Estructuras Discretas para la Computación

Módulo I: Conceptos de la teoría de conjuntos

Tomás J. Concepción Miranda

Universidad Tecnológica de Panamá

Tabla de contenido - Módulo I

Conjuntos

Definición

Un *conjunto* es una colección sin orden de objetos únicos, llamados *elementos*

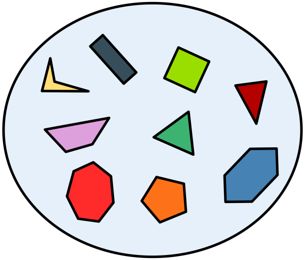


Figura: Conjunto de figuras geométricas

Figura: Conjunto de frutas

Notación y construcción

Formas de escribir conjuntos:

- Conjunto vacío: $\varnothing$ o $\{\}$
- Conjunto finito: $\{4, 9, 2, 7\}$, $\{a, b, c\}$, $\{\text{piña}, \text{mango}, \text{naranja}\}$, $\{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$
- Conjunto infinito (e.g. $\mathbb{N}$): $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
- Por propiedades: $\{p \mid p \in \mathbb{N}, p \bmod 2 = 0\}$ (conjunto de los números naturales pares)

Diagramas de Venn

- Permiten una representación visual de conjuntos

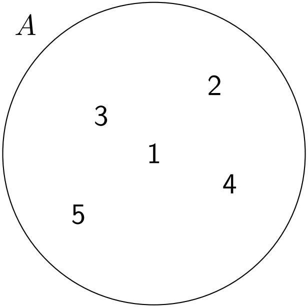


Figura: Diagrama de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Igualdad

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos

Ejemplo:

- $A = \{5, 6, 7, 8\}$
- $B = \{5, 6, 7, 8\}$

Subconjuntos

Definición

Sea los conjuntos A y B. A es un *subconjunto* de B si todos los elementos de A están también en B

Se dice, entonces, que B es un *superconjunto* de A y se denota $B \supseteq A$

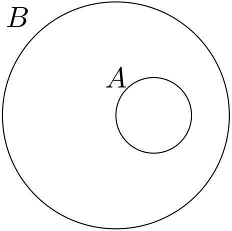


Figura: Diagrama de $A \subseteq B$

Número de elementos de un conjunto

- La *cardinalidad* es la medida del “número” de elementos de un conjunto
- La notación se expresa con dos barras entre el conjunto, *e.g.* sea $A = \{1, 2, 3\}$ un conjunto, entonces $|A| = 3$
  - $|\mathbb{N}| = \infty$
  - $|\mathbb{Z}| = \infty$
  - $|\mathbb{Q}| = \infty$
  - $|\mathbb{R}| = \infty$
- $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$?
- Conjuntos infinitos pueden tener tantos o más elementos que otros conjuntos infinitos (más sobre esto en una sección posterior)

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto de potencia $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A

Ejemplo:
Sea $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) =&\{\varnothing,\\ &\{a\}, \{b\}, \{c\},\\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},\\ &\{a, b, c\}\}\end{aligned}$$

Unión de conjuntos

Definición

Sea A y B dos conjuntos. La *unión* $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos de A y B

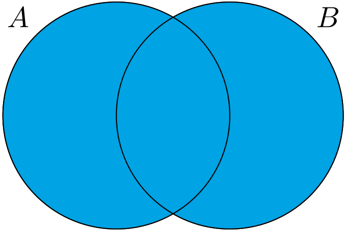


Figura: Diagrama de $A \cup B$

Intersección de conjuntos

Definición

Sea A y B dos conjuntos. La *intersección* $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos en a A y a B a la vez

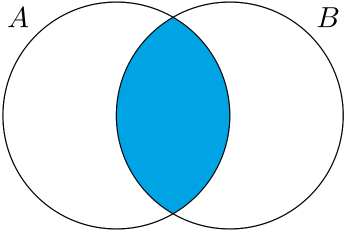


Figura: Diagrama de $A \cap B$

Intersección de conjuntos

- Dos conjuntos sin elementos en común son *conjuntos disjuntos*, *e.g.* $F = \{a, b, c\}$ y $G = \{1, 2, 3\}$
- La intersección de dos conjuntos disjuntos es el conjunto vacío: $F \cap G = \varnothing$

Complemento de un conjunto con respecto a otro

Definición

Sea A y B dos conjuntos. El *complemento de B con respecto a A*, $A - B$, es el conjunto de todos los elementos pertenecientes a A pero no en B

Es decir, $A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

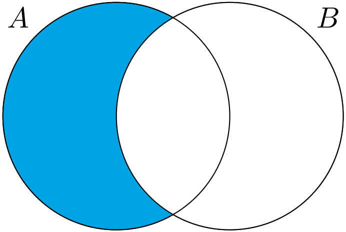


Figura: Diagrama de $A - B$

Conjunto universal

- Se considera un conjunto universal U aquel que contiene todos los elementos en consideración
- Es decir, todo conjunto en discusión es un subconjunto de U

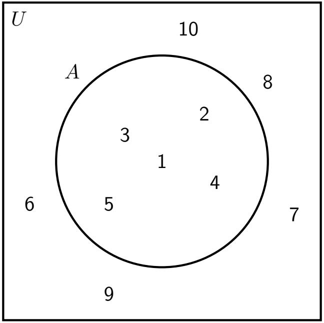


Figura: Diagrama de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Complemento de un conjunto

Definición

Sea A un conjunto y U el conjunto universal. El *complemento* $\overline{A}$ de A es el conjunto de elementos que no pertenecen a A.
Es decir, $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$. Más explícitamente, se puede definir $\overline{A} = \{x \mid x \in U \wedge \ x \notin A\}$

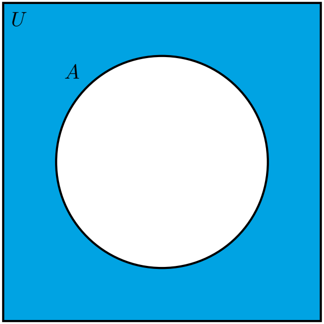


Figura: Diagrama de $\overline{A}$

Diferencia simétrica

Definición

Sea A y B dos conjuntos. La *diferencia simétrica* $A \Delta B$ es el conjunto de elementos pertenecientes a A y B que no pertenecen a $A \cup B$

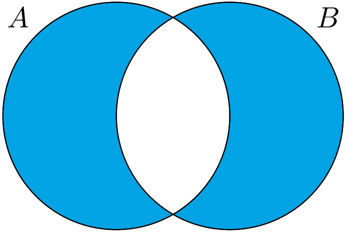


Figura: Diagrama de $A \Delta B$

Propiedades algebraicas de las operaciones con conjuntos

- Conmutativa
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- Asociativa
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiva
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

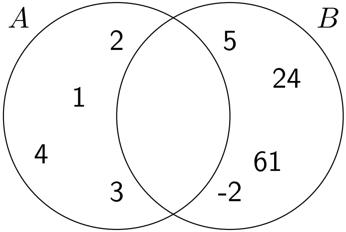
- Idempotentes
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$
- Del complemento
  - $\overline{\overline{A}} = A$
  - $A \cup \overline{A} = U$
  - $A \cap \overline{A} = \varnothing$
  - $\overline{\varnothing} = U$
  - $\overline{U} = \varnothing$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (ley de De Morgan)
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (ley de De Morgan)

Propiedades algebraicas de las operaciones con conjuntos

- Del conjunto universal
  - $A \cup U = U$
  - $A \cap U = A$
- Del conjunto vacío
  - $A \cup \varnothing = A$
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$

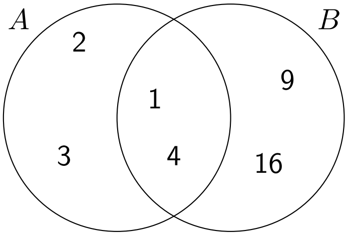
Caso 1:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{-2, 5, 24, 61\}$
- $|A \cap B| = 0$
- $|A \cup B| = 8$



Caso 2:

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{1, 4, 9, 16\}$
- $|A \cap B| = 2$
- $|A \cup B| = 6$



Principio de adición

- Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$. De lo contrario, hay que tomar en cuenta los elementos en $A \cap B$, por lo que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
- Para tres conjuntos A, B, C, se aplica la misa regla, añadiendo el número de elementos en la intersección de los tres conjuntos: $|A \cup B \cup C| =$
$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- Este principio se puede extender para más de tres conjuntos

Sucesión

Definición

Una *sucesión* (o *secuencia*) es una colección de objetos en orden

Tamaños de sucesiones:

- finita: la sucesión de letras en la palabra $bejuco$
- infinita: la sucesión de $\mathbb{N} : 0, 1, 2, 3, 4, ...$

La posición se denota con un con un subíndice abajo de una variable:

- a_1 para el primer valor
- a_2 para el segundo valor
- a_n para el n-ésimo valor

Ejemplo: Si la sucesión es $A : helecho$, entonces $a_1 = a_6 = h$

Notación

Se denota una sucesión finita con dos puntos, *e.g.* $X : a, b, c, d$

Hay dos formas de describir una sucesión:

- explícita, mediante una función, *e.g.* $b_n = 2^n$
- recursiva, estableciendo un valor inicial y los términos sucesivos, *e.g.* $a_1 = 1$, $a_n = (a_{n-1})^2$
  - Secuencia de Fibonacci
  - Factoriales de n

Conjunto correspondiente a una sucesión

Definición

Sea S una sucesión. El *conjunto C de la sucesión S* es la colección de elementos únicos de S

Ejemplos:

- Para una sucesión $A : 1, 2, 1, 3, 1, 4$,
  su conjunto es $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- Para una sucesión $ST : burundanga$,
  su conjunto es $C = \{a, b, d, g, n, r, u\}$

Función característica

Definición

Sea A un conjunto. La *función característica* f_A de A se define como:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Ejemplo:

Si $A : enante$, entonces:

- $f_A(a) = 1$
- $f_A(b) = 0$
- $f_A(c) = 0$
- $f_A(d) = 0$
- $f_A(e) = 1$

- Se establece el conjunto universal y los conjuntos a tratar (*e.g.* A)
- Los elementos del conjunto se disponen en una sucesión
- Con el uso de la función característica f_A, se crea un arreglo que guarde los valores de $f_A(x), x \in A$

Representación en computador de conjuntos - Ejemplo

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\},\ A = \{b, d, f, h\}$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\cline{2-11}
A = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\cline{2-11}
 & a & b & c & d & e & f & g & h & i & j
\end{array}
$$

Definición

Sean P_1 y P_2 dos procedimientos. Si P_1 puede efectuarse en n_1 maneras y P_2 en n_2, entonces realizar la secuencia de procedimientos P_1P_2 puede efectuarse de n_1n_2 maneras

Ejemplo: Para comprar tinta de impresora (P_1), se puede ir a 5 tiendas diferentes; y para comprar gasolina (P_2) hay 9 bombas distintas. Realizar P_1 y P_2, en cualquier orden, puede efectuarse de $n_1n_2 = 5 \cdot 9 = 45$ maneras distintas

Principio de suma del conteo

Definición

Sean P un procedimiento. Si P puede efectuarse una sola vez en n_1 maneras o en n_2 otras, entonces P puede efectuarse de $n_1 + n_2$ maneras

Ejemplo: Una persona puede pagar su cuenta de electricidad (P) en cualquiera de los 12 supermercados de la ciudad (n_1), o en 3 de las oficinas de la compañía de electricidad (n_2). Entonces, realizar P puede efectuarse de $n_1 + n_2 = 12 + 3 = 15$ maneras distintas

Definición

Sea A un conjunto de n elementos y r tal que $1 \leq r \leq n$. Entonces, el número de secuencias de longitud r que pueden formarse usando elementos de A, con repeticiones, es n^r

Ejemplo: Si $A = \{a, b, c\}$ y $r = 2$, las secuencias de longitud r que se pueden crear son:

$$\begin{array}{ccc} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{array}$$

por lo que se pueden formar $n^r = 3^2 = 9$ secuencias de longitud r

Definición

Sea A un conjunto de n objetos. Una *permutación* de A es una secuencia de todos los elementos de A tomados una vez sin repeticiones. El número de permutaciones de todos los elementos de A es $n!$

Ejemplo: Se quieren colocar 4 plantas en una sala, una al lado de la otra, y hay una veranera, una orquídea, un cactus y un helecho. En este caso, $n = 4$, entonces el número de permutaciones es

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Definición

Sea A un conjunto de n objetos y r tal que $1 \leq r \leq n$. Una *permutación* de A tomados r a la vez es una secuencia de r elementos distintos de A. El número de permutaciones de A tomados r a la vez es ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Ejemplo: Se quieren colocar solo 2 plantas en una sala, y hay una veranera, una orquídea, un cactus y un helecho (las mismas del ejemplo anterior). En este caso, con $r = 2$ y $n = 4$, el número de permutaciones

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

*Si $r = n$, entonces ${}_nP_r = n!$

Definición

Sea A un conjunto de n elementos y r tal que $1 \leq r \leq n$. Una *combinación* es un conjunto de r elementos únicos de A. El número de combinaciones de elementos de A tomados r a la vez es ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Ejemplo: una vendedor en una feria de libro ofrece un combo de 3 de los 20 libros que vende. Para este caso, $n = 20$ y $r = 3$, entonces el número de combos posibles es

$$ {}_{20}C_3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3 \cdot 2 \cdot 17!} = 1140 $$

Glosario de términos

Símbolo	Significado	Ejemplo	Significado del ejemplo
$\in$	es elemento de, pertenece a	$a \in X$	a es elemento de X
$\notin$	no es elemento de, no pertenece a	$b \notin Y$	b no es elemento de X
$\varnothing$	conjunto vacío		
$\cup$	unión	$A \cup B$	A unión B
$\cap$	intersección	$A \cap B$	A intersección B
Δ	diferencia simétrica de	$A \Delta B$	diferencia simétrica de A y B