

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие	2
5 Неопределенный интеграл	3
§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций	3
6 Дифференциальное исчисление функций многих переменных	8
§1 Предел и непрерывность	8
§2 Дифференцируемость функций многих переменных	13
§3 Геометрический смысл градиента и дифференцируемости	17
Приложения	
Предметный указатель	19

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

\hookrightarrow – выполняется;

$:$ – такой (ая, ое), что.

Глава 5

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение. $R(u, v, \dots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \dots, w) = \frac{P(u, v, \dots, w)}{Q(u, v, \dots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in \mathbb{Q}$

В этом случае $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, тогда введем следующую замену: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, и получим

$$(ax+b) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

Подвид вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

приводится к рациональной функции аналогично, но в качестве q берем НОК от r_1, \dots, r_n .

2.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$

Возведем это равенство в квадрат

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

x' – рациональная функция от t .

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

Снова возведем в квадрат и получим

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$

Тогда мы можем выразить x

$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

В данном случае

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{|a|}(x - x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части

$$a(x - x_1)(x - x_2) = |a|(x - x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим

$$x = \frac{ax_2 - |a|x_1t^2}{a - |a|t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Введем $Y = ax^2 + bx + c$ и $y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x, y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем записать выражение через многочлены P :

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} = \frac{(P_1(x) + P_2(x)y)(P_3(x) - P_4(x)y)}{P_3^2(x) - P_4^2(x)Y} = R_1(x) + R_2(x)y$$

$$\int P(x)ydx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

где $\deg Q = n - 1, \lambda \in \mathbb{R}$. После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} = \frac{Q'(x) \cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$(x^{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$x^{m-1}y = (m-1) \int \frac{x^{m-2}(ax_2 + bx + c)}{y}dx + \frac{1}{2} \int \frac{2ax^m + bx^{m-1}}{y}dx =$$

$$a(m-1)V_m + (m - \frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{dx}{y}$$

Введем замену $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a\left(\frac{1}{t} + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t} + \alpha\right) + c} = \frac{\tilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{dx}{y} = - \int \frac{At^k |t|}{t^2 \tilde{y}} dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

где $m, n, p \in \mathbb{Q}$ Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p \in \mathbb{Z}, \nu$ — НОК знаменателей m, n Возьмем $x = t^\nu$, тогда $dx = \nu t^{\nu-1} dt$ Пусть теперь $p \in \mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n = z$, откуда $x = z^{\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$ Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz$$

Обозначим рациональное $q := \frac{m+1}{n} - 1$, тогда

$$\frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p dz$$

4.2. $q \in \mathbb{Z}$ $a + bz = t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z = \frac{1}{b} (t^\mu - a)$$

$$dz = \frac{1}{b} \mu t^{\mu-1} dt$$

4.3. $p + q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int z^{p+q} \left(\frac{a + bz}{z} \right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема (Абеля). Пусть R — многочлен степени $2g + 2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2 R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left(\ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) = \\ &= \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) (P - Q\sqrt{R}) - \left(P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) (P + Q\sqrt{R})}{(P - Q\sqrt{R})^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P(QR' + 2Q'R) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q(2Q'R + QR') \implies P' = Q_2$$

$$\deg P' = \deg Q + g$$

□

6.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

Определение 1 (Функция многих переменных). Функцией многих переменных называем функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Предел функции многих переменных). Пусть \vec{x}_0 — предельная точка D . Тогда предел определяется:

* по Коши:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \wedge 0 < \rho_x(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}), l) < \varepsilon$$

* по Гейне:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_m) = l$$

Определение 3 (Предел по совокупности переменных). Если \vec{x}_0 — внутренняя точка $D \cup \{\vec{x}_0\}$, то $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ называется пределом по совокупности переменных.

Определение 4 (Предел по направлению). Если $D = D_{\vec{d}}$ — луч с началом в точке \vec{x}_0 в направлении вектора \vec{d} (или его пересечение с проколотой окрестностью точки \vec{x}_0), то предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ называется пределом по направлению \vec{d} .

Лемма 1.

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d}, t \geq 0 \quad (0 < t < r)$$

□

Теорема 1. Если существует предел $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ по совокупности переменных, то существует предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ по любому направлению $\vec{d} \neq 0$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Из определения по Коши, если $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$, то $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По [лемме 1](#) получаем

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_{(\alpha,\beta)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(0 + t\alpha, 0 + t\beta) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4} = 0$$

По определению Гейне возьмем последовательность $(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}) \rightarrow (0, 0)$, тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1/m^4}{2/m^4} = \frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению — есть.

Определение 5 (Повторный предел).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

Замечание. Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

Пример.

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У данной последовательности есть предел по совокупности

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0, \text{ так как } |g(x, y)| \leq |(x, y)|$$

$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ существует и равен 0 $\iff x = 0$ или $x = \frac{1}{k}, k \in K$. Тогда внутренний предел не определен в проколотовой окрестности, а значит повторного предела действительно нет.

Если \vec{x}_0 — предельная точка области определения $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 тогда и только тогда, когда $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D(f)}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Если \vec{x}_0 — изолированная точка $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 .

Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

Теорема 2 (Непрерывность сложной функции многих переменных). *Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0 = (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)}) \in D$, функции $g_j(\vec{x}), j = 1, \dots, n$ непрерывны в точке $\vec{x}_0 \in G \subset \mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)}, j = 1, \dots, n$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$ непрерывна в \vec{x}_0 .*

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне:

$$\begin{aligned} \{\vec{x}_k\} \subset D(h) : \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 &\hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(\vec{x}_k) = g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)} \implies \\ &\implies (g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{y}_0 \implies f(g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_0) \end{aligned}$$

□

Теорема 3 (Кантор). *Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K .*

Доказательство. (От противного). Определение равномерной непрерывности на K :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geq \varepsilon$$

Построим две последовательности по $\delta := 1, \frac{1}{2}, \dots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K : |\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{2,k}| < \frac{1}{k} \hookrightarrow |f(\vec{x}_{1,k}) - f(\vec{x}_{2,k})| \geq \varepsilon$$

По критерию компактности $\exists \{\vec{x}_{1,k_j}\} : \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$, тогда

$$|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0| \leq |\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}| + |\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0| \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как f непрерывна в \vec{x}_0 , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}_{1,k_j}) - f(\vec{x}_{2,k_j})| \geq \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие.

□

Определение 6 (Линейная связность). Множество A в \mathbb{R}^n называется линейно связным, если $\forall \vec{x} \neq \vec{y} \in A$ существует кривая $\gamma_i : [a, b] \rightarrow A$ ($\gamma_i \subset A$) такая, что $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$.

Определение 7 (Связность). Метрическое пространство X называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Утверждение 1. Множество A в \mathbb{R}^n является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.

Множество $G \subset A$ открыто в $A \iff \exists \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ открытое, такое, что $G = \mathcal{G} \cap A$.

Доказательство. G открыто в A , значит $\forall x \in G \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$. Возьмем $\mathcal{G} := \bigcup_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$. Тогда $G = \mathcal{G} \cap A$. \square

Замечание.

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \{\vec{y} \in A : |\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon\}$$

Теорема 4. Если $A \in \mathbb{R}^n$ линейно связно, то оно связно.

Доказательство. (От противного). Если A — не связно, то найдутся G_1, G_2 — открытые множества в A , такие, что

$$G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad G_1 \cup G_2 = A$$

Пусть $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$. A — линейно связно, следовательно

$$\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

Обозначим $T := \sup \{t : \gamma(t) \in G_1\}$, $T \in [a, b]$. Предположим, что $\gamma(T) \in G_1$, тогда $\exists G_1 = \mathcal{G}_1 \cap A$. Так как $\gamma(T) \in \mathcal{G}_1$, то, $U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathcal{G}_1$. T точно меньше b , а значит, $\exists \delta > 0 : \gamma([T, T + \delta)) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$. То есть, $\gamma(T)$ не лежит в G_1 . Аналогично доказывается, что $\gamma(T)$ не лежит в G_2 , и отсюда получаем противоречие. \square

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример. Контрпример иллюстрирован на [рис. 6.1](#). Данное множество очевидно является связным, и в то же время не является линейно связным.

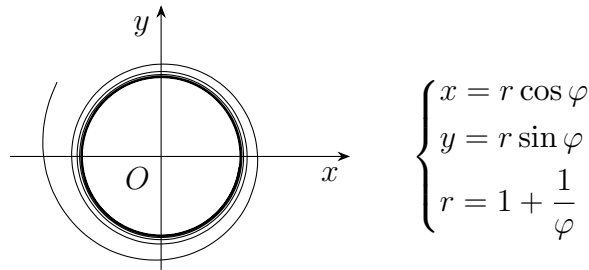


Рис. 6.1: Контрпример

Лемма 2. Множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда E — промежуток.

Доказательство. По [теореме 4](#), из того, что E промежуток следует, что E линейно связно, а значит и связно. Пусть E не промежуток, тогда

$$\exists x_1, x_2 \in E : [x_1, x_2] \not\subset E \wedge \exists c \in (x_1, x_2) \setminus E$$

Тогда построим два открытых множества в E : $G_1 = (-\infty, c) \cap E$, $G_2 = (c, +\infty) \cap E$. Данные множества открыты в E , непусты, непересекаются между собой и $G_1 \cup G_2 = E$, следовательно E не связно. \square

Лемма 3. Если X — связное метрическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ связно.

Доказательство. (От противного). Представим $f(X) = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \mathcal{G}_1 \cap f(X)$, $G_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Тогда $f^{-1}(\mathcal{G}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{G}_2) = X$. Противоречие. \square

Теорема 5 (Больцано-Коши в \mathbb{R}^n). Если $E \subset \mathbb{R}^n$ связно, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то

$$\forall A, B : \exists \vec{a}, \vec{b} \in E : f(\vec{a}) = A \wedge f(\vec{b}) = B \quad \forall \gamma \in (A, B) \hookrightarrow \exists \vec{c} \in E : f(\vec{c}) = \gamma$$

Доказательство. По [лемме 3](#), $f(E)$ связно, тогда по [лемме 2](#) $f(E)$ — промежуток. В таком случае требуемое следует из определения промежутка. \square

Теорема 6. Каждое открытое связное множество в \mathbb{R}^n линейно связно.

Доказательство. (От противного). Пусть G — открытое и связное множество. Тогда если G не линейно связно, то $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$ такие, что их нельзя соединить кривой в G . Введем следующие множества:

$$G_1 := \{\vec{x} \in G : \vec{x} \text{ нельзя соединить с } \vec{x}_1 \text{ кривой в } G\}; \quad G_2 = G \setminus G_1$$

Данные множества очевидно непустые и не пересекаются.

Докажем, что G_2 открыто в G . Пусть $\vec{x}_0 \in G_2 \subset G$ тогда $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G$. Отсюда $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_2$, значит G_2 — открыто. Теперь докажем, что G_1 открыто. От противного,

$$\exists \vec{x}_0 \in G_1 : \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap G_2 \neq \emptyset$$

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset G \hookrightarrow \vec{y} \in U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \cap G_2$$

Противоречие.

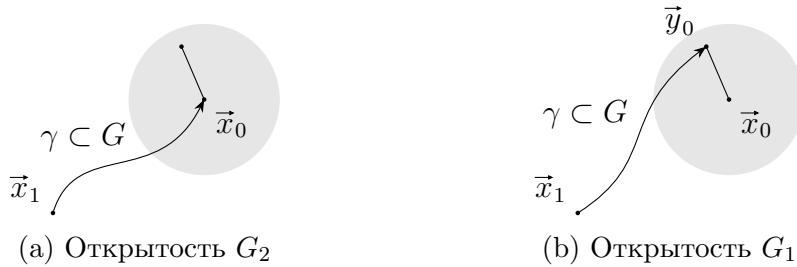


Рис. 6.2: Примеры на \mathbb{R}^2 для [теоремы 6](#)

\square

§2 Дифференцируемость функций многих переменных

Определение 1 (Дифференцируемость в точке). Пусть f — действительная функция, определенная в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда f называется дифференцируемой в точке \vec{x}_0 , если существует вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ такой, что полное приращение функции f в точке \vec{x}_0 , обозначаемое $\Delta y := f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ представимо в виде $\Delta y = (\vec{A}, \Delta \vec{x}) + o(|\Delta \vec{x}|), \Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}$. Кроме того:

- * $\Delta \vec{x}$ называется вектором приращений аргументов.
- * $(\vec{A}, \Delta \vec{x}) = dy = df$ называется дифференциалом функции f .
- * \vec{A} называется градиентом f и обозначается $\text{grad } f$.
- * Вектор приращений независимых аргументов считается вектором дифференциалов этих переменных, $\Delta \vec{x} = d\vec{x}$.

Определение 2 (Частичное приращение функции). Частичным (частным) приращением функции f в точке $\vec{x}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$ по переменной x_j называется $\Delta_j f = f(\vec{x}_0 + \Delta_j \vec{x}) - f(\vec{x}_0)$, где $\Delta_j \vec{x} = (0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0), j = 1, \dots, n$.

$\Delta_j f$ является приращением функции одного переменного

$$\varphi_j(x_j) := f(x_{1,0}, \dots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \dots, x_{n,0})$$

то есть $\Delta_j f = \Delta \varphi_j(x_{j,0})$.

Определение 3 (Частная производная). Частной производной функции f в точке \vec{x}_0 по переменной x_j называется производная (если она существует) функции φ_j в точке $x_{j,0}$. Обозначается:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) := \frac{d\varphi_j}{dx_j}(x_{j,0})$$

Теорема 1. Если f дифференцируема в точке \vec{x}_0 , то она имеет частные производные в этой точке по всем переменным $x_j, j = 1, \dots, n$, причем,

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$$

Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Пусть $\Delta \vec{x} := \Delta_j \vec{x}$, тогда

$$\Delta y = f(\vec{x}_0 + \Delta_j \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta_j f = \Delta \varphi_j(x_{j,0}) = (A, \Delta_j \vec{x}) + o(|\Delta_j \vec{x}|) = A_j \Delta x_j + o(|\Delta x_j|)$$

$$|\Delta_j \vec{x}| = |\Delta x_j| \longrightarrow 0 \iff \Delta x_j \longrightarrow 0$$

Тогда φ_j дифференцируема в точке $x_{j,0}$, причем $\varphi_j(x_{j,0}) = A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Положим $\vec{x}_0 = (0, 0)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

Таким образом частные производные существуют. С другой стороны

$$\Delta y = \Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Хотим доказать, что

$$\Delta y \neq o(|(\Delta x, \Delta y)|), \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$$

Возьмем вектор $(\Delta x, \Delta x) \rightarrow (0, 0)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \neq o(\Delta x)$$

Что означает, что эта функция не является ни дифференцируемой, ни непрерывной.

Пример.

$$g(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

Для данной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(\Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

На сей раз возьмем $\Delta g = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}$, тогда введем полярные координаты

$$\begin{cases} \Delta x = r \cos \varphi \\ \Delta y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \left(r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |(\Delta x, \Delta y)| \right)$$

После такой замены получим

$$0 \leq \Delta g = r \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|} \leq r$$

То есть функция непрерывна в нуле, но в то же время, $\Delta g \neq o(r)$, а значит не дифференцируема.

Теорема 2. Если f дифференцируема в \vec{x}_0 , то она непрерывна в \vec{x}_0

Доказательство. Хотим доказать, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\vec{\Delta x} \rightarrow \vec{0}$. Применим неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(\vec{A}, \vec{\Delta x})| \leq |\vec{A}| \cdot |\vec{\Delta x}|$$

Отсюда следует требуемое. □

Теорема 3 (Достаточное условие дифференцируемости). Если в некоторой окрестности точки \vec{x}_0 f имеет частные производные по всем переменным, непрерывные в \vec{x}_0 , то f дифференцируема в \vec{x}_0 .

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Delta y = & \\ & = (f(x_{1,0} + \Delta x_1, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n)) + \\ & + (f(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0} + \Delta x_3, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n)) + \\ & + \dots + \\ & + (f(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n-1,0}, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})) =\end{aligned}$$

Теперь к каждой паре слагаемых в скобках применим теорему Лагранжа

$$\begin{aligned}& = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_1 + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{1,0}, \xi_2, x_{3,0} + \Delta x_3, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_2 + \\ & + \dots + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{1,0}, \dots, x_{n-1,0}, \xi_n) \cdot \Delta x_n =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \Delta x_n + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \right) \Delta x_1 + \dots + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n-1,0} + \Delta x_{n-1} + \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \Delta x_n.\end{aligned}$$

□

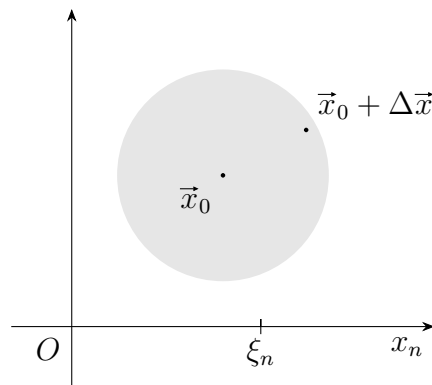


Рис. 6.3: Иллюстрация к [теореме 3](#)

Пример.

$$y = \sqrt[3]{x^2 y^2}$$

Замечание. Также как и для функций одного переменного, из дифференцируемости f, g в точке \vec{x}_0 следует дифференцируемость в точке \vec{x}_0

- * $f \pm g$,
- * $f \cdot g$,
- * $\frac{f}{g}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$,

а также следующие равенства в точке \vec{x}_0

- * $d(f \pm g) = df \pm dg$,
- * $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$,
- * $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$.

Теорема 4. Если f дифференцируема в точке $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, а функции $g_j(\vec{x})$ дифференцируемы в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, причем $g_j(\vec{x}_0) = y_{j,0}$, $\vec{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{m,0})$, $(j = 1, \dots, m)$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ дифференцируема в точке \vec{x}_0 , причем

$$\text{grad } h(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \text{grad } g_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta h(\vec{x}_0) &= f(g_1(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x})) - f(g_1(\vec{x}_0), \dots, g_m(\vec{x}_0)) = \\ &= \Delta f(\vec{y}_0) = (\text{grad } f(\vec{y}_0), \Delta y) + o(|\Delta y|) = \\ &= \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } g_1(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) + o_1(|\Delta \vec{x}|) \\ \vdots \\ (\text{grad } g_m(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) + o_m(|\Delta \vec{x}|) \end{pmatrix} + o(|\Delta \vec{y}|) = \\ &= \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } g_1(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_m(\vec{x}_0), \Delta \vec{x} \end{pmatrix} + \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} o_1(|\Delta \vec{x}|) \\ \vdots \\ o_m(|\Delta \vec{x}|) \end{pmatrix} + o(|\Delta y|) = \\ &= (\text{grad } f(\vec{y}_0), \Delta \vec{x}) + o(|\Delta \vec{x}|), \quad \Delta \vec{x} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. □

Следствие. (Инвариантность формы первого дифференциала). Формула для дифференциала функции $f(\vec{x}) : df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ справедлива как в случае, когда x_1, \dots, x_n — независимые переменные, так и в случае, когда x_j — дифференцируемые функции от других независимых переменных.

Доказательство. Пусть $f(\vec{x}) = f(g_1(\vec{t}), \dots, g_n(\vec{t})) =: h(\vec{t})$. Тогда

$$\begin{aligned} df = dh &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial h}{\partial t_k} dt_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dg_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \end{aligned}$$

□

§3 Геометрический смысл градиента и дифференцируемости

Определение 1 (Область). Область — это открытое связное множество.

Определение 2 (Замкнутая область). Замкнутая область — это замыкание области.

Определение 3 (Параметрически заданная поверхность). Параметрически заданной поверхностью называется множество точек пространства \mathbb{R}^3 , заданных с помощью непрерывных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ на замкнутой области $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 4 (Касательная плоскость). Плоскость, проходящая через точку N_0 параметрически заданной поверхности называется касательной к этой поверхности, если угол между ней и любой секущей, проходящей через точки N_0 и N поверхности стремится к нулю при $N \rightarrow N_0$.

Определение 5. График функции $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in \bar{\Omega}$:

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \bar{\Omega}, z = f(x, y)\}$$

Теорема 1. Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то ее график имеет касательную плоскость в точке (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$, заданную уравнением

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ясно, что заданная плоскость проходит через точку $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Нормаль к ней имеет координаты $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) =: \vec{n}$

Доказательство.

$$\overrightarrow{N_0 N} : (x - x_0, y - y_0, f(x, y) - f(x_0, y_0))$$

Надо доказать, что

$$\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0 N})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{N_0 N}|} \rightarrow 0$$

при $(x - x_0, y - y_0) \rightarrow 0$. Тогда

$$\left| \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0 N})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{N_0 N}|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (f(x, y) - f(x_0, y_0))}{|\vec{n}| \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (f(x, y) - f(x_0, y_0))^2}} \right| \leq \frac{|o(|\Delta x|)|}{1 \cdot |\Delta x|}$$

□

Определение 6. Производной функции f в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ называется предел (если он существует)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Теорема 2. Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то она имеет производные в этой точке по всем направлениям $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = (\text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{l})$

Доказательство.

$$\frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{(\text{grad } f(\vec{x}_0), t\vec{l}) + o(|t\vec{l}|)}{t} = (\text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{l}) + o(1)$$

□

Предметный указатель

Теоремы

Глава 6

Теорема 1.	9
Теорема 2. Непрерывность сложной функции многих переменных ...	10
Теорема 3. Кантор	10
Теорема 4.	11
Теорема 5. Больцано-Коши в R^n	12
Теорема 6.	12

§2

Теорема 1.	13
Теорема 2.	14
Теорема 3. Достаточное условие дифференцируемости	14
Теорема 4.	16

§3

Теорема 1.	17
Теорема 2.	18

Леммы

Глава 6

Лемма 1.	8
Лемма 2.	11
Лемма 3.	12

Определения

Глава 6

Определение 1. Функция многих переменных	8
Определение 2. Предел функции многих переменных	8
Определение 3. Предел по совокупности переменных	8
Определение 4. Предел по направлению ..	8
Определение 5. Повторный предел	9
Определение 6. Линейная связность	10
Определение 7. Связность	11

§2

Определение 1. Дифференцируемость в точке	13
Определение 2. Частичное приращение функции	13
Определение 3. Частная производная ..	13

§3

Определение 1. Область	17
Определение 2. Замкнутая область	17
Определение 3. Параметрически заданная поверхность	17
Определение 4. Касательная плоскость ..	17
Определение 5.	17
Определение 6.	18

Утверждения

Глава 6

Утверждение 1.	11
---------------------	----