

# TRABALHO PRÁTICO: SIMULAÇÃO DE UMA ESTAÇÃO DE SERVIÇO

Alunos:

Joyce de Sant' Anna Brum, DRE: 116051654  
Thiago Outeiro Pereira Dasmasceno, DRE: 116038363

# 1. Simulação de um dia de serviço.

## 1.1. Desenvolvimento

Ideia para o desenvolvimento do algoritmo

$X$  é o tempo entre a chegada de dois clientes consecutivos e tem como média  $\mu = 10$  ( $E[X] = 10$ ).

$Y$  é o tempo de atendimento de um cliente e tem como média  $\mu = 5$  ( $E[Y] = 5$ ).

Sendo assim,  $X \sim \text{exponencial}(1/10)$  e  $Y \sim \text{exponencial}(1/5)$ .

Para calcular o tempo de entrada na estação de serviço do  $k$ -ésimo cliente, usaremos uma simulação do modelo exponencial seguindo o seguinte algoritmo:

1. Gerar uma variável aleatória  $U$  com distribuição uniforme  $[0,1]$
2. Aplicar a fórmula  $X = -10 * \ln(U) = -E[X] * \ln(U)$

O tempo de atendimento do  $k$ -ésimo cliente também será calculado usando uma simulação para a variável aleatória  $Y$ :

1. Gerar uma variável aleatória  $U$  com distribuição uniforme  $[0,1]$
2. Aplicar a fórmula  $Y = -5 \ln(U) = -E[Y] * \ln(U)$

Para cada cliente  $k$ , é possível então simular seu tempo de entrada relativo ao do cliente anterior e o tempo do seu atendimento.

Considerando  $W$  a variável aleatória tal que  $W_k$  é o tempo de espera do  $k$ -ésimo cliente a entrar na estação de serviço.

O tempo de espera do  $k$ -ésimo cliente a entrar na fila é o somatório de todos os clientes que ainda estão na fila. Seja  $j$  o número de clientes já atendidos,  $W_k = \sum_{i=k-j+1}^k Y_i + T_{k-j}$ , onde  $T_{k-j}$  é o tempo que falta para o cliente atualmente no topo da fila terminar seu atendimento. Ou seja,  $T_{k-j} = \text{horaDeChegada}_{k-j} + W_{k-j} + Y_{k-j} - \text{horaAtual}$

Para o cálculo, a cada novo cliente que entra na estação de serviço, é necessário calcular a hora de entrada, seu tempo de espera e seu tempo de atendimento e para isso utilizamos uma struct.

O resultado encontrado pode ser observado no Anexo I

## 1.2. Conclusão

No resultado obtido foi possível perceber que o tempo de espera da maioria dos clientes era zero ou um valor bem próximo do mesmo, o que pode ser explicado pelo fato de que o valor esperado do tempo entre a chegada de dois clientes consecutivos (10 minutos) ser maior do que o tempo de atendimento dos mesmos (5 minutos).

O tempo médio de espera obtido foi  $1.46171 = S_w / n$ , onde  $S_w \rightarrow$  é a soma  $W_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $n = 43$  é o número de clientes atendidos no dia.

Além disso, a quantidade de clientes obtida foi bem próxima do valor esperado calculado na questão B.

## 2. Número esperado e desvio padrão do número de clientes

Para resolver este problema é necessário identificar o modelo que qualifica a variável aleatória  $Z$ , cujo valor representa o número de pessoas que entram na estação em um dia de trabalho no intervalo de 9 às 17 horas.

Como  $X$ , o tempo entre dois eventos consecutivos, é identicamente distribuído, independente e com densidade especificada pelo modelo exponencial de parâmetro  $1/10$ , então,  $X$  representa o tempo entre dois eventos consecutivos de alguma variável aleatória  $Z$  do modelo de Poisson( $1/10 * t$ ).

Sendo  $Z$  o número de clientes que entraram na estação de serviço no intervalo de tempo  $[0, t]$ :

$$P(Z) = e^{-t/10} (t/10)^x / x!$$

$$t = 9 \text{ horas} - 17 \text{ horas} = 480 \text{ minutos}$$

O número esperado de clientes na estação de serviço em um dia de trabalho é a esperança de  $Z$ ,  $E[Z] = t/10 = 480/10 = 48 \rightarrow$  em um intervalo de 480 minutos (8 horas), 48 pessoas entram na estação de serviço em média. Após os 480 minutos, ninguém mais pode entrar.

O desvio padrão do número de cliente é a variância de  $Z$ ,  $\text{Var}(Z) = 480/10 = 48$ .

---

## 3. Intervalo de confiança

A amostra aleatória é o conjunto de variáveis aleatórias referentes ao tempo médio de espera dos clientes na estação de serviço. Baseado nessa amostra, o intervalo de confiança de 90% do tempo médio ( $m$ ) de espera na fila de um cliente em um dia nessa estação terá a fórmula abaixo especificada:

$$IC(m, 0.9) = \underline{X} \pm z(0.9) * t / \text{sqrt}(n)$$

Sendo  $\underline{X}$  a média amostral ( $S_n / n$ ),  $n$  a quantidade de amostras cujo valor nesse caso é 100,  $z$  a função de distribuição da  $N(0,1)$  cujo valor pode ser encontrado na tabela da função normal padrão (0.3159) e  $t$  é o desvio padrão da média.

No nosso caso, o desvio padrão é desconhecido, mas como  $n > 30$ , o mesmo pode ser substituído por  $t = \text{sqrt}(1 / (101) * \sum (X_i - \underline{X})^2)$ .

O valor obtido foi: [3.16467, 4.9967] como intervalo de confiança de 90%.

```
intervalo de confiança = [3.16467, 4.9967]
```

**Figure 1. Intervalo de confiança**

## 4. Invertendo os parâmetros de espera e chegada

Tendo em vista o resultado obtido, esperamos que inverter os parâmetros para o tempo de atendimento e de chegada de clientes faça com que o tempo de espera médio aumente consideravelmente.

No primeiro caso, o tempo de chegada de clientes era superior ao tempo de atendimento dos mesmos, o que fazia com que a probabilidade de que o tempo de espera tendesse a 0 fosse consideravelmente grande.

Ao inverter os tempos, a cada 5 minutos em média um cliente chegaria a estação de serviço e seu tempo de atendimento seria em média 10 minutos. Dessa forma, quando o próximo cliente chegasse, o anterior ainda estaria na fila ou ainda estaria sendo atendido.

Por consequência, a tendência do tempo de espera seria aumentar conforme o tempo passasse e chegasse mais perto do final do expediente.

O intervalo de confiança para a média amostral do tempo de espera na estação de serviço, tendo a média do tempo de chegada entre dois clientes consecutivos como 5 minutos e a média do tempo de atendimento de cada cliente como 10 minutos, usando uma amostra aleatória também de tamanho 100, foi [223.164, 263.135] como pode ser observado na imagem abaixo.

```
intervalo de confiança = [223.164, 263.135]
```

**Figure 2. Intervalo de confiança da média amostral com parâmetros trocados**

## 5. Anexo I

cliente0

Hora de chegada: 21.3021

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 2.68792

cliente1

Hora de chegada: 25.5568

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 9.53535

cliente2

Hora de chegada: 57.8451

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 1.7622

cliente3

Hora de chegada: 64.1064

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 7.85299

cliente4

Hora de chegada: 110.258

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 5.59306

cliente5

Hora de chegada: 118.342

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 5.90567

cliente6

Hora de chegada: 121.727

Tempo de Espera: 2.52112

Tempo de Atendimento: 1.35658

cliente7

Hora de chegada: 130.989

Tempo de Espera: 0

Tempo de Atendimento: 2.77339

cliente8

Hora de chegada: 132.254

Tempo de Espera: 1.50855

Tempo de Atendimento: 0.632421

cliente9

Hora de chegada: 135.92

Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 19.6099

cliente10  
Hora de chegada: 159.046  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 8.62374

cliente11  
Hora de chegada: 159.979  
Tempo de Espera: 7.69042  
Tempo de Atendimento: 3.41647

cliente12  
Hora de chegada: 161.132  
Tempo de Espera: 9.95379  
Tempo de Atendimento: 0.632421

cliente13  
Hora de chegada: 164.656  
Tempo de Espera: 7.0618  
Tempo de Atendimento: 0.202048

cliente14  
Hora de chegada: 174.172  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 0.202048

cliente15  
Hora de chegada: 202.406  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 19.6099

cliente16  
Hora de chegada: 229.098  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 1.7622

cliente17  
Hora de chegada: 247.523  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 2.35993

cliente18  
Hora de chegada: 248.241  
Tempo de Espera: 1.64167  
Tempo de Atendimento: 7.85299

cliente19  
Hora de chegada: 250.204

Tempo de Espera: 7.53186  
Tempo de Atendimento: 0.359129

cliente20  
Hora de chegada: 256.652  
Tempo de Espera: 1.44271  
Tempo de Atendimento: 1.22836

cliente21  
Hora de chegada: 259.496  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 7.18533

cliente22  
Hora de chegada: 265.574  
Tempo de Espera: 1.10746  
Tempo de Atendimento: 9.21266

cliente23  
Hora de chegada: 276.76  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 4.2696

cliente24  
Hora de chegada: 282.658  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 3.03894

cliente25  
Hora de chegada: 283.166  
Tempo de Espera: 2.53121  
Tempo de Atendimento: 8.62374

cliente26  
Hora de chegada: 286.55  
Tempo de Espera: 7.77041  
Tempo de Atendimento: 4.75779

cliente27  
Hora de chegada: 302.744  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 2.52123

cliente28  
Hora de chegada: 315.937  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 0.576554

cliente29  
Hora de chegada: 340.116

Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 8.90954

cliente30  
Hora de chegada: 349.891  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 9.88032

cliente31  
Hora de chegada: 353.416  
Tempo de Espera: 6.35591  
Tempo de Atendimento: 4.04229

cliente32  
Hora de chegada: 363.458  
Tempo de Espera: 0.356174  
Tempo de Atendimento: 0.803866

cliente33  
Hora de chegada: 390.15  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 6.06962

cliente34  
Hora de chegada: 395.526  
Tempo de Espera: 0.693785  
Tempo de Atendimento: 4.50774

cliente35  
Hora de chegada: 398.502  
Tempo de Espera: 2.2252  
Tempo de Atendimento: 2.35993

cliente36  
Hora de chegada: 415.209  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 3.51549

cliente37  
Hora de chegada: 416.701  
Tempo de Espera: 2.02336  
Tempo de Atendimento: 6.78512

cliente38  
Hora de chegada: 434.52  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 1.7622

cliente39  
Hora de chegada: 438.476



Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 6.98122

cliente40  
Hora de chegada: 452.439  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 9.21266

cliente41  
Hora de chegada: 461.213  
Tempo de Espera: 0.43815  
Tempo de Atendimento: 0.253862

cliente42  
Hora de chegada: 467.474  
Tempo de Espera: 0  
Tempo de Atendimento: 2.52123

Quant: 43  
Média: 1.46171