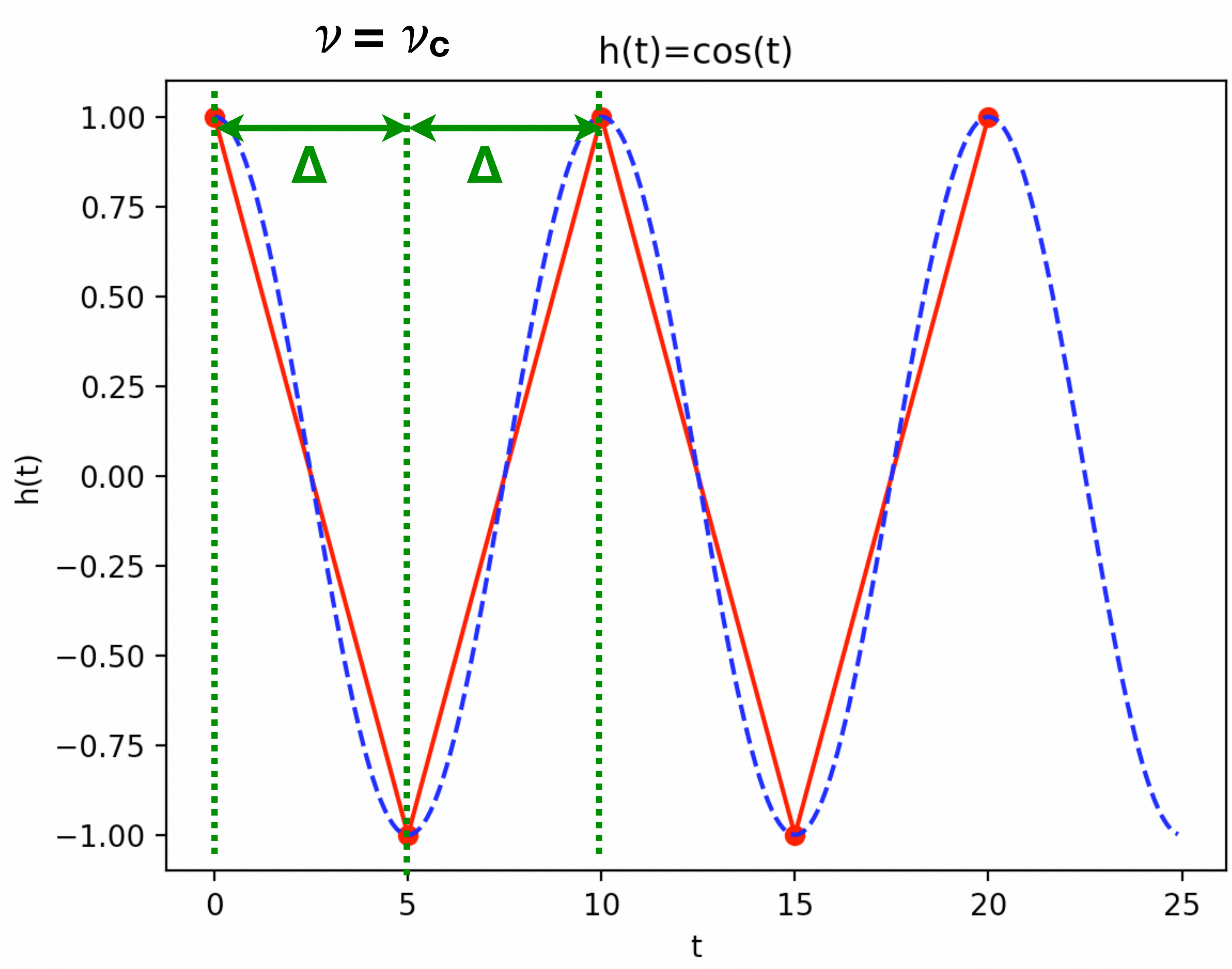
Kritična frekvenca

UNIVERSITY OF LJUBLJANA
FMF Faculty of Mathematics and Physics

$$h_{n+N} = h_n \quad \longrightarrow \quad h_{-n} = h_{N-n} \quad \longrightarrow \quad h_{-N/2} = h_{N/2},\ h_0 = h_N$$

$$H_{k+N} = H_k \quad \longrightarrow \quad H_{-k} = H_{N-k} \quad \longrightarrow \quad H_{-N/2} = H_{N/2},\ H_0 = H_N$$

- Frekvenco **$\nu_c = \nu_s/2$ = N/(2T) = 1/(2Δ)** imenujemo **kritična ali Nyquistova frekvenca**.



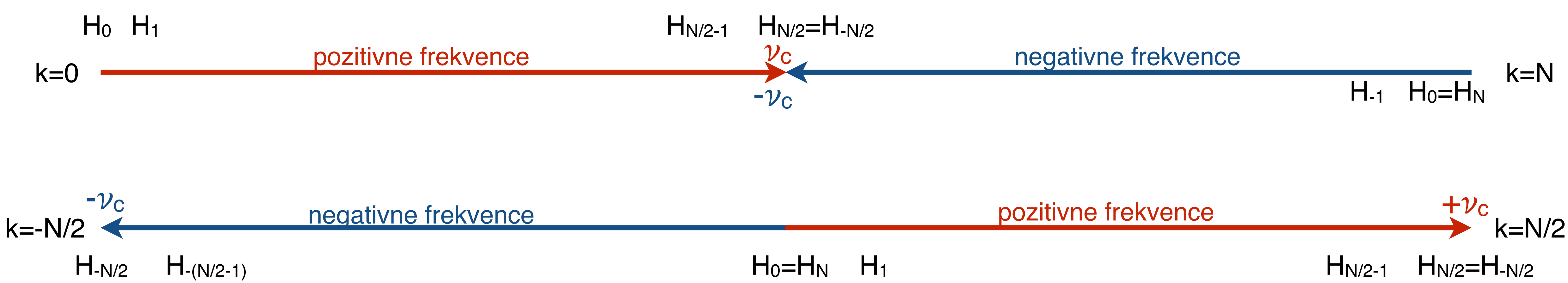
Kritična frekvenca

UNIVERSITY OF LJUBLJANA FMF Faculty of Mathematics and Physics

$$h_{n+N} = h_n \quad \longrightarrow \quad h_{-n} = h_{N-n} \quad \longrightarrow \quad h_{-N/2} = h_{N/2},\ h_0 = h_N$$

$$H_{k+N} = H_k \quad \longrightarrow \quad H_{-k} = H_{N-k} \quad \longrightarrow \quad H_{-N/2} = H_{N/2},\ H_0 = H_N$$

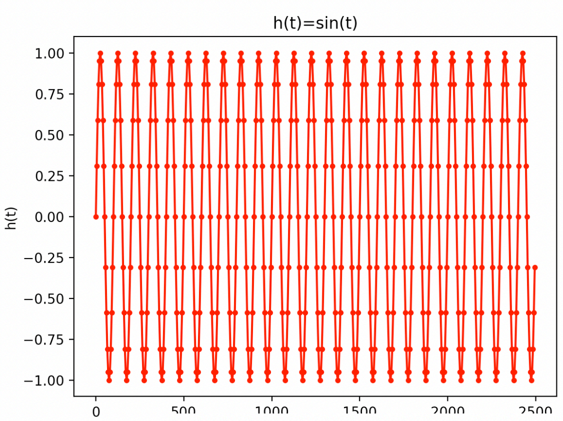
- Frekvenco **$\nu_c=\nu_s/2$ = N/(2T) = 1/(2Δ)** imenujemo **kritična ali Nyquistova frekvenca**.
  - Posledično velja za primerjavo ureditve k=0,…,N-1 z ureditvijo po k=-N/2,…0,…,N/2:
    - $H_o = H_N$ (tudi ‘DC’ člen).
    - Na intervalu 0 < k < (N/2) -1 so **pozitivne frekvence (0 < ν < ν_c).**
    - Na intervalu (N/2) +1 < k < N -1 so **negativne frekvence (-ν_c < ν < 0).**
    - $H_{-N/2} = H_{N/2}$ ustrezata kritični frekvenci (zato en člen več v tej ureditvi).
  - Za preslikavo med obema ureditvama lahko uporabimo **NumPy funkcijo roll.**



- **Pazi, v kakšnem vrstnem redu ti da transformirano funkcijo H sprogramirana FT! (npr. FFT algoritem jih da v ureditvi k=0,..,N-1 !)**

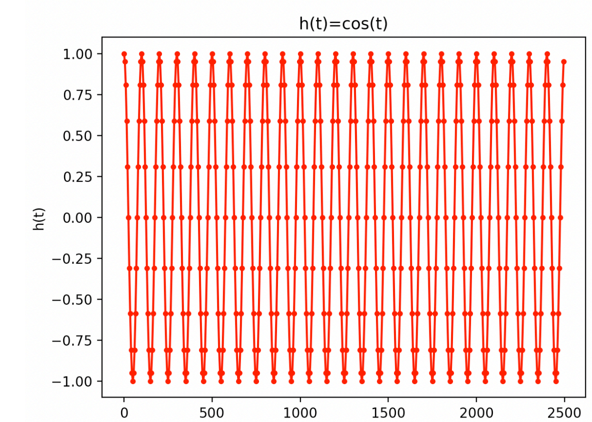
Dodatni razmislek

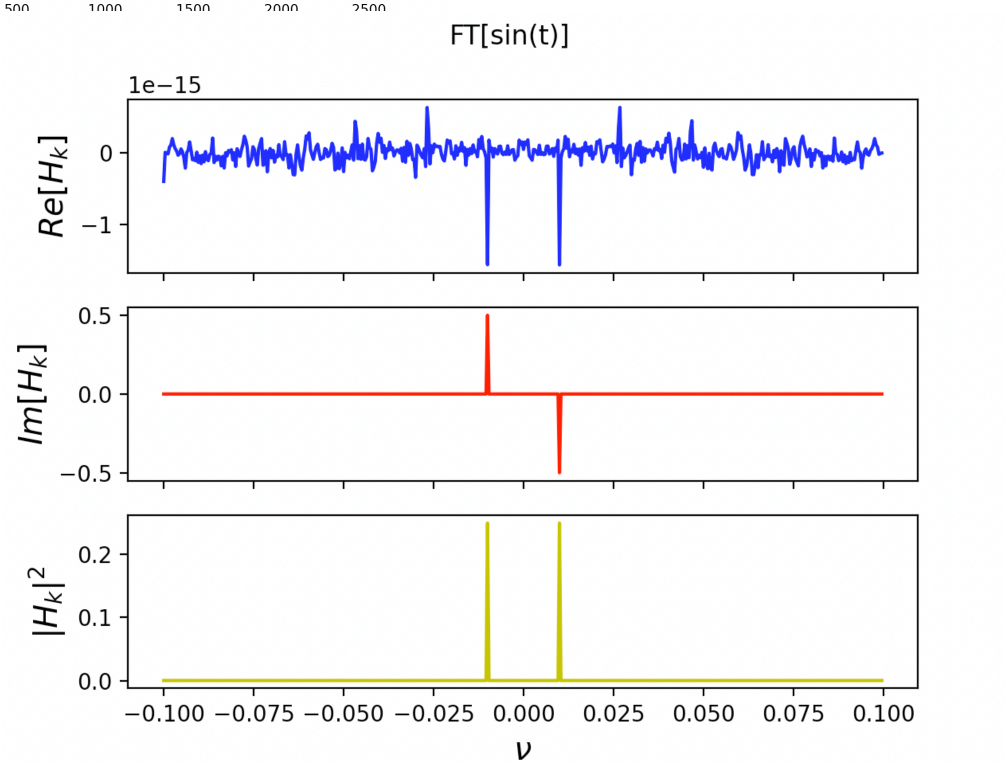
- Razmislimo o **ohranitvi informacije:**
  - N izmerjenih točk v realnem prostoru po informaciji ustreza N/2 točk v kompleksnem prostoru:
    - Od tod smiselna ugotovitev, da **nam negativne frekvence v kompleksni sliki pravzaprav ne prinesejo nove informacije!**
    - Očitna je faza oziroma prispevek sodih in lihih funkcij, ampak to je reproducibilno iz ('shranjeno' je v) **realnih in imaginarnih prispevkov**…
    - Zato moč pogosto računamo 'enostransko' (one-sided power spectral density, PSD)

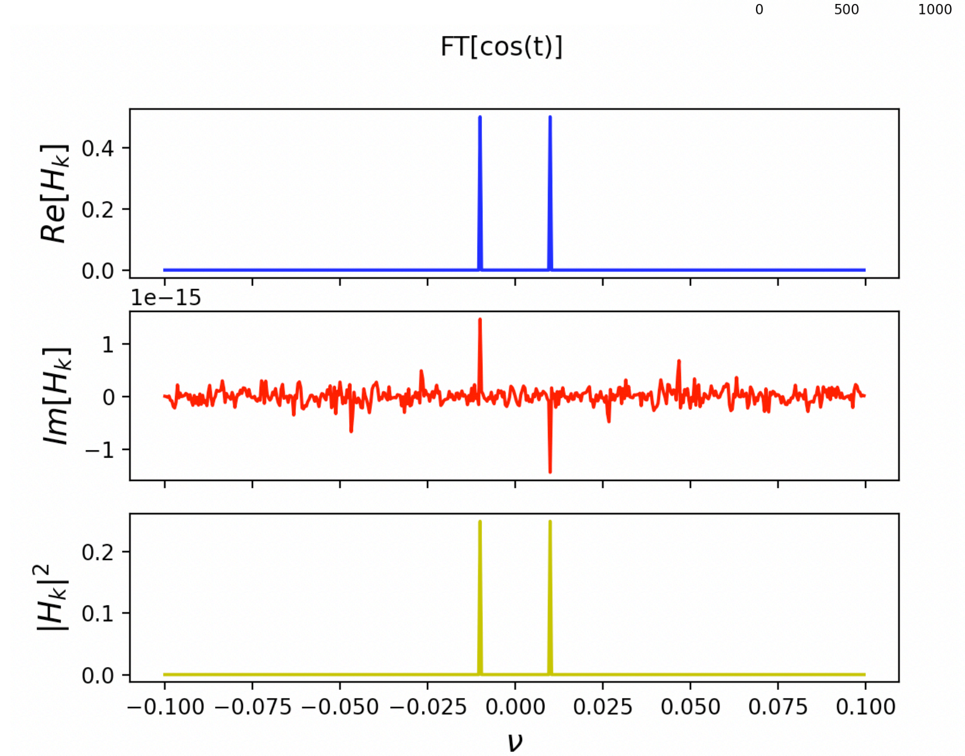


$$\cos(2\pi\nu t) = \frac{e^{i2\pi\nu t} + e^{-i2\pi\nu t}}{2}$$

$$\sin(2\pi\nu t) = \frac{e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t}}{2i}$$



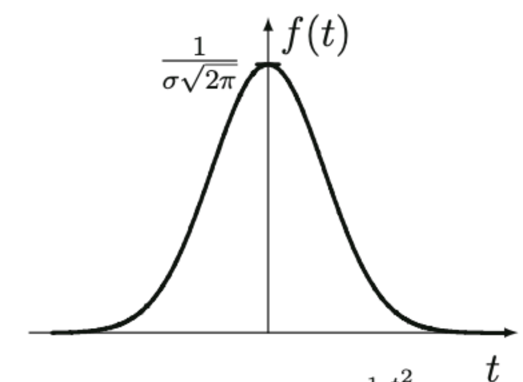




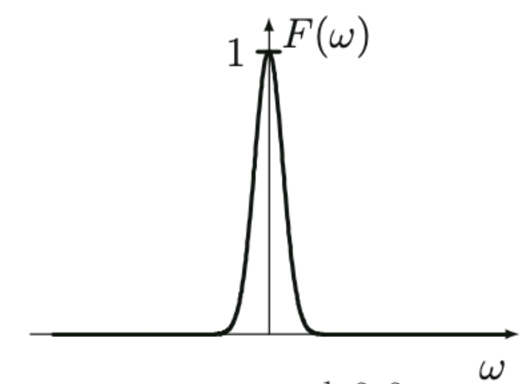
FT ne-periodične funkcije

- Če funkcija, ki jo hočemo transformirati, ni periodična, moramo biti previdni pri pripravi vzorčene funkcije. Zgleden primer je kar Gaussova funkcija, za katero vemo, da je njena FT spet Gaussova funkcija.
  - **Paziti moramo, ker to velja, če ima Gaussova funkcija vrh v izhodišču!**

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{e}^{2\pi i f t}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[t^2-4\pi i\sigma^2 t f\right]} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[t^2-2(2\pi i\sigma^2 f)t+(2\pi i\sigma^2 f)^2-(2\pi i\sigma^2 f)^2\right]} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-2\pi i\sigma^2 f)^2} dt\right] \mathrm{e}^{\frac{1}{2\sigma^2}(2\pi i\sigma^2 f)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[\sqrt{2\pi\sigma^2}\right] \mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}.
\end{aligned}
$$



$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$

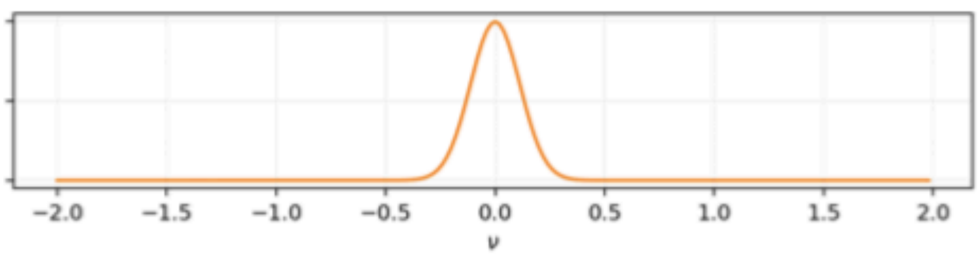


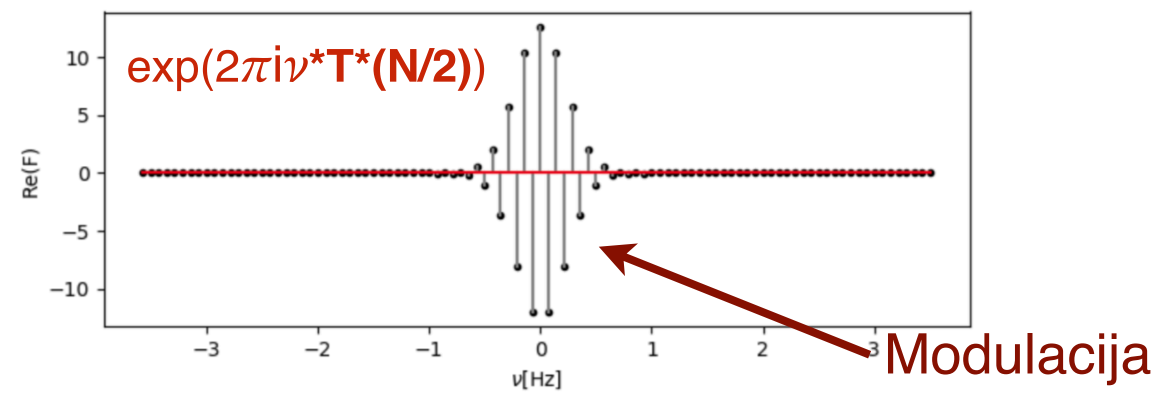
$F(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$

- **Naše vzorčenje bo v intervalu t=[0,T] oziroma n=0,..,N-1, torej samo na pozitivni osi! Kaj naredimo?**

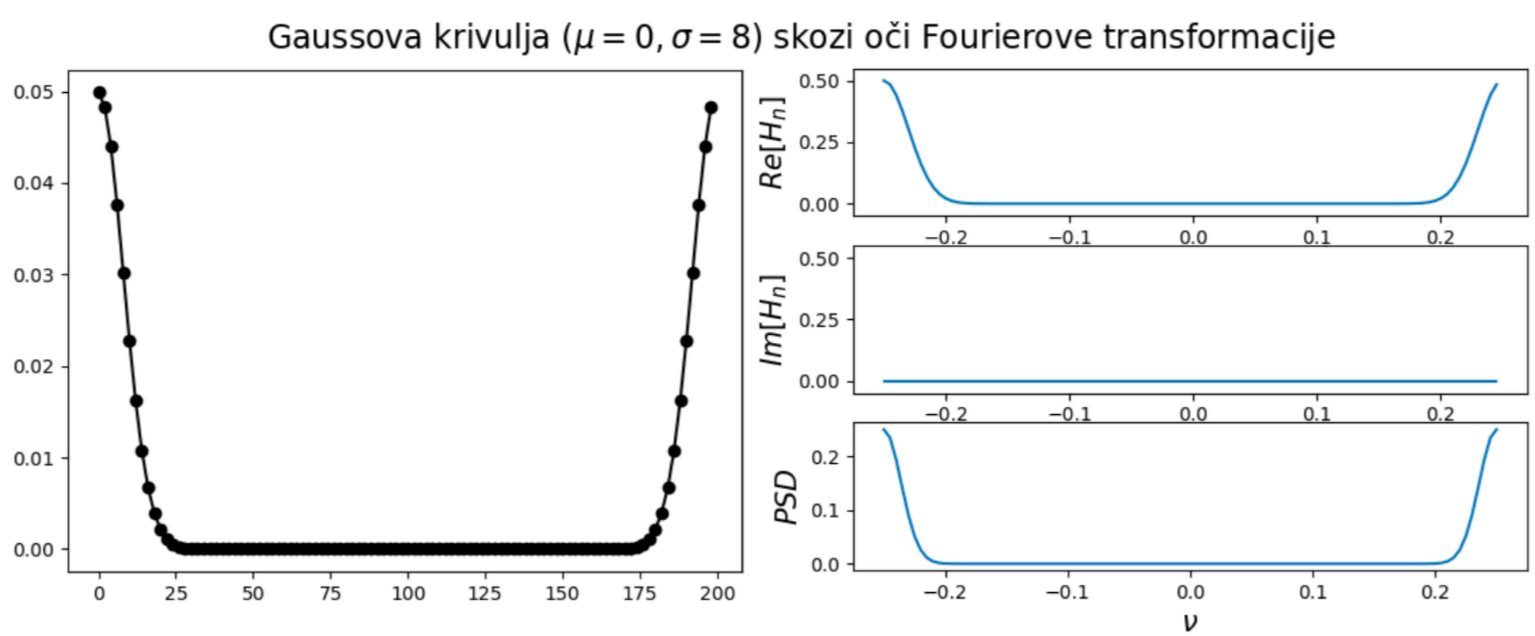
FT ne-periodične funkcije

- **Naše vzorčenje bo v intervalu t=[0,T] oziroma n=0,..,N-1, torej samo na pozitivni osi! Kaj naredimo?**
  - Lahko našo funkcijo premaknemo na sredo intervala, vendar moramo potem upoštevati modulacijo zaradi premika (za T*N/2)!



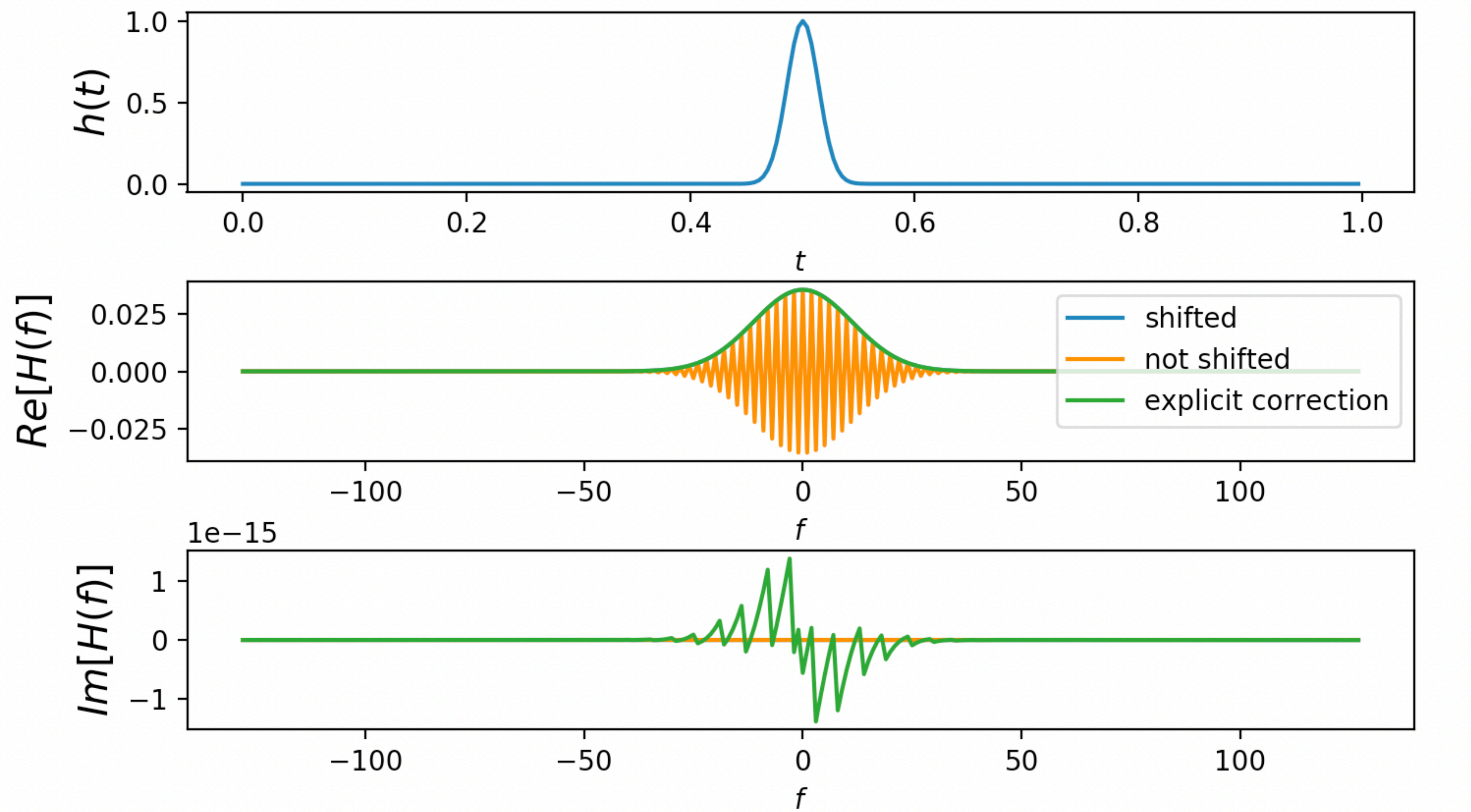


- Lahko pa našo funkcijo premaknemo analogno, kot smo to počeli s frekvenčnimi območji:
  - Drugo polovico intervala [T/2,T] uporabimo za risanje negativnega dela - naša periodičnost to dopušča!

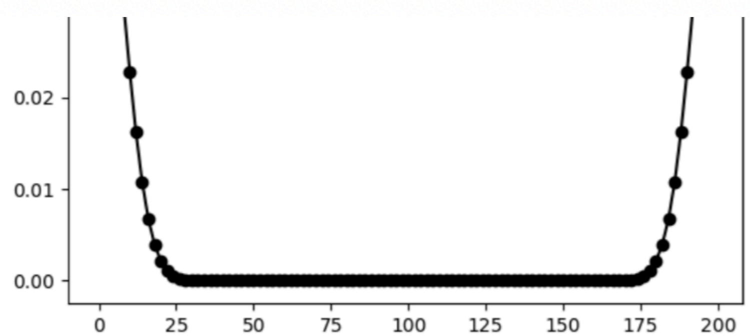


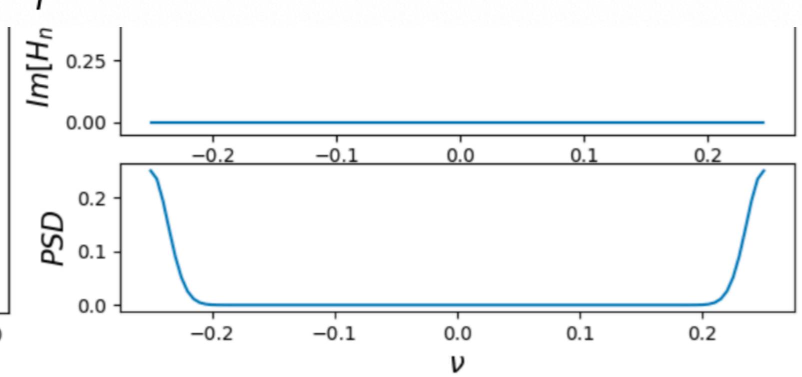
FT ne-periodične funkcije

- **Naše vzorčenje bo v intervalu t=[0,T] oziroma n=0,..,N-1, torej samo na pozitivni osi! Kaj naredimo?**
  - Lahko našo funkcijo premaknemo na sredo intervala, vendar moramo potem upoštevati



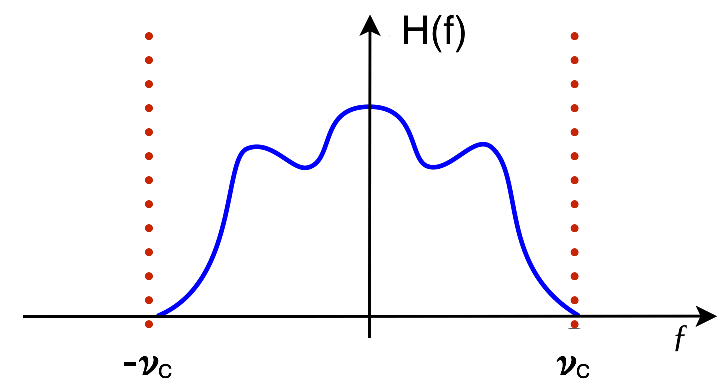
dulacija!





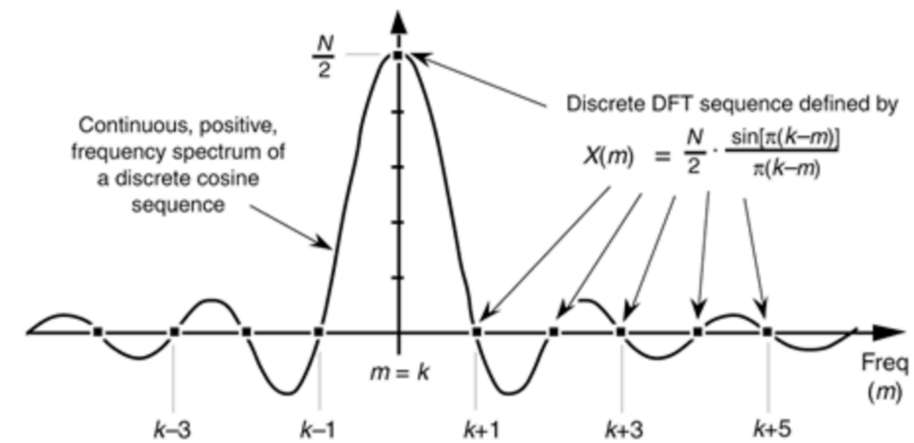
Sampling Theorem

- Fascinantna ugotovitev se skriva v na videz suhoparnem **Sampling theoremu (teorem o vzorčenju):**
  - Naj bodo h_n vzorčene točke funkcije h(t) na intervalih širine Δ. Če je $H(f) = 0$ za vse frekvence $|f| > \nu_c$, je v tem primeru h(t) popolnoma definirana s temi vzorčenimi točkami. Ekspliciten zapis je podan z *Whittaker-Shannon interpolacijsko formulo*:

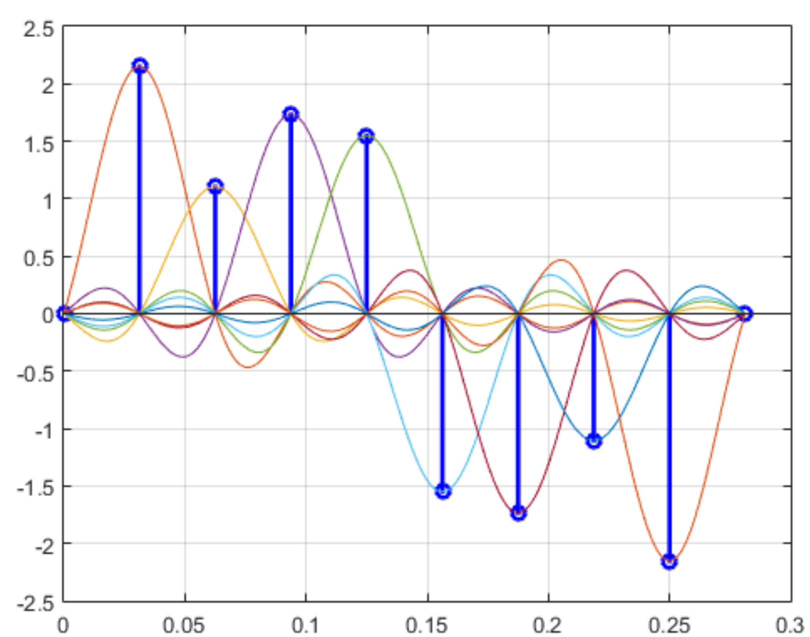


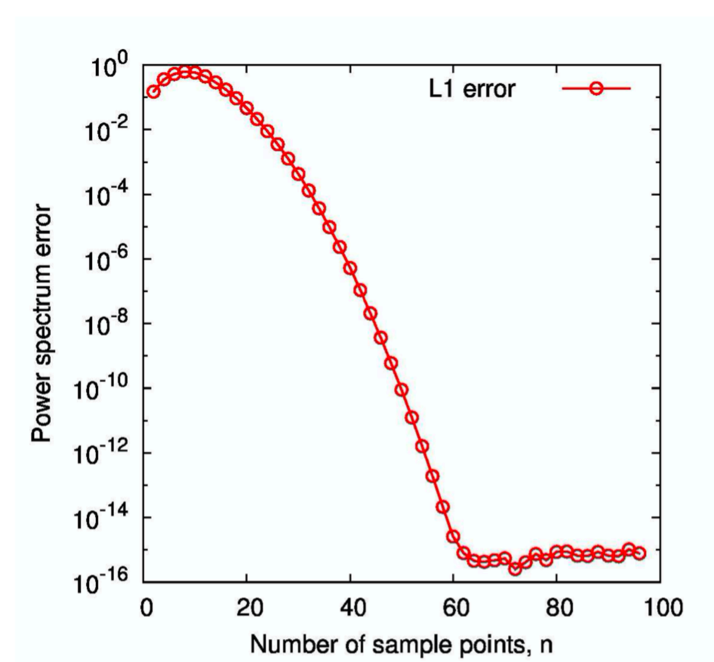
$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \operatorname{sinc}\left(2\pi\nu_c(t - n\Delta)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi\nu_c(t - n\Delta)\right)}{2\pi\nu_c(t - n\Delta)} = \Delta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi\nu_c(t - n\Delta)\right)}{\pi(t - n\Delta)}$$



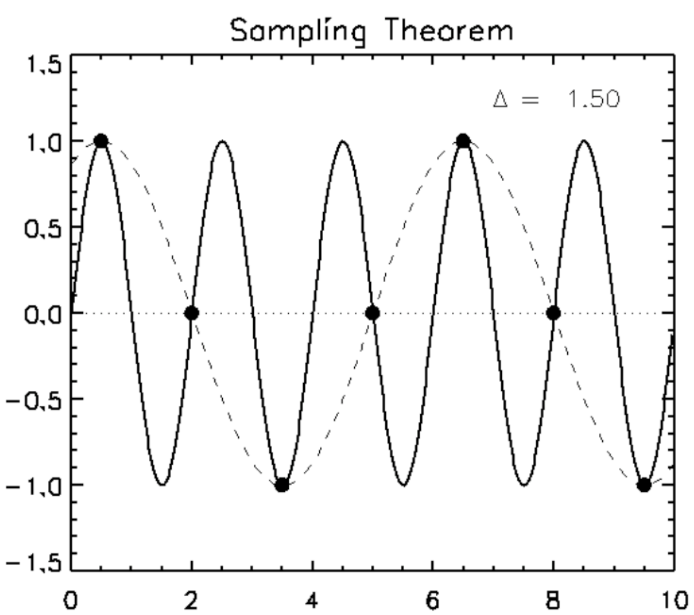
- To pomeni, da v primeru, da je ta **frekvenčni pogoj izpolnjen, z vzorčenjem ne izgubimo nobene informacije! (In potem tudi s FT ne…).**

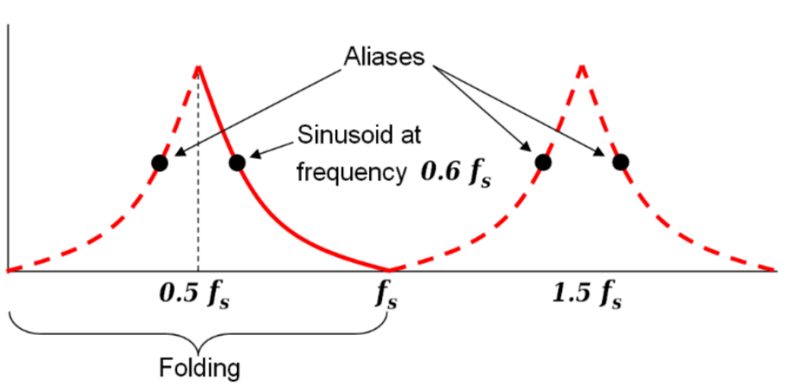




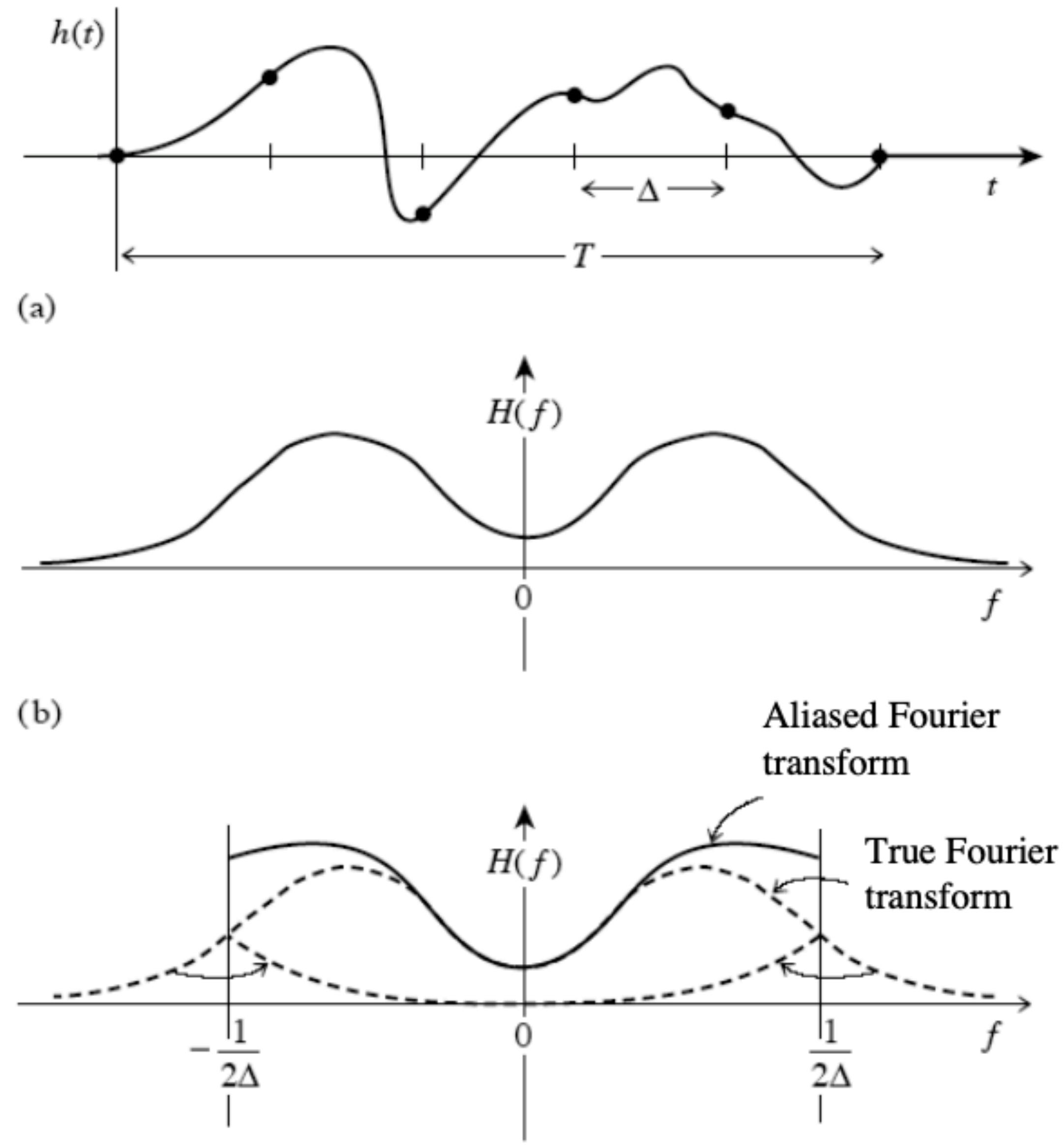
Sampling Theorem

- Obstaja pa tudi obratna posledica, ki se imenuje **aliasing (potujevanje, potujevanje) signala:**
- V primeru, da je $H(f) \neq 0$ za frekvence $|f| > \nu_c$, je h(t) pri FT **spremenjena** s pojavom **potujevanja**, kjer se frekvence nad ν_c preslikajo v območje $(-\nu_c, +\nu_c)$ tako, da se zrcalijo preko kritične frekvence (od prave frekvence se odšteje večkratnik $\nu' = \nu - m\nu_c$, dokler ne pride v ciljno območje). S tem se seveda FT **popači.**





The black dots are aliases of each other. The solid red line is an example of amplitude varying with frequency. The dashed red lines are the corresponding paths of the aliases.

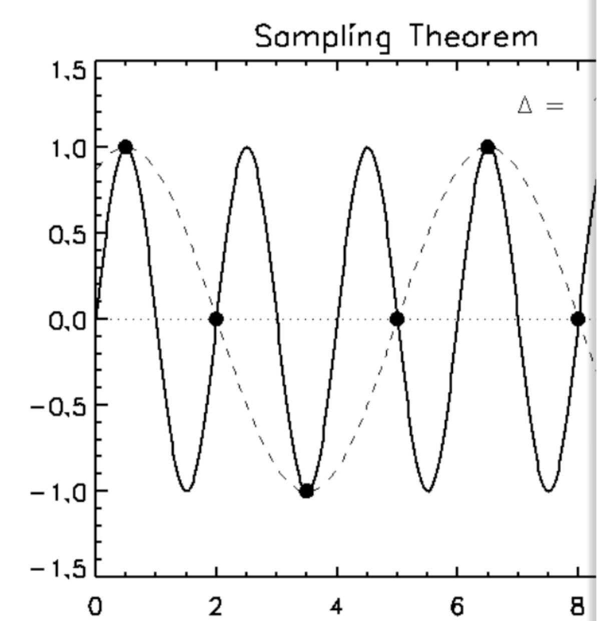


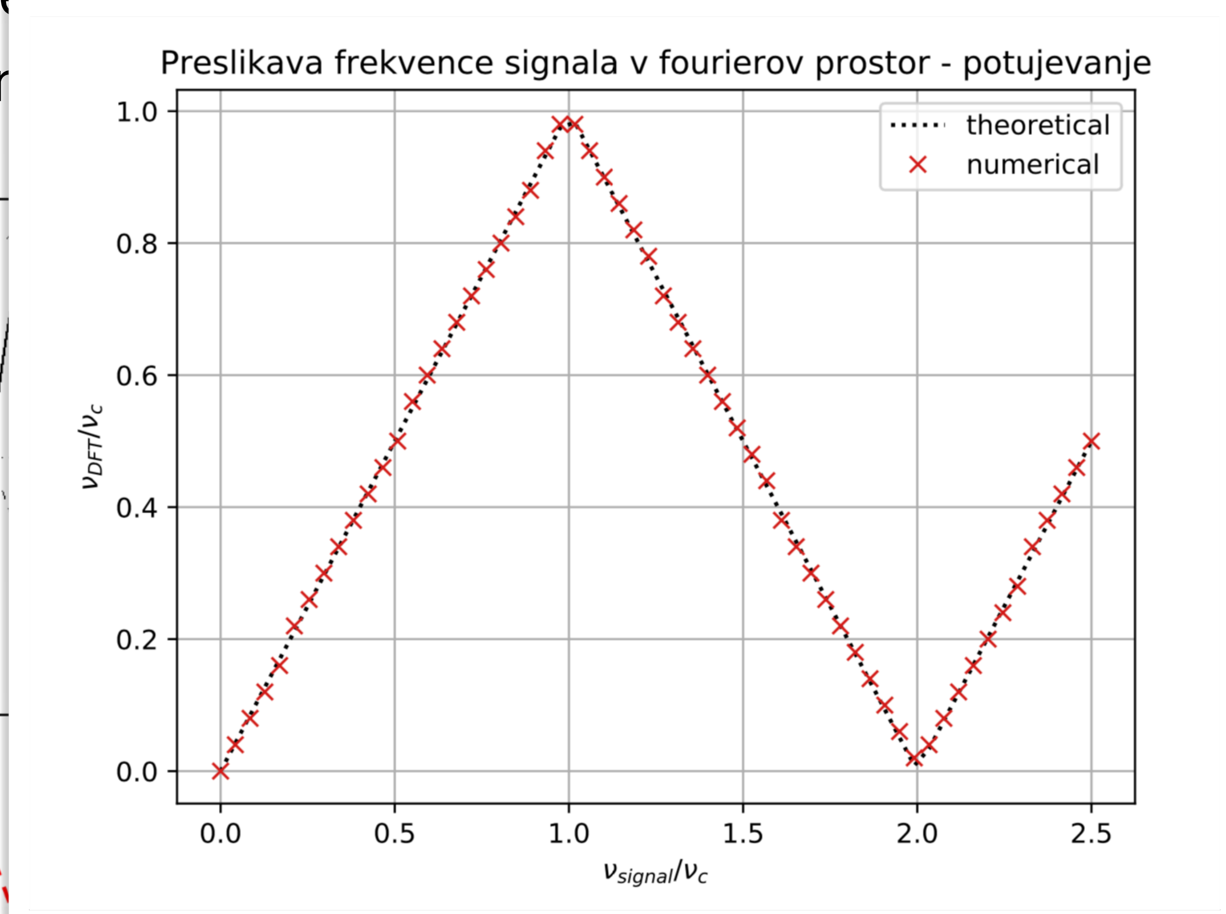
The continuous function, $h(t)$, (a) is nonzero only for a finite interval of time T. It follows that its Fourier transform, $H(f)$, whose modulus is shown in (b), is not bandwidth limited but has finite amplitude for all frequencies. If the original function is sampled with a sampling interval Δ, as in (a), then the Fourier transform (c) is defined only between plus and minus the Nyquist critical frequency. Power outside that range is folded over or "aliased" into the range. The effect can be eliminated only by low-pass filtering the original function before sampling.

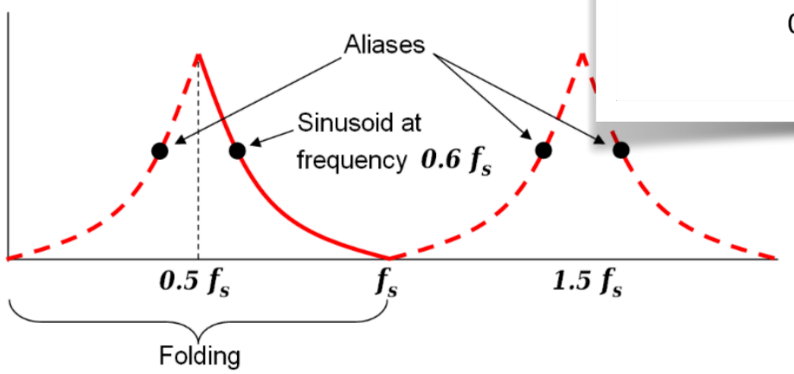
Da se tega pojava znebimo, potrebujemo dovolj veliko frekvenco vzorčenja in/ali FREKVENČNO FILTRIRANJE (npr zvok 44.1 kHz vzorčenje = 2x slišno območje ….).

Sampling Theorem

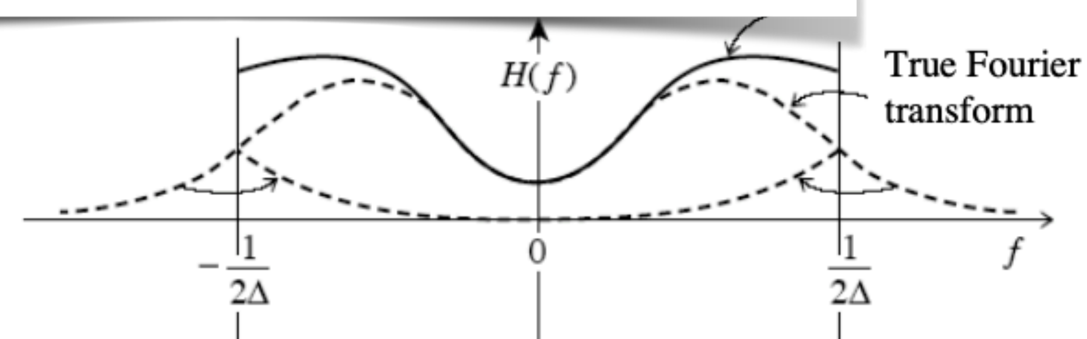
- Obstaja pa tudi obratna posledica, ki se imenuje **aliasing (potujevanje, potujčevanje) signala:**
- V primeru, da je $H(f) \neq 0$ za frekvence $|f| > \nu_c$, je h(t) pri FT **spremenjena** s pojavom **potujevanja**, kjer se frekvence nad ν_c preslikajo v območje ($-\nu_c$,$+\nu_c$) tako, da se zrcalijo preko kritične fr… nik $\nu' = \nu - m\nu_c$, dokler ne pride v ciljno obr…







The black dots are aliases of each other. The solid red line is an example of amplitude varying with frequency. The dashed red lines are the corresponding paths of the aliases.

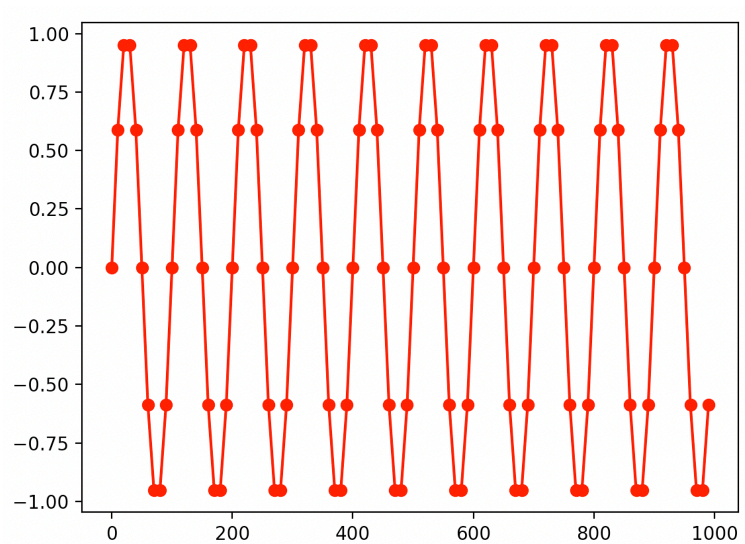


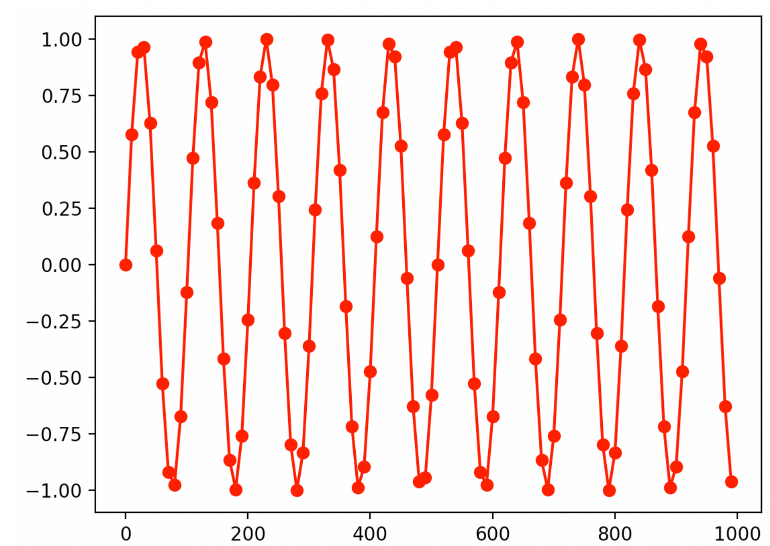
The continuous function, *h(t)*, (a) is nonzero only for a finite interval of time *T*. It follows that its Fourier transform, *H(f)*, whose modulus is shown in (b), is not bandwidth limited but has finite amplitude for all frequencies. If the original function is sampled with a sampling interval Δ, as in (a), then the Fourier transform (c) is defined only between plus and minus the Nyquist critical frequency. Power outside that range is folded over or "aliased" into the range. The effect can be eliminated only by low-pass filtering the original function before sampling.

Da se tega pojava znebimo, potrebujemo dovolj veliko frekvenco vzorčenja in/ali FREKVENČNO FILTRIRANJE (npr zvok 44.1 kHz vzorčenje = 2x slišno območje ….).

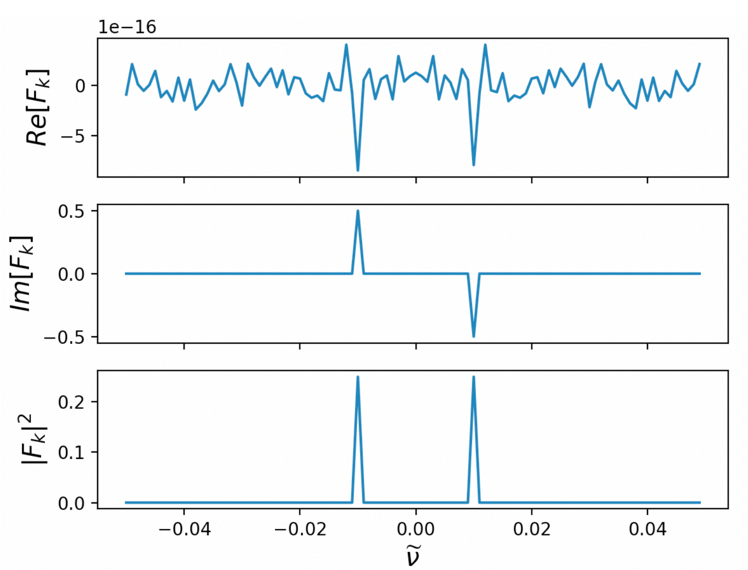
Puščanje (leakage)

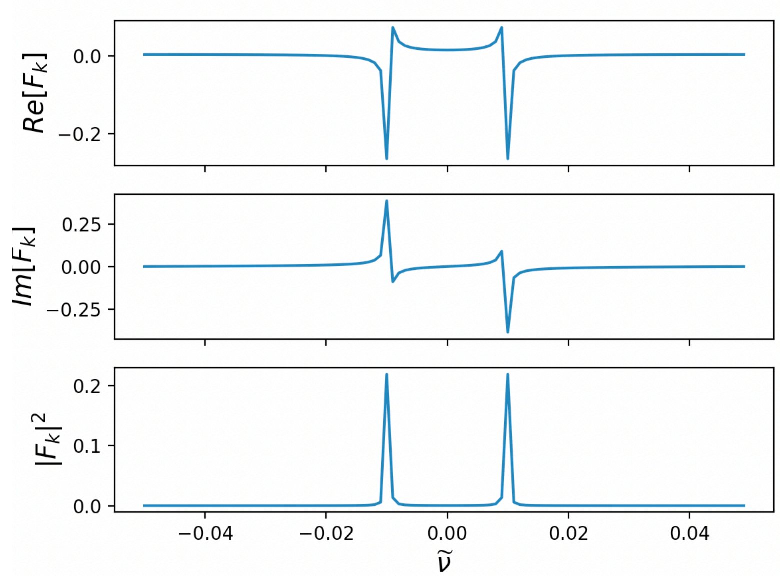
- Še ena stvar, na katero moramo paziti:
  - Če je funkcija periodična, moramo vzorec za vzorčenje z N točkami, n=0,N-1 nastaviti tako, da bo res pokril periodo T (oziroma njen večkratnik) in to tako, da bo naslednja **izključena točka t_N imela vrednost $h_0 = h_N$.**
    - Če ti pogoji niso izpolnjeni, se bo signal spet malo popačil - pojav imenujemo puščanje (ang. leakage)…





minimalna sprememba frekvence (iz 100 na 102) pokvari periodičnost…

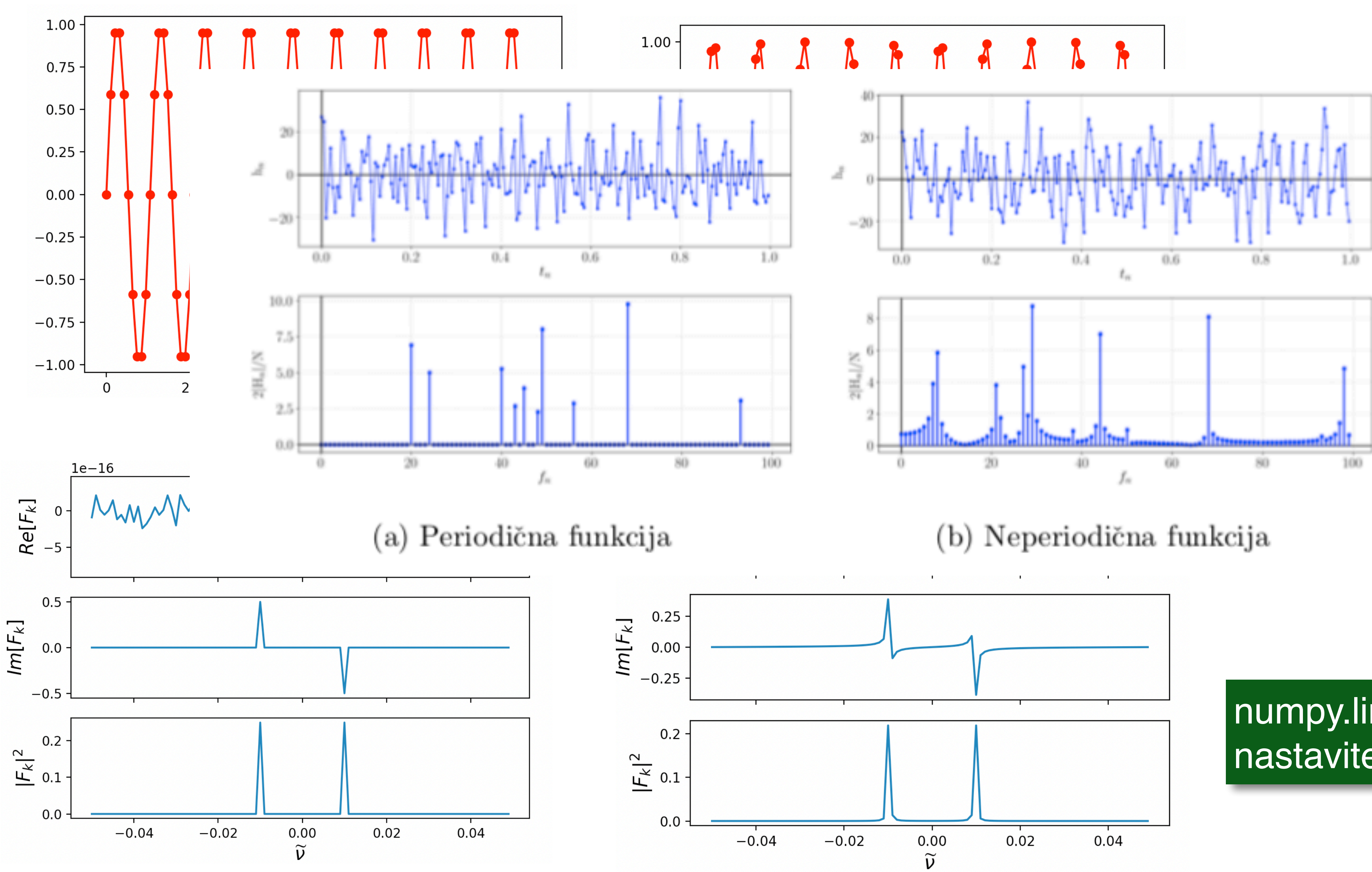




numpy.linespace ima nastavitev **endpoint=False ….**

Puščanje (leakage)

- Še ena stvar, na katero moramo paziti:
  - Če je funkcija periodična, moramo vzorec za vzorčenje z N točkami, n=0,N-1 nastaviti tako, da bo res pokril periodo T (oziroma njen večkratnik) in to tako, da bo naslednja **izključena točka t_N imela vrednost $h_0 = h_N$.**
    - Če ti pogoji niso izpolnjeni, se bo signal spet malo popačil - pojav imenujemo puščanje (ang. leakage)…



(a) Periodična funkcija

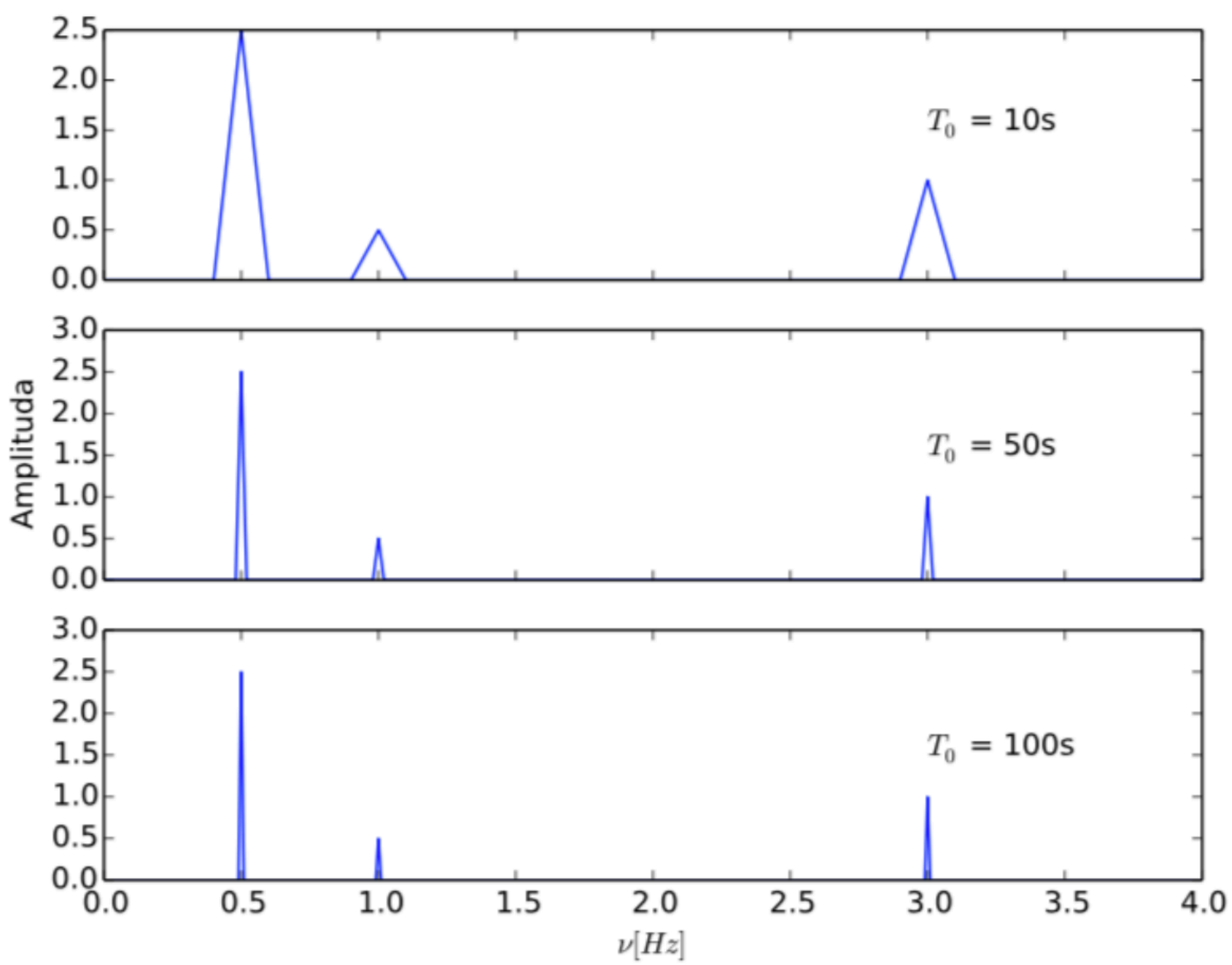
(b) Neperiodična funkcija

…emba frekvence …kvari periodičnost…

numpy.linespace ima nastavitev **endpoint=False ….**

Dodatni razmislek

- Še par uporabnih ugotovitev sledi iz kratkega razmisleka:
  - Več točk vzorčenja (N) na istem intervalu (T) **poveča frekvenčni interval dosegljiv z meritvijo (in FT).**
    - Kritična frekvenca je sorazmerna s št. točk: $\nu_c = N/(2T)$
  - Širši interval (T) pa **poveča ločljivost meritve ('vrhovi so bolj ostri…').**
    - Frekvenčne točke f_k so razmaknjene za 1/T …



Zero padding

- Kaj se zgodi, če podaljšamo naš interval z ničlami?
  - **Navidezno** izboljšamo meritev, v resnici pa le naredimo **interpolacijo** z gostejšimi sinc funkcijami z več frekvenčnimi točkami…
    - Tako kot navidezno podaljšamo meritev - za zares boljšo ločljivost moramo pač meriti daljši čas T…
    - Uporabno za interpoliranje, če vemo kaj delamo!

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \,\mathrm{sinc}\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)}{2\pi\nu_c(t-n\Delta)}$$

ZP pokvari ločljivost!

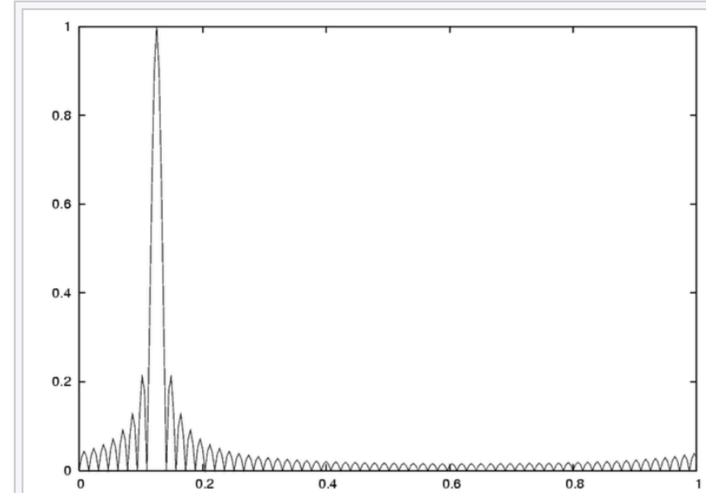


Fig 2. DFT of $e^{i2\pi n/8}$ for $L = 64$ and $N = 256$

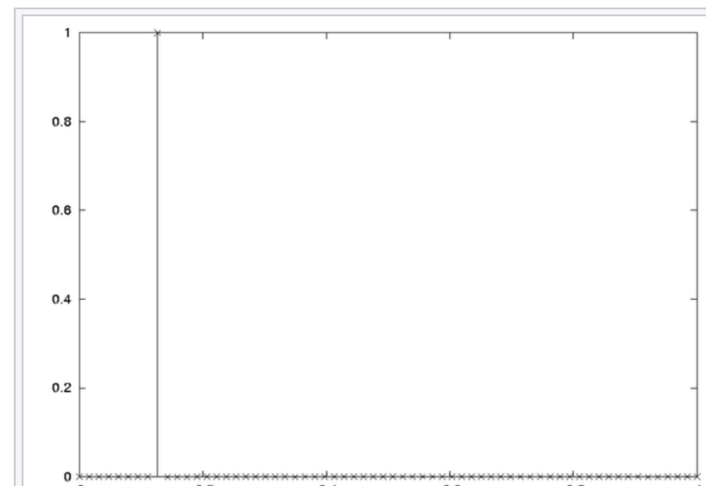
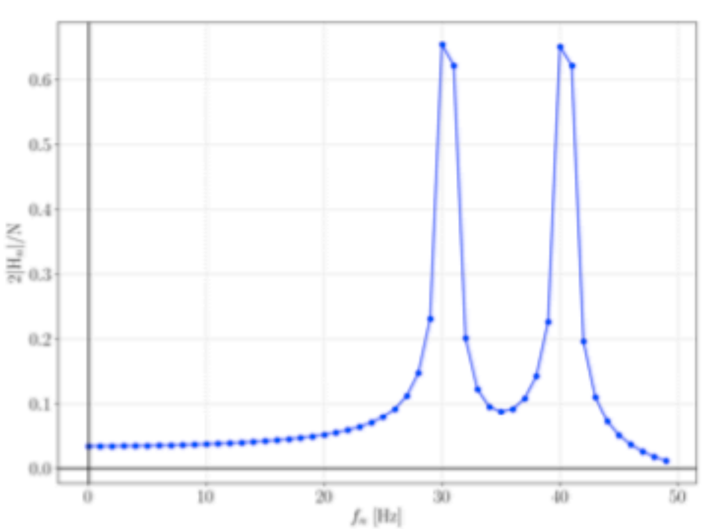


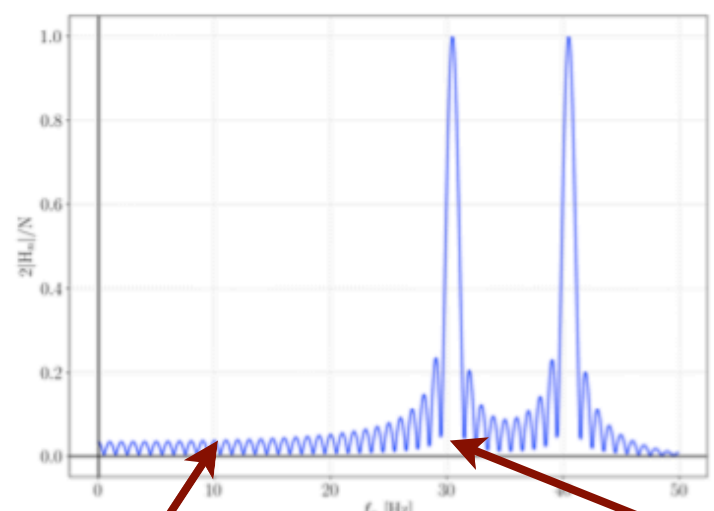
Fig 3. DFT of $e^{i2\pi n/8}$ for $L = 64$ and $N = 64$

Primer dodajanja ničel

Na slikah je primer linearne kombinacijo enega sinusa in enega kosinusa s frekvencama 30.5Hz in 40.5Hz, ki se ne ujemata s T. Dodanih je 1000 ničel, vzorčenje je N=100.



(a) DFT brez dodajanja ničel



(b) DFT z dodajanjem ničel

Ostrejši vrh…

a pokvarjen signal drugje…

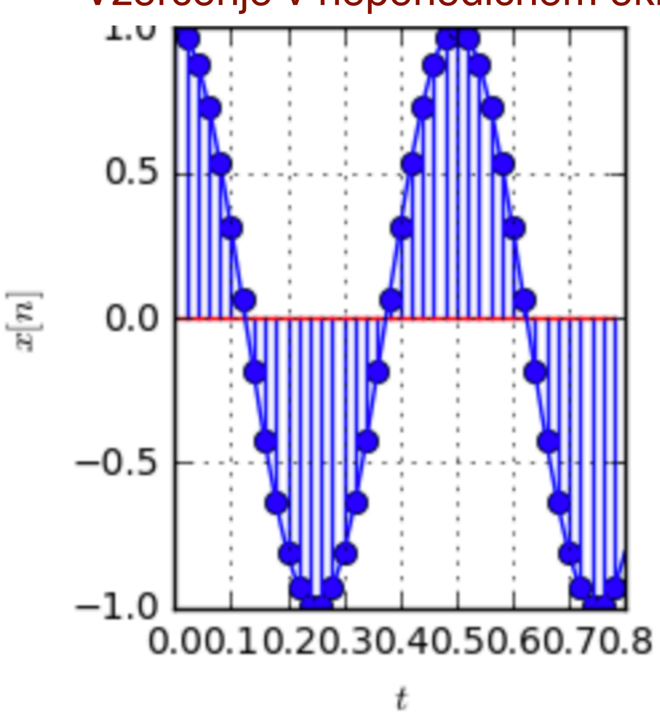
Zero padding

- Kaj se zgodi, če podaljšamo naš interval z ničlami?
  - **Navidezno** izboljšamo meritev, v resnici pa le naredimo **interpolacijo** z gostejšimi sinc funkcijami z več frekvenčnimi točkami…
    - Tako kot navidezno podaljšamo meritev - za zares boljšo ločljivost moramo pač meriti daljši čas T…
    - **Uporabno za interpoliranje, če vemo kaj delamo!**

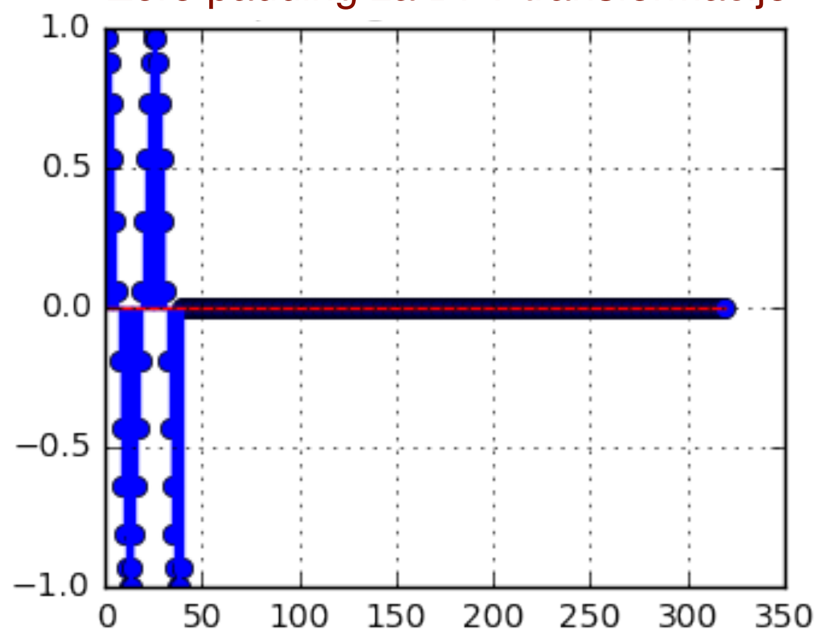
$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \,\mathrm{sinc}\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)}{2\pi\nu_c(t-n\Delta)}$$

Primer smiselne uporabe zero paddinga za interpolacijo vrha…

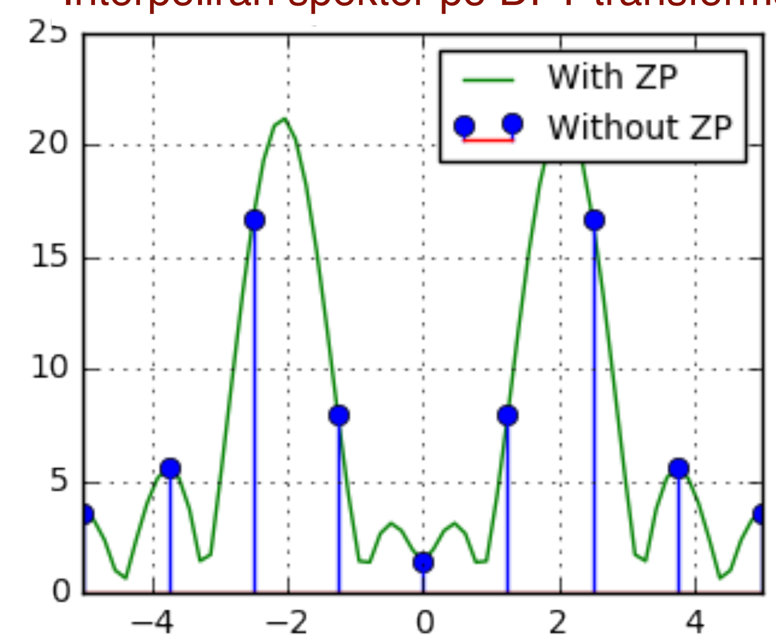
Vzorčenje v neperiodičnem oknu



Zero padding za DFT transformacijo



Interpoliran spekter po DFT transformaciji



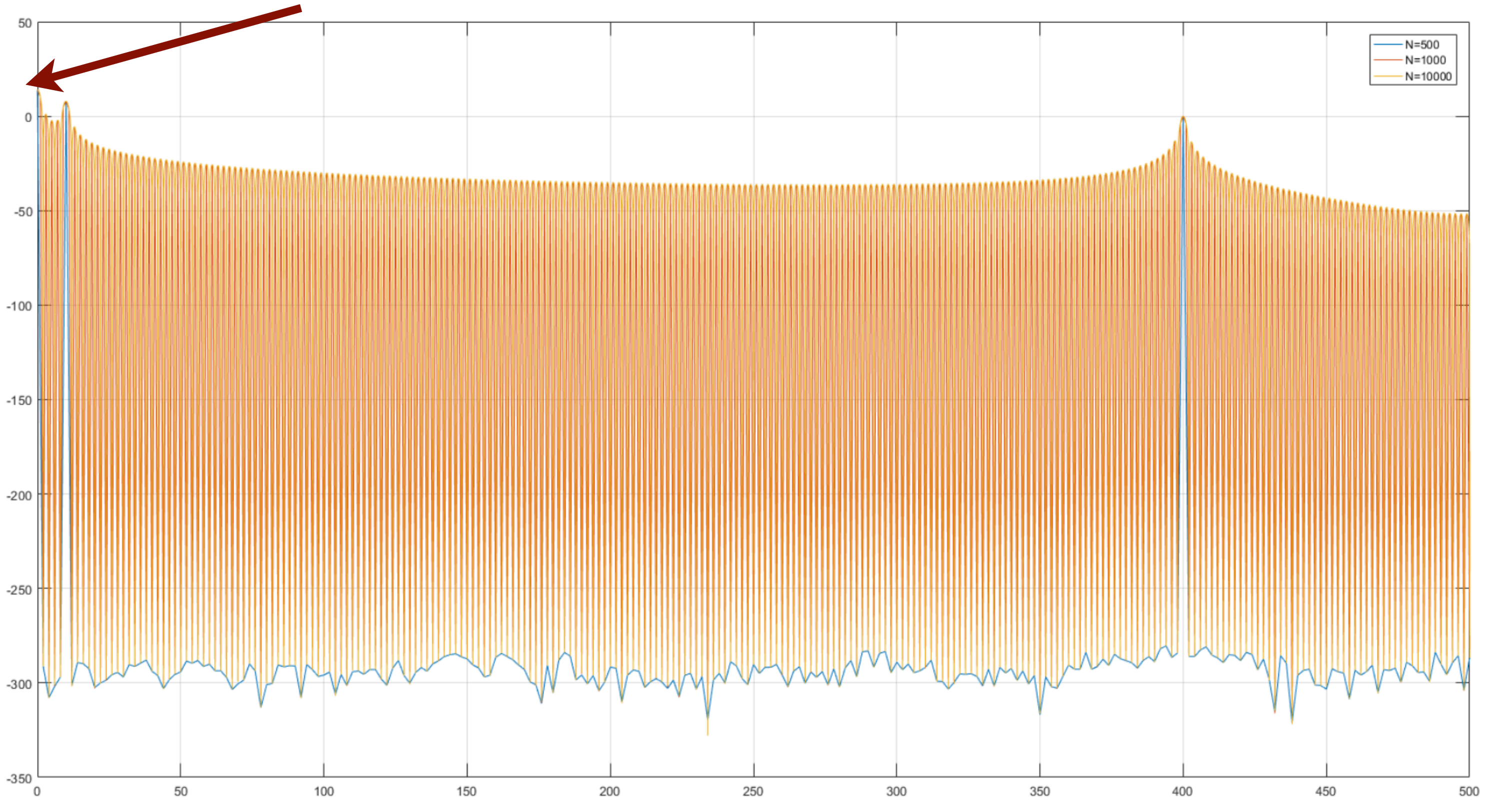
Zero padding

- Kaj se zgodi, če podaljšamo naš interval z ničlami?
  - **Navidezno** izboljšamo meritev, v resnici pa le naredimo **interpolacijo** z gostejšimi sinc funkcijami z več frekvenčnimi točkami…
    - Tako kot navidezno podaljšamo meritev - za zares boljšo ločljivost moramo pač meriti daljši čas T…

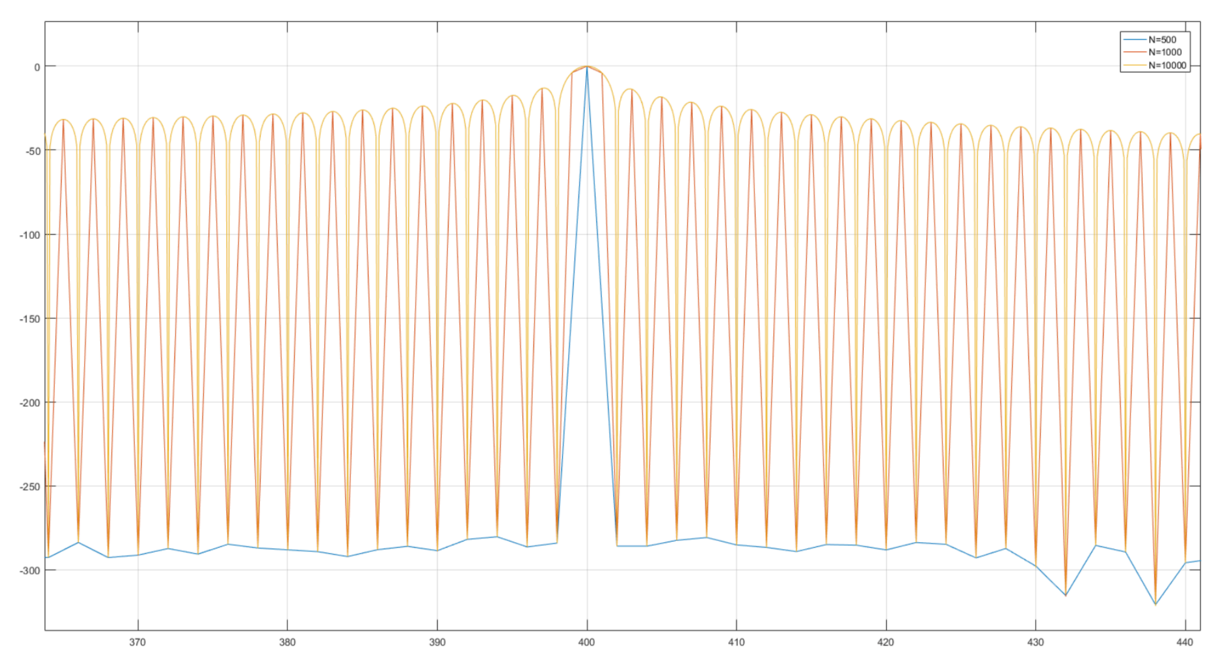
$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \,\mathrm{sinc}\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi\nu_c(t-n\Delta)\right)}{2\pi\nu_c(t-n\Delta)}$$

Zero padding iz N=500 meritev na 1000 in 10000 točk

Log. skala!



Povečava enega od vrhov…



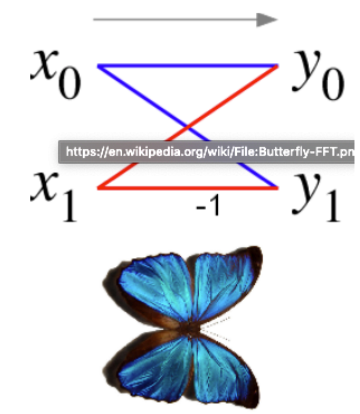
Fast Fourier Transform

- Najbolj razširjen in najhitrejši algoritem dandanes je Fast Fourier Transform (FFT):

An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series

James W. Cooley; John W. Tukey

Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 90. (Apr., 1965), pp. 297-301.



Signal-flow graph connecting the inputs *x* (left) to the outputs *y* that depend on them (right) for a "butterfly" step of a radix-2 Cooley–Tukey FFT. This diagram

- Zvit rekurziven algoritem, izpeljava algoritma je na spletni učilnici…
  - Kar je pomembno za našo nalogo (in kasnejšo uporabo):
    - Rutina prisotna v vseh programskih jezikih, tudi Python-u
    - Nujno je uporabiti pomožne funkcije, ki nam postavijo točke v pravi vrstni red!

```
Hk = fft.fft(fft.ifftshift(hn))/N # Fourier coefficients (divided by N), correctly shifted
nu = fft.fftfreq(N,delta) # Natural frequencies
Hk = fft.fftshift(Hk) # Shift zero freq to center
nu = fft.fftshift(nu) # Shift zero freq to center
```

- fftshift in ifftshift nam preuredita vrstni red iz [0,N-1] v [-N/2,N/2] in obratno, kar je natanko to, kar potrebujemo.

Naloga

UNIVERSITY OF LJUBLJANA | FMF Faculty of Mathematics and Physics

- **Cilj naloge se je spoznati z osnovami in vedenjem FT:**
  - **Izračunaj Fourierov obrat Gaussove porazdelitve in nekaj enostavnih vzorcev, npr. mešanic izbranih frekvenc.**
    - Za slednje primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen (kako naredimo Gaussovo porazdelitev 'periodičino' za FT?). Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco.
    - Napravi še obratno FT transformacijo in preveri natančnost metode.
    - Poglej, kaj se dogaja s časom računanja - kako je odvisen od števila vzorčenj ($\sim n$, $\sim n^2$, $\sim n^3$…)? (Dodatno: Kaj pa RAM ipd?)