Estructuras Discretas para la Computación

Módulo II: Representación gráfica de las relaciones y funciones de un conjunto

Tomás J. Concepción Miranda

Universidad Tecnológica de Panamá

Tabla de contenido - Módulo II

Lo visto hasta el momento

- Conjuntos: colecciones de objetos sin orden
- Secuencias de longitud n
- Objetos con propiedades
  - símbolos (letras, números)
  - cosas (cartas, resultados de dados, ...)
  - conjuntos
  - secuencias

Par ordenado

Definición

Un *par ordenado* (a, b) es un listado de los objetos a y b en un orden prescrito, donde a aparece primero y b aparece de segundo

- Es decir, una secuencia de longitud 2
- Se tiene que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si y solo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

Si y solo si ($\Leftrightarrow$)

- Operador lógico
- También llamada *bicondicional* o *equivalencia*
- Es cierta mientras los dos operandos tengan el mismo valor

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Par ordenado

Ejemplos de pares ordenados:

$$\begin{array}{ccc} (1,2) & (1,3) & (2,3) \\ (a,b) & (a,c) & (b,c) \\ (1,d) & (2,e) & (3,f) \end{array}$$

- Nótese que estas secuencias están encerradas en paréntesis, y cada elemento separado por coma

Producto cartesiano

Definición

El *producto cartesiano*, o *producto conjunto*, $A \times B$ es el conjunto de todos los pares ordenados a, b donde $a \in A$ y $b \in B$. Es decir,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$, encuentre $A \times B$.
Solución:

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}$$

A \ B	r	s
1	$(1, r)$	$(1, s)$
2	$(2, r)$	$(2, s)$
3	$(3, r)$	$(3, s)$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$ (como el ejemplo anterior), encuentre $B \times A$.
Solución:

$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (s, 1), (s, 2), (s, 3)\}$$

Productos diferentes

$$A \times B = \{(1, r), (1, s), (2, r), (2, s), (3, r), (3, s)\}$$
$$B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (s, 1), (s, 2), (s, 3)\}$$

Cardinalidad de un producto cartesiano

Teorema

Para dos conjunto finitos y no vacíos A y B cualquiera, se tiene que $|A \times B| = |A||B|$

Ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$, se tiene $|A| = 3$ y $|B| = 2$, entonces $|A \times B| = 6$

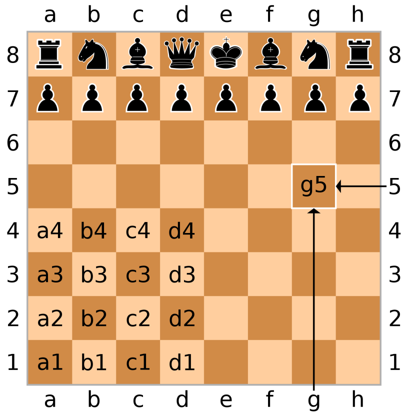
Ejemplo - Producto cartesiano

Si $A = B = \mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales, entonces $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, también denotado $\mathbb{R}^2$, es el conjunto de todos los puntos en el plano. El par ordenado a, b da las coordenadas de un punto en el plano

Ejemplo - Producto cartesiano

Si $A = \{$a,b,c,d,e,f,g,h$\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, entonces $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ es el conjunto de todos las posiciones en un tablero de ajedrez. El par ordenado (a, b) da las coordenadas de un posición en el tablero.

Por ejemplo, en la posición (a, 8) se encuentra una torre



Producto cartesiano de tres o más conjuntos

Definición

El *producto cartesiano* $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_m$ de los conjuntos no vacíos $A_1, A_2, A_3, ..., A_m$ es el conjunto de todos las m-tuplas $(a_1, a_2, ..., a_m)$, donde $a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, ..., m$. Así que,

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_m = \{(a_1, a_2, ..., a_m) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, 3, ..., m\}$$

- Notación: m-tupla $\Rightarrow$ secuencia de m elementos

Ejemplo - Producto cartesiano de tres o más conjuntos

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2\}, B = \{a, b\}, C = \{\alpha, \beta\}$, encuentre $A \times B \times C$.
Solución:

$$\begin{aligned} A \times B \times C =& \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), \\ & (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta)\} \end{aligned}$$

Ejemplo - Producto cartesiano de tres o más conjuntos

Ejemplo: Una manufacturera ofrece las siguientes opciones de refrigeradores:

- Puertas: lado a lado (l), arriba y abajo (a), o tres (t)
- Maquina para hielo: en el congelador (c), en la puerta (p)
- Acabado: estándar (e), metálico (m) o al gusto (g)

¿Cuál es el producto cartesiano de las tres opciones y qué representa? ¿Cuántas categorías hay?

Ejemplo - Producto cartesiano de tres o más conjuntos

Sea $P = \{l, a, t\}, H = \{c, p\}, A = \{e, m, g\}$. Entonces el producto cartesiano $P \times H \times A$ contiene todas las categorías que describe opciones de refrigerador. Hay $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ categorías

Particiones

Definición

Una *partición* o un *conjunto cociente* de un conjunto no vacío A es una colección $\mathscr{P}$ de subconjuntos no vacíos de A tal que:

1. Cada elemento de A pertenezca a uno de los conjuntos de $\mathscr{P}$
2. Si A_1 y A_2 son elementos distintos de $\mathscr{P}$, entonces $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

- Los conjuntos en $\mathscr{P}$ son llamados *bloques* o *celdas* de la partición

Ejemplo - Particiones

Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Considere los siguientes subconjuntos de A:

$$A_1 = \{a, b, c, d\} \qquad A_2 = \{a, c, e, f, g, h\} \qquad A_3 = \{a, c, e, g\}$$
$$A_4 = \{b, d\} \qquad A_5 = \{f, h\}$$

Se tiene que:

- $\{A_1, A_2\}$ no es una partición, ya que $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$
- $\{A_1, A_5\}$ no es una partición, ya que $e \notin A_1$ y $e \notin A_5$
- La colección $\mathscr{P} = \{A_3, A_4, A_5\}$ is a partición de A

Ejemplo - Particiones

Sea

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \text{el conjunto de todos los enteros} \\ A_1 &= \text{el conjunto de todos los enteros pares, y} \\ A_2 &= \text{el conjunto de todos los enteros impares} \end{aligned}$$

Entonces, $\{A_1, A_2\}$ es una partición de $\mathbb{Z}$

Si A es el conjunto de todas las elefantas hembras y B es el conjunto de todos los elefantes machos, entonces la relación M (madre) puede ser definida entre A y B. Así, si $x \in A$ y $y \in B$, entonces x está relacionado con y por la relación M si x es la madre de y, se escribe $x\ M\ y$

Como el orden importa aquí, nos referimos a M como una relación de A a B. También pudiésemos considerar la relación H de A a B al definir $x\ H\ y$ como x es hija de y

Se pueden tener relaciones de un conjunto A a A. Supongamos que $A = \mathbb{R}$. Un ejemplo de relación de este tipo es, por ejemplo, "menor que", usualmente denotado con $<$, de forma que x esta relacionado con y si $x < y$. En muchos casos, no se puede saber *todas las posibles* relaciones existentes si se dan descripciones verbales

Para resolver este problema, basta con conocer exactamente que elementos en A están relacionados a tal elemento de B. Supongamos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, y R es una relación de A a A. Si sabemos que

$$\begin{array}{ccc} 1\ R\ 2 & 1\ R\ 3 & 1\ R\ 4 \\ 2\ R\ 3 & 2\ R\ 4 & 3\ R\ 4 \end{array}$$

entonces tenemos todo lo necesario para saber sobre R. De hecho, es R es la relación $<$, "menor que", pero no necesitamos saber esto

En este caso, pudiésemos simplemente escribir la lista de pares relacionados (*i.e.* que están en relación por R). De modo que tendríamos:

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Cada par ordenado especifica que su primer elemento está relacionado con el segundo elemento, y todos los posibles pares relacionados son asumidos como dados, al menos en principio

Note que desde este punto de vista, una relación de A a B es un subconjunto de $A \times B$ (dados los pares relacionados) y, recíprocamente, cualquier subconjunto de $A \times B$ puede ser considerado una relación, incluso si es una relación desconocida

Definición

Sea A y B conjuntos no vacíos. Una *relación* R *de* A *a* B es un subconjunto de $A \times B$. Si $R \subseteq A \times B$ y $(a, b) \in R$, decimos que a *está relacionado a* b *por* R, y escribimos $a \ R \ b$

- Frecuentemente A y B son iguales. En este caso, muchas veces decimos que $R \subseteq A \times A$ *es una relación sobre A*, en vez de una relación de A a A

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$. Entonces,

$$R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$$

es una relación de A a B

Ejemplo - Relaciones

Sea A y B conjuntos de números reales. Definimos la relación R (igual) de A a B:

$$a \ R \ b \Leftrightarrow a = b$$

Sea $A = \mathbb{Z}^+$, el conjunto de todos los enteros positivos. Se define la siguiente relación R sobre A:

$$a \ R \ b \Leftrightarrow a|b$$

donde el símbolo "$|$" quiere decir *divide enteramente a* (*i.e.* el residuo de la división $\frac{b}{a}$ es 0). Entonces, $4 \ R \ 12$, pero $5 \not R \ 7$

Ejemplo - Relaciones

Sea A el conjunto de todas las personas en el mundo. Definimos la siguiente relación R sobre A: $a\ R\ b$ si y solo si hay una una secuencia $a_0, a_1, ..., a_n$ de personas tal que $a_0 = a, a_n = b$ y a_{i-1} conoce a a_i, $i = 1, 2, ..., n$ (n dependerá en a y b)

Ejemplo - Relaciones - Vuelos entre ciudades

Una aerolínea vuela a cinco ciudades c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. La tabla siguiente muestra el costo (en dólares) de ir desde c_i hasta c_j. Así que, el costo de ir desde c_1 a c_3 es 100$, mientras que que el costo de ir desde c_4 a c_2 es 200$. Ahora definimos la siguiente relación R en el conjunto de ciudades $A = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$: $c_i \; R \; c_j$ si y solo si el costo de ir desde c_i hasta c_j está definido y es menor o igual a 180$. Encuentre R (*i.e.* el conjunto de pares ordenados que están relacionados por R)

Desde \ Hacia	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1		140	100	150	200
c_2	190		200	160	220
c_3	110	180		190	250
c_4	190	200	120		150
c_5	200	100	200	150	

Tabla 1: Precios de vuelos

Desde \ Hacia	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
c_1		140	100	150	200
c_2	190		200	160	220
c_3	110	180		190	250
c_4	190	200	120		150
c_5	200	100	200	150	

Solución: La relación R es un subconjunto de $A \times A$ consistiendo de todas las ciudades (c_i, c_j), donde el costo de ir de c_i a c_j es menor o igual a 180$. Así que:

$$R = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_2, c_4), (c_3, c_1), \\ (c_3, c_2), (c_4, c_3), (c_4, c_5), (c_5, c_2), (c_5, c_4)\}$$

Conjuntos que surgen de relaciones

Sea $R \subseteq A \times B$ una relación de A a B. Ahora definimos varios conjuntos importantes y útiles relacionados a R

Definición

El *dominio* de R, denotado por $\mathrm{Dom}(R)$, es el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B. En otras palabras, $\mathrm{Dom}(R)$, un subconjunto de A, es el conjunto de todos los primeros elementos en los pares que conforman R

Definición

El *rango* o *codominio* de R, denotado por $\mathrm{Ran}(R)$, es el conjunto de todos los en B que están en relación con algún elemento de A

Elementos de A que no están en Dom(A) no están involucrados en la relación R en ninguna manera. Esto es también verdad para elementos de B que no están en Ran$R$)

Ejemplo - Dominio y rango

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{r, s\}$, y

$$R = \{(1, r), (2, s), (3, r)\}$$

una relación de A a B. Encuentre $\text{Dom}(R)$ y $\text{Ran}(R)$.
Solución:

$$\text{Dom}(R) = A$$
$$\text{Ran}(R) = B$$

Ejemplo - Dominio y rango

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y R la relación en A tal que:

$$a \ R \ b \Leftrightarrow a < b$$

Encuentre R, Dom(R) y Ran(R).
Solución: Se tiene que

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),\\ (2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$$

Entonces,

$$\text{Dom}(R) = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\text{Ran}(R) = \{2, 3, 4, 5\}$$

Conjunto R-relativo

Definición

Si R es una relación de A a B y $x \in A$, entonces $R(x)$, el *conjunto R-relativo de* x, es el conjunto de todas las $y \in B$ con la propiedad que x está relacionado a y. Es decir,

$$R(x) = \{y \in B \mid x \; R \; y\}$$

Similarmente, si $A_1 \subseteq A$, entonces $R(A_1)$, el *conjunto R-relativo de* A_1, es el conjunto de todas las $y \in B$ con la propiedad que x está R-relacionado con y para alguna $x \in A_1$. Es decir,

$$R(A_1) = \{y \in B \mid x \; R \; y \text{ para alguna } x \in A_1\}$$

Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea
$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, a), (d, c), (c, b)\}$. Encuentre $R(a)$, $R(b)$, y $R(A_1)$ si $A_1 = \{c, d\}$.
Solución:

$$R(a) = \{a, b\}$$
$$R(b) = \{c\}$$
$$R(A_1) = \{a, b, c\}$$

Teorema

Sea R la relación de A a B, y sean A_1 y A_2 subconjuntos de A. Entonces:

a) Si $A_1 \subseteq A_2$, entonces $R(A_1) \subseteq R(A_2)$

b) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$

c) $R(A_1 \cap A_2) = R(A_1) \cap R(A_2)$

Prueba:

a) Si $y \in R(A_1)$, entonces $x\ R\ y$ para alguna $x \in A_1$. Como $A_1 \subseteq A_2$, $x \in A_2$. Entonces, $y \in R(A_2)$, lo que prueba la parte a)

b) Si $y \in R(A_1 \cup A_2)$, entonces por definición $x\ R\ y$ para alguna $x \in A_1 \cup A_2$. Si $x \in A_1$, entonces, como $x\ R\ y$, debemos tener que $y \in R(A_1)$. Por el mismo argumento, si $x \in A_2$, entonces $y \in R(A_2)$. En cualquier caso, $y \in R(A_1) \cup R(A_2)$. Así mostramos que $R(A_1 \cup A_2) \subseteq R(A_1) \cup R(A_2)$. Recíprocamente, como $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$, la parte a) nos dice que $R(A_1) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$. Similarmente, $R(A_2) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$. Así, $R(A_1) \cup R(A_2) \subseteq R(A_1 \cup A_2)$, por lo que la parte b) es cierta

c) Si $y \in R(A_1 \cap A_2)$, entonces, para alguna $x \in A_1 \cap A_2$, $x \; R \; y$. Como $x \in A_1 \cap A_2$, le sigue que $y \in R(A_1)$ y $y \in R(A_2)$; eso es, $y \in R(A_1) \cap R(A_2)$. Así se demuestra la parte c)

Sea $A = \mathbb{Z}$, R es "$\leq$", $A_1 = \{0, 1, 2\}$ y $A_2 = \{9, 13\}$. Entonces, $R(A_1)$ consiste de todos los enteros n tal que $0 \leq n$, o $1 \leq n$ o $2 \leq n$. Por lo tanto, $R(A_1) = \{0, 1, 2, ...\}$. Similarmente, $R(A_2) = \{9, 10, 11, ...\}$, así que $R(A_1) \cap R(A_2) = \{9, 10, 11, ...\}$. Por otro lado, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$; así $R(A_1 \cap A_2) = \varnothing$. Esto muestra que la inclusión en el teorema 1(c) no siempre una igualdad.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x, y, z, w, p, q\}$, y considere una relación $R = \{(1, x), (1, z), (2, w), (2, p), (2, q), (3, y)\}$. Sea $A_1 = \{1, 2\}$ y $A_2 = \{1, 3\}$. Entonces, $R(A_1) = \{x, z, w, p, q\}$ y $R(A_2) = \{w, p, q, y\}$. De esta manera, $R(A_1) \cup R(A_2) = B$. Como $A_1 \cup A_2 = A$, vemos que $R(A_1 \cup A_2) = R(A) = B$, como muestra el teorema 1(b). También, $R(A_1) \cap R(A_2) = \{w, p, q\} = R(\{2\}) = R(A_1 \cap A_2)$, así que en este caso, la igualdad se mantiene para la inclusión en el teorema 1(c)

Teorema

Sean R y S relaciones de A a B. Si $R(a) = S(a)$ para todas las $a \in A$, entonces $R = S$

Prueba:
Si $a\ R\ b$, entonces $b \in R(a)$. Se tiene también que $b \in S(a)$ y $a\ S\ b$. Un argumento similar muestra que, si $a\ S\ b$, entonces $a\ R\ b$. Por lo que $R = S$

Si A es un es un conjunto finito, y R una relación sobre A, podemos representar R de una manera ilustrativa de la siguiente manera:

- Dibuje un círculo pequeño por cada elemento de A y etiquete el círculo con el elemento correspondiente a A. Estos círculos son llamados *vértices*
- Dibuje una flecha, llamada $arco$, desde el vértice a_i al vértice a_j si y solo si $a_i \ R \ a_j$

La representación ilustrativa de R es llamado un *grafo dirigido* o *digrafo* de R

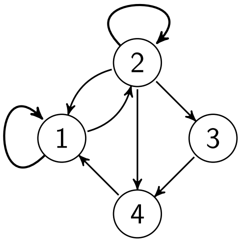
Así, si R es una relación sobre A, los arcos en el digrafo de R corresponde exactamente a los pares ordenados en R, y los vértices corresponden exactamente a los elementos del conjunto A. A veces queremos enfatizar la naturaleza geométrica de alguna propiedad de R, pudiésemos referirnos a los mismos elementos de R como vértices y los elementos de A como vértices

Ejemplo - Dirafos

Sea

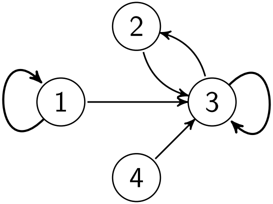
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (4,1)\}$

Entonces, el digrafo de R se muestra en la siguiente figura:

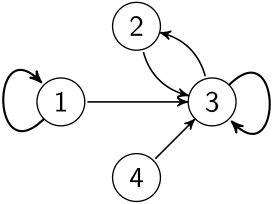


Ejemplo - digrafos

Sea el siguiente digrafo:



Encuentre la relación correspondiente al digrafo



Como $a_i \; R \; a_j$ si y solo si hay un arco de a_i a a_j, tenemos:

$$R = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3)\}$$

Atención: los digrafos son solo representaciones geométricas de relaciones, y cualquier declaración hecha acerca del digrafo es, en realidad, una declaración acerca de su relación correspondiente

Grados internos y externos

Definición

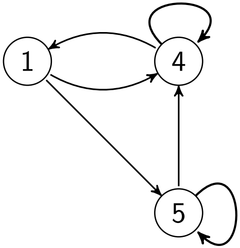
Si R es una relación sobre un conjunto A y $a \in A$, entonces los *grados internos* de a (relativos a la relación R) es el número de $b \in A$ tal que $(b, a) \in R$. Los *grados externos* de a es el número de $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$

Es decir, en términos del digrafo de R, que

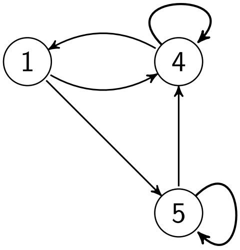
- los grados internos de un vértice es el número de arcos que terminan en ese vértice
- los grados externos de un vértice es el número de arcos que salen el vértice

Nótese que los grados externos de a es $|R(a)|$

Sea $A = \{1, 4, 5\}$, y sea R dado por el digrafo mostrado en la figura siguiente. Encuentre R



Ejemplo - Digrafos



Este digrafo representa la relación

$$R = \{(1,4),(1,5),(4,1),(4,4),(5,4),(5,5)\}$$

Restricción de R a B

Definición

Si R es una relación sobre un conjunto A, y B es un subconjunto de A, la *restricción de R sobre B* es $R \cap (B \times B)$

Ejemplo - Restricción de R a B

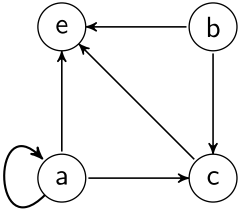
Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$R = \{(a, a), (a, c), (a, e), (b, c), (b, e), (c, e)\}$$

Sea $B = \{a, b, c\}$. Encuentre el digrafo correspondiente a R, la restricción de R a B y el digrafo correspondiente a esta restricción

Ejemplo - Restricción de R a B

$$R = \{(a,a),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(c,e)\}$$



$$R = \{(a,a),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(c,e)\}$$
$$B \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

así que la restricción de R en B es $\{(a,a),(a,c),(b,c)\}$

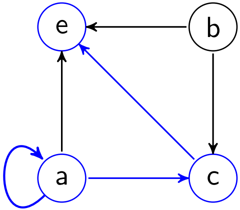
Defición

Suponga que R es una relación sobre A. Una *trayectoria de longitud* n en R de a a b es una secuencia finita $\pi : a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$, empezando en a y terminando en b, tal que

$$a \ R \ x_1, x_1 \ R \ x_2, ..., x_{n-1} \ R \ b$$

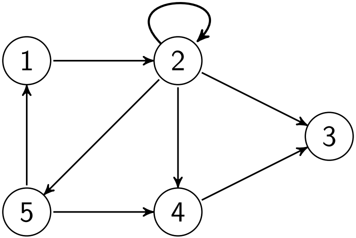
- Note que la trayectoria de longitud n involucra $n+1$ elementos de A, a pesar que estos no son necesariamente distintos

Una trayectoria es mucho mejor visualizada con la ayuda del digrafo de la relación. Este aparece como un *camino* o sucesiones de arcos en tal digrafo, donde las direcciones indicadas son seguidas, y de hecho una trayectoria deriva su nombre de esta representación.

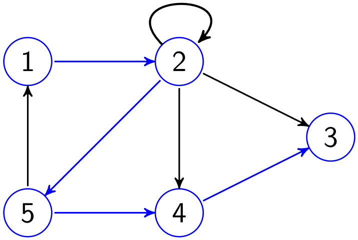


Por lo que la longitud de la trayectoria es el número de arcos en la trayectoria, donde los vértices no necesitan ser del todo distintos.

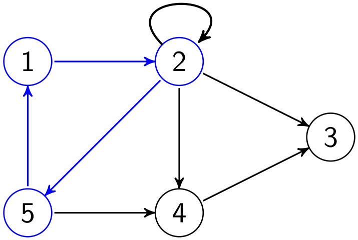
Considere el digrafo de la figura siguiente.



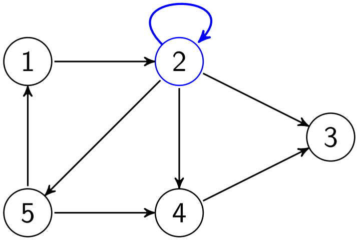
Entonces, $\pi_1 : 1, 2, 5, 4, 3$ es una trayectoria de longitud 4 desde el vértice 1 al vértice 3



Entonces, $\pi_2 : 1, 2, 5, 1$ es una trayectoria de longitud 3 desde el vértice 1 al él mismo



Entonces, $\pi_3 : 2, 2$ es una trayectoria de longitud 1 desde el vértice 2 al él mismo

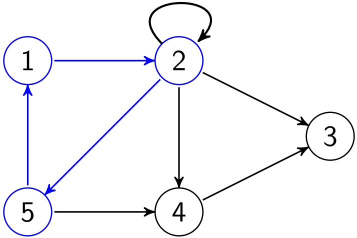


Ciclos

Definición

Una trayectoria que inicia y termina en el mismo vértice es llamada un *ciclo*

En el ejemplo anterior, π_2 y π_3 son ciclos de longitud 3 y 1 respectivamente. En la figura se presenta de nuevo π_2



Trayectoria en relaciones y digrafos

Si n es un entero positivo fijo, definimos una relación R^n sobre A de la siguiente manera forma: $x \; R^n \; y$ significa que hay una trayectoria de longitud n desde x hasta y.

Relación de conectividad

Pudiésemos definir una relación R^∞ sobre A, haciendo que $x \ R^\infty \ y$ signifique que existe alguna trayectoria en R de x a y. La relación R^∞ se le llama aveces *relación de conectividad* para R

Ejemplo - Relación de conectividad

Sea A el conjunto de todos los seres humanos vivientes, y sea R la relación de conocimiento mutuo. Eso es, $a\ R\ b$ significa que a y b se conocen. Entonces $a\ R^2\ b$ significa que a y b tienen un conocido en común. En general, $a\ R^n\ b$ si a conoce a x_1, que conoce a x_2, ..., que conoce a x_{n-1} que conoce a b. Finalmente, $a\ R^\infty\ b$ significa que existe alguna cadena de conocidos que empieza en a y termina en b

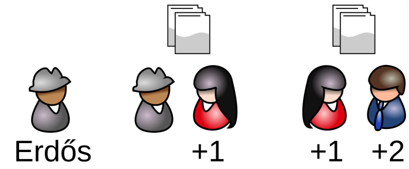
La idea de *seis grados de separación* es que todas las personas en el mundo están, según Jon Kleinberg[*], a 6 o menos conexiones sociales aparte entre ellas (*i.e.* 6 o menos personas se conocen entre ellas).
En el 2011, Bakhshandeh *et al.*[**] diseñaron un algoritmo para encontrar los grados de separación entre usuarios de Twitter. Los resultados revelan que los grados de separación promedio entre dos usuarios cualquiera es de 3.43

[*] The Small-World Phenomenon: An Algorithmic Perspective, STOC '00: Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing

[**] Degrees of Separation in Social Networks. Proceedings, The Fourth International Symposium on Combinatorial Search (SoCS-2011)

Ejemplo - Relación de conectividad

El número de Erdős describe la "distancia colaborativa" entre el matemático Paul Erdős y otra persona, medida por la autoría de artículos matemáticos. Para asignar un número Erdős, alguien debe ser un coautor de un artículo científico con una persona que tiene un número Erdős. Paul Erdős él mismo se le asigna un número Erdős de cero. El número Erdős de un autor es uno más que el más bajo número Erdős de cualquiera de sus colaboradores

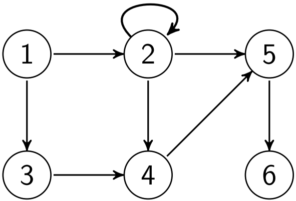


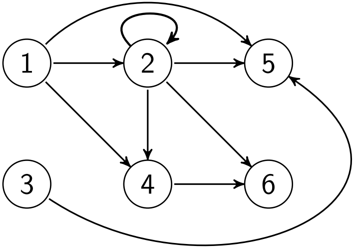
Ejemplo - Relación de conectividad

Sea A el conjunto de ciudades en Latinoamérica, y sea $a\ R\ b$ si hay un vuelo directo de x a y en al menos una aerolínea. Entonces x y y están relacionados por R^n si uno puede reservar un vuelo desde x a y teniendo exactamente $n-1$ paradas intermediarias, y $x\ R^{\infty}\ y$ si uno puede ir de x a y por avión

Ejemplo - Relación de conectividad

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sea R la relación cuyo digrafo se muestra en la figura de la izquierda. La figura de la derecha muestra el digrafo de la relación R^2 sobre A. Una linea conecta dos vértices de la figura de la derecha si y solo si son R^2-relacionados, es decir, si y solo si hay una trayectoria de longitud dos conectando estos vértices





Ejemplo - Relación de conectividad

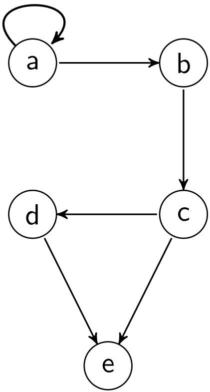
Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, e), (c, d), (d, e)\}$$

Calcule

(a) R^2

(b) R^∞

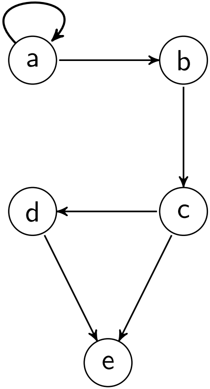


(a) El digrafo de R se muestra en la figura de la derecha. Se tiene que:

$a\ R^2\ a$ ya que $a\ R\ a$ y $a\ R\ a$
$a\ R^2\ b$ ya que $a\ R\ a$ y $a\ R\ b$
$a\ R^2\ c$ ya que $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$
$b\ R^2\ e$ ya que $b\ R\ c$ y $c\ R\ e$
$b\ R^2\ d$ ya que $b\ R\ c$ y $c\ R\ d$
$c\ R^2\ e$ ya que $c\ R\ d$ y $d\ R\ e$

Por ende

$$R^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),\\ (b,e),(b,d),(c,e)\}$$



(b) Para calcular R^∞, necesitamos todos los pares ordenados de vértices de los cuales hay una trayectoria de cualquier longitud desde el primer vértice al segundo. A partir de la figura, vemos que

$$R^\infty = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$$

Definición

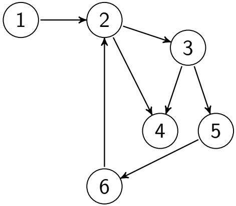
La relación de *alcanzabilidad* R^* de la relación R sobre A que tiene n elementos definidos así: $x \ R^* \ y$ significa que $x = y$ o $x \ R^\infty \ y$

La idea es que y es alcanzable desde x si y es x o hay alguna trayectoria de x a y

Definición

Sea $\pi_1 : a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$ una trayectoria en una relación R de longitud n de a a b, y sea $\pi_2 : b, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, c$ una trayectoria en R de longitud m de b a c. Entonces, la *composición de* π_1 *y* π_2 es la trayectoria $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, c$ de longitud $n + m$, denotada $\pi_1 \circ \pi_2$. Este es una trayectoria de a a c

Ejemplo - Alcanzabilidad



Considere la relación cuyo digrafo esta dado en la figura a la izquierda, y las trayectorias

$$\pi_1 : 1, 2, 3 \ \text{ y } \ \pi_2 : 3, 5, 6, 2, 4$$

Entonces la composición de π_1 y π_2 es la trayectoria $\pi_1 \circ \pi_2 \ : \ 1, 2, 3, 5, 6, 2, 4$ desde 1 hasta 4 de longitud 6

Propiedades de las relaciones

En muchos problemas en informática, lidiamos con relaciones sobre un conjunto A en vez de relaciones de A a B. Además, estas relaciones frecuentemente satisfacen ciertas propiedades que discutiremos en esta parte. Aquellas son:

- Reflexividad e irreflexividad
- Simetría, asimetría y antisimetría
- Transitividad

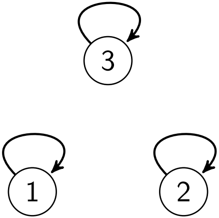
Definición

Una relación R sobre A es *reflexiva* si $(a, a) \in R$ para toda $a \in A$, es decir, si $a \ R \ a$ para toda $a \in R$. Una relación R es *irreflexiva* si $a \not R \ a$ para toda $a \in A$

Ejemplo - Relaciones reflexivas e irreflexivas

(a) Sea $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$, de modo que es una relación de *igualdad* sobre un conjunto A. Entonces Δ es reflexiva, ya que $(a,a) \in R, \forall a \in A$

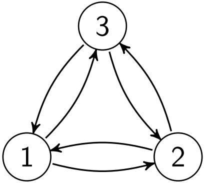
e.g. , sea $A = \{1,2,3\}$, entonces $\Delta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$



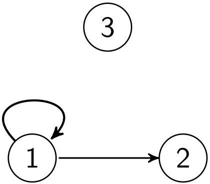
Ejemplo - Relaciones reflexivas e irreflexivas

(b) Sea $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \neq b\}$, tal que R es una relación de *desigualdad* sobre un conjunto A. Entonces R es irreflexiva, dado que $(a, a) \notin R, \forall a \in A$

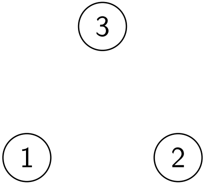
e.g. , sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces
$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$



(c) Sea $A = \{1, 2, 3\}$, y sea $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Entonces R no es reflexiva ya que $(2, 2) \notin R$ y $(3, 3) \notin R$. Ademas, R no es irreflexiva, puesto que $(1, 1) \in R$



(d) Sea A un conjunto no vacío. Sea $R = \varnothing \subseteq A \times A$, la *relación vacía*. Entonces R no es reflexiva, ya que $(a, a) \notin A, \forall a \in A$ (el conjunto vacío no tiene elementos). Sin embargo, R es irreflexiva (?)



Relaciones reflexivas e irreflexivas

Podemos caracterizar el digrafo de una relación reflexiva o irreflexiva de la siguiente manera. Una relación reflexiva tiene un ciclo de longitud 1 en cada vértice, mientras que una relación irreflexiva no tiene ningún ciclo de longitud 1. Otra manera de decir esto es usando la relación de igualdad Δ sobre un conjunto A: R es reflexiva si y solo si $\Delta \subseteq R$, y R es irreflexiva si $\Delta \cap R = \varnothing$
Podemos notar que si R es reflexiva sobre un conjunto A, entonces $\text{Dom}(A) = \text{Ran}(A) = A$

Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es *simétrica* si siempre que $a\ R\ b$, entonces $b\ R\ a$. Le sigue que R no es simétrica si tenemos alguna a y $b \in A$ con $a\ R\ b$ pero $b \not R\ a$

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es *asimétrica* si siempre que $a\ R\ b$, entonces $b \not R\ a$. Le sigue que R no es asimétrica si tenemos alguna a y $b \in A$ donde $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$

Definición

Una relación R sobre un conjunto A es *antisimétrica* si siempre que $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$, entonces $a = b$. La contrapositiva de esta definición es que R es antisimétrica si siempre que $a \neq b$, $a \not R\ b$ o $b \not R\ a$. Le sigue que R no es antisimétrica si tenemos alguna a y $b \in A$, $a \neq b$ y a la vez $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$

Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

Dado una relación R, podemos determinar cual propiedad se cumple para R. Tenga en cuenta la siguiente observación: una propiedad no se cumple en general si podemos encontrar una situación donde la propiedad no cumple

Ejemplo - Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

Sea $A = \mathbb{Z}$, el conjunto de enteros, y sea

$$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a < b\}$$

tal que R es la relación *menor que*. ¿Es R simétrica, asimétrica o antisimétrica?
Solución:

- *Simetría*: Si $a < b$, entonces no es verdad que $b < a$, así que R no es simétrica
- *Asimetría*: Si $a < b$, entonces $b \nless a$, así que R es asimétrica
- *Antisimétría*: Si $a \neq b$, entonces o $a \nless b$ o $b \nless a$, por lo que R es antisimétrica

Ejemplo - Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

Sea A el conjunto de personas y sea

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ es primo hermano de } y\}$$

. Entonces, R es una relación simétrica. (¿Por qué?)

Ejemplo - Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$$

Entonces, R no es simétrica, ya que $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$. Incluso, R no es asimétrica, puesto que $(2, 2) \in R$. Finalmente, R es antisimétrica, a partir que si $a \neq b$, o $(a, b) \notin (b, a) \notin R$

Ejemplo - Relaciones simétricas, asimétricas y antisimétricas

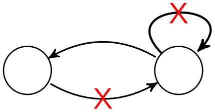
Sea $A = \mathbb{Z}^+$, el conjunto de enteros positivos, y sea

$$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a|b\}$$

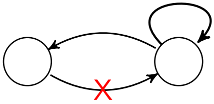
¿Es R simétrica, asimétrica, o antisimétrica?
Solución:

- Si $a|b$, no resulta que $b|a$, por lo que R no es simétrica. Por ejemplo, $2|4$, pero $4\nmid 2$
- Si $a = b = 3$, por ejemplo, entonces $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$, así que R no es asimétrico
- Si $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$, así que R es antisimétrica

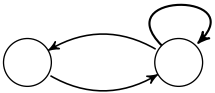
Consideremos ahora los digrafos en estos tipos de relaciones. Si R es una relación asimétrica,, entonces el digrafo de R no puede tener simultáneamente un arco del vértice i al vértice j y un arco del vértice j al vértice i. Esto es verdad para cualquier i y j, y en particular si $i = j$. Por lo que no puede haber ciclos de longitud 1, y todos los arcos son "calles de una vía"



Si R es una relación antisimétrica, entonces para diferentes vértices i y j no puede haber un arco del vértice i al vértice j y un arco del vértice j al vértice i. Cuando $i = j$, ninguna condición es impuesta. Por lo que pueden haber ciclos de longitud 1, pero de nuevo todos los arco son de "una vía"

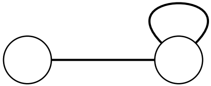


El digrafo de una relación simétrica R tiene la propiedad que si hay un arco del vértice i al vértice j, entonces hay un arco del vértice j al vértice i. Así que, si dos arcos están conectados por un arco, tienen siempre que estar conectados en ambas direcciones.



Grafo

Debido a esto, es posible y útil dar una representación diferentes a las relaciones simétricas. Mantenemos los vértices como antes, y reemplazamos los dos arcos por un arco no dirigido, o una “calle de dos vías”. Este arco no dirigido es una linea sencilla sin flechas y conecta a a y b. El diagrama resultante lo llamaremos el *grafo* de la relación simétrica



Ejemplo - Grafo

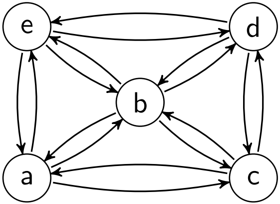
Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y sea R la relación simétrica dada por

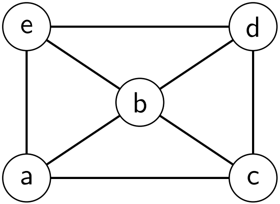
$$\begin{aligned} R = \{&(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),\\ &(b,e),(e,b),(e,d),(d,e),(c,d),(d,c)\} \end{aligned}$$

Ejemplo - Grafo

$$R = \{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b),\\ (b,e),(e,b),(e,d),(d,e),(c,d),(d,c)\}$$

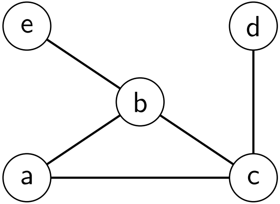
El digrafo usual de R se muestra en la figura de la izquierda, mientras la figura de la derecha muestra el grafo de R. Note que cada arco no dirigido corresponde a dos pares ordenados en la relación R

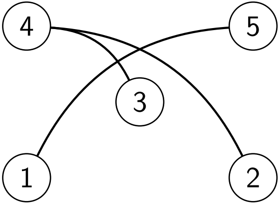




Un arco no dirigido entre a y b, en el grafo de la relación simétrica R, corresponde al conjunto $\{a, b\}$ tal que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$. A veces nos referimos a este conjunto $\{a, b\}$ como un *arco no dirigido* de la relación y llamar a y b *vértices adyacentes*

Una relación R sobre el conjunto A es llamada *conectada* si hay una trayectoria de cualquier elemento de A a cualquier otro elemento de A. Esto simplemente significa que el grafo de R es una sola pieza. Las siguientes figuras muestran los digrafos de dos relaciones simétricas. El grafo de la izquierda es conectado, mientras que el de la derecha no es conectado





Relaciones transitivas

Definición

Una relación R sobre A es *transitiva* si cuando $a \; R \; b$ y $b \; R \; a$, entonces $a \; R \; c$

- A veces es conveniente decir cuando una relación no es transitiva. Una relación R sobre A no es transitiva si existe a, b y c en A tal que $a \; R \; b$ y $b \; R \; a$, pero $a \not R \; c$
- Si tales a, b y c no existen, entonces R es transitiva

Ejemplo - Relaciones transitivas

Sea $A = \mathbb{Z}$ el conjunto de enteros, y sea R la relación menor que. Para saber si R es transitiva, asumimos que $a \; R \; b$ y $b \; R \; a$. Por ende $a < b$ y $b < c$. Le sigue que $a < c$, así que $a \; R \; c$. Por ende R es transitiva

Sea $A = \mathbb{Z}^+$ el conjunto de enteros, y sea R la relación "divide enteramente a". ¿Es R transitiva?

$$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a|b\}$$

Solución: Suponga que $a\ R\ b$ y $b\ R\ a$, tal que $a|b$ y $b|c$. Le sigue que $a|c$. Por lo que R es transitiva

Ejemplo - Relaciones transitivas

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2)\}$$

¿Es R transitiva?
Solución: Como no existen elementos a, b y c tal que $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$, pero $a \not R\ c$, entonces concluimos que R es transitiva

Teorema

Una relación R es transitiva si y solo si satisface la siguiente propiedad: si hay una trayectoria de longitud mayor a 1 desde el vértice a al vértice b, existe una trayectoria de longitud 1 desde a a b (es decir, a está relacionado a b). Algebraicamente, R es transitiva si y solo si $R^n \subseteq R$ para toda $n > 1$

Teorema

Sea R una relación sobre A. Entonces

(a) Reflexividad de R: $a \in R(a), \forall a \in A$

(b) Simetría de R: $a \in R(b) \Leftrightarrow b \in R(a)$

(c) Transitividad de R: $b \in R(a) \wedge c \in R(b) \Rightarrow c \in R(a)$

Definición

Una relación R sobre A es llamada una *relación de equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva

Ejemplo - Relaciones de equivalencia

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,3), (3,3), (4,4)\}$$

Entonces R es una relación de equivalencia

Ejemplo - Relaciones de equivalencia

Sea $A = \mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, y sea R definida como $a\ R\ b \Leftrightarrow a \leq b$. ¿Es R una relación de equivalencia?
Solución:

- Como $a \leq a$, R es reflexiva. Si $a \leq b$, no resulta que $b \leq a$, así que R no es simétrica. Incidentemente, R es transitiva, ya que $a \leq b$ y $b \leq c$ implica que $a \leq c$. Vemos que R no es una relación de equivalencia

Ejemplo - Relaciones de equivalencia

Sea $A = \mathbb{Z}$ y sea

$$R = \{(a,b) \in A \times A \mid a \text{ y } b \text{ dan el mismo residuo divididos por } 2\}$$

En este caso, llamamos 2 el *módulo* y escribimos $a \equiv b \pmod 2$, se lee "a es *congruente a* $b \mod 2$. Muestre que la congruencia $\mod 2$ es una relación de equivalencia
Solución:

- Primero, claramente $a \equiv a \pmod 2$. Por lo que R es reflexiva
- Segundo, si $a \equiv b \pmod 2$, entonces a y b dan el mismo residuo divididos por 2, así que $b \equiv a \pmod 2$
- Finalmente, suponga que $a \equiv b \pmod 2$ y $b \equiv c \pmod 2$. Entonces a, b y c dan el mismo residuo divididos por 2. Así que, $a \equiv c \pmod 2$. Por ende la congruencia $\mod 2$ es una relación de equivalencia

Ejemplo - Relaciones de equivalencia

Sea $A = \mathbb{Z}$ y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Podemos generalizar la definición del ejemplo anterior de la siguiente manera. Sea

$$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \equiv b \pmod{n}\}$$

Es decir, $a \equiv b \pmod{n}$ si y solo si a y b dan el mismo residuo divididos por n. Procediendo exactamente como en el ejemplo anterior, mostramos que la congruencia $\mod n$ es una relación de equivalencia

El siguiente resultado muestra que si $\mathscr{P}$ es una partición de un conjunto A, entonces $\mathscr{P}$ puede ser usada para construir una relación de equivalencia sobre A

Definición

Sea $\mathscr{P}$ una partición de un conjunto A. Se define la relación R sobre A de la siguiente forma:

$a\ R\ b$ si y solo si a y b son miembros del mismo bloque de $\mathscr{P}$

Entonces R es una relación de equivalencia

Prueba:

(a) Si $a \in A$, entonces claramente a está en el mismo bloque que ella misma; así que $a \; R \; a$

(b) Si $a \; R \; b$, entonces a y b están en el mismo bloque; entonces $b \; R \; a$

(c) Si $a \; R \; b$ y $b \; R \; c$, entonces a, b y c deben estar en el mismo bloque de $\mathscr{P}$. Por lo tanto $a \; R \; c$

Ejemplo - Relaciones de equivalencia y particiones

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y consideremos la partición $\mathscr{P} = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ de A. Encuentre la relación de equivalencia R sobre A determinada por $\mathscr{P}$

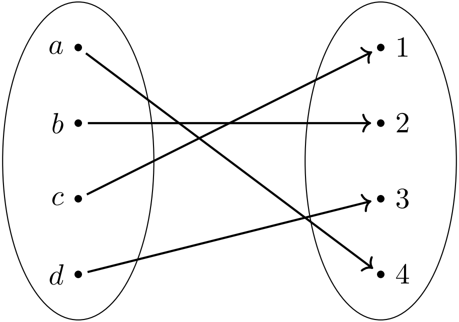
Solución:

- Los bloques de $\mathscr{P}$ son $\{1, 2, 3\}$ y $\{4\}$. Cada elemento en el bloque está relacionado a cada otro elemento en el mismo bloque y solo a esos elementos. Así, en este caso,

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2),\\ (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4)\}$$

Funciones

En esta sección definimos la noción de función, un tipo especial de relación. Estudiaremos las propiedades básicas y luego discutiremos varios tipos especiales de funciones

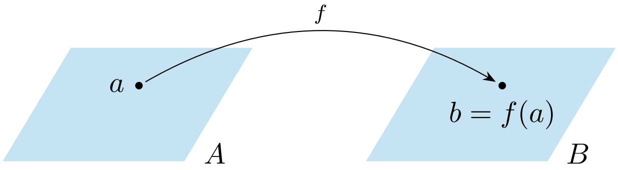


Definición

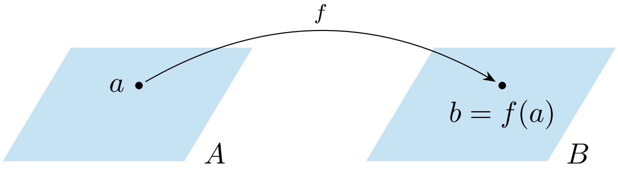
Sea A y B conjuntos no vacíos. Una *función* f de A a B, denotada $f : A \to B$, es una relación de A a B tal que por toda $a \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(a)$, el conjunto f-relativo de a, contiene un solo elemento de B

- Naturalmente, si a no está en $\mathrm{Dom}(f)$, entonces $f(a) = \varnothing$
- Si $f(a) = \{b\}$, es tradicional identificar el conjunto $\{b\}$ con el elemento b y escribir $f(a) = b$
- La relación f puede ser, entonces, ser descrita como un conjunto de de pares $\{(a, f(a)) \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}$

Las funciones también se les llaman *mapeos* o *transformaciones*, ya que pueden ser vistos geométricamente como reglas que asignan a cada elemento $a \in A$ el único elemento $f(a) \in B$



El elemento a es llamado el *argumento* de la función f, y $f(a)$ es llamado el *valor* de la función para el argumento a, y también es referida como la *imagen* de a bajo f. Debajo está un esquema o representación pictórica de nuestra definición de función. Este no debe confundirse con el digrafo de la relación



Ejemplo - Funciones

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$$

Tenemos

$$f(1) = a$$
$$f(2) = a$$
$$f(3) = c$$
$$f(4) = d$$

- Como cada conjunto $f(n)$ tiene un solo elemento, f es una función
- Note que el elemento $a \in B$ aparece como segundo elemento de dos pares ordenados diferentes en f. Esto no entra en conflicto con la definición de función

Ejemplo - Funciones

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{x, y, z\}$. Considere las relaciones

$$R = \{(1, x), (2, x)\}$$

y $S = \{(1, x), (1, y), (2, z), (3, y)\}$

- La relación S no es una función, ya que $S(1) = \{x, y\}$
- La relación R es una función con $\text{Dom}(R) = \{1, 2\}$ y $\text{Ran}(R) = \{x\}$

Ejemplo - Funciones

Sea P un programa de computadora que acepta un entero como entrada y produce un entero como salida. Sea $A = B = \mathbb{Z}$. Entonces P determina la relación f_P definida de la siguiente manera: $(m, n) \in f_P$ significa que n es la salida producida por el programa P cuando su entrada es m

- Como cualquiera entrada particular corresponde a una salida única, es claro que f_P es una función
- Asumimos que los resultados del programa son reproducibles; es decir, son los mismos cada vez que se corre el programa

Ejemplo - Funciones

Sea $A = \mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y sea $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ un polinomio real.

- Entonces p puede ser vista como una relación sobre R. Por cada elemento $r \in \mathbb{R}$ determinamos el conjunto relativo $p(r)$ al substituir r en el polinomio.
- Entonces, como todos los conjuntos relativos $p(r)$ se conocen, la relación p está determinada.
- Ya que un valor único es producido por esta substitución, la relación p es en realidad una función

Ejemplo - Funciones

- Si la formula que define la función no tiene sentido para todos los elementos de A, entonces el dominio de la función es el conjunto de elementos de A por lo que la formula tenga sentido
- En matemática elemental, la *formula* a veces es confundida con la *función* que esta produce. Esto no es dañino, a menos que se espere una formula para cada tipo de función

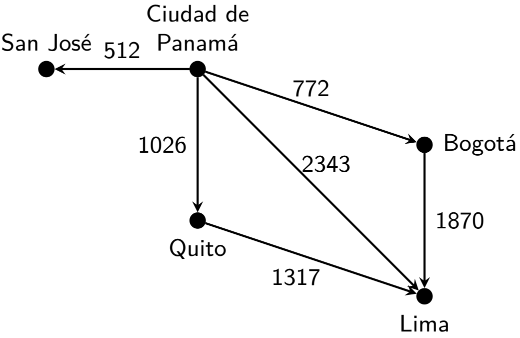
Ejemplo - Funciones

Un *digrafo etiquetado* es un digrafo en el cual los vértices o los arcos (o ambos) están etiquetados con información de un conjunto.

- Si V es el conjunto de vértices y L el conjunto de etiquetas de un grafo etiquetado, entonces el etiquetado de V puede ser especificado como una función $f : V \to L$, donde, por cada $v \in V$, $f(v)$ es la etiqueta puesta a v
- Similarmente, podemos definir un etiquetado de los arcos E como una función $g : E \to L$, donde, por cada $e \in E$, $g(e)$ es la etiqueta puesta a e.

Ejemplo - Funciones

Un ejemplo de un digrafo etiquetado es un mapa en el cual los vértices son etiquetados con nombres de ciudades y los arcos son etiquetados con distancias o tiempos de viaje entre ciudades. La figura de abajo muestra un ejemplo de un digrafo etiquetado



Ejemplo - Funciones

Sea $A = B = \mathbb{Z}$ y sea $f : A \to B$ definido por

$$f(a) = a + 1, a \in A$$

Aquí, f está definida por una fórmula para los valores de $f(a)$

Ejemplo - Funciones

Sea $A = \mathbb{Z}$ y sea $B = \{0, 1\}$. Sea $f : A \to B$ definido por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \text{ es par.} \\ 1, & \text{si } a \text{ es impar.} \end{cases}$$

Entonces f es una función, ya que cada conjunto $f(a)$ consiste en un solo elemento. A diferencia del ejemplo anterior, los elementos de $f(a)$ no están especificados por una fórmula algebraica. En vez, una descripción verbal es dada

Funciones de identidad

Definición

Sea A un conjunto no vacío cualquiera. La *función de identidad sobre* A, denotada 1_A, es definida como $1_A(a) = a$

Podemos notar que 1_A es la relación Δ, que es el subconjunto de la "diagonal" de $A \times A$. En el contexto de funciones, la noción de 1_A es preferida, ya que enfatiza naturaleza *entrada-salida* o *funcional* de la relación.

Suponga que A, B y C son conjuntos, R es una relación de A a B, y S es una relación de B a C. Podemos definir una nueva relación, la *composición* de R y S, escrita $S \circ R$. La relación $S \circ R$ es una relación de A a C y es definida de la siguiente forma: Si $a \in A$ y $c \in C$, entonces $a \ (S \circ R) \ c$ si y solo si, por alguna $b \in B$, tenemos $a \ R \ b$ y $b \ S \ c$.

En otras palabras, a está relacionado a c por $S \circ R$ si podemos "llegar" desde a a c en dos pasos:

1. Primero por un vértice intermedio b por la relación R
2. luego desde b a c por la relación S.

Se puede pensar de la relación $S \circ R$ como "S seguido de R" ya que esta representa el efecto combinado de las dos relaciones, primero R, luego S

Ejemplo - Composición

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ y $S = \{(1, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Como $(1, 2) \in R$ y $(2, 3) \in S$, debemos tener $(1, 3) \in S \circ R$. Similarmente, como $(1, 1) \in R$ y $(1, 4) \in S$, vemos que $(1, 4) \in S \circ R$. Siguiendo de esta manera, tenemos que
$S \circ R = \{(1, 4), (1, 3), (1, 1), (2, 1), (3, 3)\}$

Teorema

Sea R una relación de A a B y sea S una relación de B a C. Entonces, si $A_1 \subseteq A$, tenemos que

$$(S \circ R)(A_1) = S(R(A_1))$$

Composición

Prueba:

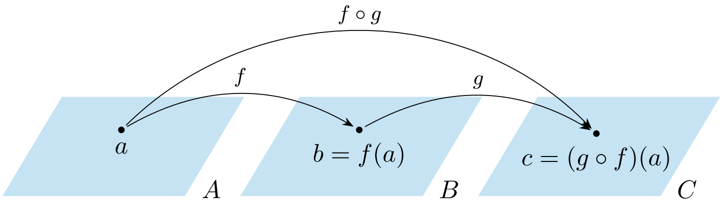
- Si un elemento $z \in C$ está en $(S \circ R)(A_1)$, entonces $x\ (S \circ R)\ z$ para alguna $x \in A_1$. Por la definición de la composición, esto significa que $x\ R\ y$ y $y\ S\ z$ para alguna $y \in B$. Por lo que $y \in R(x)$, así que $z \in S(R(x))$. Como $\{x\} \subseteq A_1$, según el teorema en la diapositiva ... $S(R(x)) \subseteq S(R(A_1))$. Por ende $z \in S(R(A_1))$, así que $(S \circ R)(A_1) \subseteq S(R(A_1))$.
- Recíprocamente, suponga que $z \in S(R(A_1))$. Entonces $z \in S(y)$ para alguna $y \in R(A_1)$ y, similarmente, $y \in R(x)$ para alguna $x \in A_1$. Esto significa que $x\ R\ y$ y $y\ S\ z$, así que $x\ (R \circ S)\ z$. Por lo que $z \in (S \circ R)(A_1)$, así que $S(R(A_1)) \subseteq (S \circ R)(A_1)$. Esto prueba el teorema

Composición de funciones

Definición

Suponga que $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones. Entonces la composición de f y g, $g \circ f$, es una relación

Sea $a \in \text{Dom}(g \circ f)$. Entonces, por el teorema anterior, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Como f y g son funciones, $f(a)$ consiste de un solo elemento $b \in B$, así que $g(f(a)) = g(b)$. Como g también es una función, $g(b)$ contiene un solo elemento de C. Por lo que cada conjunto $(g \circ f)(a)$, por cada $a \in \text{Dom}(a)$, contiene un solo elemento de C, por lo que $g \circ f$ es una función.



Ejemplo - Composición de funciones

Sea $A = B = Z$, y C el conjunto de los enteros pares. Sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$ definida por

$$f(a) = a + 1$$
$$g(b) = 2b$$

Encuentre $g \circ f$
Solución:

- Tenemos que $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(a+1) = 2(a+1)$
- Por lo que, si f y g son funciones especificadas por la fórmulas, entonces así mismo es $g \circ f$ y la fórmula de esta es producida al substituir la fórmula para f dentro de la fórmula para g

Funciones especiales

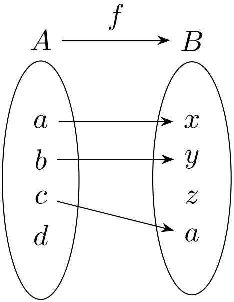
Entre todos los tipos de funciones que existen, vamos a ver los cuatro siguientes:

- Inyectivas
- Definidas en todos lados
- Suprayectivas
- Biyectivas
- Invertibles

Funciones inyectivas

Definición

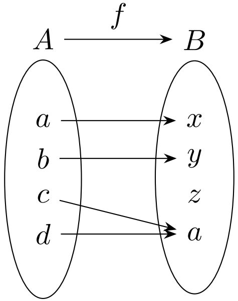
Sea f una función de A a B. Entonces decimos que f es *inyectiva* o es *uno-a-uno* si no hay $f(a) = f(a')$ para dos elementos distintos $a, a' \in A$



Funciones definidas en todas partes

Definición

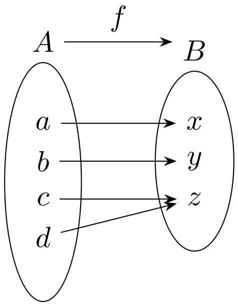
Sea f una función de A a B. Entonces decimos que f está *definida en todas partes* si $\mathrm{Dom}(f) = A$



Funciones suprayectivas

Definición

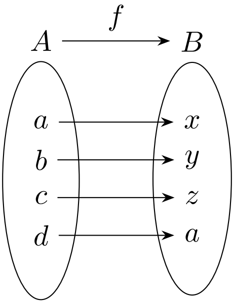
Sea f una función de A a B. Entonces decimos que f es *suprayectiva* o *exhaustiva* si $\mathrm{Ran}(f) = B$



Funciones biyectivas

Definición

Sea f una función de A a B. Entonces decimos que f es *biyectiva* o una *correspondencia de uno-a-uno* si es inyectiva y suprayectiva, *i.e.* si $\text{Dom}(f) = A$ y $\text{Ran}(f) = B$



Ejemplo - Funciones especiales

Considere la función f de A a B, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$$

¿Cuál de estas propiedades especiales, si alguna, posee f?
Solución:

- Ya que $f(1) = f(2) = a$, f no es inyectiva
- Como $\mathrm{Dom}(f) = A$, f está definida en todas partes
- Por el otro lado, $\mathrm{Ran}(f) = \{a, c, d\} \neq B$; por ende, f no es exhaustiva (no es suprayectiva)

Ejemplo - Funciones especiales

Sea $A = B = \mathbb{Z}$ y sea $f : A \to B$ definido por

$$f(a) = a + 1, a \in A$$

¿Cuál de estas propiedades especiales, si alguna, posee f?

Solución:

- Como la formula que define f tiene valor para todos los enteros, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{Z} = A$, y así f está definida en todas partes. Suponga que

  $$f(a) = f(a')$$

  para $a, a' \in A$. Entonces,

  $$a + 1 = a' + 1$$

  por lo que $a = a'$. Por eso f es inyectiva

Ejemplo - Funciones especiales

- Para ver si f es exhaustiva, sea b un elemento arbitrario de B. Como

  $$f(a) = a + 1$$

  necesitamos un elemento $a \in A$ tal que

  $$a + 1 = b$$

  Por supuesto,

  $$a = b - 1$$

  satisfaría la ecuación ya que $b - 1 \in A$. Como resultado, $\mathrm{Ran}(f) = B$; por ende, f es suprayectiva

Ejemplo - Funciones especiales

Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $C = \{\tilde{\text{n}}, \text{þ}\}$, $D = \{1, 2, 3, 4\}$.
Considere las siguientes funciones $f_1 : A \to B$, $f_2 : A \to D$, $f_3 : B \to C$, $f_4 : D \to B$ respectivamente

(a) $f_1 = \{(a, \beta), (b, \gamma), (c, \alpha)\}$

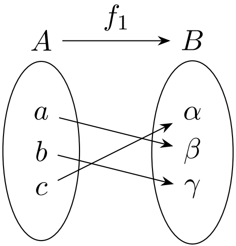
(b) $f_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 4)\}$

(c) $f_3 = \{(\alpha, \text{þ}), (\beta, \text{þ}), (\gamma, \text{þ})\}$

(d) $f_4 = \{(1, \alpha), (2, \gamma), (3, \alpha)\}$

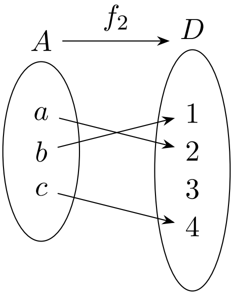
Determine si cada función es biyectiva, si es suprayectiva o si es inyectiva

Ejemplo - Funciones especiales

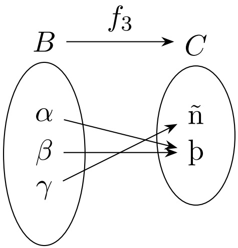


(a) f_1 está definida en todas partes, es inyectiva y suprayectiva

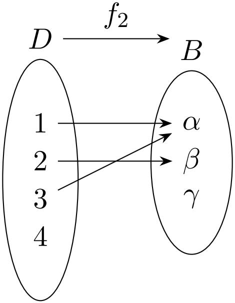
Ejemplo - Funciones especiales



(b) f_2 está definida en todas partes y es inyectiva, pero no es supráyectiva



(c) f_3 es está definida en todas partes y es suprayectiva, pero no es inyectiva



(d) f_4 no está definida en todas partes, ni es inyectiva ni supravectiva

Funciones invertibles

Definición

Una función $f : A \to B$ es *invertible* si su relación inversa, f^{-1}, es también una función

Considere la función f de A a B, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$$

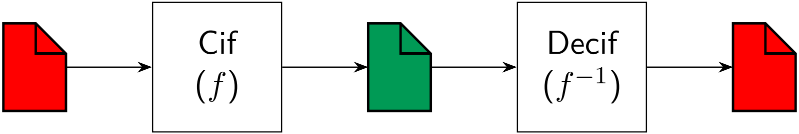
y también

$$f^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (d, 3), (c, 4)\}$$

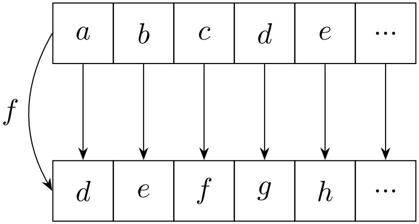
Vemos que f^{-1} no es una función, ya que $f^{-1}(a) = \{1, 2\}$

Aplicaciones de funciones

Las funciones inyectivas son herramientas fundamentales en criptología, porque se necesita cifrar y descifrar a la vez



Muchos códigos secretos son simples *codigos de substituciones* creados de la siguiente forma: sea $A = \{a, b, ..., z\}$ el alfabeto español, y sea $f : A \to A$ una función acordada por adelantado entre participantes de una correspondencia



Un mensaje es cifrado al reemplazar cada letra por su imagen en f

$$
\begin{array}{c}
aguacateasegurado \\
\Big\downarrow f \\
djxdfdwhdvhjxudgr
\end{array}
$$

Para que el mensaje sea descifrado, la función f debe tener una inversa. El receptor descifra el mensaje al aplicar f^{-1} a cada letra

$$\begin{array}{c} djxdfdwhdvhjxudgr \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ aguacateasegurado \end{array}$$