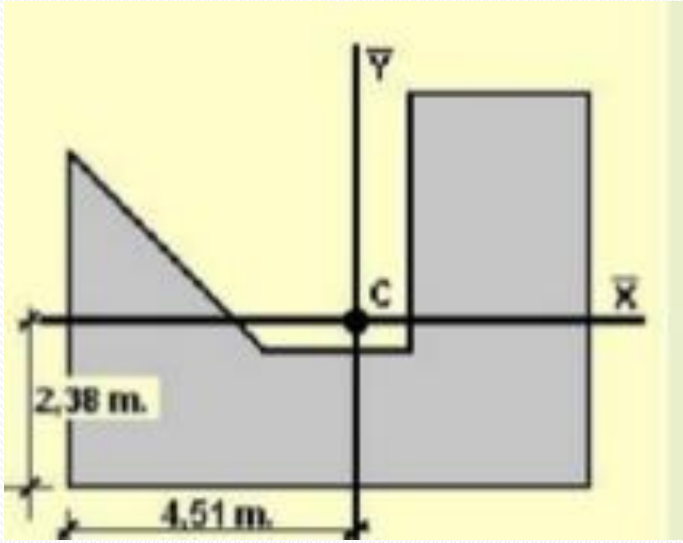
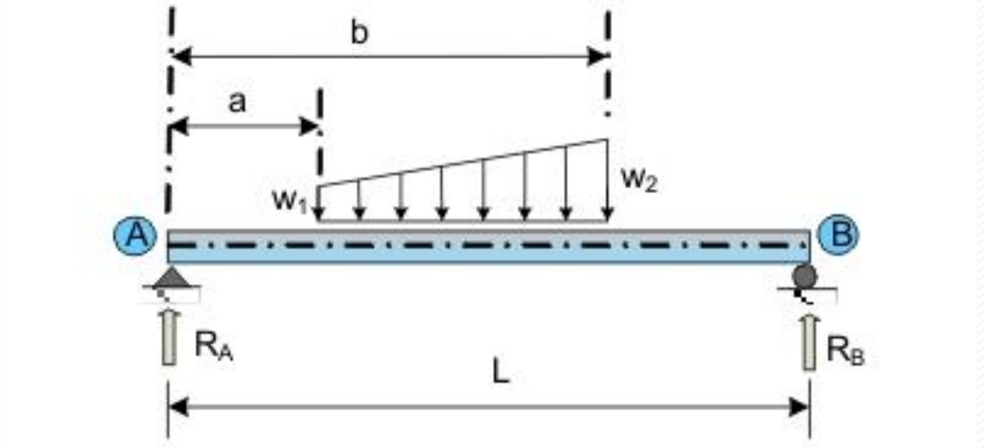
MODULO III

CENTROIDE Y CARGAS DISTRIBUIDAS





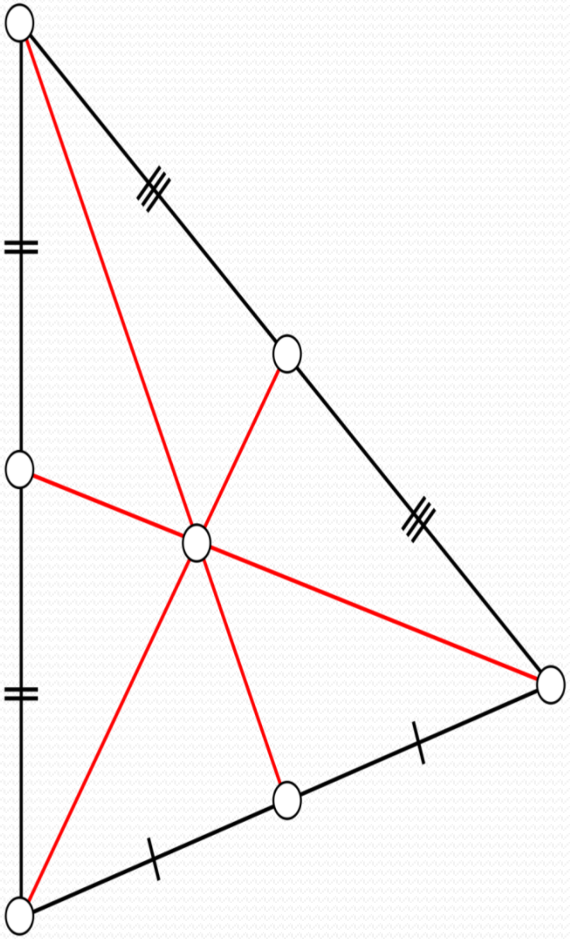
Índice

CENTROIDE Y MOMENTO DE INERCIA

Definicion:

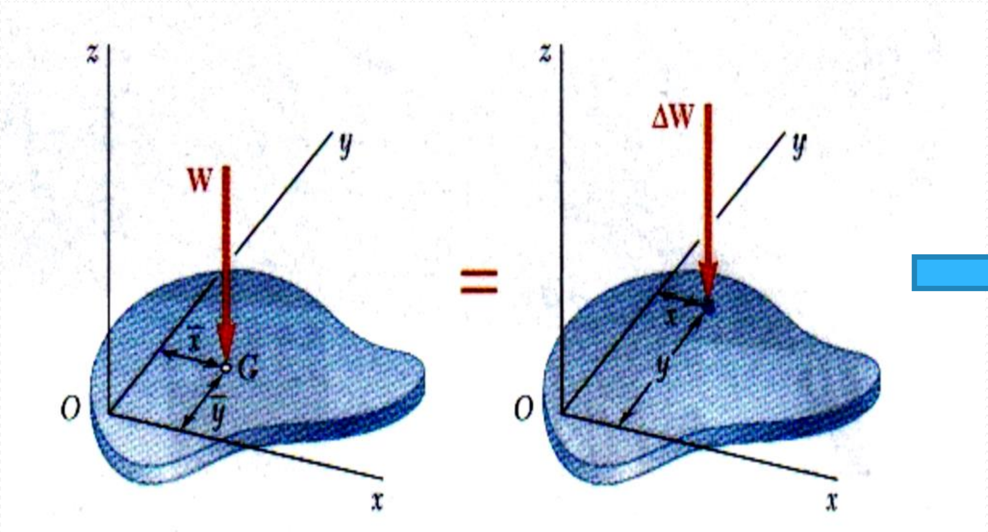
El centroide es un concepto puramente geométrico que depende de la forma del sistema; el centro de masas depende de la distribución de materia, mientras que el centro de gravedad depende del campo gravitatorio.

En la Física, el centroide, el centro de gravedad y el centro de masas pueden, bajo ciertas circunstancias, coincidir entre sí, aunque designan conceptos diferentes.



Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

- Tenemos una placa que puede dividirse en n elementos pequeños:



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}\,W = \Sigma x\,\Delta W$$

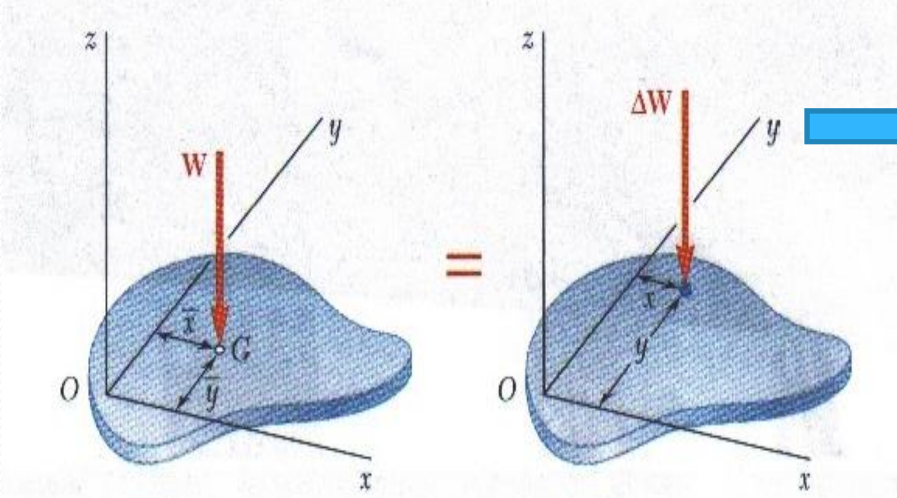
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}\,W = \Sigma y\,\Delta W$$

$$\Sigma F_z: \qquad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \cdots + \Delta W_n$$

La magnitud de *W* de esta fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos.

Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional

Para obtener las coordenadas ***x*** y ***y*** del punto ***G***, donde debe aplicarse ***W***, se escribe que los momentos de ***W*** con respecto a los ejes ***y*** y ***x*** son iguales a la suma de los momentos correspondientes a los pesos elementales



$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = \Sigma x\,\Delta W$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = \Sigma y\,\Delta W$$

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = x_1\,\Delta W_1 + x_2\,\Delta W_2 + \cdots + x_n\,\Delta W_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = y_1\,\Delta W_1 + y_2\,\Delta W_2 + \cdots + y_n\,\Delta W_n$$

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\,dW \qquad \bar{y}W = \int y\,dW$$

Centroide de area

- Si se sustituye a ΔW y a W en las ecuaciones de momento anteriores y se divide a todos los términos entre γt, se obtiene:

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}A = x_1\,\Delta A_1 + x_2\,\Delta A_2 + \cdots + x_n\,\Delta A_n$$
$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}A = y_1\,\Delta A_1 + y_2\,\Delta A_2 + \cdots + y_n\,\Delta A_n$$

- Y si se incrementa el numero de elementos en los cuales se divide el área A y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento, se obtiene en el limite

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA$$

Primer Momento del Area

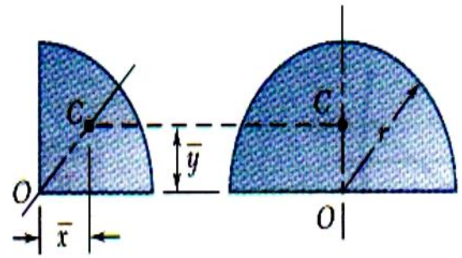
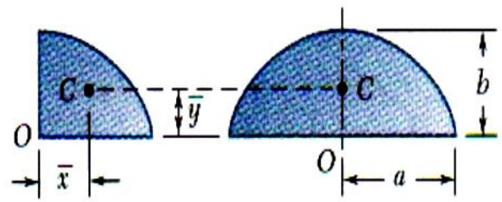
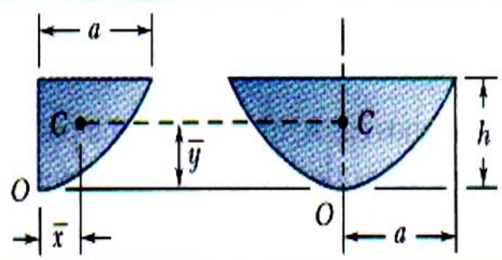
Primer momento del área con respecto a eje *y*

Primer momento del área con respecto a eje *x*

$$Q_y = \int x \, dA \qquad Q_x = \int y \, dA$$

Las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de dicha área entre el área misma.

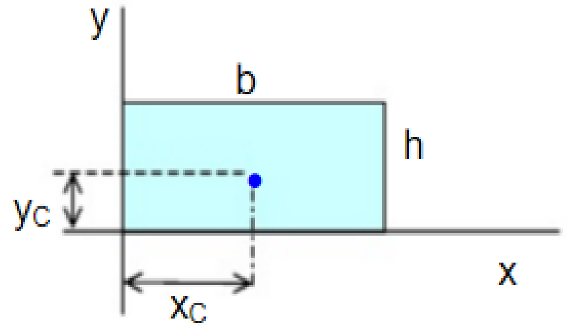
Centroide de formas conocidas

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

Rectángulo

$A = bh$

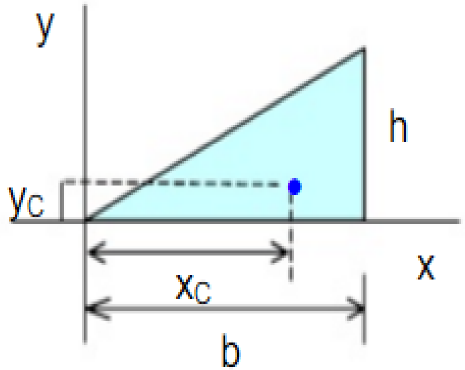
$x_C = b / 2$
$y_C = h / 2$



Triángulo rectángulo

$A = bh / 2$

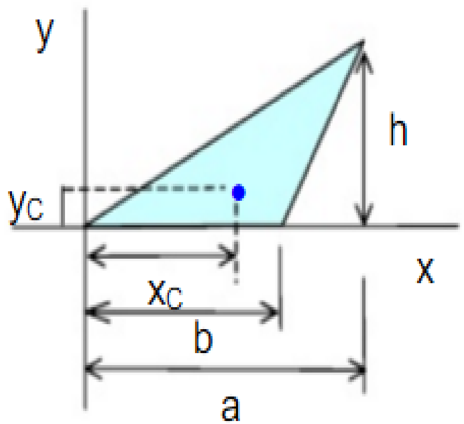
$x_C = 2b / 3$
$y_C = h / 3$



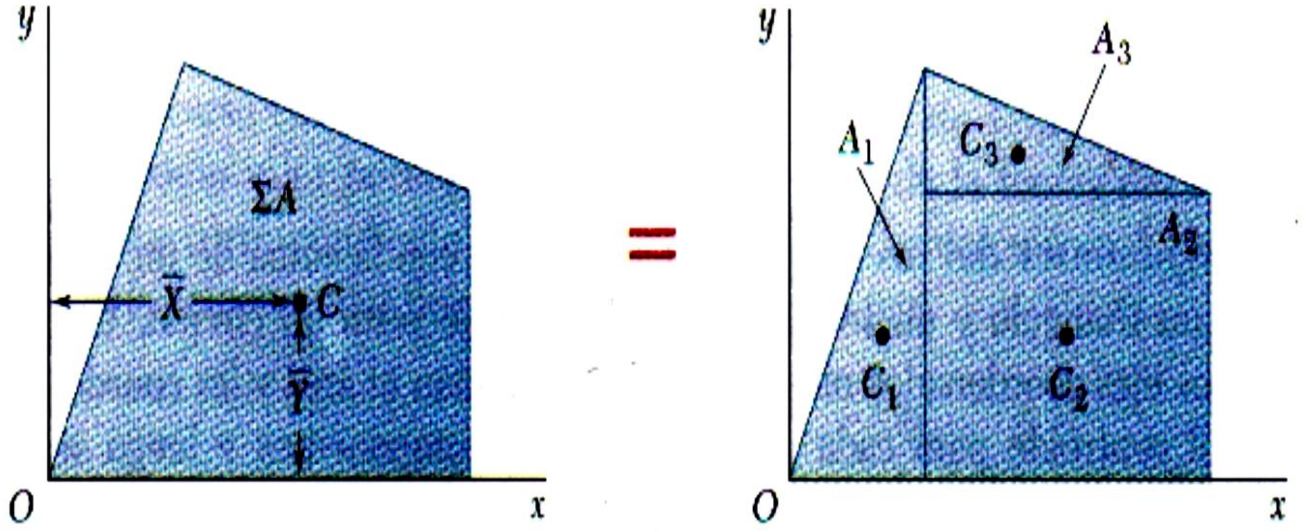
Triángulo escaleno

$A = bh / 2$

$x_C = (a + b) / 3$
$y_C = h / 3$



Placas compuestas



$$Q_y = \bar{X}\Sigma A = \Sigma \bar{x} A$$

$$Q_x = \bar{Y}\Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

Placas compuestas

TABLA PARA CALCULO DE CENTROIDES POR AREA

Fig.	A, m^2	$\tilde{x}$, m	$\tilde{y}$, m	A$\tilde{x}$, m^3	A$\tilde{y}$, m^3
1					
2					
	$\sum = A$			$\sum = A\,\tilde{x}$	$\sum A\,\tilde{y}$

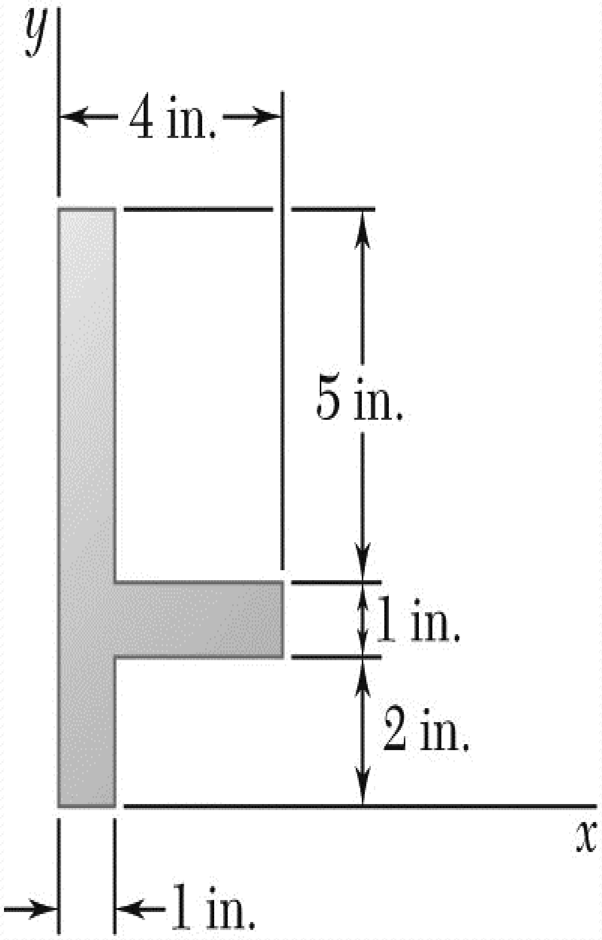
$$\bar{X}\sum A = \tilde{x}A$$

A = Área de la figura
$\tilde{x}$ = distancia horizontal al centroide de la figura.
$\tilde{y}$ = distancia vertical al centroide de la figura

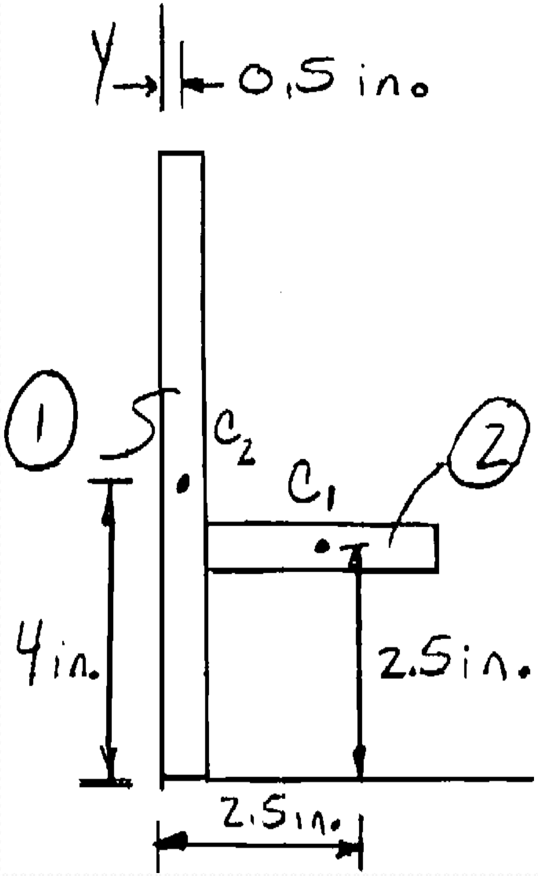
$$\bar{Y}\sum A = \tilde{y}A$$

EJEMPLO

- ✓ **Localice el centroide del area plana mostrada**



SOLUCIÓN



	A, in^2	$\bar{x}$, in	$\bar{y}$, in	$\bar{x}A, in^3$	$\bar{y}A, in^3$
1	8	0.5	4	4	32
2	3	2.5	2.5	7.5	7.5
Σ	11			11.5	39.5

$$\bar{X}\Sigma A = \bar{x}A$$

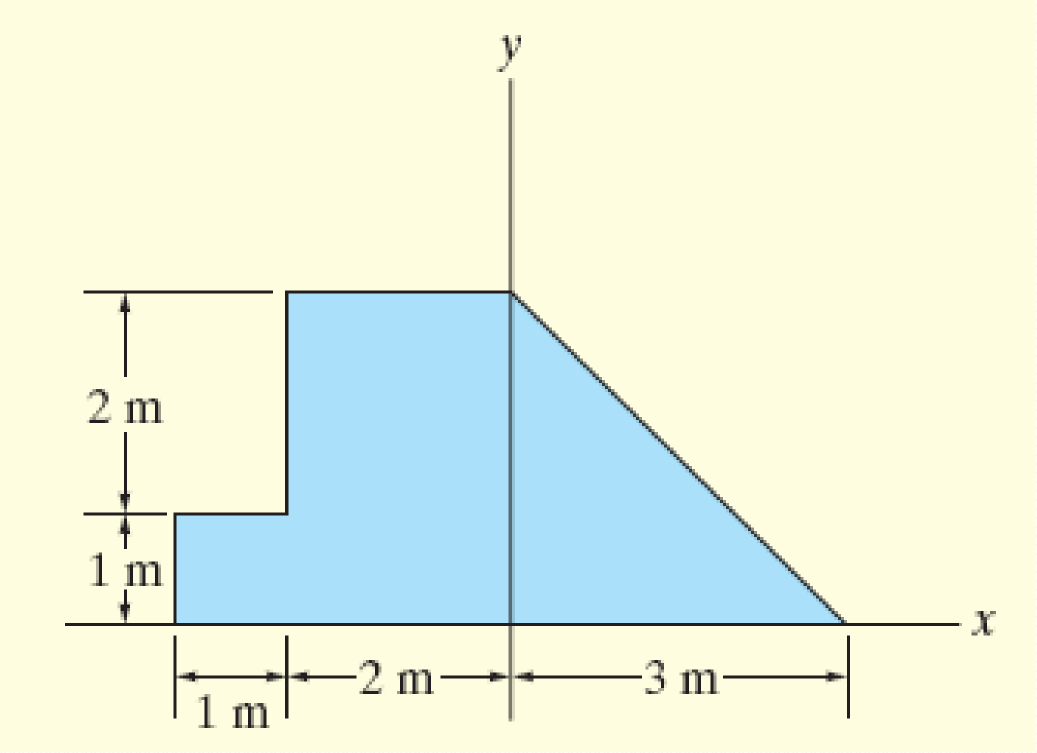
$$\bar{X}(11\,in^2) = 11.5\,in^3 \qquad \bar{X} = 1.045\,\text{in.}$$

$$\bar{Y}\Sigma A = \Sigma\bar{y}A$$

$$\bar{Y}(11) = 39.5 \qquad \bar{Y} = 3.59\,\text{in.}$$

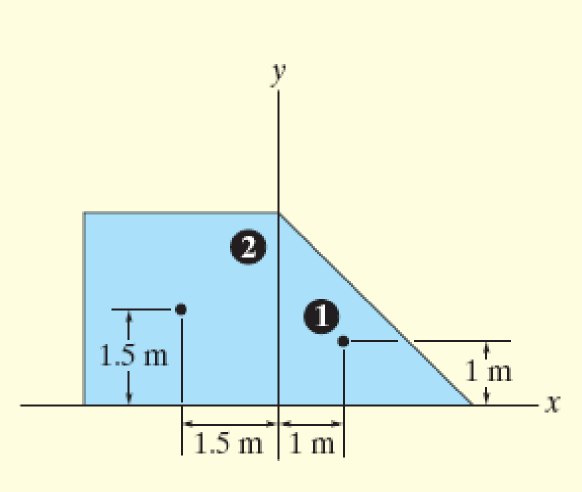
Ejemplo

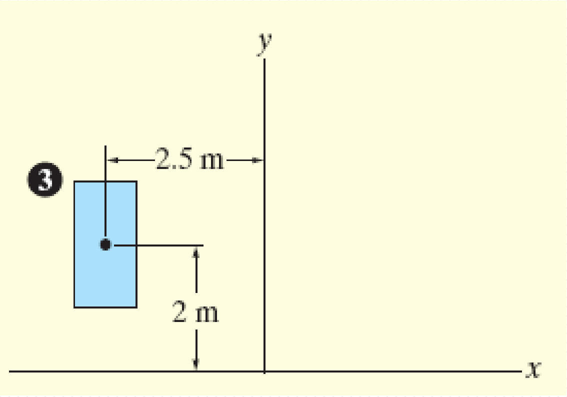
Localizar el centroide de la placa.



Solución

- <u>Partes</u>
- Dividimos la placa en 3 segmentos.
- El área del rectágulo pequeño se puede considerar "negativa".





Solución

Brazo del Momento

Localización del centroide para cada pieza está determinado e indicado en el diagrama.

Segment	A (m^2)	$\tilde{x}$ (m)	$\tilde{y}$ (m)	$\tilde{x}A$ (m^3)	$\tilde{y}A$ (m^3)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

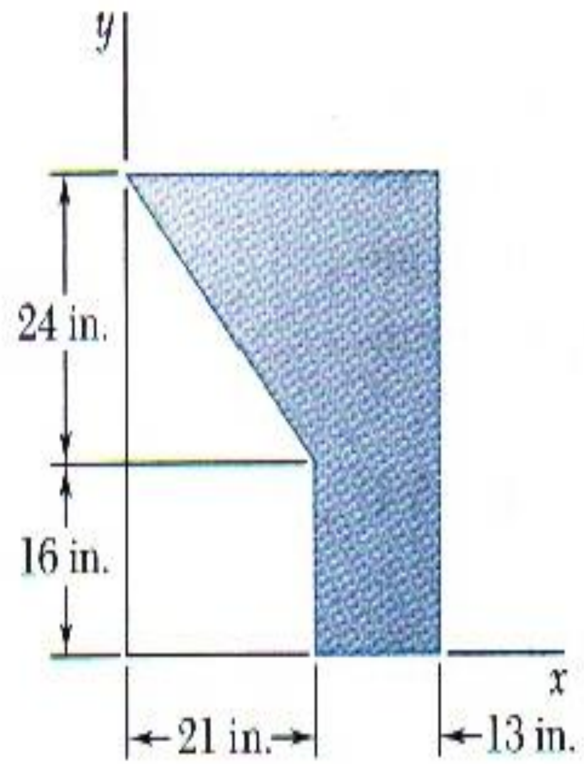
Suma

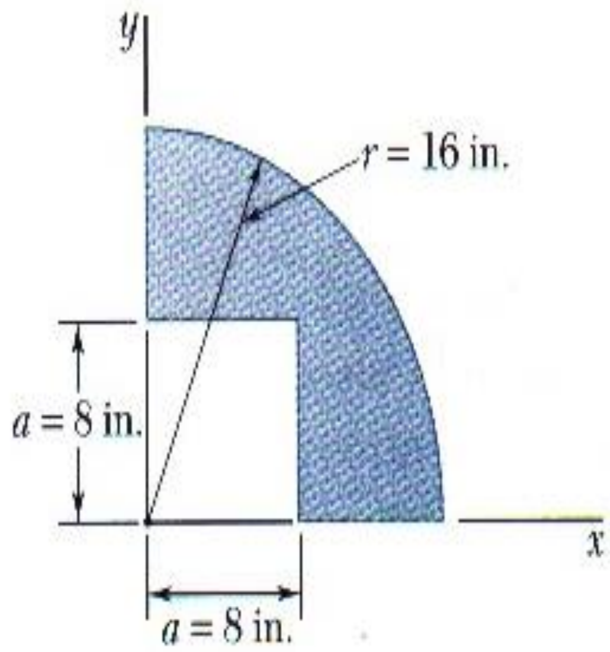
$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x} A}{\sum A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348\,mm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \tilde{y} A}{\sum A} = \frac{14}{11.5} = 1.22\,mm$$

EJEMPLOS EN CLASE

- **Localice los centroides de las siguientes area planas mostradas**



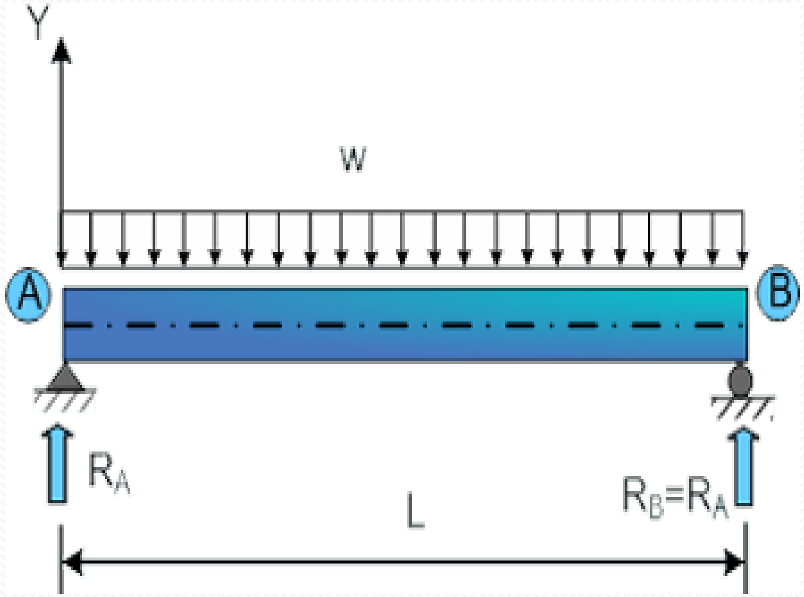


CARGAS DISTRIBUIDAS

Viga: Es un elemento estructural diseñado para soportar cargas que sean aplicadas en varios puntos a lo largo del un elemento.

Por lo general las vigas son barras prismáticas rectas y largas.

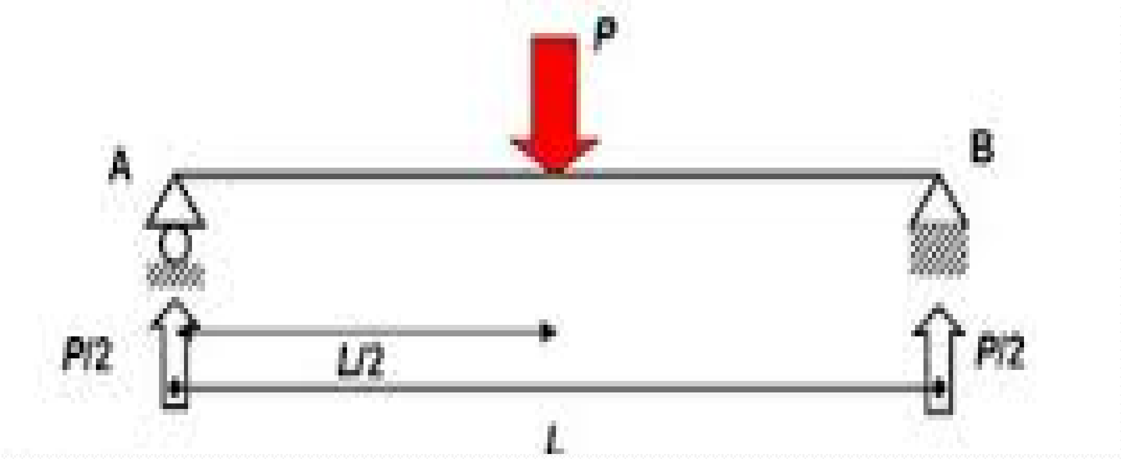
Una viga puede estar sujetas a cargas concentradas (puntuales) y a cargas distribuidas, estas ultima de diferentes maneras (triangular, trapezoidal), etc.



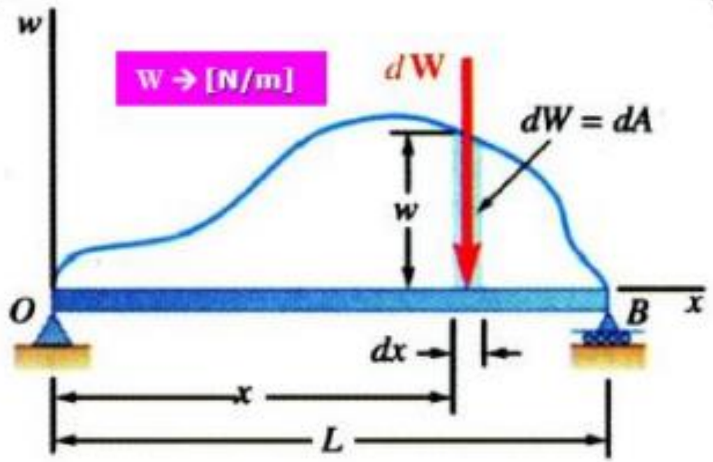
CARGAS DISTRIBUIDAS

Los apoyos de vigas, son los elementos que le proporcionan la estabilidad a la viga y por lo general, se encuentran en los extremos o cerca de ellos.

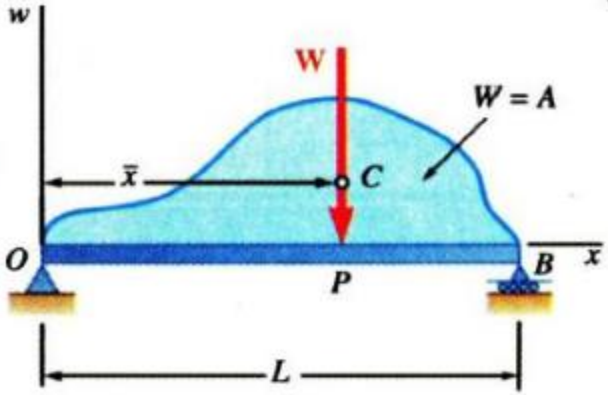
Las fuerzas en los apoyos que se generan son productos de las cargas aplicadas y se llaman *reacciones* y equilibran las cargas aplicadas. Analíticamente estas reacciones representan las incógnitas de un problema matemático.



CARGAS DISTRIBUIDAS



=



$$W = \int_0^L w\,dx$$

$$W = \int dA = A$$

$$(OP)W = \int x\,dW$$

$$\boxed{dW = w\,dx = dA \text{ y } W = A}$$

$$(OP)A = \int_0^L x\,dA \Rightarrow \bar{x}A = \int x\,dA$$

$$\bar{x}$$

EJEMPLOS

Determine las reacciones en los apoyos de las siguientes figuras