

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие	2
5 Неопределенный интеграл	3
§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций	3
6 Дифференциальное исчисление функций многих переменных	8
§1 Предел и непрерывность	8
§2 Дифференцируемость функций многих переменных	13
§3 Геометрический смысл градиента и дифференцируемости	17
Приложения	
Предметный указатель	19

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

↪ – выполняется;
: – такой (ая, ое), что.

Глава 5

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение. $R(u, v, \dots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \dots, w) = \frac{P(u, v, \dots, w)}{Q(u, v, \dots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in \mathbb{Q}$

В этом случае $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, тогда введем следующую замену: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, и получим

$$(ax+b) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$
$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

Подвид вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

приводится к рациональной функции аналогично, но в качестве q берем НОК от r_1, \dots, r_n .

2.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$

Возведем это равенство в квадрат

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{at}}$$

x' – рациональная функция от t .

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

Снова возведем в квадрат и получим

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$

Тогда мы можем выразить x

$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

В данном случае

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{|a|}(x - x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части

$$a(x - x_1)(x - x_2) = |a|(x - x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим

$$x = \frac{ax_2 - |a|x_1t^2}{a - |a|t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Введем $Y = ax_2 + bx + c$ и $y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x, y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем записать выражение через многочлены P :

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} = \frac{(P_1(x) + P_2(x)y)(P_3(x) - P_4(x)y)}{P_3^2(x) - P_4^2(x)Y} = R_1(x) + R_2(x)y$$

$$\int P(x)ydx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

где $\deg Q = n - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} = \frac{Q'(x) \cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$(x^{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^{m-1}y &= (m-1) \int \frac{x^{m-2}(ax_2+bx+c)}{y}dx + \frac{1}{2} \int \frac{2ax^m+bx^{m-1}}{y}dx = \\ &= a(m-1)V_m + (m-\frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2} \end{aligned}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{k}{y} dx$$

Введем замену $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a \left(\frac{1}{t} + \alpha \right)^2 + b \left(\frac{1}{t} + \alpha \right) + c} = \frac{\tilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{k}{y} dx = - \int \frac{At^k |t|}{t^2 \tilde{y}} dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

где $m, n, p \in Q$. Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p \in \mathbb{Z}, \nu$ — НОК знаменателей m, n . Возьмем $x = t^\nu$, тогда $dx = \nu t^{\nu-1} dt$. Пусть теперь $p \in \mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n = z$, откуда $x = z^{\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$. Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p dz$$

Обозначим рациональное $q := \frac{m+1}{n} - 1$, тогда

$$\frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^p dz$$

4.2. $q \in \mathbb{Z}$, $a+bz = t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z = \frac{1}{b} (t^\mu - a)$$

$$dz = \frac{1}{b} \mu t^{\mu-1} dt$$

4.3. $p+q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q (a+bz)^p dz = \int z^{p+q} \left(\frac{a+bz}{z} \right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема (Абеля). Пусть R — многочлен степени $2g+2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2 R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left(\ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) = \\ & = \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) \left(P - Q\sqrt{R} \right) - \left(P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) \left(P + Q\sqrt{R} \right)}{\left(P - Q\sqrt{R} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P(QR' + 2Q'R) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q(2Q'R + QR') \implies P' = Q_2$$

$$\deg P' = \deg Q + g$$

□

6.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

Определение 1 (Функция многих переменных). Функцией многих переменных называем функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Предел функции многих переменных). Пусть \vec{x}_0 — предельная точка D . Тогда предел определяется:

* по Коши:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \wedge 0 < \rho_x(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}), l) < \varepsilon$$

* по Гейне:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_m) = l$$

Определение 3 (Предел по совокупности переменных). Если \vec{x}_0 — внутренняя точка $D \cup \{\vec{x}_0\}$, то $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ называется пределом по совокупности переменных.

Определение 4 (Предел по направлению). Если $D = D_{\vec{d}}$ — луч с началом в точке \vec{x}_0 в направлении вектора \vec{d} (или его пересечение с проколотой окрестностью точки \vec{x}_0), то предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ называется пределом по направлению \vec{d} .

Лемма 1.

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d}, t \geq 0 \ (0 < t < r)$$

□

Теорема 1. Если существует предел $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ по совокупности переменных, то существует предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ по любому направлению $\vec{d} \neq 0$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Из определения по Коши, если $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$, то $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По лемме 1 получаем

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_{(\alpha,\beta)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(0 + t\alpha, 0 + t\beta) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3\alpha\beta^2}{t^2\alpha^2 + t^4\beta^4} = 0$$

По определению Гейне возьмем последовательность $(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}) \rightarrow (0, 0)$, тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1/m^4}{2/m^4} = \frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению — есть.

Определение 5 (Повторный предел).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

Замечание. Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

Пример.

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У данной последовательности есть предел по совокупности

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0, \text{ так как } |g(x, y)| \leq |(x, y)|$$

$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ существует и равен 0 $\iff x = 0$ или $x = \frac{1}{k}, k \in K$. Тогда внутренний предел не определен в проколотой окрестности, а значит повторного предела действительно нет.

Если \vec{x}_0 — предельная точка области определения $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 тогда и только тогда, когда $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D(f)}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Если \vec{x}_0 — изолированная точка $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 .

Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

Теорема 2 (Непрерывность сложной функции многих переменных). *Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0 = (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)}) \in D$, функции $g_j(\vec{x}), j = 1, \dots, n$ непрерывны в точке $\vec{x}_0 \in G \subset \mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)}, j = 1, \dots, n$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$ непрерывна в \vec{x}_0 .*

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне:

$$\begin{aligned} \{\vec{x}_k\} \subset D(h) : \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 &\hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(\vec{x}_k) = g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)} \implies \\ &\implies (g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{y}_0 \implies f(g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_0) \end{aligned}$$

□

Теорема 3 (Кантор). *Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K .*

Доказательство. (От противного). Определение равномерной непрерывности на K :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geq \varepsilon$$

Построим две последовательности по $\delta := 1, \frac{1}{2}, \dots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K : |\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{2,k}| < \frac{1}{k} \hookrightarrow |f(\vec{x}_{1,k}) - f(\vec{x}_{2,k})| \geq \varepsilon$$

По критерию компактности $\exists \{\vec{x}_{1,k_j}\} : \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$, тогда

$$|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0| \leq |\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}| + |\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0| \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как f непрерывна в \vec{x}_0 , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}_{1,k_j}) - f(\vec{x}_{2,k_j})| \geq \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие. □

Определение 6 (Линейная связность). Множество A в \mathbb{R}^n называется линейно связным, если $\forall \vec{x} \neq \vec{y} \in A$ существует кривая $\gamma_i : [a, b] \rightarrow A$ ($\gamma_i \subset A$) такая, что $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$.

Определение 7 (Связность). Метрическое пространство X называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Утверждение 1. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.

Множество $G \subset A$ открыто в $A \iff \exists \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ открытое, такое, что $G = \mathcal{G} \cap A$.

Доказательство. G открыто в A , значит $\forall x \in G \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$. Возьмем $\mathcal{G} := \bigcup_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$. Тогда $G = \mathcal{G} \cap A$. \square

Замечание.

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \{\vec{y} \in A : |\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon\}$$

Теорема 4. Если $A \subset \mathbb{R}^n$ линейно связно, то оно связно.

Доказательство. (От противного). Если A — не связно, то найдутся G_1, G_2 — открытые множества в A , такие, что

$$G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad G_1 \cup G_2 = A$$

Пусть $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$. A — линейно связно, следовательно

$$\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

Обозначим $T := \sup \{t : \gamma(t) \in G_1\}$, $T \in [a, b]$. Предположим, что $\gamma(T) \in G_1$, тогда $\exists G_1 = \mathcal{G}_1 \cap A$. Так как $\gamma(T) \in \mathcal{G}_1$, то, $U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathcal{G}_1$. T точно меньше b , а значит, $\exists \delta > 0 : \gamma([T, T + \delta]) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$. То есть, $\gamma(T)$ не лежит в G_1 . Аналогично доказывается, что $\gamma(T)$ не лежит в G_2 , и отсюда получаем противоречие. \square

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример. Контрпример иллюстрирован на [рис. 6.1](#). Данное множество очевидно является связным, и в то же время не является линейно связным.

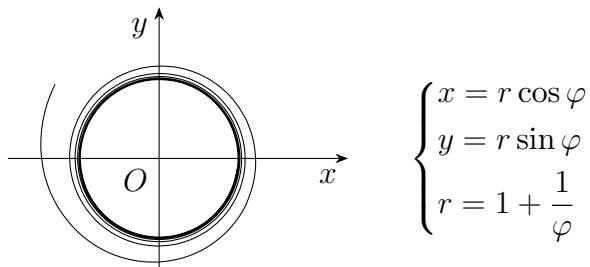


Рис. 6.1: Контрпример

Лекция 3 (11.02.2026)

Лемма 2. Множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда E — промежуток.

Доказательство. По [теореме 4](#), из того, что E промежуток следует, что E линейно связно, а значит и связно. Пусть E не промежуток, тогда

$$\exists x_1, x_2 \in E : [x_1, x_2] \not\subset E \wedge \exists c \in (x_1, x_2) \setminus E$$

Тогда построим два открытых множества в E : $G_1 = (-\infty, c) \cap E, G_2 = (c, +\infty) \cap E$. Данные множества открыты в E , непусты, непересекаются между собой и $G_1 \cup G_2 = E$, следовательно E не связно. \square

Лемма 3. *Если X — связное метрическое пространство, $f : X \rightarrow Y$ непрерывно, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. (От противного). Представим $f(X) = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \mathcal{G}_i \cap f(X), G_i \neq \emptyset, i = 1, 2, G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Тогда $f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2) = X$. Противоречие. \square

Теорема 5 (Больцано-Коши в \mathbb{R}^n). *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ связно, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то*

$$\forall A, B : \exists \vec{a}, \vec{b} \in E : f(\vec{a}) = A \wedge f(\vec{b}) = B \quad \forall \gamma \in (A, B) \hookrightarrow \exists \vec{c} \in E : f(\vec{c}) = \gamma$$

Доказательство. По [лемме 3](#), $f(E)$ связно, тогда по [лемме 2](#) $f(E)$ — промежуток. В таком случае требуемое следует из определения промежутка. \square

Теорема 6. *Каждое открытое связное множество в \mathbb{R}^n линейно связно.*

Доказательство. (От противного). Пусть G — открытое и связное множество. Тогда если G не линейно связное, то $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$ такие, что их нельзя соединить кривой в G . Введем следующие множества:

$$G_1 := \{\vec{x} \in G : \vec{x} \text{ нельзя соединить с } \vec{x}_1 \text{ кривой в } G\}; \quad G_2 = G \setminus G_1$$

Данные множества очевидно непустые и не пересекаются.

Докажем, что G_2 открыто в G . Пусть $\vec{x}_0 \in G_2 \subset G$ тогда $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G$. Отсюда $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_2$, значит G_2 — открыто. Теперь докажем, что G_1 открыто. От противного,

$$\exists \vec{x}_0 \in G_1 : \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap G_2 \neq \emptyset$$

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset G \hookrightarrow \vec{y} \in U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \cap G_2$$

Противоречие.

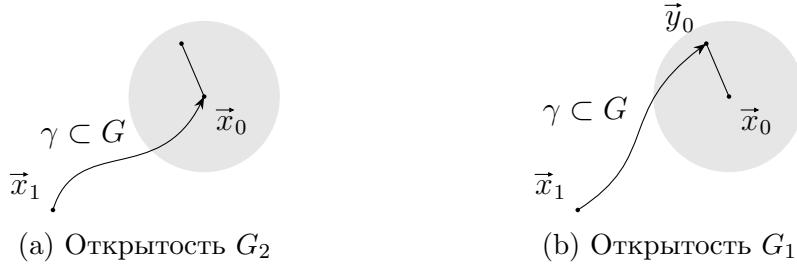


Рис. 6.2: Примеры на \mathbb{R}^2 для [теоремы 6](#)

\square

§2 Дифференцируемость функций многих переменных

Определение 1 (Дифференцируемость в точке). Пусть f — действительнозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда f называется дифференцируемой в точке \vec{x}_0 , если существует вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ такой, что полное приращение функции f в точке \vec{x}_0 , обозначаемое $\Delta y := f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ представимо в виде $\Delta y = (\vec{A}, \Delta \vec{x}) + o(|\Delta \vec{x}|)$, $\Delta \vec{x} \rightarrow \vec{0}$. Кроме того:

- * $\Delta \vec{x}$ называется вектором приращений аргументов.
- * $(\vec{A}, \Delta \vec{x}) = dy = df$ называется дифференциалом функции f .
- * \vec{A} называется градиентом f и обозначается $\text{grad } f$.
- * Вектор приращений независимых аргументов считается вектором дифференциалов этих переменных, $\Delta \vec{x} = d\vec{x}$.

Определение 2 (Частичное приращение функции). Частичным (частным) приращением функции f в точке $\vec{x}_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$ по переменной x_j называется $\Delta_j f = f(\vec{x}_0 + \Delta_j \vec{x}) - f(\vec{x}_0)$, где $\Delta_j \vec{x} = (0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0)$, $j = 1, \dots, n$.

$\Delta_j f$ является приращением функции одного переменного

$$\varphi_j(x_j) := f(x_{1,0}, \dots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \dots, x_{n,0})$$

то есть $\Delta_j f = \Delta \varphi_j(x_{j,0})$.

Определение 3 (Частная производная). Частной производной функции f в точке \vec{x}_0 по переменной x_j называется производная (если она существует) функции φ_j в точке $x_{j,0}$. Обозначается:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) := \frac{d\varphi_j}{dx_j}(x_{j,0})$$

Теорема 1. Если f дифференцируема в точке \vec{x}_0 , то она имеет частные производные в этой точке по всем переменным x_j , $j = 1, \dots, n$, причем,

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right)$$

Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Пусть $\Delta \vec{x} := \Delta_j \vec{x}$, тогда

$$\Delta y = f(\vec{x}_0 + \Delta_j \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta_j f = \Delta \varphi_j(x_{j,0}) = (A_j, \Delta_j \vec{x}) + o(|\Delta_j \vec{x}|) = A_j \Delta x_j + o(|\Delta x_j|)$$

$$|\Delta_j \vec{x}| = |\Delta x_j| \rightarrow 0 \iff \Delta x_j \rightarrow 0$$

Тогда φ_j дифференцируема в точке $x_{j,0}$, причем $\varphi_j(x_{j,0}) = A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Положим $\vec{x}_0 = (0, 0)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

Таким образом частные производные существуют. С другой стороны

$$\Delta y = \Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Хотим доказать, что

$$\Delta y \neq o(|(\Delta x, \Delta y)|), \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$$

Возьмем вектор $(\Delta x, \Delta x) \rightarrow (0, 0)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \neq o(\Delta x)$$

Что означает, что эта функция не является ни дифференцируемой, ни непрерывной.

Пример.

$$g(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

Для данной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(\Delta x, 0) - g(0, 0)}{\Delta x} = 0$$

На сей раз возьмем $\Delta g = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}$, тогда введем полярные координаты

$$\begin{cases} \Delta x = r \cos \varphi \\ \Delta y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \left(r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |(\Delta x, \Delta y)| \right)$$

После такой замены получим

$$0 \leq \Delta g = r \sqrt{|\cos \varphi \sin \varphi|} \leq r$$

То есть функция непрерывна в нуле, но в то же время, $\Delta g \neq o(r)$, а значит не дифференцируема.

Теорема 2. Если f дифференцируема в \vec{x}_0 , то она непрерывна в \vec{x}_0

Доказательство. Хотим доказать, что $\Delta y \rightarrow 0$ при $\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow \vec{0}$. Применим неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(\vec{A}, \Delta \vec{x})| \leq |\vec{A}| \cdot |\Delta \vec{x}|$$

Отсюда следует требуемое. □

Теорема 3 (Достаточное условие дифференцируемости). Если в некоторой окрестности точки \vec{x}_0 f имеет частные производные по всем переменным, непрерывные в \vec{x}_0 , то f дифференцируема в \vec{x}_0 .

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Delta y &= \\ &= (f(x_{1,0} + \Delta x_1, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n)) + \\ &\quad + (f(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0} + \Delta x_3, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n)) + \\ &\quad \quad \quad + \dots + \\ &\quad + (f(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n-1,0}, x_{n,0} + \Delta x_n) - f(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})) =\end{aligned}$$

Теперь к каждой паре слагаемых в скобках применим теорему Лагранжа

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_1 + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{1,0}, \xi_2, x_{3,0} + \Delta x_3, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_2 + \\ &\quad \quad \quad + \dots + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{1,0}, \dots, x_{n-1,0}, \xi_n) \cdot \Delta x_n =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\Delta x_n + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n,0} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1,0}, x_{2,0} + \Delta x_2, \dots, x_{n-1,0} + \Delta x_{n-1} + \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) \bullet\end{aligned}$$

!

□

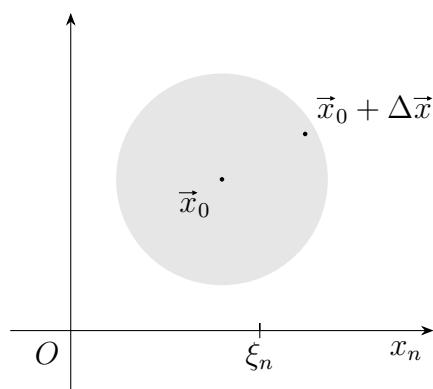


Рис. 6.3: Иллюстрация к [теореме 3](#)

Лекция 4 (13.02.2026)

Замечание. Условие [теоремы 3](#) не является необходимым.

Пример.

$$y = \sqrt[3]{x^2 y^2}$$

Замечание. Так же как и для функций одного переменного, из дифференцируемости f, g в точке \vec{x}_0 следует дифференцируемость в точке \vec{x}_0

- * $f \pm g$,
- * $f \cdot g$,
- * $\frac{f}{g}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$,

а также следующие равенства в точке \vec{x}_0

- * $d(f \pm g) = df \pm dg$,
- * $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$,
- * $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$.

Теорема 4. Если f дифференцируема в точке $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, а функции $g_j(\vec{x})$ дифференцируемы в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, причем $g_j(\vec{x}_0) = y_{j,0}$, $\vec{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{n,0})$, ($j = 1, \dots, m$), то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ дифференцируема в точке \vec{x}_0 , причем

$$\text{grad } h(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \text{grad } g_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta h(\vec{x}_0) &= f(g_1(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x})) - f(g_1(\vec{x}_0), \dots, g_m(\vec{x}_0)) = \\ &= \Delta f(\vec{y}_0) = (\text{grad } f(\vec{y}_0), \Delta \vec{y}) + o(|\Delta \vec{y}|) = \\ &= \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } g_1(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) + o_1(|\Delta \vec{x}|) \\ \vdots \\ (\text{grad } g_m(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) + o_m(|\Delta \vec{x}|) \end{pmatrix} + o(|\Delta \vec{y}|) = \\ &= \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\text{grad } g_1(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_m(\vec{x}_0), \Delta \vec{x} \end{pmatrix} + \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} o_1(|\Delta \vec{x}|) \\ \vdots \\ o_m(|\Delta \vec{x}|) \end{pmatrix} + o(|\Delta \vec{y}|) = \\ &= (\text{grad } f(\vec{x}_0), \Delta \vec{x}) + o(|\Delta \vec{x}|), \quad \Delta \vec{x} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. \square

Следствие. (Инвариантность формы первого дифференциала). Формула для дифференциала функции $f(\vec{x}) : df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ справедлива как в случае, когда x_1, \dots, x_n — независимые переменные, так и в случае, когда x_j — дифференцируемые функции от других независимых переменных.

Доказательство. Пусть $f(\vec{x}) = f(g_1(\vec{t}), \dots, g_n(\vec{t})) =: h(\vec{t})$. Тогда

$$\begin{aligned} df = dh &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial h}{\partial t_k} dt_k = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dg_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \end{aligned}$$

□

§3 Геометрический смысл градиента и дифференцируемости

Определение 1 (Область). Область — это открытое связное множество.

Определение 2 (Замкнутая область). Замкнутая область — это замыкание области.

Определение 3 (Параметрически заданная поверхность). Параметрически заданной поверхностью называется множество точек пространства \mathbb{R}^3 , заданных с помощью непрерывных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ на замкнутой области $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 4 (Касательная плоскость). Плоскость, проходящая через точку N_0 параметрически заданной поверхности называется касательной к этой поверхности, если угол между ней и любой секущей, проходящей через точки N_0 и N поверхности стремится к нулю при $N \rightarrow N_0$.

Определение 5. График функции $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in \bar{\Omega}$:

$$\{(x, y, z) : (x, y) \in \bar{\Omega}, z = f(x, y)\}$$

Теорема 1. Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то ее график имеет касательную плоскость в точке (x_0, y_0, z_0) , $z_0 = f(x_0, y_0)$, заданную уравнением

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ясно, что заданная плоскость проходит через точку $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Нормаль к ней имеет координаты $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) =: \vec{n}$

Доказательство.

$$\overrightarrow{N_0N} : (x - x_0, y - y_0, f(x, y) - f(x_0, y_0))$$

Надо доказать, что

$$\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0N})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{N_0N}|} \rightarrow 0$$

при $(x - x_0, y - y_0) \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0 N})}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{N_0 N}|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (f(x, y) - f(x_0, y_0))}{|\vec{n}| \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (f(x, y) - f(x_0, y_0))^2}} \right| &\leqslant \\ &\leqslant \frac{|o(|\Delta x|)|}{1 \cdot |\Delta x|} \end{aligned}$$

□

Определение 6. Производной функции f в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ называется предел (если он существует)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Теорема 2. Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то она имеет производные в этой точке по всем направлениям $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = (\text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{l})$

Доказательство.

$$\frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{(\text{grad } f(\vec{x}_0), t\vec{l}) + o(|t\vec{l}|)}{t} = (\text{grad } f(\vec{x}_0), \vec{l}) + o(1)$$

□

Предметный указатель

Теоремы

Глава 6

Теорема 1.	9
Теорема 2. Непрерывность сложной функции многих переменных	10
Теорема 3. Кантор	10
Теорема 4.	11
Теорема 5. Больцано-Коши в R^n	12
Теорема 6.	12
<hr/> <p style="text-align: center;">§2</p> <hr/>	
Теорема 1.	13
Теорема 2.	14
Теорема 3. Достаточное условие дифференцируемости	14
Теорема 4.	16
<hr/> <p style="text-align: center;">§3</p> <hr/>	
Теорема 1.	17
Теорема 2.	18

Леммы

Глава 6

Лемма 1.	8
Лемма 2.	11
Лемма 3.	12

Определения

Глава 6

Определение 1. Функция многих переменных	8
Определение 2. Предел функции многих переменных	8
Определение 3. Предел по совокупности переменных	8
Определение 4. Предел по направлению .	8
Определение 5. Повторный предел	9
Определение 6. Линейная связность	10
Определение 7. Связность	11
<hr/> <p style="text-align: center;">§2</p> <hr/>	
Определение 1. Дифференцируемость в точке	13
Определение 2. Частичное приращение функции	13
Определение 3. Частная производная	13
<hr/> <p style="text-align: center;">§3</p> <hr/>	
Определение 1. Область	17
Определение 2. Замкнутая область	17
Определение 3. Параметрически заданная поверхность	17
Определение 4. Касательная плоскость .	17
Определение 5.	17
Определение 6.	18
<hr/> <p style="text-align: center;">Утверждения</p> <hr/>	
<hr/> <p>Глава 6</p> <hr/>	
Утверждение 1.	11