Trabalho de Simulação AD 2019/2

Joyce Brum, Thiago Outeiro, Gustavo Luis Carvalho

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Introdução

Durante a disciplina de Avaliação de Desempenho, nos foi ensinado diversos tipos de fila, para mostrar os conhecimentos obtidos, nos foi proposto realizar este trabalho final.

Este relatório tem por objetivo reportar os desafios e resultados obtidos no desenvolvimento de cada uma das análises feitas.

Todo o código desenvolvido pode ser encontrado no repositório público https://github.com/joycebrum/Ad-Simulacao .

Desenvolvimento

Para começarmos o projeto teríamos que começar criando a simulação, porém para isso foi necessário decidir em qual linguagem iríamos desenvolver. Após muita arguição, a linguagem escolhida foi o python, devido ao seu uso comum em desenvolvimento de algoritmos científicos, e de seu módulo numpy, com o qual conseguiríamos facilmente gerar números aleatórios de acordo com a distribuição exponencial.

Começamos o desenvolvimento tentado fazer a simulação o mais genérica possível para que fosse possível adicionar as especificações depois com facilidade, adicionamos 2 filas de clientes, uma prioritária e uma não prioritária, e caso não houvesse prioridade, apenas uma delas seria usada, que no caso foi escolhida a de baixa prioridade.

Nosso primeiro desafio foi descobrir como fazer a chegada dos clientes, visto que eles não poderiam chegar de maneira completamente aleatória na simulação. Para resolver este problema, decidimos que uma nova chegada era gerada, sempre que um cliente chegava, com isso percebemos que apenas as filas de clientes não eram o suficiente, mas precisaríamos também de filas de eventos, contendo 2 tipos de eventos: chegada e saída.

Um evento de chegada cria um cliente e o coloca na fila da sua respectiva prioridade, caso haja preempção neste algoritmo também verificamos se quem está executando têm menos prioridade que este novo cliente. Nesse momento, a próxima chegada é gerada.

São dois tipos de eventos de chegada possíveis: uma chegada da classe prioritária e uma chegada da classe não prioritária, cada uma seguindo o seu próprio fluxo poisson. Sempre que um evento de chegada de uma dada classe é tratado, a próxima chegada dessa classe é calculada.

Já o evento de saída, apenas calcula os tempos no servidor e tempo total deste cliente e coloca o próximo cliente para o servidor (caso haja um próximo).

Cálculo trabalho pendente

Gerando a tabela descrita no enunciado da questão 5, foi possível perceber que as duas formas de calcular o trabalho pendente sempre resultam no mesmo valor, provando sua equivalência.

Sabendo que $\rho E[X_r] = \sum \rho_i E[X_{ri}]$ e $\rho = \sum \rho_i$, calcular $E[U] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho}$ é trivial.

Já o cálculo de $E[U] = E[N_{q1}]E[X_1] + E[N_{q2}]E[X_2] + \rho E[Xr]$ é um pouco mais complexo.

Para isso foi necessário separar para cada um dos 3 casos:

1. Basta fazer $E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}]$, sendo $E[N_{q1}] = \lambda_1 E[W_1]$ e $E[N_{q2}] = \lambda_2 E[W_2]$. Como a disciplina de atendimento é independente da classe $E[W_1] = E[W_2] = E[W]$.

   $E[W] = \rho E[Xr]/(1 - \rho_1 - \rho_2) = \frac{\rho_1/\mu_1 + \rho_2/\mu_2}{1 - \rho_1 - \rho_2}$ e

   $E[U] = E[N_{q1}]E[X_1] + E[N_{q2}]E[X_2] + \rho E[Xr]$

   $E[U] = \rho E[X_r] + (\rho_1 + \rho_2)E[W]$ sendo que, como a exponencial tem perda de memória, $\rho E[Xr] = \rho_1 E[X_1] + \rho_2 E[X_2]$.
2. Fila com distinção de classe e sem preempção: para calcular $E[N_{qi}]=\lambda_i E[W_i]$, sendo $E[W_1] = \rho E[Xr]/(1 - \rho_1) = \frac{\left(\sum_{i=0}^{1} \rho_i E[X_{ri}]\right)}{(1-\rho_1)}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho\, E[Xr]}{1-\rho}$
3. Fila com distinção de classe e com preempção: para calcular $E[N_{qi}]=\lambda_i E[W_i]$, sendo $E[W_1] = \rho_1 E[X_{r1}]/(1 - \rho_1)$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho\, E[Xr] + \rho_1 E[X_2]}{1-\rho}$

Esperança

O cálculo do número médio de pessoas do sistema parte do grafo *Número de pessoas* por *tempo*, de forma que $Número\ médio\ no\ sistema = \frac{área}{tempo\ Total}$.

O cálculo da área foi feito armazenando, para cada par ordenado (x, y), sendo x um instante de tempo e y o número de clientes no sistema naquele instante de tempo, armazenados em dois vetores, um com os instantes (Clientes_X) e outro com o número de clientes (Clientes_Y).

for i in range (1, len(Clientes_X)):

area = *area* + (Clientes_X[i] - Clientes_X[i-1])*Clientes_Y[i]

O tempo médio no sistema (E[T]) pode ser calculado usando o resultado por little:

$$N = \lambda T = \frac{número\ fregueses\ servidos}{tempo\ total} * T = \frac{área}{tempo\ total}$$

$$T = \frac{tempo\ total}{numero\ fregueses\ servidos} * N = \frac{área}{numero\ fregueses\ servidos}$$

A mesma lógica foi aplicada para calcular, por exemplo, o número médio de pessoas na fila de espera: $E[N_{q1}]$ e $E[N_{q2}]$. Para calcular, usa-se o grafo de *Número de clientes na fila de espera da classe i* por *tempo*, de forma que $E[N_{qi}] = \frac{área}{tempo\ total}$.

Intervalo de Confiança

Para o cálculo do intervalo de confiança foi usada a seguinte fórmula: $IC = tc \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ onde s é o desvio padrão amostral, n é o número de amostras e tc é a constante encontrada na tabela de t-student, para tal utilizamos 120 graus de liberdade e 95% de confiabilidade.

Depuração

O modelo de depuração do simulador foi tal que em cada instante de tempo, as informações do evento atual eram exibidas, além de exibir as informações gerais do sistema.

Três tipos de eventos podiam ser exibidos:

- Um evento de chegada:

```
--------------------Instante:  595.9955365287889 ----------------------------

o cara de id:  66 chegou
prioridade:  1  arrivalTime:  596.0  timeRemaining:  -1


o cara de id:  66 executou
prioridade:  1  arrivalTime:  596.0  timeRemaining:  0.07


Fila Alta Prioridade: [ ]
Fila Baixa Prioridade: [ ]
Servidor: {C: 595.9955365287889 , Xr: 0.07123730705228791 }
```

- Um de saída:

```
---------------------Instante:  596.0667738358412 ----------------------------

o cara de id:  66 saiu
prioridade:  1  arrivalTime:  596.0  timeRemaining:  0


Fila Alta Prioridade: [ ]
Fila Baixa Prioridade: [ ]
Servidor ocioso
```

- E uma interrupção no caso:

```
---------------------Instante:  365.54078347805074 ----------------------------

o cara de id:  52 chegou
prioridade:  0  arrivalTime:  365.54  timeRemaining:  -1


o cara de id:  52 interrompeu
prioridade:  0  arrivalTime:  365.54  timeRemaining:  -1


o cara de id:  51 foi interrompido
prioridade:  1  arrivalTime:  362.32  timeRemaining:  4.87


o cara de id:  52 executou
prioridade:  0  arrivalTime:  365.54  timeRemaining:  3.17


Fila Alta Prioridade: [ ]
Fila Baixa Prioridade: [ {C: 362.3242279580472 , Xr: 4.874183175660327 } ]
Servidor: {C: 365.54078347805074 , Xr: 3.1691061967022733 }
```

O *timeRemaining* representa o trabalho pendente associado ao cliente. Se esse valor for -1 é porque o seu tempo de serviço ainda não foi gerado e ele nunca foi executado antes.

O campo *arrivalTime* é o tempo de chegada do cliente no sistema e *prioridade* é 0 caso o cliente seja de alta prioridade e 1 caso seja de baixa prioridade.

Na fila e o no servidor, apenas dois campos de cada clientes são exibidos: *C* sendo o instante de chegada do cliente no sistema e *Xr* sendo o trabalho residual que este ainda tem que executar.

Resultados

Abaixo é possível observar os resultados obtidos em cada uma das questões.

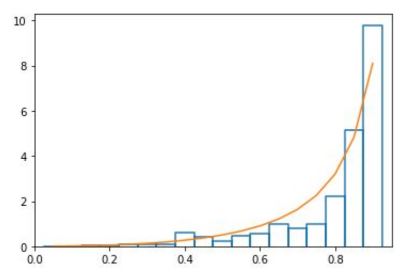
Questão 3

Através de simulação foram obtidos os seguintes grafos de *Número de Clientes na fila* por *taxa*:

Clientes na fila vs Taxa

Cenário 1

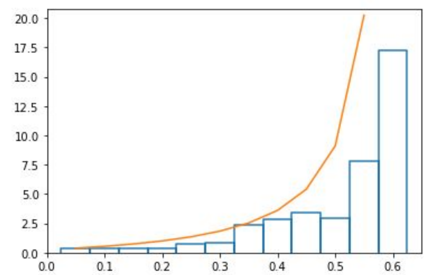
```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.02421771419063655
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.02645876896362421
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.06769234196318728
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.039313138860884285
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.089863524843627
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.05737941422005324
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.07055369321347534
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.2553246386477642
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.11715060897435428
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.1307650840786304
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.13301967717615226
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.1399929292929295
para lambda1 =  0.65  intervalo de confiança de +/- 0.20727785649592959
para lambda1 =  0.7  intervalo de confiança de +/- 0.15353477572785573
para lambda1 =  0.75  intervalo de confiança de +/- 0.19754850802180812
para lambda1 =  0.8  intervalo de confiança de +/- 0.31688600832421715
para lambda1 =  0.85  intervalo de confiança de +/- 0.5319441294398302
para lambda1 =  0.9  intervalo de confiança de +/- 0.592245465162687
```



Nesse cenário foi possível ver que a simulação se manteve muito próxima do valor analítico esperado, com bons intervalos de confiança.

Cenário 2

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.1771897799885947
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.10593121977241735
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.1285897079885491
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.12243329457478237
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.1611435375004323
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.17814787899703716
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.30507883606301056
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.34406518341670506
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.45384194289292157
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.3352538791524342
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.7628767418207048
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 1.059390520159361
```



Nos cenários 1 e 2 (tendo em vista que ambos são exponenciais) foram usados os seguintes cálculos análiticos:

$$E[W] = E[N_{q1}]E[X_1] + E[N_{q2}]E[X_2] + \rho_1 E[X_1] + \rho_2 E[X_2]$$

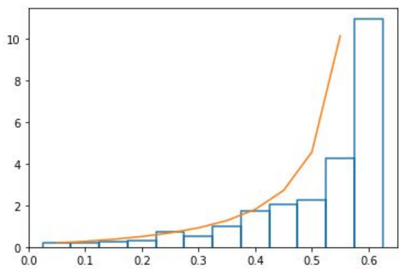
$$E[W] = \frac{\rho_1 E[X_1] + \rho_2 E[X_2]}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

$$E[N_{q1}] = \lambda_1 E[W_1] \text{ e } E[N_{q2}] = \lambda_2 E[W_2]$$

Nesse cenário é possível perceber que a simulação também se manteve bem próxima do esperado pelo cálculo analítico.

Cenário 3

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.10281294965353488
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.08193711231190388
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.10084160917763726
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.1082183891114664 7
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.15207373358204707
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.1332066544825047
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.2081473122670897
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.2282235051512254
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.32372224588584125
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.2758999585641365
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.4039234227381235
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.8650868194397694
```



No cálculo do número de clientes da fila com tempo de serviço determinístico é importante saber que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = 1/\mu_i$ e $E[X_i^2] = 1/\mu_i^2$.

Dessa forma, $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{1}{2\mu}$ e $E[W] = \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}$.

Como $E[W_1] = E[W_2]$ por não ter distinção de classes na disciplina de atendimento, pode-se substituí-los por E[W] e, após algumas manipulações algébricas temos:

$$E[W] = \frac{\frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}}{1-\rho_1-\rho_2} \text{ e } E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}] = (\lambda_1 + \lambda_2)E[W]$$

Cenário 4

No cálculo do número de clientes da fila com tempo de serviço uniforme, sendo o serviço da primeira classe Uniforme(a_1, b_1) e o serviço da segunda classe Uniforme(a_2, b_2) é importante saber que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = \frac{a_i+b_i}{2}$ e $E[X_i^2] = \frac{1}{3}\left(a_i^2 + a_i b_i + b_i^2\right)$

Dessa forma, $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{\left(a_i^2+a_i b_i+b_i^2\right)}{3(a_i+b_i)}$.

$$E[W] = \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \frac{\rho_1\left(a_1^2+a_1 b_1+b_1^2\right)}{3(a_1+b_1)} + \frac{\rho_2\left(a_2^2+a_2 b_2+b_2^2\right)}{3(a_2+b_2)} .$$

Como $E[W_1] = E[W_2]$ por não ter distinção de classes na disciplina de atendimento, pode-se substituí-los por E[W] e, após algumas manipulações algébricas temos:

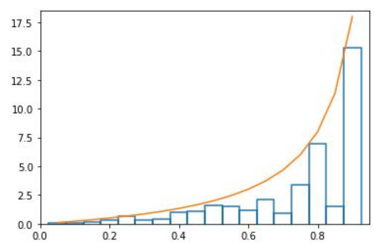
$$E[W] = \frac{\frac{\rho_1(a_1{}^2+a_1b_1+b_1{}^2)}{3(a_1+b_1)} + \frac{\rho_2(a_2{}^2+a_2b_2+b_2{}^2)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1-\rho_2}$$, sendo $\rho_i = \lambda_i \frac{a_i+b_i}{2}$.

Por fim, $E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}] = (\lambda_1 + \lambda_2)E[W]$

Tempo Espera vs Taxa

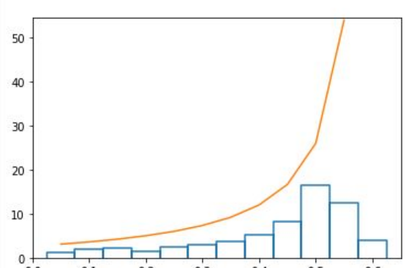
Cenário 1

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.3142663231183813
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.268024583182643
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.24729538626116973
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.21625228950255998
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.34031315196957945
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.22602128955439815
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.2945450054416867
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.4313950300451859
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.41623744681044056
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.44742689924944695
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.39261530474728806
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.3422435723318574
para lambda1 =  0.65  intervalo de confiança de +/- 0.3039524365350962
para lambda1 =  0.7  intervalo de confiança de +/- 0.23536104546801676
para lambda1 =  0.75  intervalo de confiança de +/- 0.4980497820591078
para lambda1 =  0.8  intervalo de confiança de +/- 0.786045873683394
para lambda1 =  0.85  intervalo de confiança de +/- 0.24148397056953974
para lambda1 =  0.9  intervalo de confiança de +/- 0.8730739691891489
```



Cenário 2

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.4311613811522171
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.5313229205464398
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.6589897629968877
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.3832340073195946
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.5337677250180733
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.44295323698044153
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.453889550720253
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.5349953799287845
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.8171387562152933
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 1.3587668625602312
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.8996839885387692
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.4807630745960529
```



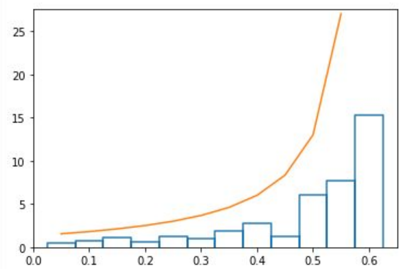
Nos cenários 1 e 2 (tendo em vista que ambos são exponenciais) foram usados os seguintes cálculos analíticos para estimar o tempo médio de espera na fila:

$$E[W] = E[N_{q1}]E[X_1] + E[N_{q2}]E[X_2] + \rho_1 E[X_1] + \rho_2 E[X_2]$$

$$E[W] = \frac{\rho_1 E[X_1] + \rho_2 E[X_2]}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

Cenário 3

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.27875429446204164
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.34565900623659257
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.34224302909166243
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.22125422777696285
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.3583054670101947
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.2988597438960114
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.39476307575211905
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.3862617979269242
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.27367760242356076
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.8028405385432105
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.7030716561047128
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.7603902126396955
```



Para calcular o tempo de espera na fila quando o tempo de serviço determinístico é importante saber que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = 1/\mu_i$ e $E[X_i^2] = 1/\mu_i^2$.

Dessa forma, $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{1}{2\mu}$ e $E[W] = \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}$.

Como $E[W_1] = E[W_2]$ por não ter distinção de classes na disciplina de atendimento, pode-se substituí-los por E[W] e, após algumas manipulações algébricas temos:

$$E[W] = \frac{\frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}}{1 - \rho_1 - \rho_2}$$

O E[W], como visto no cenário 3 do número de clientes na fila anteriormente, temos:

$$E[W] = \frac{\frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}}{1 - \rho_1 - \rho_2} .$$

Cenário 4

No cálculo do tempo de espera na fila com tempo de serviço uniforme, sendo o serviço da primeira classe Uniforme(a_1, b_1) e o serviço da segunda classe Uniforme(a_2, b_2) é importante saber que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = \frac{a_i+b_i}{2}$ e $E[X_i^2] = \frac{1}{3}\left(a_i^2 + a_ib_i + b_i^2\right)$

Dessa forma, $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{\left(a_i^2+a_ib_i+b_i^2\right)}{3(a_i+b_i)}$.

$$E[W] = \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \frac{\rho_1\left(a_1^2+a_1b_1+b_1^2\right)}{3(a_1+b_1)} + \frac{\rho_2\left(a_2^2+a_2b_2+b_2^2\right)}{3(a_2+b_2)} .$$

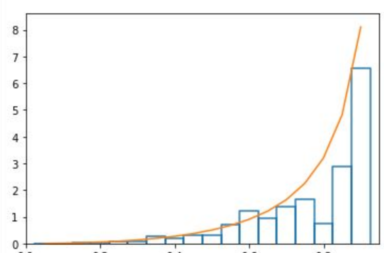
$$E[W] = \frac{\frac{\rho_1\left(a_1^2+a_1b_1+b_1^2\right)}{3(a_1+b_1)} + \frac{\rho_2\left(a_2^2+a_2b_2+b_2^2\right)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1-\rho_2}$$, sendo $\rho_i = \lambda_i\frac{a_i+b_i}{2}$.

Questão 4

Clientes na fila vs Taxa

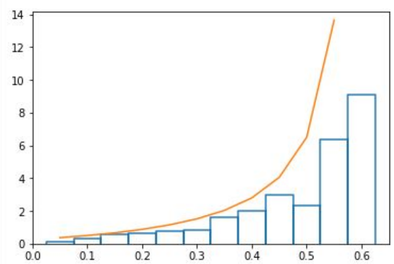
Cenário 1

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.019750545596905915
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.030879423444279474
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.036834633672209044
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.07305227659940484
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.06486548441902468
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.05081786276066293
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.15448060057215632
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.12115651554150127
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.12324422007158875
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.11726763088843166
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.16231208354752522
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.294816674274682
para lambda1 =  0.65  intervalo de confiança de +/- 0.18588554754767148
para lambda1 =  0.7  intervalo de confiança de +/- 0.23179280804409516
para lambda1 =  0.75  intervalo de confiança de +/- 0.26226023703151446
para lambda1 =  0.8  intervalo de confiança de +/- 0.1874228260244734
para lambda1 =  0.85  intervalo de confiança de +/- 0.3387460732625742
para lambda1 =  0.9  intervalo de confiança de +/- 0.5475731712467887
```



Cenário 2

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.07003133408471245
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.12471613476957771
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.14781475798677354
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.14952681959064593
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.15979754470934102
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.18749400123125318
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.2701296561884311
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.28640026012602826
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.3285933859593752
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.3322014817857807
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.5917906863098353
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.5522072054172099
```

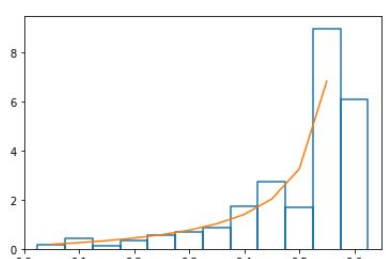


Nos cenários 1 e 2, como ambos são exponenciais, o cálculo do número de clientes na fila de espera será o mesmo.

Sendo $E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}]$, com $E[N_{qi}] = \lambda_i E[W_i]$ e $E[W_1] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho E[X_r]}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Cenário 3

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.02 para a classe 1 e de +- 0.09  para a classe 2
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.05 para a classe 1 e de +- 0.16  para a classe 2
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.04 para a classe 1 e de +- 0.06  para a classe 2
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.06 para a classe 1 e de +- 0.1  para a classe 2
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.07 para a classe 1 e de +- 0.1  para a classe 2
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.08 para a classe 1 e de +- 0.14  para a classe 2
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.1 para a classe 1 e de +- 0.1  para a classe 2
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.13 para a classe 1 e de +- 0.18  para a classe 2
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.11 para a classe 1 e de +- 0.29  para a classe 2
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.13 para a classe 1 e de +- 0.24  para a classe 2
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.14 para a classe 1 e de +- 0.43  para a classe 2
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.16 para a classe 1 e de +- 0.58  para a classe 2
```



Para calcular o tempo de espera na fila quando o tempo de serviço determinístico é importante saber que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = 1/\mu_i$ e $E[X_i^2] = 1/\mu_i^2$.

Dessa forma, $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{1}{2\mu}$ e $E[W] = \rho_1 W_1 + \rho_2 W_2 + \frac{\rho_1}{2\mu_1} + \frac{\rho_2}{2\mu_2}$.

Sabendo que em uma fila com distinção de classes com prioridade da classe 1 sobre a classe 2, tem-se que: $E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}]$, com $E[N_{qi}] = \lambda_i E[W_i]$ e $E[W_1] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho E[X_r]}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Sabendo que $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ e substituindo os valores conhecidos tem-se $E[W_1] = \frac{\frac{\rho_1}{2\mu_1}+\frac{\rho_2}{2\mu_2}}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \frac{\rho_1}{2\mu_1}+\frac{\rho_2}{2\mu_2}}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Cenário 4

Para o cálculo do Número de clientes na fila de espera usando um tempo de serviço para a classe 1 Uniforme(a_1,b_1) e Uniforme(a_2,b_2) para a classe 2, é importante salientar que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = \frac{a_i+b_i}{2}$, $E[X_i^2] = \frac{1}{3}\left(a_i^2 + a_i b_i + b_i^2\right)$ e $E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{\left(a_i^2+a_i b_i+b_i^2\right)}{3(a_i+b_i)}$

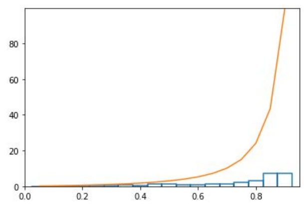
Sabendo que em uma fila com distinção de classes com prioridade da classe 1 sobre a classe 2, tem-se que: $E[N_q] = E[N_{q1}] + E[N_{q2}]$, com $E[N_{qi}] = \lambda_i E[W_i]$ e $E[W_1] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho E[X_r]}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Sabendo que $\rho_i = \lambda_i \frac{a_i+b_i}{2}$ e substituindo os valores conhecidos tem-se $E[W_1] = \frac{\rho_1 \frac{\left(a_1^2+a_1 b_1+b_1^2\right)}{3(a_1+b_1)} + \rho_2 \frac{\left(a_2^2+a_2 b_2+b_2^2\right)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1] + \rho_1 \frac{\left(a_1^2+a_1 b_1+b_1^2\right)}{3(a_1+b_1)} + \rho_2 \frac{\left(a_2^2+a_2 b_2+b_2^2\right)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Tempo Espera vs Taxa

Cenário 1

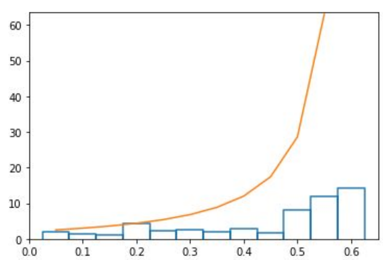
```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.56 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.27 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.26 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.2 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.33 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.24 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.45 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.27 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.52 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.37 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.2 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.17 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.65  intervalo de confiança de +/- 0.26 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.7  intervalo de confiança de +/- 0.28 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.75  intervalo de confiança de +/- 0.29 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.8  intervalo de confiança de +/- 0.39 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.85  intervalo de confiança de +/- 0.87 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
para lambda1 =  0.9  intervalo de confiança de +/- 0.68 para a classe 1 e de +- 0.0  para a classe 2
```



Nesse cenário o tempo de espera foi muito menor do que o tempo de espera estimado pelo método analítico

Cenário 2

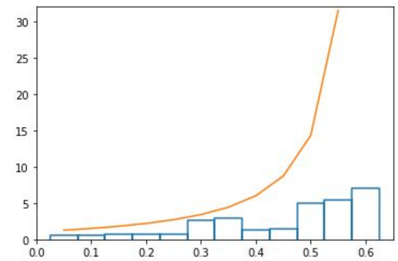
```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.18 para a classe 1 e de +- 0.48  para a classe 2
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.22 para a classe 1 e de +- 0.34  para a classe 2
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.15 para a classe 1 e de +- 0.19  para a classe 2
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.33 para a classe 1 e de +- 0.45  para a classe 2
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.46 para a classe 1 e de +- 0.23  para a classe 2
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.25 para a classe 1 e de +- 0.29  para a classe 2
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.18 para a classe 1 e de +- 0.31  para a classe 2
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.26 para a classe 1 e de +- 0.22  para a classe 2
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.15 para a classe 1 e de +- 0.13  para a classe 2
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.27 para a classe 1 e de +- 0.61  para a classe 2
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.3 para a classe 1 e de +- 1.12  para a classe 2
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.29 para a classe 1 e de +- 0.73  para a classe 2
```



Apesar de ter mostrado uma diferença muito grande nas últimas taxas em relação ao esperado pelo método analítico, o comportamento do simulador demonstrou uma tendência a crescer, mesmo que não possuísse a mesma velocidade de crescimento.

Cenário 3

```
para lambda1 =  0.05  intervalo de confiança de +/- 0.12 para a classe 1 e de +- 0.28  para a classe 2
para lambda1 =  0.1  intervalo de confiança de +/- 0.15 para a classe 1 e de +- 0.19  para a classe 2
para lambda1 =  0.15  intervalo de confiança de +/- 0.16 para a classe 1 e de +- 0.24  para a classe 2
para lambda1 =  0.2  intervalo de confiança de +/- 0.16 para a classe 1 e de +- 0.21  para a classe 2
para lambda1 =  0.25  intervalo de confiança de +/- 0.16 para a classe 1 e de +- 0.15  para a classe 2
para lambda1 =  0.3  intervalo de confiança de +/- 0.13 para a classe 1 e de +- 0.44  para a classe 2
para lambda1 =  0.35  intervalo de confiança de +/- 0.18 para a classe 1 e de +- 0.51  para a classe 2
para lambda1 =  0.4  intervalo de confiança de +/- 0.21 para a classe 1 e de +- 0.15  para a classe 2
para lambda1 =  0.45  intervalo de confiança de +/- 0.19 para a classe 1 e de +- 0.17  para a classe 2
para lambda1 =  0.5  intervalo de confiança de +/- 0.18 para a classe 1 e de +- 0.33  para a classe 2
para lambda1 =  0.55  intervalo de confiança de +/- 0.16 para a classe 1 e de +- 0.44  para a classe 2
para lambda1 =  0.6  intervalo de confiança de +/- 0.18 para a classe 1 e de +- 0.59  para a classe 2
```



Cenário 4

Para o cálculo do tempo de espera dos clientes na fila de espera usando um tempo de serviço para a classe 1 Uniforme(a_1,b_1) e Uniforme(a_2,b_2) para a classe 2, é importante salientar que, para todo i tal que 1<= i <= 2, $E[X_i] = \frac{a_i+b_i}{2}$, $E[X_i^2] = \frac{1}{3}\left(a_i^2 + a_ib_i + b_i^2\right)$ e

$$E[X_{ri}] = \frac{E[X_i^2]}{2E[X_i]} = \frac{\left(a_i^2+a_ib_i+b_i^2\right)}{3(a_i+b_i)}$$

Sabendo que em uma fila com distinção de classes com prioridade da classe 1 sobre a classe 2, tem-se que: $E[W_1] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho_1}$ e $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1]+\rho E[X_r]}{1-\rho_1-\rho_2}$.

Sabendo que $\rho_i = \lambda_i\frac{a_i+b_i}{2}$ e substituindo os valores conhecidos tem-se

$$E[W_1] = \frac{\rho_1\frac{(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)}{3(a_1+b_1)}+\rho_2\frac{(a_2^2+a_2b_2+b_2^2)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1} \text{ e } E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1]+\rho_1\frac{(a_1^2+a_1b_1+b_1^2)}{3(a_1+b_1)}+\rho_2\frac{(a_2^2+a_2b_2+b_2^2)}{3(a_2+b_2)}}{1-\rho_1-\rho_2}$$

Questão 5

Cenário 2

O último caso do cenário, λ_1=0.6, λ_2=0.2, μ_1=1 e μ_2=0.5, não foi trivial de calcular como os demais, isso porque o $\rho = \frac{0.6}{1} + \frac{0.2}{0.5} = 0.6 + 0.4 = 1$, ou seja, a probabilidade do servidor estar ocupado era de 100%.

O problema gerado por isso é que a probabilidade do servidor estar vazio ($1-\rho$), seria 0.

Como tanto a primeira equação ($E[U] = \frac{\rho E[X_r]}{1-\rho}$) quanto a segunda possuem divisão por ($1-\rho$), ou seja, divisão por 0.

Estando o servidor sempre ocupado, o tempo de espera de clientes da classe 2 se torna infinito, sabendo que no caso sem preempção $E[W_2] = \frac{\rho_1 E[W_1]+\rho E[Xr]}{1-\rho}$, o que dá infinito quando ρ tende a 1.

Todos os valores abaixo especificados foram obtidos através de simulações de 1000

Os valores obtidos na simulação da fila única podem ser vistos na seguinte tabela.

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$	E[U](2)	E[U](3)	$E[N_{q1}]$	$E[N_{q2}]$	E[U]	Média N_{q1}	Média N_{q2}
0.05, 0.2, 1, 0.5							
0.1, 0.2, 1, 0.5							
0.15, 0.2, 1, 0.5							
0.2, 0.2, 1, 0.5							
0.25, 0.2, 1, 0.5							
0.3, 0.2, 1, 0.5							
0.35, 0.2, 1, 0.5							
0.4, 0.2, 1, 0.5							
0.45, 0.2, 1, 0.5							
0.5, 0.2, 1, 0.5							
0.55, 0.2, 1, 0.5							
0.6, 0.2, 1, 0.5							

Na tabela a seguir é possível ver os valores obtidos na tabela para o cenário 2 (taxa de chegada e de serviço exponenciais) usando um fila com classe e **com preempção**, sendo a primeira coluna o trabalho pendente usando a equação (2) e usando os valores analíticos. A segunda coluna é o trabalho pendente usando a equação (3) analiticamente: e a última coluna é o valor obtido usando a equação (3) mas em vez de utilizar os valores analíticos, usa os valores de $E[N_{q1}]$ e $E[N_{q2}]$ obtidos via simulação.

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$	E[U](2)	E[U](3)	$E[N_{q1}]$	$E[N_{q2}]$	E[U]	Média N_{q1}	Média N_{q2}
0.05, 0.2, 1, 0.5	1.55	1.55	0±0	0.37±0.05	1.58±0.09	0.004	0.579
0.1, 0.2, 1, 0.5	1.8	1.8	0.01±0.01	0.38±0.04	1.68±0.08	0.031	0.55
0.15, 0.2, 1, 0.5	2.11	2.11	0.03±0.01	0.57±0.05	2.11±0.11	0.043	0.748
0.2, 0.2, 1, 0.5	2.5	2.5	0.06±0.02	0.47±0.05	2.0±0.09	0.098	0.641
0.25, 0.2, 1, 0.5	3.0	3.0	0.11±0.02	0.96±0.09	3.09±0.19	0.184	1.232
0.3, 0.2, 1, 0.5	3.67	3.67	0.1±0.02	1.24±0.09	3.68±0.18	0.135	1.489
0.35, 0.2, 1, 0.5	4.6	4.6	0.16±0.03	1.69±0.09	4.68±0.19	0.236	1.893
0.4, 0.2, 1, 0.5	6.0	6.0	0.33±0.04	2.36±0.1	6.26±0.21	0.391	2.456
0.45, 0.2, 1, 0.5	8.33	8.33	0.3±0.05	1.54±0.09	4.64±0.2	0.473	1.798
0.5, 0.2, 1, 0.5	13	13	0.51±0.05	2.63±0.13	7.07±0.27	0.636	2.84
0.55, 0.2, 1, 0.5	27	27	0.61±0.06	9.27±0.41	19.49±0.83	0.731	8.937
0.6, 0.2, 1, 0.5	∞	∞	1.03±0.08	17.94±0.39	38.32±0.78	1.078	17.976

Já na tabela a seguir o mesmos cenários foram aplicados a uma fila com classe e **sem preempção**. Nessa execução, a média amostral do número de pessoas em cada fila também é exibida.

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$	E[U](2)	E[U](3)	$E[N_{q1}]$	$E[N_{q2}]$	E[U]	Média N_{q1}	Média N_{q2}
0.05, 0.2, 1, 0.5	1.55	1.55	0.05±0.01	0.25±0.04	1.4±0.08	0.068	0.415
0.1, 0.2, 1, 0.5	1.8	1.8	0.1±0.02	0.33±0.04	1.66±0.09	0.157	0.533
0.15, 0.2, 1, 0.5	2.11	2.11	0.2±0.03	0.51±0.06	2.17±0.12	0.251	0.735

0.2, 0.2, 1, 0.5	2.5	2.5	0.23±0.03	0.53±0.06	2.29±0.13	0.27	0.723
0.25, 0.2, 1, 0.5	3.0	3.0	0.43±0.04	1.01±0.09	3.49±0.2	0.516	1.259
0.3, 0.2, 1, 0.5	3.67	3.67	0.57±0.05	1.12±0.08	3.91±0.18	0.638	1.339
0.35, 0.2, 1, 0.5	4.6	4.6	0.69±0.06	2.74±0.22	7.33±0.46	0.809	3.241
0.4, 0.2, 1, 0.5	6.0	6.0	0.8±0.06	1.7±0.12	5.41±0.25	0.931	1.982
0.45, 0.2, 1, 0.5	8.33	8.33	0.97±0.06	1.9±0.1	6.01±0.22	1.094	2.135
0.5, 0.2, 1, 0.5	13	13	1.51±0.08	5.38±0.24	13.58±0.5	1.621	5.766
0.55, 0.2, 1, 0.5	27	27	1.61±0.09	14.86±0.83	32.68±1.67	1.873	14.88
0.6, 0.2, 1, 0.5	∞	∞	1.97±0.09	8.93±0.27	21.23±0.56	2.094	9.249

Cenário 3:

Fila com classe e com preempção:

```
 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.45 0.2 1 0.5
a 0.45 1 0.2 0.5
a 0.45 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)        E[Nq1]        E[Nq2]        E[U](4)
                          8.33           8.33     0.19±0.03    26.56±0.72     54.56±1.44


                     Média Nq1      Média Nq2
                         0.392         26.875



 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.5 0.2 1 0.5
a 0.5 1 0.2 0.5
a 0.5 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)        E[Nq1]        E[Nq2]        E[U](4)
                          13.0           13.0     0.23±0.04    38.71±1.15      78.95±2.3


                     Média Nq1      Média Nq2
                          0.47         39.557



 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.55 0.2 1 0.5
a 0.55 1 0.2 0.5
a 0.55 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)        E[Nq1]        E[Nq2]        E[U](4)
                          27.0           27.0     0.23±0.03    61.72±1.53    125.01±3.06


                     Média Nq1      Média Nq2
                         0.463         62.325
```

Fila sem classe e sem preempção:

```
 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.5 0.2 1 0.5
a 0.5 1 0.2 0.5
a 0.5 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)         E[Nq1]         E[Nq2]
   E[U](4)
                          13.0           13.0      0.63±0.05      2.35±0.12
 6.63±0.24


                     Média Nq1      Média Nq2
                         0.916          2.557


 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.55 0.2 1 0.5
a 0.55 1 0.2 0.5
a 0.55 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)         E[Nq1]         E[Nq2]
   E[U](4)
                          27.0           27.0      0.69±0.05      1.73±0.07
 5.49±0.16


                     Média Nq1      Média Nq2
                         0.995           1.95


 Tabela para os valores de lamda1, lamda2, mi1, mi2 =  0.6 0.2 1 0.5
a 0.6 1 0.2 0.5
a 0.6 1 0.2 0.5
                       E[U](2)        E[U](3)         E[Nq1]         E[Nq2]
   E[U](4)
                         99999          99999      0.96±0.06     19.78±0.52
41.93±1.04
```

Os valores deram bastante discrepantes do indicado, seja pra mais ou pra menos.

O motivo disso é provavelmente um erro no cálculo do trabalho pendente no caso determinístico que não foi identificado até então.

Conclusão

Com esse simulador, muitos resultados puderam ser observados, como o número médio de pessoas na fila se aproximar consideravelmente, em qualquer simulação rodada, do número analítico estimado, ou mesmo a diferença entre o tempo de espera da classe prioritária e da classe não prioritária e de que forma alterar as taxas de entrada e serviço mudavam o comportamento do sistema.

O controle da fila se mostrou um grande desafio, para garantir integridade dos dados simulados, como o tempo de execução.

Referências

Apostila do professor Aguiar: https://dcc.ufrj.br/~sadoc/ad20161/apostila.pdf

Canal professor Guru, videos sobre intervalo de confiança:

https://www.youtube.com/watch?v=sWle26_vNbI&list=PL7xT0Gz6G0-SgMcsUnaSYs4kT2z69ikM2

Referencias do python: https://docs.python.org/3/reference/

Link do repositório no GitHub: https://github.com/joycebrum/Ad-Simulacao

Conceitos gerais de fila: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_das_filas