

**Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Богданов Илья Игоревич*

весна 2026

Оглавление

Предисловие	2
1 Многочлены	3
§1 Корни многочленов	3
2 Линейные преобразования	7
§1 Инвариантные подпространства	7
§2 Собственные векторы	9
Приложения	
Предметный указатель	14

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

↪ – выполняется;
: – такой (ая, ое), что.

Глава 1

Многочлены

Лекция 1 (04.02.2026)

§1 Корни многочленов

Напоминание.

- * Многочлен над полем F единственным образом представляется в виде $P = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$, причем единственным образом. Все многочлены над полем F образуют кольцо, обозначаемое $F[x]$, а также алгебру над F .
- * Базис $F[x]$ — это $(1, x, x^2, \dots)$
- * Значения многочлена: Если A — произвольная алгебра над F , $a \in A$, то $P(a) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot a + p_2 \cdot a^2 + \dots + p_na^n \in A$
- * $P(a) + Q(a) = (P + Q)(a)$
- * $(PQ)(a) = P(a) \cdot Q(a)$

Напоминание.

- * A делим на $B \neq 0$:

$$A = QB + R, \deg R < \deg B$$

- * У многочленов A и B существует наибольший общий делитель:

$$\text{НОД}(P, Q) = AP + BQ, A, B \in F[x]$$

- * Основная теорема арифметики: любой ненулевой многочлен единственным образом раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Определение 1 (Корень многочлена). Пусть $D \in F[x]$, (F — поле), $a \in F$. Тогда a — корень многочлена P , если $P(a) = 0$.

Теорема 1 (Безу). *Пусть $P \in F[x]; a \in F$. Тогда a — корень P тогда и только тогда, когда $(x - a) | P$.*

Доказательство. Разделим P на $x - a$ с остатком. $D = Q \cdot (x - a) + R$, где $\deg R < \deg(x - a) = 1$, то есть R — константа. Подставим a в P : $P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R = R$. a — корень $P \iff P(a) = 0 \iff R = 0 \iff (x - a) \mid P$. \square

Замечание. В любом случае $R = P(a)$.

Определение 2 (Кратность корня). Пусть a — корень многочлена $P \in F[x] : P \neq 0$. Его кратность — это наибольшее натуральное число k такое, что $(x - a)^k \mid P$.

Теорема 2 (О сумме кратностей корней). *Пусть $P \in F[x] : P \neq 0, \deg P = n$. Тогда сумма кратностей всех его корней, не превосходит n .*

Доказательство. Пусть a_1, \dots, a_d — корни P , k_1, \dots, k_d — их кратности, тогда $(x - a_i)^{k_i} \mid P$. Но $(x - a_i)$ и $(x - a_j)$ взаимно просты при различных $a_i \neq a_j$. Поэтому $Q := \prod_{i=1}^d (x - a_i)^{k_i} \mid P$. Значит, $\deg Q = \sum_{i=1}^d k_i \leq \deg P = n$. \square

Замечание. Если $\sum_i k_i = n$, то это означает, что $P = \alpha \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, $\alpha \in F^*$

Определение 3 (Линейно факторизуемый многочлен). Такой многочлен называется линейно факторизуемым.

Теорема 3 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен над полем комплексных чисел линейно факторизуем.*

Замечание. Поля с таким же свойством называются алгебраически замкнутыми.

Определение 4 (Кратный корень). Корень $a \in F$ многочлена $P \in F[x]$ называется кратным корнем, если его кратность > 1 , иначе он называется простым.

Определение 5 (Формальная производная многочлена). Пусть $P \in F[x] : P = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n = \sum_i p_i x^i$. Его формальной производной называется $P' = p_1 + 2p_2x + \dots +$

$$np_nx^{n-1} = \sum_{i \geq 1} ip_i x^{i-1}$$

Утверждение 1 (Свойства формальной производной).

1. $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha \cdot P' + \beta \cdot Q'$, $\alpha, \beta \in F$, $P, Q \in F[x]$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$ и, более того, $(P_1 \dots P_n)' = P'_1 P_2 \dots P_n + P_1 P'_2 P_3 \dots P_n + \dots + P_1 \dots P_{n-1} P'_n$
3. $(P(Q))' = P'(Q) \cdot Q'$

Доказательство.

1. Если $P = \sum_i p_i x^i, Q = \sum_i q_i x^i$, то $(\alpha P + \beta Q)' = \left(\sum_i (\alpha p_i + \beta q_i) x^i \right)' = \sum_i (\alpha p_i + \beta q_i) \cdot i \cdot x^{i-1} = \alpha \cdot \sum_i i p_i x^{i-1} + \beta \cdot \sum_i i q_i x^{i-1} = \alpha P' + \beta Q'$.

Замечание. Мы доказали, что взятие производной от многочлена — это линейное преобразование $\varphi : F[x] \rightarrow F[x]$.

2. При фиксированном многочлене Q обе части равенства являются линейными операторами, зависящими от P . Линейный оператор однозначно задается значениями этого оператора на базисе, следовательно достаточно проверить равенство для $P = x^n, n \geq 0$. Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда $Q = x^m, m \geq 0$.

$$P'Q + Q'P = nx^{n-1} \cdot x^m + mx^{m-1} \cdot x^n = (n+m)x^{n+m-1} = (x^{n+m})' = (PQ)'$$

Равенство $(P_1, P_2, \dots, P_n)' = \dots$ доказывается индукцией по n . База при $n = 2$ уже доказана. Переход: $(P_1, \dots, P_{n-1}, P_n) = (P_1, \dots, P_{n-1})'P_n + P_1 \dots P_{n-1}P_n' = P_1'P_2 \dots P_n + \dots + P_1 \dots P_{n-1}'P_n + P_1 \dots P_{n-1}P_n'$.

3. Опять же, левая и правая части линейны по P , а значит достаточно проверить равенство при $P = x^n$. Тогда $(P(Q))' = (Q^n)' = nQ^{n+1}Q' = P'(Q) \cdot Q'$

□

Теорема 4 (Условия кратности корня). Пусть $P \in F[x], a \in F$.

1. *a является кратным корнем многочлена P тогда и только тогда, когда $P(a) = P'(a) = 0$.*
2. *Если a — корень кратности $\geq k$, то $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$.*
3. *Если $P(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$, то a — корень p кратности $\geq k$ при условии, что $\text{char } F = 0$ или $\text{char } F \geq k$.*

Доказательство. Пусть t — кратность корня a , то есть, $P = (x - a)^t Q$, где $Q(a) \neq 0$. Тогда $P' = ((x - a)^t)'Q + (x - a)^t Q' = t(x - a)^{t-1}Q + (x - a)^t Q' = (x - a)^{t-1}(tQ + (x - a)Q')$.

1. Если $t = 1$, то $P'(a) = tQ(a) + 0 = Q(a) \neq 0$. Если $t \geq 2$, то $P'(a) = 0$.
2. Если a — корень кратности $\geq k$ в P , то a — корень кратности $\geq k - 1$ в $P' \implies \dots \implies a$ — корень кратности ≥ 1 в $P^{(k-1)}$.

Замечание. Подставляя во вторую скобку a , получаем $tQ(a) + 0 = tQ(a)$, что будет нулем в случае, если $p \mid t$.

3. Заметим, что при $\text{char } F = 0$ или $t < \text{char } F$, корень a многочлена P' имеет кратность $t - 1$, так как $tQ(a) \neq 0$. Значит, a — корень P кратности $t \implies a$ — корень P' кратности $t - 1 \implies a$ — корень P'' кратности $t - 2 \implies \dots \implies a$ — корень $P^{(t)}$ кратности 0, то есть, не корень. Таким образом, если $\text{char } F = 0$ или $k \leq \text{char } F$, то случай $t < k$ невозможен, иначе $P^{(t)}(a) \neq 0$. Поэтому $t \geq k$.

□

Пример. Рассмотрим многочлен $Q = x^p - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$. У него есть корень $a = 1$ кратности $\leq p$. С другой стороны, $Q' = px^{p-1} = 0 = Q'' = Q''' = \dots$ Таким образом, $Q(1) = Q'(1) = Q''(1) = \dots = 0$. Значит третье утверждение применимо при $k = p$, следовательно, 1 — корень Q кратности $\geq p$. Значит, $Q = \alpha(x - 1)^p = (x - 1)^p$.

Замечание. С некоторыми изменениями, тот же метод работает для выяснения, на какую степень неприводимого многочлена Q делится P .

Глава 2

Линейные преобразования

§1 Инвариантные подпространства

Напоминание.

- * Линейное преобразование пространства V_i — это линейное отображение $\varphi : V \rightarrow V$, то есть такое, что

1. $\varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2)$
2. $\varphi(\alpha\vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{v}), \quad \alpha \in F$

(Считаем, что V — конечномерное пространство над полем F)

- * Если $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — базис в V , то φ однозначно задается своей матрицей в базисе $\varphi \xleftrightarrow[e]{} A$. Причем такой, что $\varphi(e) = (\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n)) = eA$. Если $\varphi \xleftrightarrow[e]{} A, \vec{v} \xleftrightarrow[e]{} \alpha$, то $\varphi(\vec{v}) \xleftrightarrow[e]{} A\alpha$.
- * $\mathcal{L}(V)$ — множество всех линейных преобразований V — линейное пространство над F , а также кольцо, то есть алгебра над F . Для фиксированного базиса e сопоставление $\varphi \xleftrightarrow[e]{} A$ дает изоморфизм алгебр $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$.
- * Если e, e' — базисы в V , $e' = eS$, причем $\varphi \xleftrightarrow[e]{} A, \varphi \xleftrightarrow[e']{} A'$, то $A' = S^{-1}AS$.
- * Матрицы $A, A' \in M_n(F)$ подобны, если $\exists S \in GL_n(F) : A' = S^{-1}AS$.

Определение 1 (Инвариантное подпространство). Пусть V — линейное пространство над F , $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U \leqslant V$. Подпространство U называется инвариантным относительно φ (или φ -инвариантным), если $\varphi(U) \subseteq U$ (то есть, $\forall \vec{u} \in U \Rightarrow \varphi(\vec{u}) \in U$).

Замечание. Это свойство достаточно проверять для базиса в U .

Напоминание.

- * Если U подпространство в V , то $\varphi(U)$ тоже подпространство в V .
- * Образ линейного оператора: $\varphi \in \mathcal{L}(V) \implies \text{Im } \varphi = \varphi(V) \leqslant V$
- * Ядро линейного оператора: $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\vec{0}) \leqslant V$

Замечание. Если U — φ -инвариантное подпространство, то $\varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$.

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U \leq V$, $u \in e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — базис в V такой, что его префикс $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ — базис в U . Тогда U — φ -инвариантное подпространство V тогда и только тогда, когда

$$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Доказательство. U — φ -инвариантное подпространство, значит $\forall \vec{u} \in U \rightarrow \varphi(\vec{u}) \in U$, а значит, $\forall i = 1, \dots, k \rightarrow \varphi(\vec{e}_i) \in U$, то есть, $\forall i = 1, \dots, k \rightarrow \varphi(\vec{e}_i) \in \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle$. Отсюда получаем требуемое. \square

Замечание. Если U — φ инвариантно и

$$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

то $\varphi|_U \underset{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)}{\longleftrightarrow} B$.

Замечание. Если $V = U_1 \oplus U_2$, где U_1, U_2 — φ -инвариантны, то в базисе, согласованным с U_1 и U_2 , имеем

$$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Утверждение 2. Пусть U_1, U_2 — φ -инвариантные подпространства, тогда $U_1 \cap U_2$ и $U_1 + U_2$ также φ -инвариантны.

Доказательство.

1. $\vec{u} \in U_1 \cap U_2 \implies \varphi(\vec{u}) \in U_1 \cap U_2$
2. Если $\vec{u} \in U_1 + U_2$, то $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \implies \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}_1) + \varphi(\vec{u}_2) \in U_1 + U_2$

\square

Утверждение 3. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, причем $\varphi\psi = \psi\varphi$. Тогда $\text{Ker } \psi$ и $\text{Im } \psi$ инвариантны относительно φ .

Доказательство. Пусть $\vec{u} \in \text{Ker } \psi$, то есть, $\psi(\vec{u}) = \vec{0}$. Необходимо проверить, что $\varphi(\vec{u}) \in \text{Ker } \psi$, то есть, $\psi(\varphi(\vec{u})) = \psi\varphi(\vec{u}) = \varphi\psi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{u})) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$.

Пусть теперь $\vec{u} \in \text{Im } \psi$, то есть, $\vec{u} = \psi(\vec{v}), \vec{v} \in V$. Тогда $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{v})) = \psi(\varphi(\vec{v})) \in \text{Im } \psi$. \square

Замечание. Мы будем применять это утверждение в случае $\varphi = P(\psi)$, где P — это некоторый многочлен, ведь любой такой многочлен коммутирует с φ .

Лекция 2 (11.02.2026)

Замечание. $\text{ker } \varphi, \text{Im } \varphi$ — φ -инвариантны.

Утверждение 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Тогда $\forall U \leq \text{ker } \varphi$ — φ -инвариантно, и $\forall W \geq \text{Im } \varphi$ — φ -инвариантен.

Доказательство.

1. Если $U \leqslant \ker \varphi$, то $\varphi(U) = 0 \leqslant U$.
2. Если $W \geqslant \operatorname{Im} \varphi$, то $\varphi(W) \leqslant \varphi(V) = \operatorname{Im} \varphi \leqslant W$.

□

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U \leqslant V$, тогда:

1. Пусть $P \in F[x]$, тогда, если U является φ -инвариантным, то оно и $P(\varphi)$ -инвариантно.
2. Пусть $\lambda \in F$, тогда U является φ -инвариантным тогда и только тогда, когда U инвариантно относительно $\varphi - \lambda$.

□

!

Замечание. $\lambda \bullet$

Доказательство. 1. Если U φ -инвариантно, то $\varphi(U) \leqslant U$, значит $\varphi^2(U) = \varphi(\varphi(U)) \leqslant \varphi(U) \leqslant U$. Тогда, по тем же соображениям, $\varphi^n(U) \leqslant U$. А тогда, если $P = p_n x^n + \dots + p_0$, то $P(\varphi)(U) = (p_n \varphi^n + p_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + p_0)(U) \leqslant p_n \varphi^n(U) + p_{n-1} \varphi^{n-1}(U) + \dots + p_0 U \leqslant U$.

2. Из первого пункта, если U φ -инвариантно, то U также $(\varphi - \lambda)$ -инвариантно. Но $\varphi = (\varphi - \lambda) + \lambda$, а значит если U $(\varphi - \lambda)$ -инвариантно, то U также и φ -инвариантно.

□

§2 Собственные векторы

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $U \leqslant V$ — φ -инвариантно, $\dim U = 1$. Тогда $U = \langle \vec{u} \rangle$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, и $\varphi(\vec{u}) \in U$, то есть $\varphi(\vec{u})$

Определение 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. Вектор $\vec{v} \in V$ называется собственным вектором (СВ) преобразования φ , если

1. $\vec{v} \neq \vec{0}$.
2. $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $\lambda \in F$. В этом случае λ называется собственным значением оператора φ , соответствующему вектору \vec{v} .

Определение 2. Скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ является собственным (С3) значением оператора φ , если он соответствует хотя бы одному собственному вектору.

Если \vec{v} — собственный вектор с собственным значением λ , то $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0} \iff (\varphi - \lambda)(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \in \ker(\varphi - \lambda)$

Определение 3. Если λ — собственное значение оператора φ , то подпространство $\ker(\varphi - \lambda) = V_\lambda$ называется собственным подпространством оператора φ .

Замечание. Подпространство V_λ состоит в точности из $\vec{0}$ и всех собственных векторов соответствующих λ .

Замечание. Иногда используют понятие V_λ и для λ , не являющихся собственными значениями, тогда $V_\lambda = 0$.

Если λ является собственным значением

Пусть e — базис в V , $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A$. Тогда $\varphi - \lambda \underset{e}{\leftrightarrow} A - \lambda E$.

Утверждение 1. Если λ — собственное значение φ , то $\ker(\varphi - \lambda) \neq 0$, а значит, $\varphi - \lambda$ — вырожденный оператор, то есть его матрица $A - \lambda E$ — вырожденная матрица, а тогда $|A - \lambda E| = 0$.

Определение 4. Пусть $A \in M_n(F)$, тогда ее характеристический многочлен — это многочлен такой, что $\chi_A(x) = |A - xE| =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (2.2.1)$$

Следствие. Если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} A$, то $\lambda \in F$ — собственное значение φ тогда и только тогда, когда λ — корень χ_A .

Утверждение 2. Пусть $A, B \in M_n(F)$ — подобные матрицы, то есть $\exists S \in GL_n(F) : B = S^{-1}AS$. Тогда $\chi_A = \chi_B$.

Доказательство. $\chi_B = |B - xE| = |X^{-1}AS - x \cdot S^{-1}ES| = |S^{-1}(A - xE)S| = |S^{-1}| \cdot |A - xE| \cdot |S| = \chi_A$. \square

Следствие. Характеристический многочлены матрицы φ не зависят от выбора базиса.

Определение 5. Этот многочлен называется характеристическим многочленом преобразования φ и обозначается χ_φ .

Распишем формулу (2.2.1):

$$\chi_A = (2.2.1) = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$$

Определение 6. Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Тогда ее след — это $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Утверждение 3. Если $\chi_A = (-1)^n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_0$, то $p_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr } A$, $p_0 = \det A$.

Доказательство. В формуле полного разложения $|A - xE|$, кроме элементов главной диагонали, каждое слагаемое имеет минимум 2 сомножителя не с главной диагонали, следовательно, p_{n-1} — это коэффициент при x^{n-1} в $\prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$, то есть $p_{n-1} =$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} \text{tr } A.$$

$$p_0 = \chi_A(0) = |A - oE| = |A|.$$

\square

Упражнение. Выразите p_k в терминах миноров матрицы A порядка $n - k$.

Следствие. Если A и B — подобные матрицы, то $\text{tr } A = \text{tr } B$ и $\det A = \det B$.

Определение 7. Если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, то его след $\text{tr } \varphi$ — это след любой его матрицы, а его определитель — это определитель любой его матрицы.

Утверждение 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — его различные собственные значения, тогда собственные подпространства V_{λ_i} образуют прямую сумму:

$$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

Доказательство. Предположим противное, то есть $\vec{0} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k$, где $\vec{v}_i \in V_{\lambda_i}$, и не все \vec{v}_i — нули. Тогда выберем такое представление, в котором наибольшее количество нулевых векторов. Выкинув все λ_i , для которых $\vec{v}_i = 0$ получаем:

$$\vec{0} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k, \vec{v}_i \in V_{\lambda_i}, \vec{v}_i \neq 0$$

Тогда $l > 1$. $\vec{0} = \sum_{i=1}^l \vec{v}_i$. Значит, $\vec{0} = \varphi(\vec{0}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^l v_i\right) = \sum_{i=1}^l \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \vec{v}_i$. $\vec{0} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{l-1} \lambda_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{l-1} (\lambda_i - \lambda_l) \vec{v}_i$. Таким образом мы получили представление нуля в виде суммы $l - 1$ вектора. Противоречие. \square

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$, и пусть χ_φ имеет n различных корней (в поле F). Тогда существует базис e пространства V такой, что φ в этом базисе диагональна, то есть $\varphi \leftrightarrow \underset{e}{\text{diag}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$

$$= \bullet$$

Замечание. Если $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — базис, то $\varphi \leftrightarrow \underset{e}{\text{diag}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1 \wedge \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2 \wedge \dots$

Доказательство. Все λ_i являются собственными значениями φ , выберем при $r = 1, \dots, n$ собственный вектор \vec{e}_i с собственным значением λ_i . Тогда $\vec{e}_i \in V_{\lambda_i}$, поскольку сумма $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$ — прямая, то есть $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — линейно независимы, а значит это базис. Тогда $\varphi \leftrightarrow \underset{e}{\text{diag}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. \square

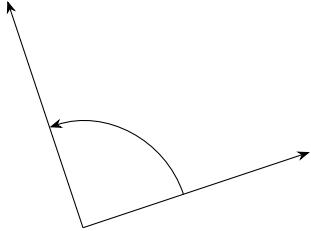
Определение 8. Оператор $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ называется диагонализуемым, если существует базис e пространства V такой, что $\varphi \leftrightarrow \underset{e}{A}$ — диагональна.

Определение 9. Матрица $M \in M_n(F)$ называется диагонализуемой, если она подобна диагональной матрице.

Замечание. В координатах оператор с диагональной матрицей $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ действует как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Геометрически — это растяжение вдоль i -той оси в λ_i раз.



Замечание. Не любой оператор диагонализуем. Например, на V_2 рассмотрим оператор поворота на $\pi/2$. Он не диагонализуем, что у него нет собственного вектора. Его матрица в ОНБ:

$$\varphi \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1: поворот А также

$$\chi_\varphi = \chi_A = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

Замечание. Интерпретируем на матричный язык тот факт, что V_{λ_i} образует прямую сумму. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — собственные значения φ , тогда

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \oplus U = V$$

В соответствующем базисе имеем

$$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Определение 10. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, λ — его собственное значение. Тогда

- * алгебраическая кратность собственного значения λ — это кратность его как кратности χ_φ .
- * Геометрическая кратность — это $\dim V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda)$.

Утверждение 5. Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(L)$, $U \leqslant V$ — φ -инвариантное подпространство. Тогда $\psi = \varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$, и $\chi_\psi \mid \chi_\varphi$.

Доказательство. Пусть $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — базис в V такой, что $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ — базис в U . Тогда

$$\varphi \underset{e}{\leftrightarrow} \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & c \end{array} \right)$$

где $\psi \underset{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)}{\longleftrightarrow} A$. Тогда $\chi_\varphi = \chi_D = |D - xE| =$

$$= \begin{vmatrix} A - xE & B \\ 0 & C - xE \end{vmatrix} =$$

$$= |A - xE| \cdot |C - xE| = \chi_A \cdot \chi_C = \chi_\psi \cdot \chi_C.$$

□

Теорема 2. Если λ — собственное значение φ , то его алгебраическая кратность не меньше геометрической кратности.

Доказательство. Пусть $U = V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda)$ — инвариантно относительно φ . Значит, χ_φ делится на $\chi_{\varphi|_U}$, но $\varphi|_U = \lambda \leftrightarrow \lambda E$. Тогда, если $\dim U = k$, то $\chi_{\varphi|_U} = |\lambda E - xE| = (\lambda - x)^k \mid \chi_\varphi$. Значит, кратность корня λ у $\chi_\varphi \geq k$. \square

Замечание. Геометрическая кратность λ — это $\dim \ker(\varphi - \lambda)$. Если $\varphi \xrightarrow{e} A$, то $\varphi - \lambda \xrightarrow{e} A - \lambda E$, и $\dim \ker(\varphi - \lambda) = \dim V - \dim \text{Im}(\varphi - \lambda) = n - \text{rk}(A - \lambda E)$.

Пример. Если

$$A = J_n = \bullet$$



Предметный указатель

Теоремы

Глава 1

Теорема 1. Безу	3
Теорема 2. О сумме кратностей корней	4
Теорема 3. Основная теорема алгебры	4
Теорема 4. Условия кратности корня	5

Глава 2

Теорема 1	11
Теорема 2	13

Определения

Глава 1

Определение 1. Корень многочлена	3
Определение 2. Кратность корня	4
Определение 3. Линейно факторизуемый многочлен	4
Определение 4. Кратный корень	4
Определение 5. Формальная производная многочлена	4

Глава 2

Определение 1. Инвариантное подпространство	7
§2	
Определение 1	9

Определение 2	9
Определение 3	9
Определение 4	10
Определение 5	10
Определение 6	10
Определение 7	11
Определение 8	11
Определение 9	11
Определение 10	12

Утверждения

Глава 1

Утверждение 1. Свойства формальной производной	4
--	---

Глава 2

Утверждение 1	8
Утверждение 2	8
Утверждение 3	8
Утверждение 4	8

§2

Утверждение 1	10
Утверждение 2	10
Утверждение 3	10
Утверждение 4	11
Утверждение 5	12