



Centro de Instrução Almirante Wandenkolk - CIAW Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA



Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Sistemas de Armas



SAB: Simulação e Controle de Artefatos Bélicos Controle Proporcional-Integral-Derivativo



Jozias **Del Rios** Cap Eng



delriosjdrvgs@fab.mil.br



(12) 98177-9921

Abril 2018

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE ARTEFATOS BÉLICOS

Controle

Proportional-**I**ntegral-**D**erivativo

Instrutor: Cap Eng Jozias **DEL RIOS**

Autor do Material: Jozias **DEL RIOS** – rev. 14.dez.2017

TÓPICOS

1. Sistemas de Primeira Ordem
2. Sistemas de Segunda Ordem
3. Lei de Controle **P**roportional
4. Comportamento Dinâmico
5. Lei de Controle **PI**
6. Lei de Controle **PD**
7. Lei de Controle **PID**
8. Controladores Digitais
9. Múltiplas Malhas
10. Aplicação: controle de rolamento do Exocet

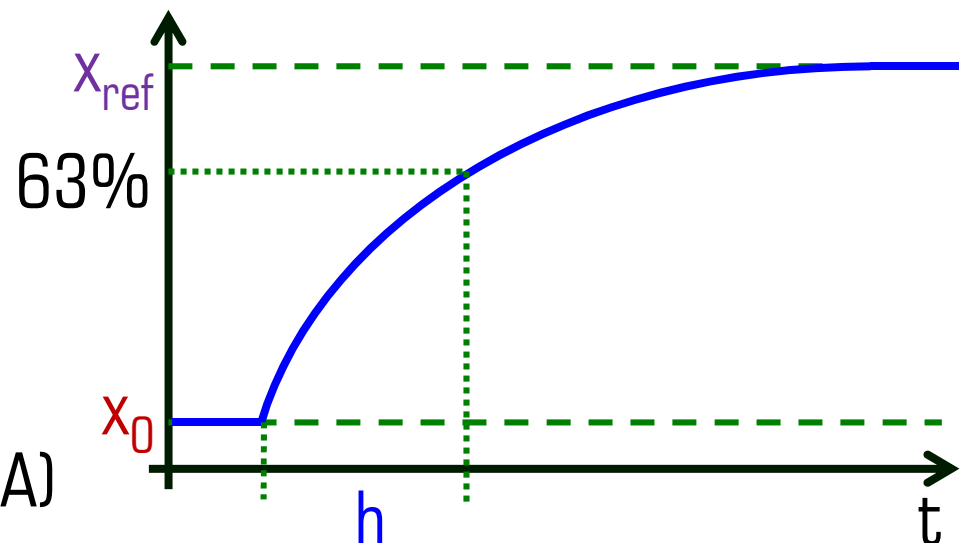
SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Entrada “degrau”:

- Valor anterior x_0
- Constante de tempo h
- Mudança repentina para x_{ref}
- Amortecido.
- Sem overshoot.
- Sem oscilação.
- Exemplos:
 - Capacitor elétrico ($h=R C$)
 - Transferência de calor ($h=k A$)

$$x(t) = x_{ref} + (x_0 - x_{ref}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{h}\right)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{h} \cdot (x_{ref} - x(t))$$



SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM – Circuito RC

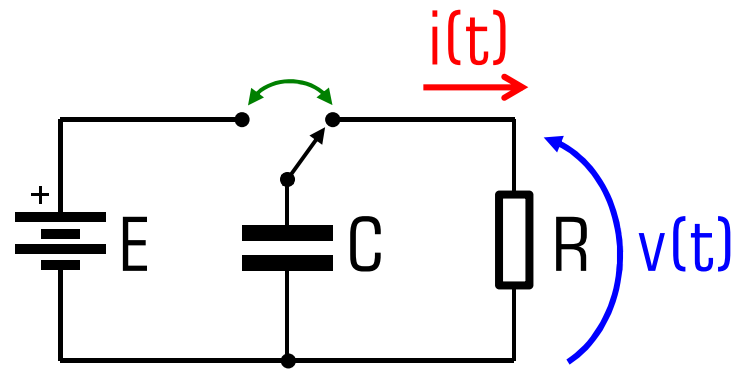
Capacitor: $Q(t) = C v(t)$ $\xrightarrow{\text{integrando}}$ $i(t) = C \dot{v}(t) + i_0$

Inicial: $v_0 = E = R i_0$ $\xrightarrow[\text{isolando}]{\text{substituindo}}$ $\dot{v}(t) = \frac{R i(t) - E}{R C}$

Resistor: $v(t) = -R i(t)$ $\xrightarrow{\text{substituindo}}$ $\dot{v}(t) = \frac{1}{R C} (E - v(t))$

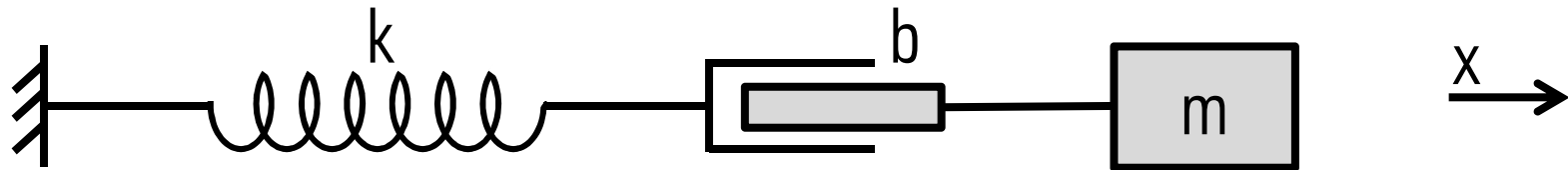
Descarregamento:

$$v(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{R C}\right)$$



SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

PROBLEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



Equação Diferencial: $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = 0$

Solução: $x(t) = A \cdot \exp(-\zeta \omega_n t) \cdot \cos(\omega_d t + \varphi)$

Coef. de amortecimento: $\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$

Freq. natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Freq. amortecida: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

Condições iniciais:

$$\varphi = -\text{atan}\left(\frac{\zeta \omega_n x_0 + v_0}{x_0 \omega_d}\right)$$

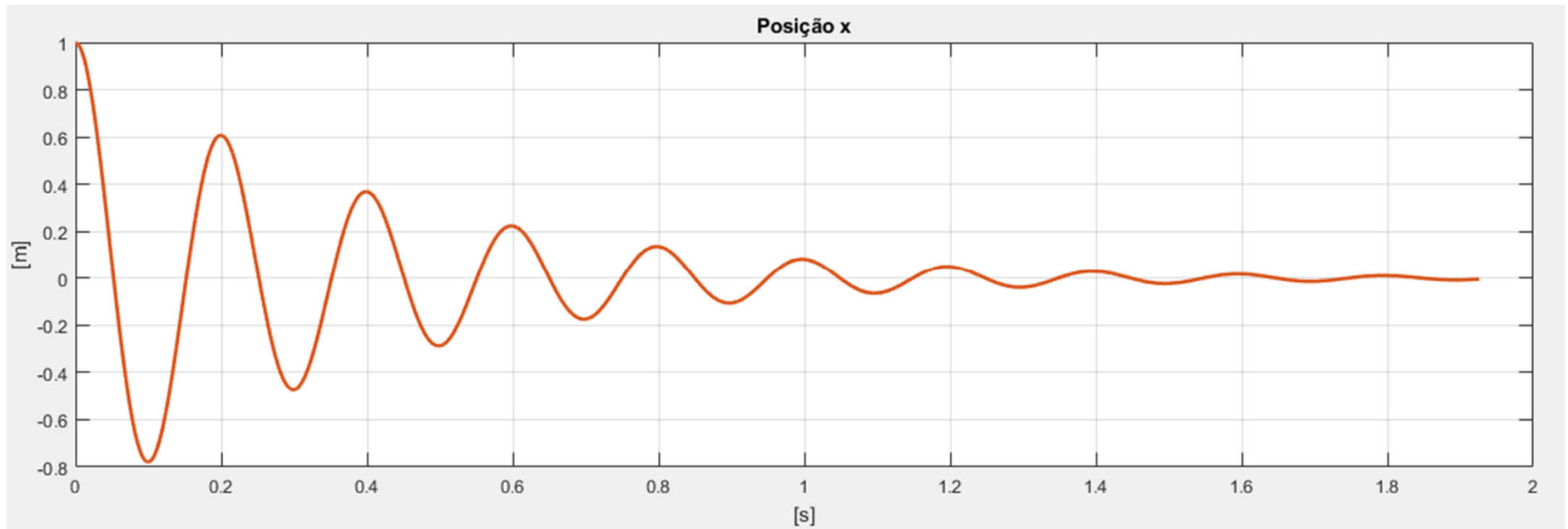
$$A = x_0 \sec \varphi$$

$$\ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

PROBLEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



$$\begin{aligned}m &= 1 \text{ kg} \\k &= 1000 \text{ N/m} \\b &= 5 \text{ kg/s}\end{aligned}$$

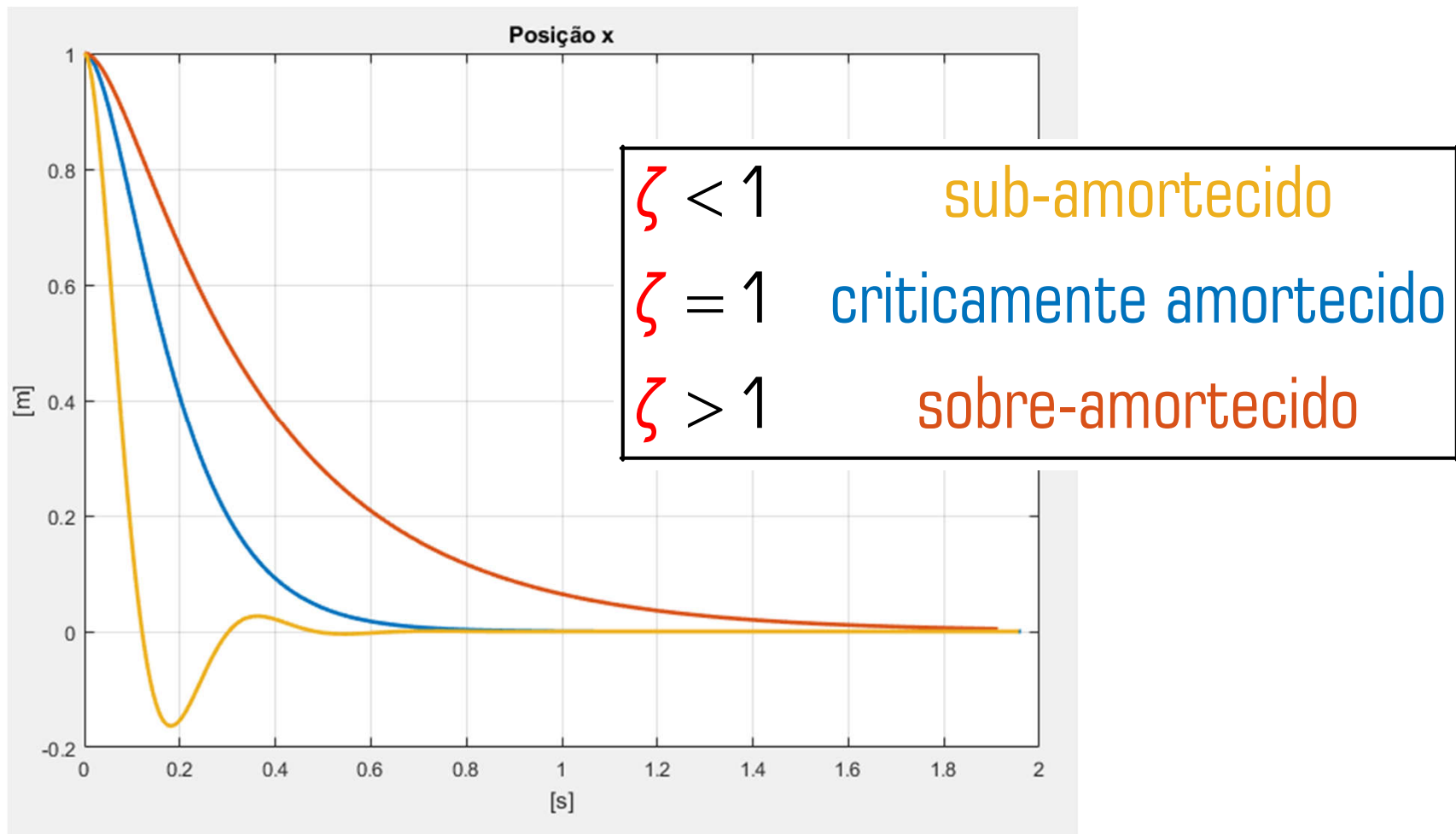
$$\begin{aligned}x_0 &= 1 \text{ m} \\v_0 &= 0 \text{ m/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta &\cong 0,0791 \\ \omega_n &\cong 31,62 \text{ rad/s} \\ \omega_d &\cong 31,52 \text{ rad/s} \\ A &\cong 1,0031 \text{ m} \\ \varphi &\cong -0,5^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega_n \zeta) &\cong 0,40 \text{ s} \\ 2\pi/\omega_d &\cong 0,199 \text{ s}\end{aligned}$$

SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO

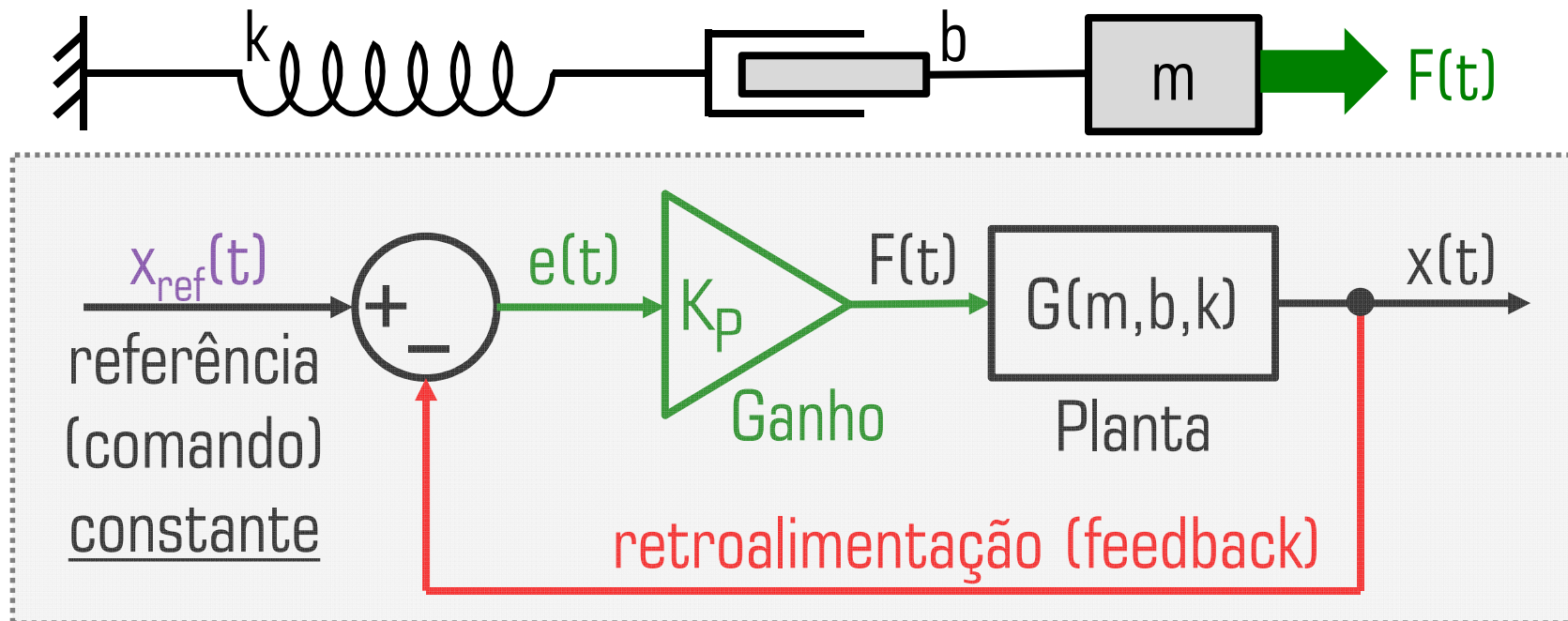


LEI DE CONTROLE **PROPORCIONAL**

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

LEI DE CONTROLE PROPORCIONAL



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = K_p \cdot e(t) = K_p \cdot (x_{ref} - x)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + K_p)x = K_p x_{ref}$$

$$\text{Solução geral: } x(t) = A' \cdot \exp(-\zeta' \omega_n' t) \cdot \cos(\omega_d' t + \varphi') + \frac{K_p}{k + K_p} x_{ref}$$

LEI DE CONTROLE PROPORCIONAL

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + K_p)x = K_p x_{\text{ref}}$$

$$\text{Solução geral: } x(t) = A' \cdot \exp(-\zeta' \omega'_n t) \cdot \cos(\omega'_d t + \varphi') + x_\infty$$

$$\zeta' = \frac{b}{2\sqrt{(k + K_p)m}} \quad \omega'_n = \sqrt{\frac{(k + K_p)}{m}} \quad \omega'_d = \omega'_n \sqrt{1 - \zeta'^2}$$

Valor em Regime, após Transientes: $x_\infty = \frac{K_p}{k + K_p} x_{\text{ref}}$

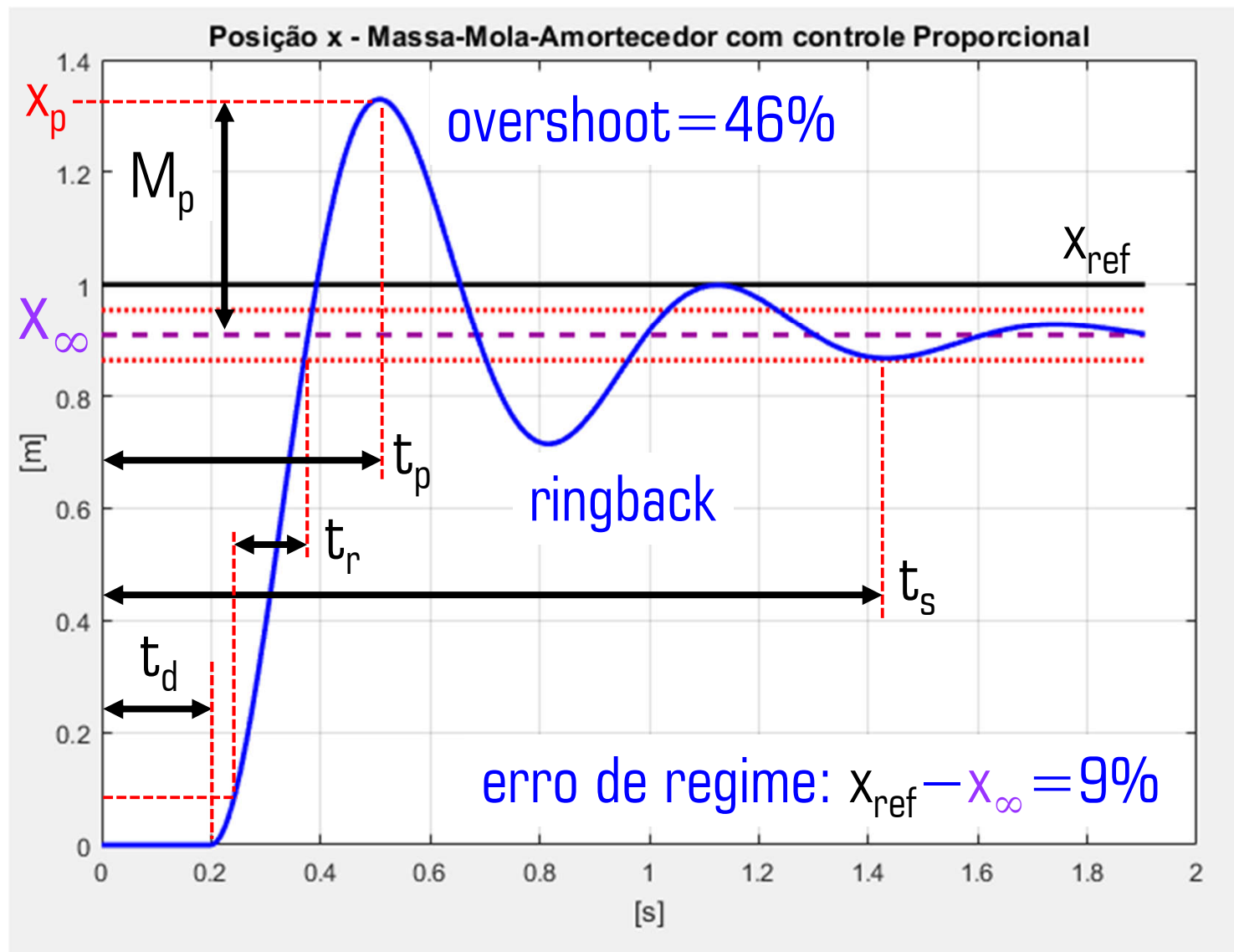
$$A' = \frac{1}{\cos \varphi'} (x_0 - x_\infty) \quad \varphi' = \arctan \left(\frac{1}{\omega'_d} \frac{v_0}{(x_\infty - x_0)} - \frac{\zeta'}{\sqrt{1 - \zeta'^2}} \right)$$

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

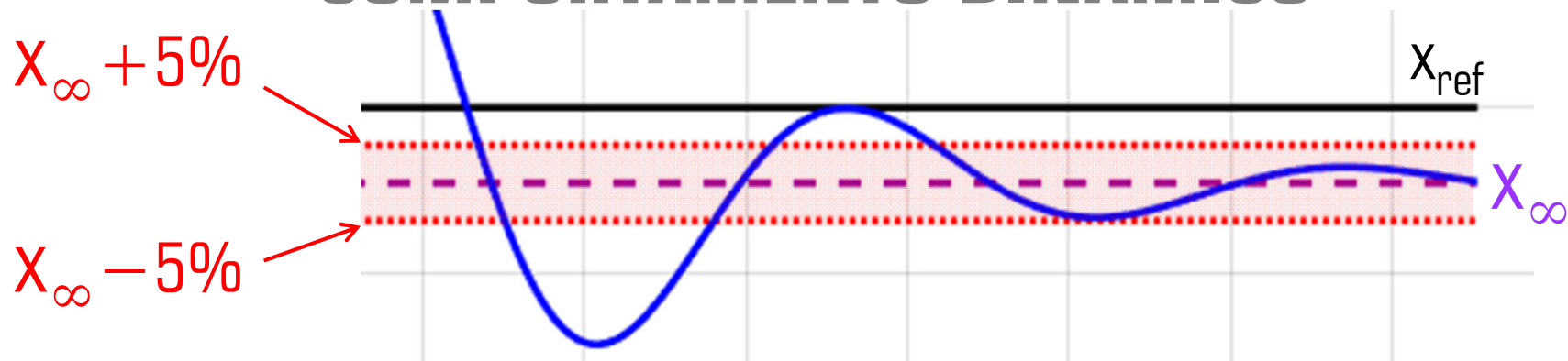
Controle Proporcional-Integral-Derivativo

$$\begin{cases} m = 1 \text{ kg} \\ b = 5 \text{ kg/s} \\ k = 10 \text{ N/m} \\ x_0 = 0 \text{ m} \\ v_0 = 0 \text{ m/s} \\ x_{\text{ref}} = 1,0 \text{ m} \\ t_d = 0,20 \text{ s} \\ K_p = 100 \text{ N/m} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{\infty} = 0,91 \text{ m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0,51 \text{ s} \\ t_r = 0,12 \text{ s} \\ t_s = 1,23 \text{ s} \end{cases}$$

DINÂMICA – CONTROLE PROPORCIONAL



COMPORTAMENTO DINÂMICO



x_{∞} = valor final médio em regime (steady-state)

M_p = sobrepassagem (overshoot) = $(x_p - x_{\infty})/x_{\infty}$

e_{ss} = erro de regime (steady-state error) = $x_{ref} - x_{\infty}$

t_s = tempo de estabilização (settling-time) = faixa $\pm 5\%$ de x_{∞}

t_d = tempo de atraso (delay, dead time)

t_p = tempo para o pico (peak-time)

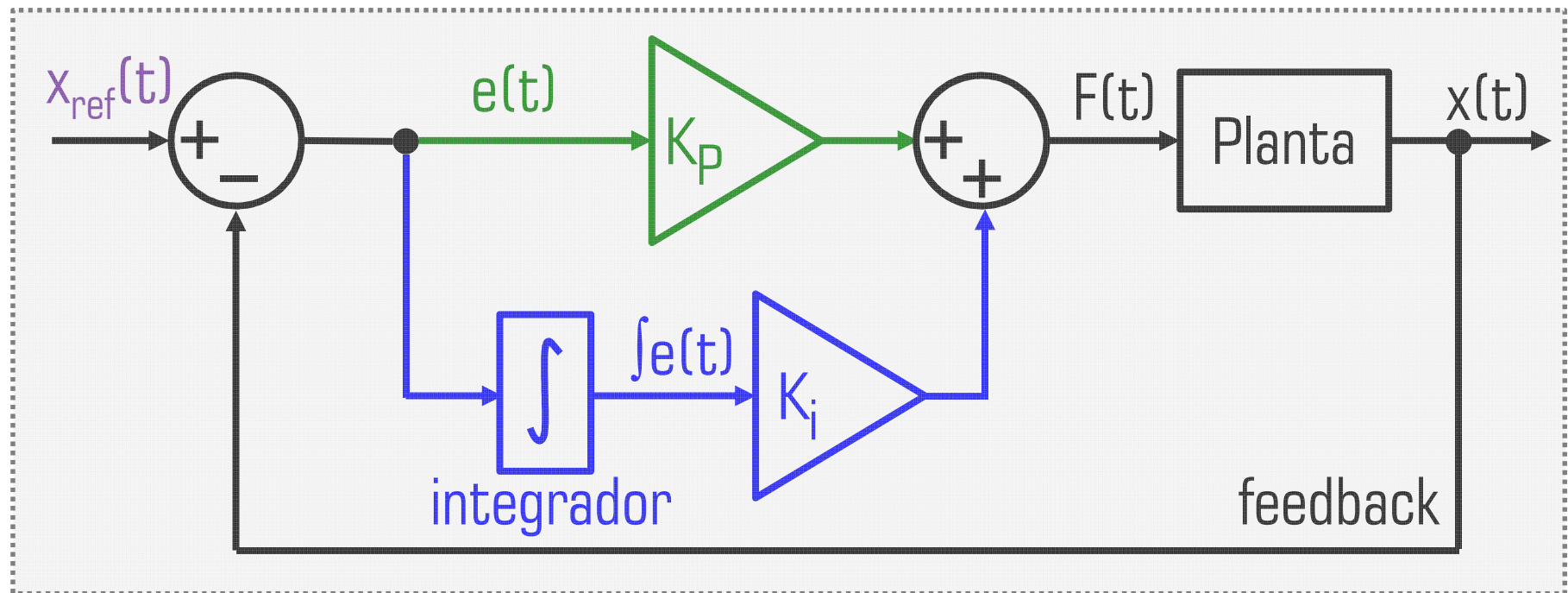
t_r = tempo de subida de 10% até 90% (rise-time)

LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

INTEGRAL

CONTROLE PROPORCIONAL-INTEGRAL



$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt$$

$$e_i(t) = \int e(t) dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{e}_i(t) = e(t)} \quad (\text{estado extra})$$

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = K_p e(t) + K_i e_i(t)$$

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

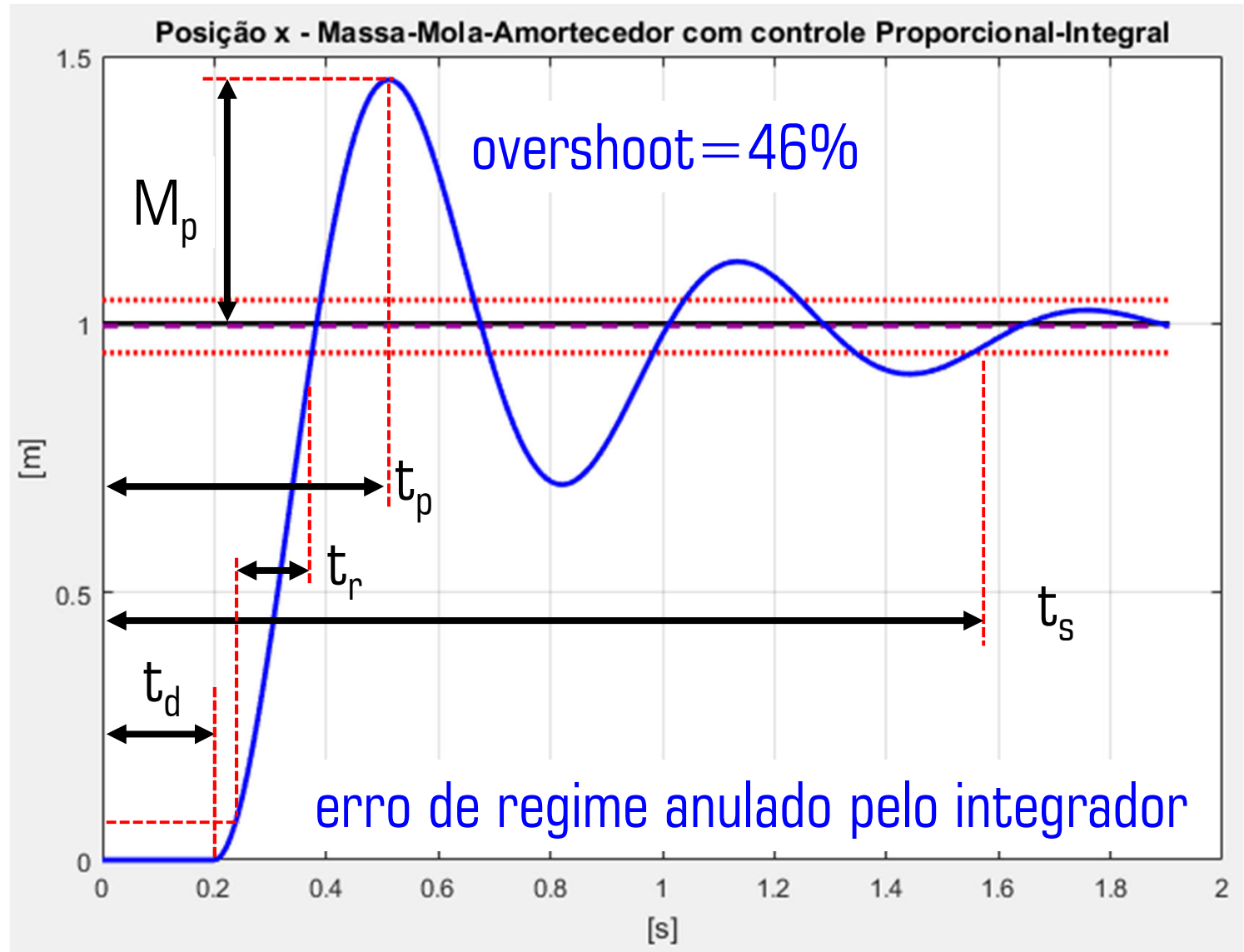
COMPORTAMENTO – CONTROLE PI

$$K_p = 100 \text{ N/m}$$

$$\begin{cases} x_{\infty} = 0,91 \text{ m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0,51 \text{ s} \\ t_r = 0,12 \text{ s} \\ t_s = 1,23 \text{ s} \end{cases}$$

$$K_i = 100 \text{ N/m.s}$$

$$\begin{cases} x_{\infty} = 0,995 \text{ m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0,51 \text{ s} \\ t_r = 0,12 \text{ s} \\ t_s = 1,55 \text{ s} \end{cases} \nearrow$$

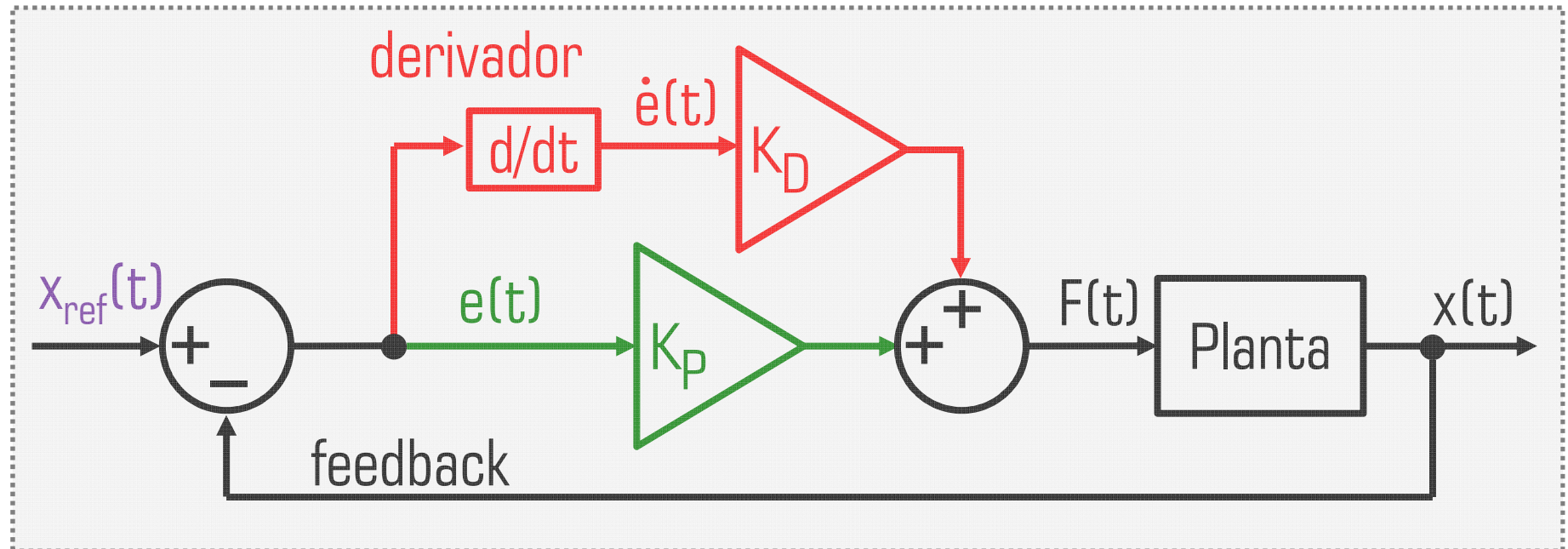


LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

DERIVATIVO

CONTROLE **PD**: Proporcional-Derivativo



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = K_P e(t) + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

$$e(t) = x_{ref} - x(t) \Rightarrow \dot{e}(t) = -\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)x = K_P x_{ref}$$

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

LEI DE CONTROLE PD

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)x = K_P x_{\text{ref}}$$

$$\text{Solução geral: } x(t) = A'' \cdot \exp(-\zeta'' \omega_n'' t) \cdot \cos(\omega_d'' t + \varphi'') + x_\infty$$

$$\zeta'' = \frac{b + K_D}{2\sqrt{(k + K_P)m}} \quad \omega_n'' = \sqrt{\frac{(k + K_P)}{m}} \quad \omega_d'' = \omega_n'' \sqrt{1 - \zeta''^2}$$

Valor em Regime, após Transientes: $x_\infty = \frac{K_P}{k + K_P} x_{\text{ref}}$

$$A'' = \frac{1}{\cos \varphi''} (x_0 - x_\infty) \quad \varphi'' = \arctan \left(\frac{1}{\omega_d''} \frac{v_0}{(x_\infty - x_0)} - \frac{\zeta''}{\sqrt{1 - \zeta''^2}} \right)$$

LEI DE CONTROLE

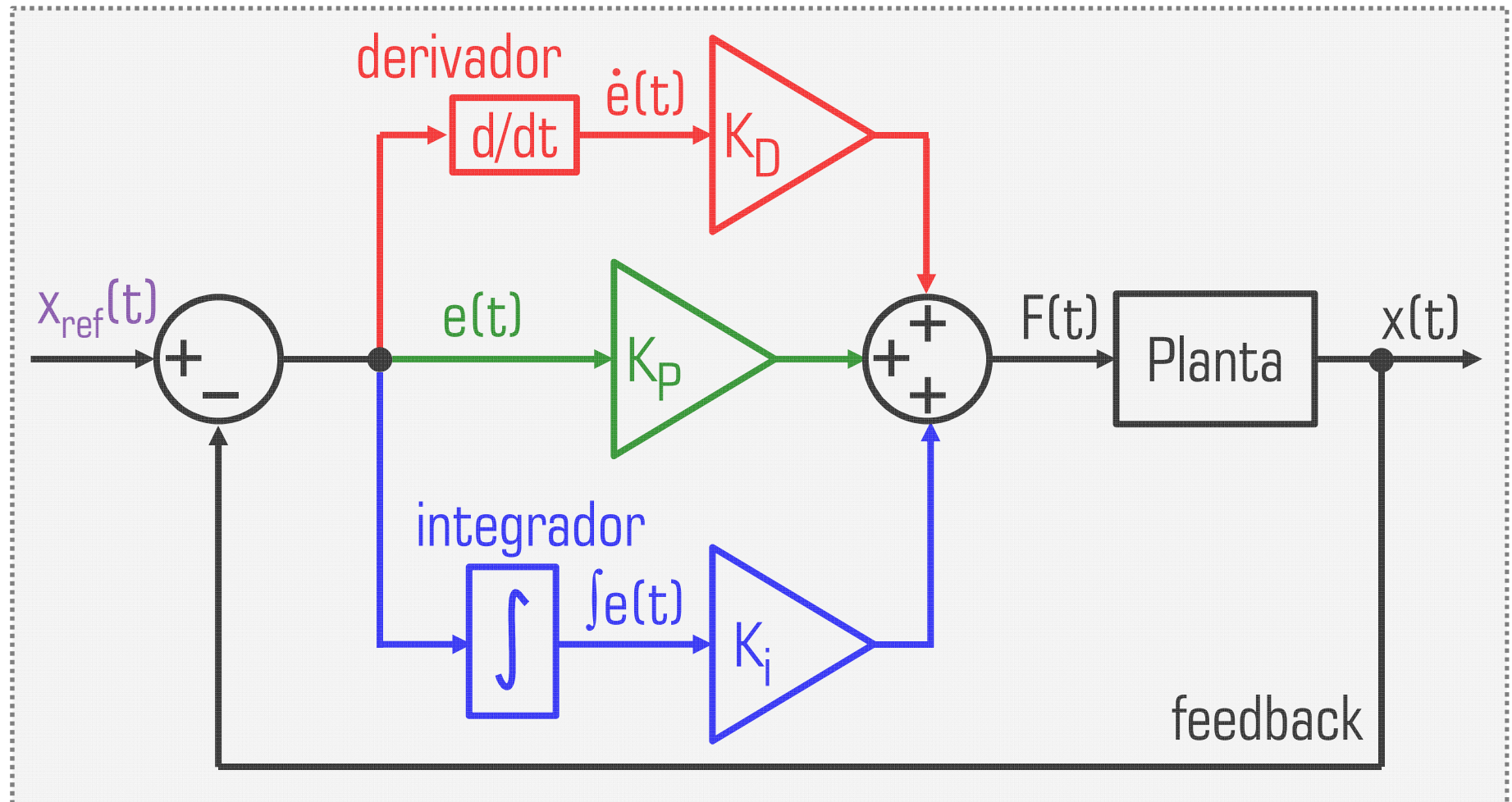
PROPORCIONAL

INTEGRAL

DERIVATIVO

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos
Controle Proporcional-Integral-Derivativo

CONTROLE **PID**: Prop Integ Deriv



Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

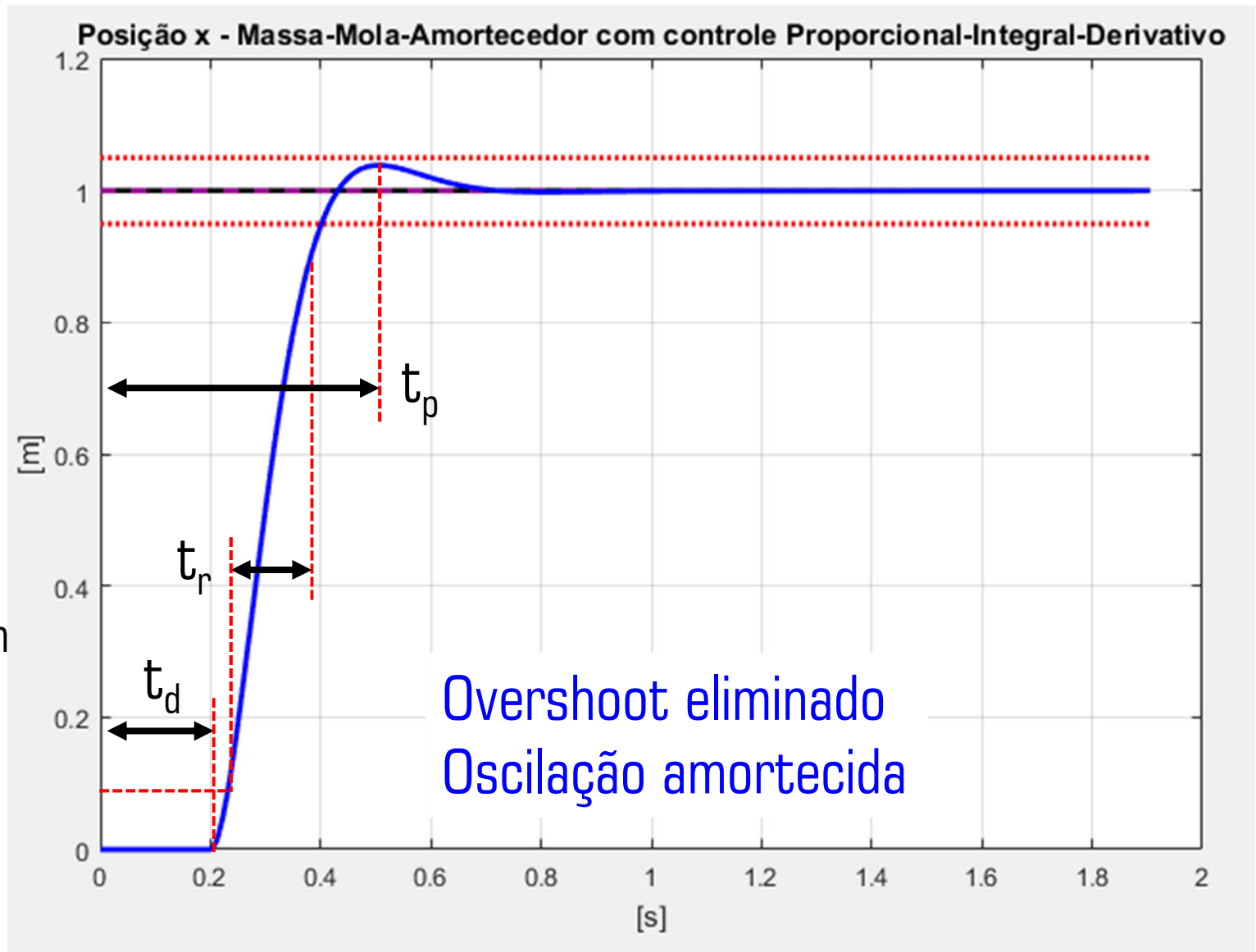
Controle Proporcional-Integral-Derivativo

COMPORTAMENTO – CONTROLE PID

$$\begin{cases} x_{\infty} = 0,995 \text{ m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0,51 \text{ s} \\ t_r = 0,12 \text{ s} \\ t_s = 1,55 \text{ s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_p = 200 \text{ N/m} \\ K_i = 100 \text{ N/m.s} \\ K_d = 15 \text{ N.s/m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\infty} = 0,9995 \text{ m} \\ M_p = 3,9\% \searrow \\ t_p = 0,50 \text{ s} \searrow \\ t_r = 0,15 \text{ s} \nearrow \end{cases}$$



Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

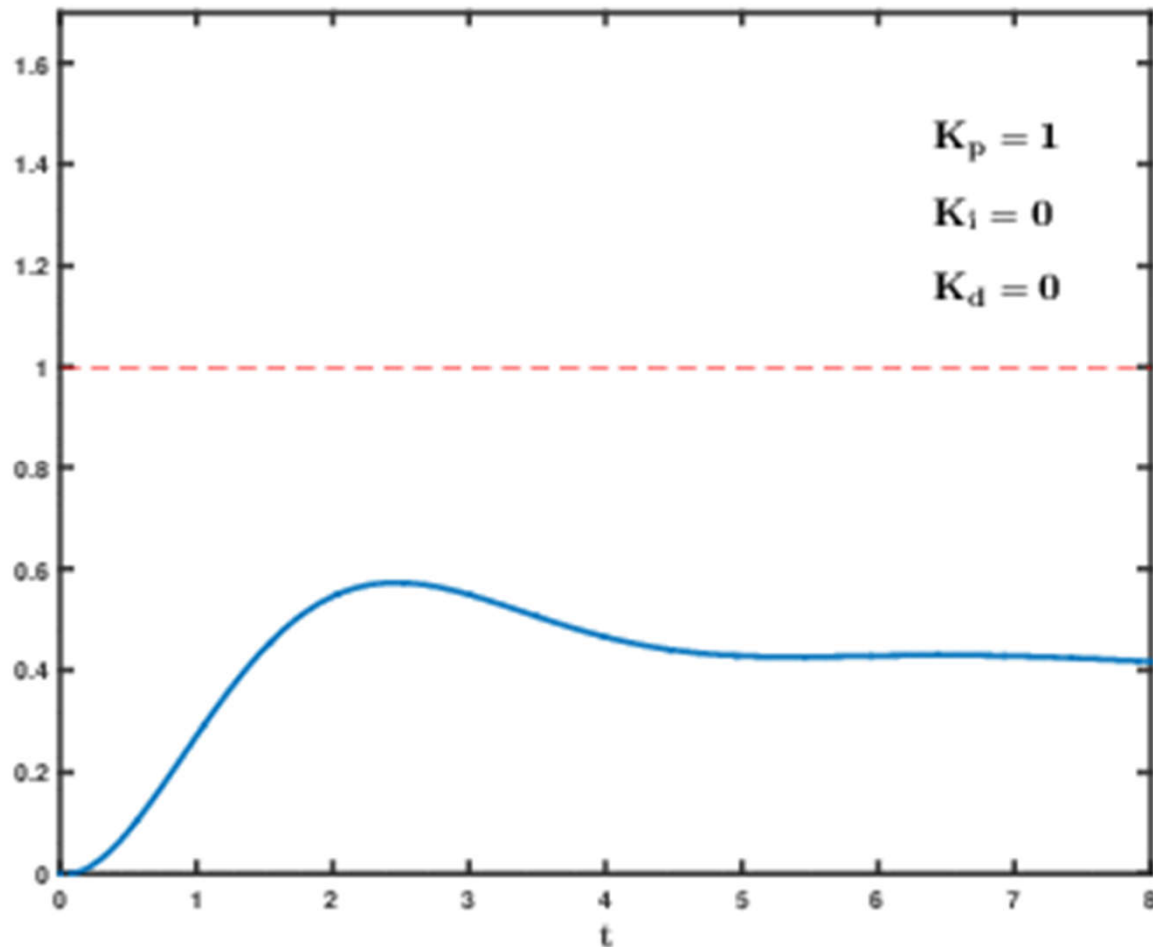
GANHOS DO CONTROLADOR PID

Ganho	Tempo de Subida	Overshoot	Tempo de Acomodação	Erro de Regime	Estabilidade
K_p	😊😊	😞😞😞	---	😊😊	😞😞
K_i	😊😊	😞😞😞	😞😞😞	😊😊😊😊	😞😞
K_d	😞	😊😊😊😊	😊😊😊😊	---	😊

Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

TUNNING CONTROLADOR PID



http://en.wikipedia.org/wiki/File:PID_Compensation_Animated.gif

CONTROLADORES DIGITAIS

Controlador Digital é discretizado no tempo.

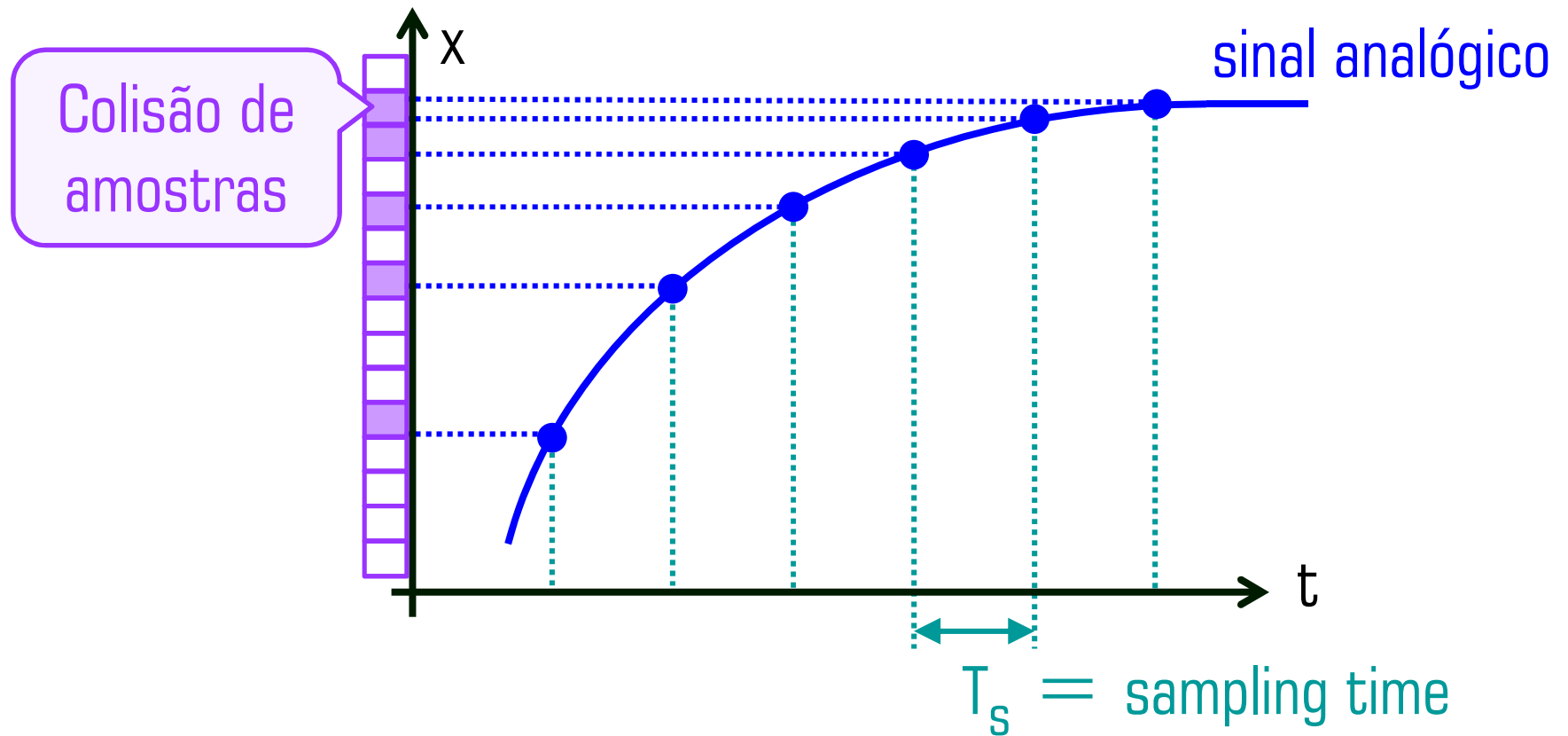
Realiza o seguinte ciclo completo a cada período fixo T_s :

- Amostragem dos sensores (encoder, girômetro, corrente, ...
 - Inserção de **erro** de quantização, bias, escala, ruído, ...
- Filtragem dos sensores: anula ruídos e ressonâncias...
- Processamento digital da Lei de Controle: **PID**, ...
- Anti-windup do integrador: saturação (clamp) do erro integrado.
- Saturação (clamp) do comando de controle (100% **PWM**).
- Piso mínimo de amplitude p/ retirar zona morta (atrito seco).
- Saída é o duty-cycle de **PWM** para o motor do atuador.

SINAL DIGITAL: DISCRETIZAÇÃO e QUANTIZAÇÃO

Discretização: Taxa de amostragem do sinal (temporal)

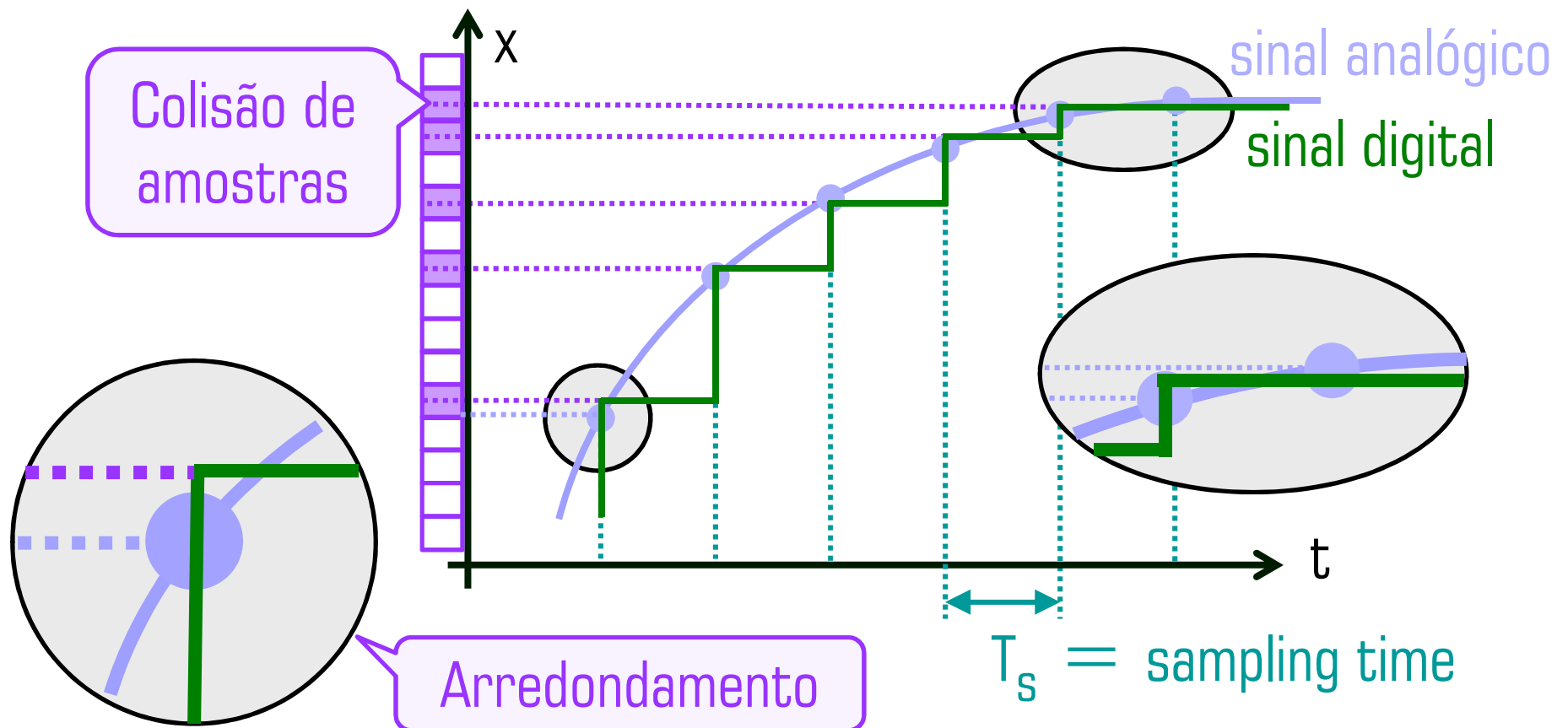
Quantização: Resolução de sensor e de atuação (amplitude)



SINAL DIGITAL: DISCRETIZAÇÃO e QUANTIZAÇÃO

Discretização: Taxa de amostragem do sinal (temporal)

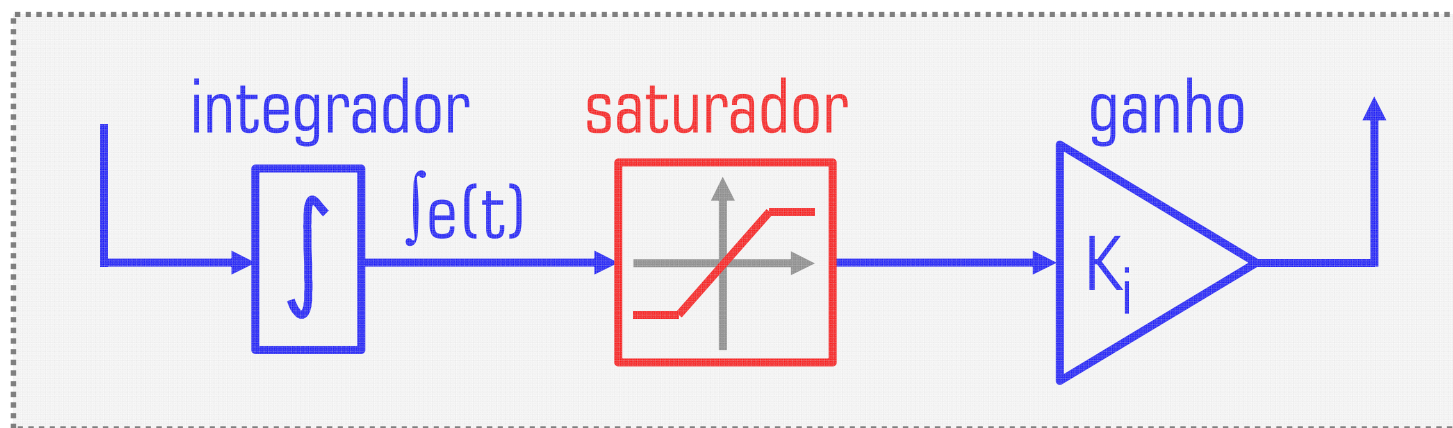
Quantização: Resolução de sensor e de atuação (amplitude)





CONTROLE PID : ANTI-WINDUP do INTEGRADOR

- Anti-windup do integrador evita que uma **grande diferença por longa duração** entre o sinal de referência e o sinal medido cause uma **ultracompensação** posterior, desestabilizando o controle.
- Ocorre tipicamente quando uma perturbação externa temporária é mais forte do que o controle consegue lidar.

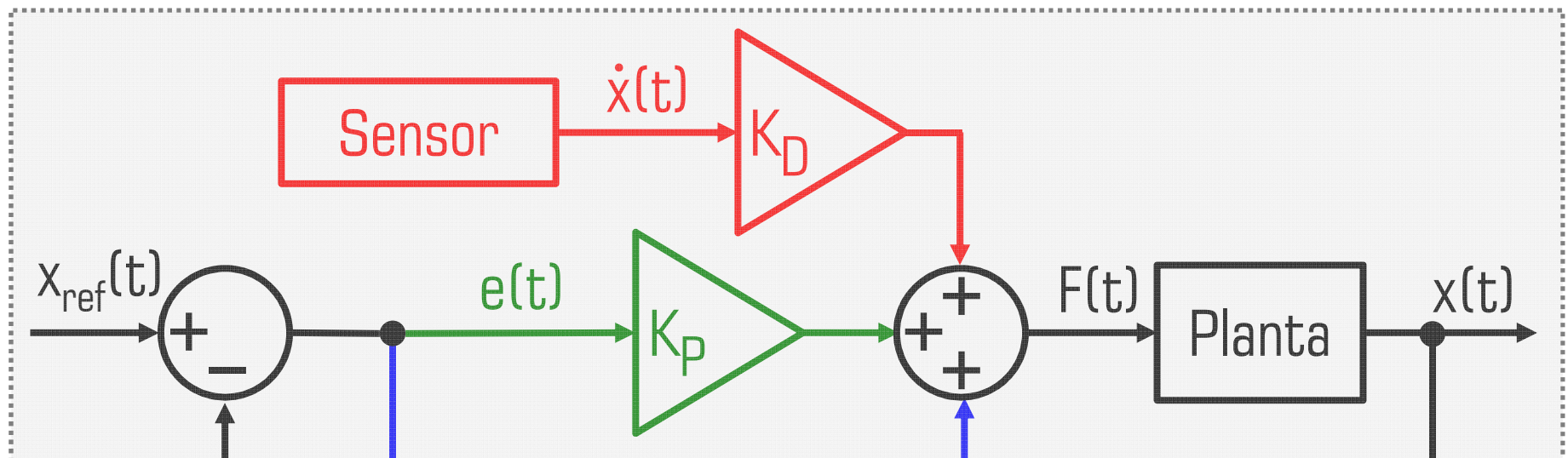


Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

TACÔMETRO / GIRÔMETRO

- Sinal derivado convém ser medido por sensor específico ao invés de ser calculado numericamente do sensor de posição.
 - Tacômetro: mede a velocidade de um eixo (Gerador DC)
 - Girômetro: mede a velocidade angular inercial.
- Sinal medido pelo sensor mede a derivada do sinal que se está controlando $x(t)$, ao invés do sinal erro $e(t)$.



Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

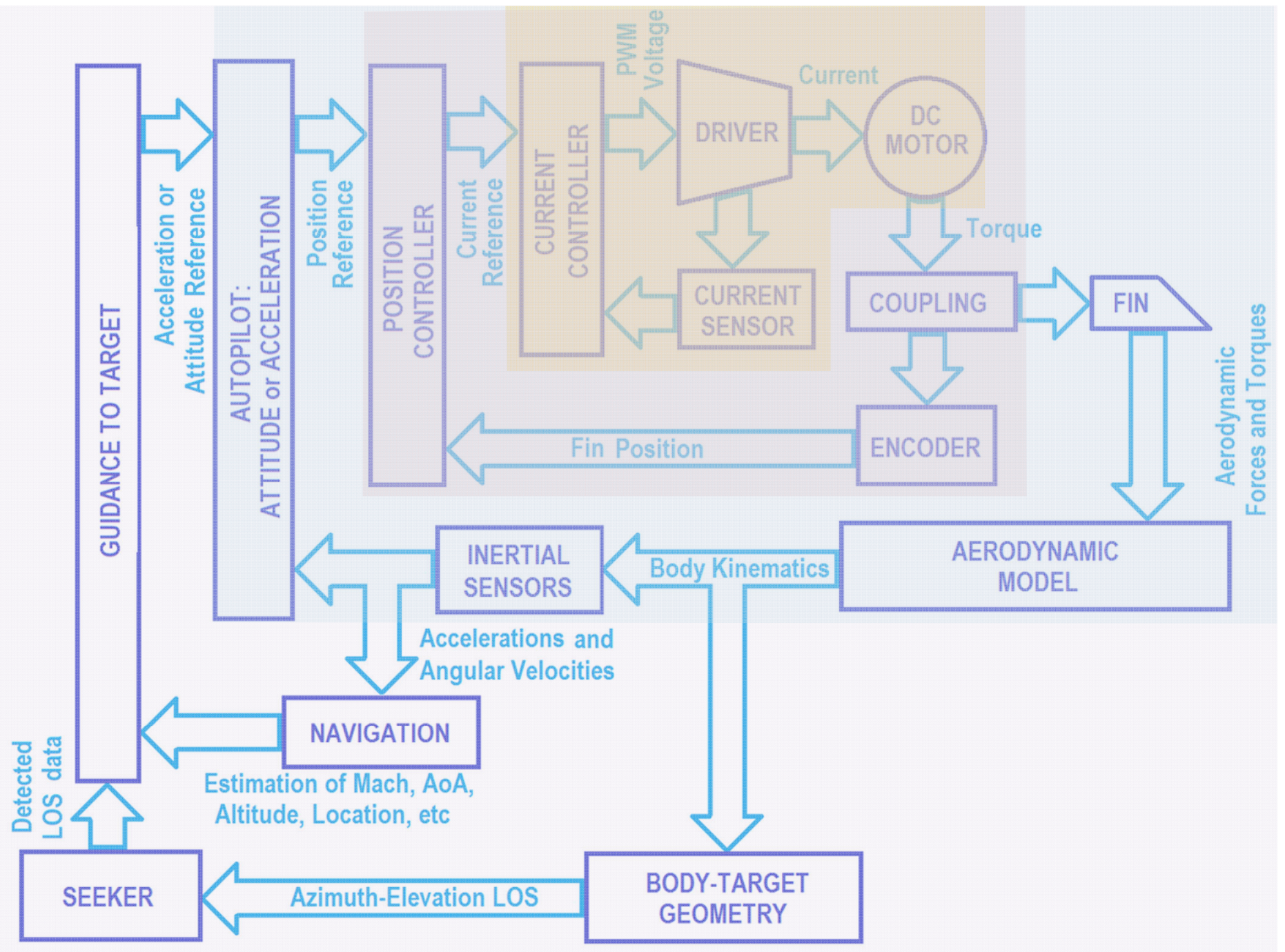
Controle Proporcional-Integral-Derivativo

LEI DE CONTROLE **PID** DISCRETIZADA

$$F(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

Discretização: $t = k \cdot T_S \Rightarrow e[k] = e(k \cdot T_S)$

$$\left\{ \begin{array}{l} F[k] = K_p e[k] + K_i e_i[k] + K_d \overbrace{T_S^{-1} (e[k] - e[k-1])}^{\text{derivada}} \\ e_i[k] = e_i[k-1] + \underbrace{\frac{1}{2} T_S (e[k] + e[k-1])}_{\text{integral (trapezoidal)}} \end{array} \right.$$



EXERCÍCIOS CONTROLE EXOCET

1. (3,0) Equacione a dinâmica do movimento em rolamento (φ) do míssil Exocet (`exocet_6dof`) com controlador **PD**.

➤ Utilize os parâmetros presentes em `exocet_roll_tune`.

➤ Use as aproximações: $\theta = q = r = 0$

➤ A partir das equações de dinâmica, obtenha:

$$(A)\ddot{\varphi} + (B + K_D)\dot{\varphi} + (C + K_P)\varphi = K_P \varphi_{\text{ref}}$$

➤ Compare com a equação da Massa/Mola/Amortecedor:

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)x = K_P x_{\text{ref}}$$

➤ Obtenha as fórmulas para m , b e k e insira no código.

→ Copie para o relatório a resolução e as fórmulas.

EXERCÍCIOS CONTROLE EXOCET

2. (2,0) Executando o código `exocet_roll_tune(Kp, Kp)`

➤ Obtenha ganhos K_p e K_D que satisfaçam:

➤ Overshoot $M_p < 15\%$.

➤ Tempo de subida $t_r < 250$ ms.

➤ Tempo de acomodação (se oscilar) $t_s < 750$ ms.

→ Copie o gráfico resultante e as saídas de texto.

➤ Dica: $m=0,065261$ $b=0,348555$ $k=0,000000$

3. (3,0) Termine o código de simulação `exocet_6dof`.

→ Apresente os gráficos e as saídas de texto.