

Московский физико-технический институт  
Физтех-школа прикладной математики и информатики

# АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

## II СЕМЕСТР

Лектор: *Богданов Илья Игоревич*

весна 2026

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
<b>1 Многочлены</b>	<b>3</b>
§1 Корни многочленов . . . . .	3
<b>2 Линейные преобразования</b>	<b>7</b>
§1 Инвариантные подпространства . . . . .	7
§2 Собственные векторы . . . . .	9
<b>Приложения</b>	
<b>Предметный указатель</b>	<b>14</b>

# Предисловие

*В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.*

## Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

## Используемые обозначения

$\hookrightarrow$  – выполняется;

$:$  – такой (ая, ое), что.

# Глава 1

## Многочлены

Лекция 1 (04.02.2026)

### §1 Корни многочленов

**Напоминание.**

- \* Многочлен над полем  $F$  единственным образом представляется в виде  $P = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n$ , причем единственным образом. Все многочлены над полем  $F$  образуют кольцо, обозначаемое  $F[x]$ , а также алгебру над  $F$ .
- \* Базис  $F[x]$  — это  $(1, x, x^2, \dots)$
- \* Значения многочлена: Если  $A$  — произвольная алгебра над  $F$ ,  $a \in A$ , то  $P(a) = p_0 \cdot 1 + p_1 \cdot a + p_2 \cdot a^2 + \dots + p_n a^n \in A$
- \*  $P(a) + Q(a) = (P + Q)(a)$
- \*  $(PQ)(a) = P(a) \cdot Q(a)$

**Напоминание.**

- \*  $A$  делим на  $B \neq 0$ :

$$A = QB + R, \deg R < \deg B$$

- \* У многочленов  $A$  и  $B$  существует наибольший общий делитель:

$$\text{НОД}(P, Q) = AP + BQ, A, B \in F[x]$$

- \* Основная теорема арифметики: любой ненулевой многочлен единственным образом раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

**Определение 1** (Корень многочлена). Пусть  $D \in F[x]$ , ( $F$  — поле),  $a \in F$ . Тогда  $a$  — корень многочлена  $P$ , если  $P(a) = 0$ .

**Теорема 1** (Безу). Пусть  $P \in F[x]$ ;  $a \in F$ . Тогда  $a$  — корень  $P$  тогда и только тогда, когда  $(x - a) \mid P$ .

*Доказательство.* Разделим  $P$  на  $x - a$  с остатком.  $D = Q \cdot (x - a) + R$ , где  $\deg R < \deg(x - a) = 1$ , то есть  $R$  — константа. Подставим  $a$  в  $P$ :  $P(a) = Q(a) \cdot (a - a) + R = R$ .  $a$  — корень  $P \iff P(a) = 0 \iff R = 0 \iff (x - a) \mid P$ .  $\square$

*Замечание.* В любом случае  $R = P(a)$ .

**Определение 2** (Кратность корня). Пусть  $a$  — корень многочлена  $P \in F[x] : P \neq 0$ . Его кратность — это наибольшее натуральное число  $k$  такое, что  $(x - a)^k \mid P$ .

**Теорема 2** (О сумме кратностей корней). Пусть  $P \in F[x] : P \neq 0, \deg P = n$ . Тогда сумма кратностей всех его корней, не превосходит  $n$ .

*Доказательство.* Пусть  $a_1, \dots, a_d$  — корни  $P$ ,  $k_1, \dots, k_d$  — их кратности, тогда  $(x - a_i)^{k_i} \mid P$ . Но  $(x - a_i)$  и  $(x - a_j)$  взаимно просты при различных  $a_i \neq a_j$ . Поэтому  $Q := \prod_{i=1}^d (x - a_i)^{k_i} \mid P$ . Значит,  $\deg Q = \sum_{i=1}^d k_i \leq \deg P = n$ .  $\square$

*Замечание.* Если  $\sum_i k_i = n$ , то это означает, что  $P = \alpha \prod_{i=1}^d (x - a_i)^{k_i}, \alpha \in F^*$

**Определение 3** (Линейно факторизуемый многочлен). Такой многочлен называется линейно факторизуемым.

**Теорема 3** (Основная теорема алгебры). Любой многочлен над полем комплексных чисел линейно факторизуем.

*Замечание.* Поля с таким же свойством называются алгебраически замкнутыми.

**Определение 4** (Кратный корень). Корень  $a \in F$  многочлена  $P \in F[x]$  называется кратным корнем, если его кратность  $> 1$ , иначе он называется простым.

**Определение 5** (Формальная производная многочлена). Пусть  $P \in F[x] : P = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n = \sum_i p_ix^i$ . Его формальной производной называется  $P' = p_1 + 2p_2x + \dots + np_nx^{n-1} = \sum_{i \geq 1} ip_ix^{i-1}$

**Утверждение 1** (Свойства формальной производной).

1.  $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha \cdot P' + \beta \cdot Q', \quad \alpha, \beta \in F, \quad P, Q \in F[x]$
2.  $(PQ)' = P'Q + PQ'$  и, более того,  $(P_1 \dots P_n)' = P_1'P_2 \dots P_n + P_1P_2'P_3 \dots P_n + \dots + P_1 \dots P_{n-1}P_n'$
3.  $(P(Q))' = P'(Q) \cdot Q'$

*Доказательство.*

1. Если  $P = \sum_i p_i x^i, Q = \sum_i q_i x^i$ , то  $(\alpha P + \beta Q)' = \left( \sum_i (\alpha p_i + \beta q_i) x^i \right)' = \sum_i (\alpha p_i + \beta q_i) \cdot i \cdot x^{i-1} = \alpha \cdot \sum_i i p_i x^{i-1} + \beta \cdot \sum_i i q_i x^{i-1} = \alpha P' + \beta Q'$ .

*Замечание.* Мы доказали, что взятие производной от многочлена — это линейное преобразование  $\varphi : F[x] \rightarrow F[x]$ .

2. При фиксированном многочлене  $Q$  обе части равенства являются линейными операторами, зависящими от  $P$ . Линейный оператор однозначно задается значениями этого оператора на базисе, следовательно достаточно проверить равенство для  $P = x^n, n \geq 0$ . Аналогично, достаточно рассмотреть случай, когда  $Q = x^m, m \geq 0$ .

$$P'Q + Q'P = nx^{n-1} \cdot x^m + mx^{m-1} \cdot x^n = (n+m)x^{n+m-1} = (x^{n+m})' = (PQ)'$$

Равенство  $(P_1, P_2, \dots, P_n)' = \dots$  доказывается индукцией по  $n$ . База при  $n = 2$  уже доказана. Переход:  $(P_1, \dots, P_{n-1}, P_n) = (P_1, \dots, P_{n-1})'P_n + P_1 \dots P_{n-1}P'_n = P'_1P_2 \dots P_n + \dots + P_1 \dots P'_{n-1}P_n + P_1 \dots P_{n-1}P'_n$ .

3. Опять же, левая и правая части линейны по  $P$ , а значит достаточно проверить равенство при  $P = x^n$ . Тогда  $(P(Q))' = (Q^n)' = nQ^{n-1}Q' = P'(Q) \cdot Q'$

□

**Теорема 4** (Условия кратности корня). Пусть  $P \in F[x], a \in F$ .

1.  $a$  является кратным корнем многочлена  $P$  тогда и только тогда, когда  $P(a) = P'(a) = 0$ .
2. Если  $a$  — корень кратности  $\geq k$ , то  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ .
3. Если  $P(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0$ , то  $a$  — корень кратности  $\geq k$  при условии, что  $\text{char } F = 0$  или  $\text{char } F \geq k$ .

*Доказательство.* Пусть  $t$  — кратность корня  $a$ , то есть,  $P = (x-a)^t Q$ , где  $Q(a) \neq 0$ . Тогда  $P' = ((x-a)^t)'Q + (x-a)^t Q' = t(x-a)^{t-1}Q + (x-a)^t Q' = (x-a)^{t-1}(tQ + (x-a)Q')$ .

1. Если  $t = 1$ , то  $P'(a) = tQ(a) + 0 = Q(a) \neq 0$ . Если  $t \geq 2$ , то  $P'(a) = 0$ .
2. Если  $a$  — корень кратности  $\geq k$  в  $P$ , то  $a$  — корень кратности  $\geq k-1$  в  $P' \implies \dots \implies a$  — корень кратности  $\geq 1$  в  $P^{(k-1)}$ .

*Замечание.* Подставляя во вторую скобку  $a$ , получаем  $tQ(a) + 0 = tQ(a)$ , что будет нулем в случае, если  $p \mid t$ .

3. Заметим, что при  $\text{char } F = 0$  или  $t < \text{char } F$ , корень  $a$  многочлена  $P'$  имеет кратность  $t-1$ , так как  $tQ(a) \neq 0$ . Значит,  $a$  — корень  $P$  кратности  $t \implies a$  — корень  $P'$  кратности  $t-1 \implies a$  — корень  $P''$  кратности  $t-2 \implies \dots \implies a$  — корень  $P^{(t)}$  кратности 0, то есть, не корень. Таким образом, если  $\text{char } F = 0$  или  $k \leq \text{char } F$ , то случай  $t < k$  невозможен, иначе  $P^{(t)}(a) \neq 0$ . Поэтому  $t \geq k$ .

□

**Пример.** Рассмотрим многочлен  $Q = x^p - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$ . У него есть корень  $a = 1$  кратности  $\leq p$ . С другой стороны,  $Q' = px^{p-1} = 0 = Q'' = Q''' = \dots$ . Таким образом,  $Q(1) = Q'(1) = Q''(1) = \dots = 0$ . Значит третье утверждение применимо при  $k = p$ , следовательно, 1 — корень  $Q$  кратности  $\geq p$ . Значит,  $Q = \alpha(x - 1)^p = (x - 1)^p$ .

*Замечание.* С некоторыми изменениями, тот же метод работает для выяснения, на какую степень неприводимого многочлена  $Q$  делится  $P$ .

# Глава 2

## Линейные преобразования

### §1 Инвариантные подпространства

**Напоминание.**

- \* Линейное преобразование пространства  $V$  — это линейное отображение  $\varphi : V \rightarrow V$ , то есть такое, что

1.  $\varphi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_1) + \varphi(\vec{v}_2)$
2.  $\varphi(\alpha \vec{v}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{v}), \quad \alpha \in F$

(Считаем, что  $V$  — конечномерное пространство над полем  $F$ )

- \* Если  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис в  $V$ , то  $\varphi$  однозначно задается своей матрицей в базисе  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$ . Причем такой, что  $\varphi(e) = (\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n)) = eA$ . Если  $\varphi \xleftrightarrow{e} A, \vec{v} \xleftrightarrow{e} \alpha$ , то  $\varphi(\vec{v}) \xleftrightarrow{e} A\alpha$ .
- \*  $\mathcal{L}(V)$  — множество всех линейных преобразований  $V$  — линейное пространство над  $F$ , а также кольцо, то есть алгебра над  $F$ . Для фиксированного базиса  $e$  сопоставление  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$  дает изоморфизм алгебр  $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$ .
- \* Если  $e, e'$  — базисы в  $V$ ,  $e' = eS$ , причем  $\varphi \xleftrightarrow{e} A, \varphi \xleftrightarrow{e'} A'$ , то  $A' = S^{-1}AS$ .
- \* Матрицы  $A, A' \in M_n(F)$  подобны, если  $\exists S \in GL_n(F) : A' = S^{-1}AS$ .

**Определение 1** (Инвариантное подпространство). Пусть  $V$  — линейное пространство над  $F$ ,  $\varphi \in \mathcal{L}(V), U \leq V$ . Подпространство  $U$  называется инвариантным относительно  $\varphi$  (или  $\varphi$ -инвариантным), если  $\varphi(U) \subseteq U$  (то есть,  $\forall \vec{u} \in U \hookrightarrow \varphi(\vec{u}) \in U$ ).

*Замечание.* Это свойство достаточно проверять для базиса в  $U$ .

**Напоминание.**

- \* Если  $U$  подпространство в  $V$ , то  $\varphi(U)$  тоже подпространство в  $V$ .
- \* Образ линейного оператора:  $\varphi \in \mathcal{L}(V) \implies \text{Im } \varphi = \varphi(V) \leq V$
- \* Ядро линейного оператора:  $\text{Ker } \varphi = \varphi^{-1}(\vec{0}) \leq V$



*Замечание.* Если  $U$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство, то  $\varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U \leq V$ , и  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис в  $V$  такой, что его префикс  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$  — базис в  $U$ . Тогда  $U$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство  $V$  тогда и только тогда, когда

$$\varphi \xleftrightarrow[e]{} A = \left( \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

*Доказательство.*  $U$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство, значит  $\forall \vec{u} \in U \hookrightarrow \varphi(\vec{u}) \in U$ , а значит,  $\forall i = 1, \dots, k \hookrightarrow \varphi(\vec{e}_i) \in U$ , то есть,  $\forall i = 1, \dots, k \hookrightarrow \varphi(\vec{e}_i) \in \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k \rangle$ . Отсюда получаем требуемое.  $\square$

*Замечание.* Если  $U$  —  $\varphi$  инвариантно и

$$\varphi \xleftrightarrow[e]{} \left( \begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

то  $\varphi|_U \xleftrightarrow{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)} B$ .

*Замечание.* Если  $V = U_1 \oplus U_2$ , где  $U_1, U_2$  —  $\varphi$ -инвариантны, то в базисе, согласованном с  $U_1$  и  $U_2$ , имеем

$$\varphi \xleftrightarrow[e]{} A = \left( \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

**Утверждение 2.** Пусть  $U_1, U_2$  —  $\varphi$ -инвариантные подпространства, тогда  $U_1 \cap U_2$  и  $U_1 + U_2$  также  $\varphi$ -инвариантны.

*Доказательство.*

1.  $\vec{u} \in U_1 \cap U_2 \implies \varphi(\vec{u}) \in U_1 \cap U_2$
2. Если  $\vec{u} \in U_1 + U_2$ , то  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \implies \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}_1) + \varphi(\vec{u}_2) \in U_1 + U_2$

$\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ , причем  $\varphi\psi = \psi\varphi$ . Тогда  $\text{Ker } \psi$  и  $\text{Im } \psi$  инвариантны относительно  $\varphi$ .

*Доказательство.* Пусть  $\vec{u} \in \text{Ker } \psi$ , то есть,  $\psi(\vec{u}) = \vec{0}$ . Необходимо проверить, что  $\varphi(\vec{u}) \in \text{Ker } \psi$ , то есть,  $\psi(\varphi(\vec{u})) = \psi\varphi(\vec{u}) = \varphi\psi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{u})) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ .

Пусть теперь  $\vec{u} \in \text{Im } \psi$ , то есть,  $\vec{u} = \psi(\vec{v}), \vec{v} \in V$ . Тогда  $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\psi(\vec{v})) = \psi(\varphi(\vec{v})) \in \text{Im } \psi$   $\square$

*Замечание.* Мы будем применять это утверждение в случае  $\varphi = P(\psi)$ , где  $P$  — это некоторый многочлен, ведь любой такой многочлен коммутирует с  $\varphi$ .

Лекция 2 (11.02.2026)

*Замечание.*  $\text{ker } \varphi, \text{Im } \varphi$  —  $\varphi$ -инвариантны.

**Утверждение 4.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ . Тогда  $\forall U \leq \text{ker } \varphi$  —  $\varphi$ -инвариантно, и  $\forall W \geq \text{Im } \varphi$  —  $\varphi$ -инвариантен.

*Доказательство.*

1. Если  $U \leq \ker \varphi$ , то  $\varphi(U) = 0 \leq U$ .
2. Если  $W \geq \operatorname{Im} \varphi$ , то  $\varphi(W) \leq \varphi(V) = \operatorname{Im} \varphi \leq W$ .

□

*Доказательство.* Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U \leq V$ , тогда:

1. Пусть  $P \in F[x]$ , тогда, если  $U$  является  $\varphi$ -инвариантным, то оно и  $P(\varphi)$ -инвариантно.
2. Пусть  $\lambda \in F$ , тогда  $U$  является  $\varphi$ -инвариантным тогда и только тогда, когда  $U$  инвариантно относительно  $\varphi - \lambda$ .

□

!

*Замечание.*  $\lambda \bullet$

*Доказательство.* 1. Если  $U$   $\varphi$ -инвариантно, то  $\varphi(U) \leq U$ , значит  $\varphi^2(U) = \varphi(\varphi(U)) \leq \varphi(U) \leq U$ . Тогда, по тем же соображениям,  $\varphi^n(U) \leq U$ . А тогда, если  $P = p_n x^n + \dots + p_0$ , то  $P(\varphi)(U) = (p_n \varphi^n + p_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + p_0)(U) \leq p_n \varphi^n(U) + p_{n-1} \varphi^{n-1}(U) + \dots + p_0 U \leq U$ .

2. Из первого пункта, если  $U$   $\varphi$ -инвариантно, то  $U$  также  $(\varphi - \lambda)$ -инвариантно. Но  $\varphi = (\varphi - \lambda) + \lambda$ , а значит если  $U$   $(\varphi - \lambda)$ -инвариантно, то  $U$  также и  $\varphi$ -инвариантно.

□

## §2 Собственные векторы

Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U \leq V$  —  $\varphi$ -инвариантно,  $\dim U = 1$ . Тогда  $U = \langle \vec{u} \rangle$ ,  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , и  $\varphi(\vec{u}) \in U$ , то есть  $\varphi(\vec{u})$

**Определение 1.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ . Вектор  $\vec{v} \in V$  называется собственным вектором (СВ) преобразования  $\varphi$ , если

1.  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .
2.  $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ ,  $\lambda \in F$ . В этом случае  $\lambda$  называется собственным значением оператора  $\varphi$ , соответствующему вектору  $\vec{v}$ .

**Определение 2.** Скаляр  $\lambda \in \mathbb{F}$  является собственным (СЗ) значением оператора  $\varphi$ , если он соответствует хотя бы одному собственному вектору.

Если  $\vec{v}$  — собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ , то  $\varphi(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \iff \varphi(\vec{v}) - \lambda \vec{v} = \vec{0} \iff (\varphi - \lambda)(\vec{v}) = \vec{0} \iff \vec{v} \in \ker(\varphi - \lambda)$

**Определение 3.** Если  $\lambda$  — собственное значение оператора  $\varphi$ , то подпространство  $\ker(\varphi - \lambda) = V_\lambda$  называется собственным подпространством оператора  $\varphi$ .

*Замечание.* Подпространство  $V_\lambda$  состоит в точности из  $\vec{0}$  и всех собственных векторов соответствующих  $\lambda$ .

*Замечание.* Иногда используют понятие  $V_\lambda$  и для  $\lambda$ , не являющихся собственными значениями, тогда  $V_\lambda = 0$ .

Если  $\lambda$  является собственным значением

Пусть  $e$  — базис в  $V$ ,  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$ . Тогда  $\varphi - \lambda \xleftrightarrow{e} A - \lambda E$ .

**Утверждение 1.** Если  $\lambda$  — собственное значение  $\varphi$ , то  $\ker(\varphi - \lambda) \neq 0$ , а значит,  $\varphi - \lambda$  — вырожденный оператор, то есть его матрица  $A - \lambda E$  — вырожденная матрица, а тогда  $|A - \lambda E| = 0$ .

**Определение 4.** Пусть  $A \in M_n(F)$ , тогда ее характеристический многочлен — это многочлен такой, что  $\chi_A(x) = |A - xE| =$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \quad (2.2.1)$$

**Следствие.** Если  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$ , то  $\lambda \in F$  — собственное значение  $\varphi$  тогда и только тогда, когда  $\lambda$  — корень  $\chi_A$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $A, B \in M_n(F)$  — подобные матрицы, то есть  $\exists S \in GL_n(F) : B = S^{-1}AS$ . Тогда  $\chi_A = \chi_B$ .

*Доказательство.*  $\chi_B = |B - xE| = |S^{-1}AS - x \cdot S^{-1}ES| = |S^{-1}(A - xE)S| = |S^{-1}| \cdot |A - xE| \cdot |S| = \chi_A$ .  $\square$

**Следствие.** Характеристический многочлен матрицы  $\varphi$  не зависит от выбора базиса.

**Определение 5.** Этот многочлен называется характеристическим многочленом преобразования  $\varphi$  и обозначается  $\chi_\varphi$ .

Распишем формулу (2.2.1):

$$\chi_A = (2.2.1) = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdot (a_{nn} - x)$$

**Определение 6.** Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ . Тогда ее след — это  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

**Утверждение 3.** Если  $\chi_A = (-1)^n x^n + p_{n-1}x_{n-1} + \dots + p_0$ , то  $p_{n-1} = (-1)_{n-1} \text{tr } A$ ,  $p_0 = \det A$ .

*Доказательство.* В формуле полного разложения  $|A - xE|$ , кроме элементов главной диагонали, каждое слагаемое имеет минимум 2 сомножителя не с главной диагонали, следовательно,  $p_{n-1}$  — это коэффициент при  $x_{n-1}$  в  $\prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$ , то есть  $p_{n-1} =$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}(-1)_{n-1} = (-1)_{n-1} \text{tr } A.$$

$$p_0 = \chi_A(0) = |A - 0E| = |A|.$$

$\square$

**Упражнение.** Выразите  $p_k$  в терминах миноров матрицы  $A$  порядка  $n - k$ .

**Следствие.** Если  $A$  и  $B$  — подобные матрицы, то  $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$  и  $\det A = \det B$ .

**Определение 7.** Если  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ , то его след  $\operatorname{tr} \varphi$  — это след любой его матрицы, а его определитель — это определитель любой его матрицы.

**Утверждение 4.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — его различные собственные значения, тогда собственные подпространства  $V_{\lambda_i}$  образуют прямую сумму:

$$V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$$

*Доказательство.* Предположим противное, то есть  $\vec{0} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k$ , где  $\vec{v}_i \in V_{\lambda_i}$ , и не все  $\vec{v}_i$  — нули. Тогда выберем такое представление, в котором наибольшее количество нулевых векторов. Выкинув все  $\lambda_i$ , для которых  $\vec{v}_i = 0$  получаем:

$$\vec{0} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_k, \vec{v}_i \in V_{\lambda_i}, \vec{v}_i \neq 0$$

Тогда  $l > 1$ .  $\vec{0} = \sum_{i=1}^l \vec{v}_i$ . Значит,  $\vec{0} = \varphi(\vec{0}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^l \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^l \varphi(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^l \lambda_i \vec{v}_i$ .  $\vec{0} = \sum_{i=1}^l \lambda_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^l \lambda_l \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{l-1} (\lambda_i - \lambda_l) \vec{v}_i$ . Таким образом мы получили представление нуля в виде суммы  $l - 1$  вектора. Противоречие.  $\square$

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\dim V = n$ , и пусть  $\chi_\varphi$  имеет  $n$  различных корней (в поле  $F$ ). Тогда существует базис  $e$  пространства  $V$  такой, что  $\varphi$  в этом базисе диагональна, то есть  $\varphi \longleftrightarrow \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$

$$= \bullet$$

*Замечание.* Если  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис, то  $\varphi \xleftrightarrow{e} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \varphi(e_1) = \lambda_1 e_1 \wedge \varphi(e_2) = \lambda_2 e_2 \wedge \dots$

*Доказательство.* Все  $\lambda_i$  являются собственными значениями  $\varphi$ , выберем при  $r = 1, \dots, n$  собственный вектор  $\vec{e}_i$  с собственным значением  $\lambda_i$ . Тогда  $\vec{e}_i \in V_{\lambda_i}$ , поскольку сумма  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_n}$  — прямая, то есть  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — линейно независимы, а значит это базис. Тогда  $\varphi \xleftrightarrow{e} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $\square$

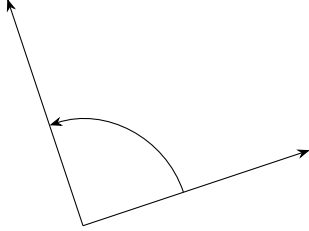
**Определение 8.** Оператор  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$  называется диагонализуемым, если существует базис  $e$  пространства  $V$  такой, что  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$  — диагональна.

**Определение 9.** Матрица  $M \in M_n(F)$  называется диагонализуемой, если она подобна диагональной матрице.

*Замечание.* В координатах оператор с диагональной матрицей  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  действует как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Геометрически — это растяжение вдоль  $i$ -той оси в  $\lambda_i$  раз.



*Замечание.* Не любой оператор диагонализуем. Например, на  $V_2$  рассмотрим оператор поворота на  $\pi/2$ . Он не диагонализуем, что у него нет собственного вектора. Его матрица в ОНБ:

$$\varphi \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2.1: поворот  $A$  также

$$\chi_\varphi = \chi_A = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

*Замечание.* Интерпретируем на матричный язык тот факт, что  $V_{\lambda_i}$  образует прямую сумму. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  — собственные значения  $\varphi$ , тогда

$$V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \oplus U = V$$

В соответствующем базисе имеем

$$\varphi \xleftrightarrow{e} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

**Определение 10.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\lambda$  — его собственное значение. Тогда

- \* алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda$  — это кратность его как кратность  $\chi_\varphi$ .
- \* Геометрическая кратность — это  $\dim V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda)$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $\varphi \in \mathcal{L}(L)$ ,  $U \leq V$  —  $\varphi$ -инвариантное подпространство. Тогда  $\psi = \varphi|_U \in \mathcal{L}(U)$ , и  $\chi_\psi \mid \chi_\varphi$ .

*Доказательство.* Пусть  $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис в  $V$  такой, что  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  — базис в  $U$ . Тогда

$$\varphi \xleftrightarrow{e} \left( \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & c \end{array} \right)$$

где  $\psi \xleftrightarrow{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)} A$ . Тогда  $\chi_\varphi = \chi_D = |D - xE| =$

$$= \left| \begin{array}{c|c} A - xE & B \\ \hline 0 & C - x\bar{E} \end{array} \right| =$$

$$= |A - xE| \cdot |C - xE| = \chi_A \cdot \chi_C = \chi_\psi \cdot \chi_C.$$

□

**Теорема 2.** Если  $\lambda$  — собственное значение  $\varphi$ , то его алгебраическая кратность не меньше геометрической кратности.

*Доказательство.* Пусть  $U = V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda)$  — инвариантно относительно  $\varphi$ . Значит,  $\chi_\varphi$  делится на  $\chi_{\varphi|_U}$ , но  $\varphi|_U = \lambda \leftrightarrow \lambda E$ . Тогда, если  $\dim U = k$ , то  $\chi_{\varphi|_U} = |\lambda E - xE| = (\lambda - x)^k \mid \chi_\varphi$ . Значит, кратность корня  $\lambda$  у  $\chi_\varphi \geq k$ .  $\square$

*Замечание.* Геометрическая кратность  $\lambda$  — это  $\dim \ker(\varphi - \lambda)$ . Если  $\varphi \xleftrightarrow{e} A$ , то  $\varphi - \lambda \xleftrightarrow{e} A - \lambda E$ , и  $\dim \ker(\varphi - \lambda) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(\varphi - \lambda) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda E)$ .

**Пример.** Если

$$A = J_n = \bullet$$

# Предметный указатель

## Теоремы

### Глава 1

Теорема 1. Безу .....	3
Теорема 2. О сумме кратностей корней ...	4
Теорема 3. Основная теорема алгебры ....	4
Теорема 4. Условия кратности корня .....	5

### Глава 2

Теорема 1 .....	11
Теорема 2 .....	13

## Определения

### Глава 1

Определение 1. Корень многочлена .....	3
Определение 2. Кратность корня .....	4
Определение 3. Линейно факторизуемый многочлен .....	4
Определение 4. Кратный корень .....	4
Определение 5. Формальная производная многочлена .....	4

### Глава 2

Определение 1. Инвариантное подпространство .....	7
§2	
Определение 1 .....	9

Определение 2 .....	9
Определение 3 .....	9
Определение 4 .....	10
Определение 5 .....	10
Определение 6 .....	10
Определение 7 .....	11
Определение 8 .....	11
Определение 9 .....	11
Определение 10 .....	12

## Утверждения

### Глава 1

Утверждение 1. Свойства формальной производной .....	4
---	---

### Глава 2

Утверждение 1 .....	8
Утверждение 2 .....	8
Утверждение 3 .....	8
Утверждение 4 .....	8

### §2

Утверждение 1 .....	10
Утверждение 2 .....	10
Утверждение 3 .....	10
Утверждение 4 .....	11
Утверждение 5 .....	12