

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE**

Evidenčné číslo: FCHPT-5415-68754

**MODELOVANIE SYSTÉMU PREDÁTOR – KORISŤ
BAKALÁRSKA PRÁCA**

2014

Michaela Bohunčáková

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA CHEMICKÉJ A POTRAVINÁRSKEJ
TECHNOLÓGIE**

**MODELOVANIE SYSTÉMU PREDÁTOR – KORISŤ
BAKALÁRSKA PRÁCA**

FCHPT-5415-68754

Študijný program: Automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve

Číslo študijného odboru: 2621

Názov študijného odboru: 5.2.14 Automatizácia, 5.2.52 Priemyselné inžinierstvo

Školiace pracovisko: ÚIAM FCHPT STU v Bratislave

Vedúca záverečnej práce/školiťel': Mgr. Ľubomíra Horanská, PhD.

Bratislava 2014

Michaela Bohunčáková



ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka: **Michaela Bohunčáková**
ID študenta: 68754
Študijný program: automatizácia, informatizácia a manažment v chémii a potravinárstve
Kombinácia študijných odborov: 5.2.14 automatizácia, 5.2.52 priemyselné inžinierstvo
Vedúca práce: Mgr. Ľubomíra Horanská, PhD.

Názov práce: **Modelovanie systému predátor – korisť**

Špecifikácia zadania:

Predmetom práce je modelovanie systému predátor – korisť pomocou diferenciálnych rovníc a model pomocou agentov. Úlohou študenta je analytické a numerické riešenie systému nelineárnych diferenciálnych rovníc predstavujúceho Lotkov – Volterrov model, ďalej zostavenie vhodného ABM modelu, t.j. formulácia pravidiel čo najvernejšie reflektujúcich správanie reálneho systému a jeho simulácia, porovnanie oboch modelov, analýza ich citlivosti na zmenu parametrov a testovanie zásahov do systému (napr. externé vylovenie časti koristi), prípadne rozšírenie systému na systém predátor – korisť – potrava koristi.

Zoznam odbornej literatúry:

1. Pelánek, R. *Modelování a simulace komplexních systémů*. Bmo: Masarykova univerzita Bmo, 2011. 233 s. ISBN 978-80-210-5318-2.

Riešenie zadania práce od: 17. 02. 2014

Dátum odovzdania práce: 24. 05. 2014

L. S.

Michaela Bohunčáková
študentka

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. Ing. Miroslav Fikar, DrSc.
garant študijného programu

Čestné prehlásenie:

Čestne prehlasujem, že som predloženú záverečnú bakalársku prácu spracovávala sama s využitím uvedenej odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov.

.....
Michaela Bohunčáková

Abstrakt

Obsahom mojej bakalárskej práce je modelovanie komplexného systému predátor – korisť pomocou dvoch rôznych metód. Prvá sa zakladá na známom Lotka – Volterrovom modeli predstavujúcom systém nelineárnych diferenciálnych rovníc. Pri tejto metóde používam poznatky z oblasti riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc a systémov diferenciálnych rovníc. Druhá metóda je založená na ABM modeli s agentmi. V tomto prípade formulujem pravidlá, podľa ktorých sa správa reálny systém a následne pomocou nich tento systém simulujem. Na simuláciu som použila prostredie NetLogo. V práci analyzujem citlivosť oboch modelov na zmenu parametrov a testujem správanie modelu po externom zásahu. Vytvorila som tiež oba typy modelov pre systém rozšírený o potravu koristi.

Kľúčové slová: systém predátor – korisť; diferenciálne rovnice; Lotkov – Volterrov model; ABM model; komplexné systémy

Abstract

In my bachelor thesis I study modeling of complex predator – prey system using two different methods. The first method is based on well-known Lotka – Volterra model representing a system of nonlinear differential equations. This method appears from knowledge of the solutions of ordinary differential equations and systems of differential equations. The second method is based on ABM model with agents. It is important to formulate rules that reflect the real behavior of the system in the best possible way and then to use them for simulation. For the simulation I have used the modeling environment NetLogo. In the thesis I analyze sensitivity of both models with respect to variation of the parameters and test behavior of the model after external intervention. Moreover, I have created two types of models which include a food of prey extension.

Keywords: predator – prey system; differential equations; Lotka – Volterra model; ABM model; complex systems

Obsah

Úvod	8
1 Modelovanie a simulácia	9
1.1 Základné pojmy	9
1.2 Metódy modelovania a simulácie	10
1.2.1 Matematické modelovanie	10
1.2.2 Modelovanie založené na agentoch a bunkové automaty	10
1.2.3 Iné metódy modelovania	12
1.2.4 Simulácia a analýza	12
2 Diferenciálne rovnice	13
2.1 Obyčajné diferenciálne rovnice	13
2.2 Systém lineárnych diferenciálnych rovníc	14
3 Numerické metódy	17
3.1 Eulerova metóda	17
3.2 Modifikovaná Eulerova metóda	20
3.3 Rungeho – Kuttova metóda	22
4 Matematický model systému predátor – korisť	22
4.1 Analytické riešenie modelu	25
4.2 Riešenie pomocou numerických metód	28
5 ABM model systému predátor – korisť	32
5.1 Analýza citlivosti ABM modelu na zmenu parametrov	34
5.2 Externý zásah v systéme predátor – korisť – potrava koristi	42
5.3 Porovnanie modelov	45
6 Záver	47
Zoznam použitej literatúry	48
Prílohy	49

Úvod

V posledných rokoch sa vo svete objavujú nové vedné disciplíny ako systémová biológia, výpočtová ekonómia, bioinformatika a mnoho ďalších. Práve tieto disciplíny využívajú počítačové simulácie a analýzy, a tým poskytujú nový pohľad na tradičné disciplíny.

Dnešný svet čelí mnohým problémom ako znečistenie životného prostredia, populačné epidémie, náhle zmeny klímy, národnostná neznášanlivosť a pod. Ide o tzv. komplexné systémy, ktorých riešenia môžeme už v súčasnej dobe hľadať aj pomocou modelovania a simulácií. Ide o zložité systémy s veľkým počtom častí, ktoré sa navzájom ovplyvňujú a sú ovládané spätnou väzbou. Väčšinou sa jedná o nelineárne systémy s chaotickým správaním.

Jedným z najjednoduchších nelineárnych modelov, je systémový model nazvaný podľa známeho amerického matematika, fyzikálneho chemika Alfreda Jamesa Lotku (1880 - 1949) a talianskeho matematika Vita Volterru (1860 - 1940). Ide o model systému predátor - korisť, ktorý sa stal základom pre riešenie komplexných úloh z oblasti populačnej dynamiky, ale má aplikácie aj v iných oblastiach, napr. v chémii.

Vo svojej bakalárskej práci sa venujem diferenciálnym rovniciam, obzvlášť systémom diferenciálnych rovníc, pretože práve tie sa využívajú pri modelovaní zložitých komplexných systémov. Keďže systém diferenciálnych rovníc predstavujúcich Lotkov – Volterrov model nemožno riešiť analyticky (riešenie nájdeme len v implicitnom tvare ako úrovňové množiny istej funkcie dvoch premenných), na riešenie sústavy rovníc využijem numerické metódy ako Eulerova metóda a Rungeho-Kuttova metóda 4. rádu. Riešenie uskutočním v programe MS Excel, kde vykreslím aj príslušné grafy riešenia. Na základe odchýlky tieto metódy porovnam. Správanie takto nájdeneho približného riešenia súhlasí aj s vlastnosťami presného riešenia ako ich očakávame na základe analýzy stacionárnych bodov a typu stability.

V prostredí NetLogo vytvorím model, ktorý by mal odrážať reálnu situáciu a správanie sa veľkosti populácie predátora a koristi vrátane prvku náhody. Na základe tohto modelu simulujem systém predátor – korisť a vykreslím populačný graf, ktorý popisuje vývoj populácie koristi a predátora v čase a populačnú krivku. Nakoniec zrealizujem analýzu citlivosti, ktorou určím vplyv parametrov na správanie sa modelu.

1 Modelovanie a simulácia

1.1 Základné pojmy

Skôr ako sa začneme zaoberať konkrétnymi spôsobmi modelovania, je potrebné si ozrejmiť vzťah medzi modelovaním a simuláciou. Pri modelovaní vytvárame model, ktorý predstavuje zjednodušenie resp. abstrakciu reality. Model nereprodukuje skutočnosť čo najpresnejšie, ale zámerne ju zjednodušuje a tým nám pomáha pochopiť časť komplikovanej reality. Pri simulácii berieme už vytvorený model a uvádzame ho „do pohybu“ a sledujeme jeho správanie v rôznych situáciách. Modelovaním a simuláciou komplexných systémov sa zaoberá napr. R. Pelánek v monografii [1]. Táto kniha bola naším hlavným zdrojom pre túto kapitolu.

Modelovanie a simuláciu môžeme použiť na rozmanité účely, napríklad v technických odboroch, kde pri modelovaní sa snažíme o maximálnu presnosť a simulácia by mala vierohodne reprodukovat' správanie reálneho systému, pričom skúšame rôzne možnosti návrhu a vyhodnocujeme zásahy do systému. Typickým príkladom je konštrukcia dopravných prostriedkov. Ďalším príkladom využitia modelu môže byť meteorológia alebo finančníctvo. V týchto prípadoch využívame napríklad dáta z histórie, pomocou ktorých model kalibrujeme. Ak máme model hotový, využívame simuláciu na predpovedanie budúceho správania. U komplexných systémov sa najčastejšie vytvárajú modely, ktoré predstavujú naše hypotézy o fungovaní systému a pomocou simulácie skúmame, do akej miery jednotlivé hypotézy odpovedajú realite.

Existuje veľké množstvo modelov, pričom niektoré druhy sú úzko zviazané s konkrétnym cieľom (napr. hry s učením a zábavou), väčšinu modelov však môžeme použiť rôznymi spôsobmi. Pre nás bude najdôležitejší pojem *matematický model*. Tento typ modelu tvoria matematické rovnice, ktoré vyjadrujú stav sveta. Matematické modely môžeme ďalej rozdeliť na dve kategórie. Prvú z nich tvoria *opisné modely*, ktoré udávajú vzťah medzi premennými v určitom časovom okamihu, bez toho, aby sami o sebe vysvetľovali, prečo tento vzťah platí. Ide napríklad o štatistické regresné modely, napr. vzťah medzi HDP a očakávanou dĺžkou života. Druhú kategóriu tvoria *dynamické modely*, ktoré opisujú, ako sa menia hodnoty premenných v čase. Ide o diferenciálne rovnice, napr. vzťah medzi veľkosťou populácie

predátora a koristi. Tieto modely sa nazývajú aj analytické modely. Snažíme sa vyriešiť system rovníc a nájsť rovnovážnu situáciu.

1.2 Metódy modelovania a simulácie

1.2.1 Matematické modelovanie

Táto metóda modelovania je založená na nasledujúcich princípoch:

- Stav systému vyjadríme pomocou stavových premenných, čo sú premenné kódujúce súhrnné informácie, napríklad veľkosť populácie koristi, počet áut, celkový zisk firmy alebo miera inflácie.
- Správanie systému vyjadríme pomocou rovníc, v ktorých vystupujú stavové premenné.

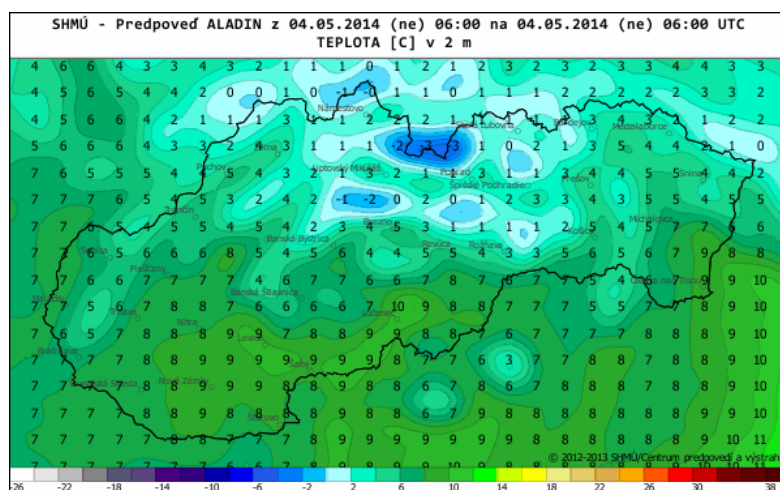
Rovnice udávajú, ako sa mení hodnota premenných. Túto zmenu môžeme robiť v diskrétnych časových krokoch alebo spojite. V oboch prípadoch môžeme správanie modelu definovaného rovnicami ďalej skúmať dvoma spôsobmi. Po prvé, môžeme použiť exaktnú matematickú analýzu problému, pomocou ktorej nájdeme všeobecné riešenie rovníc alebo hodnoty premenných, pre ktoré sa správanie modelu ustáli. Po druhé, môžeme použiť simuláciu, čiže zvolíme počiatočné hodnoty premenných a ďalšie správanie modelu určíme numerickým výpočtom.

1.2.2 Modelovanie založené na agentoch a bunkové automaty

Prístup k modelovaniu založený na agentoch býva označený rôznymi (anglickými) termínmi ako agent-based modeling (ABM), individual-based modeling (IBM), agent-based systems (ABS) a agent-based modeling and simulation (ABMS). My budeme používať skratku ABM. Modely sú založené na autonómnych agentoch. Dôležitou súčasťou modelu je prostredie, v ktorom sa agenti pohybujú a ktoré sa môže meniť buď interakciou s agentami alebo samovoľne. Modely typicky obsahujú veľké množstvo jednoduchých agentov, nie malé množstvo sofistikovaných agentov. Pravidlá, ktorými sa riadia agenti, by mali byť čo najjednoduchšie, teda dbáme na použitie len lokálnych interakcií. Dôležitou súčasťou ABM modelu je heterogenita a náhodnosť. Heterogenitu môžeme začleniť použitím rôznych typov agentov (napr. lovec a korisť). Heterogenitu dosahujeme taktiež pomocou náhodnosti, napríklad tak, že určitú vlastnosť agentov rozdelíme v populácii náhodne.

Bunkové automaty (cellular automata, CA) sú diskkrétne dynamické systémy zložitého a premenlivého správania aj napriek jednoduchej konštrukcii. Bunkový automat je tvorený pravidelnou mriežkou diskrétnych jednotiek – buniek. Pri teoretických analýzach sa bunkové automaty uvažujú na nekonečných mriežkach, pre simuláciu na počítači sa využíva konečná mriežka. Každá bunka môže existovať v jednom z konečného množstva stavov, pričom stav buniek sa mení v diskrétnych časových krokoch. Bunkové automaty možno využiť na modelovanie fyzikálnych, chemických alebo aj prírodných javov, napr. kryštalizácia, tvarovanie krajiny vplyvom erózie, mechanizmus vytvárania vzorov na mušliach alebo na koži zebry, žirafy atď.

Modelovanie sa nepoužíva len pre malé abstraktné modely, ktoré demonštrujú základné princípy, ale taktiež pre detailné modely, pomocou ktorých môžeme tvoriť konkrétne predpovede. Typickým príkladom modelovania predpovedí, ktoré ovplyvňuje každodenne náš život, je modelovanie počasia. Základný princíp modelov počasia nie je zložitý, ale pre získanie vierohodných predpovedí je potrebné naplniť modely rozsiahlymi dátami a realizovať výpočtovo náročné simulácie. Obr. 1 znázorňuje model ALADIN, ktorý predpovedá teploty ku konkrétnemu dňu na území Slovenska. Predstavuje tzv. numerickú predpoveď počasia, ktorú realizuje na Slovensku iba Slovenský hydrometeorologický ústav.



Obr. 1: Model ALADIN predpovedajúci teploty na území Slovenska [2]

1.2.3 Iné metódy modelovania

Prístup využívaný predovšetkým pre modelovanie racionálneho uvažovania pri strategických rozhodnutiach je využívaný pri teórii hier, ktorá predstavuje ďalšiu metódu modelovania. Modely sa v tejto oblasti nazývajú hry a sú vhodné pre zachytenie situácií, kde každý hráč (agent) má niekoľko možností, medzi ktorými sa môže rozhodnúť, hráč pri svojom rozhodovaní berie do úvahy potenciálne správanie sa ostatných a všetci hráči sa správajú racionálne (snažia sa nájsť optimálne rozhodnutie, pričom využívajú všetky dostupné informácie). Medzi modely založené na teórii hier patrí napríklad hra Dilema väzňa, ktorá je založená na základnej otázke, či sa môže udržať resp. vyvinúť spolupráca v skupine súťaživých egoistických jedincov. Teóriu hier možno aplikovať aj napr. v ekonómii a kvantitatívnom finančníctve.

Iný prístup k modelovaniu je založený na teórii sietí (network science). Táto oblasť výskumu prudko expanduje. Teória sietí ako ďalšia z metód modelovania využíva komplexné siete, pri analýze ktorých ignorujeme špecifiká jednotlivých uzlov a siete považujeme za holý graf, t.j. za množinu uzlov (ľudia, web stránky, vedecké články) a hrán (známosti, odkazy, citácie). Tieto siete majú veľa spoločných vlastností ako napríklad malé vzdialenosti, zhlukovanie a bezškálovité rozloženie stupňov uzlov. Príkladmi komplexných sietí sú napríklad sociálne siete alebo internet. Základným modelom komplexných sietí sú náhodné grafy, ktoré majú veľa zaujímavých vlastností, kvôli ktorým ich matematici intenzívne študujú. Ďalšími modelmi komplexných sietí sú tzv. grafy malého sveta alebo model bezškálovitej siete. Pomocou týchto modelov môžeme skúmať procesy prebiehajúce na sieťach a vplyv topológie siete na tieto procesy. Príklady procesov na sieťach sú útoky, chyby, vyhľadávanie alebo šírenie epidémie.

1.2.4 Simulácia a analýza

Ak sa nám podarí vyrobiť model, o ktorom sme presvedčení, že je pre naše účely vhodný, dôkladne ho analyzujeme. Ciele analýzy spadajú pod nasledujúce otázky. Akú rolu hrajú jednotlivé prvky modelu? Ktoré prvky modelu majú najväčší vplyv na jeho správanie? Aké je správanie modelu pri meniacich sa podmienkach? Ak dôkladne rozumieme správaniu modelu a vplyvu parametrov, môžeme vykonať experimenty s týmto modelom. Tieto experimenty spočívajú v uskutočnení zmien v modeli, v sledovaní ich dopadu a prípadne vo vzájomnom porovnaní. My sa budeme zaoberať simuláciou a analýzou systému predátor – korisť.

2 Diferenciálne rovnice

V nasledujúcej kapitole vychádzame z [3].

2.1 Obyčajné diferenciálne rovnice

Matematické modely môžu opisovať to, ako sa menia hodnoty jednotlivých premenných v čase. Tieto modely sú teda opísané diferenciálnymi rovnicami, v ktorých vystupujú neznáme funkcie a ich príslušné derivácie. Ak sa podarí nájsť vzťah medzi neznámou funkciou a jej deriváciou, pomocou neho dokážeme určiť neznámu funkciu.

Definícia 2.1. Obyčajnou diferenciálnou rovnicou (ODR) s neznámou funkciou $y = y(x)$ nazývame rovnicu

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Riešením ODR (1) na intervale J nazývame takú funkciu $y = \varphi(x)$, ktorá má na intervale J n derivácií a

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \quad (2)$$

pre každé $x \in J$. Prirodzené číslo n nazývame rádom obyčajnej diferenciálnej rovnice (1). Ak ľavá strana rovnice (1) je polynóm prvého stupňa vzhľadom na premenné $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, nazývame rovnicu (1) *lineárnou diferenciálnou rovnicou*.

Diferenciálna rovnica môže mať jedno riešenie, nekonečne veľa riešení alebo nemá žiadne riešenie. Záleží od typu diferenciálnej rovnice a od začiatočných podmienok. Riešiť diferenciálnu rovnicu znamená nájsť množinu všetkých riešení diferenciálnej rovnice. Množinu všetkých riešení nazývame *všeobecným riešením diferenciálnej rovnice*. Ak je všeobecné riešenie dané rovnicou, voľbou konštánt dostávame jednotlivé riešenia diferenciálnej rovnice. Nazývame ich *partikulárnymi riešeniami*. Často treba nájsť aj riešenie, ktoré spĺňa tzv. *Cauchyho počiatočné podmienky* definované ako

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \quad (3)$$

kde $x_0, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ sú dané čísla. Ak predpíšeme hodnoty hľadanej funkcie v rôznych bodoch, hovoríme o *okrajových podmienkach*.

2.2 Systém lineárných diferenciálnych rovníc

Systém n lineárných diferenciálnych rovníc s n neznámymi funkciami tvaru

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \dots + a_{1n}y_n(t) + f_1(t) \\y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \dots + a_{2n}y_n(t) + f_2(t) \\&\vdots \\y_n'(t) &= a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \dots + a_{nn}y_n(t) + f_n(t)\end{aligned}\tag{4}$$

kde $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ sú neznáme funkcie, funkcie $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ sú spojité na intervale J a $a_{ij} = 1, \dots, n$ sú reálne čísla. Budeme ho skrátene nazývať *lineárny diferenciálny systém (LDS)*.

My sa obmedzíme na prípad, že $n=2$:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + f_1(t) \\y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + f_2(t)\end{aligned}\tag{5}$$

Ak funkcie $f_1(t)$ a $f_2(t)$ sú nulové, dostávame *homogénny lineárny diferenciálny systém (HLDS)*.

Majme tento HLDS

$$\begin{aligned}x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) \\y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t)\end{aligned}\tag{6}$$

Rovnice riešenia, ktoré spĺňa začiatočné podmienky môžeme považovať za parametrické rovnice krivky v rovine. Takúto krivku $\{[x(t), y(t)] \in \mathbb{R}^2, t \in J\}$, nazývame *trajektóriou*. Ak je lineárny diferenciálny systém matematickým modelom fyzikálneho systému, potom riešenie tohto systému $x = x(t)$ a $y = y(t)$ udáva stav systému v čase t

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}\tag{7}$$

a rovinu nazývame *stavový priestor* alebo *fázový priestor*. Pojem fázový priestor sa používa hlavne pri nelineárnych systémoch. Z geometrického hľadiska môžeme stav systému reprezentovať bodom trajektórie $[x(t); y(t)]$. V čase $t = 0$ je stav systému daný začiatočnými podmienkami. Pre $t \leq 0$ parametrické rovnice krivky v rovine (rovnice riešenia) popisujú minulosť systému. Pre $t \geq 0$ rovnice riešenia popisujú budúcnosť systému. My sa budeme zaujímať len budúcnosťou systému. Trajektóriu možno orientovať v zmysle rastúceho času,

preto každá trajektória bude vychádzať z bodu určeného Cauchyho počiatočnými podmienkami v tvare $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Fázová trajektória je geometrickým znázornením dynamického správania sa systému. Jednotlivé trajektórie znázorňujú tzv. *fázový portrét systému*, ktorý podáva úplný obraz vlastností všeobecného riešenia sústavy rovníc. Vektor $\mathbf{b} = (b_1; b_2)$ sa nazýva *stacionárnym riešením* HLDS alebo *stacionárny bod systému*, ak

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 &= 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Stacionárne riešenie je reprezentované pokojovým stavom (rovnovážnym stavom). Stacionárne riešenia môžu mať takú vlastnosť, že trajektórie riešení vychádzajúcich z blízkych bodov sa od nich v podstate nevzdľahujú. Takéto stacionárne riešenia budeme nazývať *stabilnými riešeniami*.

Definícia 2.2 *Stacionárne riešenie \mathbf{b} LDS nazývame stabilné, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\sigma > 0$, že pre každé riešenie $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ so začiatočným stavom $\mathbf{x}_0 \in U_\sigma(\mathbf{b})$ platí $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in U_\varepsilon(\mathbf{b})$ pre každé $t \geq 0$.*

Vektorové riešenie (7) ktoré spĺňa začiatočné podmienky

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(0) \\ \mathbf{y}_0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Budeme označovať $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$. Geometricky to znamená, že trajektória takéhoto riešenia začína v bode $(x_0; y_0)$.

Stacionárne riešenie \mathbf{b} budeme nazývať *asymptoticky stabilné*, ak je stabilné a existuje také σ -okolie $U_\sigma(\mathbf{b})$, že pre každé riešenie $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ so začiatočným stavom $\mathbf{x}_0 \in U_\sigma(\mathbf{b})$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{b} \quad (10)$$

Ak stacionárne riešenie \mathbf{b} je asymptoticky stabilné, potom množina tých \mathbf{x}_0 , pre ktoré platí (10) sa nazýva *oblasťou príťažlivosti* stacionárneho riešenia \mathbf{b} .

Stacionárny bod, ktorý nie je stabilný, nazývame *nestabilným stacionárnym bodom*.

Veta 2.2 *Stacionárne riešenie $\mathbf{b} = (0; 0)$ je stabilné práve vtedy, ak charakteristické hodnoty matice tohto systému majú záporné reálne časti.*

Príklad: Nájdime stacionárny stav HLDS a zistíme, či je stabilný.

$$x' = 4x - y$$

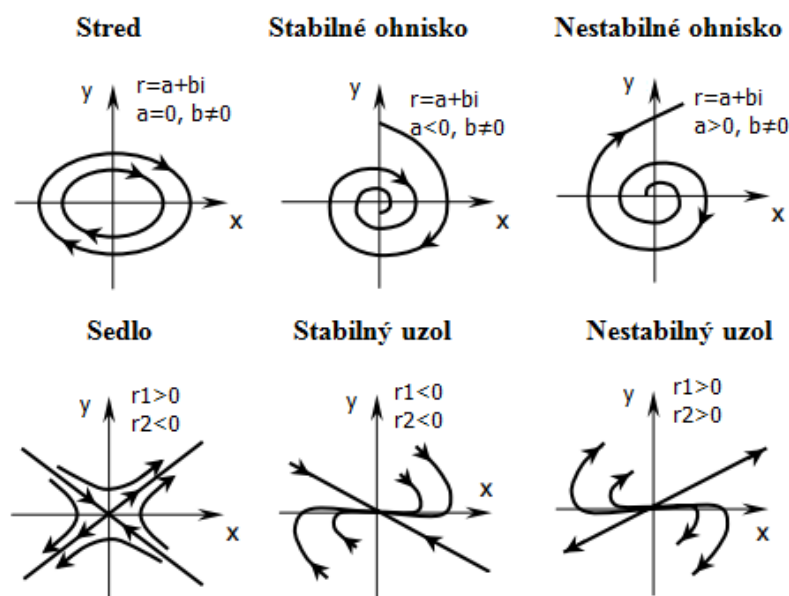
$$y' = x + 2y$$

Riešenie: Z rovníc $4x - y = 0$, $x + 2y = 0$ zistíme, že systém má jediný stacionárny stav $O(0;0)$. Nájdeme vlastné hodnoty matice systému z rovnice

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = r^2 - 6r + 9 = 0$$

Rovnica má dvojnásobný koreň $r_1 = r_2 = 3$. Podľa vety 2.2 stacionárny stav O je nestabilný.

Obr. 2 znázorňuje rôzne možnosti fázového portréту vzhľadom na znamienka vlastných hodnôt r_1, r_2 matice systému.



Obr. 2: Rôzne typy fázového portrétu [4]

V prípade, že $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, všetky vlastné hodnoty sú nenulové. V prípade, že $|A| = 0$, má matica vlastnú hodnotu $r_1 = 0$ a rovnice (8) majú nekonečne veľa riešení, a teda systém má nekonečne veľa stacionárnych riešení.

Pre nelineárne systémy diferenciálnych rovníc vyšetrujeme stabilitu riešenia pomocou tzv. linearizácie systému využívajúcej Jacobiho maticu, t.j. maticu prvých parciálnych derivácií rovníc systému. Pre systém

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{11}$$

Jacobiho matica vyzerá nasledovne

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Linearizáciou systému (11) v bode (\hat{x}, \hat{y}) potom nazývame nasledujúci lineárny diferenciálny systém

$$\begin{aligned}x' &= Ax + By \\ y' &= Cx + Dy\end{aligned}\tag{13}$$

v ktorom koeficienty A, B, C a D sú koeficientmi Jacobiho matice pôvodného diferenciálneho systému v bode (\hat{x}, \hat{y}) .

3 Numerické metódy

Numerické metódy neriešia úlohu analyticky, t.j. nenájdu analytický predpis funkcie, ktorá je riešením danej úlohy, ale riešia úlohu číselne. Numerické riešenie diferenciálnej rovnice je dané tabuľkou aproximovaných funkčných hodnôt na zvolenej množine bodov. Túto množinu bodov nazývame *sieť* a jednotlivé body sú *uzly siete*.

Numerické metódy sa nazývajú aj *približnými metódami*, pretože okrem klasických chýb spôsobených nepresnosťou používaných čísel, vzniká aj chyba spôsobená nahradením intervalu množinou uzlov (chyba diskretizácie). Základná vlastnosť, ktorú požadujeme od numerickej metódy, spočíva v tom, že pri zmenšujúcom kroku postupnosť riešení konverguje k presnému riešeniu [5]. Numerické metódy nie sú vhodné pre úlohy, ktoré nie sú stabilné, t.j. úlohy, kde malá zmena v začiatočných podmienkach spôsobí veľkú zmenu hodnôt riešenia.

Všetky tri nižšie uvedené metódy riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc sa dajú jednoducho modifikovať pre riešenie systémov diferenciálnych rovníc nahradením neznámej funkcie $y = y(x)$ vektorom neznámych funkcií $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$.

3.1 Eulerova metóda

Eulerova metóda je najjednoduchšou numericou metódou na hľadanie približného riešenia Cauchyho úlohy typu

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0\tag{14}$$

Vychádza z geometrickej predstavy – aproximácie integrálnej krivky diferenciálnej rovnice lomenou čiarou s vrcholmi (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Smernicu k_i úsečky danej bodmi (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) nahradíme smernicou dotyčnice k integrálnej krivke v bode (x_i, y_i) [6].

Dostávame

$$k_i = S(x_i, y_i, h) = y'(x_i) = f(x_i, y_i) \quad (15)$$

Predpokladajme pravidelnú sieť, t.j. ekvidištančné rozmiestnenie uzlových bodov $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ s krokom h . Vo všetkých bodoch siete platí

$$y'(x_i) = F(x_i, y(x_i)) \quad (16)$$

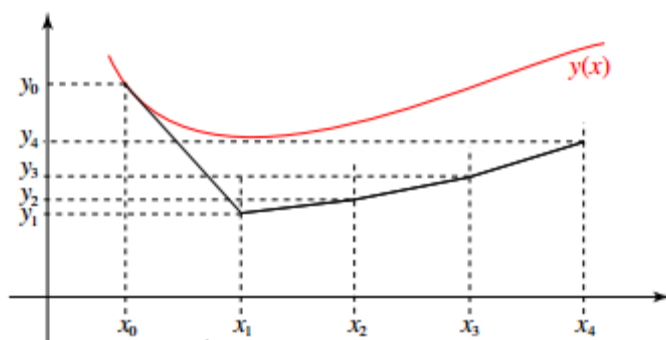
Deriváciu na ľavej strane nahradíme numerickou deriváciou a dostávame

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = F(x_i, y(x_i)) \quad (17)$$

Nahradíme $y(x_i)$ približnou hodnotou y_i a môžeme vyjadriť približnú hodnotu pre $y(x_{i+1})$ nasledovne

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i) \quad (18)$$

Tým dostávame vzťah, ktorým dokážeme vypočítať približnú hodnotu v nasledujúcom uzlovom bode pomocou hodnôt v predošlom uzlovom bode [7].



Obr. 3: Aproximácia integrálnej krivky DR lomenou čiarou [6]

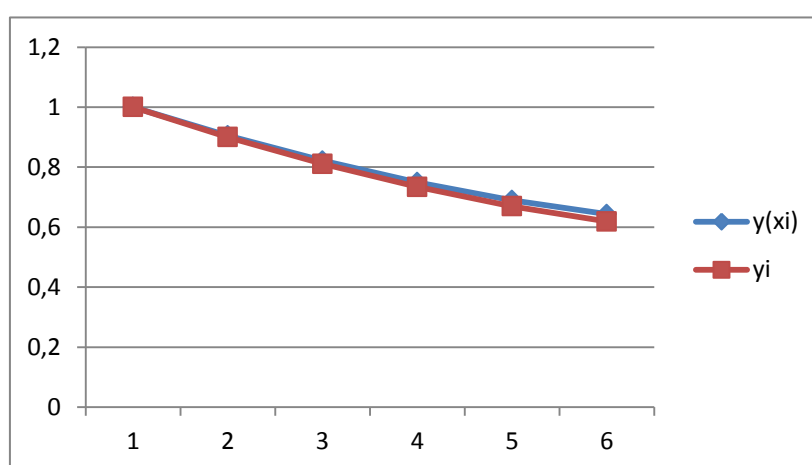
Príklad: Pomocou Eulerovej metódy riešme Cauchyho počiatočnú úlohu $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$ na intervale $<0;0,5>$ s krokom $h = 0,1$.

Riešenie: Analytické riešenie tejto diferenciálnej rovnice je $y(x) = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$.

Platí, že $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a riešenie hľadáme v bodoch $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,3$, $x_4 = 0,4$, $x_5 = 0,5$ pretože $x_{i+1} = x_i + h$. V nasledujúcej tabuľke sú vypočítané presné hodnoty $y(x_i)$ a približné hodnoty y_i podľa vzorca (18).

Tab. 1: Hodnoty $y(x_i)$, y_i pre Eulerovu metódu

i	x_i	$y(x_i)$	y_i
0	0	1	1
1	0,1	0,90516	0,90000
2	0,2	0,82127	0,81100
3	0,3	0,74918	0,73390
4	0,4	0,68968	0,66951
5	0,5	0,64347	0,61856

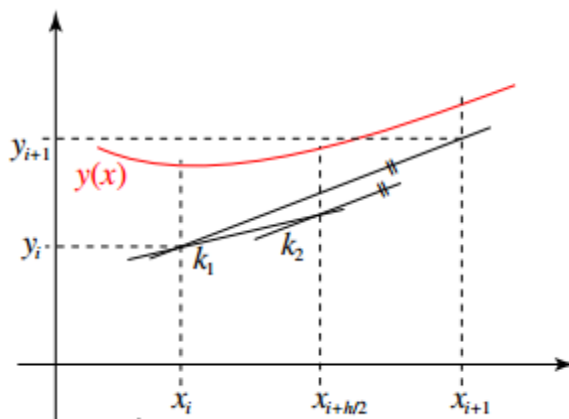


Obr. 4: Riešenie pomocou Eulerovej metódy

Z grafu (Obr. 4) vidno, že vypočítané hodnoty zo všeobecného riešenia diferenciálnej rovnice $y(x_i)$ a hodnoty, ktoré sme dostali na základe Eulerovej metódy y_i , sú približne rovnaké. Pre Eulerovu metódu s krokom h platí, že chyba jedného kroku je rádovo rovná h^2 a kumulatívna chyba je rádovo rovná h .

3.2 Modifikovaná Eulerova metóda

Táto metóda poskytuje presnejšie výsledky ako Eulerova metóda. Najskôr vypočítame pomocné hodnoty k_1 a k_2 a pomocou nich potom približnú hodnotu riešenia v ďalších uzlových bodoch [7].



Obr. 5: Aproximácia krivky DR lomenou čiarou [6]

V prípade *prvej modifikovanej Eulerovej metódy* počítame podľa vzorcov

$$k_1 = F(x_i, y_i)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (19)$$

$$y_{i+1} = y_i + hk_2$$

a u *druhej modifikovanej Eulerovej metódy* podľa

$$k_1 = F(x_i, y_i)$$

$$k_2 = F(x_i + h, y_i + hk_1) \quad (20)$$

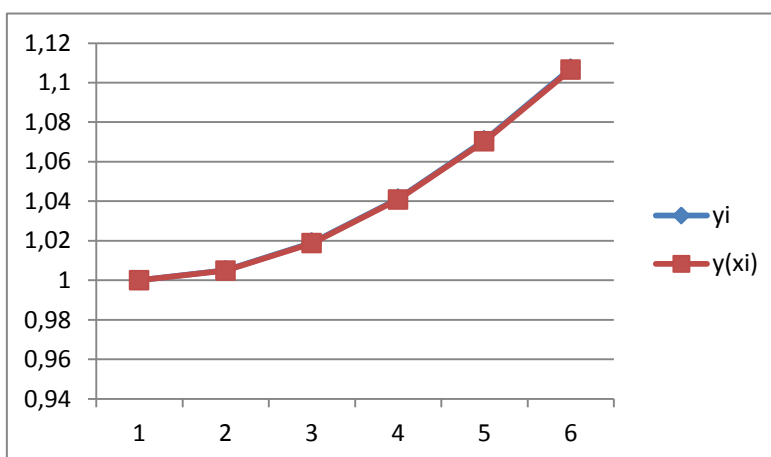
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(k_1 + k_2)$$

Príklad: Pomocou prvej modifikovanej Eulerovej metódy riešme Cauchyho počiatočnú úlohu $y' = x - y + 1$, $y(0) = 1$ na interval $<0;1>$ s krokom $h = 0,1$.

Riešenie: Analytické riešenie tejto DR je $y(x) = x + e^{-x}$. Platí, že $x_0 = 0$ a $y_0 = 1$ a riešenie hľadáme v bodoch $x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$, $x_3 = 0,3$, $x_4 = 0,4$, $x_5 = 0,5$, pretože $x_{i+1} = x_i + h$. V nasledujúcej tabuľke sú vypočítané presné hodnoty $y(x_i)$, približné hodnoty y_i a pomocné veličiny k_1 a k_2 podľa (19).

Tab. 2: Hodnoty $y(x_i)$, y_i , k_1 , k_2 pre modifikovanú Eulerovu metódu

i	x_i	$y(x_i)$	y_i	k_1	k_2
0	0	1	1	0	0,05
1	0,1	1,00483	1,005	0,095	0,14025
2	0,2	1,01873	1,01902	0,18097	0,22192
3	0,3	1,04081	1,04121	0,25878	0,29584
4	0,4	1,07032	1,07080	0,32919	0,36273
5	0,5	1,10653	1,10707	0,39292	0,42327



Obr. 6: Riešenie pomocou modifikovanej Eulerovej metódy

Z grafu riešenia (Obr. 6) vidno, že modifikovaná Eulerova metóda je presnejšia ako obyčajná Eulerova metóda. Krivky majú takmer totožnú trajektóriu. Chyba totiž postupne narastá, ale pomalšie ako pri Eulerovej metóde. Chyba jedného kroku je rádovo rovná h^3 , kumulatívna chyba je rádovo rovná h^2 .

Druhú modifikovanú Eulerovu metódu sme použili na riešenie systému diferenciálnych rovníc opisujúcich model typu Lotka-Volterra v kapitole 4.2.

3.3 Rungeho – Kuttova metóda

Tieto metódy sú jedny z najdôležitejších a najviac používaných jednokrokových metód. Do tejto skupiny patrí aj Eulerova metóda a jej modifikácie. Najčastejšie používaná metóda je metóda Runge-Kutta 4. rádu [7]. Pre jej jeden krok platia rekurentné vzťahy

$$\begin{aligned}k_1 &= F(x_i, y_i) \\k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= F(x_i + h, y_i + hk_3) \\y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\tag{21}$$

Táto metóda je presnejšia ako Eulerova metóda. Nevýhodou je, že v každom kroku musíme počítať hodnotu funkcie F v štyroch rôznych bodoch, ale chyba kroku je už rádovo rovná len h^5 .

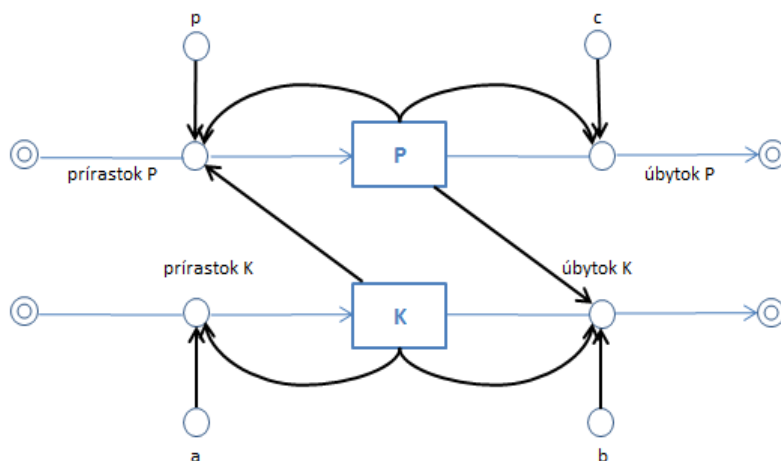
4 Matematický model systému predátor – korisť

Pri formulácii modelu využijeme tzv. systémovú dynamiku, ktorú možno považovať za grafickú nadstavbu nad matematickým modelovaním pomocou diferenciálnych rovníc [1].

Obr. 7 zobrazuje príklad jednoduchého systémového modelu, ktorý zachytáva vzťahy medzi populáciou predátora P a koristi K . Ide o model, kde predpokladáme, že:

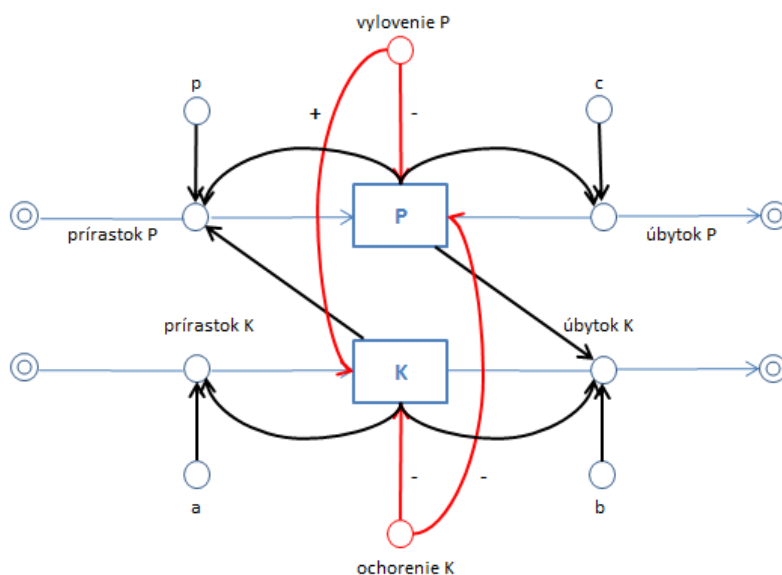
- Korisť má neobmedzené množstvo potravy a je ohrozovaná iba predátorom.
- Jediným zdrojom potravy predátora je korisť.
- Pri stretnutí predátora a koristi dôjde k úhynu koristi s istou pravdepodobnosťou.

Pre správne odvodenie matematického modelu je potrebné zvoliť si aj parametre, ktoré majú značný vplyv na správanie sa koristi a predátora, a to: faktor množenia koristi (a), koeficient predácie (b), faktor úhynu predátora (c) a reprodukčná miera predátora na jednu korisť (p).



Obr. 7: Jednoduchý model systému predátor koristi

Model je rozšírený o externý zásah predstavujúci vylovenie predátora a ochorenie koristi (Obr. 8). Vylovenie predátora záporne ovplyvňuje veľkosť populácie predátora a zároveň kladne veľkosť populácie koristi. Podobne ochorenie koristi záporne ovplyvňuje veľkosť populácie koristi ako aj veľkosť populácie predátora.



Obr. 8: Model systému predátor – korisť rozšírený o externý zásah

Systémové modely sú systémy diferenciálnych rovníc. Na príklade predátora a koristi ukážeme, ako z grafického stvárnenia odvodíme model popísaný takýmito rovnicami. Aby

sme to mohli urobiť, potrebujeme si zadefinovať počiatočné hodnoty populácie predátora a koristi, v našom prípade P a K. Ďalej potrebujeme hodnoty parametrov a , b , c a p .

Následne tak môžeme vyjadriť rovnice pre prírastok predátora, rovnicu pre prírastok koristi, rovnicu pre úbytok predátora a rovnicu pre úbytok koristi. Ďalej ostáva už len určiť rovnicu pre výpočet hodnôt populácií P a K. Pre náš model potom dostávame

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= aK - bKP \\ \frac{dP}{dt} &= -cP + pKP\end{aligned}\tag{22}$$

Tento model sa nazýva *Lotkov – Volterrov model* a ide o jeden z prvých modelov študovaných v oblasti populačnej dynamiky vytvorený nezávisle v rokoch 1925 a 1926 Alfredom J. Lotkom a Vitom Volterrom. Tento model nie je lineárny.

Lotkov – Volterrov model by sme mohli rozšíriť o tretiu rovnicu vyjadrujúcu množstvo potravy koristi, ktorá má nasledovný tvar

$$\frac{dZ}{dt} = qZ - dZK\tag{23}$$

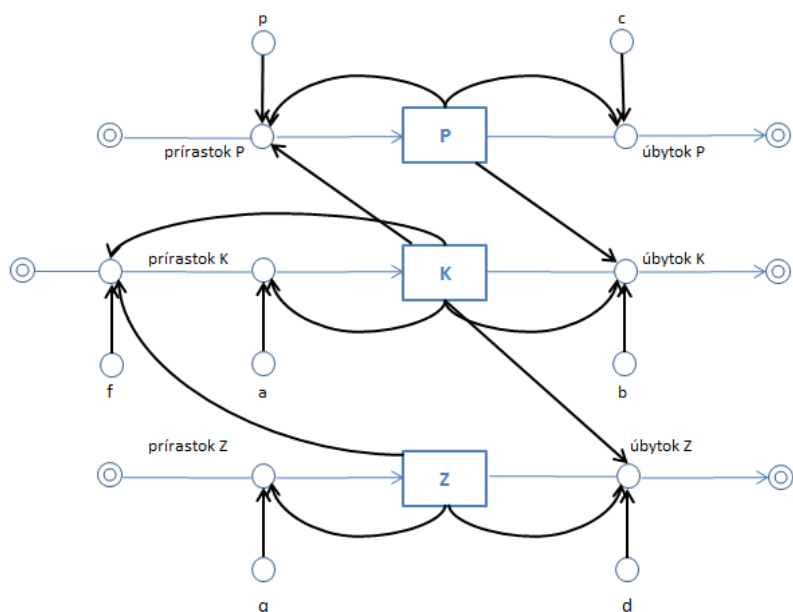
kde q predstavuje parameter vyjadrujúci faktor množenia potravy koristi a d predstavuje koeficient predácie koristi voči potrave koristi.

Model rozšírený o túto rovnicu, by má potom tvar:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} &= aK - bKP + fZK \\ \frac{dP}{dt} &= -cP + pKP \\ \frac{dZ}{dt} &= qZ - dZK\end{aligned}\tag{24}$$

Prvá rovnica vyjadrujúca zmenu množstva koristi v čase sa rozšírila o člen fZK , kde f je koeficient množenia potravy koristi, ktoré je závislé na energii získanej z potravy. Z modelu je zrejmé, že množstvo potravy koristi, priamo ovplyvňuje množstvo koristi. Parametre a, b, c, p majú rovnaký význam ako v predošlom modeli.

Následujúci obrázok (Obr. 9) znázorňuje model predátor – korisť – potrava koristi.



Obr. 9: Systémový model predátor – korisť – potrava koristi

4.1 Analytické riešenie modelu

V predchádzajúcej časti sme zaviedli nelineárny systém diferenciálnych rovníc predstavujúci Lotkov – Volterrov model systému predátor – korisť:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + pxy\end{aligned}\tag{25}$$

Síce nevieme nájsť explicitné vyjadrenie riešenia diferenciálneho systému v tom zmysle, že nevieme nájsť analytický predpis funkcií $x(t)$ a $y(t)$ v závislosti od t , ale vieme nájsť vzájomnú závislosť x a y implicitne nasledovným spôsobom. Vydelením rovníc a následnou separáciou dostávame:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(-c + px)y}{(a - by)x} \\ \frac{a - by}{y} dy &= \frac{-c + px}{x} dx\end{aligned}$$

Po integrácii oboch strán a úpravách dostávame vzťah

$$\ln x^c y^a - by - px = \text{konšt.}$$

Hľadaná funkcia závislosti x a y má teda tvar

$$F(x, y) = \ln x^c y^a - by - px = \text{konšt.}$$

Trajektórie diferenciálneho systému (25) sú vrstevnicami funkcie $F(x, y)$.

Pri vyšetrovaní stability riešenia diferenciálneho systému (25) budeme podľa kapitoly 2.2 používať linearizáciu systému. Stacionárny bod nájdeme riešením sústavy

$$f(x, y) = ax - bxy = 0$$

$$g(x, y) = -cy + pxy = 0$$

Vyšetříme *nulkliny* daného systému. Nulkliny sú krivky, pre ktoré platí $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$. Vyšetrením nulklín teda dostávame tieto stacionárne body:

x – nulkliny:

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$ax - bxy = 0 \Rightarrow \text{dostávame 2 nulkliny: } x = 0 \text{ a } y = \frac{a}{b}$$

y – nulkliny:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$-cy + pxy = 0 \Rightarrow \text{dostávame 2 nulkliny: } y = 0 \text{ a } x = \frac{c}{p}$$

Stacionárne body systému teda sú $(0,0)$ a $(\frac{c}{p}, \frac{a}{b})$.

Jacobiho matica systému je:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ py & -c + px \end{pmatrix} \quad (26)$$

Jacobiho matica podľa (12) pre prvý stacionárny bod je

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vlastné hodnoty tejto matice sú reálne, pričom jedna z nich je kladné a druhá je záporné reálne číslo. Preto podľa kapitoly 2.2 ide o stacionárny bod typu sedlo.

Jacobiho matica pre druhý stacionárny bod je

$$J\left(\frac{c}{p}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{c}{p} \\ p\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Vlastnosti riešenia môžeme vyšetriť aj pomocou Hessovej matice funkcie $F(x, y)$ v stacionárnych bodoch tejto funkcie, t.j. matice

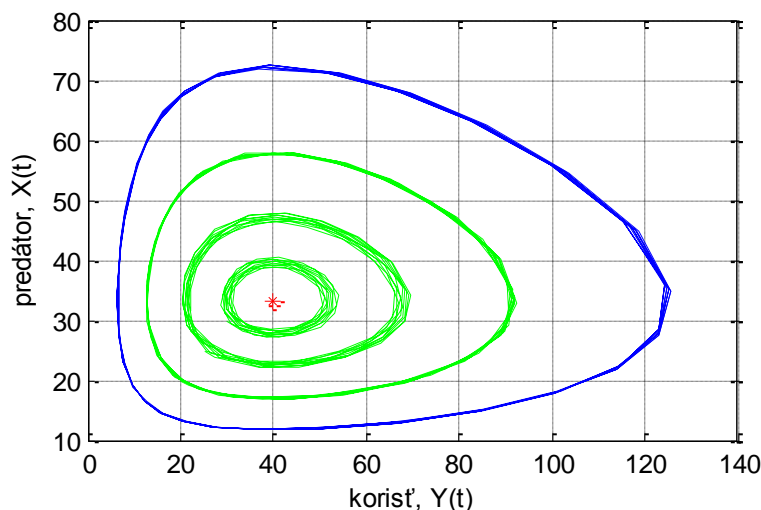
$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Funkcia $F(x, y)$ má jediný stacionárny bod, a to bod $\left(\frac{c}{p}, \frac{a}{b}\right)$. Hessova matica tejto funkcie má tvar:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

Stacionárny bod $\left(\frac{c}{p}, \frac{a}{b}\right)$ je lokálny extrém funkcie. Matica druhých derivácií je negatívne definitná v každom bode (x, y) , funkcia F je teda v celom prvom kvadrante konkávna. Z týchto dvoch vlastností vyplýva, že vrstevnice funkcie F sú uzavreté krivky [8]. To potvrdzuje, že stacionárny bod $\left(\frac{c}{p}, \frac{a}{b}\right)$ je typu stred (centrum).

Nech parameter $a = 1$, $b = 0,03$, $c = 0,4$ a $p = 0,01$. Pomocou programu Matlab a funkcie ode23 sme vykreslili riešenia tohto systému v čase od $t_0 = 0$ až $t_f = 100$ pri rôznych počiatočných stavoch populácií (Obr. 10). Modré trajektórie predstavujú počiatočný stav $[15; 15]$. Z obrázku je vidieť cyklické kolísanie populácií okolo stacionárneho bodu so súradnicami $\left[\frac{c}{p}; \frac{a}{b}\right] = [40; 33.3]$ vyznačeného červenou farbou, ktorý predstavuje centrum. Podobne možno na obrázku pozorovať správanie systému v okolí bodu $(0,0)$, kde sa fázový portrét riadi sedlovým charakterom tohto stacionárneho bodu.



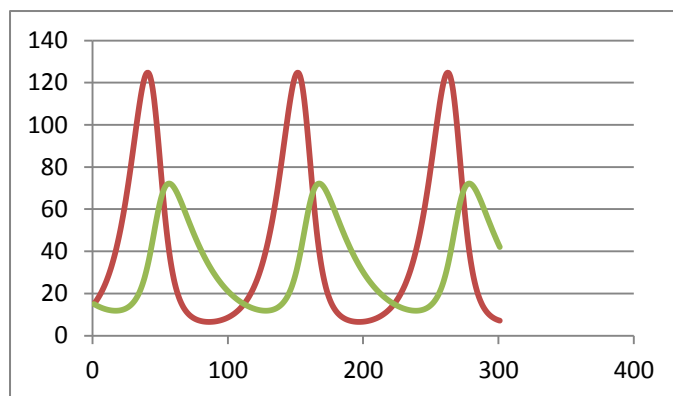
Obr. 10: Fázový portrét modelu (25) pri zvolených parametroch

4.2 Riešenie pomocou numerických metód

Na riešenie systému nelineárnych diferenciálnych rovníc predstavujúceho Lotkov – Volterrov model (25) sme použili prvú modifikovanú Eulerovu metódu (viď kap. 3.2). Na výpočty sme použili tabuľkový procesor MS Excel.

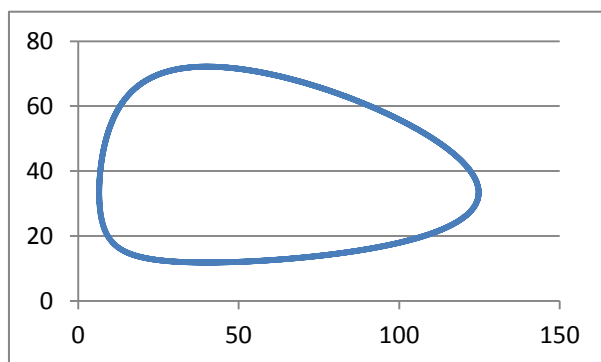
Zvolili sme si parametre modelu nasledovne: $a = 1$, $b = 0,03$, $c = 0,4$ a $p = 0,01$ a $h = 0,1$. S aplikáciou na systém predátor korisť, parameter a predstavuje podobne ako v predchádzajúcej kapitole faktor množenia koristi, parameter b koeficient predácie, parameter c faktor úhynu predátora, parameter p reprodukčnú mieru predátora a h predstavuje krok výpočtu. Počiatočný stav populácie koristi aj predátora je 15.

Obr. 11 znázorňuje riešenie nelineárneho systému pri zvolených parametroch a počiatočných stavoch populácií v čase $t = 0$ až $t = 300$. Ide o populačný graf, ktorý popisuje vývoj populácií predátora a koristi v čase. Ide o periodicky sa opakujúci cyklus. Červenou farbou je znázornený vývoj populácie koristi v čase t a zelenou farbou vývoj populácie predátora v čase t .



Obr. 11: Populačný graf

Obr. 12 zobrazuje tzv. populačnú krivku ako závislosť populácie predátora a koristi. Os x predstavuje veľkosť populácie koristi a os y veľkosť populácie predátora. Keďže sme na výpočet použili rovnaké hodnoty parametrov ako v predchádzajúcej kapitole, možno s určitosťou povedať, že stacionárny bod $[\frac{c}{p}; \frac{a}{b}]$ má súradnice $[40; 33.3]$ a predstavuje centrum.



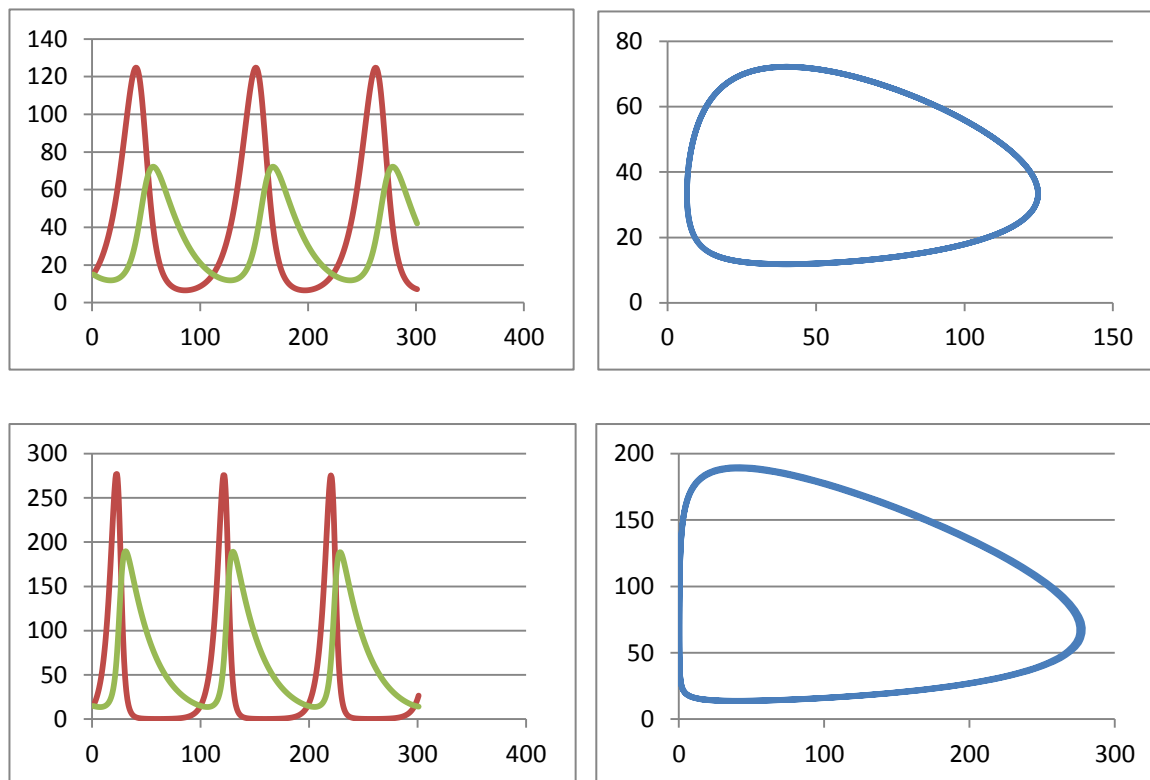
Obr. 12: Populačná krivka

Tabuľka hodnôt veľkostí populácií je priložená v Prílohe A.

Naším cieľom je aj určiť vplyv parametrov na správanie sa modelu. Taktiež chceme zistiť, ktoré parametre majú vysoký a ktoré nízky vplyv na správanie modelu [1]. Preto postupne meníme hodnoty jednotlivých parametrov a sledujeme, ako sa menia základné vlastnosti.

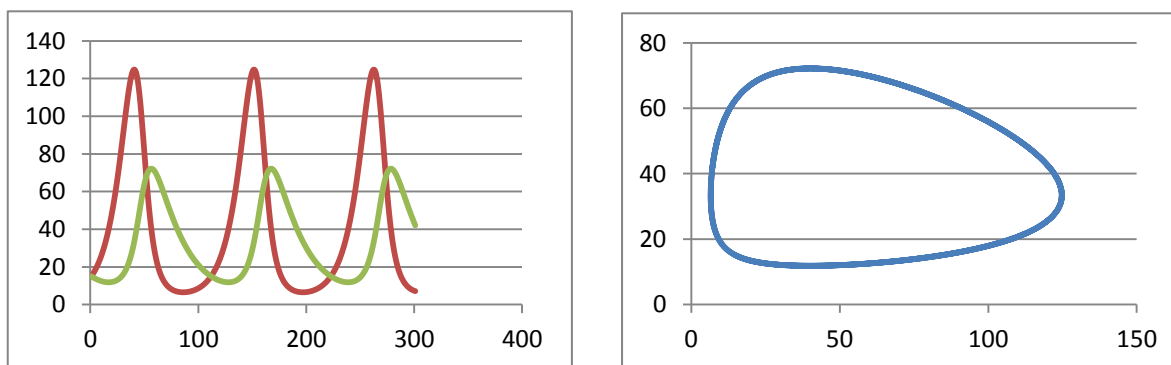
Obr. 13 znázorňuje vplyv parametra a na správanie sa modelu. V prvom riadku je populačný graf a populačná krivka pre hodnotu parametra $a = 1$. V druhom riadku sú tie isté grafy avšak s inou hodnotou parametra, $a = 2$. Zväčšenie hodnoty parametra a spôsobí, že

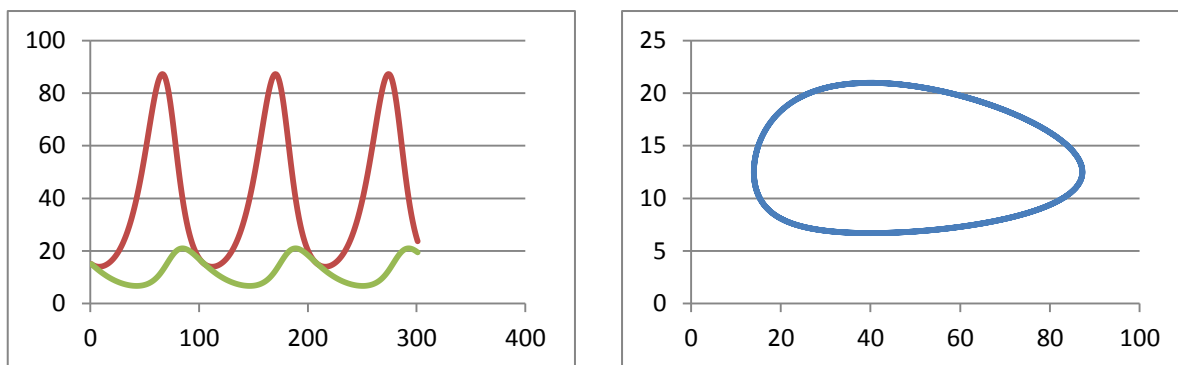
rastie populácia koristi, súčasne s rastom populácie koristi rastie aj populácia predátora a skracuje sa perióda jednotlivých cyklov.



Obr. 13: Analýza citlivosti pri zmene parametra a

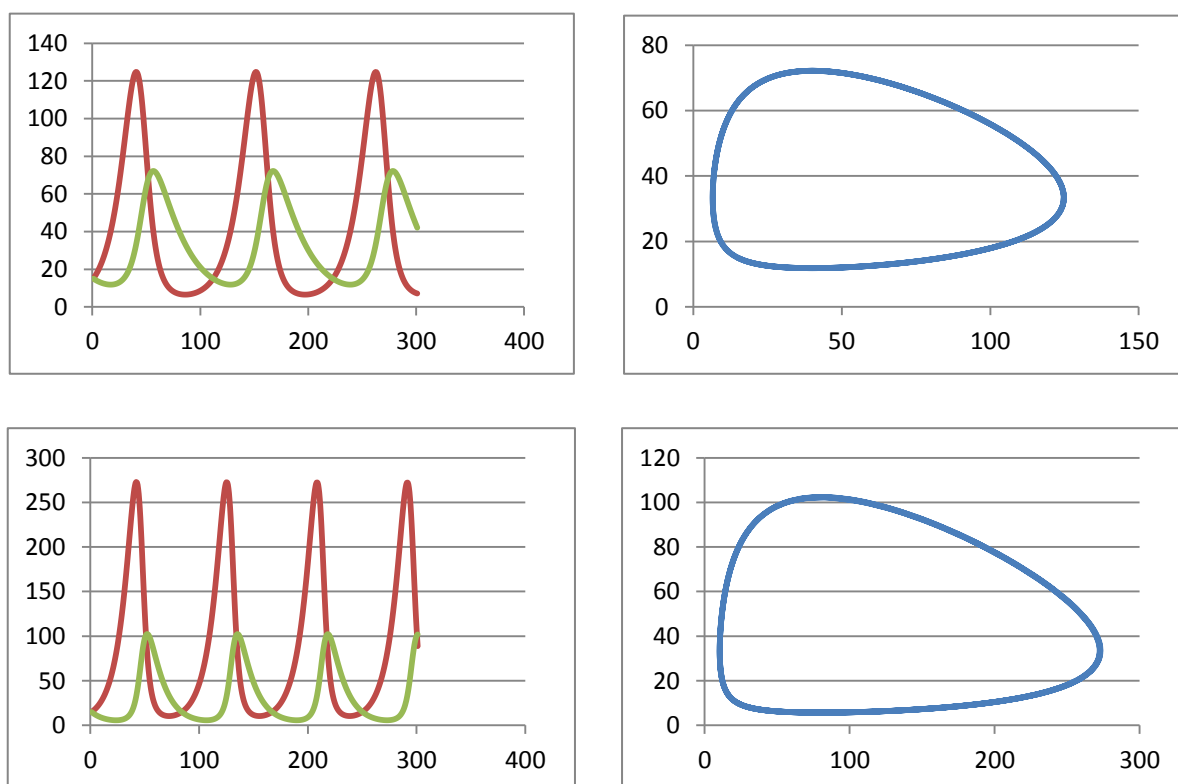
Obr. 14 znázorňuje, ako sa správa model pri zmene parametra b . V prvom riadku je populačný graf a populačná krivka pre hodnotu parametra $b = 0,03$ a v druhom riadku sú vykreslené grafy pre $b = 0,08$. Pri zväčšení koeficientu predácie teda dochádza k rýchlejšiemu úbytku koristi. Tým, že má predátor k dispozícii menej koristi, zníži sa aj množstvo predátora. Na grafoch možno vidieť, že sa zväčšuje aj perióda medzi cyklami.





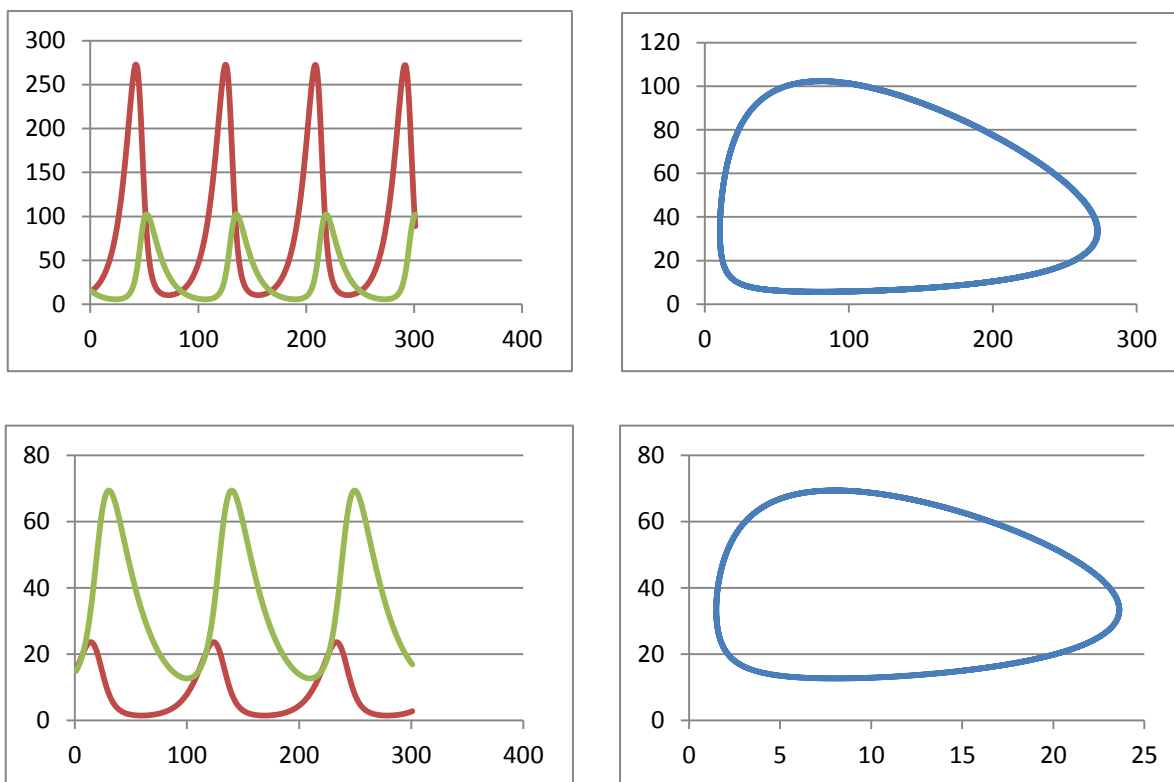
Obr. 14: Analýza citlivosti pri zmene parametra b

Obr. 15 odráža zmenu parametra c predstavujúceho faktor úhynu predátora. Pri jeho zväčšení z hodnoty 0,4 na hodnotu 0,8 sme zistili, že dochádza k nárastu populácie predátora aj koristi a predlžuje sa perióda medzi jednotlivými cyklami.



Obr. 15: Analýza citlivosti pri zmene parametra c

Obr. 16 znázorňuje správanie sa modelu pri zmene parametra p predstavujúceho reprodukčnú mieru predátora. Pri zväčšení parametra z hodnoty 0,01 na hodnotu 0,05 sme zistili, že počet predátorov je oveľa väčší ako počet koristi a zväčšuje sa perióda medzi cyklami.



Obr. 16: Analýza citlivosti pri zmene parametra p

5 ABM model systému predátor – korisť

O ABM modeloch sme sa už zo všeobecného hľadiska zmienili v kapitole 1.2. V tejto kapitole sa budeme zaoberať ABM modelom systému predátor korisť.

Na modelovanie komplexných systémov, ktoré sa vyvíjajú v čase je dobré použiť multiplatformové prostredie NetLogo. Základom NetLoga sú agenti označovaní v programe ako „*turtles*“ a políčka, po ktorých sa môžu agenti pohybovať, označované v programe ako „*patches*“. Vzťahy medzi agentmi sú vyjadrené pomocou „*links*“, čiže tzv. spojov. Programovanie v NetLogu je oproti iným programovacím jazykom oveľa jednoduchšie

z hľadiska syntaxe jednotlivých príkazov. Výhodou NetLoga je, že sa v ňom vytvorené simulácie dajú vizuálne interpretovať na dobrej úrovni.

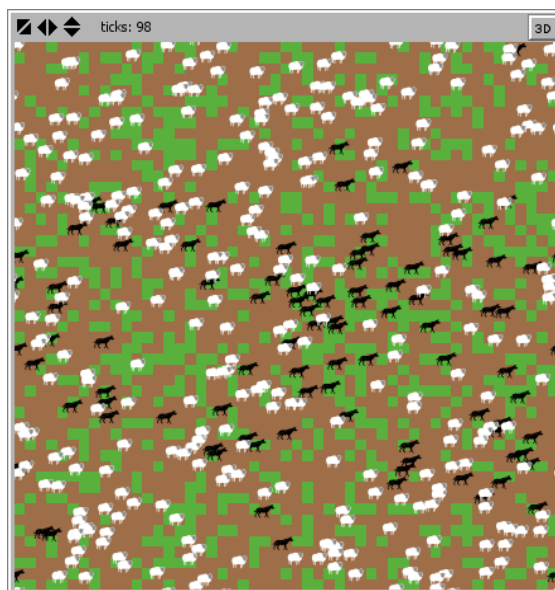
Uvažujme teda model systému predátor korisť. V našom modeli vlci predstavujú predátora a ovce korisť. Budeme ich spoločne označovať ako agentov, ktorí sa pohybujú po prostredí modelu tvoreného mriežkou a interagujú medzi sebou. Pre ovce ako agentov platia nasledovné pravidlá:

- Pohybujú sa náhodne.
- Požierajú trávnu, z ktorej získavajú energiu a zároveň pohybom časť energie strácajú.
- Rozmnožujú sa v závislosti od parametra predstavujúceho faktor množenia koristi (ovca sa rozdelí na dve ďalšie s polovičnou energiou).
- Hynú, ak je ich energia rovná (alebo menšia) nule, alebo ak ich zožerie vlk.

Pre vlkov ako agentov platia tieto pravidlá:

- Pohybujú sa náhodne.
- Ak sa vlk stretne s ovcou na jednom políčku, zožerie ju.
- Z oviec takto získavajú vlci energiu, pohybom však časť energie strácajú.
- Rozmnožujú sa v závislosti od parametra predstavujúceho reprodukčnú mieru predátora (vlk sa rozdelí na dvoch ďalších s polovičnou energiou).
- Hynú, ak je ich energia rovná (alebo menšia) nule.

Agenti sa pohybujú buď po políčkach, ktoré predstavujú trávnu, resp. potravu oviec (zelené políčka) alebo po spásaných políčkach (hnedé políčka) (Obr. 17). Ak ovca spása trávnu, po určitom čase tráva dorastie (hnedé políčko zozelenie). Aj týmto je zabezpečené, že ovce majú potravu k dispozícii, avšak v závislosti od nastavenia času dorastania trávy. Tento čas môžeme považovať za jeden z hlavných parametrov modelu. Ďalšími nastaviteľnými parametrami sú: energia, ktorú získajú ovce po spásaní trávy; energia, ktorú získajú vlci po zožratí ovce; už vyššie spomenutý faktor množenia koristi a reprodukčná miera predátora. Dôležité je tiež zvoliť si počiatočné množstvá oviec a vlkov. Obr. 17 znázorňuje tzv. svet, v ktorom sa pohybujú a medzi sebou interagujú ovce a vlci v závislosti od vyššie uvedených parametrov.



Obr. 17: Model „sveta“, v ktorom „žijú“ ovce a vlci

Naším hlavným cieľom bolo nastaviť jednotlivé parametre modelu tak, aby čo najvernejšie odrážali správanie sa reálneho systému a následne urobiť simuláciu modelu pri týchto nastaveniach. Hodnoty jednotlivých parametrov ako aj výsledky simulácie (populačný graf a populačná krivka) sa nachádzajú v Prílohe B. Populačný graf vyjadruje závislosť populácie oviec a vlkov od času a populačná krivka vyjadruje závislosť populácie oviec a vlkov. Z populačného grafu vidno, že ide o periodicky sa opakujúci cyklus. Populačná krivka je uzavretá, pretože množstvo predátora a koristi osciluje okolo stacionárneho bodu, ktorý predstavuje centrum.

5.1 Analýza citlivosti ABM modelu na zmenu parametrov

Podobne ako pri riešení Lotkovho – Volterrovho modelu numerickými metódami, aj tu budeme vykonávať analýzu citlivosti pri zmene parametrov. Budeme uvažovať model systému predátor – korisť – potrava koristi. V modeli sú defaultne nastavené nasledujúce parametre a ich hodnoty, ktoré však možno meniť v priebehu simulácie alebo ešte pred jej spustením.

Čas dorastania trávy (grass-regrowth-time) = 23

Energia získaná z oviec (energy-from-sheep) = 20

Energia získaná z trávy (energy-from-grass) = 4

Reprodukčná miera oviec (sheep-reproduce) = 4

Reprodukčná miera vlkov (wolf-reproduce) = 12

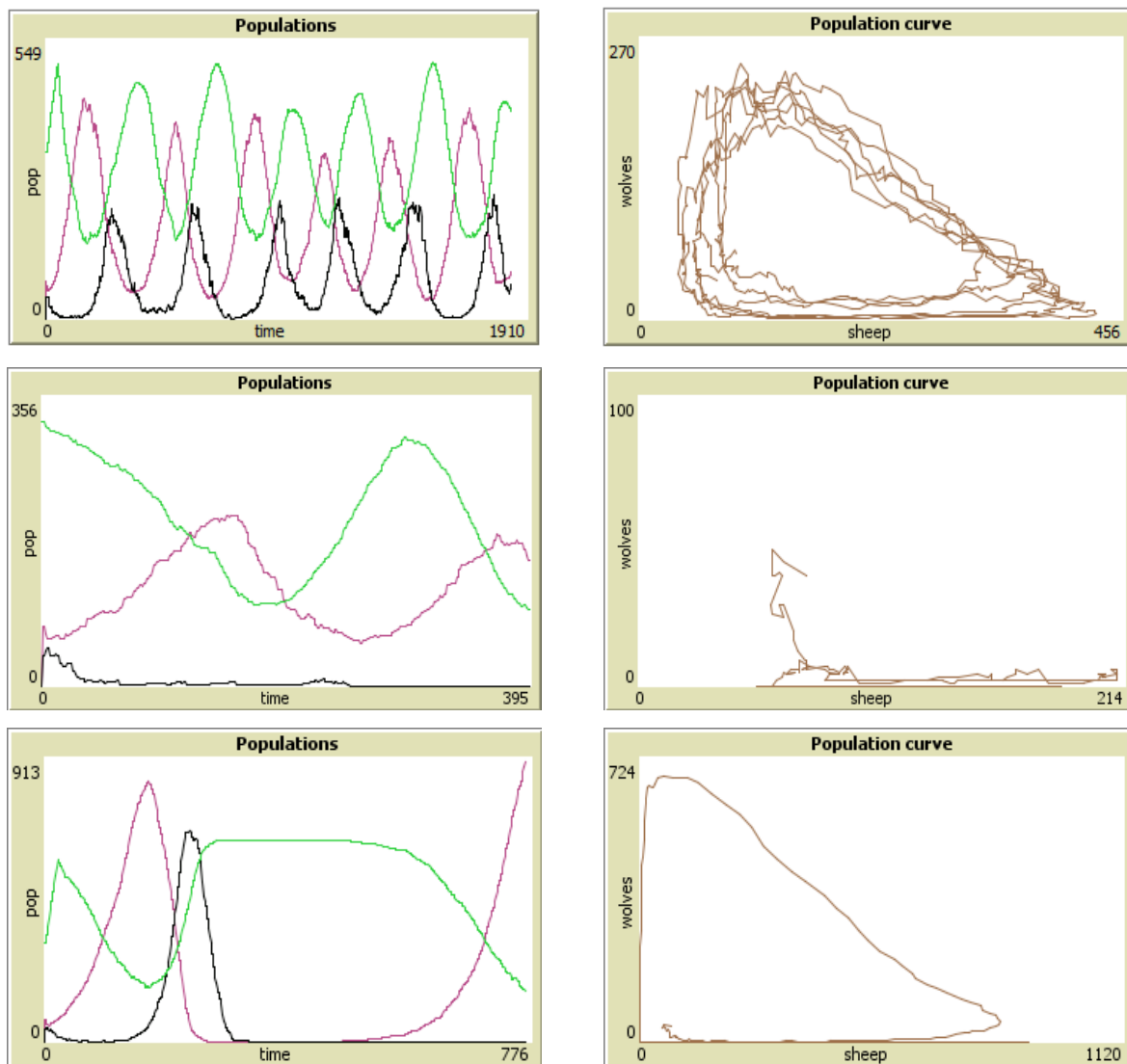
Počiatkové množstvo oviec (initial-number-sheep) = 100

Počiatkové množstvo vlkov (initial-number-wolves) = 35

V prostredí NetLogo sme vykreslili populačný graf (Population graph) a populačnú krivku (Population curve) pri takto zvolených parametroch. Čiernou farbou sú vykreslení vlci, ružovou farbou sú vykreslené ovce a zelenou je vykreslená tráva. Pri takto zvolených hodnotách parametrov je systém ustálený, trajektórie populačných závislostí sú zhruba cyklické krivky a správanie systému silne korešponduje s „ideálnym“ analytickým Lotkovým – Volterrovým modelom. Odchýlka od ideálnej trajektórie je spôsobená jednak diskretizáciou a jednak prvkom náhody, ktorý je zahrnutý v ABM modeli.

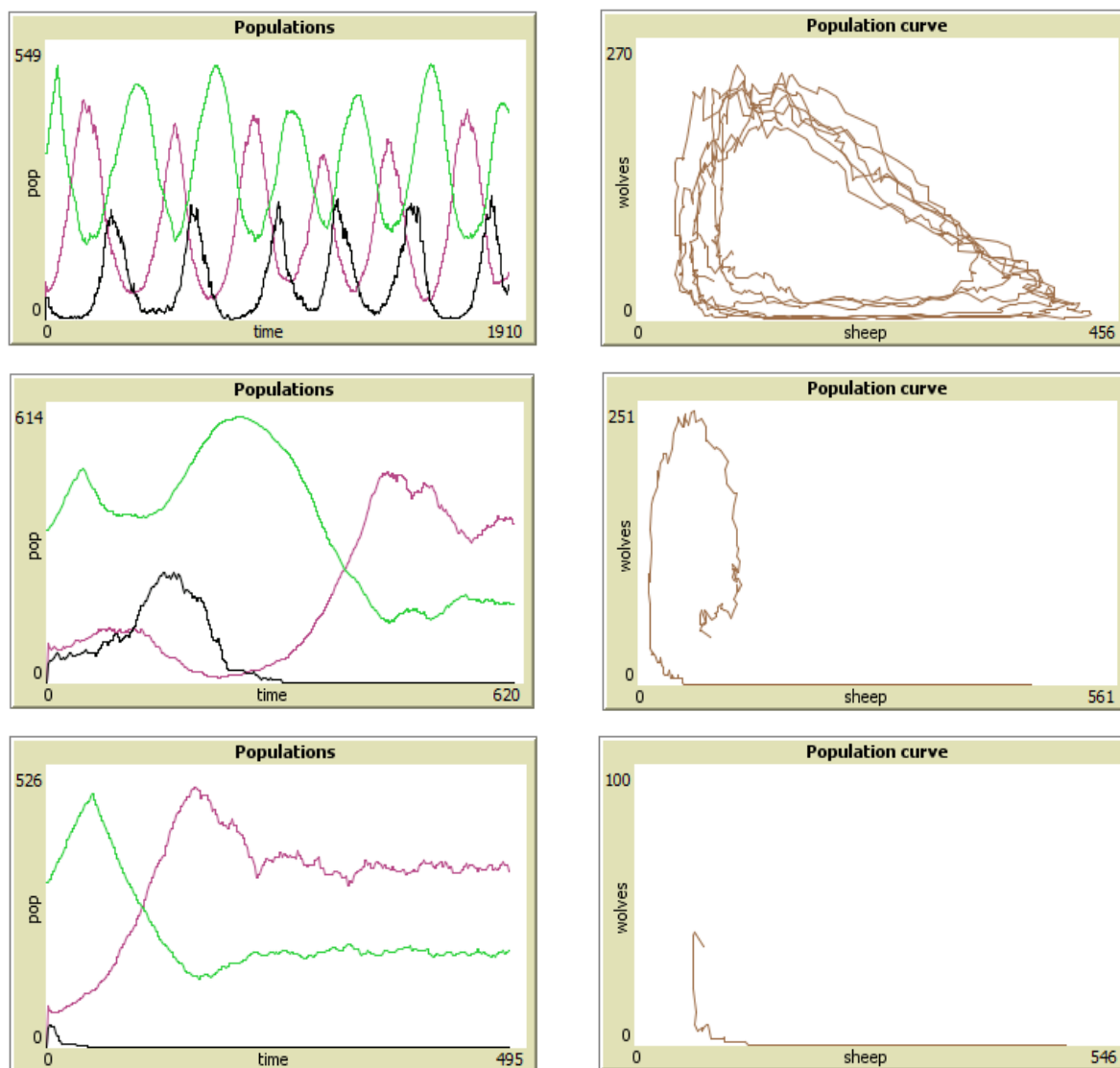
Obr. 18 zobrazuje zväčšenie hodnoty prvého parametra, a to času dorastania trávy z hodnoty 23 na hodnotu 70 a jeho zníženie na hodnotu 10. Pri vysokom nastavení času dorastania trávy sa zníži množstvo trávy dôsledkom čoho sa zníži aj počet oviec a vlkov. Pretože čas dorastania trávy sme zmenili na príliš vysokú hodnotu a takisto počet vlkov bol relatívne nízky, došlo k úplnému vyhynutiu vlkov. Pri znížení parametra dôjde k výraznému zvýšeniu populácie oviec, čím sa zvýši aj populácie vlkov. Tí zožerú takmer všetky ovce, čo má za následok, že nakoniec vyhynú a ovce sa ďalej rozmnožujú. S nárastom populácie oviec, klesá množstvo trávy. Náš model vykazuje vysokú citlivosť na parameter dorastania trávy.

Grafy v prvom riadku predstavujú vývoj populácií pre východiskové nastavenie parametrov, grafy v druhom riadku vývoj populácií pri zväčšení príslušného parametra a grafy v treťom riadku zobrazujú správanie sa modelu pri zmenšení parametra.



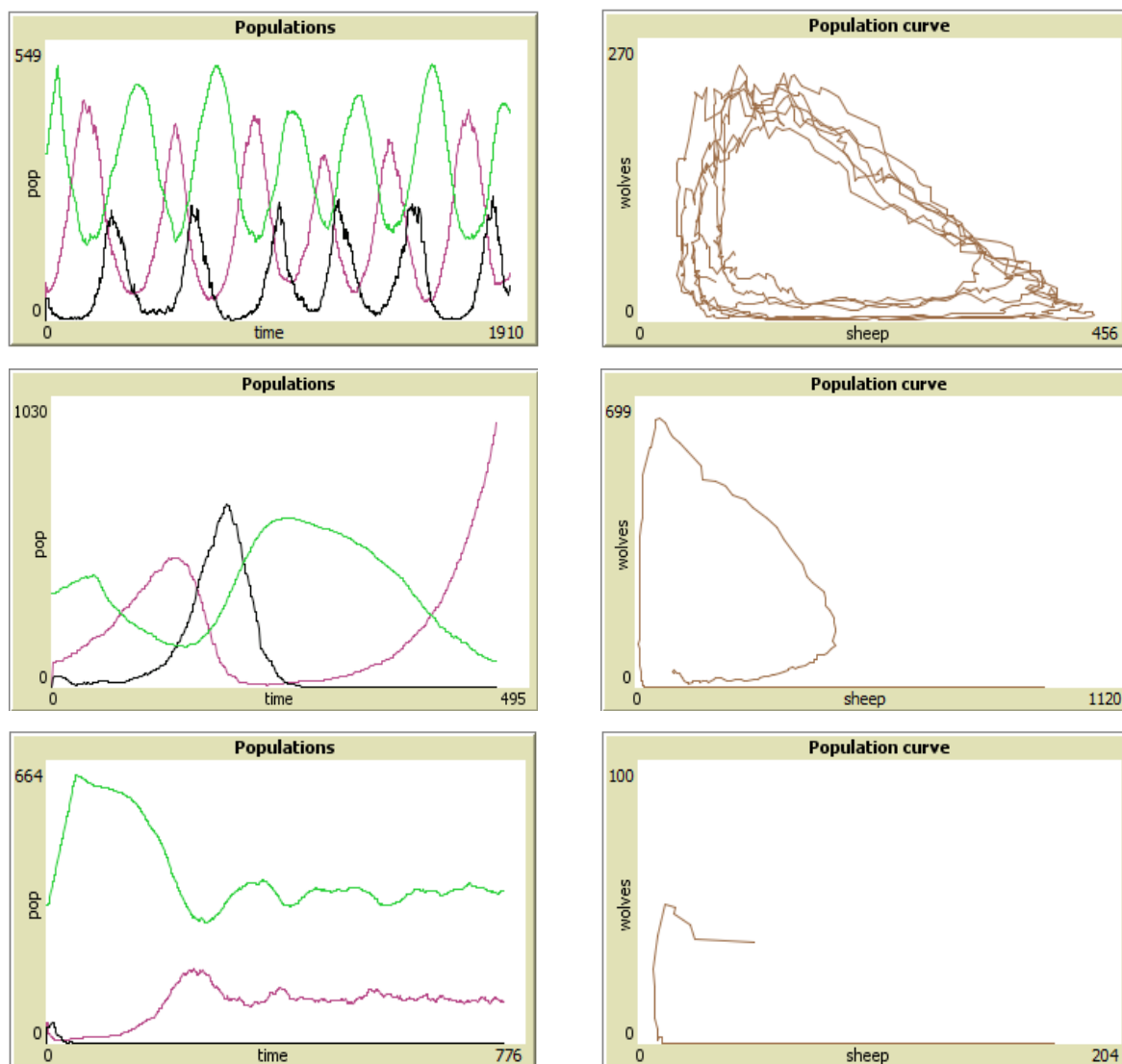
Obr. 18: Analýza citlivosti pri zmene času dorastania trávy

Obr. 19 znázorňuje zmenu ďalšieho parametra, a to zvýšenie energie vlkov získanej pri zožratí ovce z hodnoty 20 na hodnotu 40 a zníženie na hodnotu 10. Dôsledkom zvýšenia energie vlkov sa zmenší populácia oviec, čím sa prudko zväčší množstvo trávy a súčasne množstvo vlkov prekročí populáciu oviec. Vlci však vyhynú, pretože zožerú skoro všetky ovce a po čase nemajú čo loviť. Populácia oviec sa postupne dostane do takmer rovnovážneho stavu. Pri znížení hodnoty parametra dôjde k takmer okamžitému vyhynutiu populácie vlkov, pretože nie je dostatočný počet oviec na to, aby došlo k častejšiemu stretu ovce a vlka, čím by vlk získal energiu a mohol sa rozmnožovať. Ovce a tráva sa dostanú do rovnovážneho stavu.



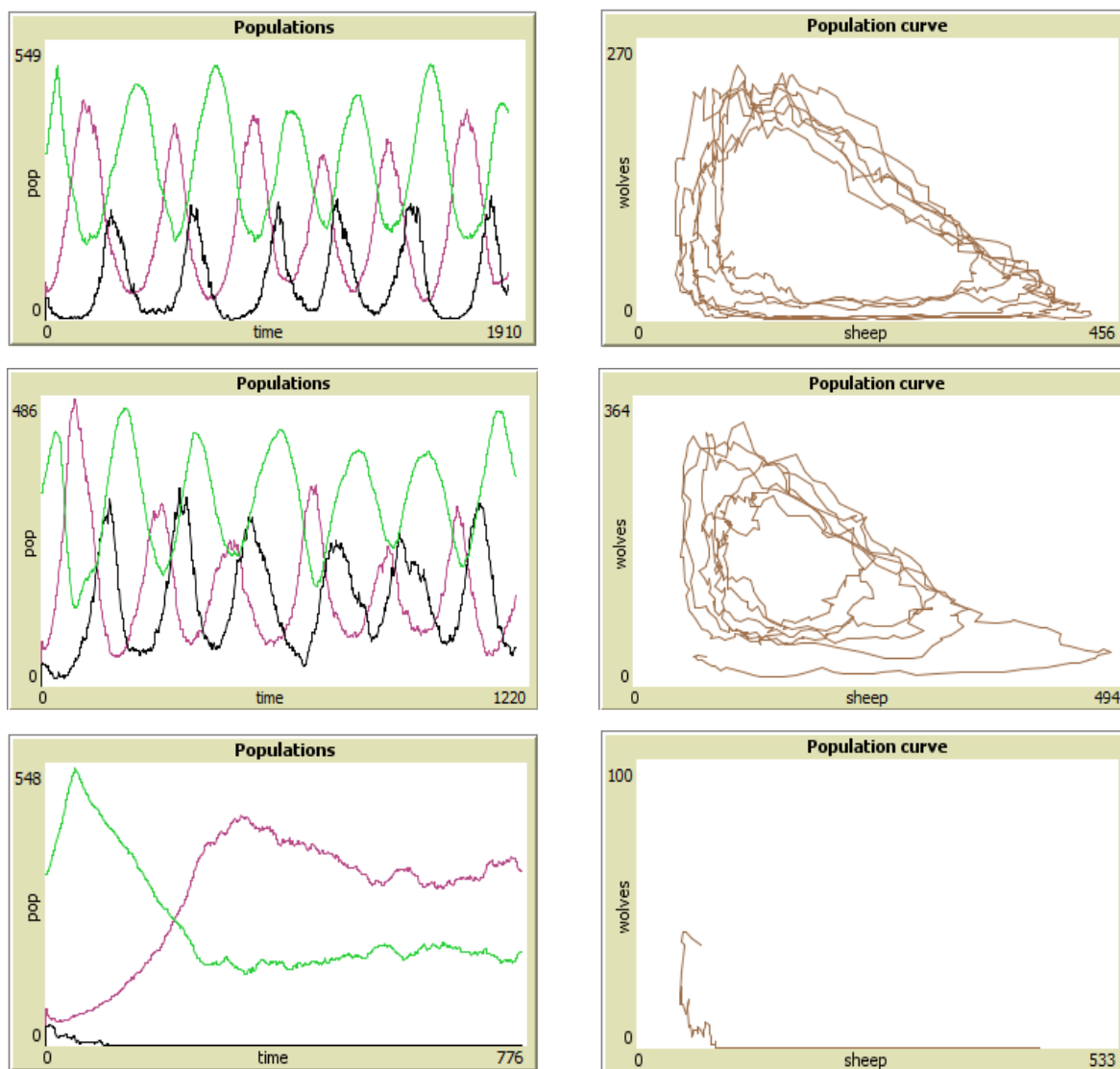
Obr. 19: Analýza citlivosti pri zmene energie vlkov získanej z oviec

Obr. 20 znázorňuje priebeh grafov pri zmene energie oviec získanej z trávy. Zvýšením tejto energie z hodnoty 4 na hodnotu 15 došlo k tomu, že vyhynuli všetci vlci, pretože zožrali takmer všetky ovce. Zvyšné ovce sa začali prudko množiť, pričom tráva pribúdala s časom pomalšie. Znížením parametra na hodnotu 2 spočiatku počet oviec klesol takmer na nulu, čím došlo k vyhynutiu populácie vlkov. Ovce sa začali ďalej množiť a s trávou udržali rovnovážny stav.



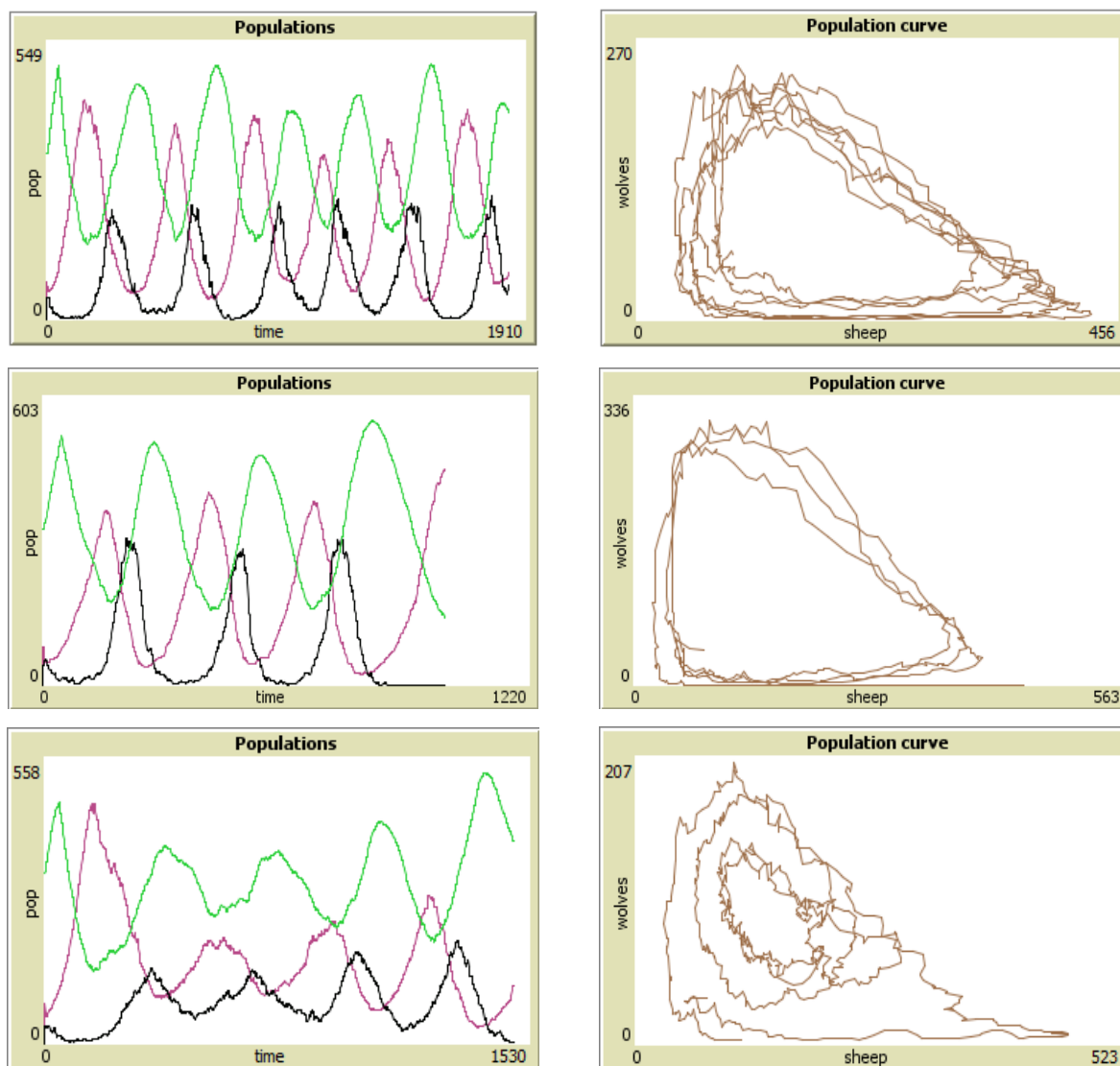
Obr. 20: Analýza citlivosti pri zmene energie oviec získanej z trávy

Ďalší obrázok (Obr. 21) predstavuje zmenu reprodukcie oviec. Pri zmene reprodukcie z hodnoty 4 na hodnotu 8 došlo k nárastu populácie oviec aj vlkov. Z oboch grafov zobrazujúcich zmenu parametra vidno, že oscilácie sú menej pravidelné ako pri pôvodných parametroch. Znížením parametra na hodnotu 2 vyhynula populácia vlkov, pretože sa na začiatku znížil počet oviec, čím mali vlci k dispozícii menej koristi. Po vyhynutí vlkov narástol počet oviec a s trávou vytvoril rovnovážny stav.



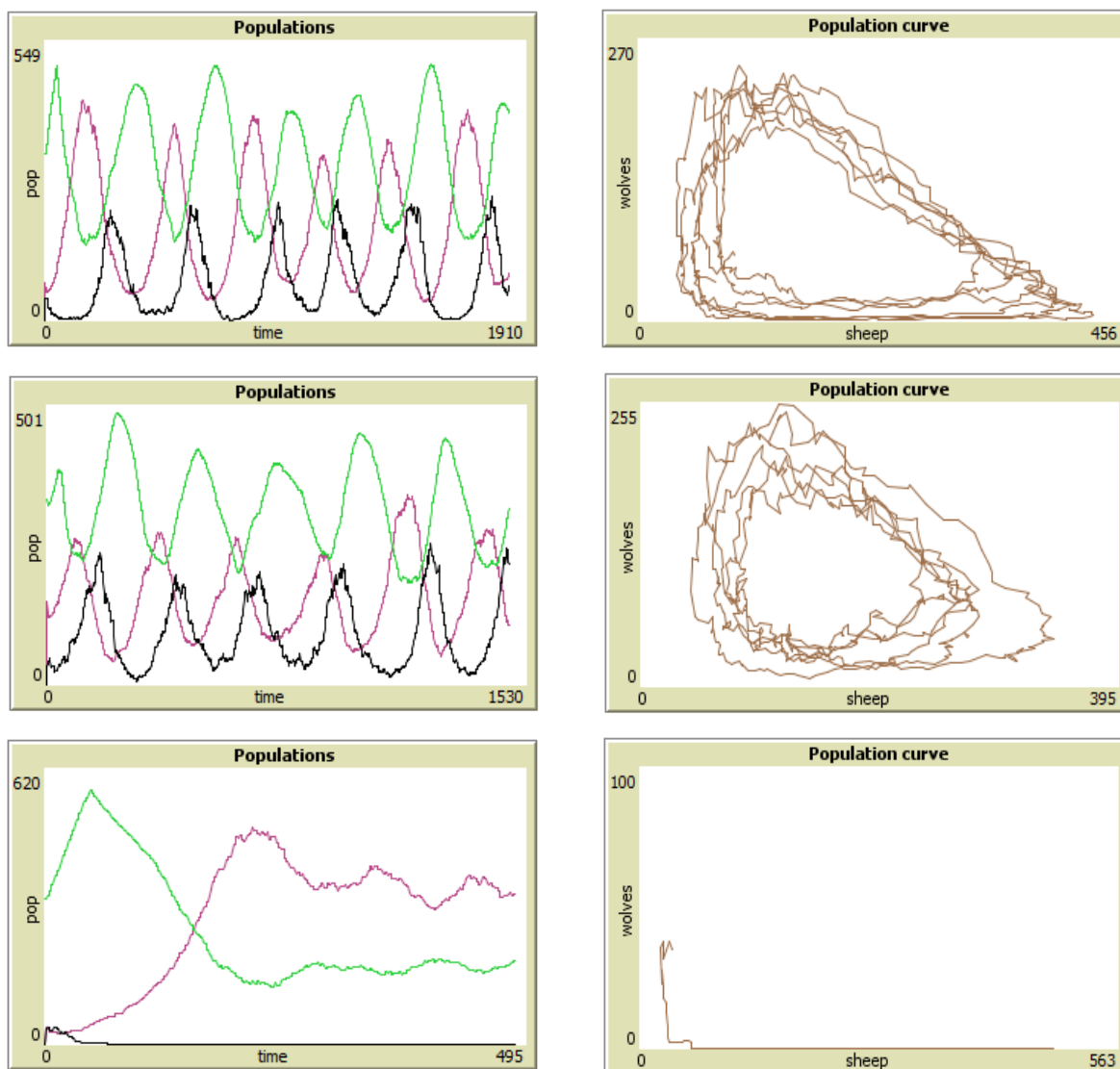
Obr. 21: Analýza citlivosti pri zmene reprodukcie oviec

Obr. 22 zobrazuje priebehy grafov pri zmene reprodukcie vlkov z hodnoty 12 na 16. Došlo k úhynu populácie vlkov, pretože ich populácia sa natoľko zvýšila, že zožrali takmer všetky ovce. Keďže je oviec málo, vlci strácajú viac energie a hynú. Ďalej sa teda vykresľuje len krivka populácie oviec a množstva trávy. Znížením hodnoty parametra na hodnotu 6 došlo k zachovaniu takmer rovnovážneho stavu. Píky boli menej pravidelné, nedošlo k úhynu žiadnej populácie.



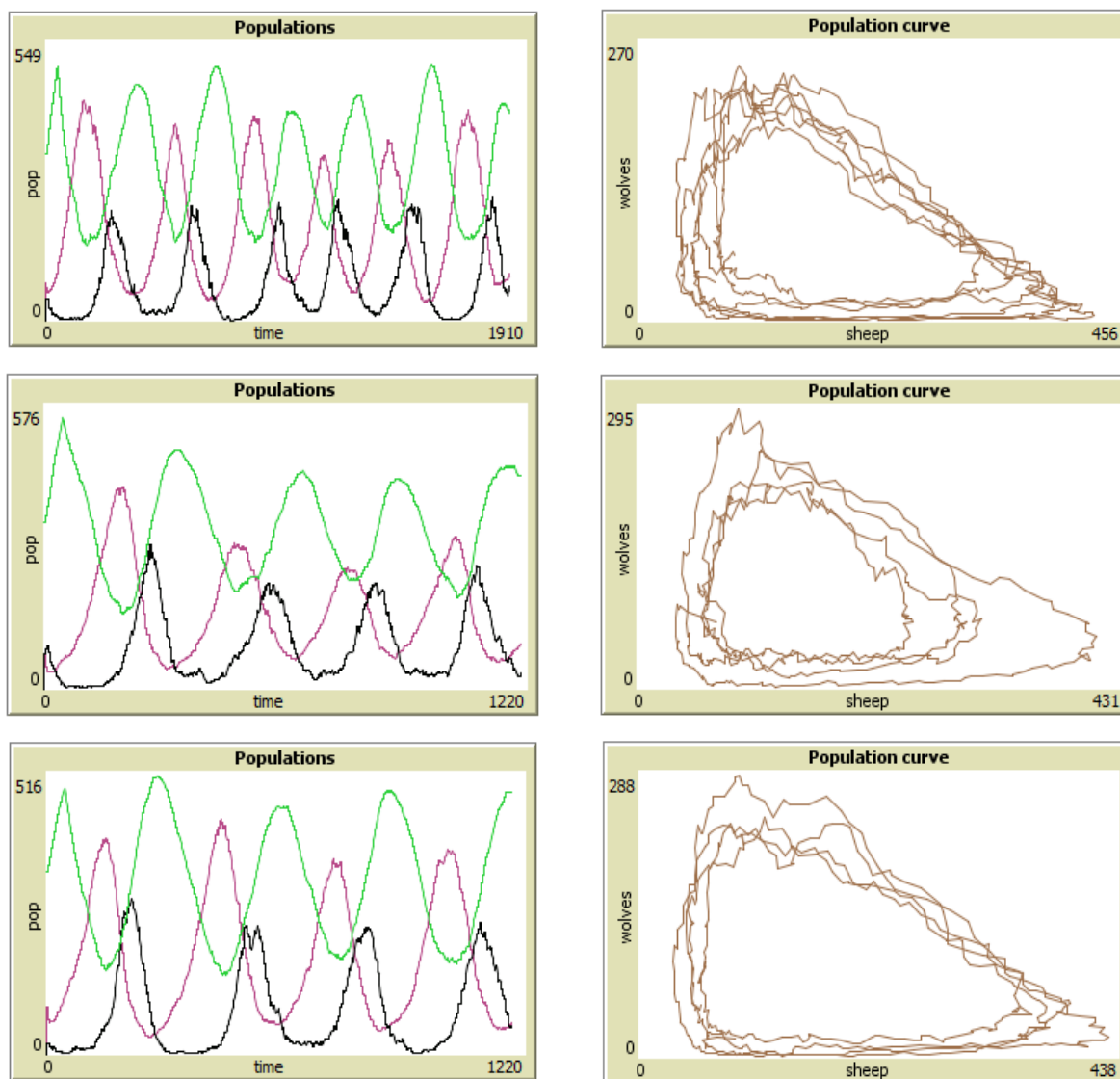
Obr. 22: Analýza citlivosti pri zmene reprodukcie vlkov

Citlivosť na zmenu počiatočného množstva oviec ukazuje Obr. 23 z hodnoty 100 na hodnotu 200. Vplyvom zväčšenia parametra dochádza k rýchlejšiemu nárastu populácie vlkov. Znížením hodnoty parametra došlo na začiatku k tomu, že populácia vlkov mierne prekročila populáciu oviec, no nakoniec vlci vyhynuli pretože nemali dostatok oviec na ďalšie rozmnožovanie.



Obr. 23: Analýza citlivosti na zmenu počiatočného množstva oviec

Pri zmene počiatočného množstva populácie vlkov (Obr. 24) z hodnoty 35 na 60 došlo spočiatku k prudkému nárastu populácie vlkov, pretože zožrali takmer všetky ovce, čiže populácia oviec výrazne klesla. Po čase sa však systému uštaloval a osciloval okolo stacionárneho bodu. Znížením parametra na hodnotu 15 na začiatku množstvo vlkov neprekročilo množstvo oviec, vlci takmer vyhynuli, no systém sa nakoniec ustálil .



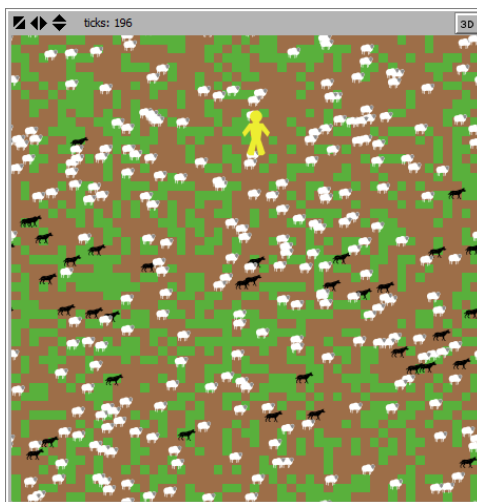
Obr. 24: Analýza citlivosti na zmenu počiatočného množstva vlkov

5.2 Externý zásah v systéme predátor – korisť – potrava koristi

Model predátor – korisť – potrava koristi sme rozšírili o externé zásahy predstavujúce vylovenie predátora a ochorenie koristi.

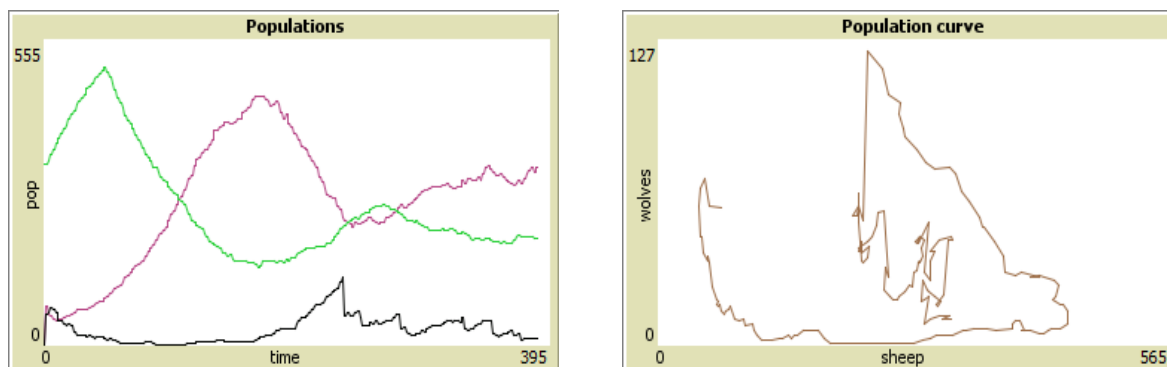
Na nasledujúcom obrázku je znázornený „svet“ v prostredí NetLogo, v ktorom medzi sebou interagujú ovce, vlci, potrava oviec a poľovník znázornený žltou postavičkou. Práve on predstavuje externý zásah do systému. Poľovník má nasledujúce vlastnosti: Zasiahne do

systemu v čase, keď je počet vlkov rovný alebo väčší ako 120 a to tak, že „vystrieľa“ všetkých vlkov vo svojom definovanom okolí. Ak je počet vlkov menší alebo rovný 5, odíde.



Obr. 25: Externý zásah do systému predstavujúci vylovenie časti populácie predátora

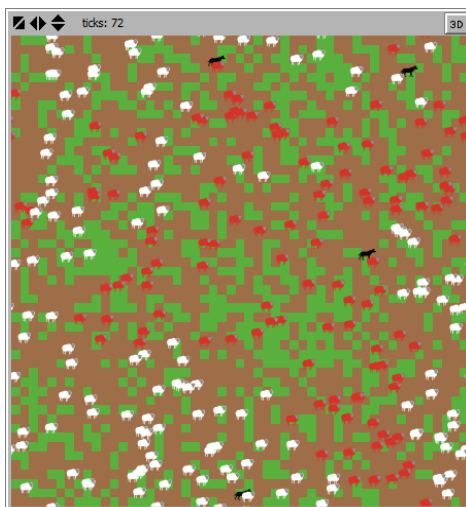
Populačný graf a populačná krivka pre východiskové nastavenie parametrov sú znázornené na nasledujúcom obrázku. Z grafov vidno postupné znižovanie počtu vlkov zapríčinené zásahom poľovníka do systému a následné zvyšovanie populácie oviec a zníženie množstva trávy. Po skončení externého zásahu sa systém po určitom čase opäť ustáli.



Obr. 26: Populačný graf a populačná krivka s čiastočným vylovením koristi

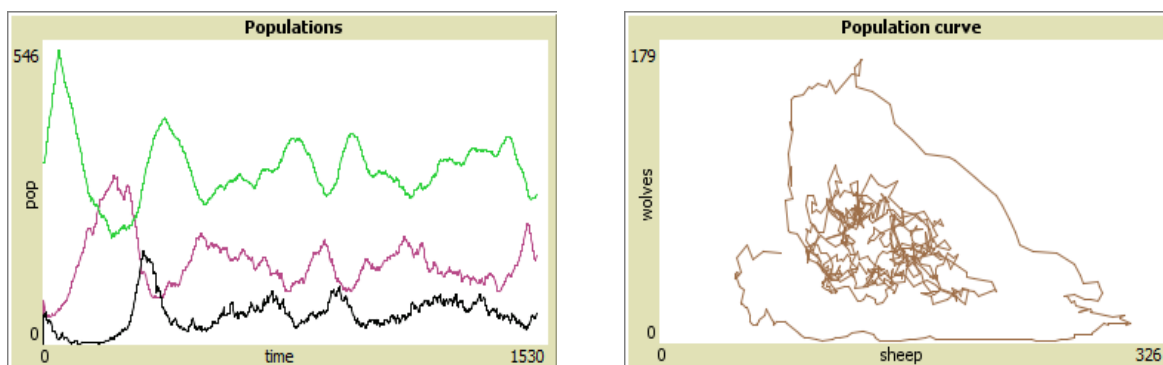
Ďalším externým zásahom je ochorenie (epidémia) oviec (Obr. 27). Choré ovce sú znázornené červenou farbou. Epidémia sa šíri zo stredu „sveta“, resp. každá ovca, ktorá sa dostane do blízkosti tzv. ohniska epidémie, ochorie. Každých 5 sekúnd sa znižuje jej energia o 3 a sfarbí sa načerveno. Ak je energia rovná (alebo menšia) nule, ovca hynie. V modeli je zabezpečené aj šírenie epidémie, resp. nákaza oviec medzi sebou. Každá ovca má definované okolie, do ktorého keď sa dostane iná ovca, nakazí sa. Opäť sa to prejaví znížením energie

a sfarbením načerveno. Ovce sa však môžu aj uzdravovať, a to tak, že ak je ich energia väčšia alebo rovná 8, sfarbia sa dobiela, čo znamená, že sú zdravé.



Obr. 27: Externý zásah predstavujúci ochorenie oviec

Populačný graf a populačná krivka pre východiskové nastavenie parametrov sú znázornené na nasledujúcom obrázku. Vplyvom epidémie sa rýchlejšie vyrovnáva počet jedincov v jednotlivých populáciách, t.j. píky a oscilácie sú menšie ako v pôvodnom modeli bez externého zásahu. Napriek tomu vykazuje náš model relatívnu odolnosť voči externému zásahu typu epidémie a po jej odoznení sa ustáli.



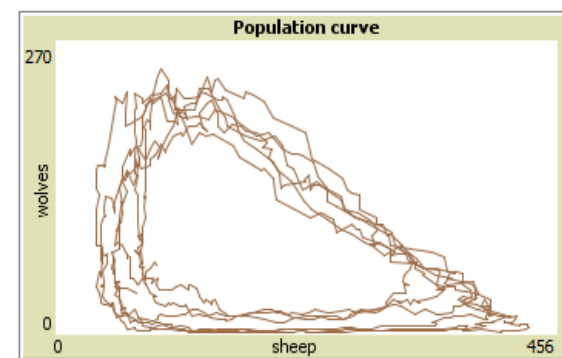
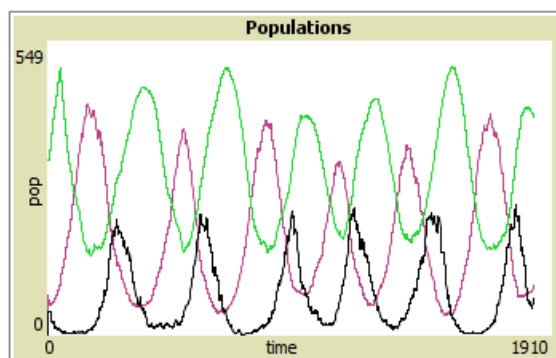
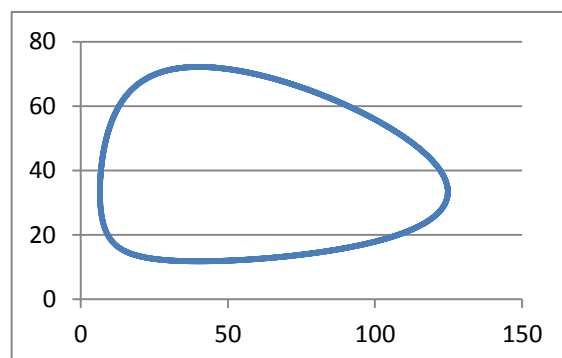
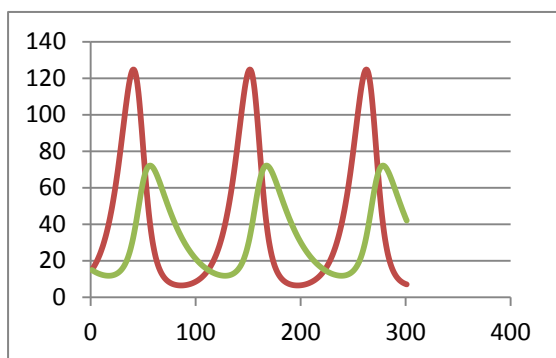
Obr. 28: Populačný graf a populačná krivka s epidémiou oviec

5.3 Porovnanie modelov

V tejto kapitole porovnávame riešenie systému nelineárnych diferenciálnych rovníc predstavujúci Lotkov – Volterrov model pomocou numerických metód s ABM modelom. Základným rozdielom medzi týmito dvoma modelmi je to, že v prvom prípade ide o spojitý model a v druhom prípade ide o diskretný model zahrňujúci prvok náhody. V prípade ABM modelu sme analyzovali trojdruhový model, tento ale pri nastavení veľkosti populácie predátora na nulovú hodnotu korešponduje s dvojduhovým modelom.

Najprv sme v kapitole 4.2 riešili Lotkov – Volterrov model použitím prvej modifikovanej Eulerovej metódy. Zvolili sme si parametre a, b, c, p a na základe definovaných vzťahov sme v Exceli vypočítali zmeny populácie predátora a koristi v čase. Následne sme vykreslili populačný graf, v ktorom možno pozorovať pravidelné píky s takmer rovnakou výškou predstavujúce jednotlivé populácie. Perióda medzi jednotlivými cyklami je tiež pravidelná, s časom sa pre obe populácie nemení. Priebeh grafu sa mení s výraznejšou zmenou ktoréhokoľvek parametra, no píky a oscilácie si zachovávajú pravidelnosť a nemení sa periodický charakter riešenia.

Pri ABM modeli v prostredí NetLogo sme sa snažili nastaviť parametre tak, aby čo najlepšie odrážali správanie reálneho systému. V populačnom grafe a populačnej krivke je možné pozorovať nepravidelné píky a oscilácie. Takisto sa mení často aj perióda medzi cyklami. Na výsledky má aj tu značný vplyv zmena čo i len jedného z parametrov. Priebeh grafu pri výraznejšej zmene parametra môže byť teda úplne iný aký bol pri nastavení východiskových parametrov. Významnú úlohu tu však zohráva okrem parametrov aj prvok náhodnosti zahrnutý v modeli. V ABM modeli sme na rozdiel od riešenia Lotkovho – Volterrovho modelu pomocou numerickej metódy, pracovali s viacerými parametrami, ktoré mali značný vplyv na výsledky. ABM model vykazuje najväčšiu citlivosť na nasledovné parametre: čas dorastania trávy (reprodukčná schopnosť potravy koristi), energia vlkov získaná zožratím ovce (koeficient predácie predátora), energia oviec získaná z trávy (koeficient predácie koristi vzhľadom k potrave koristi). Citlivosť je vysoká až do tej miery, že pri veľkej zmene týchto parametrov dochádza k zmene charakteru riešenia, model stráca stabilitu a dochádza k vyhynutiu niektorej populácie. Model je však stabilný vzhľadom na zmenu ostatných parametrov včítane počiatočných podmienok, t.j. počiatočných veľkostí populácií. Na nasledujúcom obrázku je populačný graf a populačná krivka pre oba typy modelov.



Obr. 29: Populačné grafy a populačné krivky pre oba typy modelov

6 Záver

V práci sme sa snažili zhrnúť základné pojmy, postupy a metódy modelovania komplexných systémov. V našom prípade šlo o Lotkov – Volterrov model a ABM model systému predátor – korisť. ABM model sme vytvorili pre systém rozšírený o potravu koristi.

V závere práce sme porovnali Lotkov – Volterrov model a ABM model. Základom ABM modelu sú agenti, ktorí predstavujú diskkrétne jednotky. Naš ABM model bol viac citlivejší na zmeny parametrov ako Lotkov – Volterrov model a poskytuje menej presné výsledky ako riešenie Lotkovho – Volterrovho modelu pomocou prvej modifikovanej Eulerovej metódy. V skutočnosti však ABM model oveľa lepšie korešponduje so správaním reálneho systému, ako ho poznáme zo skúsenosti. Je to aj vďaka prvku náhody, ktorý je súčasťou reálneho sveta, nie je však zahrnutý v matematickom modeli.

V práci ostali aj otvorené smery, ktorými by bolo zaujímavé zaoberať sa v budúcnosti. Napr. pri skúmaní externého zásahu do systému v podobe epidémie koristi vzniká otázka, ako interagujú dva komplexné systémy, t.j. ako ovplyvnia parametre konkrétnej epidémie (infekčnosť ochorenia, rýchlosť uzdravenia, prípadne to, či ide o smrteľnú chorobu) správanie modelu.

Zoznam použitej literatúry

1. Pelánek, R. *Modelování a simulace komplexních systémů*. Brno: Masarykova univerzita, 2011. 233 s. ISBN 978-80-210-5318-2.
2. Slovenský hydrometeorologický ústav. [online]. [cit. 4.5.2014]. Dostupné na internete: <<http://www.shmu.sk/sk/?page=473>>
3. Fabrici, I. - Šabo, M. 1991. *Matematika II*. Bratislava: STU, 1991. ISBN 80-227-0452-0, s. 136 - 212.
4. Petráš, I. *Základy automatizácie*. [online]. [cit. 10.5.2014]. Dostupné na internete: <people.tuke.sk/ivo.petras/ZA/prednasky/08_stab_PID.pdf>
5. Varga, Š. - Šabo, M. - Pospíchal, J. 2003. *Matematika III - Matematická štatistika a numerické metódy*. Bratislava: STU, 2003. ISBN 80-227-1840-8.
6. Hasík, K. *Numerické metódy*. [online]. [cit. 2.5.2014]. Dostupné na internete: <<http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/ucebni-texty/Numericke-metody/Numericke-metody.pdf>>
7. Oršanský, P. *Numerické riešenie diferenciálnych rovníc*. [online]. [cit. 5.5.2014]. Dostupné na internete: <http://fstroj.uniza.sk/kam/orsansky/pdf/numericke_riesenie_diferencialnych_rovnic.pdf>
8. Kühnová, J. *Model dravec - kořist a jejich počítačové simulace*. Diplomová práca. [online]. [cit. 6.5.2014]. Dostupné na internete: <http://is.muni.cz/th/77952/prif_m/diplomka.pdf>. 2007

Prílohy

Príloha A – súbor L-Vmodel.xls – numerické riešenie Lotkovho – Volterrovho modelu

Príloha B – súbor ABMmodel.nlogo – ABM model systému predátor – korisť