Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится предметный указатель, с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

$\hookrightarrow$ – выполняется;
: – такой (ая, ое), что.

Глава 5

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение. $R(u, v, \ldots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \ldots, w) = \frac{P(u, v, \ldots, w)}{Q(u, v, \ldots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1. $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

   где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in Q$

   В этом случае $r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, тогда введем следующую замену: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, и получим

   $$(ax+b) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$

   $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

   Подвид вида

   $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

   приводится к рациональной функции аналогично, но в качестве q берем НОК от $r_1, \ldots, r_n$.

2. $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

   Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$

Возведем это равенство в квадрат

$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

x' – рациональная функция от t.

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

Снова возведем в квадрат и получим

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$

Тогда мы можем выразить x

$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a-t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

В данном случае

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{|a|}(x-x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части

$$a(x-x_1)(x-x_2) = |a|\,(x-x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим

$$x = \frac{ax_2 - |a|\,x_1t^2}{a-|a|\,t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

Введем $Y = ax_2+bx+c$ и $y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x,y) = \frac{R_1(x)+R_2(x)y}{R_3(x)+R_4(x)y}$$

Затем мы можем записать выражение через многочлены P:

$$R(x,y) = \frac{P_1(x)+P_2(x)y}{P_3(x)+P_4(x)y} = \frac{(P_1(x)+P_2(x)y)\,(P_3(x)-P_4(x)y)}{P_3^2(x)-P_4^2(x)Y} = R_1(x)+R_2(x)y$$

$$\int P(x)y dx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

где $\deg Q = n-1, \lambda \in \mathbb{R}$. После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} = \frac{Q'(x)\cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$\left(x^{m-1}y\right)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}\left(2ax+b\right)}{2y}$$

Тогда

$$x^{m-1}y = (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax_2+bx+c)}{y}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2ax^m + bx^{m-1}}{y}dx =$$

$$a(m-1)V_m + (m-\frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^k \frac{dx}{y}$$

Введем замену $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t}+\alpha\right) + c} = \frac{\widetilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^k \frac{dx}{y} = -\int \frac{At^k\,|t|}{t^2\widetilde{y}}dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

где $m, n, p \in Q$ Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p \in \mathbb{Z}, \nu$ — НОК знаменателей m, n Возьмем $x = t^\nu$, тогда $dx = \nu t^{\nu-1}dt$ Пусть теперь $p \ni \mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n = z$, откуда $x = z^{\frac{1}{n}}; dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$ Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bz\right)^p dz$$

Обозначим рациональное $q := \frac{m+1}{n} - 1$, тогда

$$\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz$$

4.2. $q \in \mathbb{Z}$ $a + bz = t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z = \frac{1}{b}\left(t^\mu - a\right)$$

$$dz = \frac{1}{b}\mu t^{\mu-1}dt$$

4.3. $p + q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q(a+bz)^p dz = \int z^{p+q}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема (Абеля). *Пусть R — многочлен степени $2g+2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что*

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}}dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\left(\ln\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right) =$$

$$= \frac{P-Q\sqrt{R}}{P+Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P+Q'\sqrt{R}+\frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P-Q\sqrt{R}\right) - \left(P'-Q'\sqrt{R}-\frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P+Q\sqrt{R}\right)}{\left(P-Q\sqrt{R}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P\left(QR' + 2Q'R\right) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q\left(2Q'R + QR'\right) \implies P' = Q_2$$

$\deg P' = \deg Q + g$ $\square$

6.
$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

Определение 1 (Функция многих переменных)**.** Функцией многих переменных называем функцию $f : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Предел функции многих переменных)**.** Пусть $\vec{x}_0$ — предельная точка D. Тогда предел определяется:

* по Коши:

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\vec{x} \in D \wedge 0 < \rho_x(\vec{x},\vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}),l) < \varepsilon$$

* по Гейне:

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall\{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m\to\infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m\to\infty} f(\vec{x}_m) = l$$

Определение 3 (Предел по совокупности переменных)**.** Если $\vec{x}_0$ — внутренняя точка $D \cup \{\vec{x}_0\}$, то $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ называется пределом по совокупности переменных.

Определение 4 (Предел по направлению)**.** Если $D = D_{\vec{d}}$ — луч с началом в точке $\vec{x}_0$ в направлении вектора $\vec{d}$ (или его пересечение с проколотой окрестностью точки $\vec{x}_0$), то предел $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ называется пределом по направлению $\vec{d}$.

Лемма 1.

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d},\ t \geqslant 0\ (0 < t < r)$$

□

Теорема 1. *Если существует предел* $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x})$ *по совокупности переменных, то существует предел* $\lim\limits_{\substack{\vec{x} \to \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ *по любому направлению* $\vec{d} \neq 0$. *Обратное, вообще говоря, не верно.*

Доказательство. Из определения по Коши, если $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$, то $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. □

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

По лемме 1 получаем

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D_{(\alpha,\beta)}}} f(x,y) = \lim_{t\to 0+} f(0+t\alpha, 0+t\beta) = \lim_{t\to 0+} \frac{t^3\alpha\beta^2}{t^2\alpha^2 + t^4\beta^4} = 0$$

По определению Гейне возьмем последовательность $\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) \to (0,0)$, тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1/m^4}{2/m^4} = \frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению — есть.

Определение 5 (Повторный предел)**.**

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

Замечание. Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

Пример.

$$g(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

У данной последовательности есть предел по совокупности

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0, \text{ так как } |g(x,y)| \leqslant |(x,y)|$$

$\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)$ существует и равен $0 \iff x = 0$ или $x = \frac{1}{k}, k \in K$. Тогда внутренний предел не определен в проколотой окрестности, а значит повторного предела действительно нет.

Если $\vec{x}_0$ — предельная точка области определения $D(f)$, то f непрерывна в $\vec{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in D(f)}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Если $\vec{x}_0$ — изолированная точка $D(f)$, то f непрерывна в $\vec{x}_0$.

Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

Теорема 2 (Непрерывность сложной функции многих переменных)**.** *Если $f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0 = \left(y_0^{(1)}, \ldots, y_0^{(n)}\right) \in D$, функции $g_j(\vec{x}), j = 1, \ldots, n$ непрерывны в точке $\vec{x}_0 \in G \subset \mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)}, j = 1, \ldots, n$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f\left(g_1(\vec{x}), \ldots, g_n(\vec{x})\right)$ непрерывна в $\vec{x}_0$.*

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне:

$$\{\vec{x}_k\} \subset D(h) : \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{k\to\infty} g_j(\vec{x}_k) = g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)} \implies$$
$$\implies (g_1(\vec{x}_k), \ldots, g_n(\vec{x}_k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{y}_0 \implies f(g_1(\vec{x}_k), \ldots, g_n(\vec{x}_k)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\vec{y}_0)$$

□

Теорема 3 (Кантор)**.** *Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. (От противного). Определение равномерной непрерывности на K:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geqslant \varepsilon$$

Построим две последовательности по $\delta := 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K : |\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{2,k}| < \frac{1}{k} \hookrightarrow |f(\vec{x}_{1,k}) - f(\vec{x}_{2,k})| \geqslant \varepsilon$$

По критерию компактности $\exists\left\{\vec{x}_{1,k_j}\right\} : \lim\limits_{j\to\infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$, тогда

$$\left|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0\right| \leqslant \left|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}\right| + \left|\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0\right| \implies \lim_{j\to\infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как f непрерывна в $\vec{x}_0$, то

$$\lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j\to\infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$\left|f(\vec{x}_{1,k_j}) - f(\vec{x}_{2,k_j})\right| \geqslant \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие. □

Определение 6 (Линейная связность)**.** Множество A в $\mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если $\forall\vec{x} \neq \vec{y} \in A$ существует кривая $\gamma_i : [a, b] \to A\,(\gamma_i \subset A)$ такая, что $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$.

Определение 7 (Связность)**.** Метрическое пространство X называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Утверждение 1. *Множество A в $\mathbb{R}^n$ является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.*

Множество $G \subset A$ открыто в A $\iff$ $\exists \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ открытое, такое, что $G = \mathcal{G} \cap A$.

Доказательство. G открыто в A, значит $\forall x \in G \ \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$. Возьмем $\mathcal{G} := \bigcup\limits_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$. Тогда $G = \mathcal{G} \cap A$. □

Замечание.

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \{\vec{y} \in A : |\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon\}$$

Теорема 4. *Если $A \in \mathbb{R}^n$ линейно связно, то оно связно.*

Доказательство. (От противного). Если A — не связно, то найдутся G_1, G_2 — открытые множества в A, такие, что

$$G_1 \neq \varnothing, G_2 \neq \varnothing, \quad G_1 \cap G_2 = \varnothing \quad G_1 \cup G_2 = A$$

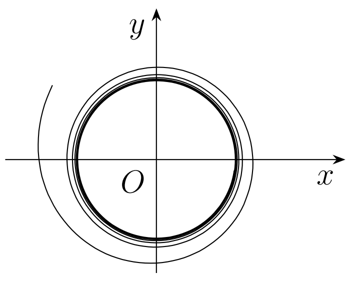
Пусть $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$. A — линейно связно, следовательно

$$\exists \gamma : [a,b] \to A : \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

Обозначим $T := \sup\{t : \gamma(t) \in G_1\}$, $T \in [a,b]$. Предположим, что $\gamma(T) \in G_1$, тогда $\exists G_1 = \mathcal{G}_1 \cap A$. Так как $\gamma(T) \in \mathcal{G}_1$, то, $U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathcal{G}_1$. T точно меньше b, а значит, $\exists \delta > 0 : \gamma([T, T+\delta)) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$. То есть, $\gamma(T)$ не лежит в G_1. Аналогично доказывается, что $\gamma(T)$ не лежит в G_2, и отсюда получаем противоречие. □

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример. Контрпример иллюстрирован на рис. 6.1. Данное множество очевидно является связным, и в то же время не является линейно связным.



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r = 1 + \dfrac{1}{\varphi} \end{cases}$$

Рис. 6.1: Контрпример

Лекция 3 (11.02.2026)

Лемма 2. *Множество $E \subset \mathbb{R}$ связно тогда и только тогда, когда E — промежуток.*

Доказательство. По теореме 4, из того, что E промежуток следует, что E линейно связно, а значит и связно. Пусть E не промежуток, тогда

$$\exists x_1, x_2 \in E : [x_1, x_2] \not\subset E \wedge \exists c \in (x_1, x_2) \setminus E$$

Тогда построим два открытых множества в E: $G_1 = (-\infty, c) \cap E, G_2 = (c, +\infty) \cap E$. Данные множества открыты в E, непусты, непересекаются между собой и $G_1 \cup G_2 = E$, следовательно E не связно. □

Лемма 3. *Если X — связное метрическое пространство, $f : X \to Y$ непрерывно, то $f(X)$ связно.*

Доказательство. (От противного). Представим $f(X) = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \mathcal{G}_i \cap f(X), G_i \neq \varnothing, i = 1, 2, G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Тогда $f^{-1}(\mathcal{G}_1) \cup f^{-1}(\mathcal{G}_2) = X$. Противоречие. □

Теорема 5 (Больцано-Коши в $\mathbb{R}^n$)**.** *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ связно, $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна, то*

$$\forall A, B : \exists \vec{a}, \vec{b} \in E : f(\vec{a}) = A \wedge f(\vec{b}) = B \ \forall \gamma \in (A, B) \ \hookrightarrow \ \exists \vec{c} \in E : f(\vec{c}) = \gamma$$

Доказательство. По лемме 3, $f(E)$ связно, тогда по лемме 2 $f(E)$ — промежуток. В таком случае требуемое следует из определения промежутка. □

Теорема 6. *Каждое открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$ линейно связно.*

Доказательство. (От противного). Пусть G — открытое и связное множество. Тогда если G не линейно связное, то $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in G$ такие, что их нельзя соединить кривой в G. Введем следующие множества:

$$G_1 := \{\vec{x} \in G : \vec{x} \text{ нельзя соединить с } \vec{x}_1 \text{ кривой в } G\}; \quad G_2 = G \setminus G_1$$

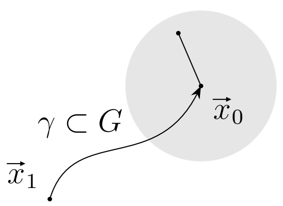
Данные множества очевидно непустые и не пересекаются.

Докажем, что G_2 открыто в G. Пусть $\vec{x}_0 \in G_2 \subset G$ тогда $\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G$. Отсюда $U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subset G_2$, значит G_2 — открыто. Теперь докажем, что G_1 открыто. От противного,

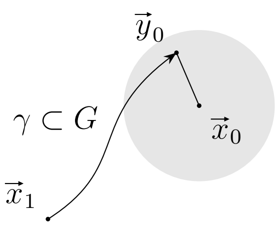
$$\exists \vec{x}_0 \in G_1 : \forall \varepsilon > 0 \ \hookrightarrow \ U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap G_2 \neq \varnothing$$

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \subset G \ \hookrightarrow \ \vec{y} \in U_{\varepsilon_1}(\vec{x}_0) \cap G_2$$

Противоречие.



(a) Открытость G_2



(b) Открытость G_1

Рис. 6.2: Примеры на $\mathbb{R}^2$ для теоремы 6

□

§2 Дифференцируемость функций многих переменных

Определение 1 (Дифференцируемость в точке)**.** Пусть f — действительнозначная функция, определенная в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда f называется дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$, если существует вектор $\vec{A} \in \mathbb{R}^n$ такой, что полное приращение функции f в точке $\vec{x}_0$, обозначаемое $\Delta y := f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ представимо в виде $\Delta y = (\vec{A}, \Delta\vec{x}) + o(|\Delta\vec{x}|), \Delta\vec{x} \to \vec{0}$. Кроме того:

- $\Delta\vec{x}$ называется вектором приращений аргументов.
- $(\vec{A}, \Delta\vec{x}) = dy = df$ называется дифференциалом функции f.
- $\vec{A}$ называется градиентом f и обозначается $\operatorname{grad} f$.
- Вектор приращений независимых аргументов считается вектором дифференциалов этих переменных, $\Delta\vec{x} = d\vec{x}$.

Определение 2 (Частиченое приращение функции)**.** Частичным (частным) приращением функции f в точке $\vec{x}_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$ по переменной x_j называется $\Delta_j f = f(\vec{x}_0 + \Delta_j\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$, где $\Delta_j\vec{x} = (0, \ldots, 0, \Delta x_j, 0, \ldots, 0), j = 1, \ldots, n$.

$\Delta_j f$ является приращением функции одного переменного

$$\varphi_j(x_j) := f(x_{1,0}, \ldots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \ldots, x_{n,0})$$

то есть $\Delta_j f = \Delta\varphi_j(x_{j,0})$.

Определение 3 (Частная производная)**.** Частной производной функции f в точке $\vec{x}_0$ по переменной x_j называется производная (если она существует) функции φ_j в точке $x_{j,0}$. Обозначается:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0) := \frac{d\varphi_j}{dx_j}(x_{j,0})$$

Теорема 1. *Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, то она имеет частные производные в этой точке по всем переменным $x_j, j = 1, \ldots, n$, причем,*

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\right)$$

Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Пусть $\Delta\vec{x} := \Delta_j\vec{x}$, тогда

$$\Delta y = f(\vec{x}_0 + \Delta_j\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta_j f = \Delta\varphi_j(x_{j,0}) = (A, \Delta_j\vec{x}) + o(|\Delta_j\vec{x}|) = A_j\Delta x_j + o(|\Delta x_j|)$$

$$|\Delta_j\vec{x}| = |\Delta x_j| \longrightarrow 0 \iff \Delta x_j \longrightarrow 0$$

Тогда φ_j дифференцируема в точке $x_{j,0}$, причем $\varphi_j(x_{j,0}) = A_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$. □

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Положим $\vec{x}_0 = (0,0)$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Таким образом частные производные существуют. С другой стороны

$$\Delta y = \Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Хотим доказать, что

$$\Delta y \neq o(|(\Delta x, \Delta y)|), \;\; (\Delta x, \Delta y) \longrightarrow 0$$

Возьмем вектор $(\Delta x, \Delta x) \longrightarrow (0,0)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\Delta f = \frac{\Delta x \cdot \Delta x}{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \neq o(\Delta x)$$

Что означает, что эта функция не является ни дифференцируемой, ни непрерывной.

Пример.

$$g(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

Для данной функции

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(\Delta x 0) - g(0,0)}{\Delta x} = 0$$

На сей раз возьмем $\Delta g = \sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}$, тогда введем полярные координаты

$$\begin{cases} \Delta x = r\cos\varphi \\ \Delta y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \left(r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |(\Delta x, \Delta y)|\right)$$

После такой замены получим

$$0 \leqslant \Delta g = r\sqrt{|\cos\varphi \sin\varphi|} \leqslant r$$

То есть функция непрерывна в нуле, но в то же время, $\Delta g \neq o(r)$, а значит не дифференцируема.

Теорема 2. *Если f дифференцируема в $\vec{x}_0$, то она непрерывна в $\vec{x}_0$*

Доказательство. Хотим доказать, что $\Delta y \to 0$ при $\overrightarrow{\Delta x} \to \vec{0}$. Применим неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$|(\vec{A}, \Delta\vec{x})| \leqslant |\vec{A}| \cdot |\Delta\vec{x}|$$

Отсюда следует требуемое. □

Теорема 3 (Достаточное условие дифференцируемости)**.** *Если в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$ f имеет частные производные по всем переменным, непрерывные в $\vec{x}_0$, то f дифференцируема в $\vec{x}_0$.*

Доказательство.

$$\begin{gathered}\Delta y = \\ = \big(f(x_{1,0}+\Delta x_1,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n) - f(x_{1,0},x_{2,0}+\Delta x_2,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n)\big) + \\ + \big(f(x_{1,0},x_{2,0}+\Delta x_2,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n) - f(x_{1,0},x_{2,0},x_{3,0}+\Delta x_3\dots,x_{n,0}+\Delta x_n)\big) + \\ +\dots+ \\ + \big(f(x_{1,0},x_{2,0},\dots,x_{n-1,0},x_{n,0}+\Delta x_n) - f(x_{1,0},\dots,x_{n,0})\big) =\end{gathered}$$

Теперь к каждой паре слагаемых в скобках применим теорему Лагранжа

$$\begin{gathered}= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_{2,0}+\Delta x_2,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n)\cdot\Delta x_1 + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{1,0},\xi_2,x_{3,0}+\Delta x_3,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n)\cdot\Delta x_2 + \\ +\dots+ \\ + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{1,0},\dots,x_{n-1,0},\xi_n)\cdot\Delta x_n =\end{gathered}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)\Delta x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\Delta x_n + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_{2,0}+\Delta x_2,\dots,x_{n,0}+\Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{1,0},x_{2,0}+\Delta x_2,\dots,x_{n-1,0}+\Delta x_{n-1}+\xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)$$

□

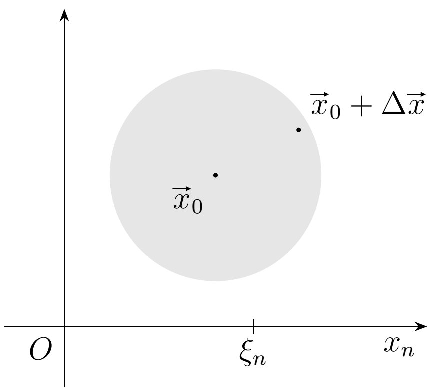


Рис. 6.3: Иллюстрация к теореме 3

Лекция 4 (13.02.2026)

Замечание. Условие теоремы 3 не является необходимым.

Пример.

$$y = \sqrt[3]{x^2y^2}$$

Замечание. Также как и для функций одного переменного, из дифференцируемости f, g в точке $\vec{x}_0$ следует дифференцируемость в точке $\vec{x}_0$

* $f \pm g$
* $f \cdot g$
* $\dfrac{f}{g}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$

а также следующие равенства в точке $\vec{x}_0$

* $d(f \pm g) = df \pm g$
* $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$
* $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$ при $g(\vec{x}_0) \neq 0$

Теорема 4. *Если f дифференцируема в точке $\vec{y}_0 \in R^m$, а функции $g_j(\vec{x})$ дифференцируемы в точке $\vec{x}_0 \in R^n$, причем $g_j(\vec{x}_0) = y_{j,0}$, $\vec{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{n,0})$, $j = 1, \dots, m$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, причем*

$$\operatorname{grad} h(\vec{x}_0) = \operatorname{grad} f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_m(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\Delta h(\vec{x}_0) &= f(g_1(\vec{x}_0 + \Delta x), \dots, g_m(\vec{x}_0 + \Delta x)) - f(g_1(\vec{x}_0), \dots, g_m(\vec{x}_0)) = \\
&= \Delta f(\vec{y}_0) = (\operatorname{grad} f(\vec{y}_0), \Delta y) + o(|\Delta y|) = \\
&= \operatorname{grad} f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} g_1(\vec{x}_0), \Delta x) + o_1(|\Delta x|) \\ \vdots \\ (\operatorname{grad} g_n(\vec{x}_0), \Delta x) + o_n(|\Delta x|) \end{pmatrix} + o(|\Delta y|) = \\
&= \operatorname{grad} f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} g_1(\vec{x}_0), \Delta x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_n(\vec{x}_0), \Delta x) \end{pmatrix} + \operatorname{grad} f(\vec{y}_0) \cdot \begin{pmatrix} o_1(|\Delta x|) \\ \vdots \\ o_n(|\Delta x|) \end{pmatrix} + o(|\Delta y|)
\end{aligned}$$

Тогда $\Delta y_j = (\operatorname{grad} g_j(\vec{x}_0), \Delta x) + o(|\Delta x|)$ где $y_i := g_i(\vec{x}_0 + \Delta x) - g_i(\vec{x}_0)$. □

Следствие. *(Инвариантность формы первого дифференциала). Формула для дифференциала функции $f(\vec{x}) : df = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ справедлива как в случае, когда $x_1, \dots, x_n$ — независимые переменные, так и в случае, когда x_j — дифференцируемы функции от других независимых переменных.*

Доказательство. Пусть $f(\vec{x}) = f(g_1(\vec{t}), \ldots, g_n(\vec{t})) =: h(\vec{t})$. Тогда

$$df = dh = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial h}{\partial t_k} dt_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial t_k} dt_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dg_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

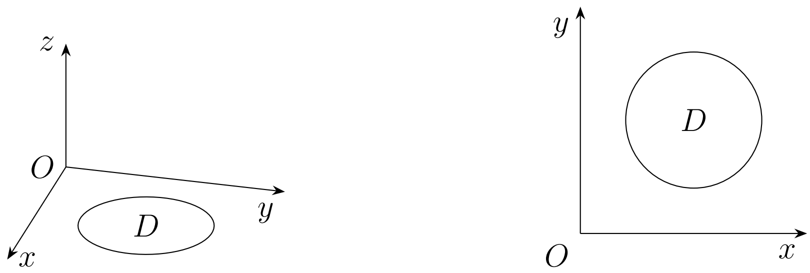
□

§3 Геометрический смысл градиента и дифференцируемости

Определение 1 (Область)**.** Область — это открытое связное множество.

Определение 2 (Замкнутая область)**.** Замкнутая область — это замыкание области.

Определение 3 (Параметрическая заданная поверхность)**.** Параметрическая заданной поверхностью называется множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, заданных с помощью непрерывных функций $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ на замкнутой области $\overline{D} \subset \mathbb{R}^2$.



(a) 3d (b) Вид сверху

Рис. 6.4: Параметрически заданная поверхность собственной персоной

Определение 4 (Касательная плоскость)**.** Плоскость, проходящая через точку N_0 параметрически заданной поверхности называется касательной к этой поверхности, если угол между ней и любой секущей, проходящей через точки N_0 и N поверхности стремится к нулю при $N \to N_0$.

Определение 5. График функции $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in \overline{\Omega}$:

$$\left\{ (x, y, z) : (x, y) \in \overline{\Omega}, z = f(x, y) \right\}$$

Теорема 1. *Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то ее график имеет касательную плоскость в точке (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$, заданную уравнением*

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ясно, что заданная плоскость проходит через точку $N_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Нормаль к ней имеет координаты $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right) =: \vec{n}$

Доказательство.

$$\overrightarrow{N_0N} : (x - x_0, y - y_0, f(x, y) - f(x_0, y_0))$$

Надо доказать, что

$$\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0N})}{|\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{N_0N}\right|} \to \vec{0}$$

при $(x - x_0, y - y_0) \to 0$. Тогда

$$\left|\frac{(\vec{n}, \overrightarrow{N_0N})}{|\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{N_0N}\right|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) - (f(x, y) - f(x_0, y_0))}{|\vec{n}| \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (f(x, y) - f(x_0, y_0))^2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|o(|\Delta x|)|}{1 \cdot |\Delta x|}$$

□

Определение 6. Производной функции f в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ по направлению $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ называется предел (если он существует)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Теорема 2. *Если f дифференцируема в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, то она имеет производные в этой точке по всем направлениям $\vec{l} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, причем $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{l})$*

Доказательство.

$$\frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{l}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \frac{(\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), t\vec{l}) + o(|t\vec{l}|)}{t} = (\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{l}) + o(1)$$

□

Предметный указатель

Теоремы

Леммы

Определения

Утверждения