Centro de Instrução Almirante Wandenkolk - CIAW
Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Curso de Aperfeiçoamento Avançado em Sistemas de Armas

SAB: Simulação e Controle de Artefatos Bélicos

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

Jozias **Del Rios** Cap Eng delriosjdrvgs@fab.mil.br (12) 98177-9921

Abril 2018

SIMULAÇÃO E CONTROLE DE ARTEFATOS BÉLICOS

Controle **P**roporcional-**I**ntegral-**D**erivativo

Instrutor: Cap Eng Jozias **DEL RIOS**

Autor do Material: Jozias **DEL RIOS** – rev. 14.dez.2017

TÓPICOS

1. Sistemas de Primeira Ordem
2. Sistemas de Segunda Ordem
3. Lei de Controle **P**roporcional
4. Comportamento Dinâmico
5. Lei de Controle **PI**
6. Lei de Controle **PD**
7. Lei de Controle **PID**
8. Controladores Digitais
9. Múltiplas Malhas
10. Aplicação: controle de rolamento do Exocet

SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

$$x(t) = x_{ref} + (x_0 - x_{ref}) \cdot \exp\left(-\frac{t}{h}\right)$$

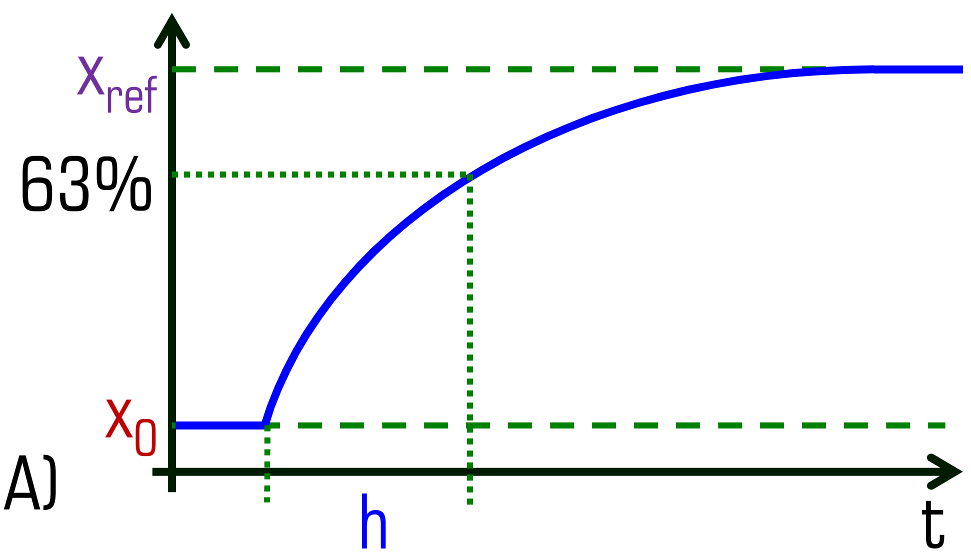
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{h} \cdot \left(x_{ref} - x(t)\right)$$

Entrada "degrau":

- Valor anterior x_0
- Constante de tempo h
- Mudança repentina para x_{ref}
- Amortecido.
- Sem overshoot.
- Sem oscilação.
- Exemplos:

➢ Capacitor elétrico ($h = R\,C$)

➢ Transferência de calor ($h = k\,A$)



SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM – Circuito RC

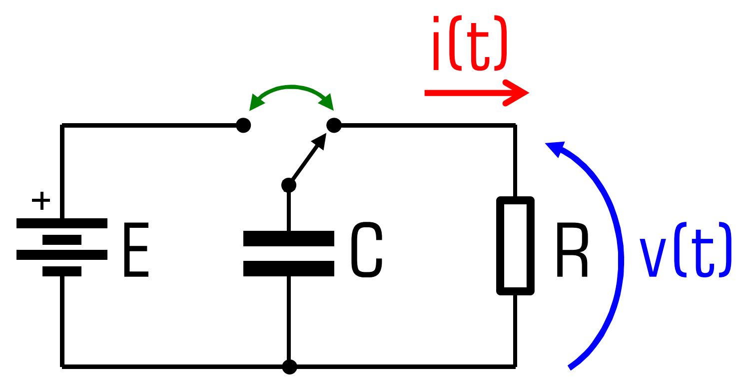
Capacitor: $Q(t) = C\,v(t) \xrightarrow[\text{integrando}]{} i(t) = C\,\dot{v}(t) + i_0$

Inicial: $v_0 = E = R\,i_0 \xrightarrow[\text{isolando}]{\text{substituindo}} \dot{v}(t) = \dfrac{R\,i(t) - E}{R\,C}$

Resistor: $v(t) = -R\,i(t) \xrightarrow[\text{substituindo}]{} \dot{v}(t) = \dfrac{1}{R\,C}\left(E - v(t)\right)$

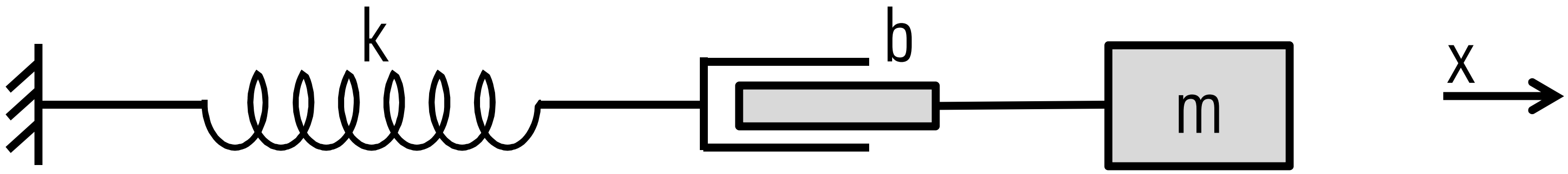
Descarregamento:

$$\boxed{v(t) = E \cdot \exp\left(-\frac{t}{R\,C}\right)}$$



SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

PROBLEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



Equação Diferencial: $m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0$

Solução: $x(t) = A \cdot \exp(-\zeta\,\omega_n\,t) \cdot \cos(\omega_d\,t + \varphi)$

Coef. de amortecimento: $\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{k\,m}}$

Freq. natural: $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Freq. amortecida: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

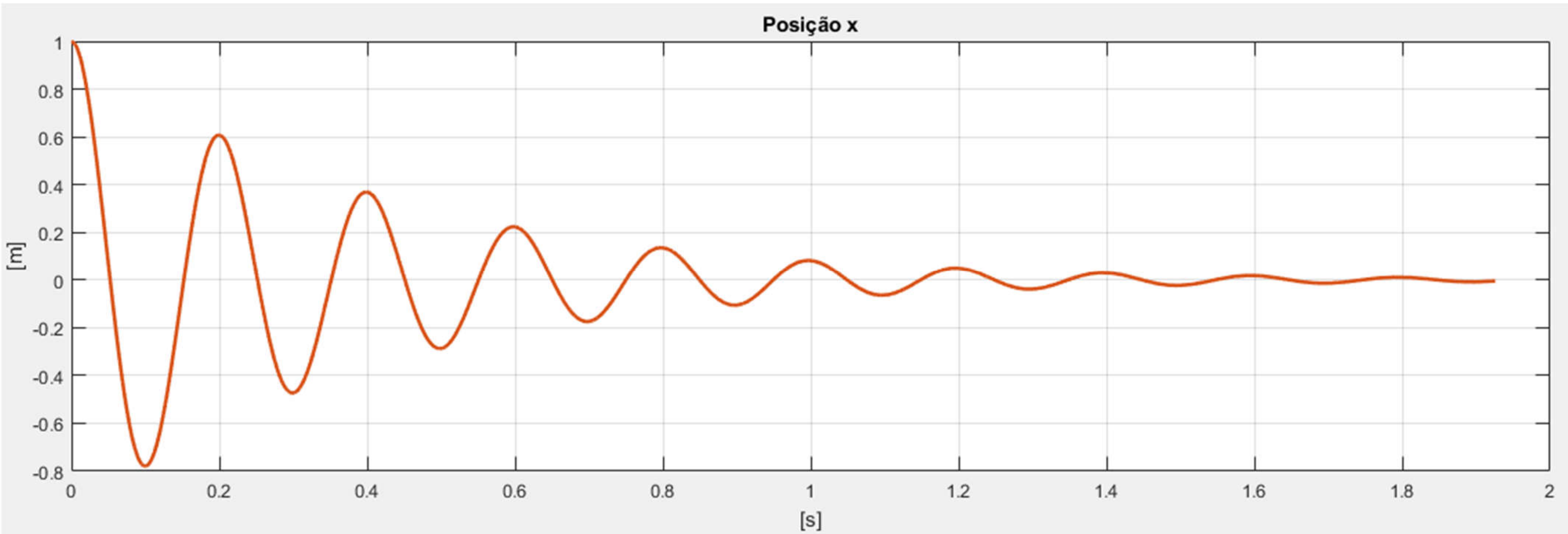
Condições iniciais:

$$\varphi = -\operatorname{atan}\left(\frac{\zeta\,\omega_n\,x_0 + v_0}{x_0\,\omega_d}\right)$$

$$A = x_0 \sec\varphi$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\,\omega_n\,\dot{x} + \omega_n^2\,x = 0}$$

PROBLEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR



$m = 1\,\text{kg}$

$k = 1000\,\text{N/m}$

$b = 5\,\text{kg/s}$

$x_0 = 1\,\text{m}$

$v_0 = 0\,\text{m/s}$

$\zeta \cong 0{,}0791$

$\omega_n \cong 31{,}62\,\text{rad/s}$

$\omega_d \cong 31{,}52\,\text{rad/s}$

$A \cong 1{,}0031\,\text{m}$

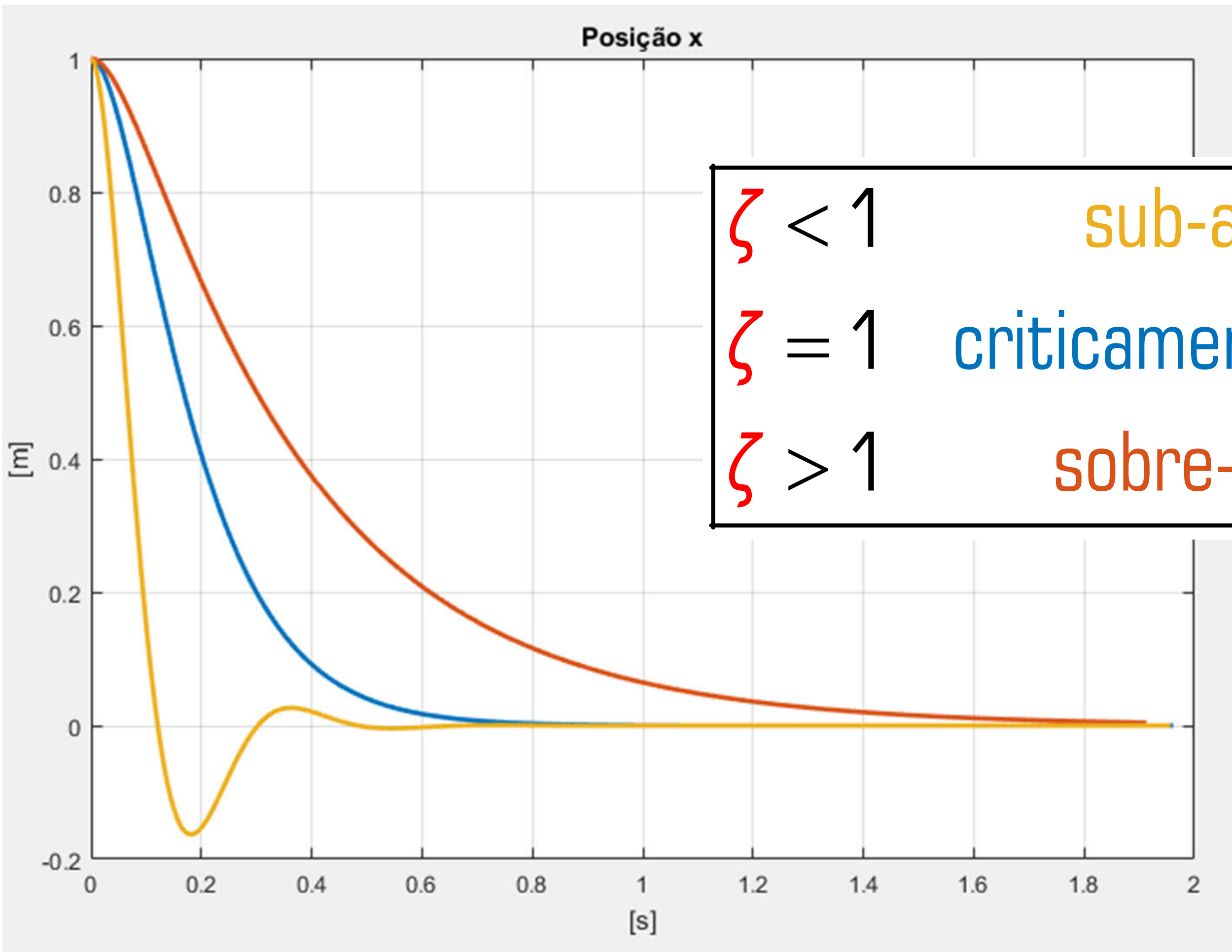
$\varphi \cong -0{,}5^{\circ}$

$(\omega_n \zeta) \cong 0{,}40\,\text{s}$

$2\pi/\omega_d \cong 0{,}199\,\text{s}$

SISTEMA DE SEGUNDA ORDEM

COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO

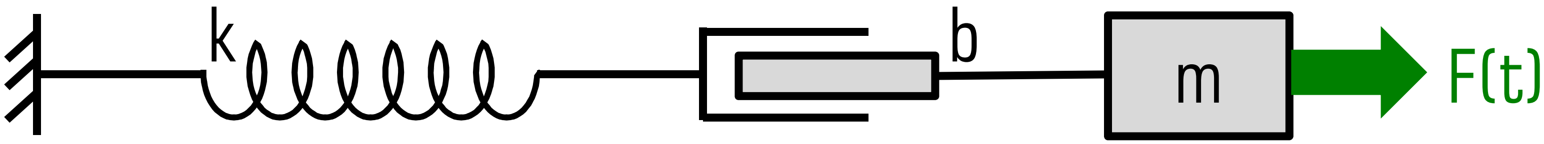


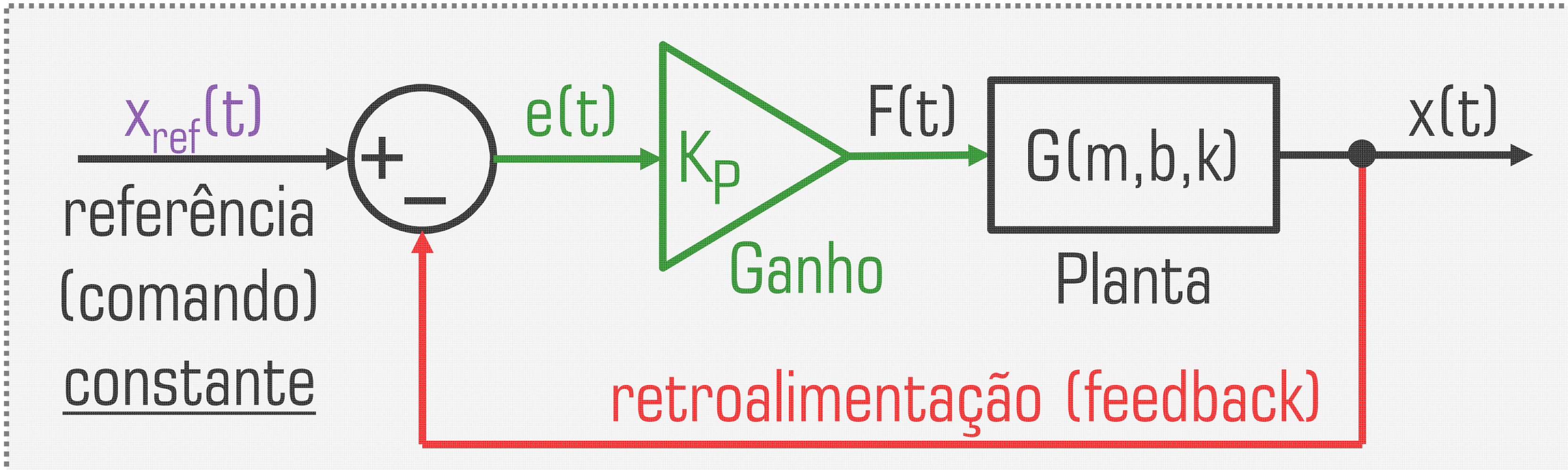
$\zeta < 1$	sub-amortecido
$\zeta = 1$	criticamente amortecido
$\zeta > 1$	sobre-amortecido

LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

LEI DE CONTROLE PROPORCIONAL





$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = K_P \cdot e(t) = K_P \cdot (x_{ref} - x)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (k + K_P)x = K_P\, x_{ref}$$

Solução geral: $x(t) = A' \cdot \exp(-\zeta' \omega'_n\, t) \cdot \cos(\omega'_d\, t + \varphi') + \dfrac{K_P}{k + K_P} x_{ref}$

LEI DE CONTROLE PROPORCIONAL

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + \left(k + K_P\right)x \quad = \quad K_P\, x_{ref}$$

Solução geral: $x(t) = A' \cdot \exp\left(-\zeta' \omega'_n t\right) \cdot \cos\left(\omega'_d t + \varphi'\right) + x_\infty$

$$\zeta' = \frac{b}{2\sqrt{\left(k + K_P\right)m}} \qquad \omega'_n = \sqrt{\frac{\left(k + K_P\right)}{m}} \qquad \omega'_d = \omega'_n \sqrt{1 - \zeta'^2}$$

Valor em Regime, após Transientes: $x_\infty = \dfrac{K_P}{k + K_P} x_{ref}$

$$A' = \frac{1}{\cos\varphi'}\left(x_0 - x_\infty\right) \qquad \varphi' = \arctan\left(\frac{1}{\omega'_d}\frac{v_0}{\left(x_\infty - x_0\right)} - \frac{\zeta'}{\sqrt{1 - \zeta'^2}}\right)$$

DINÂMICA – CONTROLE PROPORCIONAL

$$\begin{cases} m = 1\,\text{kg} \\ b = 5\,\text{kg/s} \\ k = 10\,\text{N/m} \end{cases}$$

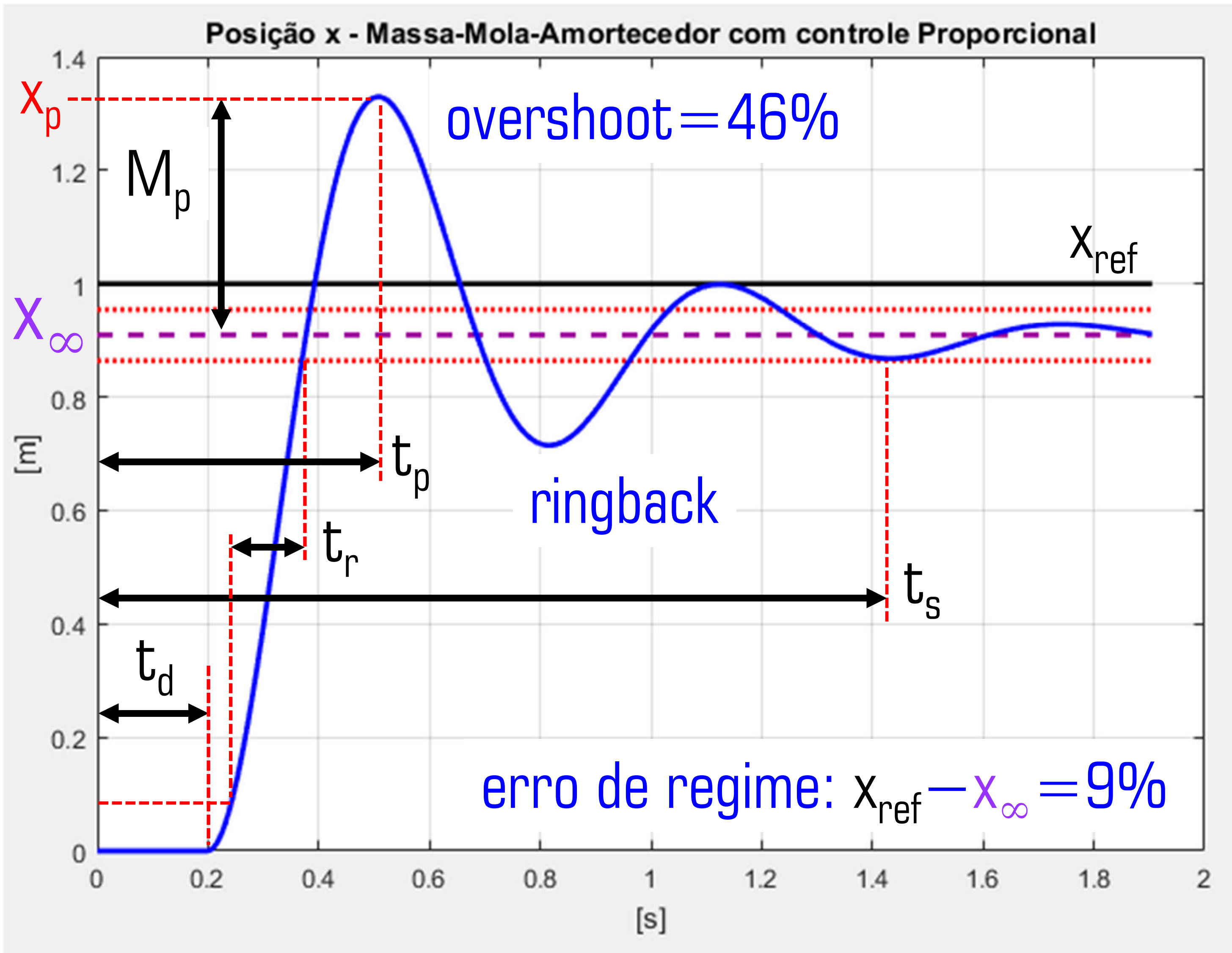
$$\begin{cases} x_0 = 0\,\text{m} \\ v_0 = 0\,\text{m/s} \end{cases}$$

$x_{ref} = 1{,}0\,\text{m}$

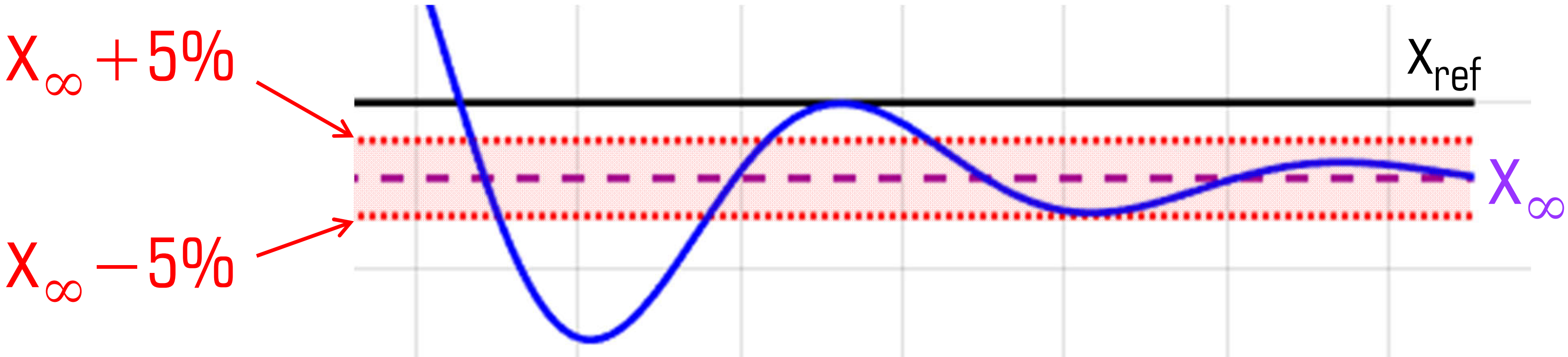
$t_d = 0{,}20\,\text{s}$

$K_P = 100\,\text{N/m}$

$$\begin{cases} x_\infty = 0{,}91\,\text{m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0{,}51\,\text{s} \\ t_r = 0{,}12\,\text{s} \\ t_s = 1{,}23\,\text{s} \end{cases}$$



COMPORTAMENTO DINÂMICO



x_∞ = valor final médio em regime (steady-state)

M_p = sobrepassagem (overshoot) = $(x_p - x_\infty)/x_\infty$

e_{ss} = erro de regime (steady-state error) = $x_{ref} - x_\infty$

t_s = tempo de estabilização (settling-time) = faixa $\pm 5\%$ de x_∞

t_d = tempo de atraso (delay, dead time)

t_p = tempo para o pico (peak-time)

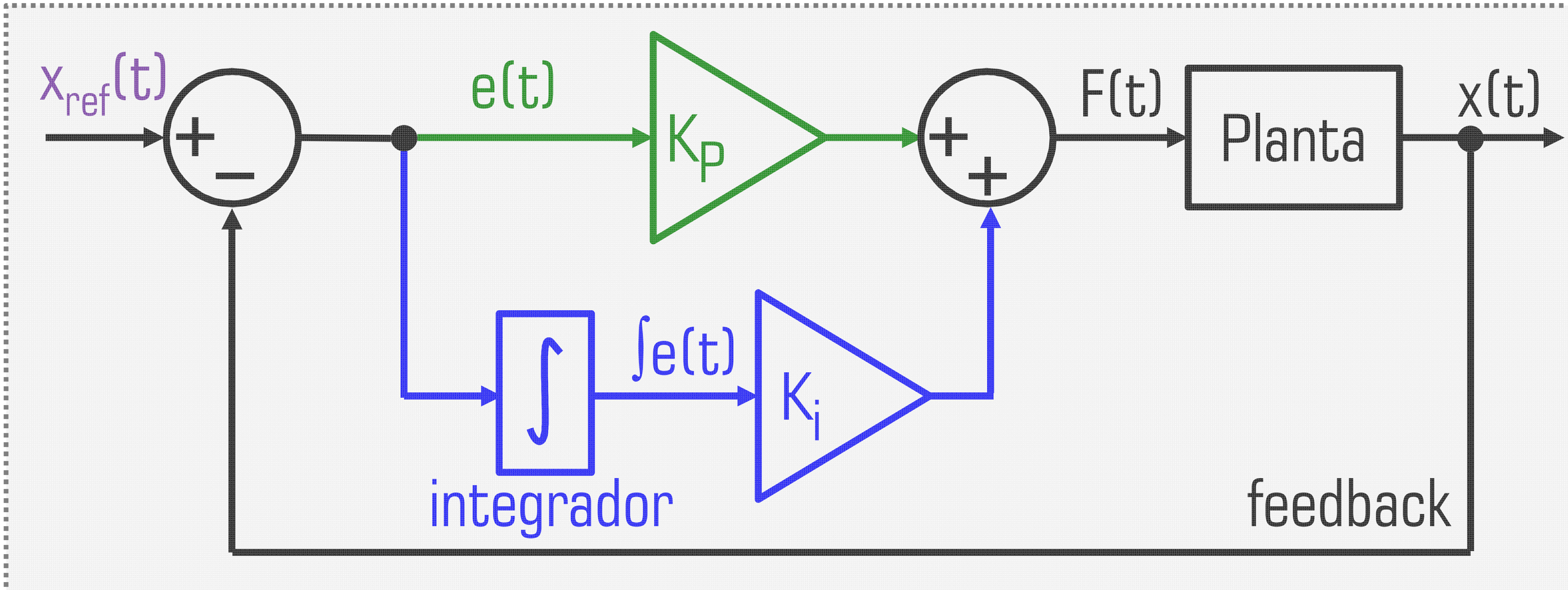
t_r = tempo de subida de 10% até 90% (rise-time)

LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

INTEGRAL

CONTROLE PROPORCIONAL-INTEGRAL



$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+k\,x(t) \;=\; F(t) \;=\; K_P\,e(t) \;+\; K_i\int e(t)\,dt$$

$$e_i(t)=\int e(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad \boxed{\dot{e}_i(t)=e(t)}\ \text{(estado extra)}$$

$$m\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+k\,x(t) \;=\; K_P\,e(t) \;+\; K_i\,e_i(t)$$

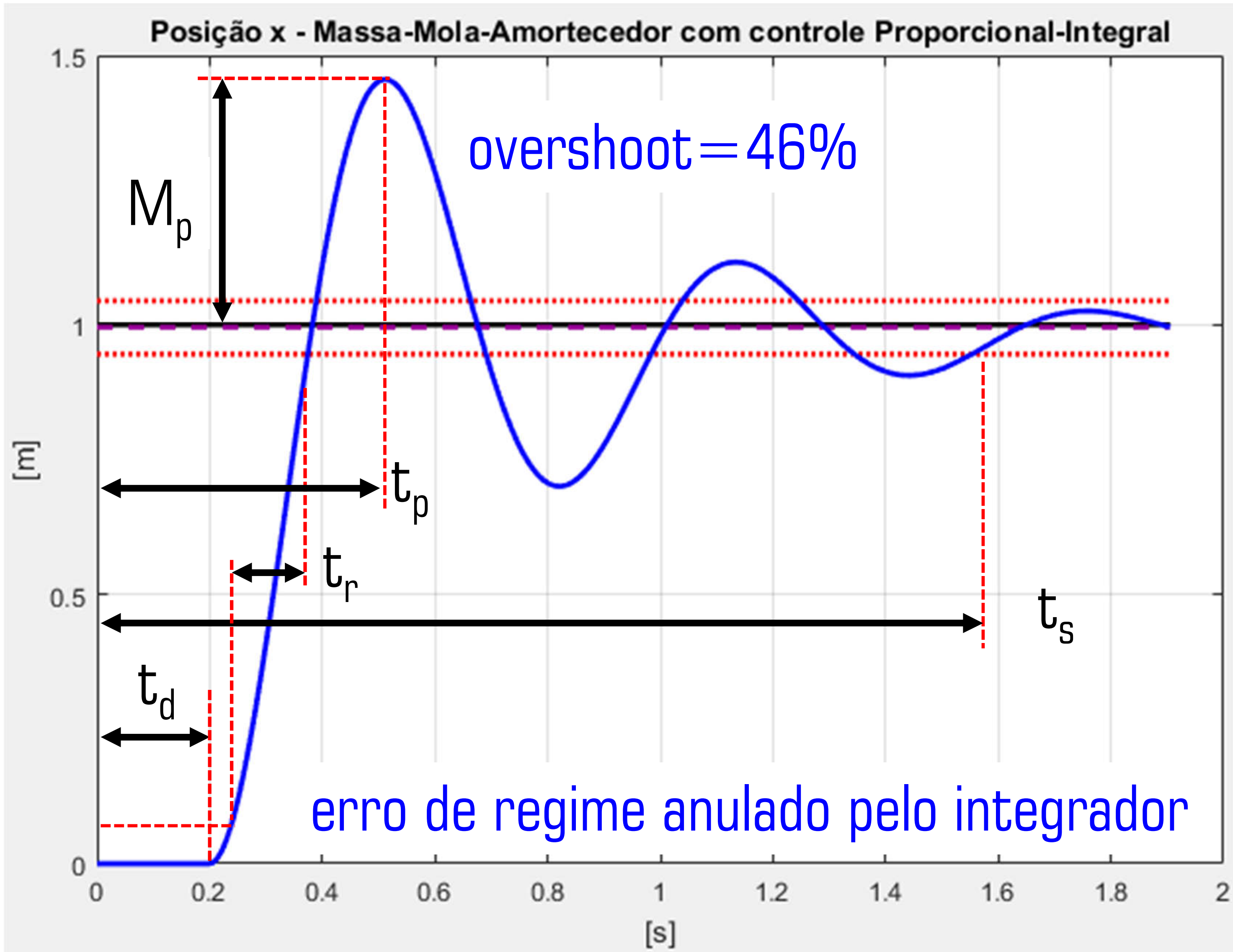
COMPORTAMENTO – CONTROLE PI

$K_p = 100\ \text{N/m}$

$$\begin{cases} x_\infty = 0{,}91\ \text{m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0{,}51\ \text{s} \\ t_r = 0{,}12\ \text{s} \\ t_s = 1{,}23\ \text{s} \end{cases}$$

$K_i = 100\ \text{N/m.s}$

$$\begin{cases} x_\infty = 0{,}995\ \text{m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0{,}51\ \text{s} \\ t_r = 0{,}12\ \text{s} \\ t_s = 1{,}55\ \text{s} \nearrow \end{cases}$$

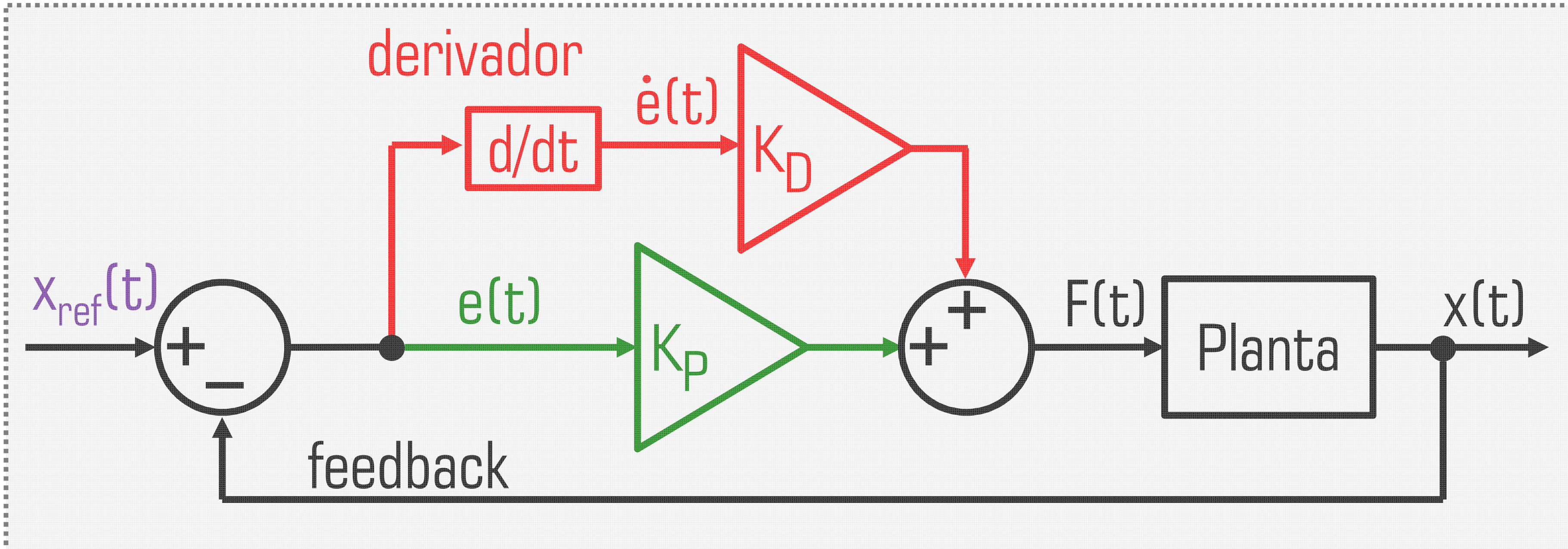


LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

DERIVATIVO

CONTROLE **PD**: Proporcional-Derivativo



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \;=\; F(t) \;=\; K_P\, e(t) \;+\; K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

$$e(t) = x_{ref} - x(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{e}(t) = -\dot{x}(t)$$

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)x \;=\; K_P\, x_{ref}$$

LEI DE CONTROLE PD

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)x = K_P x_{ref}$$

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\dot{x} + (k + K_P)(x - x_\infty) = 0$$

Valor em Regime, após Transientes: $x_\infty = \dfrac{K_P}{k + K_P} x_{ref}$

Solução geral: $x(t) = A'' \cdot \exp(-\zeta'' \omega_n'' t) \cdot \cos(\omega_d'' t + \varphi'') + x_\infty$

$$\zeta'' = \frac{b + K_D}{2\sqrt{(k + K_P)m}} \qquad \omega_n'' = \sqrt{\frac{(k + K_P)}{m}} \qquad \omega_d'' = \omega_n' \sqrt{1 - \zeta''^2}$$

$$A'' = \frac{1}{\cos\varphi''}(x_0 - x_\infty) \qquad \varphi'' = \arctan\left(\frac{1}{\omega_d''}\frac{v_0}{(x_\infty - x_0)} - \frac{\zeta''}{\sqrt{1 - \zeta''^2}}\right)$$

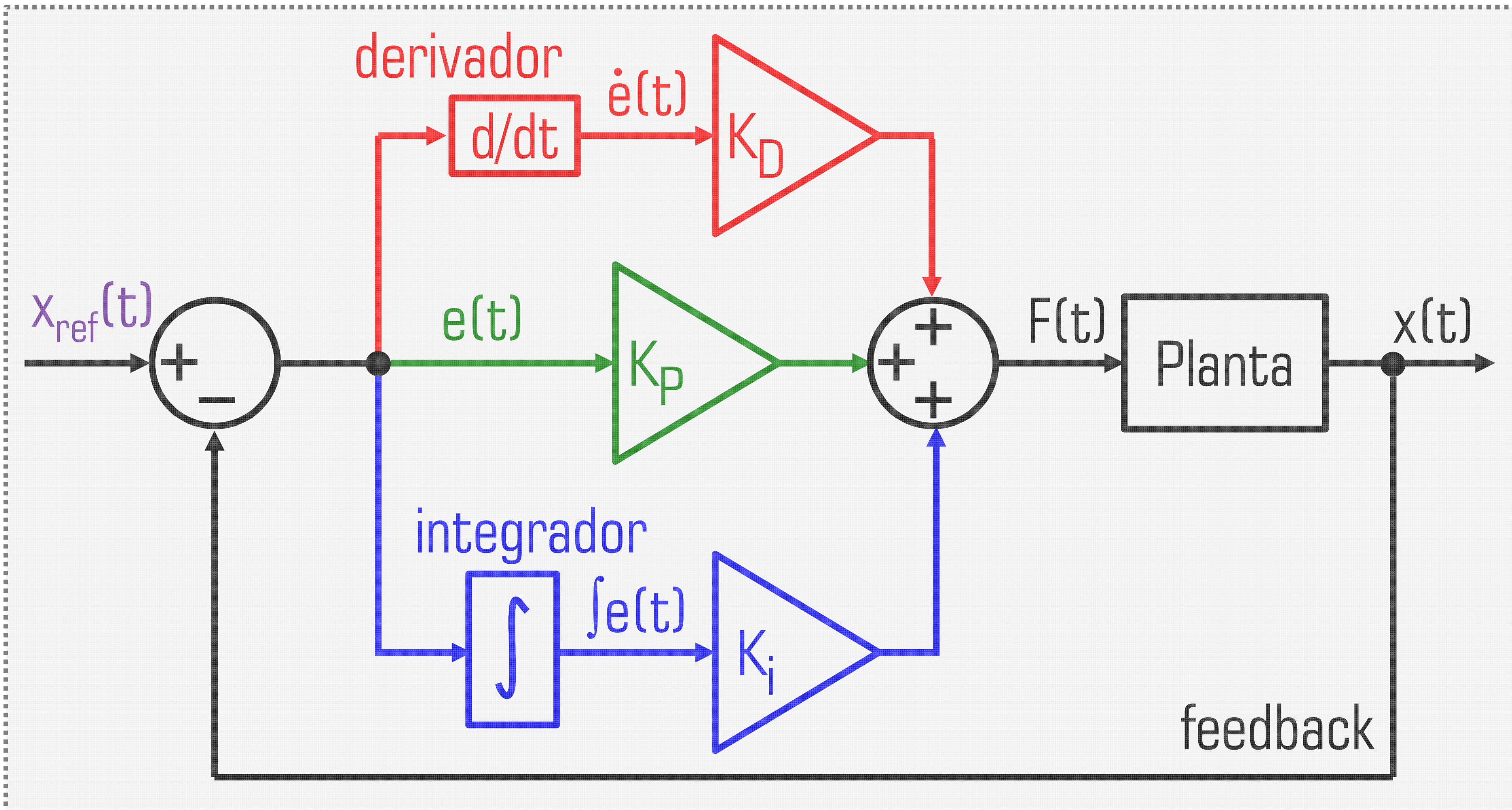
LEI DE CONTROLE

PROPORCIONAL

INTEGRAL

DERIVATIVO

CONTROLE PID: Prop Integ Deriv

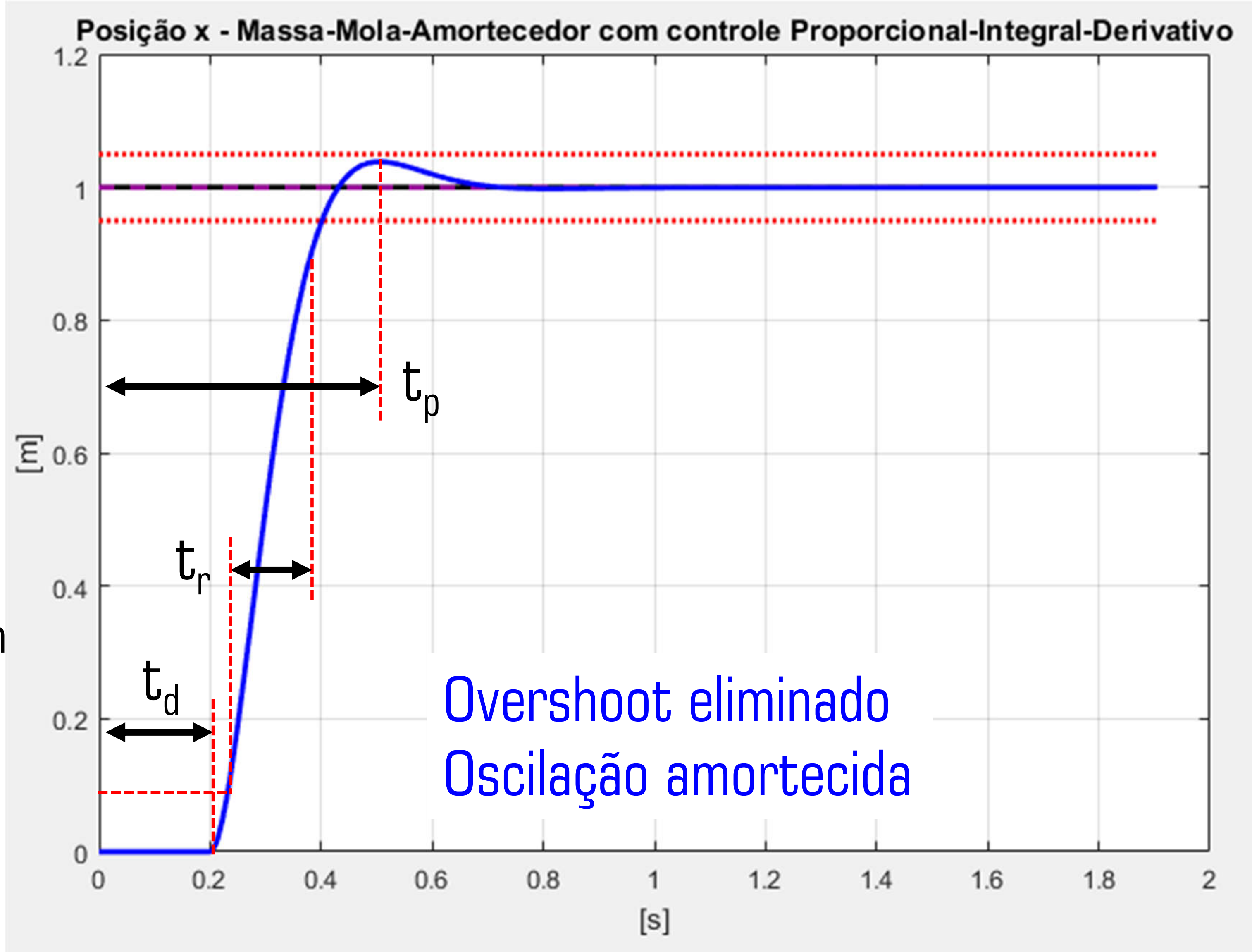


COMPORTAMENTO – CONTROLE **PID**

$$\begin{cases} x_\infty = 0{,}995\ \text{m} \\ M_p = 46\% \\ t_p = 0{,}51\ \text{s} \\ t_r = 0{,}12\ \text{s} \\ t_s = 1{,}55\ \text{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_p = 200\ \text{N/m} \\ K_i = 100\ \text{N/m.s} \\ K_d = 15\ \text{N.s/m} \end{cases}$$

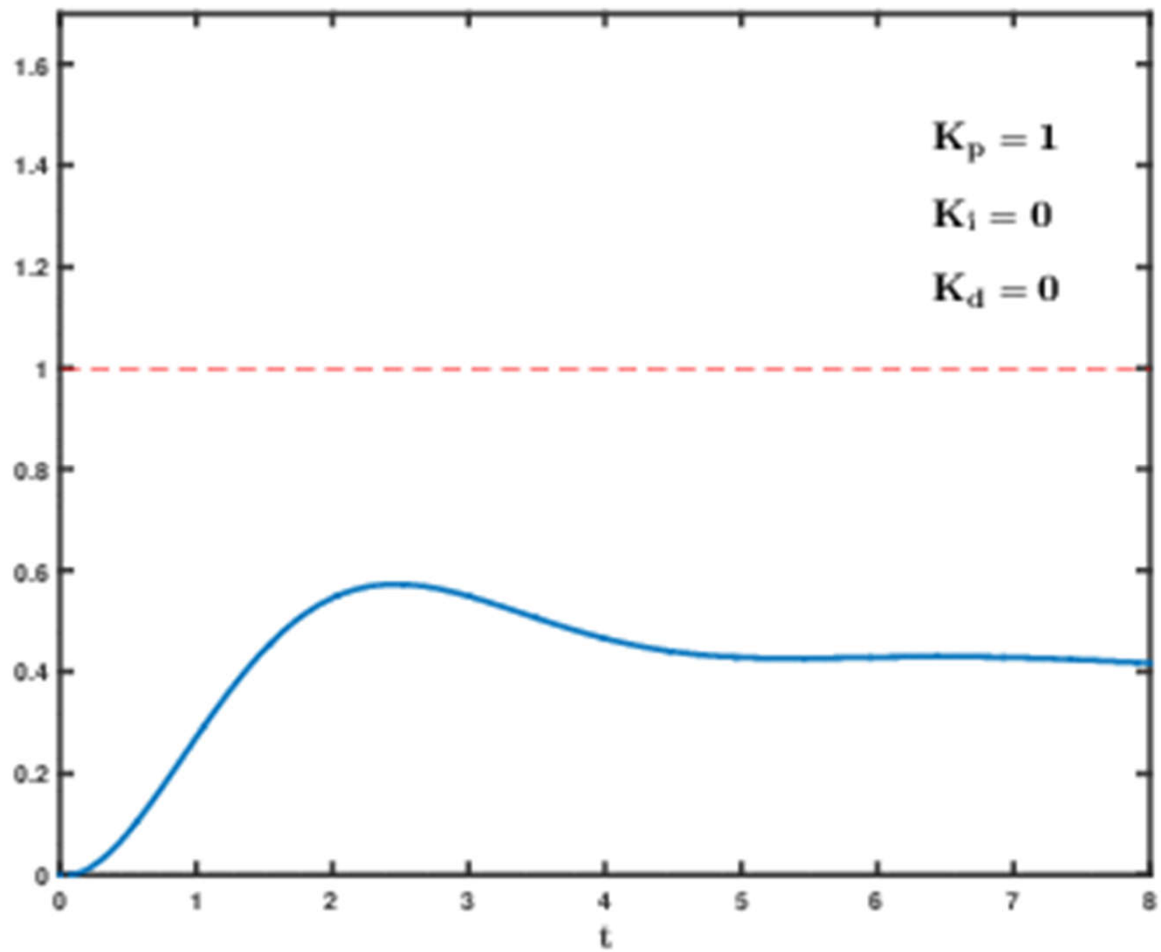
$$\begin{cases} x_\infty = 0{,}9995\ \text{m} \\ M_p = 3{,}9\ \% \searrow \\ t_p = 0{,}50\ \text{s} \searrow \\ t_r = 0{,}15\ \text{s} \nearrow \end{cases}$$



GANHOS DO CONTROLADOR **PID**

Ganho	Tempo de Subida	Overshoot	Tempo de Acomodação	Erro de Regime	Estabilidade
K_P	☺☺	☹☹☹	---	☺☺	☹☹
K_i	☺☺	☹☹☹	☹☹☹	☺☺☺☺	☹☹
K_D	☹	☺☺☺☺	☺☺☺☺	---	☺

TUNNING CONTROLADOR **PID**



http://en.wikipedia.org/wiki/File:PID_Compensation_Animated.gif

CONTROLADORES DIGITAIS

Controlador Digital é discretizado no tempo.

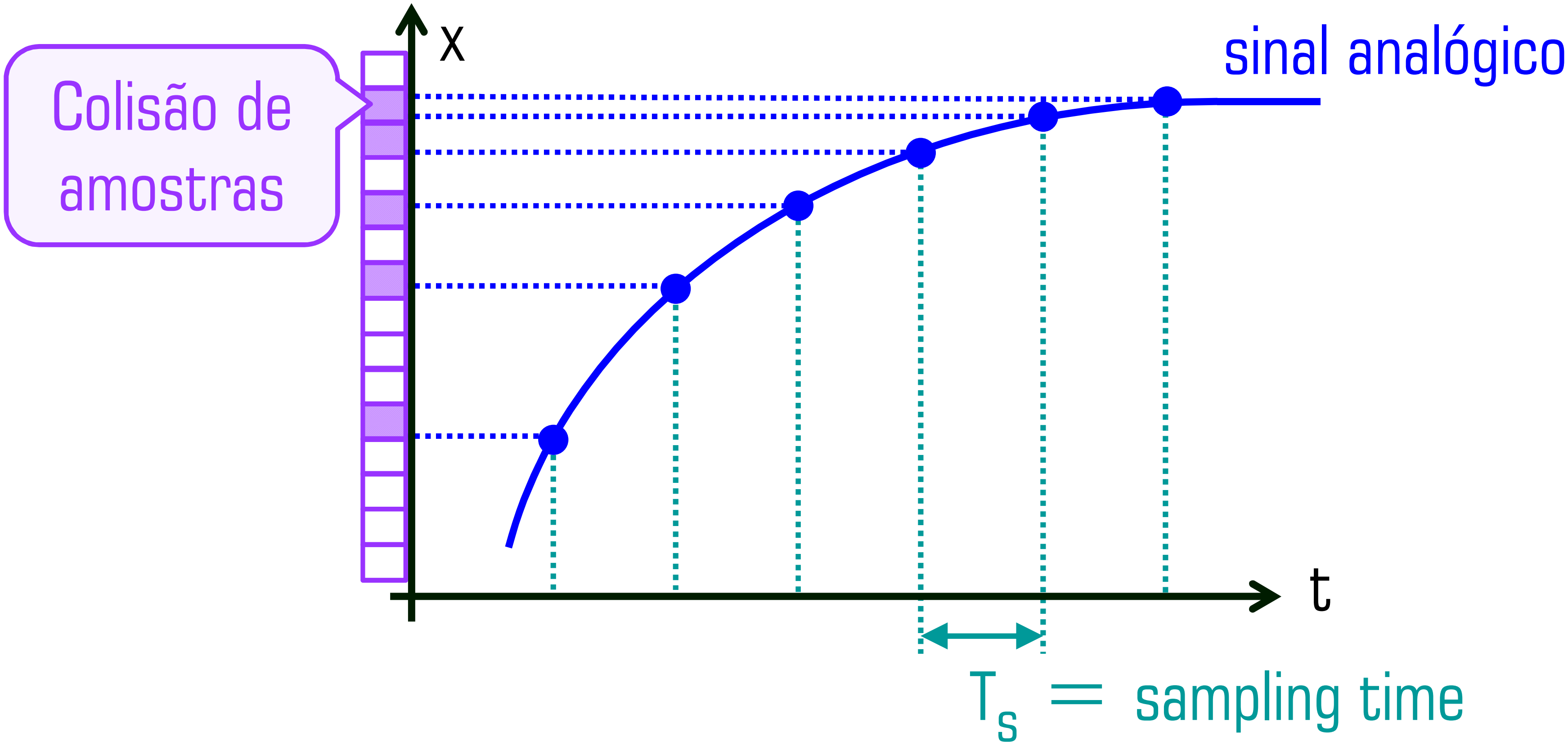
Realiza o seguinte ciclo completo a cada período fixo T_S:

- Amostragem dos sensores (encoder, girômetro, corrente, ...
  - Inserção de erro de quantização, bias, escala, ruído, ...
- Filtragem dos sensores: anula ruídos e ressonâncias...
- Processamento digital da Lei de Controle: **PID**, ...
- Anti-windup do integrador: saturação (clamp) do erro integrado.
- Saturação (clamp) do comando de controle (100% **PWM**).
- Piso mínimo de amplitude p/ retirar zona morta (atrito seco).
- Saída é o duty-cycle de **PWM** para o motor do atuador.

SINAL DIGITAL: DISCRETIZAÇÃO e QUANTIZAÇÃO

Discretização: Taxa de amostragem do sinal (temporal)

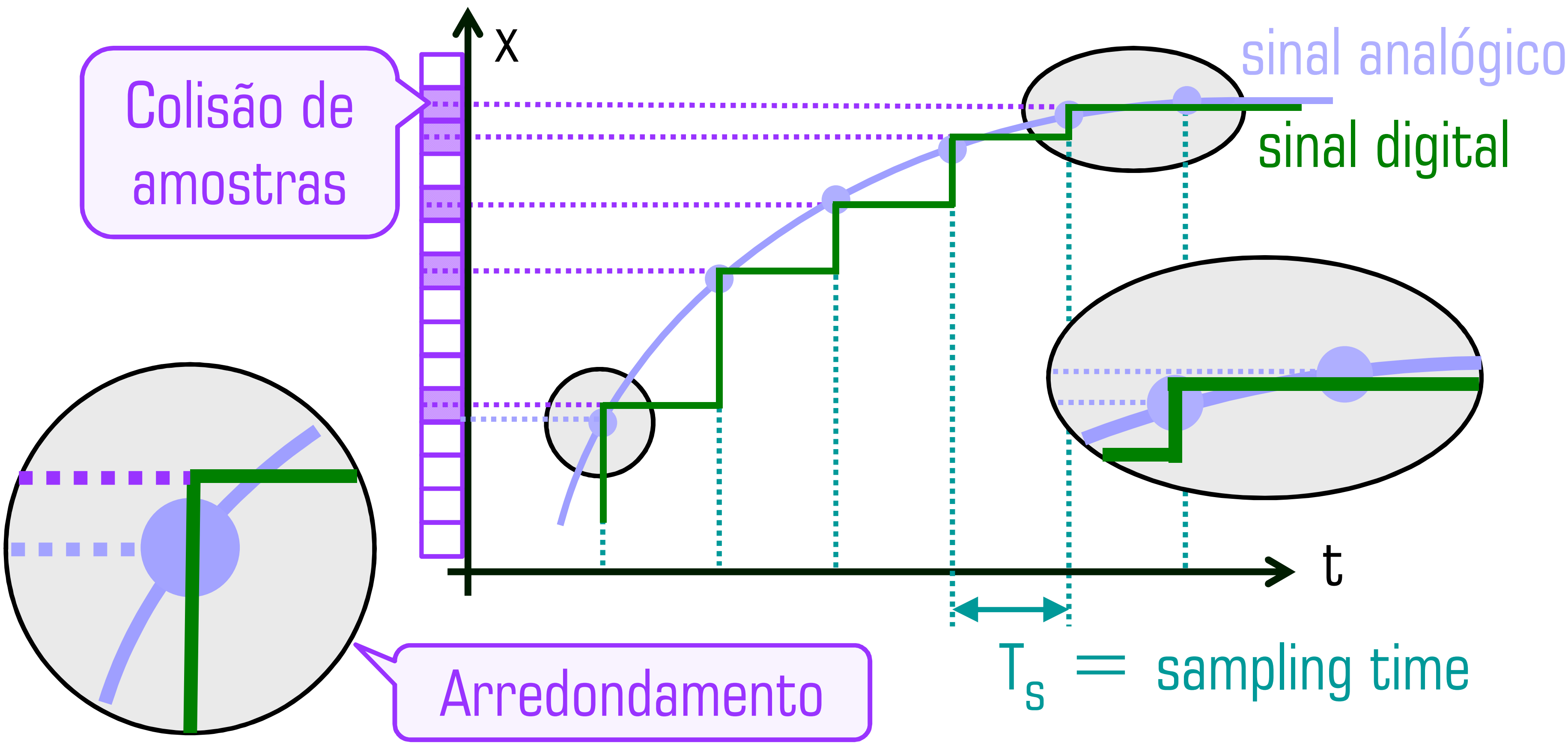
Quantização: Resolução de sensor e de atuação (amplitude)



SINAL DIGITAL: DISCRETIZAÇÃO e QUANTIZAÇÃO

Discretização: Taxa de amostragem do sinal (temporal)

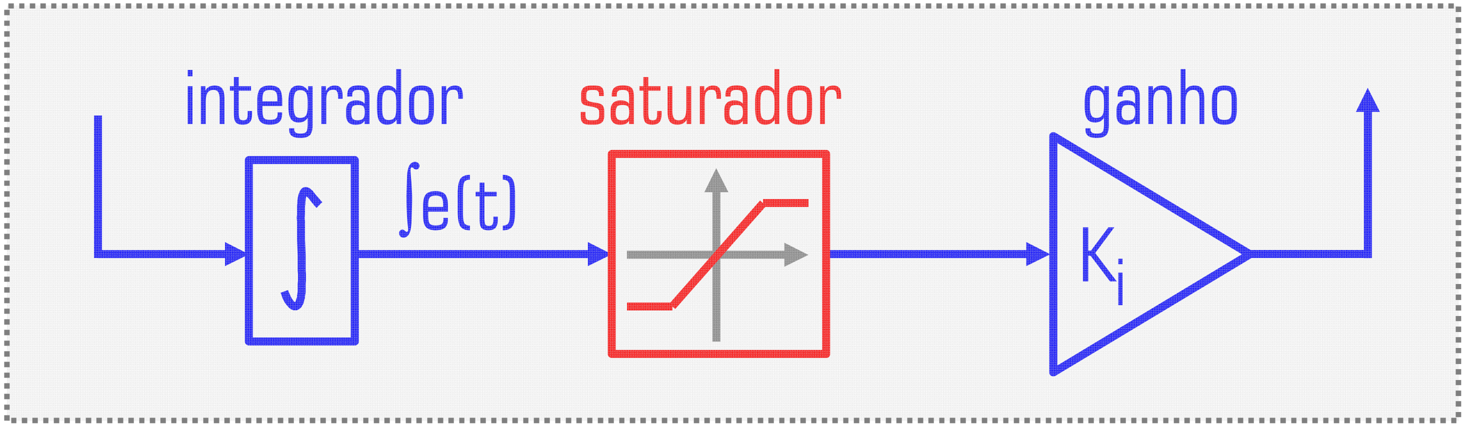
Quantização: Resolução de sensor e de atuação (amplitude)




5,2
5
4,8
4,6
4,4
4,2
4
3,8
3,6
3,4
3,2
3
2,8
2,6
2,4
2,2
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2

CONTROLE **PID** : ANTI-WINDUP do INTEGRADOR

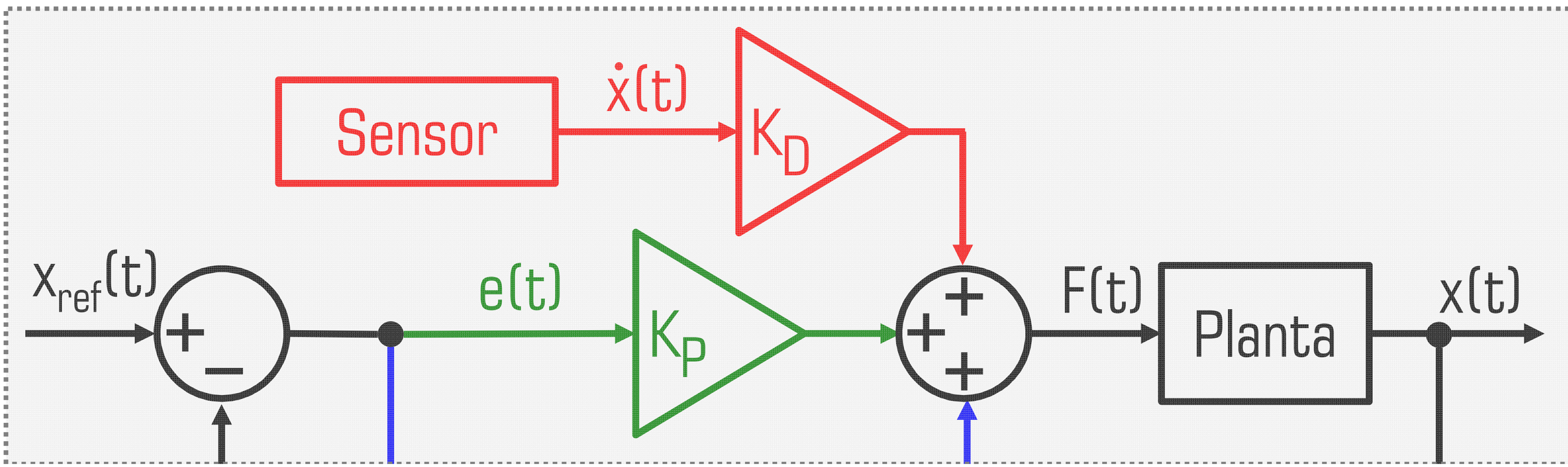
- Anti-windup do integrador evita que uma grande diferença por longa duração entre o sinal de referência e o sinal medido cause uma ultracompensação posterior, desestabilizando o controle.
  - Ocorre tipicamente quando uma perturbação externa temporária é mais forte do que o controle consegue lidar.



TACÔMETRO / GIRÔMETRO

- Sinal derivado convém ser medido por sensor específico ao invés de ser calculado numericamente do sensor de posição.
  - Tacômetro: mede a velocidade de um eixo (Gerador DC)
  - Girômetro: mede a velocidade angular inercial.

➢ Sinal medido pelo sensor mede a derivada do sinal que se está controlando x(t), ao invés do sinal erro e(t).

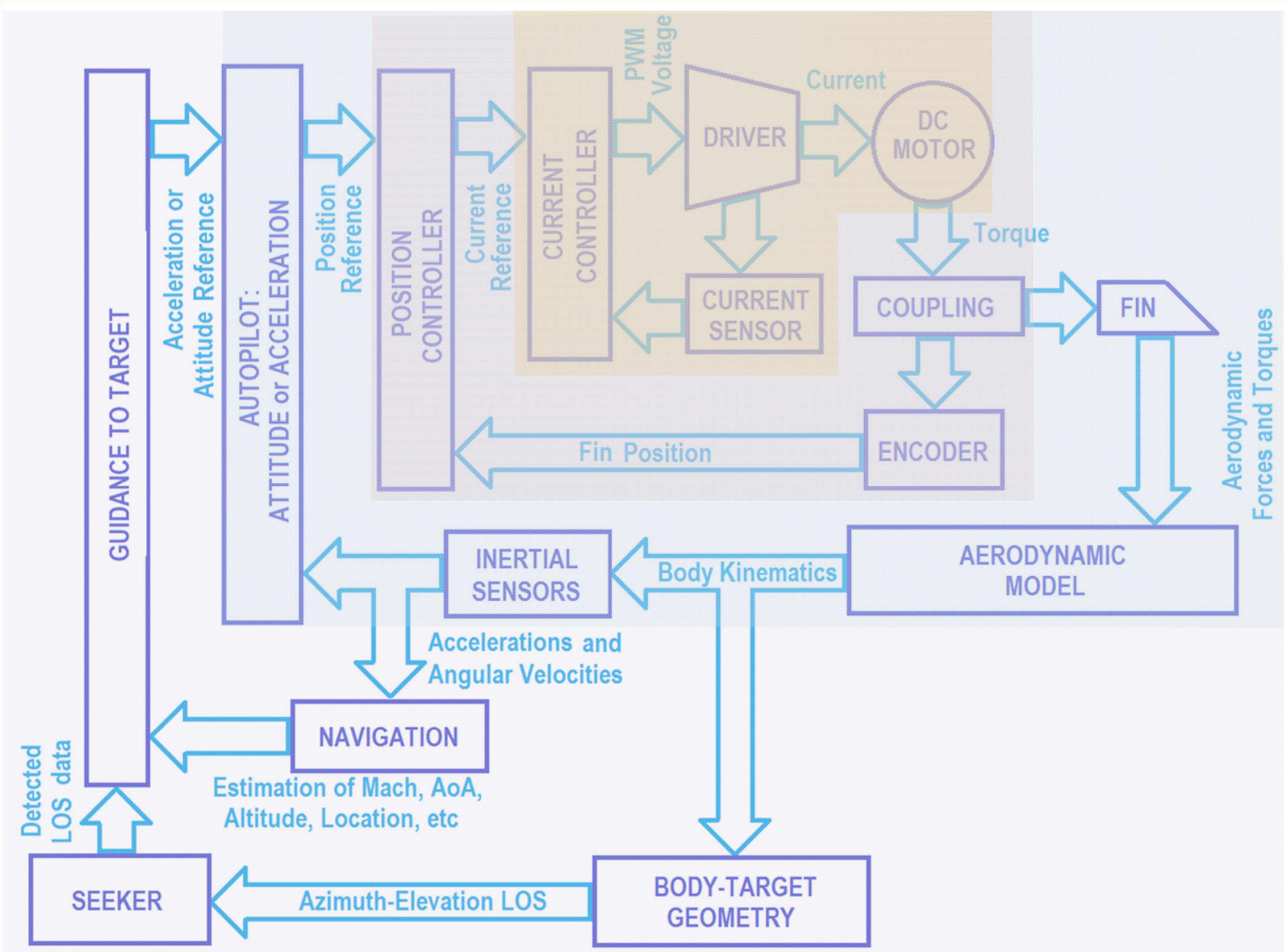


LEI DE CONTROLE **PID** DISCRETIZADA

$$F(t) = K_P\, e(t) + K_i \int e(t)\,dt + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

Discretização: $\boxed{t = k \cdot T_S}$ $\Rightarrow$ $e[k] = e(k \cdot T_S)$

$$\begin{cases} F[k] = K_p\, e[k] + K_i\, e_i[k] + K_d \overbrace{\boxed{T_S^{-1}\left(e[k] - e[k-1]\right)}}^{\text{derivada}} \\ e_i[k] = e_i[k-1] + \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} T_S \left(e[k] + e[k-1]\right)}}_{\text{integral (trapezoidal)}} \end{cases}$$


GUIDANCE TO TARGET
Acceleration or Attitude Reference
AUTOPILOT: ATTITUDE or ACCELERATION
Position Reference
POSITION CONTROLLER
Current Reference
CURRENT CONTROLLER
PWM Voltage
DRIVER
Current
DC MOTOR
CURRENT SENSOR
Torque
COUPLING
FIN
ENCODER
Fin Position
Aerodynamic Forces and Torques
AERODYNAMIC MODEL
INERTIAL SENSORS
Body Kinematics
Accelerations and Angular Velocities
NAVIGATION
Estimation of Mach, AoA, Altitude, Location, etc
Detected LOS data
SEEKER
Azimuth-Elevation LOS
BODY-TARGET GEOMETRY

CONTROLE PD GUINADA do EXOCET

$$\delta_{yaw} = K_P(\psi_{AD}) + \cancel{K_i}\int(\psi_{AD} - \psi)dt - K_D r$$

$$\psi_{AD} = \psi_{ref} - \psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_{yaw} = K_P\psi_{ref} - K_P\psi - K_D r}$$

$$M_Z = q_\infty S_{ref} L_{ref} C_n + F_Y(x_{ref} - x_{cm})$$

$$F_Y = q_\infty S_{ref} C_Y \qquad \boxed{q_\infty = \tfrac{1}{2}\rho v_a^2 = \text{constante}}$$

$$\begin{cases} C_n = \beta C_{nb} + r C_{nr} d + C_{n\delta}\delta_{yaw} \\ C_Y = \beta C_{Yb} + r C_{Yr} d + C_{Y\delta}\delta_{yaw} \end{cases} \qquad \boxed{d = \frac{L_{ref}}{2v_a}}$$

$$\dot\psi = q\,\cancel{\text{sen}\varphi}\,\cancel{\sec\theta} + r\cos\varphi\,\cancel{\sec\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r \cong \dot\psi}$$

$$\ddot\psi = J_{zz}^{-1}\left(M_Z + \cancel{p}\,\cancel{q}\left(J_{xx} - J_{yy}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot\psi \cong M_Z/J_{zz}}$$

$$\beta = \cancel{\arctan(v/u)} - \psi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta \cong -\psi}$$

CONTROLE PD GUINADA do EXOCET

$$J_{zz}\,\ddot{\psi} = q_{\infty} S_{ref} L_{ref} C_n + q_{\infty} S_{ref} C_Y \left(x_{ref} - x_{cm}\right)$$

$$\left(\frac{J_{zz}}{q_{\infty} S_{ref} L_{ref}}\right)\ddot{\psi} = C_n + C_Y\, b$$

$$\boxed{b = \frac{\left(x_{ref} - x_{cm}\right)}{L_{ref}}} \qquad \boxed{J'_{zz} = \frac{J_{zz}}{q_{\infty} S_{ref} L_{ref}}}$$

$$J'_{zz}\,\ddot{\psi} = \left(-\psi C_{nb} + \dot{\psi} C_{nr} d + C_{n\delta}\,\delta_{yaw}\right) + b\left(-\psi C_{Yb} + \dot{\psi} C_{Yr} d + C_{Y\delta}\,\delta_{yaw}\right)$$

$$J'_{zz}\,\ddot{\psi} = \left(C_{nr} d + C_{Yr} b\, d\right)\dot{\psi} - \left(C_{nb} + b\, C_{Yb}\right)\psi + \underbrace{\left(C_{n\delta} + b\, C_{Y\delta}\right)}_{C'_{n\delta}}\delta_{yaw}$$

$$J'_{zz}\,\ddot{\psi} + \left(-C_{nr} d - C_{Yr}\, b\, d\right)\dot{\psi} + \left(C_{nb} + b\, C_{Yb}\right)\psi = C'_{n\delta}\left(K_P \psi_{ref} - K_P\,\psi - K_D\,\dot{\psi}\right)$$

$$J'_{zz}\,\ddot{\psi} + \left(-C_{nr} d - C_{Yr}\, b\, d + K_D\, C'_{n\delta}\right)\dot{\psi} + \left(C_{nb} + b\, C_{Yb} + K_P\, C'_{n\delta}\right)\psi = C'_{n\delta}\, K_P\, \psi_{ref}$$

$$\left(\frac{J'_{zz}}{C'_{n\delta}}\right)\ddot{\psi} + \left(-\frac{C_{nr}}{C'_{n\delta}} d - \frac{C_{Yr}}{C'_{n\delta}} b\, d + K_D\right)\dot{\psi} + \left(\frac{C_{nb}}{C'_{n\delta}} + b\,\frac{C_{Yb}}{C'_{n\delta}} + K_P\right)\psi = K_P\,\psi_{ref}$$

CONTROLE PD GUINADA do EXOCET

$$\left(\frac{J'_{zz}}{C'_{n\delta}}\right)\ddot{\psi}+\left(-\frac{C_{nr}}{C'_{n\delta}}d-\frac{C_{Yr}}{C'_{n\delta}}b\,d+K_D\right)\dot{\psi}+\left(\frac{C_{nb}}{C'_{n\delta}}+b\frac{C_{Yb}}{C'_{n\delta}}+K_P\right)\psi=K_P\,\psi_{ref}$$

Equivalência: $\boxed{m\ddot{x}+(b+K_D)\ddot{x}+(k+K_P)x=K_P\,x_{ref}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m=\frac{J'_{zz}}{C'_{n\delta}}} \quad \boxed{b=-\frac{C_{nr}}{C'_{n\delta}}d-\frac{C_{Yr}}{C'_{n\delta}}b\,d} \quad \boxed{k=\frac{C_{nb}}{C'_{n\delta}}+b\frac{C_{Yb}}{C'_{n\delta}}}$$

$$\boxed{J'_{zz}=\frac{J_{zz}}{q_\infty S_{ref}L_{ref}}} \quad \boxed{b=\frac{(x_{ref}-x_{cm})}{L_{ref}}} \quad \boxed{d=\frac{L_{ref}}{2v_a}} \quad \boxed{C'_{n\delta}=C_{n\delta}+b\,C_{Y\delta}}$$

EXERCÍCIOS CONTROLE EXOCET

1. (3,0) Equacione a dinâmica do movimento em rolamento (φ) do míssil Exocet (`exocet_6dof`) com controlador **PD**.

- Utilize os parâmetros presentes em `exocet_roll_tune`.
- Use as aproximações: $\theta = q = r = 0$
- A partir das equações de dinâmica, obtenha:

$$(A)\ddot{\varphi} + (B + K_D)\dot{\varphi} + (C + K_P)\varphi = K_P\ \varphi_{ref}$$

- Compare com a equação da Massa/Mola/Amortecedor:

$$m\ddot{x} + (b + K_D)\ddot{x} + (k + K_P)x = K_P\ x_{ref}$$

- Obtenha as fórmulas para m, b e k e insira no código.

→ Copie para o relatório a resolução e as fórmulas.

EXERCÍCIOS CONTROLE EXOCET

2. (2,0) Executando o código `exocet_roll_tune(Kp, Kp)`
   - Obtenha ganhos $\mathbf{K_P}$ e $\mathbf{K_D}$ que satisfaçam:
     - Overshoot $M_P < 15\%$.
     - Tempo de subida $t_r < 250$ ms.
     - Tempo de acomodação (se oscilar) $t_s < 750$ ms.
     - → Copie o gráfico resultante e as saídas de texto.
     - Dica: m=0,065261 b=0,348555 k=0,000000
3. (3,0) Termine o código de simulação `exocet_6dof`.
   - → Apresente os gráficos e as saídas de texto.