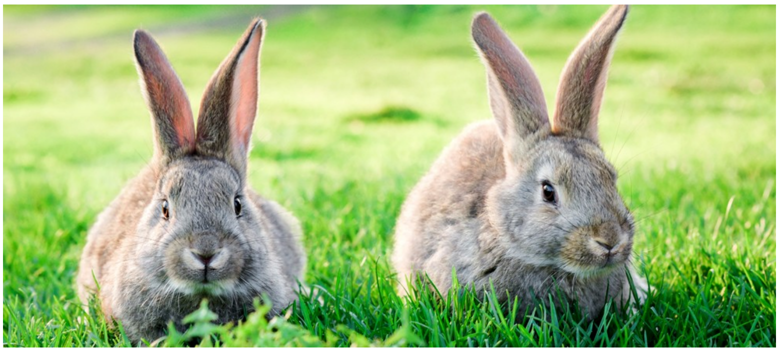
Groupe 4
Prof : Josselin

La suite de Fibonacci

Voici le problème que s’est posé Fibonacci, un mathématicien italien en 1 202.
Il voulait étudier la progression de naissances de lapins, à partir d’un couple donné, sachant que chaque couple donne chaque mois un nouveau couple qui sera productif au deuxième mois de son existence.



a) Évolution du nombre de couples de lapins chaque mois.

Partons d’un couple de lapins qui viennent de naître, et observons l’évolution au cours du temps.

Le 1er mois : 1 couple

Le 2ème mois :

Le 3ème mois :

Le 4ème mois :

Le 5ème mois :

Le 6ème mois :

Le 7ème mois :

Le 8ème mois :

Le 9ème mois :

Le 10ème mois :

Le 11ème mois :

Le 12ème mois :

Que peut-on observer sur le nombre de couples d’un mois sur l’autre ?

b) Modélisation de l’évolution

Peut-on modéliser cette séquence sous une formule mathématique ?
Si oui, quelle serait-elle ?

c) Le nombre d’or

Fibonacci s’est par la suite intéressée au ratio de chaque terme de cette suite avec son précédent.

C’est-à-dire au différent résultat de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

Faîtes de même et observons le résultat :

$$\frac{F_1}{F_0} =$$

$$\frac{F_2}{F_1} =$$

Continuez jusqu’au dernier terme trouvé plus haut...

Qu’observe-t-on alors ?

Ce nombre est le <u>nombre d’or</u>, autrement appelée la divine proportion, désigné par la lettre grecque Φ . Un des plus célèbres nombres utilisés dans les mathématiques, notamment avec le nombre Π . Il est célèbre pour ces fascinantes caractéristiques mais aussi sa présence dans la nature.

d) Illustration géométrique

Tracer un premier carré de 1 cm de côté ;
Tracer un deuxième carré à droite du précédent avec un côté en commun avec le précédent ;
Tracer ensuite un troisième carré en dessous, en se servant de la longueur des deux côtés, donc de 2 cm cette fois.

Après avoir été sur la droite, puis vers le bas, continuez ce même schéma sur plusieurs fois de suite.

Une des plus fameuses présences du nombre d’or (ou ratio d’or) dans la nature est la coquille d’escargot.

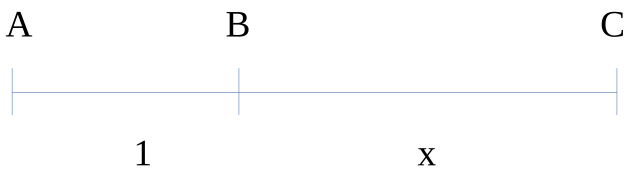
e) Le calcul du nombre d’or par Euclide

Précédemment, nous avons tracé une coquille d’escargot en dessinant des carrés qui avaient toujours comme côté la somme des deux précédents. Nous allons développer çà ici.

Euclide s’est intéressé à ce nombre et voulu le calculer de la manière suivante.

Il souhaitait trouver un nombre qui vérifiait l’équation suivante :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{AC}{BC}$$



Autrement dit :

$$\frac{x}{1}=\frac{1+x}{x}$$

Soit :

$$x^2=1+x$$

D’où :

$$\boxed{x^2-x-1=0} \qquad (1)$$

On sait par les identités remarquables que :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}$$

On peut remarquer de même que :

$$x^2 - x - 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}$$

Et donc que :

$$\boxed{x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \qquad (2)$$

Si l'on combine alors (1) et (2), on obtient :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

On obtient alors

$$x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Soit

$$x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$$

f) Caractéristiques remarquables du nombre d’or

1ère caractéristique : $\Phi^2 = \Phi + 1$

Étant donné que nous sommes partis de l’équation

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Nous devrions retrouver que :

$$x^2 = x + 1$$

Soit

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

f-1) *Exercices*

Calculer Φ^2 et vérifier que c’est bien égal à $\Phi + 1$

2ème caractéristique : $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$

Calculer $\frac{1}{\Phi}$ et vérifier que c'est bien égal à $\Phi - 1$

3ème caractéristique : $\Phi^3 = 2\Phi + 1$

Calculer Φ^3 et vérifier que c'est bien égal à $2\Phi + 1$

En déduire intuitivement ce que pourrait être ensuite Φ^4 :

$\Phi^4 =$

Le vérifier comme effectué précédemment.

En déduire alors une formule générale pour Φ^n

$\Phi^n =$