Unidad 4: Interpolación

Hernán Darío Vargas Cardona, PhD

Computación científica
Pontificia Universidad Javeriana Cali

Contenido

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Contenido

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Interpolación

La interpolación consiste en ajustar una función a unos datos, tal que la función sea equivalente a dichos datos. El problema más sencillo de interpolación en una dimensión es de la siguiente forma:

- Para unos datos: (t_i, y_i), $i = 1, ..., n$, con $t_1 < t_2 < ... < t_n$, se busca una función tal que:

$$f(t_i) = y_i, \ i = 1, ..., n.$$

- En general:

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi_j(t_i) = y_i, \ i = 1, ..., n.$$

Siendo ϕ_j funciones base y f la función interpolante.

Propósitos de la interpolación

- Dibujar curvas suaves a partir de datos discretos.
- Evaluación rápida de funciones.
- Reemplazar una función compleja por una sencilla.
- Derivar o integrar datos de una tabla.

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Contenido

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Interpolación polinomial

La interpolación más sencilla emplea polinomios. Hay un único polinomio de grado $n-1$ que pasa a través de los n puntos (t_i, y_i), $i = 1, ..., n$, donde los t_i son distintos.

- Por ejemplo, con la base monomial:

$$\phi_j(t) = t^{j-1}, j = 1, ..., n$$

- El polinomio interpolante tiene la forma:

$$p_{n-1} = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + ... + x_n t^{n-1}$$

- Los coeficientes x_i están determinados por el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Interpolación polinomial - Ejemplo

Para ilustrar la interpolación polinomial usando bases monomiales, se encontrará un polinomio interpolante para los puntos (-2,-27), (0,-1), (1,0). Hay un único polinomio:

$$p_2(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

El sistema está dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Para este conjunto de datos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpolación polinomial - Ejemplo II

Resolviendo el sistema por eliminación Gaussiana o Gauss-Jordan, se llega a la solución:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

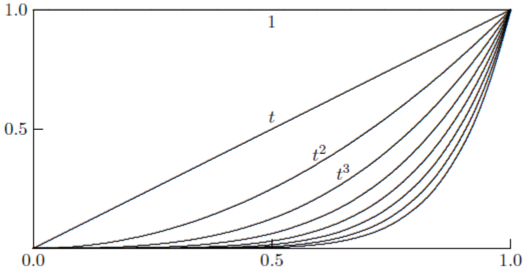
Por lo que el polinomio resultante es:

$$p_2(t) = -1 + 5t - 4t^2$$

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Problemas de la interpolación polinomial con monomios

Cuando se emplean bases monomiales para la representación polinómica, la matriz **A** es a menudo mal condicionada, sobre todo para orden alto, ya que las funciones son menos distinguibles conforme el grado del polinomio aumenta, lo cual va haciendo las columnas de **A** linealmente dependientes, tal como se explica en la siguiente figura:



Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Interpolación de Lagrange

Para un conjunto de datos (t_i, y_i), $i = 1, ...n$, las funciones base de Lagrange están dadas por:

$$l_j(t) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1,k\neq j}^{n} (t - t_k)}{\displaystyle\prod_{k=1,k\neq j}^{n} (t_j - t_k)}$$

Para la base de Lagrange se tiene:

$$l_j(t_i) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ si\ \ i = j \\ 0,\ si\ \ i \neq j \end{array} \right\}$$

Interpolación de Lagrange II

Lo cual significa que la matriz $\mathbf{A}$ del sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ es la identidad $\mathbf{I}$. Por lo tanto, en la base de Lagrange el polinomio interpolante tiene la forma:

$$p_{n-1}(t) = y_1 l_1(t) + y_2 l_2(t) + ... + y_n l_n(t)$$

La forma Lagrangiana hace más fácil la determinación del polinomio interpolante, pero más costosa para evaluar, diferenciar e integrar.

Interpolación de Lagrange - Ejemplo

Para el mismo ejemplo anterior (-2,-27), (0,-1), (1,0). La forma del polinomio está dada por:

$$p_2(t) = y_1 \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} + y_2 \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} + y_3 \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} p_2(t) &= (-27)\frac{(t-0)(t-1)}{(-2-0)(-2-1)} + (-1)\frac{(t-(-2))(t-1)}{(0-(-2))(0-1)} + (0)\frac{(t-(-2))(t-0)}{(1-(-2))(1-0)} \\ &= (-27)\frac{t(t-1)}{6} + \frac{(t+2)(t-1)}{2} \end{aligned}$$

Interpolación de Newton

Para un conjunto de datos (t_i, y_i), $i = 1, ...n$, el polinomio interpolante de Newton tiene la forma:

$$p_{n-1} = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2) + ... + x_n(t - t_1)(t - t_2) \cdots (t - t_{n-1})$$

Por lo tanto, las funciones base de Newton tienen la forma:

$$\phi_j(t) = \prod_{k=1}^{j-1} (t - t_k),\ j = 1, ..., n$$

Lo cual forma una matriz **A** triangular inferior, por lo que los coeficientes x_i, $i = 1, ...n$ se pueden hallar mediante sustitución sucesiva hacia adelante $\mathcal{O}(n^2)$.

Interpolación de Newton - Ejemplo

Para el mismo ejemplo anterior (-2,-27),(0,-1),(1,0) se encontrará el polinomio interpolante de Newton dado por:

$$p_2(t) = x_1 + x_2(t - t_1) + x_3(t - t_1)(t - t_2)$$

Empleando las funciones base de Newton se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & (t_2 - t_1) & 0 \\ 1 & (t_3 - t_1) & (t_3 - t_1)(t_3 - t_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando los valores:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpolación de Newton - Ejemplo II

Cuya solución por sustitución sucesiva es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -27 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

El polinomio interpolante queda:

$$p_2(t) = -27 + 13(t+2) - 4(t+2)t$$

El método de Newton tiene un mejor balance entre el costo computacional del interpolante y el costo de evaluar los datos, en comparación de los otros dos métodos anteriores.

Pontificia Universidad JAVERIANA Cali

Contenido

Pontificia Universidad
JAVERIANA
Cali

Interpolación polinomial a trozos

Una selección apropiada de funciones base y de puntos puede mitigar algunas de las dificultades asociadas a la interpolación polinomial de orden alto. Sin embargo, pueden seguir apareciendo oscilaciones inconvenientes en el interpolante. La interpolación a trozos es una alternativa a los problemas anteriormente mencionados.

La ventaja principal de la interpolación polinomial a trozos es que un número grande de datos se puede ajustar con polinomios de grado bajo.

Interpolación lineal a trozos

En este caso para un conjunto de datos (t_i, y_i) se emplea un polinomio distinto entre cada subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$. El ejemplo más sencillo es la interpolación lineal, donde cada punto sucesivo está conectado con una línea recta.