MATEMÁTICA SUPERIORES PARA INGENIEROS

Facultad de Ciencia y Tecnología
Universidad Tecnológica de Panamá
Sede Regional de Panamá Oeste

II SEMESTRE

SERIES DE FOURIER

2. SERIES E INTEGRALES DE FOURIER. ***(22 horas)***

2.1. Funciones periódicas. Series Trigonométricas.
2.2. Series de Fourier, coeficientes de Euler.
2.3. Funciones que tienen período arbitrario.
2.4. Funciones pares e impares.
2.5. Desarrollo de medio rango.
2.6. Convergencia de las series de Fourier.
2.7. Derivación e integración de series de Fourier.
2.8. La integral de Fourier. Teoremas básicos
2.9. La transformada de Fourier.
   2.9.1. Propiedades de la transformada de Fourier
   2.9.2. La respuesta de frecuencia.
   2.9.3. Transformación de la función escalón impulso
   2.9.4. Transformada de Fourier en tiempo discreto
   2.9.5. Transformada de Fourier en tiempo continuo
2.10. Aplicaciones a la ingeniería
   2.10.1. Respuesta a la frecuencia y sistemas oscilatorios.
   2.10.2. Aplicaciones a tipos especiales de señales periódicas.
2.11. Transformada inversa de Fourier.

PREÁMBULO

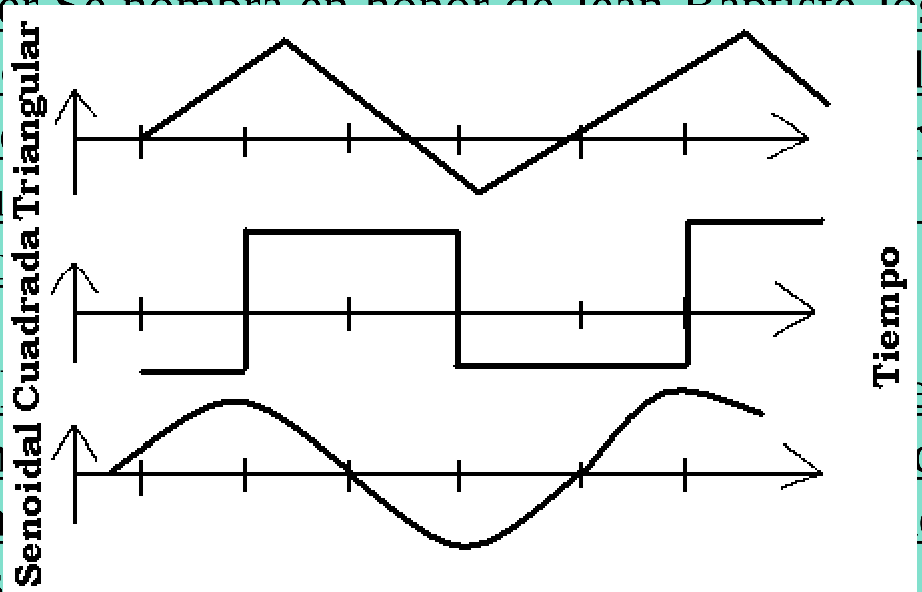
Las Series de trigonométricas de Fourier, o simplemente series de Fourier fueron desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (21 de marzo de 1768 en Auxerre - 16 de mayo de 1830 en París).

La idea que subyace en las series de Fourier es la descomposición de una señal periódica en términos de señales periódicas básicas (senos y cosenos) cuyas frecuencias son múltiplos de la señal original.

La idea de descomposición es un proceso fundamental en el area científica en general: la descomposición permite el análisis de las propiedades y la síntesis de los objetos o fenómenos.

En matemáticas, una serie de Fourier descompone funciones periódicas o señales periódicas en la suma de funciones oscilantes simples, como senos y cosenos (o exponenciales complejos). El estudio de la serie de Fourier Es una rama del análisis de Fourier.

La serie de Fourier Se nombra en honor de Jean Baptiste José Fourier (1768-1830), que hiz… dio de la serie trigonométrica, d… Leonhard Euler y Daniel Bernou… de solucionar la ecuación del calo…



-

En las ramas de l… erentes formas de señales tales con… das estas señales mencionadas son… e un tiempo. La aplicación del osciloscopio nos permite entender un poco mejor como son estas señales que se pueden determinar calculando la Serie de Fourier para cada una de estas.

FUNCIONES PERIÓDICAS

Una ***Función Periódica*** f(t) cumple la siguiente propiedad para todo valor de t.

$$f(t)=f(t+T)$$

A la constante mínima para la cual se cumple lo anterior se le llama el ***periodo*** de la función

Repitiendo la propiedad se puede obtener:

$$f(t)=f(t+nT),\ \text{donde } n=0,\pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots$$

Series

Dada una sucesión $\{z_n\}$, una **serie infinita** o **serie** se puede formar a partir de una suma infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots$$

Los z_1, z_2, ... son denominados **términos** de la serie.

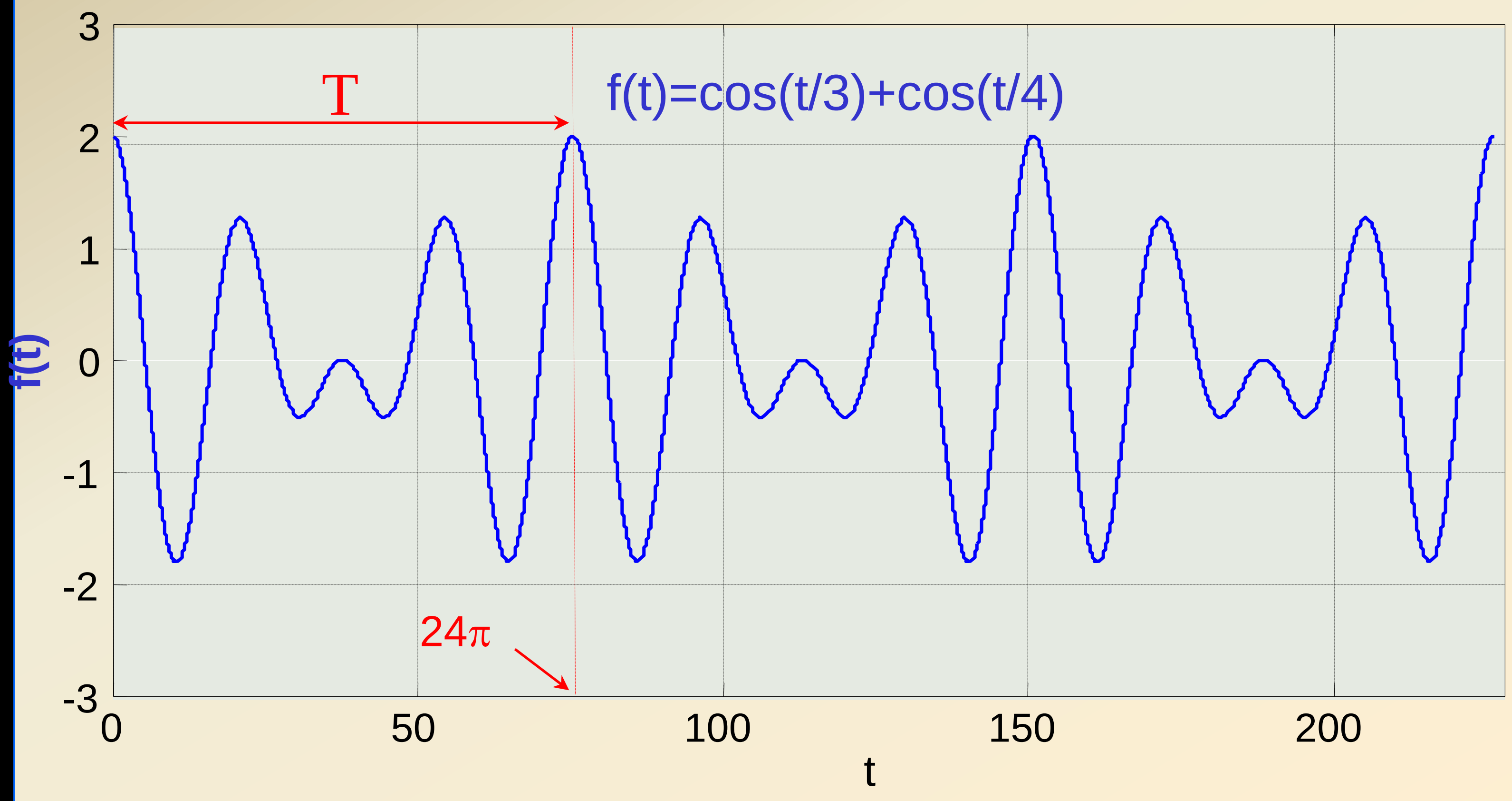
La sucesión de sumas:

$$s_1 = z_1$$
$$s_2 = z_1 + z_2$$
$$s_3 = z_1 + z_2 + z_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = z_1 + z_2 + \ldots . z_n$$

es la sucesión de **sumas parciales** de la serie infinita.

FUNCIONES PERIÓDICAS

Gráfica de la función $f(t) = \cos(\frac{t}{3}) + \cos(\frac{t}{4})$



SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Algunas funciones periódicas f(t) de periodo T pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1\cos(\omega_0 t)+a_2\cos(2\omega_0 t)+\ldots+ b_1\text{sen}(\omega_0 t)+b_2\text{sen}(2\omega_0 t)+\ldots$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Donde $\omega_0=2\pi/T$. frecuencia fundamental

Es decir,

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE

Dada una función periódica f(t) ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes $a_0,a_1,a_2,...,b_1,b_2,...$

Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE

El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.

Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de $-T/2$ a $T/2$, sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de t_0 a t_0+T, con t_0 arbitrario)

las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)]$$

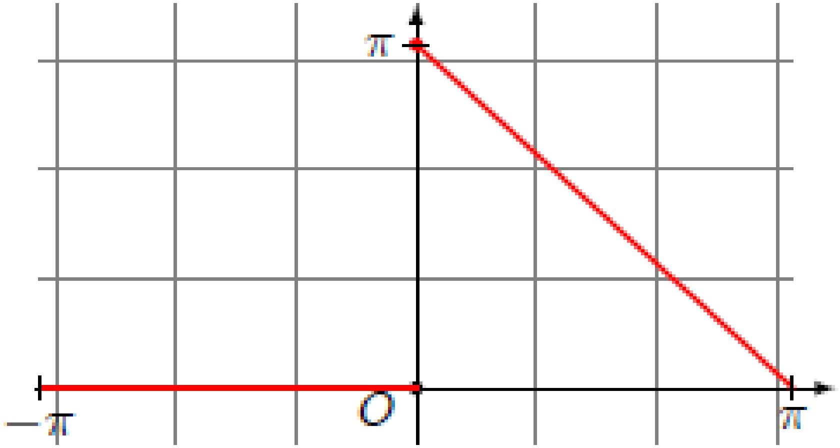
Donde:

$$a_{0=}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(nw_0t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sen(nw_0t)dt$$

Ejemplo 1

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ \pi - t & 0 < t < \pi \end{cases}$$



Aquí $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Ejemplo 1

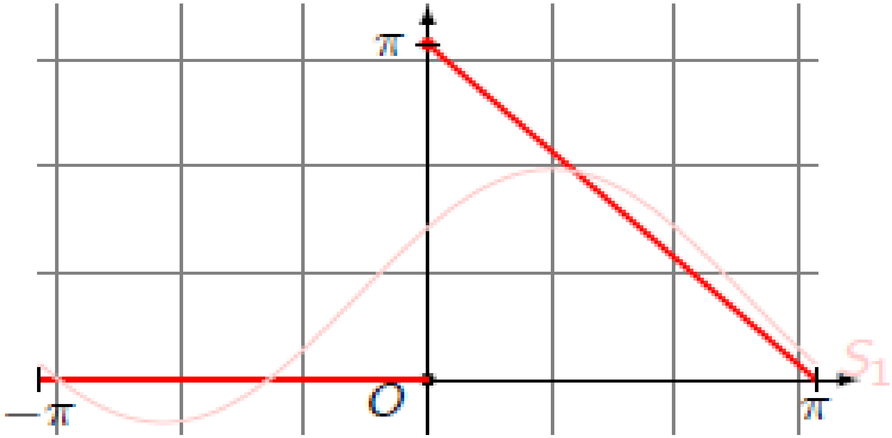
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 1

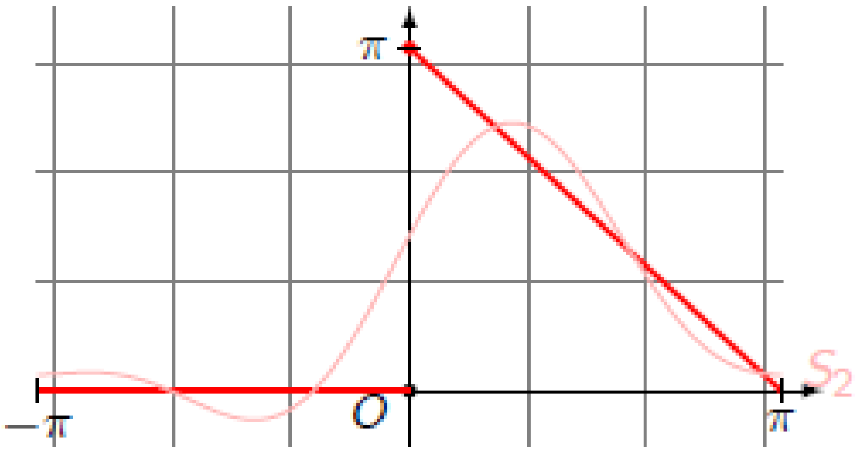
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \ a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \ b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



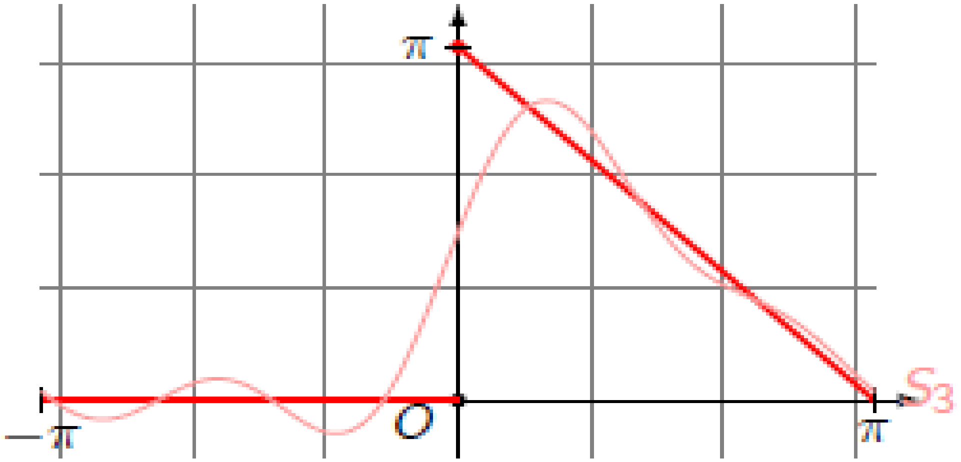
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



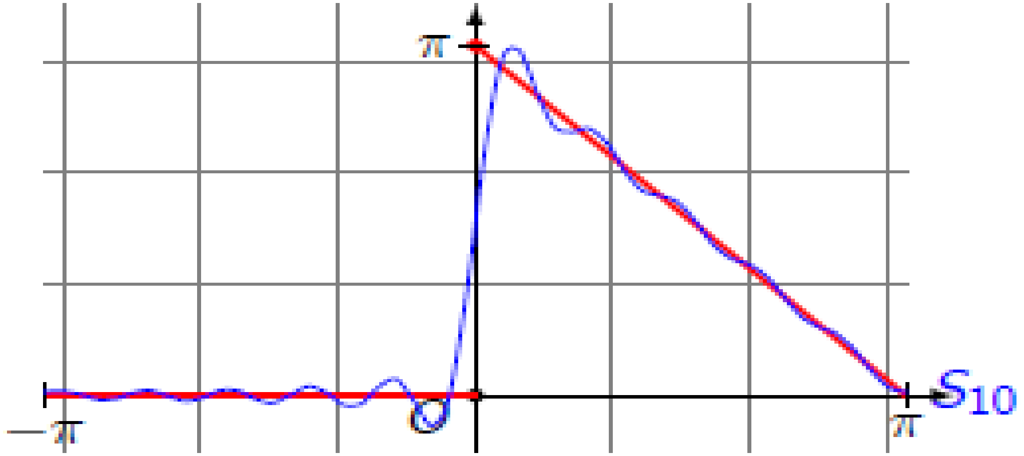
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = \frac{\pi}{2}, \quad a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\,\pi}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

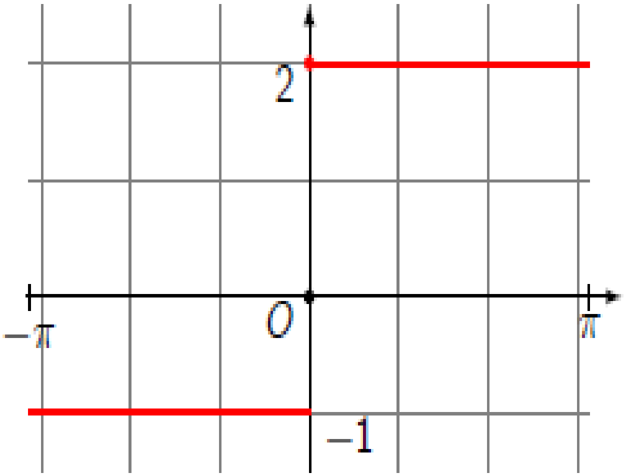
Las aproximaciones a $f(x)$ mediante las sumas parciales quedan de la siguiente manera:



Ejemplo 2

Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$



Aquí $\omega_0 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$

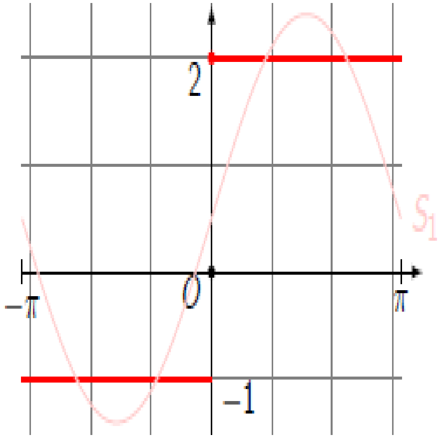
Ejemplo 2

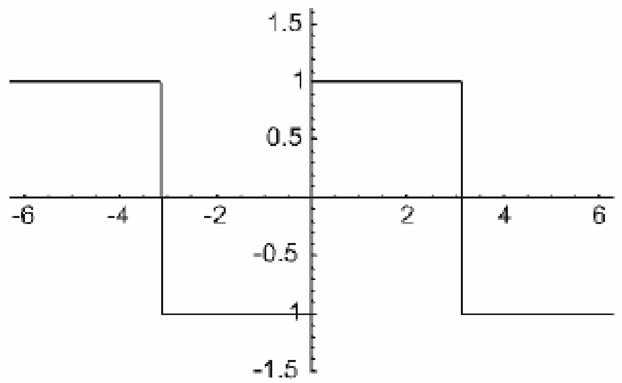
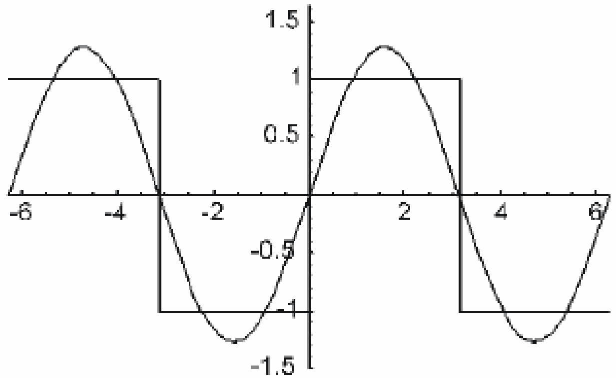
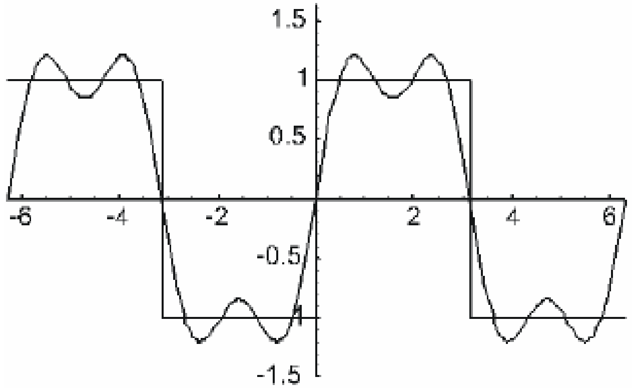
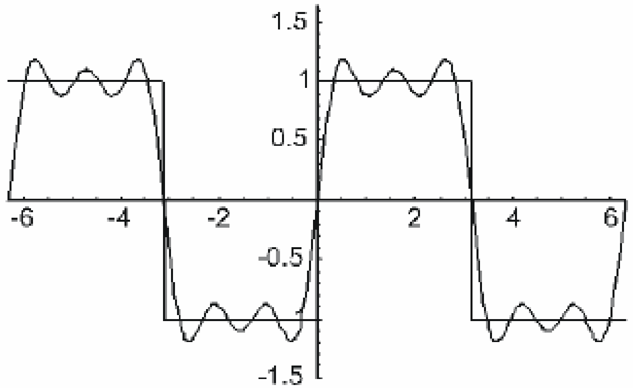
Resumen: Expanda en una Serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad -\pi < x < 0 \\ 2 & \text{para} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier quedaron:

$$a_0 = 1, \; a_n = 0, \; b_n = \frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{n\pi}$$

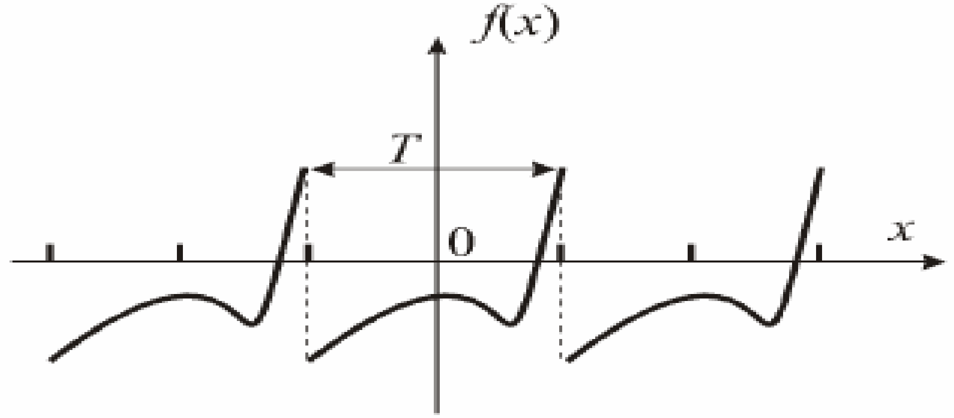



1.5
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

1.5
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

1.5
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

1.5
1
0.5
-6
-4
-2
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

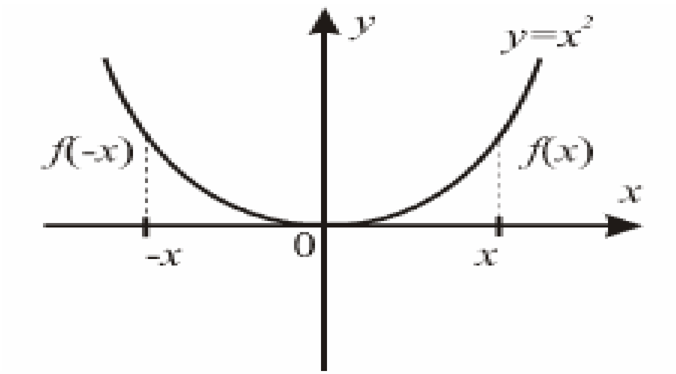
1.1.1 Serie Trigonométrica
Función Periódica. Función Par e Impar

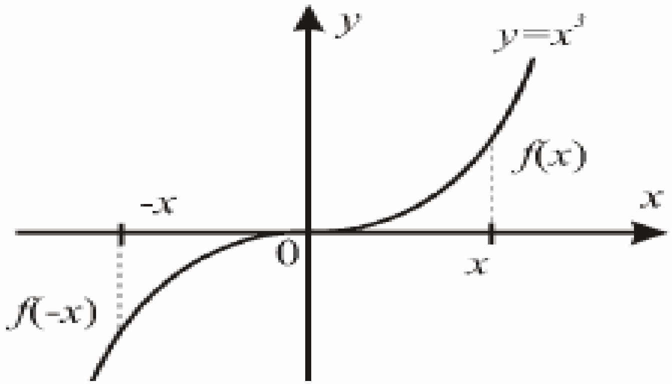
Función periódica

$$f(x+T) = f(x)$$



Función par e impar





f *es par si* $f(-x) = f(x)$

e impar si $f(-x) = -f(x)$

SERIES DE COSENO

Suponga que f y f' son seccionalmente continuas, y que f es una función periódica par, en el intervalo (-p,p) de periodo 2p

De tal manera que los coeficientes de Fourier de f(siendo f par) entonces están dados por

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)cos\frac{n\pi}{p}xdx \qquad b_n=0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Una serie de este tipo se llama serie cosenoidal de Fourier

SERIES DE SENO

Suponga que f y f' son seccionalmente continuas, y que f es una función periódica impar, en el intervalo (-p,p) de periodo 2p

De tal manera que los coeficientes de Fourier de f(siendo f impar) entonces están dados por

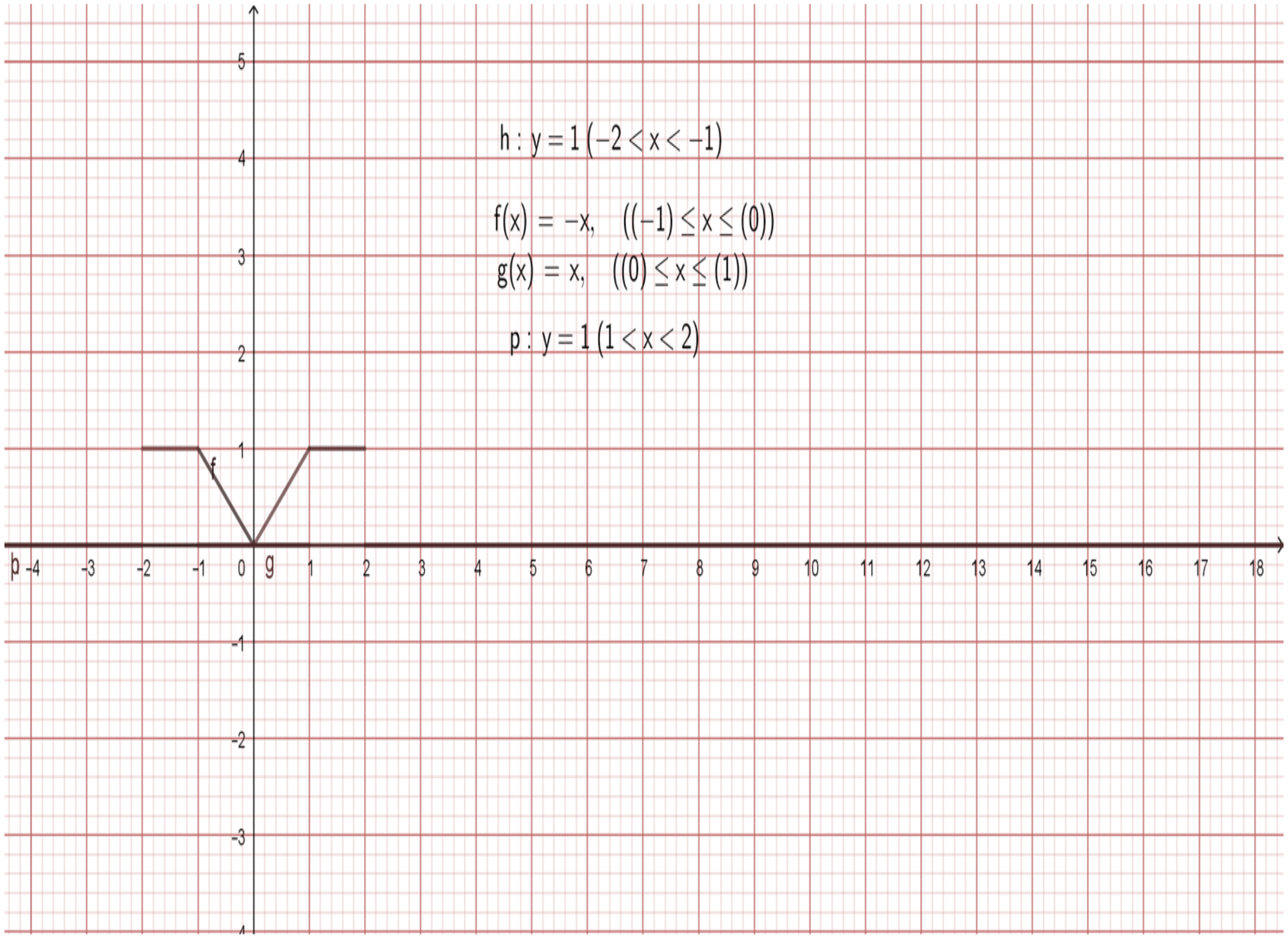
a_0=0

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x) sen\frac{n\pi}{p} x dx$$

a_n=0

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Una serie de este tipo se llama serie senoidal de Fourier



VERIFICAR SI LA FUNCIÓN ES PAR O IMPAR

$$f[x] = \begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ \text{X} & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

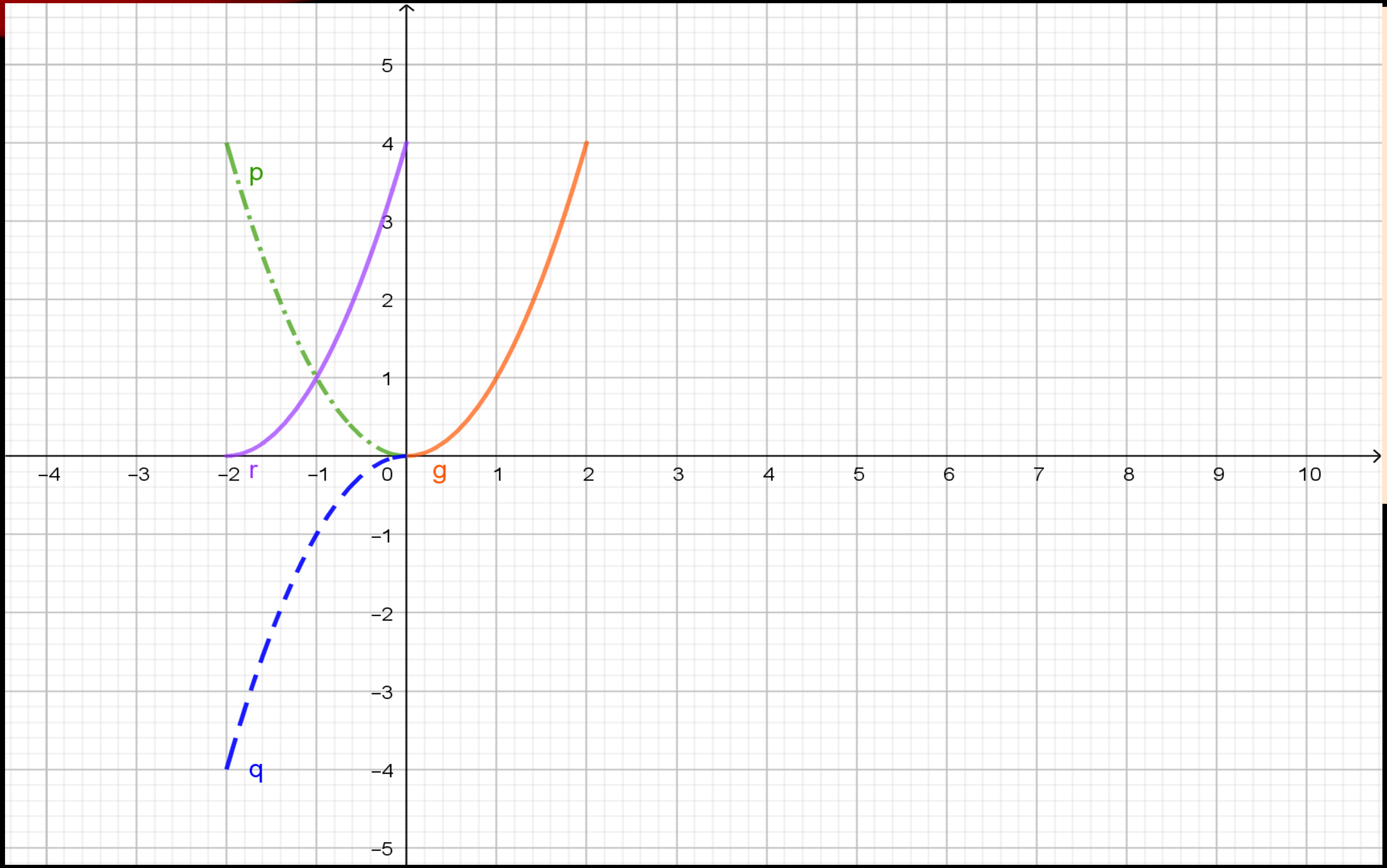
f(-x) = f(x) función par

f(-x) = -f(x)

$$f = [-x] \begin{cases} 1 & -2 < x < -1 \\ -x & -1 < x < 0 \\ \text{X} & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x \right)$$

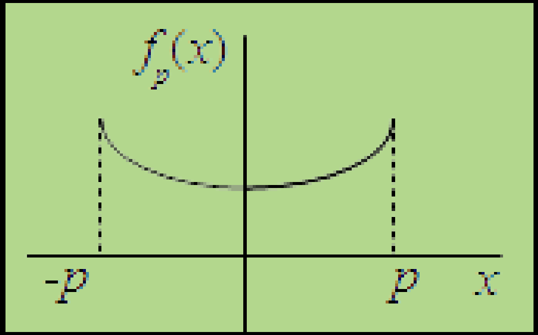
SERIE DE FOURIER EN MEDIO INTERVALO O MEDIO RANGO



si f(t) esta definida en (0,p)
a) Reflejar la gráfica con respecto al eje vertical en (-p,0); convirtiéndola en función par .
b) Reflejando la gráfica de la función respecto al origen en (-p,o) convirtiendo en una función impar.
c) Definiendo la función f(t) en (-p,0) como f(t)= f(t+p). REPETICIÓN.

Dada una función en el intervalo [0,p], los desarrollos de Fourier de senos o de cosenos permiten extender a todo el eje real la función como una función 2p-periódica, con simetría impar o par en un periodo.

Dada una función acotada en [0,p], podemos definir su extensión par a [−p,p]

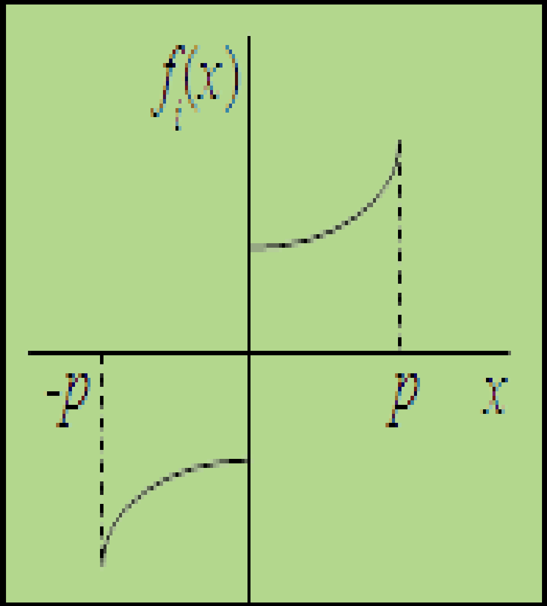


$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} f(x) & 0 \le x \le p \\ f(-x) & -p \le x \le 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Dada una función en el intervalo [0,p], los desarrollos de Fourier de senos o de cosenos permiten extender a todo el eje real la función como una función 2p-periódica, con simetría impar o par en un periodo.

Dada una función acotada en [0,p], podemos definir su extensión impar a [−p,p]



$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases} \boldsymbol{f(x)} & \mathbf{0 \le x \le p} \\ \boldsymbol{-f(-x)} & \mathbf{-p \le x \le 0} \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \cos\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Ejemplo: Para f(t) = t con $0 < t < 4, detemina\ la\ Serie\ de\ Cosenos\ y\ Senos\ de\ Fourier$

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \mathrm{sen}(n\omega_0 t)]$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inwt} \quad donde \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-inwt}$$

e^{-iwt}= coswt-isenwt

e^{iwt}= coswt+ isenwt

En algunas ocasiones, el cálculo de las integrales que definen los coeficientes de la serie de Fourier se puede simplificar al trabajar con números complejos. En esta sección introduciremos el concepto de la serie compleja de Fourier.

OBSERVACIÓN 1 **Algunas propiedades de los complejos**

1. Si $z = a + bi$ es un número complejo entonces su conjugado se define por $\overline{z} = a - bi$. Y se verifica que $a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $b = -\frac{1}{2}i(z - \overline{z})$.
2. Un complejo también puede ser expresado en forma exponencial mediante la forma de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$.
3. Al aplicar la propiedad (1) al complejo $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$, se tiene que $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ y $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}i\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$.

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n sen(n\omega_0 t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n sen(n\frac{2\pi}{T}t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}t) + b_n sen(\frac{2n\pi}{T}t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2n\pi}{T}t) + b_n sen(\frac{2n\pi}{T}t)]$$

$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inwt}$ $\quad donde \quad$ $C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-inwt}$

$$a_{0} = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt$$

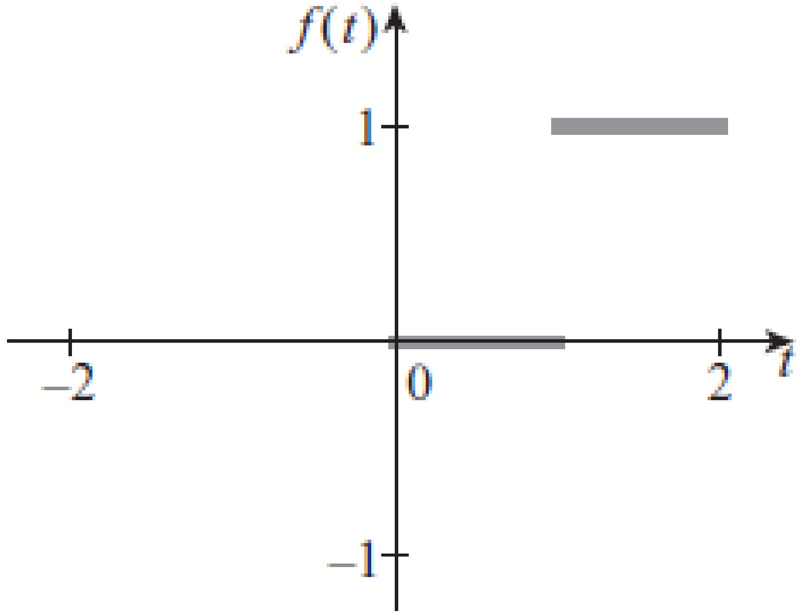
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \quad \rightarrow \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)cos\frac{n\pi}{p}tdx$$

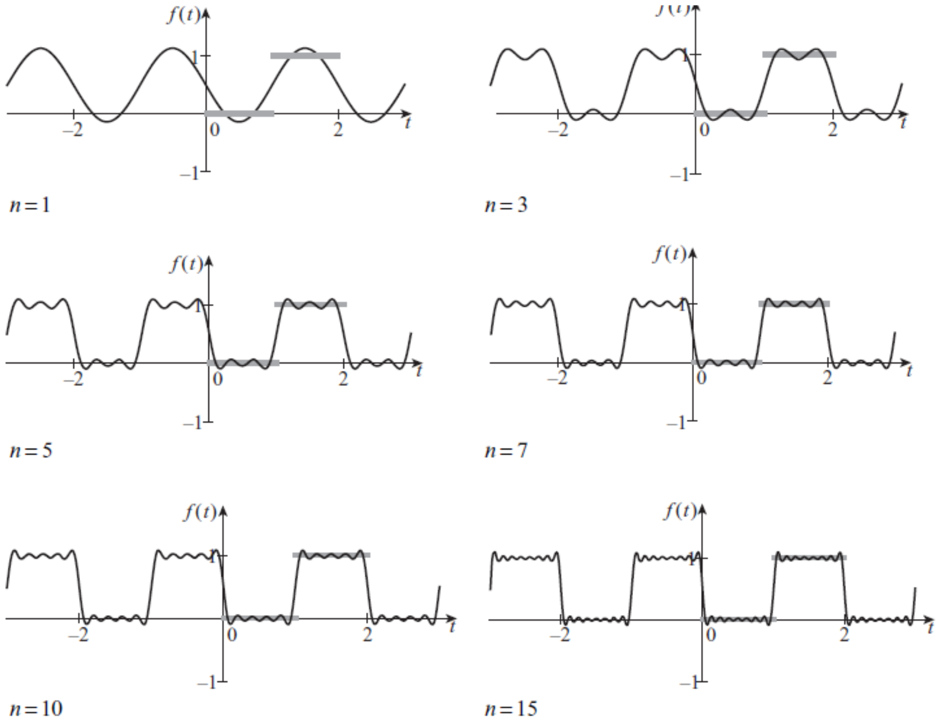
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,sen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)sen\frac{n\pi}{p}tdx$$

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

TEOREMA DE DIRICHLET

- Sea f(x) una función periódica continua a trozos y
- acotada en (-p,p), de periodo T. Entonces la serie de Fourier es convergente en todos los puntos.
- $f(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$
- $f(x^+)=\lim_{t \to x^+}(f(t))$
- $f(x^-)=\lim_{t \to x^-}(f(t))$
- Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periodica y continua a trozos.


f(t)
1
-1
-2
0
2
t


n = 1
n = 3
n = 5
n = 7
n = 10
n = 15

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN DE FOURIER

DERIVACIÓN

Las series infinitas, aun las convergentes no siempre se pueden derivar Término a término

Proposición: Sea f una función continua en (-p,p) con f(-p)= f(p), si f' es seccionalmente suave en (-p,p), donde f'' existe se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{n\pi}{p}t) + b_n sen(\frac{n\pi}{p}t)]$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{p}\left[b_n \cos(\frac{n\pi t}{p}\right) - a_n sen\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$