Centro de Instrução Almirante Wandenkolk - CIAW
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Sistemas de Armas

SAB: Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Dinâmica

Jozias **Del Rios** Cap Eng delriosjdrvgs@fab.mil.br (12) 98177-9921

Abril 2018

AA-811

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE ARTEFATOS BÉLICOS

Dinâmica

Instrutor: 1ºTen Eng Jozias **DEL RIOS**

rev. 31.ago.2016

TÓPICOS

Dinâmica

1. Massa e Centro de Massa
2. Momento de Inércia e propriedades
3. Momento Linear e Angular
4. Forças e Torques
5. Leis de Newton e Euler no Centro de Massa
6. ~~Referencial não-inercial~~
7. ~~Dinâmica num ponto arbitrário do corpo~~
8. Equações de Euler
9. ~~Variação de massa, inércia e posição do CM~~

OBJETIVO

Apresentaremos as equações de dinâmica angular e linear em 6 graus de liberdade da Mecânica Clássica, explorando conceitos de massa inercial e momento de inércia

CORPO RÍGIDO - REVISITADO

Corpo Rígido é composto por uma distribuição de partículas de...
...massa constante.
...posicionamento fixo uma em relação às outras.
Massa total e a posição do **C**entro de **M**assa são constantes.

O movimento do corpo pode ser separado em...
... cinemática translacional de um ponto de referência 'b'.
... cinemática rotação do corpo ao redor do ponto de referência.

Se o ponto de referência 'b' for o **C**entro de **M**assa, separa-se...
... a dinâmica translacional (forças)
... da dinâmica rotacional (momentos ou torques).

CENTRO DE MASSA

Massa do corpo é uma grandeza escalar calculada...
...pela soma das massas de suas partículas constituintes
...pela integração no volume da densidade específica

$$m = \sum_k m_k = \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV$$

Centro de **M**assa (cm) é a média da posição de cada partícula do corpo, ponderando pela sua massa:

$$\vec{p}_{cm/ir} = \frac{1}{m}\sum_k m_k\,\vec{p}_{k/ir} = \frac{1}{m}\iiint_V \vec{p}_{\cdot/ir}\,\rho\left(\vec{p}_{\cdot/ir}\right)dV$$

$$\vec{v}_{cm/ir} = \frac{1}{m}\sum_k m_k\,\vec{v}_{k/ir} = D_{ir}\left(\vec{p}_{cm/ir}\right)$$

MOMENTO DE INÉRCIA

Depende da origem e orientação do sistema de coordenadas

Ponto 'b' e orientação 'frd' arbitrários e fixados no corpo rígido:

$$J^{b,frd}\vec{\omega}_{b/frd} = \sum_k m_k \, \vec{p}_{k/b} \times \vec{\omega}_{b/frd} \times \vec{p}_{k/b}$$

$$\vec{p}^{\,frd}_{k/b} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \qquad = \left(-\sum_k m_k \, \tilde{p}^{frd}_{k/b} \, \tilde{p}^{frd}_{k/b} \right) \vec{\omega}_{b/frd}$$

$$J^{b,frd} = \sum_k m_k \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -x\,y & -x\,z \\ -x\,y & x^2+z^2 & -y\,z \\ -x\,z & -y\,z & x^2+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{b,frd}_{xx} & -J^{b,frd}_{xy} & -J^{b,frd}_{xz} \\ -J^{b,frd}_{xy} & J^{b,frd}_{yy} & -J^{b,frd}_{yz} \\ -J^{b,frd}_{xz} & -J^{b,frd}_{yz} & J^{b,frd}_{zz} \end{bmatrix}$$

diagonal: momentos de inércia outros: produtos de inércia

MOMENTO DE INÉRCIA – TRANSLAÇÃO e ROTAÇÃO

Deslocamento da origem do cálculo: do centro de massa ‘c’ para um ponto arbitrário ‘b’, mantendo a orientação ‘frd’ arbitrária (Teorema de Huygens-Steiner dos eixos paralelos)

$$\boxed{J^{b,frd} = J^{c,frd} + m\,\tilde{p}_{b/c}^{T}\,\tilde{p}_{b/c}}$$

Rotação da orientação para ‘ned’, mantendo a origem em ‘b’:

$$\boxed{J^{b,ned} = R_{ned/frd}\,J^{b,frd}\,R_{frd/ned}}$$

Dica: esta operação também pode ser feita com a matriz inversa:

$$\left(J^{b,ned}\right)^{-1} = R_{ned/frd}\left(J^{b,frd}\right)^{-1} R_{frd/ned}$$

MOMENTO DE INÉRCIA – DIAGONALIZADA

autovetores formam a base dos eixos principais de inércia

autovalores são os momentos principais de inércia

$$J^{b,epi} = R_{epi/frd}\, J^{b,frd}\, R_{frd/epi} = \begin{bmatrix} J_{xx}^{b,epi} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy}^{b,epi} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz}^{b,epi} \end{bmatrix}$$

$$J^{b,frd} = \underbrace{R_{epi/frd}\, J^{cm,epi}\, R_{frd/epi}}_{\text{Rotação dos Eixos Principais de Inércia para Forward-Right-Down arbitrário}} + \underbrace{m\, \tilde{p}_{b/cm}^{T}\, \tilde{p}_{b/cm}}_{\text{Translação de C.M. para o ponto 'b' arbitrário}}$$

REFERENCIAIS ABREVIADOS

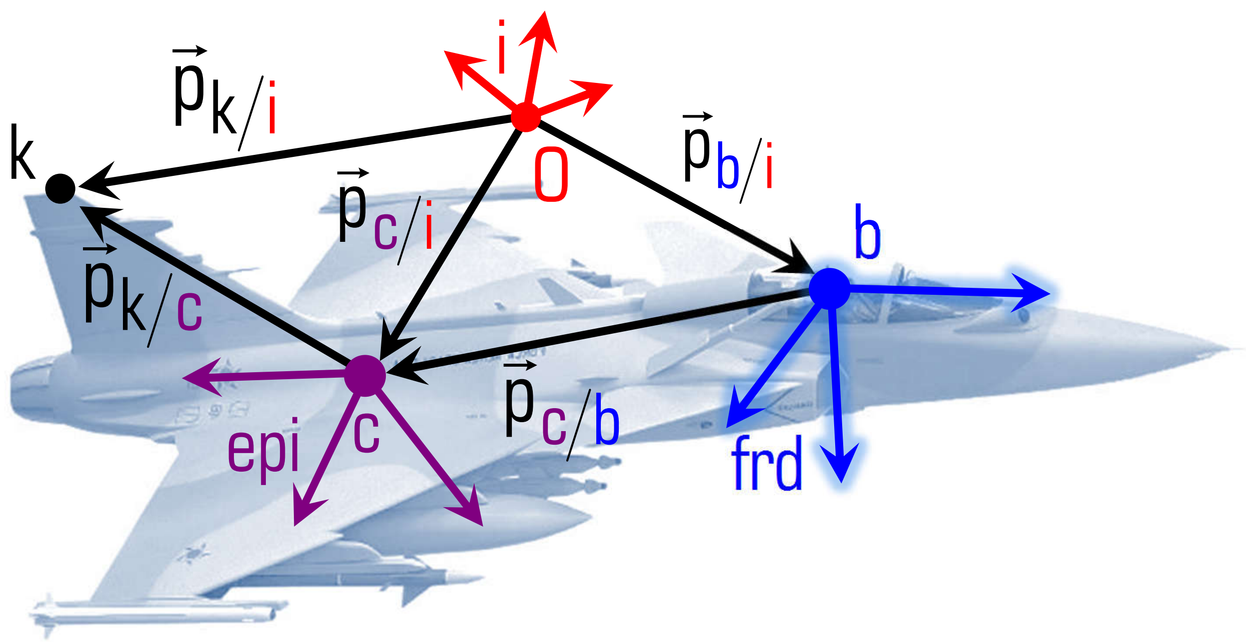
referencial	de	para	org	comentários
Inercial	**ir**	**i**	**O**	não acelera e não gira
Geocêntrico	**eci**	**i**	**E**	fixo no **CM** da Terra e não gira será considerado inercial
Terrestre	**ecef**	**e**	**E**	fixo no **CM** da Terra; gira com a Terra
Navegação	**ned**	**n**	**b**	fixo no corpo, orientação **N.E.D.**
Corpo	**frd**	**b**	**b**	origem e orientação fixados arbitrariamente no corpo
Central	**epi**	**c**	**cm**	origem no **CM** do corpo, orientação definida pelos eixos principais de inércia

RELEMBRANDO e DEDUZINDO

Corpo Rígido, partículas relativamente fixas: $\vec{v}_{k/c} = \vec{a}_{k/c} = 0$

Cálculo de Centro de Massa no referencial 'c': $\sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c} = 0$

Equação de Coriolis: $\vec{v}_{k/i} = \cancel{\vec{v}_{k/c}} + \vec{v}_{c/i} + \vec{\omega}_{c/i} \times \vec{p}_{k/c}$



MOMENTO LINEAR e ANGULAR de PARTÍCULA

Momento Linear é a quantidade de movimento de translação:

referente a um referencial qualquer a:

Letra 'P'

$$\vec{P}_{k/a} = m_k \, D_a\left(\vec{p}_{k/a}\right) = m_k \, \vec{v}_{k/a}$$

referencial

Momento Angular é a quantidade de movimento de rotação:

referente a um referencial a e um ponto de referência A:

Letra 'H'

$$\vec{H}_{k/A/a} = \vec{p}_{k/A} \times \vec{P}_{k/a}$$

ponto de referência

referencial

MOMENTO LINEAR do CORPO RÍGIDO

Para um corpo rígido formado por partículas:

Referente a um referencial qualquer a:

$$\vec{P}_a = \sum_k m_k \, \vec{v}_{k/a}$$

$$\vec{P}_a = \sum_k m_k \left(\cancel{\vec{v}_{k/c}} + \vec{v}_{c/a} + \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{p}_{k/c} \right)$$

$$\vec{P}_a = \sum_k m_k \vec{v}_{c/a} + \sum_k m_k \left(\vec{\omega}_{c/a} \times \vec{p}_{k/c} \right)$$

$$\vec{P}_a = m \, \vec{v}_{c/a} + \vec{\omega}_{c/a} \times \cancel{\sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c}}$$

referencial

$$\boxed{\vec{P}_a = m \, \vec{v}_{c/a}}$$

MOMENTO ANGULAR do CORPO RÍGIDO

Em um referencial qualquer a e um ponto de referência A

$$\vec{H}_{A/a} = \sum_k m_k \, \vec{p}_{k/A} \times \vec{v}_{k/a}$$

$$\vec{H}_{A/a} = \sum_k m_k \left(\vec{p}_{k/c} + \vec{p}_{c/A}\right) \times \left(\cancel{\vec{v}_{k/c}} + \vec{v}_{c/a} + \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{p}_{k/c}\right)$$

$$\vec{H}_{A/a} = \cancel{\sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c}} \times \vec{v}_{c/a} + \sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c} \times \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{p}_{k/c}$$

$$+ \, m \, \vec{p}_{c/A} \times \vec{v}_{c/a} + \vec{p}_{c/A} \times \vec{\omega}_{c/a} \times \cancel{\sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c}}$$

referencial

$$\vec{H}_{A/a} = m \, \vec{p}_{c/A} \times \vec{v}_{c/a} + \left(-\sum_k m_k \, \vec{p}_{k/c} \times \vec{p}_{k/c}\right) \times \vec{\omega}_{c/a}$$

ponto de referência

$$\boxed{\vec{H}_{A/a} = m \tilde{p}_{c/A} \vec{v}_{c/a} + J^c \, \vec{\omega}_{c/a}}$$

MOMENTO ANGULAR do CORPO RÍGIDO

Se o ponto de referência qualquer 'A' for substituído pelo centro de massa 'c' do corpo rígido:

$$\vec{H}_{c/a} = m\, \cancel{\tilde{p}_{c/c}}\, \vec{v}_{c/a} + J^{c}\, \vec{\omega}_{c/a}$$

$$\boxed{\vec{H}_{c/a} = J^{c}\, \vec{\omega}_{c/a}}$$

Não tem mais dependência com a velocidade do corpo $\vec{v}_{c/a}$

Dinâmica angular desacoplou-se da dinâmica linear ao se utilizar o centro de massa como ponto de referência

Momento de inércia escrito nas coordenadas do corpo.

FORÇA e TORQUE

Por definição, uma força externa é constituída de...
...direção vetorial unitária
...intensidade medida em newtons
...ponto de aplicação no corpo

$\vec{F}_{Aer}$ é aplicada no ponto cp

Toda força externa causa um torque relativo a um ponto de referência (por exemplo: o centro de massa 'c'):

$$\vec{M}_{Aer/c} = \vec{p}_{cp/c} \times \vec{F}_{Aer}$$

2ª LEI de NEWTON (TRANSLAÇÃO)

Se o somatório das forças for nulo (equilíbrio) então o corpo estará em movimento retilíneo uniforme no referencial inercial.

- Momento Linear do corpo é constante.
- Centro de Massa do corpo tem velocidade inercial constante.

$$\boxed{\sum \vec{F} = D_i \vec{P}_i}$$

$$\sum \vec{F} = D_i \left(m \, \vec{v}_{c/i} \right) = \cancel{\dot{m}} \, \vec{v}_{c/i} + m \, D_i \left(\vec{v}_{c/i} \right)$$

$$\sum \vec{F} = m \left(D_c \left(\vec{v}_{c/i} \right) + \vec{\omega}_{c/i} \times \vec{v}_{c/i} \right) = m \, \vec{a}^{\,c}_{c/i} + m \, \vec{\omega}^{\,c}_{c/i} \times \vec{v}^{\,c}_{c/i}$$

$$\boxed{\vec{a}^{\,c}_{c/i} = \frac{1}{m} \sum \vec{F} - \vec{\omega}^{\,c}_{c/i} \times \vec{v}^{\,c}_{c/i}}$$

LEI de EULER (ROTAÇÃO)

Se o somatório de torques for nulo, então:

- Momento Angular do corpo constante no referencial inercial.
- Velocidade angular inercial do corpo varia em direção!

$$\boxed{\sum \vec{M}_{\cdot/c} = D_i\left(\vec{H}_{c/i}\right)}$$

$$\sum \vec{M}_{\cdot/c} = D_c\left(\vec{H}_{c/i}\right) + \vec{\omega}_{c/i} \times \vec{H}_{c/i}$$

$$\sum \vec{M}_{\cdot/c} = D_c\left(J^c\,\vec{\omega}_{c/i}\right) + \vec{\omega}_{c/i} \times \left(J^c\,\vec{\omega}_{c/i}\right)$$

$$\sum \vec{M}_{\cdot/c} = \cancel{\dot{J}^c}\,\vec{\omega}^{\,c}_{c/i} + J^c\,\vec{\alpha}^{\,c}_{c/i} + \tilde{\omega}^{c}_{c/i}\,J^c\,\vec{\omega}^{\,c}_{c/i}$$

$$\boxed{\vec{\alpha}^{\,c}_{c/i} = \left(J^c\right)^{-1}\left(\sum \vec{M}_{\cdot/c} - \vec{\omega}^{\,c}_{c/i} \times J^c\,\vec{\omega}^{\,c}_{c/i}\right)}$$

EQUAÇÕES DE EULER

Massa: m

Posição: $\vec{p}^{\,i}_{c/i} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$

Vel. Linear: $\vec{v}^{\,c}_{c/i} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$

Orientação: (ψ, θ, φ)

Vel. Angular: $\vec{\omega}^{\,c}_{c/i} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$

Momento de Inércia:
$$J^c = \begin{bmatrix} J^c_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J^c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J^c_{zz} \end{bmatrix}$$

EQUAÇÕES DE EULER – VELOCIDADE LINEAR

$$\boxed{D_i\left(\vec{p}^{\,i}_{c/i}\right) = R^T_{c/i}\ \vec{v}^{\,c}_{c/i}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta c\varphi + s\psi s\varphi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\varphi & s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

EQUAÇÕES DE EULER – ACELERAÇÃO LINEAR

$$\boxed{D_c\left(\vec{v}^{\,c}_{c/i}\right) = \frac{1}{m}\sum F - \tilde{\omega}^{c}_{c/i}\,\vec{v}^{\,c}_{c/i}}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{1}{m}\sum F_x + r\,v - q\,w \\ \dot{v} = \dfrac{1}{m}\sum F_y + p\,w - r\,u \\ \dot{w} = \dfrac{1}{m}\sum F_z + q\,u - p\,v \end{cases}$$

$$\sum F = m\,g\,\hat{z}^{c}_{i} + F_{Empuxo} + F_{Aer} + \cdots$$

Forças inerciais no sistema de coordenadas do corpo

EQUAÇÕES DE EULER – VELOCIDADE ANGULAR

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}\varphi \tan\theta & \cos\varphi \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi \sec\theta & \cos\varphi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} &= p + \left(q \operatorname{sen}\varphi + r \cos\varphi\right)\tan\theta \\ \dot{\theta} &= q \cos\varphi - r \operatorname{sen}\varphi \\ \dot{\psi} &= \left(q \operatorname{sen}\varphi + r \cos\varphi\right)\sec\theta \end{cases}$$

Singularidades existem em $\theta = \pm 90°$

EQUAÇÕES DE EULER – ACELERAÇÃO ANGULAR

$$\boxed{\vec{\alpha}^{c}_{c/i} = \left(J^{c}\right)^{-1}\left(\sum \vec{M}_{\cdot/c} - \vec{\omega}^{c}_{c/i} \times J^{c}\,\vec{\omega}^{c}_{c/i}\right)}$$

$$\begin{cases} \dot{p} = J_{xx}^{-1}\left(\sum M_x + q\,r\left(J_{yy} - J_{zz}\right)\right) \\ \dot{q} = J_{yy}^{-1}\left(\sum M_y + p\,r\left(J_{zz} - J_{xx}\right)\right) \\ \dot{r} = J_{zz}^{-1}\left(\sum M_z + p\,q\left(J_{xx} - J_{yy}\right)\right) \end{cases}$$

Torques tomados no referencial do corpo,
com ponto de referência no centro de massa
e no sistema de coordenadas do corpo

EQUAÇÕES DE EULER – ACOPLAMENTO

Num míssil, geralmente J_{xx} é muito menor que $J_{yy} \approx J_{zz}$.

Portanto, velocidades de guinada/arfagem não geram rolamento.

Mas uma manobra de guinada com rolamento induz arfagem.
Vice-versa, manobra de arfagem com rolamento induz guinada.

Observar o acoplamento implicado entre as manobras.