Fizika nevtronskih jedrskih naprav

Skripta v nastajanju po predavanjih prof. dr. Luka Snoj, FMF, IJS

Teodor Jovanovski

23. oktober 2025

Kazalo

1 Jedrske sile in vezavna energija 4
1.1 Osnovne interakcije v jedru . . . 4
1.2 Vezavna energija . . . 4
1.3 Ocene pomembnih količin . . . 4

2 Modeli atomskega jedra 5
2.1 Kapljični model in semiempirična masna formula . . . 5
2.2 Lupinski model in magična jedra . . . 6

3 Stabilnost jeder in energija jedrskih reakcij 6
3.1 Stabilna jedra . . . 6
3.2 Energija razpada . . . 6
3.3 Ocena sproščene energije pri cepitvi . . . 6

4 Radioaktivnost in cepitveni produkti 7
4.1 Osnovni zakon radioaktivnega razpada . . . 7
4.2 Aktivnost cepitvenih produktov . . . 7
4.3 Empirične formule za aktivnost po zaustavitvi . . . 7
4.4 Enota Curie in velikostni redi . . . 8

5 Vplivi ionizirajočega sevanja 8
5.1 Dozimetrične količine in enote . . . 8
5.2 Primer izračuna hitrosti absorbirane doze . . . 9
5.3 Biološki učinki in zaščita . . . 10
5.4 Zaostala toplota in hlajenje goriva . . . 10

6 Interakcija nevtronov z jedri 10
6.1 Mikroskopski presek . . . 10
6.1.1 Vrste presekov . . . 10
6.2 Makroskopski presek in slabljenje toka . . . 11

7 Energijska odvisnost presekov in reakcijska hitrost 12
7.1 Splošna oblika reakcijske hitrosti . . . 12
7.2 Energijske regije nevtronov . . . 12
7.3 Tipična odvisnost presekov od energije . . . 12
7.4 Fisijski spekter . . . 13

8 Praktični izračuni v jedrski tehniki 13
8.1 Izračun številske gostote jeder (n) . . . 13
8.2 Gostota moči v reaktorju . . . 13
8.3 Sproščena in uporabna energija pri cepitvi . . . 13

9 Upočasnjevanje nevtronov (moderacija) 14
9.1 Kinematika elastičnega sipanja . . . 14
9.2 Laboratorijski in težiščni sistem . . . 14
9.3 Izpeljava energijske izgube pri trku . . . 15
9.4 Ključni rezultati . . . 15
9.5 Verjetnostna porazdelitev energije po trku . . . 16
9.6 Porazdelitev po sipalnem kotu . . . 17
9.7 Povprečna izguba energije na trk . . . 17

9.8 Sipalni kot v laboratorijskem sistemu 18
9.9 Povprečni logaritemski dekrement energije (ξ) 19
9.10 Povprečno število trkov za termalizacijo 20
9.11 Primerjava lastnosti moderatorjev 20
9.12 Učinkovitost moderatorjev in energijski spekter nevtronov 21
9.12.1 Moderacijsko razmerje (MR) 21
9.12.2 Pomen hitrosti upočasnjevanja 21
9.12.3 Energijski spekter nevtronov 21

10 Nevtronska transportna enačba 22
10.1 Splošna oblika enačbe 23
10.2 Definicije količin 23
10.3 Lastnosti sipalnega preseka 23
10.4 Fizikalna izpeljava transportne enačbe 24
10.4.1 Postavitev bilančne enačbe 24
10.4.2 Uvedba kotnega fluksa 25
10.4.3 Vir nevtronov 25
10.5 Pomen in poenostavitve transportne enačbe 25

11 Poenostavitev transportne enačbe: Difuzijska aproksimacija 26
11.1 Predpostavka stacionarnega stanja 26
11.2 Momenti fluksa: Skalarni fluks in tok 26
11.3 P1 Aproksimacija: Osrednja predpostavka 26
11.4 Izpeljava difuzijske enačbe 27
11.5 Končna oblika difuzijske enačbe 28

12 Reševanje difuzijske enačbe: Metoda energijskih grup 29
12.1 Definicija grupnih konstant 29
12.2 Večgrupna (Multigroup) difuzijska enačba 29
12.3 Presek za odstranitev (Removal Cross Section) 30
12.4 Primer: Dvogrupna teorija 30
12.5 Primer: Enogrupna teorija in kritičnost 31
12.6 Matrična oblika in adjungirani fluks 31

1 Jedrske sile in vezavna energija

V naravi poznamo štiri osnovne sile: gravitacijsko, elektromagnetno, šibko jedrsko in močno jedrsko silo. V jedrski fiziki sta ključni slednji dve.

1.1 Osnovne interakcije v jedru

Močna jedrska sila je sila, ki veže nukleone (protone in nevtrone) skupaj v atomsko jedro. Njene ključne lastnosti so:

- Je izjemno močna, vendar ima zelo kratek doseg, ki je reda velikosti premera jedra.
- Deluje le na razdaljah približno med 0.5 fm in 2 fm (1 fm = 10^{-15} m).
- Na manjših razdaljah postane odbojna, kar preprečuje, da bi se nukleoni zlili med seboj.
- Je neodvisna od naboja; deluje enako med protoni-protoni, nevtroni-nevtroni in protoni-nevtroni.

Potencial močne sile si lahko predstavljamo kot potencialno jamo. Nukleoni so ujeti v tej jami, ki predstavlja jedro.

Šibka jedrska sila je odgovorna za nekatere jedrske razpade, predvsem za razpad beta (β). Pri tem razpadu se v jedru nevtron pretvori v proton (ali obratno), kar spremeni vrstno število elementa. Njen doseg je še bistveno krajši od dosega močne sile.

Elektromagnetna sila deluje med nabitimi delci. V jedru povzroča odboj med pozitivno nabitimi protoni. Ker ima neskončen doseg, njen vpliv narašča s številom protonov in pri težjih jedrih pomembno prispeva k nestabilnosti.

1.2 Vezavna energija

Masa atomskega jedra je vedno manjša od vsote mas njegovih sestavnih delov (protonov in nevtronov). Ta razlika v masi, imenovana masni defekt (Δm), se po Einsteinovi enačbi $E = \Delta mc^2$ sprosti v obliki energije ob nastanku jedra. Tej energiji pravimo **vezavna energija** (E_v).

$$E_v = (Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m_{\text{jedra}}) \cdot c^2 \tag{1}$$

kjer je Z število protonov, N število nevtronov, m_p masa protona, m_n masa nevtrona in m_{jedra} masa jedra.

Ker je vezavna energija energija, ki jo je treba *dovesti*, da jedro razdelimo na posamezne nukleone, je po dogovoru negativna ($E_v < 0$). Bolj kot je jedro vezano, večja je absolutna vrednost vezavne energije. Pomemben podatek je tudi vezavna energija na nukleon (E_v/A), ki nam pove, kako močno je v povprečju vezan posamezen nukleon. Največjo vrednost doseže pri jedrih v okolici železa (^{56}Fe).

Za pregled lastnosti različnih jeder se uporablja **karta nuklidov**, kot je tista, ki jo vzdržuje IAEA (Mednarodna agencija za atomsko energijo). Na njej so jedra prikazana v odvisnosti od števila protonov (Z) in nevtronov (N), barvno pa so označeni tipi razpadov in drugi podatki.

1.3 Ocene pomembnih količin

Pri delu z jedri si je dobro zapomniti nekatere velikostne rede:

- **Energije v jedru** se običajno merijo v megaelektronvoltih (MeV). 1 MeV = 1.602×10^{-13} J.

- **Vezavna energija na nukleon** je za večino jeder reda velikosti 8–10 MeV.
- **Čas preleta** je čas, ki ga hiter nevtron (npr. z energijo 1 MeV) potrebuje, da preleti jedro (premera ~ 10 fm). Ta čas je zelo kratek, reda velikosti 10^{-22} s.
- **Termična energija pri sobni temperaturi** ($T \approx 300$ K) je $k_B T \approx 0.025$ eV. To je mnogo manj od tipičnih jedrskih energij, kar pomeni, da okolica ne more kar tako vzbuditi jedra.

2 Modeli atomskega jedra

Za lažje razumevanje kompleksne strukture in lastnosti atomskih jeder sta bila razvita dva pomembna modela: kapljični in lupinski model.

2.1 Kapljični model in semiempirična masna formula

Kapljični model obravnava jedro kot kapljico nestisljive tekočine, kjer nukleoni igrajo vlogo molekul. Ta analogija je uporabna, ker močna jedrska sila, podobno kot sile med molekulami v kapljici, deluje na kratkih razdaljah in je nasičena (nukleon interagira le z najbližjimi sosedi).

Na podlagi tega modela je bila razvita **semiempirična masna formula** (tudi Bethe-Weizsäckerjeva formula), ki omogoča oceno vezavne energije jedra $E_v(A, Z)$ na podlagi njegovega masnega števila A in vrstnega števila Z:

$$E_v(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta(A, Z) \tag{2}$$

Posamezni členi v formuli imajo naslednji fizikalni pomen:

1. **Volumski člen ($a_V A$):** Najpomembnejši, pozitiven prispevek, ki izhaja iz dejstva, da vsak nukleon prispeva k vezavi z enako energijo. Vezavna energija je sorazmerna s številom nukleonov, torej z volumnom jedra.
2. **Površinski člen ($-a_S A^{2/3}$):** Ta člen je popravek na volumskega. Nukleoni na površini jedra imajo manj sosedov kot tisti v notranjosti, zato so šibkeje vezani. Ker je število površinskih nukleonov sorazmerno s površino jedra ($R^2 \propto (A^{1/3})^2 = A^{2/3}$), ta člen zmanjšuje absolutno vrednost vezavne energije.
3. **Elektrostatski (Coulombov) člen ($-a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$):** Predstavlja elektrostatsko odbojno silo med protoni, ki deluje proti jedrski sili in zmanjšuje vezavno energijo. Energija je sorazmerna s kvadratom naboja ($Z^2 \approx Z(Z-1)$) in obratno sorazmerna s polmerom jedra ($R \propto A^{1/3}$).
4. **Asimetrični (mešalni) člen ($-a_A \frac{(A-2Z)^2}{A}$):** Ta člen upošteva, da je jedro najbolj stabilno, ko je število protonov in nevtronov približno enako ($N = Z$ oziroma $A - Z = Z \Rightarrow A = 2Z$). Vsako odstopanje od te simetrije (razlika $N - Z = A - 2Z$) vodi v zmanjšanje stabilnosti in s tem vezavne energije. Pri težjih jedrih postane zaradi naraščajočega Coulombovega odboja energijsko bolj ugodno imeti več nevtronov kot protonov.
5. **Paritveni člen ($\pm\delta(A, Z)$):** Ta empirični člen upošteva, da so jedra s sodim številom protonov in sodim številom nevtronov (sodo-soda jedra) najbolj stabilna, medtem ko so liho-liha najmanj stabilna. To je posledica tendence nukleonov, da se združujejo v pare z nasprotnim spinom.

2.2 Lupinski model in magična jedra

Kapljični model ne pojasni vseh opazovanih lastnosti jeder. Eksperimentalno je bilo ugotovljeno, da so jedra z določenim številom protonov ali nevtronov—t.i. **magična števila** (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126)—izjemno stabilna.

To stabilnost pojasni **lupinski model**, ki predpostavlja, da se nukleoni v jedru, podobno kot elektroni v atomu, razporejajo po energijskih nivojih oziroma lupinah. Ko je zunanja lupina polna (pri magičnem številu nukleonov), je jedro posebej stabilno, podobno kot žlahtni plini v kemiji.

3 Stabilnost jeder in energija jedrskih reakcij

3.1 Stabilna jedra

Jedra so stabilna, ko imajo optimalno razmerje med številom protonov in nevtronov. Na karti nuklidov stabilna jedra ležijo na t.i. *dolini stabilnosti*. Za lažja jedra je to razmerje približno $N \approx Z$. Pri težjih jedrih pa zaradi naraščajočega vpliva elektrostatskega odboja med protoni postane energijsko bolj ugodno, da imajo jedra presežek nevtronov ($N > Z$). Nevtroni z močno jedrsko silo prispevajo k vezavi, ne pa tudi k elektrostatskemu odboju.

3.2 Energija razpada

Jedra, ki ležijo izven doline stabilnosti, so nestabilna in sčasoma razpadejo. Energija, ki se sprosti pri jedrski reakciji ali razpadu, se imenuje **razpadna energija** (Q). Izračunamo jo kot razliko med mirovno maso reaktantov in mirovno maso produktov:

$$Q = (m_{\text{reaktanti}} - m_{\text{produkti}}) \cdot c^2 \tag{3}$$

Če je $Q > 0$, se energija sprosti (eksotermna reakcija), če je $Q < 0$, pa je treba energijo dovesti (endotermna reakcija).

3.3 Ocena sproščene energije pri cepitvi

Ocenimo, kakšno moč bi sproščal 1 kg urana-235 (^{235}U), če bi vsi atomi v njem izvedli cepitev v enem dnevu. Pri cepitvi enega jedra ^{235}U se v povprečju sprosti približno $c = 215\,\text{MeV}$ energije.

Število jeder (N) v masi $m = 1\,\text{kg}$ urana dobimo z enačbo:

$$N = \frac{m}{M} N_A \tag{4}$$

kjer je $M \approx 235\,\text{g/mol}$ molska masa ^{235}U, $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$ pa Avogadrovo število.

Celotna sproščena energija (E) je:

$$E = N \cdot c = \frac{m}{M} N_A c \tag{5}$$

Moč (P) je energija, sproščena v časovni enoti $t = 1\,\text{dan} = 86\,400\,\text{s}$:

$$P = \frac{E}{t} \tag{6}$$

Izračun:

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{1000\,\mathrm{g}}{235\,\mathrm{g/mol}} \cdot 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}} \approx 2.56 \times 10^{24} \\
E &= 2.56 \times 10^{24} \cdot 215\,\mathrm{MeV} \approx 5.5 \times 10^{26}\,\mathrm{MeV} \\
&= 5.5 \times 10^{26}\,\mathrm{MeV} \cdot 1.602 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV} \approx 8.81 \times 10^{13}\,\mathrm{J} \\
P &= \frac{8.81 \times 10^{13}\,\mathrm{J}}{86\,400\,\mathrm{s}} \approx 1.02 \times 10^{9}\,\mathrm{W} = 1.02\,\mathrm{GW}
\end{aligned}
$$

To je moč reda velikosti gigavata, kar je primerljivo z močjo velike elektrarne.

4 Radioaktivnost in cepitveni produkti

4.1 Osnovni zakon radioaktivnega razpada

Radioaktivni razpad je stohastičen proces, pri katerem nestabilno atomsko jedro spontano razpade in pri tem odda energijo v obliki sevanja. Hitrost razpadanja, imenovana **aktivnost (A)**, je premo sorazmerna številu radioaktivnih jeder (N), ki so v danem trenutku prisotna.

$$A(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) \tag{7}$$

kjer je λ razpadna konstanta, značilna za posamezen izotop. Rešitev te diferencialne enačbe je eksponentni zakon razpada:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{8}$$

kjer je N_0 število jeder ob času $t = 0$. Skladno s tem se zmanjšuje tudi aktivnost: $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$.

Število jeder N v vzorcu z maso m in molsko maso M lahko izračunamo z Avogadrovim številom N_A:

$$N = \frac{m}{M} N_A \tag{9}$$

4.2 Aktivnost cepitvenih produktov

Pri cepitvi težkih jeder, kot je ^{235}U, nastane širok spekter lažjih jeder, ki jih imenujemo **cepitveni produkti**. Večina izmed stotin različnih nastalih izotopov je radioaktivnih.

Celotna aktivnost izrabljenega jedrskega goriva je vsota aktivnosti vseh prisotnih cepitvenih produktov:

$$A_{cp}(t) = \sum_{i=1}^{k} A_i(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i N_i(t) \tag{10}$$

kjer se sešteva po vseh k (približno 100-200 pomembnejših) radioaktivnih izotopih.

Ta mešanica ima zelo kompleksno obnašanje, saj se koncentracije posameznih izotopov (N_i) lahko razlikujejo za več kot **8 velikostnih redov**, njihove razpadne konstante (λ_i) pa celo za **12 velikostnih redov**. Zaradi tega celotna aktivnost ne sledi preprostemu eksponentnemu zakonu, ampak se jo opisuje z empiričnimi formulami.

4.3 Empirične formule za aktivnost po zaustavitvi

Za oceno aktivnosti cepitvenih produktov po zaustavitvi reaktorja se uporabljajo različne empirične formule.

Wigner-Wayeva formula (za kratek čas obsevanja): Za primere, ko je bil čas obratovanja reaktorja kratek v primerjavi s časom ohlajanja, ali za zelo dolge čase po zaustavitvi, se aktivnost dobro opiše z naslednjo formulo:

$$A(t) \approx A(t_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1.2} \tag{11}$$

kjer je t čas po zaustavitvi, t_0 pa referenčni čas, pri katerem je bila izmerjena aktivnost $A(t_0)$.

Formula za daljši čas obsevanja: Bolj natančna formula, ki upošteva tako čas obratovanja reaktorja T kot čas ohlajanja t po zaustavitvi, je:

$$A(t) = k \cdot P \left(t^{-0.2} - (T + t)^{-0.2} \right) \tag{12}$$

kjer je P toplotna moč reaktorja, k pa konstanta. Ena od oblik te formule (z enoto Curie) je:

$$A(t) \approx 4.4 \cdot P \left(t^{-0.2} - (T + t)^{-0.2} \right) \quad [\mathrm{Ci}] \tag{13}$$

4.4 Enota Curie in velikostni redi

Enota Curie (Ci): Curie je zgodovinska enota za aktivnost, ki je še vedno v uporabi, zlasti v ZDA. Definirana je kot aktivnost 1 grama radija-226 ($^{226}\mathrm{Ra}$), ki ima razpolovno dobo okoli 1600 let.

$$1\,\mathrm{Ci} = 3.7 \times 10^{10}\,\mathrm{razpadov/s} = 37\,\mathrm{GBq} \tag{14}$$

SI enota za aktivnost je Becquerel (Bq), kjer je $1\,\mathrm{Bq} = 1$ razpad na sekundo.

Ocene velikosti in pravila na pamet

- **Jedrska elektrarna Krško:** Celotna aktivnost cepitvenih produktov v sredici reaktorja ob zaustavitvi po polnem obratovalnem ciklusu je približno 2000 MCi (2×10^9 Ci).
- **Pravilo "na palec":** Po dolgotrajnem obratovanju reaktorja je aktivnost cepitvenih produktov približno 1 Ci **na vsak vat toplotne moči** reaktorja.

$$A_{cp} \approx 1 \, \frac{\mathrm{Ci}}{\mathrm{W_{termalna}}}$$

5 Vplivi ionizirajočega sevanja

Poleg aktivnosti vira je ključno razumeti, kakšen učinek ima ionizirajoče sevanje na snov, še posebej na živa tkiva.

5.1 Dozimetrične količine in enote

- **Absorbirana doza (D):** Pove nam, koliko energije je sevanje predalo enoti mase snovi. Enota je Gray (Gy), kjer je $1\,\mathrm{Gy} = 1\,\mathrm{J/kg}$.
- **Ekvivalentna doza (H):** Upošteva, da različne vrste sevanja (alfa, beta, gama, nevtroni) povzročajo različno biološko škodo pri enaki absorbirani dozi. To upoštevamo s ponderacijskim faktorjem w_R.

$$H = D \cdot w_R \tag{15}$$

  Enota je Sievert (Sv). Za gama in beta sevanje je $w_R = 1$, zato je $1\,\mathrm{Sv} = 1\,\mathrm{Gy}$. Za alfa delce je $w_R \approx 20$.

- **Hitrost doze ($\dot{D}$ ali $\dot{H}$):** Pove, kako hitro prejemamo dozo. Meri se v enotah Gy/h, Sv/h itd.

Zastarela enota rem: V starejši literaturi se pogosto sreča enota **rem** (Roentgen Equivalent Man). Povezava s Sievertom je:

$$100\,\mathrm{rem} = 1\,\mathrm{Sv} \quad \text{oziroma} \quad 1\,\mathrm{rem} = 0.01\,\mathrm{Sv} = 10\,\mathrm{mSv} \tag{16}$$

Pravila na pamet in velikostni redi

- **Pravilo za dozo vira:** Vir z aktivnostjo **1 Ci**, ki seva gama žarke, povzroči na razdalji **1 meter** hitrost ekvivalentne doze približno **1 rem/h** (oziroma $\approx 10\,\mathrm{mSv/h}$).
- **Naravno ozadje v Sloveniji:** Povprečna hitrost doze zaradi naravnih virov (kozmično sevanje, sevanje iz tal) je okoli $\dot{H} \approx 0.1\,\mathrm{\mu Sv/h}$. Letna doza je približno $6\,\mathrm{mGy}$.
- **Letalo:** Na potovalni višini (okoli 10 km) smo manj zaščiteni pred kozmičnim sevanjem, zato je hitrost doze višja: $\dot{H} \approx 2\,\mathrm{\mu Sv/h}$.

5.2 Primer izračuna hitrosti absorbirane doze

Ocenimo hitrost doze, ki jo prejme 80 kg težak človek na razdalji 1 m od točkastega vira z aktivnostjo $A = 1\,\mathrm{mCi}$ ($3.7 \times 10^7\,\mathrm{Bq}$). Vir naj seva gama žarke z energijo $E_\gamma = 1.3\,\mathrm{MeV}$. Človeka modeliramo kot pravokotnik z višino 1.8 m in širino 0.6 m.

1. **Tok gama žarkov (Φ):** Število žarkov, ki preletijo enoto površine na sekundo na razdalji $r = 1\,\mathrm{m}$.
$$\Phi = \frac{A}{4\pi r^2} = \frac{3.7 \times 10^7\,\mathrm{s^{-1}}}{4\pi (1\,\mathrm{m})^2} \approx 2.94 \times 10^6\,\frac{\gamma}{\mathrm{m^2 s}}$$
2. **Prestrezna površina človeka (S):** $S = 1.8\,\mathrm{m} \cdot 0.6\,\mathrm{m} = 1.08\,\mathrm{m^2}$.
3. **Stopnja prestreženih žarkov ($\dot{N}_\gamma$):**
$$\dot{N}_\gamma = \Phi \cdot S = 2.94 \times 10^6\,\frac{\gamma}{\mathrm{m^2 s}} \cdot 1.08\,\mathrm{m^2} \approx 3.18 \times 10^6\,\gamma/\mathrm{s}$$
4. **Stopnja absorbirane energije ($\dot{E}_{abs}$):** Za poenostavitev predpostavimo, da človek absorbira vso energijo vpadlih žarkov.
$$\begin{aligned}\dot{E}_{abs} &= \dot{N}_\gamma \cdot E_\gamma = 3.18 \times 10^6\,\mathrm{s^{-1}} \cdot 1.3\,\mathrm{MeV} \approx 4.13 \times 10^6\,\mathrm{MeV/s} \\ &= 4.13 \times 10^6\,\mathrm{MeV/s} \cdot 1.602 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV} \approx 6.62 \times 10^{-7}\,\mathrm{J/s}\end{aligned}$$
5. **Hitrost absorbirane doze ($\dot{D}$):** Energija na enoto mase na enoto časa.
$$\begin{aligned}\dot{D} &= \frac{\dot{E}_{abs}}{m} = \frac{6.62 \times 10^{-7}\,\mathrm{J/s}}{80\,\mathrm{kg}} \approx 8.28 \times 10^{-9}\,\mathrm{J/kg \cdot s} = 8.28 \times 10^{-9}\,\mathrm{Gy/s} \\ &= 8.28 \times 10^{-9}\,\mathrm{Gy/s} \cdot \frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}} \approx 2.98 \times 10^{-5}\,\mathrm{Gy/h} \approx 30\,\mathrm{\mu Gy/h}\end{aligned}$$

Rezultat se ujema z vrednostjo, podano na predavanjih. Opazimo, da že relativno majhen vir (milicurie) ustvari dozo, ki je 300-krat večja od naravnega ozadja.

5.3 Biološki učinki in zaščita

Visoke doze sevanja so nevarne.

- Doza **6 Gy**, prejeta v kratkem času po celem telesu, je smrtna za 50% populacije v 60 dneh (doza $LD_{50/60}$).
- Doze nad **100 Gy** so praktično takoj smrtne.

Na ustnem izpitu je treba poznati te velikostne rede nevarnosti.

5.4 Zaostala toplota in hlajenje goriva

Radioaktivni razpad cepitvenih produktov sprošča energijo, ki se v materialu goriva pretvori v toploto. Tej toploti pravimo **zaostala** ali **razpadna toplota**. To toploto je nujno odvajati tudi po zaustavitvi reaktorja, sicer lahko pride do taljenja sredice in sproščanja radioaktivnih snovi v okolje.

- Približno **3 ure** ($\approx 10\,000\,\mathrm{s}$) po zaustavitvi reaktorja moč zaostale toplote pade na približno **1%** nazivne moči reaktorja.
- Izrabljeno gorivo se zato hrani v bazenu z vodo. Voda ima dvojno vlogo:
    1. **Hladi** gorivne elemente in odvaja zaostalo toploto.
    2. Služi kot odličen **ščit** pred intenzivnim sevanjem.

6 Interakcija nevtronov z jedri

Nevtroni so električno nevtralni, zato ne čutijo odbojne elektrostatske sile protonov v jedru. To jim omogoča, da se jedru približajo in z njim interagirajo tudi pri zelo nizkih energijah. Razumevanje verjetnosti in načinov teh interakcij je ključno za fiziko jedrskih naprav.

6.1 Mikroskopski presek

Verjetnost za interakcijo med enim nevtronom in enim jedrom opišemo s količino, imenovano **mikroskopski presek (σ)**. Predstavljamo si ga lahko kot efektivno ploščino, ki jo jedro nastavlja vpadnemu nevtronu. Če nevtron zadene to ploščino, pride do interakcije.

Predpostavimo tanek sloj materiala, na katerega vpada tok nevtronov z gostoto I [nevtronov / cm^{2}s]. Če je v tem sloju N_S jeder na enoto površine [jeder / cm^2], potem je hitrost interakcij R [interakcij / cm^{2}s] podana z:

$$R = I \cdot N_S \cdot \sigma \tag{17}$$

Od tod lahko izrazimo presek kot $\sigma = R/(I \cdot N_S)$.

6.1.1 Vrste presekov

Skupno verjetnost za kakršnokoli interakcijo opisuje **totalni presek (σ_T)**. Tega sestavljajo preseki za različne možne procese, ki jih delimo v dve glavni skupini:

1. **Sipalni presek (σ_s):** Opisuje interakcije, pri katerih nevtron po trku obstaja naprej, le njegova smer in energija sta spremenjeni.
    - **Elastično sipanje ($\sigma_{s,el}$ ali (n,n)):** Nevtron trči z jedrom in skupna kinetična energija sistema se ohranja. Jedro ostane v osnovnem stanju.

- **Neelastično sipanje ($\sigma_{s,inel}$ ali (n,n')):** Del kinetične energije vpadnega nevtrona se porabi za vzbuditev jedra v višje energetsko stanje. Nevtron, ki izleti iz jedra (označen z n'), ima zato nižjo energijo. Vzburjeno jedro kasneje de-ekscitira z izsevanjem gama žarka.

2. **Absorpcijski presek (σ_a):** Opisuje interakcije, pri katerih jedro absorbira vpadni nevtron in ga kot prostega delca ni več. Nastane novo, sestavljeno jedro, ki nato razpade na različne načine:

   - **Cepitev (σ_f ali (n,f)):** Sestavljeno jedro razpade na dva (redko tri) lažja jedra, pri čemer se sprostijo novi nevtroni in velika količina energije.
   - **Radioaktivno zajetje (σ_γ ali (n,γ)):** Sestavljeno jedro preide v osnovno stanje z izsevanjem enega ali več gama žarkov.
   - **Druge reakcije:** Možne so tudi reakcije, kjer so iz jedra izvrženi drugi delci, npr. (n,2n), (n,p), (n,α).

Totalni presek je torej vsota sipalnega in absorpcijskega preseka:

$$\sigma_T = \sigma_s + \sigma_a \tag{18}$$

Enota za mikroskopski presek je **barn**, pri čemer velja: $1\,\text{barn} = 1 \times 10^{-24}\,\text{cm}^2$.

6.2 Makroskopski presek in slabljenje toka

Če nevtronski curek potuje skozi debeljšo snov, se bo njegov tok zaradi interakcij zmanjševal (slabil). Predpostavimo, da je gostota jeder v materialu n [jeder / cm^3]. V tanki plasti debeline dx je število jeder na enoto površine enako $dN_S = n \cdot dx$.

Zmanjšanje gostote toka $-dI$ na tej poti je enako hitrosti interakcij dR:

$$-dI(x) = dR = I(x) \cdot \sigma_T \cdot (n \cdot dx) \tag{19}$$

To nam da diferencialno enačbo:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -n\sigma_T I(x) \tag{20}$$

Rešitev te enačbe je eksponentni zakon slabljenja za tok nevtronov, ki še niso interagirali:

$$I(x) = I_0 e^{-n\sigma_T x} \tag{21}$$

kjer je I_0 začetna gostota toka na $x = 0$.

Produkt $n \cdot \sigma$ se imenuje **makroskopski presek** (Σ):

$$\Sigma = n \cdot \sigma \quad [\text{cm}^{-1}] \tag{22}$$

Makroskopski presek si lahko predstavljamo kot **verjetnost za interakcijo na enoto prepotovane poti**. Z njegovo pomočjo lahko zakon slabljenja zapišemo bolj zgoščeno:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_T x} \tag{23}$$

Obratna vrednost totalnega makroskopskega preseka je **povprečna prosta pot** (λ_t), ki predstavlja povprečno razdaljo, ki jo nevtron prepotuje v snovi pred prvo interakcijo.

$$\lambda_t = \frac{1}{\Sigma_T} \tag{24}$$

7 Energijska odvisnost presekov in reakcijska hitrost

Do sedaj smo predpostavljali, da imajo vsi nevtroni enako energijo. V resnici pa imajo nevtroni v reaktorju široko porazdelitev energij, mikroskopski preseki pa so močno odvisni od energije vpadnega nevtrona.

7.1 Splošna oblika reakcijske hitrosti

Za natančnejši opis moramo upoštevati energijsko odvisnost. Uvedemo **gostoto nevtronskega toka (fluks) na enoto energije**, $\Phi(E)$, ki karakterizira energijsko porazdelitev nevtronov. Skupno reakcijsko hitrost R [reakcij / cm^{3}s] dobimo z integracijo produkta makroskopskega preseka $\Sigma(E)$ in fluksa $\Phi(E)$ po vseh energijah:

$$R = \int_0^\infty \Sigma_i(E)\Phi(E)dE \tag{25}$$

kjer je $\Sigma_i(E)$ makroskopski presek za specifično interakcijo i. V praksi se ta integral pogosto poenostavi z uporabo povprečnih presekov za določene energijske skupine. Če sta fluks in presek konstantna, dobimo že znano enačbo: $R = \Sigma_i \cdot \Phi$.

7.2 Energijske regije nevtronov

Nevtrone glede na njihovo kinetično energijo običajno delimo v tri glavne skupine:

- **Termični nevtroni ($E < 1\,\mathrm{eV}$):** To so nevtroni, ki so v termičnem ravnovesju z okolico (moderatorjem). Njihova energijska porazdelitev je podobna Maxwell-Boltzmannovi.
- **Epitermični nevtroni ($1\,\mathrm{eV} < E < 0.1\,\mathrm{MeV}$):** To je vmesna regija, kjer nevtroni upočasnjujejo. Preseki imajo v tej regiji pogosto izrazite vrhove, imenovane resonance.
- **Hitri nevtroni ($E > 0.1\,\mathrm{MeV}$):** To so nevtroni z visoko energijo, kakršni nastanejo neposredno pri cepitvi.

7.3 Tipična odvisnost presekov od energije

Preseki se z energijo močno spreminjajo.

- **Termična regija:** Za večino absorpcijskih reakcij (vključno s cepitvijo) velja, da je presek σ_a sorazmeren z $1/v$, kjer je v hitrost nevtrona. Ker je kinetična energija $E \propto v^2$, to pomeni, da je $\sigma_a \propto 1/\sqrt{E}$. Verjetnost za zajetje je večja, če je nevtron počasnejši in se dlje časa zadržuje v bližini jedra.
- **Epitermična regija:** Tu se pojavijo **resonančni vrhovi**, kjer se presek za zajetje močno poveča pri točno določenih energijah, ki ustrezajo vzbujenim stanjem sestavljenega jedra.
- **Hitra regija:** Preseki so na splošno manjši in se z energijo spreminjajo bolj zvezno.

Če v podatkih ni drugače specificirano, se vrednost preseka običajno nanaša na termične nevtrone pri standardni hitrosti 2200 m/s (energija $\approx 0.0253\,\mathrm{eV}$).

7.4 Fisijski spekter

Nevtroni, ki nastanejo pri cepitvi, nimajo ene same energije, ampak so porazdeljeni po energijah. Ta porazdelitev se imenuje **fisijski spekter**, $\chi(E)$. Funkcija $\chi(E)$ je normalizirana tako, da je njen integral po vseh energijah enak 1:

$$\int_0^\infty \chi(E)dE = 1 \tag{26}$$

Večina nevtronov nastane z energijami med 1 in 2 MeV.

8 Praktični izračuni v jedrski tehniki

8.1 Izračun številske gostote jeder (n)

Za izračun makroskopskega preseka $\Sigma = n\sigma$ moramo poznati številsko gostoto jeder n [jeder / cm^3]. Izračunamo jo iz gostote materiala ρ [g/cm^3], molske mase M [g/mol] in Avogadrovega števila N_A.

$$n = \frac{\rho \cdot N_A}{M} \tag{27}$$

Tipična vrednost za atomske gostote v trdnih snoveh je reda velikosti 10^{22} jeder/cm^3.

8.2 Gostota moči v reaktorju

Toplotna moč v reaktorju nastane pretežno zaradi cepitev. Gostota moči P_V [W/cm^3] je sorazmerna s hitrostjo cepitvenih reakcij R_f in energijo, ki se sprosti na eno cepitev, E_f.

$$P_V = R_f \cdot E_f = \Phi \cdot \Sigma_f \cdot E_f \tag{28}$$

kjer je Φ gostota nevtronskega toka, $\Sigma_f = n \cdot \sigma_f$ makroskopski cepitveni presek in E_f povprečna **uporabna** energija na cepitev (približno 200 MeV). Pri izračunih je izziv v tem, da se fluks in preseki spreminjajo tako s prostorom kot z energijo in lahko variirajo za več velikostnih redov.

8.3 Sproščena in uporabna energija pri cepitvi

Pri cepitvi jedra ^{235}U se sprosti približno 215 MeV energije. Vendar pa vsa ta energija ne prispeva k segrevanju goriva in hladila v reaktorju.

Tabela 1: Porazdelitev sproščene energije pri cepitvi.

Nosilec energije	**Sproščena energija [MeV]**	**Opomba**
Kinetična energija cep. produktov	168	Uporabna takoj.
Kinetična energija nevtronov	5	Uporabna takoj.
Takojšnji gama žarki	7	Uporabna takoj.
Beta razpadi cep. produktov	8	Uporabna z zamikom.
Gama razpadi cep. produktov	7	Uporabna z zamikom.
Nevtrini	10	**Neuporabna.**
Gama žarki iz (n,γ) reakcij	10	Uporabna.
Skupaj uporabno (približno)	$\approx$ **205**	

Ključno je, da **nevtrini** zaradi izjemno majhnega interakcijskega preseka praktično brez interakcij zapustijo sredico reaktorja in njihova energija se ne pretvori v toploto. Zato je uporabna energija, ki jo upoštevamo pri izračunu moči, nekoliko nižja od celotne sproščene energije in znaša približno 200 MeV na cepitev.

9 Upočasnjevanje nevtronov (moderacija)

Nevtroni, ki nastanejo pri cepitvi, imajo visoko kinetično energijo (so hitri, $\sim 2\,\mathrm{MeV}$). Za povečanje verjetnosti, da povzročijo nove cepitve v jedrih kot je $^{235}\mathrm{U}$, jih je treba upočasniti na termične energije ($\sim 0.025\,\mathrm{eV}$). Ta proces se imenuje **moderacija** in poteka preko niza elastičnih trkov z jedri lahkih elementov (moderatorja).

9.1 Kinematika elastičnega sipanja

Za analizo energijske izgube nevtrona pri enem samem trku vpeljemo naslednje poenostavitve:

- Nevtron se sipa **elastično** na jedru moderatorja.
- Obravnavamo trk z eno vrsto jeder (npr. vodik, devterij, ogljik).
- Zanemarimo absorpcijo ali uhajanje nevtronov med procesom upočasnjevanja.
- Jedra moderatorja pred trkom mirujejo ($V_0 = 0$).

9.2 Laboratorijski in težiščni sistem

Za lažjo analizo trkov preidemo iz laboratorijskega (LAB) v težiščni (CM) sistem.

Laboratorijski sistem (O): Sistem, v katerem opazovalec miruje in tarča (jedro A) miruje pred trkom. Količine označimo z indeksom 0 ali brez njega.

Težiščni sistem (C): Sistem, ki se giblje tako, da je skupna gibalna količina vseh delcev v sistemu enaka nič. Količine označimo z indeksom C.

Uporabljena notacija:

- v_0, u_0: Hitrost nevtrona v LAB sistemu pred in po trku.
- v_c, u_c: Hitrost nevtrona v CM sistemu pred in po trku.
- V_0, U_0: Hitrost jedra (mase A) v LAB sistemu pred in po trku.
- V_c, U_c: Hitrost jedra v CM sistemu pred in po trku.
- θ_0, θ_C: Sipalni kot nevtrona v LAB in CM sistemu.
- $\mu_0 = \cos\theta_0$, $\mu_C = \cos\theta_C$.

Transformacije med sistemi
Hitrost težišča $\vec{v}_{cm}$ je definirana kot:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_n\vec{v}_0 + m_A\vec{V}_0}{m_n + m_A}$$

Transformacija hitrosti iz LAB v CM sistem in nazaj:

$$\begin{aligned} \vec{v}_c &= \vec{v}_0 - \vec{v}_{cm} \quad \text{(iz LAB v CM)} \\ \vec{u}_0 &= \vec{u}_c + \vec{v}_{cm} \quad \text{(iz CM v LAB)} \end{aligned}$$

9.3 Izpeljava energijske izgube pri trku

Stanje pred trkom. Ker jedro miruje ($V_0 = 0$) in maso nevtrona normiramo na 1 ($m_n = 1$, $m_A = A$), je hitrost težišča:

$$v_{cm} = \frac{1 \cdot v_0 + A \cdot 0}{1 + A} = \frac{v_0}{A + 1} \tag{29}$$

Hitrosti delcev v težiščnem sistemu pred trkom sta:

$$v_c = v_0 - v_{cm} = v_0 - \frac{v_0}{A + 1} = v_0 \frac{A}{A + 1} \tag{30}$$

$$V_c = V_0 - v_{cm} = 0 - \frac{v_0}{A + 1} = -\frac{v_0}{A + 1} \tag{31}$$

Preverimo, da je skupna gibalna količina v CM sistemu res nič: $m_n v_c + m_A V_c = 1 \cdot (v_0 \frac{A}{A+1}) + A \cdot (-\frac{v_0}{A+1}) = 0$.

Stanje po trku. Pri elastičnem sipanju se v težiščnem sistemu ohranja kinetična energija vsakega delca posebej, zato se magnitudi hitrosti ne spremenita, spremeni se le smer:

$$u_c = v_c = v_0 \frac{A}{A + 1} \quad \text{in} \quad U_c = V_c \tag{32}$$

Hitrost nevtrona po trku v laboratorijskem sistemu, u_0, dobimo z vektorsko vsoto $\vec{u}_0 = \vec{u}_c + \vec{v}_{cm}$. Velikost u_0 izračunamo s kosinusnim izrekom, kjer je θ_C kot med vektorjema $\vec{u}_c$ in $\vec{v}_{cm}$.

$$u_0^2 = u_c^2 + v_{cm}^2 + 2 u_c v_{cm} \cos \theta_C$$

$$u_0^2 = \left(v_0 \frac{A}{A + 1} \right)^2 + \left(\frac{v_0}{A + 1} \right)^2 + 2 \left(v_0 \frac{A}{A + 1} \right) \left(\frac{v_0}{A + 1} \right) \mu_C$$

$$u_0^2 = \frac{v_0^2}{(A + 1)^2} \left(A^2 + 1 + 2A\mu_C \right)$$

Razmerje med končno ($E' = \frac{1}{2} m_n u_0^2$) in začetno energijo ($E = \frac{1}{2} m_n v_0^2$) je:

$$\frac{E'}{E} = \frac{u_0^2}{v_0^2} = \frac{A^2 + 1 + 2A\mu_C}{(A + 1)^2} \tag{33}$$

9.4 Ključni rezultati

Za lažji zapis uvedemo parameter α:

$$\alpha = \left(\frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 \tag{34}$$

Z nekaj algebraične preureditve lahko zgornji izraz za razmerje energij zapišemo v bolj pregledni obliki.

Razmerje energij po elastičnem trku

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{2} \left[(1 + \alpha) + (1 - \alpha) \mu_C \right] \tag{35}$$

Ta enačba je temelj za analizo upočasnjevanja nevtronov. Iz nje sta razvidni mejni vrednosti za energijo po trku, saj je sipalni kot μ_C lahko med -1 in 1.

- **Maksimalna končna energija ($\mu_C = 1$, $\theta_C = 0°$):** To ustreza oplazenju, ko nevtron le rahlo zadene jedro in nadaljuje pot v skoraj nespremenjeni smeri.

$$\frac{E'_{max}}{E} = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha) + (1-\alpha)\right] = 1 \implies E'_{max} = E$$

  V tem primeru nevtron ne izgubi energije.

- **Minimalna končna energija ($\mu_C = -1$, $\theta_C = 180°$):** To ustreza čelnemu trku, po katerem se nevtron odbije nazaj.

$$\frac{E'_{min}}{E} = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha) - (1-\alpha)\right] = \alpha \implies E'_{min} = \alpha E$$

  To je največja možna izguba energije pri enem trku.

Energijski razpon po enem trku
Energija nevtrona E' po enem elastičnem trku leži v intervalu:

$$\alpha E \leq E' \leq E \tag{36}$$

9.5 Verjetnostna porazdelitev energije po trku

Da bi določili povprečno izgubo energije, moramo poznati verjetnostno porazdelitev $p(E')$ za energijo nevtrona po trku. To storimo ob ključni predpostavki, da je **sipanje v težiščnem sistemu izotropno**. To pomeni, da je verjetnost, da se bo nevtron sipal v določen prostorski kot $d\Omega_C$, enaka za vse smeri.

Matematično to pomeni, da je verjetnostna gostota na enoto kosinusa sipalnega kota, $dN/d\mu_C$, konstantna. Verjetnostno porazdelitev po energiji $p(E') = dN/dE'$ dobimo s pravilom za zamenjavo spremenljivk:

$$\frac{dN}{dE'} = \frac{dN}{d\mu_C}\frac{d\mu_C}{dE'} \tag{37}$$

Iz enačbe $E'/E = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha) + (1-\alpha)\mu_C\right]$ izrazimo odvod:

$$\frac{dE'}{d\mu_C} = \frac{E}{2}(1-\alpha) \implies \frac{d\mu_C}{dE'} = \frac{2}{E(1-\alpha)} \tag{38}$$

Ker sta oba člena, $dN/d\mu_C$ in $d\mu_C/dE'$, konstanti (neodvisni od μ_C ali E'), je tudi dN/dE' konstanta v dovoljenem energijskem intervalu $[\alpha E, E]$. To pomeni, da je po enem izotropnem sipanju vsaka končna energija v tem intervalu enako verjetna. Graf porazdelitve dN/dE' v odvisnosti od E' je pravokotnik.

S pogojem, da je ploščina pod grafom (celotna verjetnost) enaka 1, določimo višino pravokotnika:

$$\int_{\alpha E}^{E} p(E')dE' = p(E') \cdot (E - \alpha E) = p(E') \cdot E(1-\alpha) = 1 \tag{39}$$

Iz tega sledi končna oblika za verjetnostno gostoto, znano tudi kot **jedro sipanja** $W(E \to E')$:

$$W(E \to E') = \begin{cases} \frac{1}{E(1-\alpha)} & \text{za } \alpha E \leq E' \leq E \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \tag{40}$$

Tabela 2: Vrednosti parametra α in maksimalna relativna izguba energije $(1-\alpha)$ za različne moderatorje.

Jedro	**A**	$\boldsymbol{\alpha = ((A-1)/(A+1))^2}$	**Maks. izguba E (%)**
Vodik (^{1}H)	1	0	100 %
Devterij (^{2}H)	2	$1/9 \approx 0.11$	89 %
Ogljik (^{12}C)	12	≈ 0.716	28.4 %
Uran (^{238}U)	238	≈ 0.983	1.7 %

9.6 Porazdelitev po sipalnem kotu

Prostorski kot (ponovitev): Smer v 3D prostoru opišemo z dvema kotoma: polarnim kotom θ (odklon od osi z, $0 \leq \theta \leq \pi$) in azimutnim kotom ϕ (zasuk okoli osi z, $0 \leq \phi \leq 2\pi$). Neskončno majhen del krogelne površine, **prostorski kot** $d\Omega$, je podan z: $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi = -d(\cos\theta)\, d\phi$.

Izotropno sipanje: Verjetnostna porazdelitev sipanja $W(\theta_C, \phi_C)$ je normalizirana na 1:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} W(\theta_C, \phi_C) \sin\theta_C\, d\theta_C\, d\phi_C = 1$$

Če je sipanje izotropno, je W konstanta. Z integracijo po vseh kotih dobimo: $W \cdot (2\pi) \cdot \int_{-1}^{1} d(\cos\theta_C) = W \cdot 4\pi = 1 \implies W = 1/(4\pi)$. Verjetnost, da se delec siplje v kot $\mu_C = \cos\theta_C$, dobimo z integracijo po azimutu:

$$W(\mu_C) = \int_0^{2\pi} W(\theta_C, \phi_C) d\phi_C = \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi = \frac{1}{2} \tag{41}$$

Torej, za izotropno sipanje je porazdelitev po μ_C konstantna in enaka $1/2$ na intervalu $[-1, 1]$.

Povprečni kosinus sipalnega kota: Povprečna vrednost $\langle \mu_C \rangle$ je:

$$\langle \mu_C \rangle = \int_{-1}^{1} \mu_C W(\mu_C) d\mu_C = \int_{-1}^{1} \mu_C \cdot \frac{1}{2} d\mu_C = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_C^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(1^2 - (-1)^2) = 0 \tag{42}$$

Povprečni kosinus sipalnega kota v težiščnem sistemu je 0, kar ustreza povprečnemu sipalnemu kotu $\theta_C = 90°$.

9.7 Povprečna izguba energije na trk

Povprečno energijo po trku $\langle E' \rangle$ lahko izračunamo na dva načina:

1. Z integracijo po energijski porazdelitvi: $\langle E' \rangle = \int_{\alpha E}^{E} E' \cdot W(E \to E') dE' = \frac{E(1+\alpha)}{2}$.
2. Z uporabo povprečnega kosinusa $\langle \mu_C \rangle = 0$:

$$\langle E' \rangle = \left\langle E \cdot \frac{1}{2} \left[(1+\alpha) + (1-\alpha)\mu_C \right] \right\rangle \tag{43}$$

$$= \frac{E}{2} \left[(1+\alpha) + (1-\alpha)\langle \mu_C \rangle \right] \tag{44}$$

$$= \frac{E}{2}(1+\alpha) \tag{45}$$

Povprečna izguba energije $\langle \Delta E \rangle = E - \langle E' \rangle$ je torej:

$$\langle \Delta E \rangle = E - E\frac{1+\alpha}{2} = E\frac{1-\alpha}{2} \tag{46}$$

Z vstavitvijo $\alpha = ((A-1)/(A+1))^2$ dobimo:

$$\langle \Delta E \rangle = E\frac{1-(\frac{A-1}{A+1})^2}{2} = E\frac{(A+1)^2-(A-1)^2}{2(A+1)^2} = E\frac{4A}{2(A+1)^2} = E\frac{2A}{(A+1)^2} \tag{47}$$

Primeri:

- **Vodik (A=1):** $\langle \Delta E \rangle = E\frac{2\cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{E}{2}$. V povprečju izgubi 50% svoje energije.
- **Uran (A=238):** $\langle \Delta E \rangle = E\frac{2\cdot 238}{(238+1)^2} \approx 0.0084E$. V povprečju izgubi manj kot 1% energije.

To jasno pokaže, zakaj se za moderatorje uporabljajo lahka jedra.

9.8 Sipalni kot v laboratorijskem sistemu

Povezavo med sipalnim kotom v težiščnem (μ_C) in laboratorijskem (μ_0) sistemu dobimo z združitvijo enačb za hitrost in energijo po trku. Hitrost po trku v smeri vpadnega delca je $u_{0,\|} = u_c\mu_C + v_{cm}$, kar nam da:

$$\begin{aligned} u_0\mu_0 &= u_c\mu_C + v_{cm} \\ u_0\cos\theta_0 &= \left(v_0\frac{A}{A+1}\right)\mu_C + \frac{v_0}{A+1} \\ \frac{u_0}{v_0}\mu_0 &= \frac{A\mu_C+1}{A+1} \end{aligned}$$

Če v to enačbo vstavimo že znano razmerje hitrosti $\frac{u_0}{v_0} = \frac{\sqrt{A^2+2A\mu_C+1}}{A+1}$, dobimo:

$$\frac{\sqrt{A^2+2A\mu_C+1}}{A+1}\mu_0 = \frac{A\mu_C+1}{A+1} \tag{48}$$

Povezava med sipalnima kotoma (LAB in CM)

$$\mu_0 = \cos\theta_0 = \frac{A\mu_C+1}{\sqrt{A^2+2A\mu_C+1}} \tag{49}$$

Povprečni kosinus sipalnega kota v LAB sistemu. Povprečno vrednost $\langle \mu_0 \rangle$ dobimo z integracijo po porazdelitvi v težiščnem sistemu, $W(\mu_C) = 1/2$:

$$\langle \mu_0 \rangle = \int_{-1}^{1} \mu_0(\mu_C)W(\mu_C)d\mu_C = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{A\mu_C+1}{\sqrt{A^2+2A\mu_C+1}}d\mu_C \tag{50}$$

Rešitev tega integrala je standarden rezultat v nevtronski fiziki:

Povprečni kosinus sipalnega kota v LAB

$$\langle \mu_0 \rangle = \frac{2}{3A} \tag{51}$$

- **Vodik (A=1):** $\langle \mu_0 \rangle = 2/3$. Sipanje je močno usmerjeno naprej.
- **Uran (A=238):** $\langle \mu_0 \rangle = 2/(3 \cdot 238) \approx 0.0028$. Sipanje je skoraj simetrično naprej in nazaj.
- **Zelo težko jedro ($A \to \infty$):** $\langle \mu_0 \rangle \to 0$. To ustreza trku z neskončno težko mirujočo steno, kjer je povprečni kot sipanja 90°.

Porazdelitev $dN/d\mu_0$. Ker je $\langle \mu_0 \rangle > 0$ (razen za $A \to \infty$), sipanje v laboratorijskem sistemu **ni izotropno**, ampak je usmerjeno pretežno v smeri "naprej". Verjetnostna porazdelitev $W_0(\mu_0) = dN/d\mu_0$ je posledično nekonstantna. Izpeljemo jo na podoben način kot porazdelitev po energiji:

$$W_0(\mu_0) = \frac{dN}{d\mu_0} = \frac{dN}{d\mu_C}\frac{d\mu_C}{d\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{d\mu_C}{d\mu_0}$$

Odvod $d\mu_C/d\mu_0$ je kompleksen, končni rezultat pa pokaže, da je verjetnost za sipanje naprej ($\mu_0 \to 1$) večja kot verjetnost za sipanje nazaj.

9.9 Povprečni logaritemski dekrement energije (ξ)

Pri analizi zaporedja trkov je bolj priročno opazovati spremembo logaritma energije, saj so relativne izgube energije pri vsakem trku neodvisne. Energija po n trkih je:

$$E_n = E_0 \cdot \left(\frac{E_1}{E_0}\right) \cdot \left(\frac{E_2}{E_1}\right) \cdots \left(\frac{E_n}{E_{n-1}}\right)$$

Če enačbo logaritmiramo, vsota nadomesti produkt:

$$\ln(E_n) = \ln(E_0) + \ln\left(\frac{E_1}{E_0}\right) + \cdots \implies \ln\left(\frac{E_n}{E_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{E_i}{E_{i-1}}\right)$$

Ker so sipalni koti pri vsakem trku neodvisne naključne spremenljivke, lahko pri velikem številu trkov vsoto nadomestimo s produktom števila trkov n in povprečne vrednosti logaritemske izgube energije na trk. Definiramo **povprečni logaritemski dekrement energije** ξ:

$$\xi = \langle \ln E - \ln E' \rangle = \langle \ln(E/E') \rangle \tag{52}$$

Povprečje izračunamo z integracijo po porazdelitvi $W(E \to E')$:

$$\xi = \int_{\alpha E}^{E} \ln(E/E') W(E \to E') dE' = \int_{\alpha E}^{E} \ln(E/E') \frac{dE'}{E(1-\alpha)} \tag{53}$$

Integral rešimo z uvedbo nove spremenljivke $u = \ln(E/E')$, iz česar sledi $E' = Ee^{-u}$ in $dE' = -Ee^{-u}du$. Meje integracije se spremenijo: $E' = \alpha E \to u = \ln(1/\alpha) = -\ln\alpha$ in $E' = E \to u =$

0.

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{E(1-\alpha)} \int_{-\ln\alpha}^{0} u(-Ee^{-u})du = \frac{1}{1-\alpha} \int_{0}^{-\ln\alpha} ue^{-u}du \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[-ue^{-u} - e^{-u}\right]_0^{-\ln\alpha} \quad \text{(integracija po delih)} \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[(-\ln(1/\alpha)e^{\ln\alpha} - e^{\ln\alpha}) - (0 - e^0)\right] \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left[(\ln\alpha \cdot \alpha - \alpha) - (-1)\right] = 1 + \frac{\alpha\ln\alpha}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Za jedra z $A \geq 2$ se da ξ dobro aproksimirati z razvojem v vrsto:

Povprečni logaritemski dekrement energije

$$\xi = 1 + \frac{\alpha\ln\alpha}{1-\alpha} \quad \text{kjer je } \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 \tag{54}$$

$$\xi \approx \frac{2}{A+2/3} \quad (\text{za } A \geq 2) \tag{55}$$

9.10 Povprečno število trkov za termalizacijo

Z dekrementom ξ lahko enostavno ocenimo število trkov n, potrebnih za upočasnitev nevtrona z začetne energije E_0 na končno energijo E_n:

$$\langle\ln(E_n/E_0)\rangle = -n\xi \implies n = \frac{\ln(E_0/E_n)}{\xi} \tag{56}$$

Za upočasnitev od cepitvene energije ($E_0 \approx 2\,\text{MeV}$) do termične ($E_n \approx 0.025\,\text{eV}$) je logaritemsko razmerje:

$$\ln\left(\frac{2\times10^6\,\text{eV}}{0.025\,\text{eV}}\right) = \ln(8\cdot10^7) \approx 18.2$$

Tako je potrebno število trkov za vodik ($A = 1, \xi = 1$) približno $n \approx 18$.

9.11 Primerjava lastnosti moderatorjev

V spodnji tabeli so zbrane ključne količine, ki opisujejo učinkovitost različnih materialov kot moderatorjev. ψ je povprečni sipalni kot v laboratorijskem sistemu ($\psi = \arccos\langle\mu_0\rangle$).

Tabela 3: Jedrske lastnosti pogostih moderatorskih materialov.

Jedro	**A**	$\frac{\Delta E_{max}}{E}$	$\frac{\langle\Delta E\rangle}{E}$	$\langle\mu_0\rangle$	ψ **[°]**	ξ	**n (2MeV→0.025eV)**
Vodik (^{1}H)	1	1.000	0.500	0.667	48.2	1.000	18
Devterij (^{2}H)	2	0.889	0.444	0.333	70.5	0.726	25
Berilij (^{9}Be)	9	0.320	0.160	0.074	85.8	0.207	88
Ogljik (^{12}C)	12	0.284	0.142	0.056	86.8	0.158	115
Kisik (^{16}O)	16	0.221	0.111	0.042	87.6	0.120	152
Uran (^{238}U)	238	0.017	0.008	0.003	89.8	0.0084	2172

9.12 Učinkovitost moderatorjev in energijski spekter nevtronov

Poleg same izgube energije na trk je za dober moderator ključno, da nevtronov med upočasnjevanjem ne absorbira.

9.12.1 Moderacijsko razmerje (MR)

Za kvantitativno oceno kvalitete moderatorja definiramo **moderacijsko razmerje**, ki upošteva tako sposobnost upočasnjevanja kot verjetnost za absorpcijo.

Moderacijsko razmerje (MR)

$$MR = \frac{\xi \Sigma_s}{\Sigma_a} = \frac{\xi \sigma_s}{\sigma_a} \tag{57}$$

Moderacijsko razmerje je brezdimenzijska količina, ki nam pove, kako učinkovit je material pri upočasnjevanju nevtronov v primerjavi z njihovo izgubo zaradi absorpcije. Višja kot je vrednost, boljši je moderator.

- **Problem čistega vodika (^{1}H):** Čeprav ima vodik največji ξ, ima tudi relativno visok presek za absorpcijo (reakcija (n,γ), pri kateri nastane devterij). To zmanjša njegovo moderacijsko razmerje. V praksi se zato pogosto uporabljajo vodikove spojine, kot sta lahka voda (H_2O) ali polietilen (C_nH_{2n}), kjer druge lastnosti odtehtajo to pomanjkljivost.
- **Težka voda (D_2O):** Devterij ima bistveno manjši absorpcijski presek kot vodik, zato je njegovo moderacijsko razmerje izjemno visoko, kar ga dela za enega najboljših moderatorjev.

9.12.2 Pomen hitrosti upočasnjevanja

Nevtroni se rodijo pri cepitvi z energijami reda MeV in jih moramo za učinkovito delovanje termičnega reaktorja upočasniti na termične energije, reda 10^{-8} MeV ($\approx 0.025\,$eV).

- **Vodik (H):** Potrebuje le ≈ 18 trkov. Upočasnjevanje je zelo hitro.
- **Ogljik (C):** Potrebuje ≈ 115 trkov. Upočasnjevanje je bistveno počasnejše.

Med počasnejšim upočasnjevanjem (npr. v grafitu) nevtron dlje časa prebije v epitermični energijski regiji. V tej regiji imajo težka jedra, kot je ^{238}U, izrazite **resonančne vrhove** v absorpcijskem preseku. Obstaja torej večja verjetnost, da bo nevtron parazitsko absorbiran, preden doseže termično energijo. V termičnih reaktorjih se temu želimo izogniti, medtem ko je v jedrskem orožju hitra absorpcija lahko zaželena.

9.12.3 Energijski spekter nevtronov

Gostota nevtronskega toka Φ ni enakomerno porazdeljena po energijah. To porazdelitev opišemo z energijskim spektrom $\phi(E)$, ki je definiran tako, da je $d\Phi = \phi(E)dE$. Enote za $\phi(E)$ so [nevtronov / cm^2 s eV]. Skupno reakcijsko hitrost dobimo z integracijo po celotnem spektru:

$$R_i = \int_0^\infty \Sigma_i(E)\phi(E)dE \tag{58}$$

Letargija in letargijski spekter Ker se energija nevtronov spreminja za mnogo velikostnih redov, je bolj priročna logaritemska skala, imenovana **letargija (u)**:

$$u = \ln(E_0/E) \tag{59}$$

kjer je E_0 referenčna energija, običajno maksimalna energija cepitvenih nevtronov (npr. 10 MeV). Letargija je brezdimenzijska in narašča, ko se energija zmanjšuje ($u = 0$ pri $E = E_0$). Povezava med diferencialoma je $du = -dE/E$. Skupni fluks lahko zapišemo z letargijskim spektrom $\psi(u)$:

$$\Phi_{TOT} = \int_0^\infty \phi(E)dE = \int_0^\infty \psi(u)du \tag{60}$$

Povezava med obema spektroma je:

Energijski in letargijski spekter

$$\phi(E)dE = -\psi(u)du \implies \phi(E) = \frac{\psi(u)}{E} \tag{61}$$

Enote za letargijski spekter $\psi(u)$ so enake enotam za $\Phi \cdot E/E$, torej [nevtronov / cm^2 s].

Tipičen spekter v termičnem reaktorju V idealiziranem, neskončnem moderatorju se spekter nevtronov ustali v značilno obliko, ki jo sestavljajo tri regije:

1. **Regija hitrih nevtronov ($E > 0.1$ MeV):** Spekter je tu podoben spektru cepitvenih nevtronov $\chi(E)$, z vrhom pri približno 1-2 MeV.

2. **Regija upočasnjevanja (epitermična, $1\,\text{eV} < E < 0.1\,\text{MeV}$):** V tej regiji, kjer prevladuje elastično sipanje, je letargijski spekter $\psi(u)$ približno konstanten. To pomeni, da je energijski spekter $\phi(E)$ sorazmeren z $1/E$.

3. **Regija termičnih nevtronov ($E < 1\,\text{eV}$):** Nevtroni dosežejo termično ravnovesje z moderatorjem. Njihova energijska porazdelitev je podobna Maxwell-Boltzmannovi porazdelitvi z izrazitim vrhom pri najbolj verjetni termični energiji $E = k_B T \approx 0.025\,\text{eV}$.

Če bi narisali graf spektra $\phi(E)$ v odvisnosti od E na log-log skali, bi videli tri dele: majhen vrh pri visokih energijah, dolgo, padajoče območje v sredini (pre-mica $1/E$), in velik, izrazit vrh pri nizkih, termičnih energijah.

- **Kopičenje nevtronov:** Večina nevtronov v termičnem reaktorju se "kopiči"v termični regiji. Fluks termičnih nevtronov je za več velikostnih redov višji od fluksa hitrih ali epitermičnih nevtronov.

- **Ploščina pod grafom:** Ploščina pod posameznim delom krivulje $\phi(E)$ je sorazmerna s fluksom nevtronov v tistem energijskem območju.

10 Nevtronska transportna enačba

Za natančen opis prostorske, energijske in kotne porazdelitve nevtronov v reaktorju potrebujemo bilančno enačbo, ki upošteva vse procese, ki vplivajo na populacijo nevtronov. Ta enačba je znana kot **Boltzmannova transportna enačba za nevtrone**.

10.1 Splošna oblika enačbe

Transportna enačba je bilanca nevtronov v infinitezimalnem faznem prostoru $(d\boldsymbol{r}, dE, d\boldsymbol{\Omega})$ ob času t. Zapisana v svoji splošni, integrodiferencialni obliki se glasi:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t) + \Sigma_T(\boldsymbol{r},E)\phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t) = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}'\,\Sigma_S(\boldsymbol{r},E'\to E,\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega})\phi(\boldsymbol{r},E',\boldsymbol{\Omega}',t) + S(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t) \tag{62}$$

Ta enačba predstavlja bilanco:

$$\binom{\text{Časovna}}{\text{sprememba}} + \binom{\text{Neto stopnja}}{\text{uhajanja}} + \binom{\text{Stopnja}}{\text{izgub}} = \binom{\text{Stopnja pridobivanja}}{\text{s sipanjem}} + \binom{\text{Stopnja pridobivanja}}{\text{iz vira}}$$

10.2 Definicije količin

$\phi(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)$ je **kotni nevtronski fluks**. To je osrednja količina, ki jo iščemo. Predstavlja število nevtronov s položajem znotraj $d\boldsymbol{r}$ okoli $\boldsymbol{r}$, z energijo znotraj dE okoli E, ki se gibljejo v smer znotraj prostorskega kota $d\boldsymbol{\Omega}$ okoli $\boldsymbol{\Omega}$ ob času t. Njegove enote so:

$$[\phi] = \frac{\text{nevtronov}}{\text{cm}^2\cdot\text{s}\cdot\text{eV}\cdot\text{steradian}}$$

v je hitrost nevtrona, ki ustreza energiji E ($v = \sqrt{2E/m_n}$).

$\boldsymbol{r}$ je položajski vektor.

$\boldsymbol{\Omega}$ je enotski vektor v smeri gibanja nevtrona ($\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\Omega}$). V sferičnih koordinatah ga zapišemo kot:

$$\boldsymbol{\Omega} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

Diferencial prostorskega kota je $d\boldsymbol{\Omega} = \sin\theta d\theta d\phi = -d(\cos\theta)d\phi$.

∇ je vektorski operator nabla (gradient), ki opisuje prostorske spremembe. Člen $\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\phi$ opisuje neto odtok (uhajanje) nevtronov iz točke $\boldsymbol{r}$.

$\Sigma_T(\boldsymbol{r},E)$ je **totalni makroskopski presek**. Opisuje verjetnost za kakršnokoli interakcijo na enoto poti. Predpostavljamo, da je snov izotropna, zato presek ni odvisen od smeri gibanja $\boldsymbol{\Omega}$.

$\Sigma_S(\boldsymbol{r},E'\to E,\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega})$ je **dvojno diferencialni makroskopski sipalni presek**. To je jedro sipalnega integrala in opisuje verjetnost, da bo nevtron z začetno energijo E' in smerjo $\boldsymbol{\Omega}'$ po sipanju imel končno energijo E in smer $\boldsymbol{\Omega}$.

$S(\boldsymbol{r},E,\boldsymbol{\Omega},t)$ je **vir nevtronov**. Ta člen vključuje vse vire, ki niso posledica sipanja, predvsem nevtrone iz cepitev, lahko pa tudi iz (n,2n) reakcij ali zunanjih virov (npr. v podkritičnem sistemu).

10.3 Lastnosti sipalnega preseka

Za izotropne materiale, kjer jedra nimajo preferenčne smeri, je sipalni proces odvisen le od **spremembe smeri**, ne pa od absolutnih smeri $\boldsymbol{\Omega}'$ in $\boldsymbol{\Omega}$. To pomeni, da je odvisen le od kota med njima, Θ_s, ki ga opišemo s skalarnim produktom: $\cos\Theta_s = \boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega}$. Zato lahko sipalni presek poenostavimo:

$$\Sigma_S(\boldsymbol{r},E'\to E,\boldsymbol{\Omega}'\to\boldsymbol{\Omega}) \equiv \Sigma_S(\boldsymbol{r},E'\to E,\boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega}) \tag{63}$$

Zaradi komutativnosti skalarnega produkta seveda velja $\boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}'$.

10.4 Fizikalna izpeljava transportne enačbe

Transportno enačbo izpeljemo z bilanco števila nevtronov v majhnem, infinitezimalnem delu faznega prostora. Predstavljajmo si majhen kontrolni volumen dV okoli točke $\boldsymbol{r}$. Zanima nas, kako se spreminja število nevtronov v tem volumnu, ki imajo energijo v intervalu dE okoli E in smer gibanja v prostorskem kotu $d\boldsymbol{\Omega}$ okoli $\boldsymbol{\Omega}$. Gostoto teh nevtronov označimo z $N(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$ [nevtronov / cm^3 eV steradian].

V časovnem intervalu dt se bo število nevtronov v tem delu faznega prostora spremenilo zaradi naslednjih procesov:

1. **Pretok nevtronov (uhajanje):** Nevtroni se premikajo. Tisti, ki so bili ob času t na položaju $\boldsymbol{r}$, bodo ob času $t + dt$ na položaju $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}dt = \boldsymbol{r} + v\boldsymbol{\Omega}dt$. Bilanca pretoka je razlika med nevtroni, ki v volumen vstopijo, in tistimi, ki izstopijo.

2. **Izgube zaradi trkov:** Nevtroni, ki so v volumnu dV, lahko interagirajo z jedri materiala. Verjetnost za interakcijo na poti dolžine dl je $\Sigma_T dl$. V času dt nevtroni prepotujejo pot $dl = vdt$. Število izgubljenih nevtronov je torej sorazmerno s številom prisotnih nevtronov N, verjetnostjo trka $\Sigma_T vdt$.

3. **Pridobitve s sipanjem ("in-scattering"):** V naš opazovani energijski in kotni interval $(E, \boldsymbol{\Omega})$ se lahko prisipajo nevtroni, ki so imeli pred trkom drugačno energijo E' in smer $\boldsymbol{\Omega}'$. Prispevek je sorazmeren s številom nevtronov pri $(E', \boldsymbol{\Omega}')$ in z verjetnostjo, da jih sipanje pripelje v $(E, \boldsymbol{\Omega})$, ki jo opisuje presek $\Sigma_S(E' \to E, \boldsymbol{\Omega}' \to \boldsymbol{\Omega})$. Sešteti (integrirati) moramo po vseh možnih začetnih energijah in smereh.

4. **Pridobitve iz vira:** Nevtroni z energijo E in smerjo $\boldsymbol{\Omega}$ lahko v volumnu nastanejo neodvisno od drugih nevtronov, npr. pri cepitvi. Ta proces opišemo z gostoto vira $S(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$.

10.4.1 Postavitev bilančne enačbe

Razlika v številu nevtronov med časom $t + dt$ in t je enaka vsoti vseh pridobitev minus vsota vseh izgub.

Št. nevtronov ob $t + dt$ = (Št. nevtronov ob t) - (Izgube) + (Pridobitve)

$$N(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) = N(\boldsymbol{r} - v\boldsymbol{\Omega}dt, E, \boldsymbol{\Omega}, t) - \Sigma_T vdtN(\boldsymbol{r}, \dots) + \text{In-scattering} + \text{Vir}$$

Če enačbo preuredimo tako, da so izgube na levi in pridobitve na desni, ter zapišemo polne argumente, dobimo:

$$\begin{aligned} N(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t + dt) - N(\boldsymbol{r} - v\boldsymbol{\Omega}dt, E, \boldsymbol{\Omega}, t) + \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)vdtN(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \\ dt \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \, \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E, \dots)v'N(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) + S(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)dt \end{aligned}$$

Na levi strani dodamo in odštejemo člen $N(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$, da ločimo časovni in prostorski odvod, nato pa celo enačbo delimo z dt:

$$\frac{N(\dots, t + dt) - N(\dots, t)}{dt} + \frac{N(\boldsymbol{r}, \dots) - N(\boldsymbol{r} - v\boldsymbol{\Omega}dt, \dots)}{dt} + \Sigma_T vN(\dots) = \dots$$

Sedaj pogledamo limito, ko gre $dt \to 0$:

- Prvi člen postane časovni odvod: $\frac{\partial N}{\partial t}$.

- Drugi člen postane prostorski odvod. To najlažje vidimo z razvojem v Taylorjevo vrsto: $N(\boldsymbol{r} - d\boldsymbol{r}) \approx N(\boldsymbol{r}) - d\boldsymbol{r} \cdot \nabla N$.

$$\lim_{dt \to 0} \frac{N(\boldsymbol{r}) - (N(\boldsymbol{r}) - v\boldsymbol{\Omega} dt \cdot \nabla N)}{dt} = v\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla N$$

10.4.2 Uvedba kotnega fluksa

V praksi je bolj uporabna količina **kotni fluks** $\phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$, ki je definiran kot:

$$\phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = v \cdot N(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

Z vpeljavo fluksa ($N = \phi/v$) in upoštevanjem limit dobimo končno obliko enačbe:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi + \Sigma_T \phi = \int dE' \int d\boldsymbol{\Omega}' \, \Sigma_S(E' \to E, \dots) \phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}', t) + S(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t)$$

To je natanko enačba (62), ki smo jo zapisali na začetku.

10.4.3 Vir nevtronov

Vir nevtronov S, predvsem tisti iz cepitev, je v veliki večini primerov **izotropen**, kar pomeni, da so nevtroni izsevani z enako verjetnostjo v vse smeri. To nam omogoča, da kotno odvisnost ločimo:

$$S(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{S_0(\boldsymbol{r}, E, t)}{4\pi} \tag{64}$$

kjer je S_0 skupna gostota vira [nevtronov / cm^3 s eV], faktor $1/(4\pi)$ pa poskrbi za normalizacijo po celotnem prostorskem kotu.

10.5 Pomen in poenostavitve transportne enačbe

Komentar k izpeljavi in pomenu: Ključno za razumevanje reaktorske fizike ni nujno znati rešiti te enačbe na pamet, temveč razumeti **fizikalni pomen vsakega člena** in **predpostavke**, ki so v ozadju izpeljave. Enačba preprosto pravi, da se stopnja spreminjanja števila nevtronov v majhnem delčku prostora, energije in smeri uravnovesi z neto pretokom, izgubami zaradi trkov ter pridobitvami zaradi sipanja in zunanjih virov. Gre za fundamentalno ohranitveno enačbo.

Reševanje polne transportne enačbe je izjemno zahtevno zaradi sedmih neodvisnih spremenljivk $(x, y, z, E, \theta, \phi, t)$ in njene integrodiferencialne narave. Zato v praksi skoraj vedno vpeljemo aproksimacije, ki vodijo do lažje rešljivih, a manj splošnih modelov:

1. **Stacionarno stanje in difuzijska aproksimacija:** Zanemarimo časovno odvisnost ($\partial/\partial t = 0$) in predpostavimo, da kotna porazdelitev fluksa ni preveč anizotropna. To nam omogoča, da transportno enačbo poenostavimo v **difuzijsko enačbo**. Energijo običajno obravnavamo v nekaj skupinah (večgrupna difuzijska enačba). S tem modelom računamo prostorsko porazdelitev moči in fluksa v reaktorju med stabilnim obratovanjem.

2. **Model neskončne sredice:** Zanemarimo prostorsko odvisnost ($\nabla \phi = 0$) in uhajanje. Enačba se poenostavi v integralno enačbo samo za energijsko odvisnost. S tem modelom preučujemo **energijski spekter nevtronov** v različnih materialih.

3. **Točkovna kinetika:** Predpostavimo, da lahko časovno odvisnost fluksa ločimo od njegove prostorske in energijske porazdelitve: $\phi(\boldsymbol{r}, E, t) = \Psi(\boldsymbol{r}, E) \cdot P(t)$. To vodi do sistema navadnih diferencialnih enačb za časovni razvoj skupne moči reaktorja, kar je osnova za analizo prehodnih pojavov in varnosti reaktorja.

Razumevanje, kako iz osnovne transportne enačbe s pomočjo fizikalno utemeljenih predpostavk pridemo do teh poenostavljenih, a praktično uporabnih modelov, je osrednjega pomena za jedrsko tehniko.

11 Poenostavitev transportne enačbe: Difuzijska aproksimacija

Reševanje polne transportne enačbe je prezahtevno za večino praktičnih problemov. Zato uvedemo fizikalno utemeljene poenostavitve, ki vodijo do lažje rešljive **difuzijske enačbe**. Ta model je temelj za večino preračunov porazdelitve moči v jedrskih reaktorjih.

11.1 Predpostavka stacionarnega stanja

Najprej predpostavimo, da je reaktor v stacionarnem (časovno nespremenljivem) stanju. To pomeni, da se gostota nevtronov in s tem fluks s časom ne spreminjata.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Transportna enačba se poenostavi v:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) + \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) = \\ \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\boldsymbol{\Omega}' \, \Sigma_S(\boldsymbol{r}, E' \to E, \dots)\phi(\boldsymbol{r}, E', \boldsymbol{\Omega}') + \frac{S_0(\boldsymbol{r}, E)}{4\pi}\end{aligned} \tag{65}$$

Enačba je še vedno odvisna od smeri $\boldsymbol{\Omega}$. Naslednji korak je, da se te odvisnosti znebimo.

11.2 Momenti fluksa: Skalarni fluks in tok

Definiramo dve ključni integralni količini, ki nimata več kotne odvisnosti:

Skalarni fluks $\phi(\boldsymbol{r}, E)$: Je integral kotnega fluksa po vseh smereh. Predstavlja skupno število nevtronov, ki prečkajo površino kroglice z enotskim presekom v enoti časa.

$$\phi(\boldsymbol{r}, E) = \int_{4\pi} \phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \tag{66}$$

Nevtronski tok $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)$: Je vektorska količina, ki opisuje neto smer in gostoto pretoka nevtronov.

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega}\phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \tag{67}$$

11.3 P1 Aproksimacija: Osrednja predpostavka

Ključna ideja za poenostavitev je, da predpostavimo obliko kotne odvisnosti fluksa. V **P1 aproksimaciji** (razvoj po Legendrovih polinomih do prvega reda) predpostavimo, da je kotni fluks vsota dveh delov:

1. Velikega, **izotropnega dela**, ki je enak v vse smeri.
2. Majhnega, **linearno anizotropnega dela**, ki opisuje rahel neto tok nevtronov v eni smeri.

Matematično to zapišemo kot:

$$\phi(\boldsymbol{r}, E, \boldsymbol{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi}\left[\phi(\boldsymbol{r}, E) + 3\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E)\right] \tag{68}$$

Intuitivni pomen P1 aproksimacije: Predstavljajte si oblak megle. Če je megla enakomerna, je vidljivost v vse smeri enaka (izotropno). Če pa piha rahel veter, se bo megla malenkost zgostila v smeri vetra in razredčila v nasprotni smeri. P1 aproksimacija je natanko to: ϕ je povprečna gostota megle, $\boldsymbol{j}$ pa je veter, ki povzroči majhno linearno spremembo gostote s smerjo. **Ta aproksimacija je veljavna, ko je tok $\boldsymbol{j}$ majhen v primerjavi s skalarnim fluksom ϕ**, kar velja v večini reaktorja, stran od meja in močnih absorberjev.

Podobno razvijemo tudi sipalni presek, ki je odvisen od $\cos\Theta_s = \boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega}$:

$$\Sigma_S(E'\to E, \boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega}) \approx \frac{1}{4\pi}\left[\Sigma_{s0}(E'\to E) + 3\boldsymbol{\Omega}'\cdot\boldsymbol{\Omega}\Sigma_{s1}(E'\to E)\right]$$

kjer je Σ_{s0} povprečni (izotropni) sipalni presek, Σ_{s1} pa je povezan s povprečnim kosinusom sipalnega kota $\langle\mu_0\rangle$.

11.4 Izpeljava difuzijske enačbe

Sedaj P1 aproksimacijo vstavimo v stacionarno transportno enačbo (65) in jo integriramo po vseh kotih $d\boldsymbol{\Omega}$. S tem dobimo dve sklopljeni enačbi, eno za skalarni fluks in eno za tok.

1. **Integracija enačbe (0. moment):** Z uporabo integralskih identitet (npr. $\int\boldsymbol{\Omega}d\boldsymbol{\Omega} = 0$) dobimo prvo enačbo:

   $$\nabla\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) + \Sigma_a(\boldsymbol{r}, E)\phi(\boldsymbol{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_{s0}(E'\to E)\phi(\boldsymbol{r}, E')dE' + S_0(\boldsymbol{r}, E) \tag{69}$$

   To je **bilančna enačba**: uhajanje ($\nabla\cdot\boldsymbol{j}$) plus absorpcija ($\Sigma_a\phi$) je enako prispevku od sipanja in virov.

2. **Množenje z $\boldsymbol{\Omega}$ in integracija (1. moment):** Dobimo drugo enačbo, ki povezuje tok in gradient fluksa:

   $$\frac{1}{3}\nabla\phi(\boldsymbol{r}, E) + \Sigma_T(\boldsymbol{r}, E)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E) = \int_0^\infty \Sigma_{s1}(E'\to E)\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, E')dE' \tag{70}$$

Primer izotropnega sipanja in Fickov zakon. Če predpostavimo, da je sipanje v laboratorijskem sistemu izotropno, je $\langle\mu_0\rangle = 0$ in s tem $\Sigma_{s1} = 0$. Enačba (70) se drastično poenostavi v:

$$\frac{1}{3}\nabla\phi + \Sigma_T\boldsymbol{j} = 0 \implies \boldsymbol{j} = -\frac{1}{3\Sigma_T}\nabla\phi$$

To je **Fickov zakon difuzije**.

Intuitivni pomen Fickovega zakona: Ta zakon je univerzalen v naravi (velja za toploto, delce, kemikalije...). Pove nam, da se neto tok delcev ($\boldsymbol{j}$) vedno pojavi v smeri od **višje koncentracije proti nižji**. Matematično to opiše negativni gradient ($-\nabla\phi$). Večja kot je razlika v koncentraciji (gradient), močnejši je tok. Faktor $1/(3\Sigma_T)$ se imenuje **difuzijski koeficient (D)**. Pove nam, kako zlahka se nevtroni premikajo skozi snov. Večja kot je verjetnost trkov (Σ_T), težje se premikajo in manjši je D.

Popravek za anizotropno sipanje. V resnici sipanje ni izotropno ($\langle\mu_0\rangle \neq 0$). Desna stran enačbe (70) ni enaka nič. Z ustreznimi poenostavitvami dobimo modificiran Fickov zakon:

$$\boldsymbol{j} = -D\nabla\phi \quad \text{kjer je} \quad D = \frac{1}{3(\Sigma_T - \Sigma_s\langle\mu_0\rangle)} = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$$

Imenovalec $\Sigma_{tr} = \Sigma_T - \Sigma_s\langle\mu_0\rangle$ je **transportni presek**. Popravi totalni presek za anizotropijo sipanja: sipanje naprej ($\langle\mu_0\rangle > 0$) je manj učinkovito pri spreminjanju smeri nevtrona, zato efektivno zmanjša "upor"proti gibanju.

11.5 Končna oblika difuzijske enačbe

Zadnji korak je, da Fickov zakon (izražen tok $\boldsymbol{j}$) vstavimo nazaj v bilančno enačbo (69). Člen $\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ postane $\nabla\cdot(-D\nabla\phi)$.

Stacionarna difuzijska enačba za nevtrone

$$-\nabla\cdot[D(\boldsymbol{r},E)\nabla\phi(\boldsymbol{r},E)]+\Sigma_a(\boldsymbol{r},E)\phi(\boldsymbol{r},E) = \int_0^\infty \Sigma_{s0}(E'\to E)\phi(\boldsymbol{r},E')dE'+S_0(\boldsymbol{r},E) \quad (71)$$

To je končni rezultat. Je ena sama diferencialna enačba (namesto integrodiferencialne) za eno samo neznanko, skalarni fluks $\phi(\boldsymbol{r},E)$.

Kdaj je difuzijska aproksimacija veljavna? Ker temelji na P1 aproksimaciji, je difuzijska teorija veljavna, ko so izpolnjeni njeni pogoji:

- **Daleč od meja reaktorja in močnih absorberjev** (npr. kontrolnih palic). V bližini teh področij se fluks prostorsko in kotno močno spreminja, zato P1 aproksimacija ne velja.
- **V optično gosti snovi**, kjer je verjetnost sipanja veliko večja od verjetnosti absorpcije ($\Sigma_s \gg \Sigma_a$). To zagotavlja, da veliko trkov žmešašmeri nevtronov in naredi fluks bolj izotropen.
- **Daleč od lokaliziranih virov nevtronov.**

Difuzijska teorija je kljub omejitvam izjemno uspešna pri modeliranju celotne sredice reaktorja, kjer te lokalne nepravilnosti niso dominantne.

12 Reševanje difuzijske enačbe: Metoda energijskih grup

Energijsko odvisna difuzijska enačba je še vedno prezahtevna za direktno reševanje, saj je energija zvezna spremenljivka. Rešitev je **diskretizacija**: celoten energijski spekter razdelimo na končno število G energijskih intervalov, imenovanih **grupe**.

$$E_G < E_{G-1} < \cdots < E_g < E_{g-1} < \cdots < E_1 < E_0$$

Grupa g zajema nevtrone z energijami v intervalu $[E_g, E_{g-1}]$. Tipično je grupa 1 najvišje energije (hitri nevtroni), grupa G pa najnižje (termični nevtroni).

12.1 Definicija grupnih konstant

Sedaj integriramo (povprečimo) difuzijsko enačbo znotraj vsake grupe. Pri tem zvezne funkcije (fluks, preseki) postanejo konstante za vsako grupo.

- **Grupni fluks ϕ_g:** Je integral skalarnega fluksa po energijah znotraj grupe g.

$$\phi_g(\boldsymbol{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\boldsymbol{r}, E) dE$$

- **Grupne konstante (povprečni preseki):** To niso preprosta povprečja. So **s fluksom utežena povprečja**, ker je interakcijska hitrost odvisna tako od preseka kot od števila nevtronov, ki imajo ustrezno energijo.

$$\Sigma_{xg}(\boldsymbol{r}) = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_x(\boldsymbol{r}, E)\phi(\boldsymbol{r}, E)dE}{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi(\boldsymbol{r}, E)dE} = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma_x(E)\phi(E)dE}{\phi_g}$$

- **Presek za prenos med grupami $\Sigma_s^{g' \to g}$:** Opisuje verjetnost, da nevtron, ki začne v grupi g', po sipanju konča v grupi g.

12.2 Večgrupna (Multigroup) difuzijska enačba

Po integraciji in definiciji grupnih konstant dobimo sistem G sklopljenih diferencialnih enačb, eno za vsako grupo.

$$-\nabla \cdot [D_g \nabla \phi_g] + \Sigma_{Tg}\phi_g = \sum_{g'=1}^{G} \Sigma_s^{g' \to g}\phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'}\Sigma_{fg'}\phi_{g'} \quad (72)$$

Kaj za vraga je ta enačba? (Razlaga po delih)
To je preprosto **bilančna enačba za nevtrone v grupi g**:

(Uhajanje) + (Vsi trki) = (Prisipanje iz drugih grup) + (Nastanek pri cepitvi)

Leva stran (IZGUBE iz grupe g):

- $-\nabla \cdot [D_g \nabla \phi_g]$: **Uhajanje (Leakage).** Nevtroni, ki fizično uidejo iz opazovanega volumna. Simbol ∇ se bere "nabla"in predstavlja gradient (prostorsko spremembo).
- $\Sigma_{Tg}\phi_g$: **Totalne interakcije.** Nevtroni, ki so v grupi g in doživijo *kakršenkoli* trk (absorpcijo ali sipanje). Po trku niso več v istem stanju.

Desna stran (PRIDOBITVE v grupo g):

- $\sum_{g'} \Sigma_s^{g' \to g} \phi_{g'}$: **Prisipanje (In-scattering).** Vir nevtronov zaradi sipanja. To so nevtroni, ki so bili prej v *drugih* energijskih grupah (g') in so se po trku upočasnili (ali redko pospešili) v našo opazovano grupo g.
- $\chi_g \sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}$: **Cepitev (Fission).** To je vir nevtronov iz cepitve. Notranja vsota ($\sum_{g'} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'}$) je skupno število vseh nevtronov, ki nastanejo pri cepitvah v reaktorju. Faktor χ_g (fisijski spekter) nam pove, kolikšen delež teh novonastalih nevtronov se rodi direktno z energijo, ki ustreza grupi g.

12.3 Presek za odstranitev (Removal Cross Section)

Enačbo (72) lahko preuredimo. Člen $\Sigma_{Tg}\phi_g$ na levi strani vključuje tudi sipanje znotraj iste grupe ($g \to g$). Če ta člen prestavimo na desno k ostalim prisipanjem, dobimo:

$$-\nabla \cdot [D_g \nabla \phi_g] + (\Sigma_{Tg} - \Sigma_s^{g \to g})\phi_g = \sum_{g' \neq g} \Sigma_s^{g' \to g} \phi_{g'} + \dots$$

Definiramo **presek za odstranitev** $\Sigma_{Rg} = \Sigma_{Tg} - \Sigma_s^{g \to g}$. Ta presek opisuje vse interakcije, ki nevtron **odstranijo** iz grupe g – bodisi z absorpcijo ali s sipanjem v *drugo* grupo. Enačba postane:

$$-\nabla \cdot [D_g \nabla \phi_g] + \Sigma_{Rg} \phi_g = \sum_{g' \neq g} \Sigma_s^{g' \to g} \phi_{g'} + \chi_g \sum_{g'=1}^{G} \nu_{g'} \Sigma_{fg'} \phi_{g'} \tag{73}$$

Ta oblika je pogosto bolj intuitivna: (Uhajanje) + (Odstranitev) = (Prisipanje iz DRUGIH grup) + (Cepitev).

12.4 Primer: Dvogrupna teorija

Najpogostejša poenostavitev sta dve grupi: Grupa 1 (hitri nevtroni) in Grupa 2 (termični nevtroni). **Fizikalne predpostavke:**

- Vsi nevtroni nastanejo pri cepitvi kot hitri: $\chi_1 = 1, \chi_2 = 0$.
- Nevtroni se samo upočasnjujejo. Termični nevtron ne more s trkom postati hiter: $\Sigma_s^{2 \to 1} = 0$.
- Cepitev povzročajo le termični nevtroni: $\Sigma_{f1} \approx 0$.

Enačbi se poenostavita v:

$$\begin{aligned} \text{Grupa 1 (Hitri):} \quad & -\nabla \cdot [D_1 \nabla \phi_1] + \Sigma_{R1} \phi_1 = \nu \Sigma_{f2} \phi_2 \\ \text{Grupa 2 (Termični):} \quad & -\nabla \cdot [D_2 \nabla \phi_2] + \Sigma_{a2} \phi_2 = \Sigma_s^{1 \to 2} \phi_1 \end{aligned}$$

Presek za odstranitev hitrih nevtronov je $\Sigma_{R1} = \Sigma_{a1} + \Sigma_s^{1 \to 2}$. Vidimo življenjski krog: cepitev (v grupi 2) ustvari hitre nevtrone (vir v grupi 1). Hitri nevtroni se upočasnijo ($\Sigma_s^{1 \to 2}$) in postanejo vir za termične nevtrone (vir v grupi 2). Termični nevtroni so absorbirani ali povzročijo nove cepitve.

12.5 Primer: Enogrupna teorija in kritičnost

Če vse nevtrone obravnavamo kot eno samo grupo, dobimo eno enačbo. Za reaktor brez zunanjega vira ($S = 0$) se glasi:

Enogrupna difuzijska enačba za reaktor

$$-\nabla \cdot [D\nabla\phi] + \Sigma_a\phi = \nu\Sigma_f\phi$$

Če je material homogen (lastnosti niso odvisne od kraja), je D konstanta in $\nabla \cdot (D\nabla\phi) = D\nabla^2\phi$.

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = \nu\Sigma_f\phi$$

Pomen členov:

- $-D\nabla^2\phi$: Uhajanje nevtronov. Pomembno v majhnih reaktorjih in blizu robov.
- $\Sigma_a\phi$: Odstranjevanje nevtronov z absorpcijo.
- $\nu\Sigma_f\phi$: Pridobivanje nevtronov s cepitvijo.

Enačbo preuredimo: (Uhajanje) + (Odstranjevanje) = (Pridelki). To je homogena diferencialna enačba, ki ima neničelno rešitev (kar reaktor očitno ima) le, če so parametri sistema (velikost, materiali) v točno določenem razmerju. Da bi našli rešitev za poljuben sistem, vpeljemo **ponoževalni faktor** k_{eff}:

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi = \frac{1}{k_{eff}}\nu\Sigma_f\phi$$

Fizikalni pomen k_{eff}:

$$k_{eff} = \frac{\text{Produkcija nevtronov v eni generaciji}}{\text{Izgube (absorpcija + uhajanje) v prejšnji generaciji}}$$

- $k_{eff} > 1$: **Nadkritičen** sistem. Moč narašča.
- $k_{eff} = 1$: **Kritičen** sistem. Stacionarno stanje, moč je konstantna.
- $k_{eff} < 1$: **Podkritičen** sistem. Moč upada.

Iskanje rešitve difuzijske enačbe za reaktor je iskanje take porazdelitve fluksa ϕ in take vrednosti k_{eff}, ki zadoščata enačbi za dano geometrijo in materiale.

12.6 Matrična oblika in adjungirani fluks

Sistem večgrupnih enačb lahko elegantno zapišemo v matrični obliki:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{\Sigma})\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}$$

kjer so $\mathbf{L}$ (operator uhajanja), $\mathbf{\Sigma}$ (operator trkov) in $\mathbf{M}$ (operator cepitve) matrike, $\boldsymbol{\phi}$ pa je vektor grupnih fluksov.

Vsakemu takemu sistemu pripada tudi **adjungirana enačba**:

$$(\mathbf{L}^* + \mathbf{\Sigma}^*)\boldsymbol{\phi}^* = \frac{1}{k_{eff}}\mathbf{M}^*\boldsymbol{\phi}^*$$

Rešitev te enačbe je **adjungirani fluks** $\boldsymbol{\phi}^*$, ki ima globok fizikalni pomen.

Intuitivni pomen adjungiranega fluksa:
Adjungirani fluks $\phi_g^*(\boldsymbol{r})$ se pogosto imenuje **pomembnost nevtrona (neutron importance)**. Pove nam, **koliko bo en nevtron, ki se nahaja na mestu $\boldsymbol{r}$ z energijo v grupi g, v povprečju prispeval k populaciji nevtronov (in s tem k moči reaktorja) v daljni prihodnosti.**

- **Situacijsko:** Hiter nevtron v sredini reaktorja, obdan z gorivom, ima visoko pomembnost, ker bo verjetno povzročil cepitev. Termični nevtron na samem robu reaktorja, ob moderatorju, ima nizko pomembnost, ker bo najverjetneje ušel iz sistema, preden bo povzročil cepitev.
- Adjungirani fluks je zato največji v sredini reaktorja in pri energijah, ki so najpomembnejše za povzročanje cepitev. Je ključno orodje v perturbacijski teoriji, ki ocenjuje, kako majhne spremembe v reaktorju (npr. vstavitev kontrolne palice) vplivajo na njegovo kritičnost.