Centro de Instrução Almirante Wandenkolk - CIAW
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Sistemas de Armas

SAB: Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Notações e Cinemática

Jozias **Del Rios** Cap Eng delriosjdrvgs@fab.mil.br (12) 98177-9921

Abril 2018

AA-811

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE ARTEFATOS BÉLICOS

Notações e Cinemática

Instrutor: 1ºTen Eng Jozias **DEL RIOS**

Autor do Material: Jozias **DEL RIOS** – rev. 18.ago.2016

TÓPICOS

Notações e Cinemática

1. Notações para vetores com referenciais
2. Derivada rotacional e equação de Coriolis
3. Base ortonormal e Coordenadas
4. Orientação por Matriz de Rotação
5. Orientação por Ângulos de Euler
6. Orientação por Quaternions
7. Conclusões sobre Orientação
8. Conversões entre representações de orientação

OBJETIVO

Apresentaremos as notações matemáticas para o tratamento de vetores e matrizes considerando diferentes referenciais, derivaremos no tempo para encontrar as velocidades e acelerações da cinemática, para preparar a abordagem as equações básicas de dinâmica angular e linear em 6 graus de liberdade.

VETORES e MATRIZES

Vetor $\vec{u}$ no sistema de coordenadas a:

$$\vec{u}^{a} = \left(u_x^a, u_y^a, u_z^a\right) = \hat{x}_a u_x^a + \hat{y}_a u_y^a + \hat{z}_a u_z^a = \begin{bmatrix} u_x^a & u_y^a & u_z^a \end{bmatrix}^T$$

Módulo de vetor: $u = \|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

Normalização de vetor: $\hat{u} = \vec{u}\, u^{-1}$

Ângulo entre versores: $\measuredangle = \arccos\left(\hat{u} \cdot \hat{v}\right) = \operatorname{atan2}\left(\hat{u} \times \hat{v},\ \hat{u} \cdot \hat{v}\right)$

Projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$: $\operatorname{proj}_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right) = \hat{v}\left(\vec{u} \cdot \hat{v}\right)$

Rejeição de $\vec{u}$ por $\vec{v}$: $\operatorname{rej}_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right) = \vec{u} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\left(\vec{u}\right)$

Triplo produto vetorial: $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w} = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}$

VETORES e MATRIZES

Produto escalar: $\vec{u}^{\,a} \cdot \vec{v}^{\,a} = u_x^a v_x^a + u_y^a v_y^a + u_z^a v_z^a$

Produto vetorial: $\vec{u}^{\,a} \times \vec{v}^{\,a} = \det\begin{pmatrix} \hat{x}_a & \hat{y}_a & \hat{z}_a \\ u_x^a & u_y^a & u_z^a \\ v_x^a & v_y^a & v_z^a \end{pmatrix}$

usando matriz antissimétrica: $\vec{u}^{\,a} \times \vec{v}^{\,a} = \tilde{u}^{a}\,\vec{v}^{\,a} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z^a & u_y^a \\ u_z^a & 0 & -u_x^a \\ -u_y^a & u_x^a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^a \\ v_y^a \\ v_z^a \end{bmatrix}$

CORPO RÍGIDO

Corpo Rígido é composto por uma distribuição de partículas de...
...massa constante.
...posicionamento fixo uma em relação às outras.
Massa total e a posição do **C**entro-de-**M**assa são constantes.

O movimento do corpo pode ser separado em...
...cinemática translacional de um ponto de referência ‘b’.
...cinemática rotacional ao redor do ponto de referência.

Se o ponto de referência for o **C**entro de **M**assa, separa-se...
... a dinâmica translacional (forças)
... da dinâmica rotacional (momentos ou torques).

POSIÇÃO

Representação da posição de...

...uma partícula

...um ponto arbitrário de interesse de um corpo

...origem de um referencial

Letra 'p'

Ponto de interesse

$$\vec{p}_{A/B}$$

Ponto de referência

Não depende da rotação de referenciais!

POSIÇÃO de PARTÍCULA

Letra ‘p’

Partícula k-ésima

$$\vec{p}_{k/O}$$

Ponto de referência

Ponto ‘O’ é fixo, na origem do referencial inercial ‘ir’

POSIÇÃO da ORIGEM de um REFERENCIAL

Letra 'p'

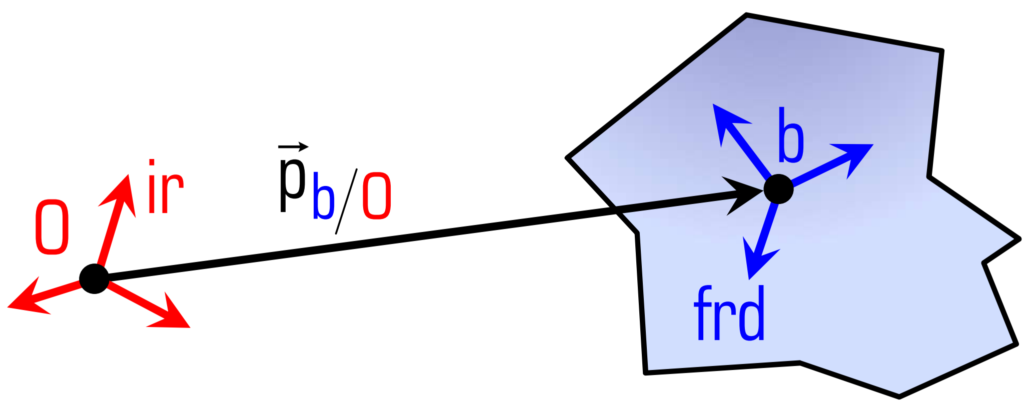
$$\vec{p}_{b/O}$$

Posição de um ponto de referência do corpo

Ponto de referência externo

Ponto 'b' é um ponto arbitrário do corpo (body)
e fica na origem do referencial Front-Right-Down (frd)

Quando o corpo se desloca, o referencial frd se desloca junto.



POSIÇÃO de PONTO no CORPO

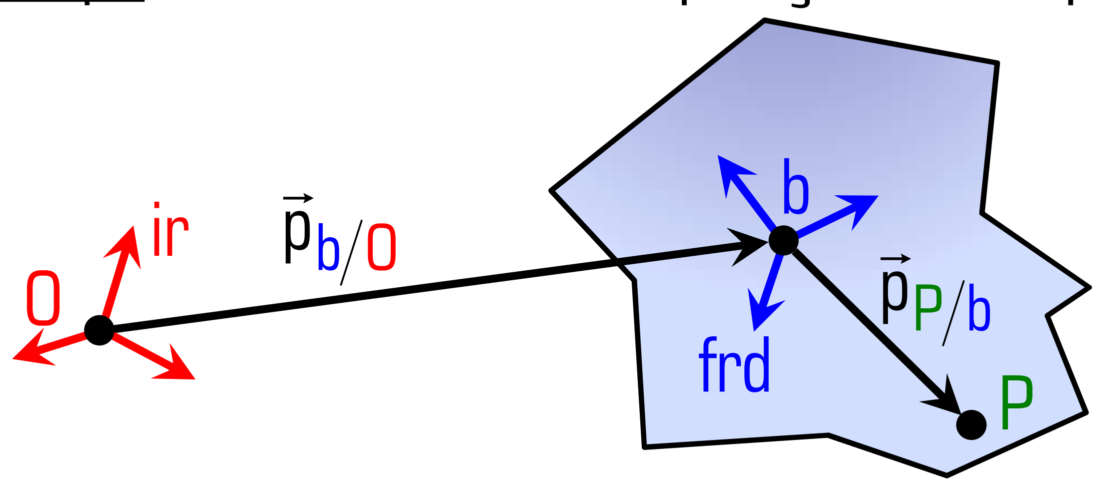
Letra 'p' → $\vec{p}_{P/b}$

Ponto de interesse do corpo

Ponto de referência no corpo

Ponto 'b' é um ponto <u>arbitrário</u> fixado no corpo (<u>b</u>ody) na origem do referencial Front-Right-Down (frd).

A <u>posição do corpo</u> é atribuída como a posição deste ponto b.



VELOCIDADE LINEAR - TRANSLAÇÃO

Representação da velocidade de...

...uma partícula

...um ponto arbitrário de interesse de um corpo

...origem de um referencial

Letra 'v'

Ponto de interesse

Referencial observador

$$\vec{v}_{A/Ref}$$

VELOCIDADE e ACELERAÇÃO do CORPO

"Velocidade de um ponto arbitrário fixo no corpo (body) no referencial North-East-Down (ned)"

Ponto de interesse

Letra 'v'

Referencial

$$\vec{v}_{b/ned}$$

Ponto de interesse

Letra 'a'

Referencial inercial

$$\vec{a}_{b/ir}$$

VELOCIDADE da PARTÍCULA

“Velocidade da partícula k-ésima

no referencial inercial”

Letra ‘v’

Partícula de interesse

Referencial inercial

$$\vec{v}_{k/ir}$$

ORIENTAÇÃO

Representação da orientação (ou atitude) de...

...um corpo

...um referencial

Letra 'R'

Orientação de interesse

$$R_{\color{blue}{frd}/\color{green}{ned}}$$

Orientação de referência

Matematicamente, a orientação pode ser descrita como

Ângulos de Euler, Matriz de Rotação DCM, Quaternion, ...

VELOCIDADE ANGULAR

Representação da variação temporal da orientação de...

...um corpo

...um referencial

Letra ‘ω’

Orientação de interesse

Referencial de referência

$$\vec{\omega}_{frd/ned}$$

“velocidade de rotação do corpo em relação a North-East-Down”

Direção e sentido de rotação dados pela regra-da-mão-direita.

Velocidade angular pelo módulo em radianos por segundo.

ACELERAÇÃO ANGULAR

Representação da variação temporal da velocidade angular de...

...um corpo

...um referencial

Letra 'α'

Orientação de interesse

Referencial de referência

$$\vec{\alpha}\ \mathrm{frd}/\mathrm{ir}$$

"aceleração angular do corpo em relação ao referencial inercial"

Direção e sentido de rotação dados pela regra-da-mão-direita

Aceleração angular pelo módulo em radianos / segundo^2

DERIVADA DE UM VETOR

Variação temporal (derivada) de um vetor
<u>depende do referencial do observador</u>

Derivada: Letra 'D'

Referencial do Observador

Vetor a ser derivado

$$D_{ned}\left(\vec{v}_{b/frd}\right)$$

VELOCIDADE ANGULAR: PROPRIEDADES

A velocidade angular pode ser definida como o vetor que relaciona a derivada de um vetor arbitrário em diferentes referenciais observadores

Adição: $$\vec{\omega}_{a/b} + \vec{\omega}_{b/c} = \vec{\omega}_{a/c}$$

Relativo: $$\vec{\omega}_{a/b} = -\vec{\omega}_{b/a}$$

A derivada não depende do referencial:

$$D_u\left(\vec{\omega}_{a/b}\right) = D_v\left(\vec{\omega}_{a/b}\right) = \vec{\alpha}_{a/b}$$

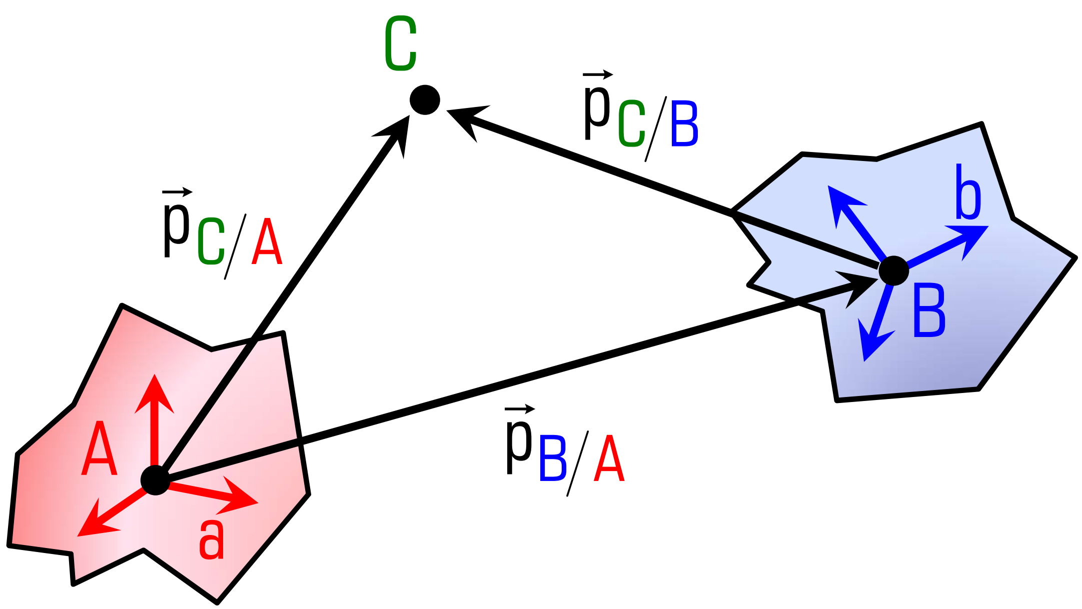
EQUAÇÃO DE CORIOLLIS

Referencial a fixado num corpo, centrado no ponto A.

Referencial b fixado em outro corpo, centrado no ponto B.

Seja $\omega_{b/a}$ velocidade angular relativa entre os referenciais.

Seja C um outro ponto, independente.



EQUAÇÃO DE CORIOLLIS

Do desenho: $\vec{p}_{C/A} = \vec{p}_{B/A} + \vec{p}_{C/B}$

Derivando no observador a:

$$D_a\left(\vec{p}_{C/A}\right) = D_a\left(\vec{p}_{B/A}\right) + D_a\left(\vec{p}_{C/B}\right)$$

$$\vec{v}_{C/a} = \vec{v}_{B/a} + \underbrace{\left(\vec{v}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}\right)}_{\text{Equação de Coriolis}}$$

$$\vec{v}_{C/a} = \vec{v}_{C/b} + \left(\vec{v}_{B/a} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}\right)$$

EQUAÇÃO DE CORIOLLIS

Resumindo:

$$\boxed{D_a\left(\vec{p}_{C/B}\right) = \vec{v}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}}$$

$$\boxed{D_a\left(\vec{v}_{C/b}\right) = \vec{a}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{C/b}}$$

ACELERAÇÃO EM OUTRO REFERENCIAL

Derivando mais uma vez no observador 'a' ...

$$\vec{v}_{C/a} = \vec{v}_{B/a} + \vec{v}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}$$

$$D_a\left(\vec{v}_{C/a}\right) = D_a\left(\vec{v}_{B/a}\right) + D_a\left(\vec{v}_{C/b}\right) + D_a\left(\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{C/a}}$$

$$\boxed{\vec{a}_{B/a}}$$

$$\boxed{\vec{a}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{C/b}}$$

$$\boxed{\vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\omega}_{b/a} \times \left(\vec{v}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}\right) \\ &= \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{C/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B} \end{aligned}}$$

ACELERAÇÃO EM OUTRO REFERENCIAL

Simplificando...

Aceleração total

Aceleração relativa

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{C/a} = &+ \vec{a}_{C/b} \\
&+ \vec{a}_{B/a} \\
&+ \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B} \\
&+ 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{C/b} \\
&+ \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{p}_{C/B}
\end{aligned}
$$

Acelerações de transporte

Aceleração de Coriolis

Aceleração centrípeta

MOVIMENTO na SUPERFÍCIE TERRESTRE

...Substitua a por um referencial ECI inercial 'ir' geocêntrico (CM).

...Substitua b pelo referencial ECEF terrestre 'e' geocêntrico (CM).

...Então $\omega_{b/a}$ é a velocidade de rotação terrestre $\omega_{e/ir}$

...Substitua C por um ponto fixo P na superfície terrestre...

$$\cancel{\vec{\alpha}_{e/ir}}$$

$$\cancel{\vec{a}_{e/ir}}$$

$$\vec{a}_{P/ir} = \underbrace{\vec{a}_{P/e}}_{\substack{\text{Aceleração}\\\text{Relativa}}} + \underbrace{\vec{\omega}_{e/ir} \times \vec{\omega}_{e/ir} \times \vec{p}_{P/CM}}_{\substack{\text{Aceleração}\\\text{Centrípeta}}} + \underbrace{2\vec{\omega}_{e/ir} \times \vec{v}_{P/e}}_{\substack{\text{Aceleração}\\\text{de Coriolis}}}$$

ACELERAÇÃO de PARTÍCULA do CORPO RÍGIDO

...Substitua a por um referencial inercial 'ir' qualquer.

... b é a origem do referencial frd do corpo (body)

...Então $\omega_{b/a}$ torna-se a velocidade de rotação do corpo $\omega_{frd/ir}$

...Substitua C por qualquer ponto P do corpo...

Partículas do corpo não se movem em relação ao corpo: $\cancel{\vec{a}_{P/b}}$ $\cancel{\vec{v}_{P/b}}$

$$\underbrace{\vec{a}_{P/ir}}_{\text{Aceleração da partícula}} = \underbrace{\vec{a}_{b/ir}}_{\text{Aceleração do corpo}} + \underbrace{\vec{\alpha}_{frd/ir} \times \vec{p}_{P/b}}_{\text{Aceleração de transporte angular}} + \underbrace{\vec{\omega}_{frd/ir} \times \vec{\omega}_{frd/ir} \times \vec{p}_{P/b}}_{\text{Aceleração Centrípeta}}$$

COORDENADAS de um VETOR

Vetores físicos podem ser matematicamente escritos pelas suas coordenadas num referencial, usando um sistema de coordenadas.

Escrita no Referencial do corpo

$$\vec{v}^{\,frd}_{b/ir} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$$

Velocidade de translação do corpo em relação ao referencial inercial

COORDENADAS de um VETOR

Vetores físicos podem ser matematicamente escritos pelas suas coordenadas num referencial, usando um sistema de coordenadas.

Escrita no Referencial do corpo

$$\vec{\omega}^{frd}_{frd/ir} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$$

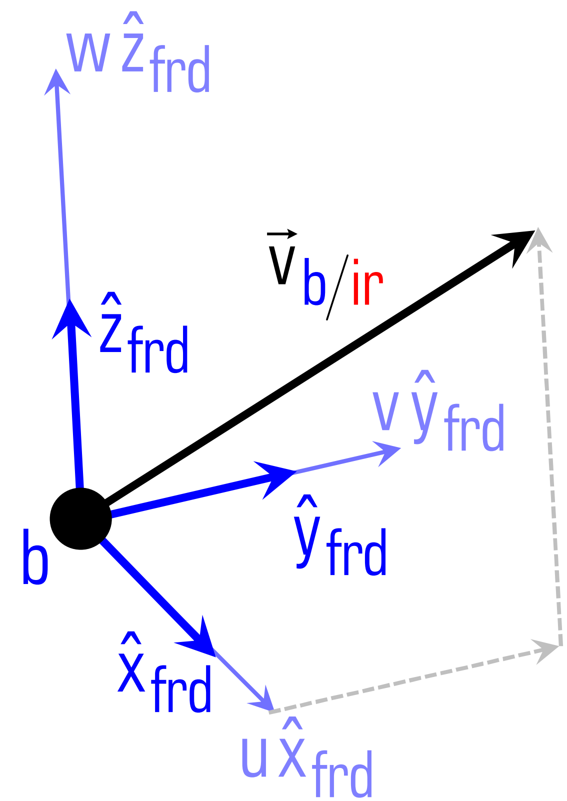
Velocidade de rotação do corpo em relação ao referencial inercial

BASE ORTONORMAL de VERSORES

Orientação define uma base de 3 vetores unitários (versores) normais entre si.

$$\vec{v}_{b/ir}^{frd} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$$

$$= \hat{x}_{frd}\, u + \hat{y}_{frd}\, v + \hat{z}_{frd}\, w$$



um vetor pode ser escrito da <u>forma matricial</u>
onde está subentendido um sistema de coordenadas.

CONVERSÃO DE COORDENADAS

A orientação também é um operador de conversão:
converte um vetor para outro sistema de coordenadas...

$$\vec{v}_{b/ir}^{frd} = R_{frd/ned} \cdot \vec{v}_{b/ir}^{ned}$$

Inversa: $R_{ned/frd} = R_{frd/ned}^{-1}$

Composição: $R_{ned/frd} \cdot R_{frd/ir} = R_{ned/ir}$

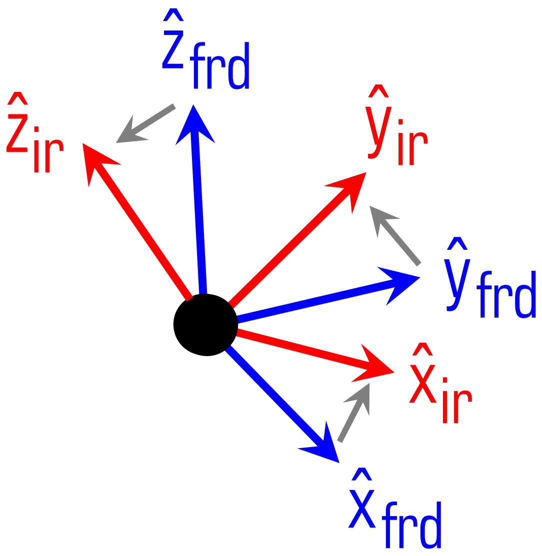
ROTAÇÃO de BASE ORTONORMAL

Operador de rotação aplicada aos versores de uma base:

$$R_{ir/frd} \cdot \hat{x}_{frd} = \hat{x}_{ir}$$

$$R_{ir/frd} \cdot \hat{y}_{frd} = \hat{y}_{ir}$$

$$R_{ir/frd} \cdot \hat{z}_{frd} = \hat{z}_{ir}$$



DERIVADA de VERSOR de uma BASE

Seja um referencial frd com velocidade angular $\omega_{frd/ned}$ em relação ao referencial north-east-down 'ned'.

Derivando os versores de frd com observador em ned...

$$D_{ned}\left(\hat{x}_{frd}\right) = \vec{\omega}_{frd/ned} \times \hat{x}_{frd}$$

$$D_{ned}\left(\hat{y}_{frd}\right) = \vec{\omega}_{frd/ned} \times \hat{y}_{frd}$$

$$D_{ned}\left(\hat{z}_{frd}\right) = \vec{\omega}_{frd/ned} \times \hat{z}_{frd}$$

DERIVADA de um VETOR (EQUAÇÃO DE CORIOLIS)

$$D_c\left(\vec{u}\right) = D_c\left(\hat{x}_c u_x^c + \hat{y}_c u_y^c + \hat{z}_c u_z^c\right)$$

$$D_c\left(\vec{u}\right) = \hat{x}_c \dot{u}_x^c + \hat{y}_c \dot{u}_y^c + \hat{z}_c \dot{u}_z^c$$

$$D_c\left(\vec{u}\right) = D_c\left(\hat{x}_a u_x^a + \hat{y}_a u_y^a + \hat{z}_a u_z^a\right)$$

$$= \left(\hat{x}_a \dot{u}_x^a + \hat{y}_a \dot{u}_y^a + \hat{z}_a \dot{u}_z^a\right) + \left(D_c\left(\hat{x}_a\right) u_x^a + D_c\left(\hat{y}_a\right) u_x^a + D_c\left(\hat{z}_a\right) u_x^a\right)$$

$$\boxed{D_c\left(\vec{u}\right) = D_a\left(\vec{u}\right) + \vec{\omega}_{a/c} \times \vec{u}}$$

EQ de CORIOLIS: COMPONENTES

Matricialmente:

$$\vec{v}_{b/ir}^{frd} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$$

$$D_{frd}\left(\vec{v}_{b/ir}^{frd}\right) = \vec{a}_{b/ir}^{frd} = \begin{bmatrix} \dot{u} & \dot{v} & \dot{w} \end{bmatrix}^T$$

$$\vec{\omega}_{frd/ir}^{frd} = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{D_{ir}\left(\vec{v}_{b/ir}^{frd}\right) = D_{frd}\left(\vec{v}_{b/ir}^{frd}\right) + \tilde{\omega}_{frd/ir}^{frd}\,\vec{v}_{b/ir}^{frd}}$$

TRANSFORMAÇÃO de COORDENADAS da DERIVADA

Se o ref. observador for o mesmo do sistema de coordenadas:

$$R_{b/a} \cdot D_c\left(\vec{u}^{\,a}_{\cdot/a}\right) = R_{b/a} \cdot \left(\vec{\omega}^{\,a}_{a/c} \times \vec{u}^{\,a}_{\cdot/a} + \dot{\vec{u}}^{\,a}_{\cdot/a}\right)$$

$$= R_{b/a}\, \tilde{\omega}^{a}_{a/c}\, \vec{u}^{\,a}_{\cdot/a} + R_{b/a}\, \dot{\vec{u}}^{\,a}_{\cdot/a}$$

$$= R_{b/a}\, \tilde{\omega}^{a}_{a/c} \left(R_{a/b} R_{b/a}\right) \vec{u}^{\,a}_{\cdot/a} + R_{b/a}\, \dot{\vec{u}}^{\,a}_{\cdot/a}$$

$$= \left(R_{b/a}\, \tilde{\omega}^{a}_{a/c} R_{a/b}\right)\left(R_{b/a}\, \vec{u}^{\,a}_{\cdot/a}\right) + R_{b/a}\, \dot{\vec{u}}^{\,a}_{\cdot/a}$$

$$= \tilde{\omega}^{b}_{a/c}\, \vec{u}^{\,b}_{\cdot/a} + \dot{\vec{u}}^{\,b}_{\cdot/a} = \vec{\omega}^{\,b}_{a/c} \times \vec{u}^{\,b}_{\cdot/a} + \dot{\vec{u}}^{\,b}_{\cdot/a} = D_c\left(\vec{u}^{\,b}_{\cdot/a}\right)$$

$$\boxed{D_c\left(\vec{u}^{\,b}_{\cdot/a}\right) = R_{b/a} \cdot D_c\left(\vec{u}^{\,a}_{\cdot/a}\right)}$$

ORIENTAÇÃO ESPACIAL

Orientação: forma que o corpo rígido está rotacionado ao redor de um ponto de referência fixado no corpo, em relação a uma orientação canônica (exemplo: orientação do referencial inercial)

- Matriz de Rotação DCM (3x3)
- Ângulos de Euler "yaw-pitch-roll"
- Eixo-Ângulo (Fórmula de Rodriguez)
- Quaternions

Discutiremos cada uma delas quanto a...

... representação matemática

... integração pela velocidade angular

... aplicações, vantagens e desvantagens

ORIENTAÇÃO: MATRIZ DE ROTAÇÃO (DCM)

Orientação expressa pela Transformação de Coordenadas do referencial inercial 'ir' para o referencial do corpo 'frd' pela multiplicação à esquerda do vetor por uma matriz 3x3 $R_{frd/ir}$:

$$\vec{u}^{\,frd} = R_{frd/ir} \cdot \vec{u}^{\,ir} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_x^{frd} \\ u_y^{frd} \\ u_z^{frd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & R_{frd/ir} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^{ir} \\ u_y^{ir} \\ u_z^{ir} \end{bmatrix}$$

DCM : Direction Cosine Matrix

ORIENTAÇÃO: MATRIZ DE ROTAÇÃO (DCM)

Matriz de rotação é uma matriz <u>ortonormal</u> 3x3, portanto:

- ❑ Produto escalar entre as linhas e entre as colunas é nulo.
- ❑ Determinante é unitário.
- ❑ As linhas e colunas são versores

Versor **x** do corpo escrito no sist. coord. inercial

$$R_{frd/ir} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \hat{x}_{ir}^{frd} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \hat{y}_{ir}^{frd} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \\ \hat{z}_{ir}^{frd} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & \hat{x}_{frd}^{ir} & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \hat{y}_{frd}^{ir} & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & \hat{z}_{frd}^{ir} & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

➢ A inversa é a transposta, desfaz a rotação:

$$R_{frd/ir}^{T} = R_{frd/ir}^{-1} = R_{ir/frd} \quad \Rightarrow \quad R_{ir/frd} R_{frd/ir} = I_3$$

MATRIZ DE ROTAÇÃO (DCM)

Rotação de matriz antissimétrica:

$$\tilde{\omega}^{a} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{a} & \omega_y^{a} \\ \omega_z^{a} & 0 & -\omega_x^{a} \\ \omega_y^{a} & \omega_x^{a} & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{\omega}^{b} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{b} & \omega_y^{b} \\ \omega_z^{b} & 0 & -\omega_x^{b} \\ \omega_y^{b} & \omega_x^{b} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\omega}^{a} = R_{a/b}\,\tilde{\omega}^{b}\,R_{b/a}$$

$$\tilde{\omega}^{b} = R_{b/a}\,\tilde{\omega}^{a}\,R_{a/b}$$

MATRIZ DE ROTAÇÃO (DCM)

Rotação de matriz simétrica (exemplo do tensor de inércia):

$$J^a = \begin{bmatrix} J^a_{xx} & -J^a_{xy} & -J^a_{xz} \\ -J^a_{xy} & J^a_{yy} & -J^a_{yz} \\ -J^a_{xz} & -J^a_{yz} & J^a_{zz} \end{bmatrix} \qquad J^b = \begin{bmatrix} J^b_{xx} & -J^b_{xy} & -J^b_{xz} \\ -J^b_{xy} & J^b_{yy} & -J^b_{yz} \\ -J^b_{xz} & -J^b_{yz} & J^b_{zz} \end{bmatrix}$$

$$J^a = R_{a/b}\, J^b\, R_{b/a}$$

$$J^b = R_{b/a}\, J^a\, R_{a/b}$$

MATRIZ DE ROTAÇÃO - DERIVADA

Passado um tempo infinitesimal, a orientação sofre uma rotação devido a velocidade angular instantânea...

$$\dot{R}_{frd/ir} = -\tilde{\omega}^{frd}_{frd/ir} \cdot R_{frd/ir} \quad \Rightarrow \quad dR_{frd/ir} = -\tilde{\omega}^{frd}_{frd/ir} \cdot R_{frd/ir}\, dt$$

- A soma da matriz infinitesimal à matriz de rotação irá desviar da ortonormalidade, acumulando deriva com a integração.
- A matriz de rotação precisa ser regularmente ortonormalizada por algoritmos iterativos (eg. Gram-Schmidt).
  - Porém, isto altera ‘levemente’ a própria orientação.

MATRIZ DE ROTAÇÃO - AVALIAÇÃO

Vantagens:

- Mais eficiente para a rotação de um vetor.
- Mais eficiente para a mudança de sistema de coordenadas.
- Versores da base prontamente disponíveis (colunas e linhas).

Desvantagens:

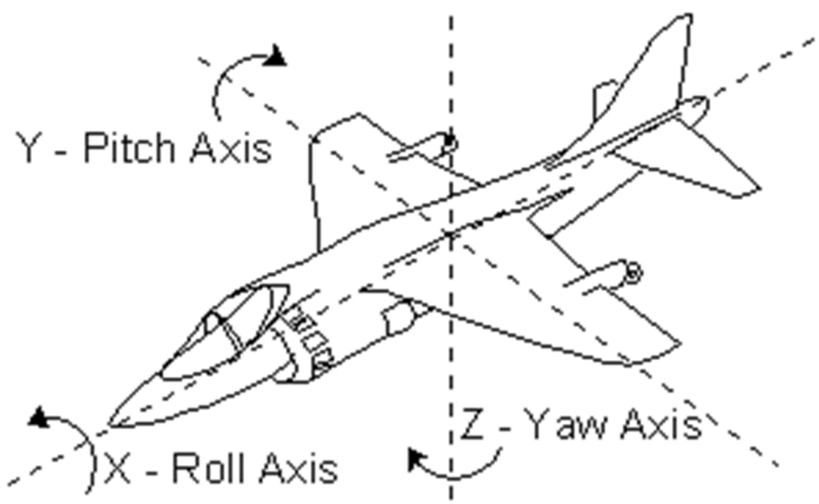
- Armazenamento de 9 escalares para 3 graus de liberdade.
- Acúmulo de erros de orientação no decorrer da simulação.
- Dificuldade média para leitura direta da orientação

ÂNGULOS DE EULER

Orientação do corpo definida por três rotações sucessivas partindo de uma orientação inicial até a orientação atual do corpo.

Cada rotação é definida por um ângulo e um eixo do corpo.

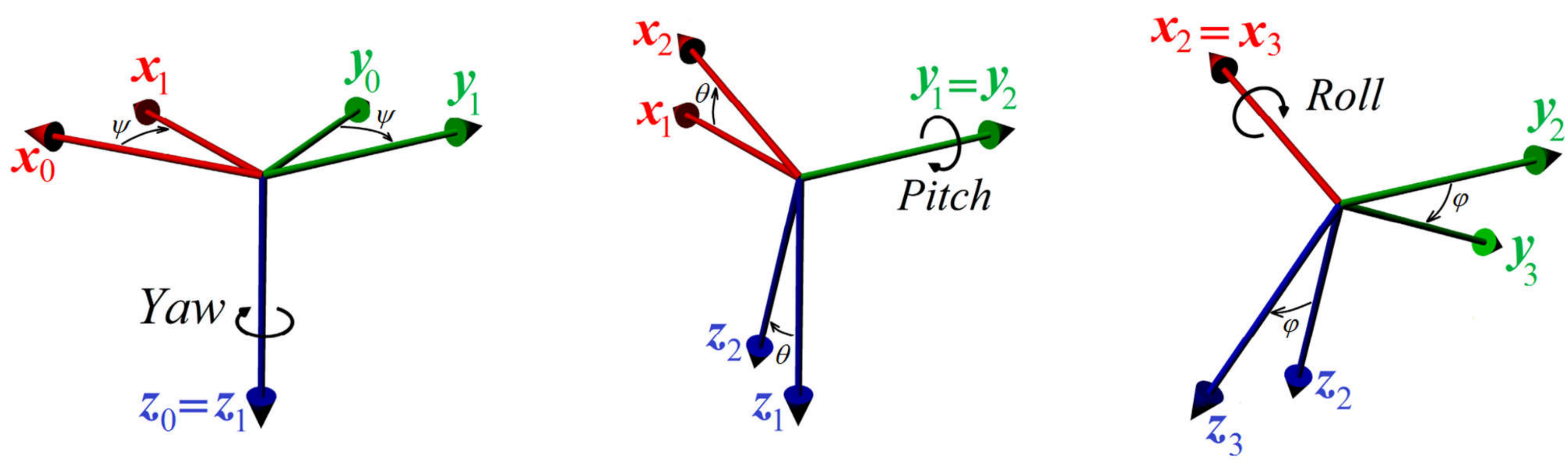
Os eixos não são ortogonais entre si num mesmo referencial.



ÂNGULOS DE EULER

Ordem (3,2,1)-extrínseca arbitrária usada em aeronáutica:

- Rotação ψ no eixo **Z** do corpo: guinada ou yaw ou heading
- Rotação θ no eixo **Y** do corpo: arfagem ou pitch ou attitude
- Rotação φ no eixo **X** do corpo: rolamento ou roll ou banking



$-180^o < \psi < 180^o \quad -90^o < \theta < 90^o \quad -180^o < \varphi < 180^o$

ÂNGULOS DE EULER – DEFINIÇÃO MATEMÁTICA

São utilizadas matrizes de rotação 3x3 para aplicar rotações:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} +\cos\psi & +\mathrm{sen}\,\psi & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\psi & +\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{K_\psi} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} +\cos\theta & 0 & -\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ +\mathrm{sen}\,\theta & 0 & +\cos\theta \end{bmatrix}}^{K_\theta} \quad \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\cos\varphi & -\mathrm{sen}\,\varphi \\ 0 & -\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}^{K_\varphi}$$

$$\vec{u}^{\,frd} = R_{frd/ir}\,\vec{u}^{\,ir} \qquad \boxed{R_{frd/ir} = K_\varphi K_\theta K_\psi}$$

$$\begin{bmatrix} u_x^{frd} \\ u_y^{frd} \\ u_z^{frd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \mathrm{sen}\,\psi\cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}\,\psi\cos\varphi & \mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\psi\cos\varphi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi & \mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - \cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^{ir} \\ u_y^{ir} \\ u_z^{ir} \end{bmatrix}$$

ÂNGULOS DE EULER – DERIVADAS

$$\vec{\omega}_{frd/ir}^{frd} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + K_{\varphi} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + K_{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right)$$

Após um tempo infinitesimal, a orientação sofre uma rotação infinitesimal definida pela velocidade angular instantânea:

$$\begin{bmatrix} d\varphi \\ d\theta \\ d\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}\varphi \tan\theta & \cos\varphi \tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi \sec\theta & \cos\varphi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} dt$$

ÂNGULOS DE EULER – AVALIAÇÃO

Vantagens:

- Forma mais intuitiva para descrever a orientação de um corpo que se consiga definir “frente”, “lateral”, “topo”, “perfil”, etc.
- Necessário armazenar somente 3 escalares, mais eficiente.

Desvantagens:

- Inadequado para veículos que podem assumir qualquer orientação: singularidade e integração numericamente instável quando a arfagem θ se aproxima de $\pm 90^o$:

$$R_{frd/ir}\Big|^{\theta = 90^o} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\mathrm{sen}(\psi - \varphi) & +\cos(\psi - \varphi) & 0 \\ +\cos(\psi - \varphi) & +\mathrm{sen}(\psi - \varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

QUATERNIONS - PROPRIEDADES

Quaternions são números complexos: $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$

um escalar real

um vetor imaginário

É associativo e distributivo, mas não é comutativo

$$\begin{cases} \mathbf{i}\,\mathbf{j} = \mathbf{k} \\ \mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{j}\,\mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ \mathbf{k}\,\mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i}\,\mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{cases}$$

Propriedades de números complexos: $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = -1$

Define-se o quaternion conjugado: $q^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$

Define-se o módulo: $\| q \| = \sqrt{q^* q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Define-se o quaternion inverso: $q^{-1} = \dfrac{q^*}{\| q \|^2}$

QUATERNIONS - ORIENTAÇÃO

Quaternion faz rotação de um vetor u por ângulo θ no eixo e:

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} e_x & e_y & e_z \end{bmatrix}^T = e_x\,\mathbf{i} + e_y\,\mathbf{j} + e_z\,\mathbf{k}$$

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \hat{e}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \boxed{\vec{u}' = q\,\vec{u}\,q^*}$$

Representação de Orientação:

$$\boxed{\vec{u}^{\,frd} = q^*_{frd/ir}\;\vec{u}^{\,ir}\;q_{frd/ir}}$$

Orientação reversa:

$$q_{ir/frd} = q^*_{frd/ir}$$

Composições:

$$q^*_{a/b}\,q^*_{b/c} = q^*_{a/c} \qquad \vec{u}^{\,a} = q^*_{a/b}\left(q^*_{b/c}\;\vec{u}^{\,c}\;q_{b/c}\right)q_{a/b}$$

QUATERNIONS - DERIVADA

Após um tempo infinitesimal, a orientação sofre uma rotação infinitesimal definida pela velocidade angular instantânea:

$$\boxed{\dot{q}_{frd/ir} = \frac{1}{2} q_{frd/ir}\, \vec{\omega}^{frd}_{frd/ir}} \qquad \vec{\omega}^{frd}_{frd/ir} = p\,\mathbf{i} + q\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}$$

A integração altera o módulo do quaternion, que então deve ser renormalizado, o que é simples e numericamente estável.

Mas existem outros métodos mais precisos. Exemplo:

$$q_{update} = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\omega^{frd}_{frd/ir}\, dt\right) + sen\left(\frac{1}{2}\omega^{frd}_{frd/ir}\, dt\right)\hat{\omega}^{frd}_{frd/ir}\right]$$

$$q_{frd/ir}\left(t+dt\right) = q_{update}\, q_{frd/ir}\left(t\right)$$

QUATERNIONS - AVALIAÇÃO

Vantagens:

- Forma numericamente mais estável para representar e integrar orientações. Sem singularidade, boa estabilidade.
- Necessário armazenar apenas 4 escalares.

Desvantagens:

- A operação de rotação ou mudança de coordenadas é menos eficiente que a orientação por matriz de rotação 3x3.

ORIENTAÇÃO - CONCLUSÕES

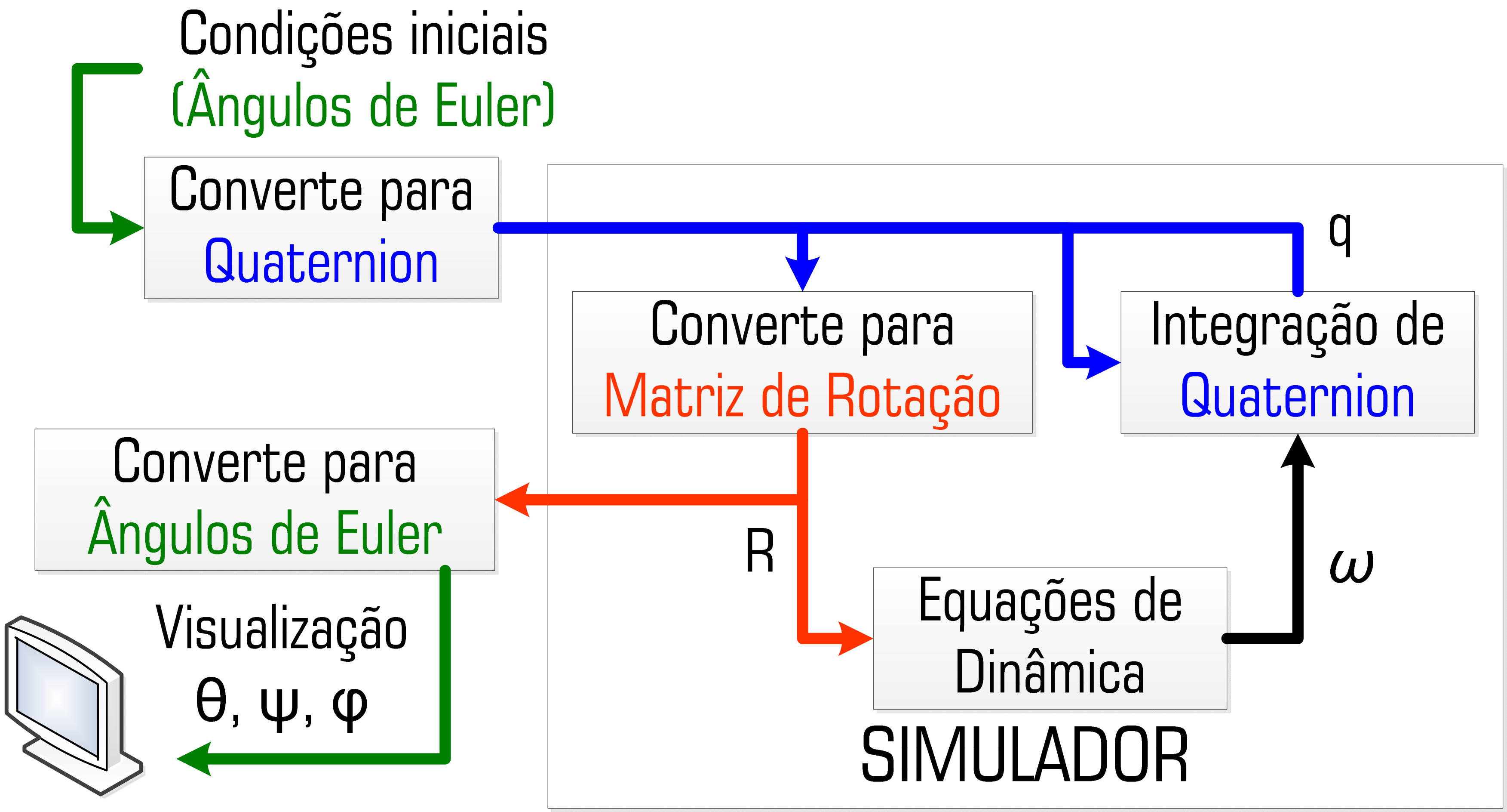
- Convém utilizar os Quaternions para representar a orientação do corpo rígido, sendo integrado pela velocidade angular.
- Convém utilizar a Matriz de Rotação para fazer as operações de rotação ou mudança de coordenadas, quando necessário.
- Convém utilizar os Ângulos de Euler como método de entrada e de visualização intuitiva da orientação pelo usuário.

Portanto:

- Convém especificar algumas fórmulas de conversão entre as representações das orientações.

ORIENTAÇÃO - CONCLUSÕES

Esquema geral para orientação do corpo em um Simulador 6DOF:



QUATERNION → MATRIZ DE ROTAÇÃO

$$q_{frd/ir}^{frd} = r + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$R_{frd/ir} =$$

$$\begin{bmatrix} r^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy + 2rz & 2xz - 2ry \\ 2xy - 2rz & r^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2yz + 2rx \\ 2xz + 2ry & 2yz - 2rx & r^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ROTAÇÃO → ÂNGULOS DE EULER

$$R_{frd/ir} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{33}) \\ \theta = -\operatorname{arcsen}(r_{13}) \\ \psi = \operatorname{atan2}(r_{12}, r_{11}) \end{cases}$$

ÂNGULOS DE EULER → QUATERNION

$$q_{frd/ir}^{frd} = r + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\begin{cases} r = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ x = \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ y = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ z = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{cases}$$