Exercícios de Cálculo II – lista 1

Prof. Emerson

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

1. Encontre as dimensões de um cilindro circular reto, de área total igual a 50 cm^2, de modo que o volume seja máximo.

2. Cinqüenta animais ameaçados de extinção são colocados em uma reserva. Decorridos *t* anos, a população *x* desses animais é estimada por:

$$x(t) = 50\frac{t^2 + 6t + 30}{t^2 + 30}$$

Em que instante essa população animal atinge seu máximo? Quanto ele vale?

3. Determine as dimensões do cone circular reto de maior volume inscrito numa esfera de raio r = 3 cm.

4. Um recipiente cilíndrico, aberto em cima, deve ter a capacidade de 375π cm^3. O custo do material usado para a base do recipiente é de R$ 0,15 por cm^2 e o custo do material usado na lateral é de R$ 0,05 por cm^2. Se não há perda de material, determine as dimensões que minimizam o custo do material para construí-lo.

5. Uma estação de rádio fez um levantamento dos hábitos dos ouvintes entre 17h e meia-noite. A pesquisa mostra que a porcentagem de adultos sintonizados na estação *x* horas após as 17h é:

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240\right).$$

   a) Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem mais ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?
   b) Em que instante, entre 17h e meia-noite, existem menos ouvintes sintonizados na estação? Qual é a porcentagem de ouvintes neste momento?

6. Quando tossimos, o raio de nossa traquéia diminui, afetando a velocidade do ar que passa nesse órgão. Sendo r_0 e r, respectivamente, o raio da traquéia na situação normal e no momento da tosse, a relação entre a velocidade v e r é dada por $v(r) = ar^2\,(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Calcule o raio **r** que permite a maior velocidade **v**.

7. Se um dos lados de um campo retangular for um rio, ache as dimensões do maior campo retangular que pode ser fechado usando 240 m de cerca para os outros três lados.

8. Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, de dimensões *a* e *b*, com um lado comum *a*. Se cada pasto deve medir 400 m^2 de área, determinar as dimensões *a* e *b*, de forma que o comprimento da cerca seja mínimo.

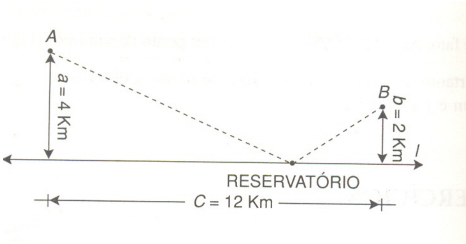
9. Ache a área do maior retângulo que possa ser inscrito numa circunferência de raio 10.

10. Seja *s* uma reta que passa pelo ponto (4,3) formando um triângulo com os eixos coordenados positivos. Qual a equação de *s* para que a área desse triângulo seja mínima.

11. Uma caixa sem tampa, de base quadrada, deve ser construída de forma que o seu volume seja 2500 m^3. O material da base vai custar R$ 1200,00 por m^2 e o material dos lados R$ 980,00 por m^2. Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo do material seja mínimo.

12. Ao planejar um restaurante, estima-se que se houver de 40 a 80 lugares, o lucro será de R$ 16,00 por lugar. Se, contudo, o número de lugares for acima de 80, o lucro bruto diário por lugar decrescerá de R$ 0,08 vezes o número de lugares acima de 80. Qual deverá ser o número de assentos para o lucro diário seja máximo.

13. Duas indústrias A e B necessitam de água potável. A figura a seguir esquematiza a posição das indústrias, bem como a posição de um encanamento retilíneo *l*, já existente. Em que ponto do encanamento deve ser instalado um reservatório de modo que a metragem de cano a ser utilizada seja mínima?

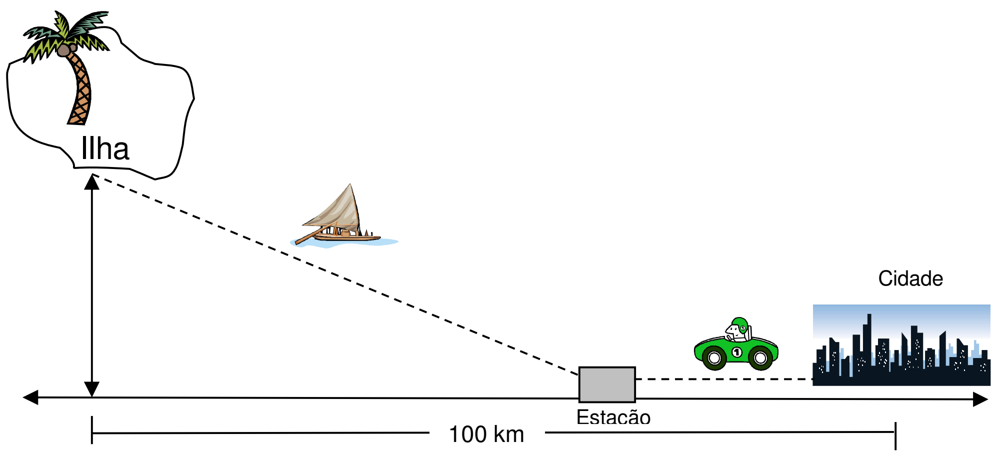


14. Um canhão, situado no solo, é posto sob um ângulo de inclinação α. Seja *L* o alcance do canhão, dado por $L = \dfrac{2v^2}{g} sen\,\alpha . cos\,\alpha$, onde *v* e *g* são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo?

15. Deseja-se construir um tanque de base quadrada, sem tampa, que comporte 32 m^3 de água. Se o objetivo é usar a menor quantidade possível de cimento no revestimento das paredes do tanque, quais deverão ser as medidas da largura, comprimento e profundidade do tanque?

16. Determine o raio da base de uma lata cilíndrica de volume 0,5 litros (500 cm^3) de modo que o material gasto na fabricação da lata seja mínimo.

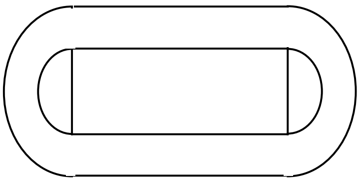
17. Uma agência de turismo está organizando um serviço de barcos, de uma ilha situada a *40 km* de uma costa quase reta, para uma cidade que dista *100 km*, como mostra a figura a seguir. Se o barco tem uma velocidade de *18 km/h (aproximadamente 10 nós)* e os carros tem uma velocidade média de *50 km/h*, onde deverá estar situada a estação dos barcos (*píer) em relação* a cidade a fim de tornar a viagem a mais rápida possível? Qual o tempo total da viagem?



18. Há algumas semanas o Departamento de Estradas vem registrando a velocidade do trânsito em certa saída de uma auto-estrada. Os dados indicam que, em um dia normal, entre 13 horas e 18 horas, a velocidade do trânsito é de, aproximadamente, $v(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20\,km/h$, onde *t* representa o número de horas transcorridas após o meio-dia. A que horas (entre 13 *h* e 18 *h*) o trânsito flui mais rapidamente? E mais vagarosamente?

19. O custo total *C* para fazer *x* unidades de certo artigo é dado por $C = 0{,}005x^3 + 0{,}45x^2 + 12{,}75x$. Todas as unidades feitas são vendidas a *R*$ 36, 75 por unidade. O lucro *P* é, então, dado por $P = 36{,}75x - C$. Determine o número de unidades que devem ser feitas de modo a obter o lucro máximo.

20. Uma pista de atletismo com comprimento total de 400 m, consiste de 2 semicírculos e 2 seguimentos retos (*veja figura*). Determine as dimensões da pista de tal forma que a área limitada pelos segmentos retos e o diâmetro do semicírculo seja máxima.



21. Uma cerca de 1 m de altura está situada a uma distancia de 1 m da parede lateral de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

22. Um campo retangular com uma área de 2700 m^2 deve ser fechado e uma cerca adicional deve ser usada para dividi-lo ao meio. O custo da cerca do meio é de R$ 12,00 por metro linear e ao longo dos lados a cerca custa R$ 18,00 por metro linear. Ache as dimensões do campo de modo que o custo da cerca seja mínimo.

23. Um fazendeiro tem 200 bois, cada um pesando 300 kg. Até agora ele gastou R$ 380.000,00 para criar os bois e continuará gastando R$ 2,00 por dia para manter um boi. Os bois aumentam de peso a uma razão de 1,5 kg /dia. Seu preço de venda, hoje, é de R$ 18,00 o quilo, mas o preço cai R$ 0,05 por dia. Quantos dias deveria o fazendeiro aguardar para maximizar seu lucro?

Problemas de Taxas Relacionadas

1. Uma pedra jogada em um lago emite ondas circulares, cujo raio cresce a uma taxa constante de 3 m/s. Com que rapidez estará variando a área englobada pela onda crescente ao final de 10 segundos? (Resposta: $\frac{dA}{dt} = 180\pi\ m^2/s$)

2. Pela ruptura de um tanque, uma mancha de óleo espalha-se em forma de um círculo, cuja área cresce a uma taxa constante de 6 km^2/h. Com que rapidez estará variando o raio da mancha crescente quando a área for de 9 km^2? (Resposta: $\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} km/h$)

3. Um balão esférico é inflado de tal forma que o volume cresce a taxa de 3 m^3/min. Com que rapidez o diâmetro do balão estará crescendo quando o raio dor de 1 m? (Resposta: $\frac{dd}{dt} = \frac{3}{2\pi} m/\min$)

4. Uma escada de 17 m está apoiada em uma parede. Se a base da escada for puxada ao longo do chão, afastando-se da parede a uma taxa constante de 5 m/s, com que rapidez o topo da escada estará movendo-se para baixo na parede quando ela estiver 8 m acima do solo? (Resposta: $\frac{dy}{dt} = -\frac{75}{8} m/s$)

5. Um foguete subindo verticalmente é acompanhado por uma estação de radar no solo a 5 km da rampa de lançamento. Com que rapidez o foguete estará subindo quando a sua altura for 4 km e a sua distância da estação do radar estiver crescendo a uma taxa de 2000 km/h? (Resposta: $\frac{dh}{dt} = 500\sqrt{41} km/h$)

6. Uma câmera foi montada em um ponto a 3000 m da base da rampa de lançamento de um foguete. O foguete sobre verticalmente e a câmera tira uma serie de fotos dele. Como o foguete está subindo, o ângulo de elevação da câmera terá que variar segundo uma certa taxa para manter o foguete à vista. Com que taxa estará variando a distância entre a câmera e o foguete, quando ele estiver a 4000 m de altura e subindo verticalmente a 880m/s? (Resposta: $\frac{dd}{dt} = 704 m/s$)

7. Um tanque cônico com o vértice para baixo e com água tem um raio de 10 m no topo e uma altura de 24 m. Se a água fluir dentro do tanque a uma taxa de 20 m^3/min, com que velocidade a profundidade da água estará crescendo quando ela tiver 16 m de profundidade? (Resposta: $\frac{dh}{dt} = \frac{9}{20\pi} m/\min$)

8. Grãos caem de uma calha de escoamento a uma taxa de 8 m^3/min, formando uma pilha cônica cuja altura é sempre o dobro do seu raio. Com que rapidez a altura da pilha está crescendo no momento em que a altura é de 6 m. (Resposta: $\frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} m/\min$)

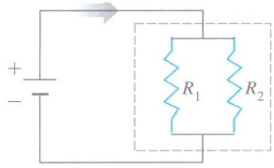
9. Um homem, com 6 pés de altura, está caminhando a uma taxa de 3 pés por segundo em direção a um poste de iluminação, com 18 pés de altura. Com que taxa está variando o comprimento da sombra? (Resposta: $\frac{ds}{dt} = -\frac{3}{2} pés/s$)

10. A base *x* e a altura *y* de um retângulo estão variando com o tempo. Em um dado instante, *x* mede 3 *cm* e cresce a uma taxa de 2 *cm/s,* enquanto *y* mede 4 *cm* e decresce a uma taxa de 1*cm/s.* Determine, nesse instante a taxa de variação da área A do retângulo em relação ao tempo.

11. Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresce a uma taxa de 8 cm^3/mim. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro.

12. A impedância Z (ohms) de um circuito em série está relacionada com a resistência R (ohms) e a reatância X (ohms) pela equação $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$. Se R aumenta a 3 ohms/s e X diminui a 2 ohms/s, a que taxa Z varia quando R =10 ohms e X = 20 ohms ?

13. Se duas resistências com R_1 e R_2 ohms são conectadas em paralelo em um circuito elétrico, resultando em uma resistência R ohms, o valor de R será dado pela equação $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. R_1 diminui a uma taxa de 1 ohm/s e R_2 aumenta a uma taxa de 0,5 ohm/s, a que taxa R varia quando R_1 =75 ohms e R_2 = 50 ohms ?



14. Um menino empina um papagaio a 300 pés de altura; o vento afasta a pipa horizontalmente em relação ao menino a uma velocidade de 25 pés/s. A que taxa ele deve soltar a linha, quando a pipa está a 500 pés de distancia? *Dica:* Despreze a altura do menino.

15. A areia cai de uma esteira transportadora a taxa de 10 m^3/mim no topo do monte cônico. A altura do monte sempre tem três oitavos do diâmetro da base. A que taxa variará (a) a altura e (b) o raio da base quando o monte tiver 4 m de altura?

Nota: $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$