

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

# МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
<b>5 Неопределенный интеграл</b>	<b>3</b>
§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций . . . . .	3
<b>6 Дифференциальное исчисление функций многих переменных</b>	<b>8</b>
§1 Предел и непрерывность . . . . .	8
<b>Приложения</b>	
<b>Предметный указатель</b>	<b>12</b>

# **Предисловие**

*В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.*

## **Предметный указатель**

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

## **Используемые обозначения**

↪ – выполняется;  
: – такой (ая, ое), что.

# Глава 5

## Неопределенный интеграл

### §3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

**Определение 1.**  $R(u, v, \dots, w)$  — рациональная функция, если

$$R(u, v, \dots, w) = \frac{P(u, v, \dots, w)}{Q(u, v, \dots, w)}$$

где  $P, Q$  — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

где  $R$  — рациональная функция,  $ad - bc \neq 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}$

В этом случае  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , тогда введем следующую замену:  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$ , и получим

$$(ax+b) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$
$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

Подвид вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

приводится к рациональной функции аналогично, но в качестве  $q$  берем НОК от  $r_1, \dots, r_n$ .

2.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

Подстановки Эйлера:

2.1.  $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$

Возведем это равенство в квадрат

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{at}}$$

$x'$  – рациональная функция от  $t$ .

2.2.  $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

Снова возведем в квадрат и получим

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$

Тогда мы можем выразить  $x$

$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$$

Отсюда  $x'$  – рациональная функция

2.3.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

В данном случае

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{|a|}(x - x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части

$$a(x - x_1)(x - x_2) = |a|(x - x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим

$$x = \frac{ax_2 - |a|x_1t^2}{a - |a|t^2}$$

Значит,  $x'$  – рациональная функция

3.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Введем  $Y = ax_2 + bx + c$  и  $y = \sqrt{Y}$ , тогда

$$R(x, y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем записать выражение через многочлены  $P$ :

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} = \frac{(P_1(x) + P_2(x)y)(P_3(x) - P_4(x)y)}{P_3^2(x) - P_4^2(x)Y} = R_1(x) + R_2(x)y$$

$$\int P(x)y dx = \int \frac{P(x)Y}{y} dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y} dx$$

Пусть  $\deg P = n$ , тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y} dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

где  $\deg Q = n - 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} = \frac{Q'(x) \cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y} dx$$

Продифференцируем:

$$(x^{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^{m-1}y &= (m-1) \int \frac{x^{m-2}(ax_2+bx+c)}{y} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2ax^m+bx^{m-1}}{y} dx = \\ &= a(m-1)V_m + (m-\frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2} \end{aligned}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{k}{y} dx$$

Введем замену  $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a \left( \frac{1}{t} + \alpha \right)^2 + b \left( \frac{1}{t} + \alpha \right) + c} = \frac{\tilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{k}{y} dx = - \int \frac{At^k |t|}{t^2 \tilde{y}} dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

где  $m, n, p \in Q$ . Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1.  $p \in \mathbb{Z}, \nu$  — НОК знаменателей  $m, n$ . Возьмем  $x = t^\nu$ , тогда  $dx = \nu t^{\nu-1} dt$ . Пусть теперь  $p \in \mathbb{Z}$ , тогда сделаем замену  $x^n = z$ , откуда  $x = z^{\frac{1}{n}}$ ;  $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$ . Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bz)^p dz$$

Обозначим рациональное  $q := \frac{m+1}{n} - 1$ , тогда

$$\frac{1}{n} \int z^q (a+bz)^p dz$$

4.2.  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $a+bz = t^\mu$ , где  $\mu$  — знаменатель  $p$

$$z = \frac{1}{b} (t^\mu - a)$$

$$dz = \frac{1}{b} \mu t^{\mu-1} dt$$

4.3.  $p+q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q (a+bz)^p dz = \int z^{p+q} \left( \frac{a+bz}{z} \right)^p dz$$

Введем замену:  $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

**Теорема 1** (Абеля). Пусть  $R$  — многочлен степени  $2g+2$  без кратных корней. Если существуют многочлены  $P, Q \neq 0$  такие, что  $P^2 - Q^2 R = 1$ , то найдется многочлен  $r$  степени  $g$  такой, что

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left( \ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) = \\ & = \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left( P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) \left( P - Q\sqrt{R} \right) - \left( P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) \left( P + Q\sqrt{R} \right)}{\left( P - Q\sqrt{R} \right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P(QR' + 2Q'R) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем  $P^2 - Q^2R = 1$ :

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q(2Q'R + QR') \implies P' = Q_2$$

$$\deg P' = \deg Q + g$$

□

6.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная подстановка:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

# Глава 6

## Дифференциальное исчисление функций многих переменных

### §1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

**Определение 1** (Функция многих переменных). Функцией многих переменных называем функцию  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2** (Предел функции многих переменных). Пусть  $\vec{x}_0$  — предельная точка  $D$ . Тогда предел определяется:

\* по Коши:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \wedge 0 < \rho_x(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}), l) < \varepsilon$$

\* по Гейне:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_m) = l$$

**Определение 3** (Предел по совокупности переменных). Если  $\vec{x}_0$  — внутренняя точка  $D \cup \{\vec{x}_0\}$ , то  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  называется пределом по совокупности переменных.

**Определение 4** (Предел по направлению). Если  $D = D_{\vec{d}}$  — луч с началом в точке  $\vec{x}_0$  в направлении вектора  $\vec{d}$  (или его пересечение с проколотой окрестностью точки  $\vec{x}_0$ ), то предел  $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$  называется пределом по направлению  $\vec{d}$ .

**Лемма 1.**

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

*Доказательство.* Достаточно заметить, что

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d}, t \geq 0 \ (0 < t < r)$$

□

**Теорема 1.** Если существует предел  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$  по совокупности переменных, то существует предел  $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$  по любому направлению  $\vec{d} \neq 0$ . Обратное, вообще говоря, не верно.

*Доказательство.* Из определения по Коши, если  $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ , то  $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ . □

**Пример.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По лемме 1 получаем

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_{(\alpha,\beta)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(0 + t\alpha, 0 + t\beta) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3\alpha\beta^2}{t^2\alpha^2 + t^4\beta^4} = 0$$

По определению Гейне возьмем последовательность  $(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}) \rightarrow (0, 0)$ , тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1/m^4}{2/m^4} = \frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению — есть.

**Определение 5** (Повторный предел).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

*Замечание.* Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

**Пример.**

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У данной последовательности есть предел по совокупности

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0, \text{ так как } |g(x, y)| \leq |(x, y)|$$

$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$  существует и равен 0  $\iff x = 0$  или  $x = \frac{1}{k}, k \in K$ . Тогда внутренний предел не определен в проколотой окрестности, а значит повторного предела действительно нет.

Если  $\vec{x}_0$  — предельная точка области определения  $D(f)$ , то  $f$  непрерывна в  $\vec{x}_0$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D(f)}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ . Если  $\vec{x}_0$  — изолированная точка  $D(f)$ , то  $f$  непрерывна в  $\vec{x}_0$ .

Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

**Теорема 2** (Непрерывность сложной функции многих переменных). *Если  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $\vec{y}_0 = (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)}) \in D$ , функции  $g_j(\vec{x}), j = 1, \dots, n$  непрерывны в точке  $\vec{x}_0 \in G \subset \mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)}, j = 1, \dots, n$ , то сложная функция  $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$  непрерывна в  $\vec{x}_0$ .*

*Доказательство.* Возьмем последовательность Гейне:

$$\begin{aligned} \{\vec{x}_k\} \subset D(h) : \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 &\hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(\vec{x}_k) = g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)} \implies \\ &\implies (g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{y}_0 \implies f(g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_0) \end{aligned}$$

□

**Теорема 3** (Кантор). *Если  $f$  непрерывна на компактном множестве  $K \subset \mathbb{R}^n$ , то  $f$  равномерно непрерывна на  $K$ .*

*Доказательство.* (От противного). Определение равномерной непрерывности на  $K$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geq \varepsilon$$

Построим две последовательности по  $\delta := 1, \frac{1}{2}, \dots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K : |\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{2,k}| < \frac{1}{k} \hookrightarrow |f(\vec{x}_{1,k}) - f(\vec{x}_{2,k})| \geq \varepsilon$$

По критерию компактности  $\exists \{\vec{x}_{1,k_j}\} : \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$ , тогда

$$|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0| \leq |\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}| + |\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0| \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как  $f$  непрерывна в  $\vec{x}_0$ , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}_{1,k_j}) - f(\vec{x}_{2,k_j})| \geq \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие. □

**Определение 6** (Линейная связность). Множество  $A$  в  $\mathbb{R}^n$  называется линейно связным, если  $\forall \vec{x} \neq \vec{y} \in A$  существует кривая  $\gamma_i : [a, b] \rightarrow A (\gamma_i \subset A)$  такая, что  $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$ .

**Определение 7** (Связность). Метрическое пространство  $X$  называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

**Утверждение 1.** Множество  $A \subset \mathbb{R}^n$  является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.

Множество  $G \subset A$  открыто в  $A \iff \exists \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$  открытое, такое, что  $G = \mathcal{G} \cap A$ .

*Доказательство.*  $G$  открыто в  $A$ , значит  $\forall x \in G \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$ . Возьмем  $\mathcal{G} := \bigcup_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$ . Тогда  $G = \mathcal{G} \cap A$ .  $\square$

*Замечание.*

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \{\vec{y} \in A : |\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon\}$$

**Теорема 4.** Если  $A \subset \mathbb{R}^n$  линейно связано, то оно связано.

*Доказательство.* (От противного). Если  $A$  — не связано, то найдутся  $G_1, G_2$  — открытые множества в  $A$ , такие, что

$$G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad G_1 \cup G_2 = A$$

Пусть  $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$ .  $A$  — линейно связано, следовательно

$$\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

Обозначим  $T := \sup \{t : \gamma(t) \in G_1\}$ ,  $T \in [a, b]$ . Предположим, что  $\gamma(T) \in G_1$ , тогда  $\exists G_1 = \mathcal{G}_1 \cap A$ . Так как  $\gamma(T) \in \mathcal{G}_1$ , то,  $U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathcal{G}_1$ .  $T$  точно меньше  $b$ , а значит,  $\exists \delta > 0 : \gamma([T, T + \delta]) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$ . То есть,  $\gamma(T)$  не лежит в  $G_1$ . Аналогично доказывается, что  $\gamma(T)$  не лежит в  $G_2$ , и отсюда получаем противоречие.  $\square$

*Замечание.* Обратное, вообще говоря, не верно.

**Пример.** Контрпример иллюстрирован на [рис. 6.1](#). Данное множество очевидно является связным, и в то же время не является линейно связным.

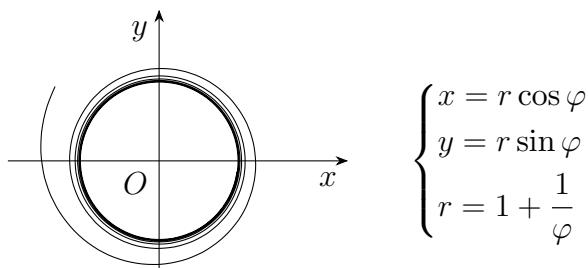


Рис. 6.1: Контрпример

# Предметный указатель

## Теоремы

Глава 5

Теорема 1. Абеля .....	6
Глава 6 .....	
Теорема 1 .....	9
Теорема 2. Непрерывность сложной функции многих переменных .....	10
Теорема 3. Кантор .....	10
Теорема 4 .....	11

## Леммы

Глава 6

Лемма 1 .....	8
---------------	---

## Определения

Глава 5

Определение 1 .....	3
Глава 6 .....	
Определение 1. Функция многих переменных .....	8
Определение 2. Предел функции многих переменных .....	8
Определение 3. Предел по совокупности переменных .....	8
Определение 4. Предел по направлению ..	8
Определение 5. Повторный предел .....	9
Определение 6. Линейная связность .....	10
Определение 7. Связность .....	11

## Утверждения

Глава 6 .....	
Утверждение 1 .....	11