Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится предметный указатель, с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

$\hookrightarrow$ – выполняется;
: – такой (ая, ое), что.

Глава -1

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение 1. $R(u, v, \dots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \dots, w) = \frac{P(u, v, \dots, w)}{Q(u, v, \dots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1. $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

   где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in Q$

   тогда $r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

   $$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q \iff (ax+b)) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$

   $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

   Подвид:

   $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$$

2. $$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

   где $a \neq 0$

   Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$
$$ax^2+bx+c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

x' – рациональная функция от t.

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$
$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$
$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a-t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

где $x_1 \neq x_2$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}(x-x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = |a|\,(x-x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим:

$$x = \frac{ax_2 - |a|\,x_1t^2}{a-|a|\,t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Введем $Y = ax_2 + bx + c, y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x,y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем (?) записать выражение через многочлены P:

$$R(x,y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} =$$

$$= \frac{(P_1(x)+P_2(x)y)\,(P_3(x)-P_r(x)y)}{P_3^2(x)-P_4^2(x)Y} =$$
$$= R_1(x)+R_2(x)y$$

$$\int P(x)ydx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

$\deg Q = n-1, \lambda \in \mathbb{R}$

После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} =$$

$$= \frac{Q'(x)\cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$(x_{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}\,(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$x^{m-1}y = (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax_2+bx+c)}{y}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2ax^m+bx^{m-1}}{y}dx =$$

$$a(m-1)V_m + (m-\frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^k \frac{dx}{y}$$

Введем замену $x-\alpha=\frac{1}{t}$

$$dx=-\frac{dt}{t^2}$$

$$y=\sqrt{a\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)^2+b\left(\frac{1}{t}+\alpha\right)+c}=\frac{\widetilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha}^k \frac{dx}{y}=-\int \frac{At^k\,|t|}{t^2\widetilde{y}}dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

где $m,n,p\in Q$

Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p\in\mathbb{Z},\nu$ — НОК знаменателей m, n Возьмем $x=t^\nu$, тогда $dx=\nu t^{\nu-1}dt$
Пусть теперь $p\ni\mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n=z$, откуда $x=z^{\frac{1}{n}}; dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$
Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n}\int z^{fracm+1n-1}\left(a+bz\right)^p dz$$

Обозначим рациональное $q:=\frac{m+1}{n}-1$, тогда

$$\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz$$

4.2. $q\in\mathbb{Z}$ $a+bz=t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z=\frac{1}{b}\left(t^\mu-a\right)$$

$$dz=\frac{1}{b}\mu t^{\mu-1}dt$$

4.3. $p+q\in\mathbb{Z}$

$$\int z^q(a+bz)^p dz=\int z^{p+q}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z}=t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема 1 (Абеля)**.** *Пусть R — многочлен степени $2g+2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2 R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что*

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\left(\ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right) =$$

$$= \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P - Q\sqrt{R}\right) - \left(P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}}\right)\left(P + Q\sqrt{R}\right)}{\left(P - Q\sqrt{R}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P\left(QR' + 2Q'R\right) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q\left(2Q'R + QR'\right) \implies P' = Q_2$$

$\deg P' = \deg Q + g$ $\square$

6.

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Предметный указатель

Теоремы

Определения