Московский физико-технический институт

Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится предметный указатель, с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

$\hookrightarrow$ – выполняется;
: – такой (ая, ое), что.

Глава 5

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение 1. $R(u, v, \ldots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \ldots, w) = \frac{P(u, v, \ldots, w)}{Q(u, v, \ldots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1. $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

   где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in Q$

   тогда $r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

   $$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q \iff (ax+b)) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$

   $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

   Подвид:

   $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$$

2. $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

   где $a \neq 0$

   Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$
$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

x' – рациональная функция от t.

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$
$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$
$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a-t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

где $x_1 \neq x_2$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}(x-x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = |a|\,(x-x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим:

$$x = \frac{ax_2 - |a|\,x_1t^2}{a-|a|\,t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Введем $Y = ax_2 + bx + c, y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x,y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем (?) записать выражение через многочлены P:

$$R(x,y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} =$$

$$= \frac{(P_1(x) + P_2(x)y)\,(P_3(x) - P_r(x)y)}{P_3^2(x) - P_4^2(x)Y} =$$
$$= R_1(x) + R_2(x)y$$

$$\int P(x)ydx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

$\deg Q = n - 1, \lambda \in \mathbb{R}$

После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} =$$

$$= \frac{Q'(x) \cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$(x_{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}\,(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$x^{m-1}y = (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax_2 + bx + c)}{y}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2ax^m + bx^{m-1}}{y}dx =$$

$$a(m-1)V_m + (m - \frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^{k} \frac{dx}{y}$$

Введем замену $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t}+\alpha\right) + c} = \frac{\widetilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^{k} \frac{dx}{y} = -\int \frac{At^k\,|t|}{t^2\widetilde{y}}dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

где $m, n, p \in Q$

Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p \in \mathbb{Z}, \nu$ — НОК знаменателей m, n Возьмем $x = t^\nu$, тогда $dx = \nu t^{\nu-1}dt$
Пусть теперь $p \ni \mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n = z$, откуда $x = z^{\frac{1}{n}}; dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$
Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n}\int z^{fracm+1n-1}\left(a+bz\right)^p dz$$

Обозначим рациональное $q := \frac{m+1}{n} - 1$, тогда

$$\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz$$

4.2. $q \in \mathbb{Z}$ $a + bz = t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z = \frac{1}{b}\left(t^\mu - a\right)$$

$$dz = \frac{1}{b}\mu t^{\mu-1}dt$$

4.3. $p + q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q(a+bz)^p dz = \int z^{p+q}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема 1 (Абеля)**.** *Пусть R — многочлен степени $2g+2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что*

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\left(\ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right) =$$

$$= \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P - Q\sqrt{R}\right) - \left(P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P + Q\sqrt{R}\right)}{\left(P - Q\sqrt{R}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P\left(QR' + 2Q'R\right) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q\left(2Q'R + QR'\right) \implies P' = Q_2$$

$\deg P' = \deg Q + g$ □

6.

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

$f : D \to \mathbb{R} = Y$
$D \subset \mathbb{R}^n = X$
Приведем определение предела:

Определение 1 (Предел)**.** Пусть $\vec{x}_0$ – предельная точка D. Тогда предел определяется:
по Коши:

$$\lim f(\vec{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D, 0 < \rho^x(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}), l) < \varepsilon$$

по Гейне:

$$\lim f(\vec{x}) = l \iff \forall \{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m\to\infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0, \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m\to\infty} f(\vec{x}_m) = l$$

Если $\vec{x}_0$ – внутренняя точка D, то $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}$ называется пределом по совокупности переменных.

Если $D = D_{\vec{d}}$ – луч с началом в точке $\vec{x}_0$ в направлении вектора $\vec{d}$ (или его пересечение с проколотой окрестностью точки $\vec{x}_0$), то предел $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ называется пределом по направлению $\vec{d}$

Лемма 1.

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim_{t\to 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d}, t \geqslant 0 (0 < t < r)$$

Теорема 1. *Если существует предел по совокупности переменных* $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$*, то существует предел по любому направлению* $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}$*. Обратное, вообще говоря не верно.*

Доказательство. Если $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$, то $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. □

Пример.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{t\to 0+} f(0+t\alpha,0+t\beta)=\lim_{t\to 0+}\frac{t^3\alpha\beta^2}{t^2\alpha^2+t^4\beta^4}=0$$

По определению Гейне возьмем последовательность $\left(\frac{1}{m^2},\frac{1}{m}\right) to(0,0)$, тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2},\frac{1}{m}\right)=\frac{1/m^4}{2/m^4}=\frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению – есть.

Определение 2 (Повторный предел)**.**

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

Замечание. Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

Пример.

$$g(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\\ 0\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0,\text{ так как } |g(x,y)|\leqslant|(x,y)|$$

$$\lim_{y\to 0} g(x,y)\text{ существует и равен } 0 \iff x=0 \text{ или } x=\frac{1}{k}, k\in K$$

Если $\vec{x}_0$ – предельная точка больати определения $D(f)$, то f непрерывна в $\vec{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to\vec{x}_0} f(\vec{x})=f(\vec{x}_0)$

Если $\vec{x}_0$ – изолированная точка $D(f)$, то f непрерывна в $\vec{x}_0$. Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

Теорема 2 (Непрерывность сложной функции многих переменных)**.** *Если $f: D\to\mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0=\left(y_0^{(1)},\ldots,y_0^{(n)}\right)\in D$, функции $g_j(\vec{x}), j=1,\ldots,n$ непрерывны в точке $\vec{x}_0\in G\subset\mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0)=y_0^{(j)}, j=1,\ldots,m$, то сложная функция $h(\vec{x})=f\left(g_1(\vec{x}),\ldots,g_n(\vec{x})\right)$ непрерывна в $\vec{x}_0$.*

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне:

!

$$\{\vec{x}_k\}\subset D(h):\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{x}_0\hookrightarrow\lim_{k\to\infty} g_j(\vec{x}_k)=g_k(\vec{x}_0)=y_0^{(j)}\implies\left(g_1(\vec{x}_k),\ldots,g_n(\vec{x}_k)\right)\underset{k\to\infty}{\to}\vec{y}_0\implies f$$

$\square$

Теорема 3 (Кантор)**.** *Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. (От противного). Определение равномерной непрерывности на K:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K, |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K, |\vec{x}_1, \vec{x}_2| < \delta : |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geqslant \varepsilon$$

Построим последовательность по $\delta := 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K$$

По критерий компактности $\exists \left\{\vec{x}_{1,k_j}\right\}, \lim\limits_{j\to\infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$

Тогда

$$\left|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0\right| \leqslant \left|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}\right| + \left|\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0\right| \implies \lim_{j\to\infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как f непрерывна в $\vec{x}_0$, то

$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}_{1,k}|_j) - f(\vec{x}_{2,k_j}) \geqslant \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие. □

Определение 3 (Линейная связность)**.** Множество A в $\mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall \vec{x} \neq \vec{y} \in A \ \exists$ кривая $\gamma_i \subset A$ такая, что $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$.

Определение 4 (Связность)**.** Метрическое пространство X называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Утверждение 1. *Множество A в $\mathbb{R}^n$ является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.*

Множество $G \subset A$ открыто в $A \iff \exists \mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^n$ открытое, такое, что $G = \mathfrak{g} \cap A$.

Доказательство.

$$\forall x \in G \ \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$$

Возьмем

$$\mathfrak{g} := \bigcup_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$$

□

Замечание.

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \left\{\vec{y} \in A : \left|\vec{x} - \vec{y}\right| < \varepsilon\right\}$$

Теорема 4. *Если $A \in \mathbb{R}^n$ линейно связно, то оно линейно связно.*

Доказательство. (От противного). A – не связно, следовательно $\exists G_1, G_2$ — открытых множества в A, таких, что

$$G_1 \neq \varnothing, G_2 \neq \varnothing, G_1 \cap G_2 = A$$

Пусть $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$. A – линейно связно, следовательно

$$\exists \gamma \subset A, \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

$\gamma : [a, b] \to A$

Обозначим $T := \sup\{t : \gamma(t) \in G_1\}$, $T \in [a, b]$. Предположим, что $\gamma(T) \in G_1$, тогда $\exists G_1 = \mathfrak{g}_1 \cap A$

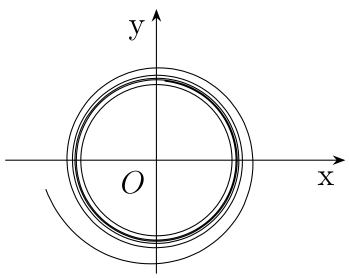
$$\gamma(T) \in \mathfrak{g}_1 \implies U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathfrak{g}_1$$

$$T < b \implies \exists \delta > 0 : \gamma([T, T + \delta)) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$$

Получаем противоречие. □

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример. Контрпример иллюстрирован на рис. 6.1



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = 1 + \dfrac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Рис. 6.1: Контрпример

Предметный указатель

Теоремы

Леммы

Определения

Утверждения