

Московский физико-технический институт
Физтех-школа прикладной математики и информатики

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

II СЕМЕСТР

Лектор: *Лукашов Алексей Леонидович*

весна 2026

Оглавление

Предисловие	2
5 Неопределенный интеграл	3
§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций	3
6 Дифференциальное исчисление функций многих переменных	8
§1 Предел и непрерывность	8
Приложения	
Предметный указатель	12

Предисловие

В конспекте могут быть ошибки и/или неточности.

Предметный указатель

Для удобства поиска, скажем, теорем, в конце конспекта находится [предметный указатель](#), с помощью которого можно быстро найти нужную теорему.

Используемые обозначения

\hookrightarrow – выполняется;

$:$ – такой (ая, ое), что.

Глава 5

Неопределенный интеграл

§3 Интегрирование иррациональных и трансцендентных функций

Лекция 1 (04.02.2026)

Определение 1. $R(u, v, \dots, w)$ — рациональная функция, если

$$R(u, v, \dots, w) = \frac{P(u, v, \dots, w)}{Q(u, v, \dots, w)}$$

где P, Q — алгебраические многочлены.

Рассмотрим некоторые случаи интегрирования рациональных функций:

1.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^r\right) dx$$

где R — рациональная функция, $ad - bc \neq 0$, $r \in \mathbb{Q}$

В этом случае $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, тогда введем следующую замену: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$, и получим

$$(ax+b) - (cx+d)t^q = 0 \iff x = \frac{dt^q - b}{a - ct^q}$$

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q = t^p$$

Подвид вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$$

приводится к рациональной функции аналогично, но в качестве q берем НОК от r_1, \dots, r_n .

2.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a \neq 0$$

Подстановки Эйлера:

2.1. $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a} \pm t$$

Возведем это равенство в квадрат

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{a}xt + t^2$$

Тогда

$$x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}t}$$

x' – рациональная функция от t .

2.2. $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$$

Снова возведем в квадрат и получим

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + c$$

Тогда мы можем выразить x

$$x = \frac{-b \pm 2t\sqrt{c}}{a - t^2}$$

Отсюда x' – рациональная функция

2.3.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad x_1 \neq x_2$$

В данном случае

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{|a|}(x - x_1)t$$

Возведем в квадрат обе части

$$a(x - x_1)(x - x_2) = |a|(x - x_1)^2t^2$$

Тогда, сокращая, получим

$$x = \frac{ax_2 - |a|x_1t^2}{a - |a|t^2}$$

Значит, x' – рациональная функция

3.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

Введем $Y = ax^2 + bx + c$ и $y = \sqrt{Y}$, тогда

$$R(x, y) = \frac{R_1(x) + R_2(x)y}{R_3(x) + R_4(x)y}$$

Затем мы можем записать выражение через многочлены P :

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{P_3(x) + P_4(x)y} = \frac{(P_1(x) + P_2(x)y)(P_3(x) - P_4(x)y)}{P_3^2(x) - P_4^2(x)Y} = R_1(x) + R_2(x)y$$

$$\int P(x)ydx = \int \frac{P(x)Y}{y}dx$$

Хотим найти

$$\int \frac{P(x)}{y}dx$$

Пусть $\deg P = n$, тогда интеграл запишется в виде:

$$\int \frac{P(x)}{y}dx = Q(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

где $\deg Q = n - 1, \lambda \in \mathbb{R}$. После дифференцирования получаем:

$$\frac{P(x)}{y} = Q'(x)y + \frac{Q(x)Y'}{2\sqrt{Y}} + \frac{\lambda}{y} = \frac{Q'(x) \cdot Y + \frac{1}{2}Q(x)Y' + \lambda}{y}$$

Тогда нам необходимо найти интеграл вида:

$$V_m = \int \frac{x^m}{y}dx$$

Продифференцируем:

$$(x^{m-1}y)' = (m-1)x^{m-2}y + \frac{x^{m-1}(2ax+b)}{2y}$$

Тогда

$$x^{m-1}y = (m-1) \int \frac{x^{m-2}(ax_2 + bx + c)}{y}dx + \frac{1}{2} \int \frac{2ax^m + bx^{m-1}}{y}dx =$$

$$a(m-1)V_m + (m - \frac{1}{2})bV_{m-1} + c(m-1)V_{m-2}$$

Итого получаем:

$$V_m = p_{m-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y}$$

После получим интегрирования слагаемые:

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{dx}{y}$$

Введем замену $x - \alpha = \frac{1}{t}$

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$y = \sqrt{a\left(\frac{1}{t} + \alpha\right)^2 + b\left(\frac{1}{t} + \alpha\right) + c} = \frac{\tilde{y}}{|t|}$$

Итого

$$\int \frac{A}{x-\alpha} \frac{dx}{y} = - \int \frac{At^k |t|}{t^2 \tilde{y}} dt$$

4. Дифференциальный бином.

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

где $m, n, p \in \mathbb{Q}$ Этот интеграл берется только в трех случаях:

4.1. $p \in \mathbb{Z}, \nu$ — НОК знаменателей m, n Возьмем $x = t^\nu$, тогда $dx = \nu t^{\nu-1} dt$ Пусть теперь $p \in \mathbb{Z}$, тогда сделаем замену $x^n = z$, откуда $x = z^{\frac{1}{n}}$; $dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz$ Тогда интеграл получится в виде

$$\frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz$$

Обозначим рациональное $q := \frac{m+1}{n} - 1$, тогда

$$\frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p dz$$

4.2. $q \in \mathbb{Z}$ $a + bz = t^\mu$, где μ — знаменатель p

$$z = \frac{1}{b} (t^\mu - a)$$

$$dz = \frac{1}{b} \mu t^{\mu-1} dt$$

4.3. $p + q \in \mathbb{Z}$

$$\int z^q (a + bz)^p dz = \int z^{p+q} \left(\frac{a + bz}{z} \right)^p dz$$

Введем замену: $\frac{a+bz}{z} = t^\mu$

$$z = \frac{a}{t^\mu - b}$$

5.

Теорема 1 (Абеля). Пусть R — многочлен степени $2g + 2$ без кратных корней. Если существуют многочлены $P, Q \neq 0$ такие, что $P^2 - Q^2 R = 1$, то найдется многочлен r степени g такой, что

$$\int \frac{r}{\sqrt{R}} dx$$

выражается в элементарных функциях.

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \left(\ln \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}} \right) = \\ &= \frac{P - Q\sqrt{R}}{P + Q\sqrt{R}} \cdot \frac{\left(P + Q'\sqrt{R} + \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) (P - Q\sqrt{R}) - \left(P' - Q'\sqrt{R} - \frac{QR'}{2\sqrt{R}} \right) (P + Q\sqrt{R})}{(P - Q\sqrt{R})^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-4P'QR + 4Q'P + 2QR'P}{2\sqrt{R}} = \frac{P(QR' + 2Q'R) - 2P'QR}{\sqrt{R}} = \frac{2P^2P' - 2P'Q^2R}{Q\sqrt{R}} = \frac{2r}{\sqrt{R}}$$

Продифференцируем $P^2 - Q^2R = 1$:

$$2PP' - 2QQ'R - Q^2R' = 0 \implies 2PP' = Q(2Q'R + QR') \implies P' = Q_2$$

$$\deg P' = \deg Q + g$$

□

6.

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Универсальная подстановка: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1 Предел и непрерывность

Лекция 2 (06.02.2026)

Определение 1 (Функция многих переменных). Функцией многих переменных называем функцию $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2 (Предел функции многих переменных). Пусть \vec{x}_0 — предельная точка D . Тогда предел определяется:

* по Коши:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x} \in D \wedge 0 < \rho_x(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \hookrightarrow \rho_y(f(\vec{x}), l) < \varepsilon$$

* по Гейне:

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = l \iff \forall \{\vec{x}_m\} \subset D : \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{x}_m = \vec{x}_0 \wedge \vec{x}_m \neq \vec{x}_0 \hookrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f(\vec{x}_m) = l$$

Определение 3 (Предел по совокупности переменных). Если \vec{x}_0 — внутренняя точка $D \cup \{\vec{x}_0\}$, то $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ называется пределом по совокупности переменных.

Определение 4 (Предел по направлению). Если $D = D_{\vec{d}}$ — луч с началом в точке \vec{x}_0 в направлении вектора \vec{d} (или его пересечение с проколотой окрестностью точки \vec{x}_0), то предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ называется пределом по направлению \vec{d} .

Лемма 1.

$$\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x}) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(\vec{x}_0 + t\vec{d})$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\vec{x} \in D_{\vec{d}} \iff \vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{d}, t \geq 0 \quad (0 < t < r)$$

□

Теорема 1. Если существует предел $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ по совокупности переменных, то существует предел $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D_{\vec{d}}}} f(\vec{x})$ по любому направлению $\vec{d} \neq 0$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Доказательство. Из определения по Коши, если $\vec{x} \in D_{\vec{d}}, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$, то $\vec{x} \in D, 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$. □

Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

По [лемме 1](#) получаем

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_{(\alpha,\beta)}}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(0 + t\alpha, 0 + t\beta) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4} = 0$$

По определению Гейне возьмем последовательность $(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}) \rightarrow (0, 0)$, тогда

$$f\left(\frac{1}{m^2}, \frac{1}{m}\right) = \frac{1/m^4}{2/m^4} = \frac{1}{2}$$

Тогда общего предела у функции нет, хотя по каждому направлению — есть.

Определение 5 (Повторный предел).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$

Замечание. Наличие предела по совокупности переменных и повторных пределов никак не связано.

Пример.

$$g(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У данной последовательности есть предел по совокупности

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0, \text{ так как } |g(x, y)| \leq |(x, y)|$$

$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ существует и равен 0 $\iff x = 0$ или $x = \frac{1}{k}, k \in K$. Тогда внутренний предел не определен в проколотовой окрестности, а значит повторного предела действительно нет.

Если \vec{x}_0 — предельная точка области определения $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 тогда и только тогда, когда $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0 \\ \vec{x} \in D(f)}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$. Если \vec{x}_0 — изолированная точка $D(f)$, то f непрерывна в \vec{x}_0 .

Непрерывность по совокупности переменных и непрерывность по направлению определяются естественным образом.

Теорема 2 (Непрерывность сложной функции многих переменных). *Если $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\vec{y}_0 = (y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)}) \in D$, функции $g_j(\vec{x}), j = 1, \dots, n$ непрерывны в точке $\vec{x}_0 \in G \subset \mathbb{R}^m, g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)}, j = 1, \dots, n$, то сложная функция $h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}), \dots, g_n(\vec{x}))$ непрерывна в \vec{x}_0 .*

Доказательство. Возьмем последовательность Гейне:

$$\begin{aligned} \{\vec{x}_k\} \subset D(h) : \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 &\hookrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_j(\vec{x}_k) = g_j(\vec{x}_0) = y_0^{(j)} \implies \\ &\implies (g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \vec{y}_0 \implies f(g_1(\vec{x}_k), \dots, g_n(\vec{x}_k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(\vec{y}_0) \end{aligned}$$

□

Теорема 3 (Кантор). *Если f непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K .*

Доказательство. (От противного). Определение равномерной непрерывности на K :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| < \varepsilon$$

Тогда отрицанием будет

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in K : |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| < \delta \hookrightarrow |f(\vec{x}_1) - f(\vec{x}_2)| \geq \varepsilon$$

Построим две последовательности по $\delta := 1, \frac{1}{2}, \dots$

$$\{\vec{x}_{1,k}\}, \{\vec{x}_{2,k}\} \subset K : |\vec{x}_{1,k} - \vec{x}_{2,k}| < \frac{1}{k} \hookrightarrow |f(\vec{x}_{1,k}) - f(\vec{x}_{2,k})| \geq \varepsilon$$

По критерию компактности $\exists \{\vec{x}_{1,k_j}\} : \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{1,k_j} = \vec{x}_0 \in K$, тогда

$$|\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_0| \leq |\vec{x}_{2,k_j} - \vec{x}_{1,k_j}| + |\vec{x}_{1,k_j} - \vec{x}_0| \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \vec{x}_{2,k_j} = \vec{x}_0$$

Так как f непрерывна в \vec{x}_0 , то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{1,k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{2,k_j}) = f(\vec{x}_0)$$

$$|f(\vec{x}_{1,k_j}) - f(\vec{x}_{2,k_j})| \geq \varepsilon$$

Но вместе они не могут выполняться. Противоречие. □

Определение 6 (Линейная связность). Множество A в \mathbb{R}^n называется линейно связным, если $\forall \vec{x} \neq \vec{y} \in A$ существует кривая $\gamma_i : [a, b] \rightarrow A$ ($\gamma_i \subset A$) такая, что $\gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$.

Определение 7 (Связность). Метрическое пространство X называется связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых множеств.

Утверждение 1. Множество A в \mathbb{R}^n является связным, если его нельзя представить объединением двух непересекающихся непустых открытых в нем множеств.

Множество $G \subset A$ открыто в $A \iff \exists \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ открытое, такое, что $G = \mathcal{G} \cap A$.

Доказательство. G открыто в A , значит $\forall x \in G \exists U_\varepsilon^A(\vec{x}) \subset G$. Возьмем $\mathcal{G} := \bigcup_{\vec{x} \in G} U_\varepsilon(\vec{x})$. Тогда $G = \mathcal{G} \cap A$. \square

Замечание.

$$U_\varepsilon^A(\vec{x}) := \{\vec{y} \in A : |\vec{x} - \vec{y}| < \varepsilon\}$$

Теорема 4. Если $A \in \mathbb{R}^n$ линейно связно, то оно связно.

Доказательство. (От противного). Если A — не связно, то найдутся G_1, G_2 — открытые множества в A , такие, что

$$G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset \quad G_1 \cup G_2 = A$$

Пусть $\vec{x} \in G_1, \vec{y} \in G_2$. A — линейно связно, следовательно

$$\exists \gamma : [a, b] \rightarrow A : \gamma(a) = \vec{x}, \gamma(b) = \vec{y}$$

Обозначим $T := \sup \{t : \gamma(t) \in G_1\}$, $T \in [a, b]$. Предположим, что $\gamma(T) \in G_1$, тогда $\exists G_1 = \mathcal{G}_1 \cap A$. Так как $\gamma(T) \in \mathcal{G}_1$, то, $U_\varepsilon(\gamma(T)) \subset \mathcal{G}_1$. T точно меньше b , а значит, $\exists \delta > 0 : \gamma([T, T + \delta)) \subset U_\varepsilon(\gamma(T))$. То есть, $\gamma(T)$ не лежит в G_1 . Аналогично доказывается, что $\gamma(T)$ не лежит в G_2 , и отсюда получаем противоречие. \square

Замечание. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример. Контрпример иллюстрирован на [рис. 6.1](#). Данное множество очевидно является связным, и в то же время не является линейно связным.

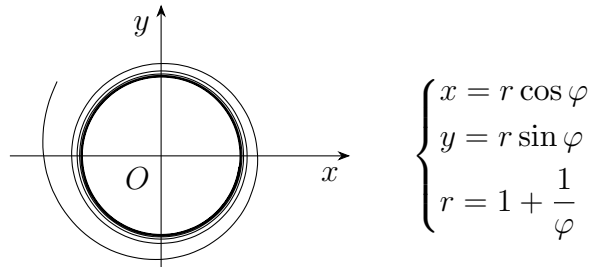


Рис. 6.1: Контрпример

Предметный указатель

Теоремы

Глава 5	
Теорема 1. Абеля	6
Глава 6	
Теорема 1	9
Теорема 2. Непрерывность сложной функции многих переменных	10
Теорема 3. Кантор	10
Теорема 4	11

Леммы

Глава 6	
Лемма 1	8

Определения

Глава 5	
---------	--

Определение 1	3
---------------	---

Глава 6	
Определение 1. Функция многих переменных	8
Определение 2. Предел функции многих переменных	8
Определение 3. Предел по совокупности переменных	8
Определение 4. Предел по направлению	8
Определение 5. Повторный предел	9
Определение 6. Линейная связность	10
Определение 7. Связность	11

Утверждения

Глава 6	
Утверждение 1	11