Zadanie 1

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać $G_0(s) = \frac{3.16}{(1+0.1s)^3}$

1. Jaka jest składowa ustalona odpowiedzi tego układu na sinusoidę o amplitudzie 1 i pulsacji 10.
2. Obiekt obwiedziono jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. **Oblicz albo wyznacz z charakterystyk** logarytmicznych zapas fazy i modułu układu zamkniętego. Zaznacz na rysunku pulsację odcięcia, pulsację dla argumentu $-\pi$.
3. Narysuj charakterystyki logarytmiczne szeregowego połączenia regulatora całkującego z tym obiektem, jeśli regulator $G_r(s) = \frac{1}{sT_i}$ dobrano tak, że po zamknięciu jednostkowego sprzężenia zwrotnego zapas fazy w układzie zamkniętym jest równy $\frac{\pi}{4}$. Jaki wówczas będzie zapas modułu? Wyznacz parametr T_i transmitancji regulatora.
4. Oblicz wartość ustaloną odpowiedzi jednostkowej w układzie zamkniętym z tym regulatorem.

Jaka jest składowa ustalona odpowiedzi tego układu na sinusoidę o amplitudzie 1 i pulsacji 10.

Składowa ustalona odpowiedzi układu liniowego bez całkowania na sinusoidę $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ jest równa

$y(t) = U_m A(\omega) \sin(\omega t + \varphi_u + \varphi(\omega))$, przy czym $A(\omega) = |G_0(j\omega)|$ oraz $\varphi(\omega) = \arg\{G_0(j\omega)\}$

Transmitancja widmowa $G(j\omega) = \frac{3{,}16}{(0{,}1j\omega+1)^3} = \frac{3{,}16}{\left(\sqrt{0{,}01\omega^2+1}\right)^3} e^{-j3arctg0{,}1\omega}$

Czyli przy wymuszeniu $u(t) = \sin(10t)$ składowa ustalona odpowiedzi układu

$$y(t) = 1{,}12\sin\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

bo $A(10) = \frac{3{,}16}{\left(\sqrt{0{,}01\cdot 10^2+1}\right)^3} = 1{,}12$ oraz $\varphi(\omega) = -3arctg(0{,}1\cdot 10) = -\frac{3}{4}\pi$

Obiekt obwiedziono jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. **Oblicz (…)** zapas fazy i modułu układu zamkniętego.

pulsację dla argumentu $-\pi$ wyznacza się z zależności

$$\varphi(\omega) = arg\{G_0(j\omega)\} = -\pi$$

$$-3arctg(0{,}1\omega) = -\pi$$

$$0{,}1\omega = tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\omega_{-\pi} = 10tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = 17{,}32\frac{rad}{s}$$

a **zapas modułu**

$$\Delta L = 20log\frac{1}{A(\omega_{-\pi})} = 20log\left(\frac{\left(\sqrt{0{,}01\cdot 17{,}32^2+1}\right)^3}{3{,}16}\right) = 8{,}07dB$$

Pulsację odcięcia ω_0 wyznacza się z zależności

$$A(\omega) = |G_0(j\omega)| = 1$$

$$\frac{3{,}16}{\left(\sqrt{0{,}01\omega^2+1}\right)^3} = 1$$

$$\sqrt{0{,}01\omega^2 + 1} = \sqrt[3]{3{,}16}$$

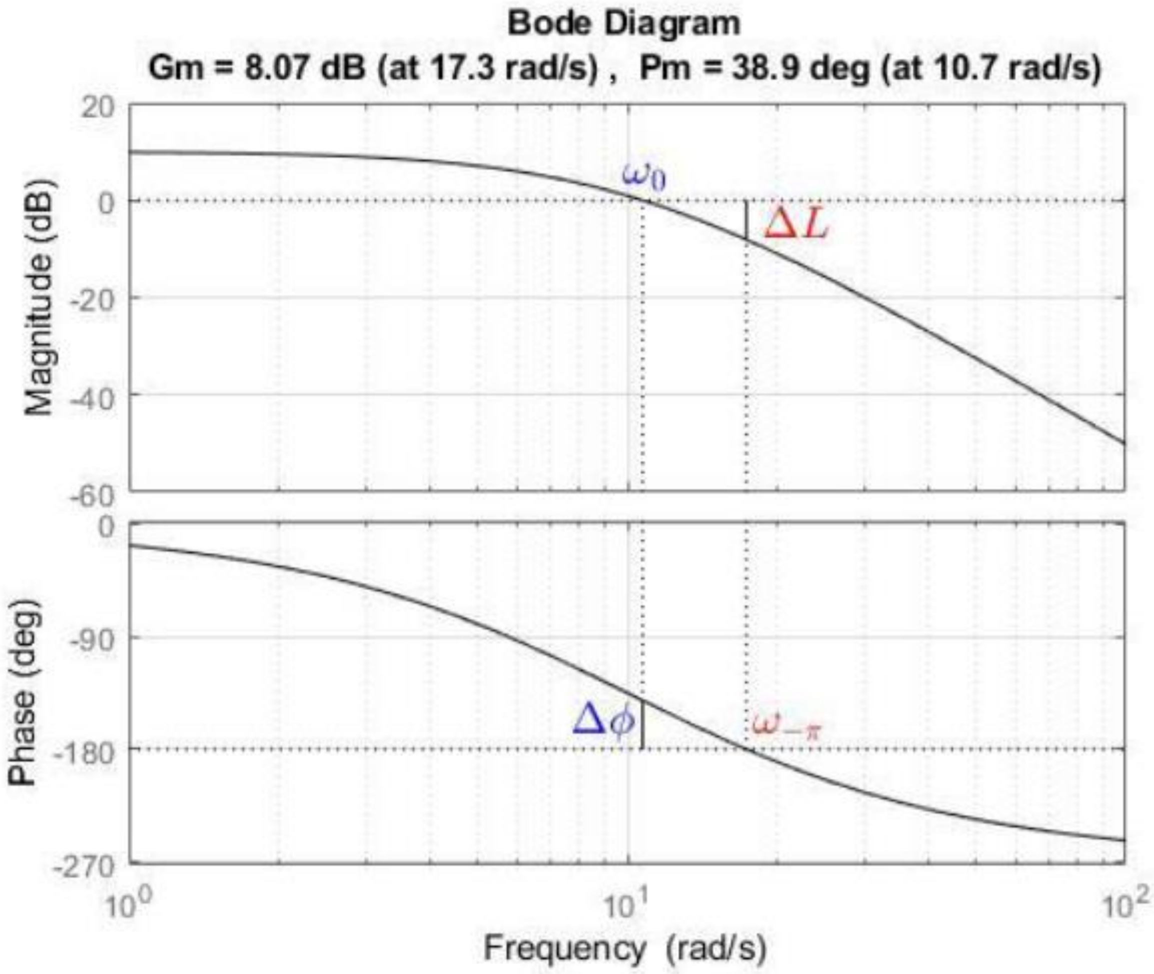
$$0{,}01\omega^2 + 1 = 2{,}15$$

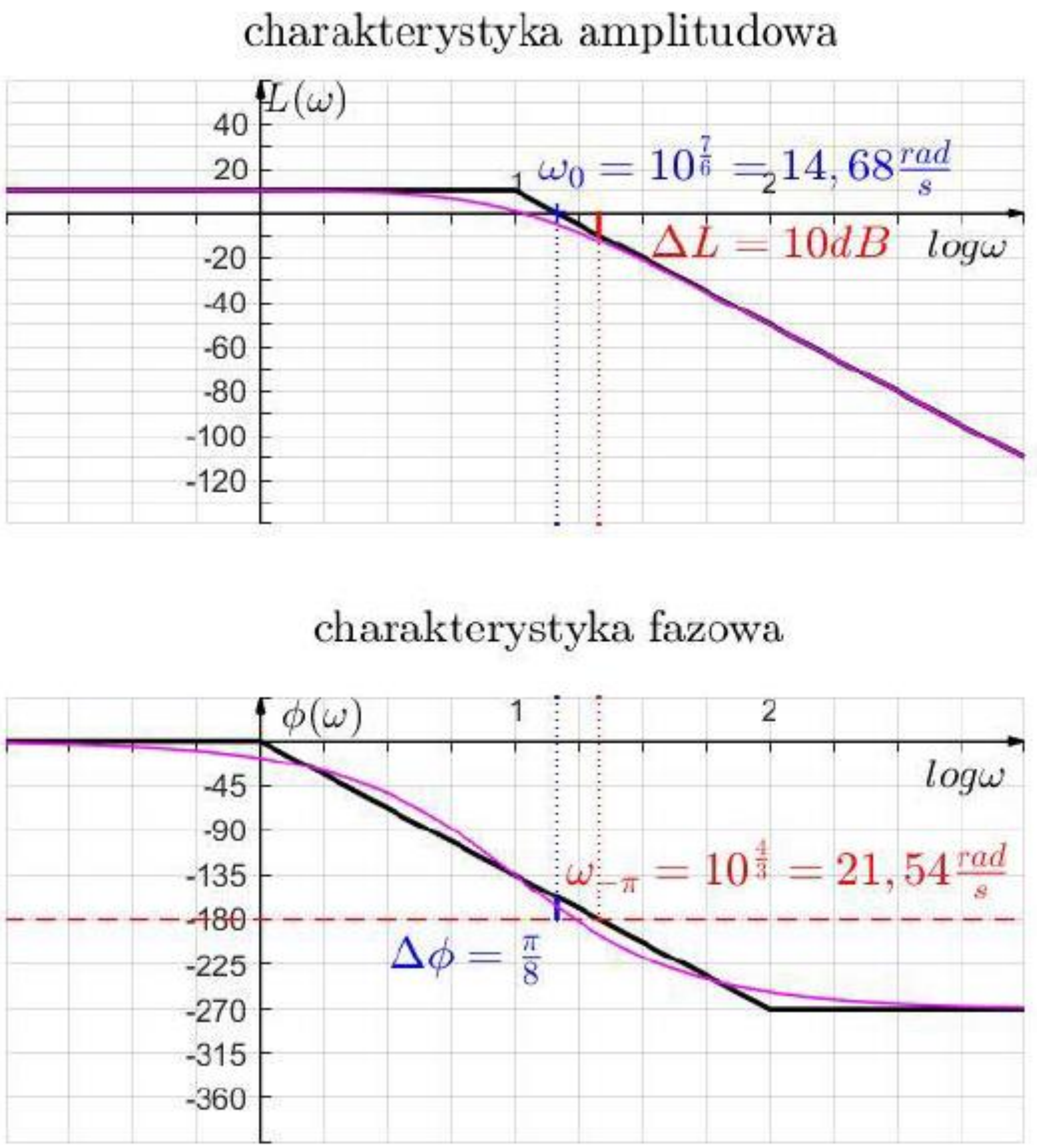
$$\omega^2 = 115 \qquad \omega_0 = 10{,}72\,\frac{rad}{s}$$

zapas fazy

$$\Delta\varphi = \pi + arg\{G_0(j\omega_0)\} = \pi - 3arctg(0{,}1 \cdot 10{,}72) = 0{,}68\,\text{rad} = 39^\circ$$

A tak to liczy MATLAB





Wartości uzyskane z charakterystyk logarytmicznych są inne, ponieważ korzysta się z asymptot rzeczywistych charakterystyk.

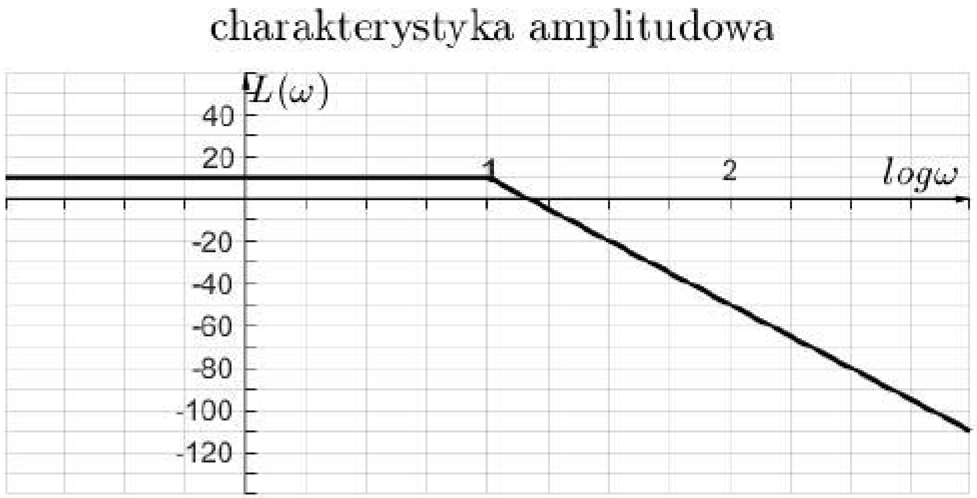
Jeżeli składową ustaloną odpowiedzi układu na sinusoidę o amplitudzie 1
i pulsacji 10 odczyta się z charakterystyk to można zapisać

$$y(t) = 3{,}16\sin\left(10t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

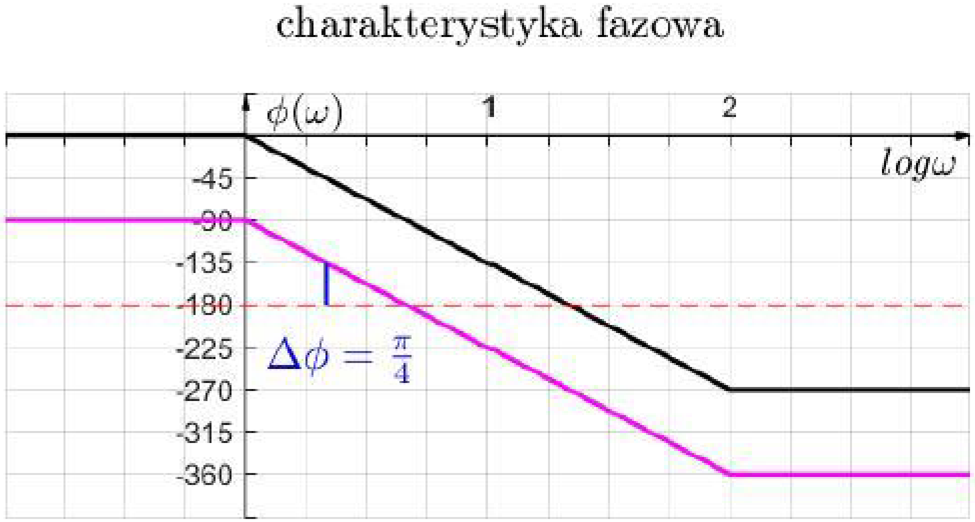
zamiast (jak z obliczeń wg wzorów)

$$y(t) = 1{,}12\sin\left(\omega t - \frac{3}{4}\pi\right)$$

Narysuj charakterystyki logarytmiczne szeregowego połączenia regulatora całkującego z tym obiektem, jeśli regulator $G_r(s) = \frac{1}{sT_i}$ dobrano tak, że po zamknięciu jednostkowego sprzężenia zwrotnego zapas fazy w układzie zamkniętym jest równy $\frac{\pi}{4}$. Jaki wówczas będzie zapas modułu? Wyznacz parametr T_i transmitancji regulatora.



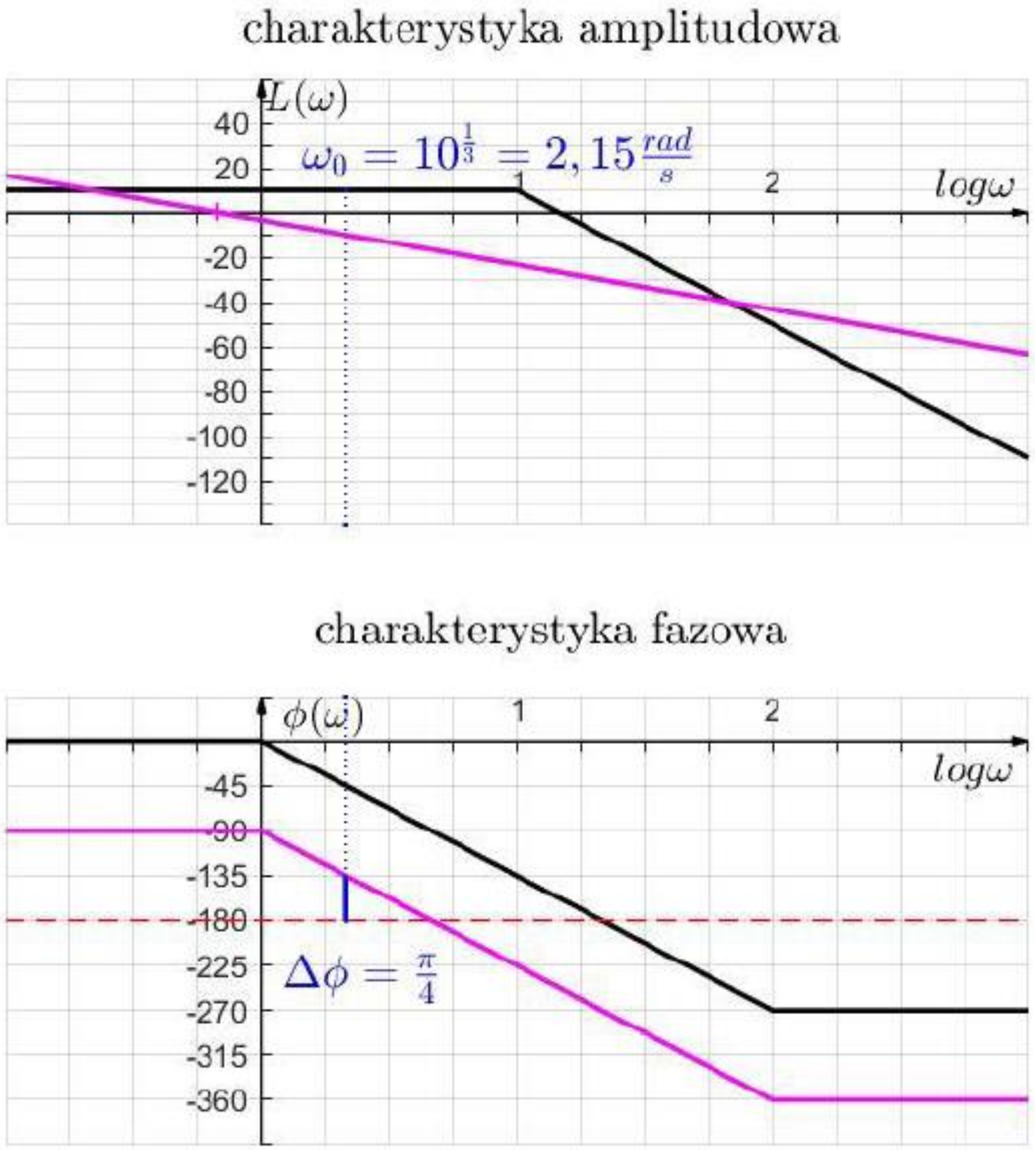
Dobór regulatora rozpoczyna się od narysowania charakterystyki fazowej regulatora $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$. Po dodaniu jej do charakterystyki obiektu zaznacza się odległość odpowiadającą projektowanemu zapasowi fazy $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$.



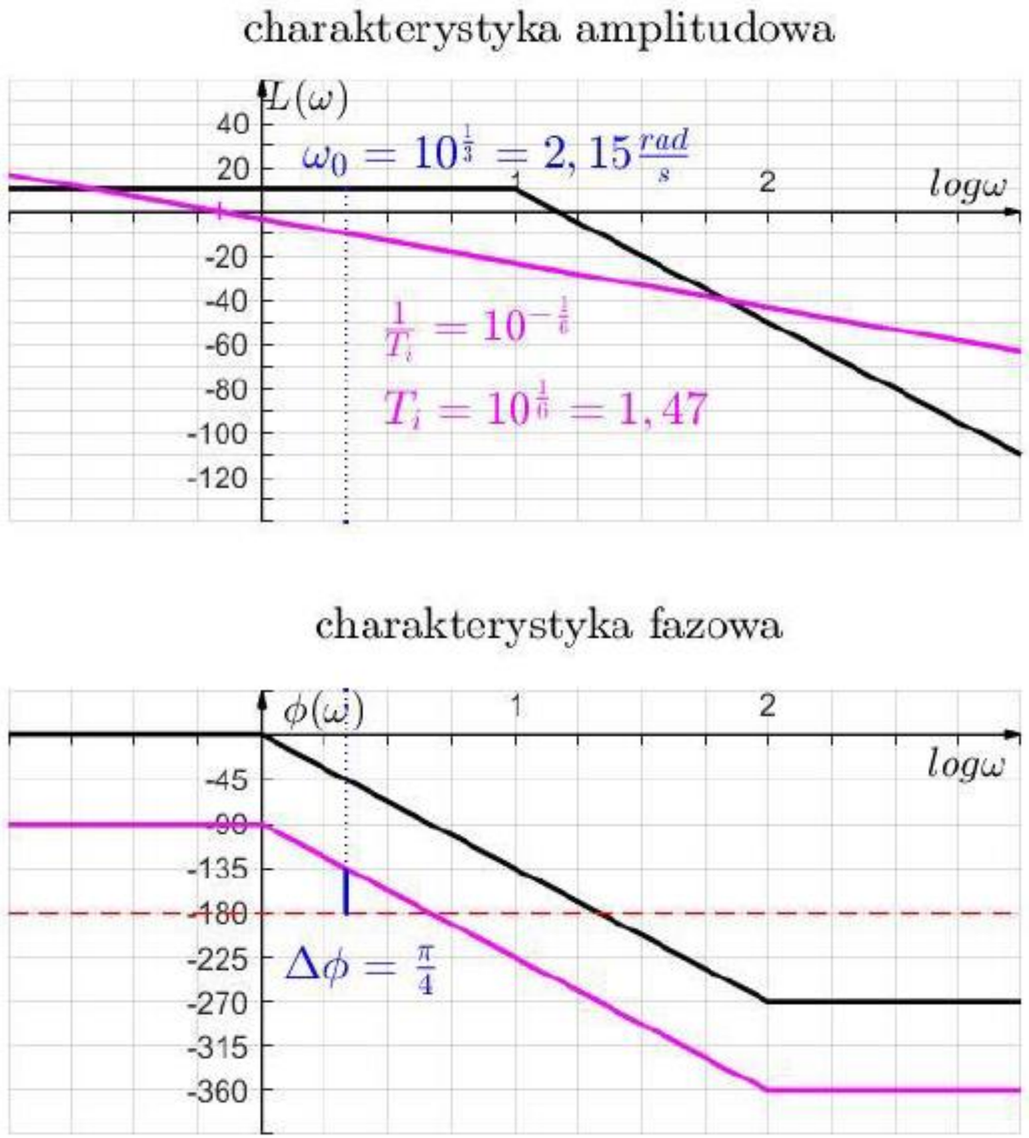
Po zaznaczeniu zapasu fazy, odczytuje się nową pulsację odcięcia $\log\omega_0 = \frac{1}{3}$ czyli $\omega_0 = 10^{\frac{1}{3}} = 2{,}15\frac{rad}{s}$ dla obiektu z regulatorem.

Wartość wypadkowej charakterystyki amplitudowej dla tej pulsacji powinna być równa zero.

Wartość wzmocnienia obiektu dla tej pulsacji jest równa $10dB$. Czyli charakterystyka regulatora – prosta o nachyleniu $-20\frac{dB}{dek}$ powinna przechodzić przez punkt o współrzędnych $\left(\frac{1}{3}, -10\right)$.



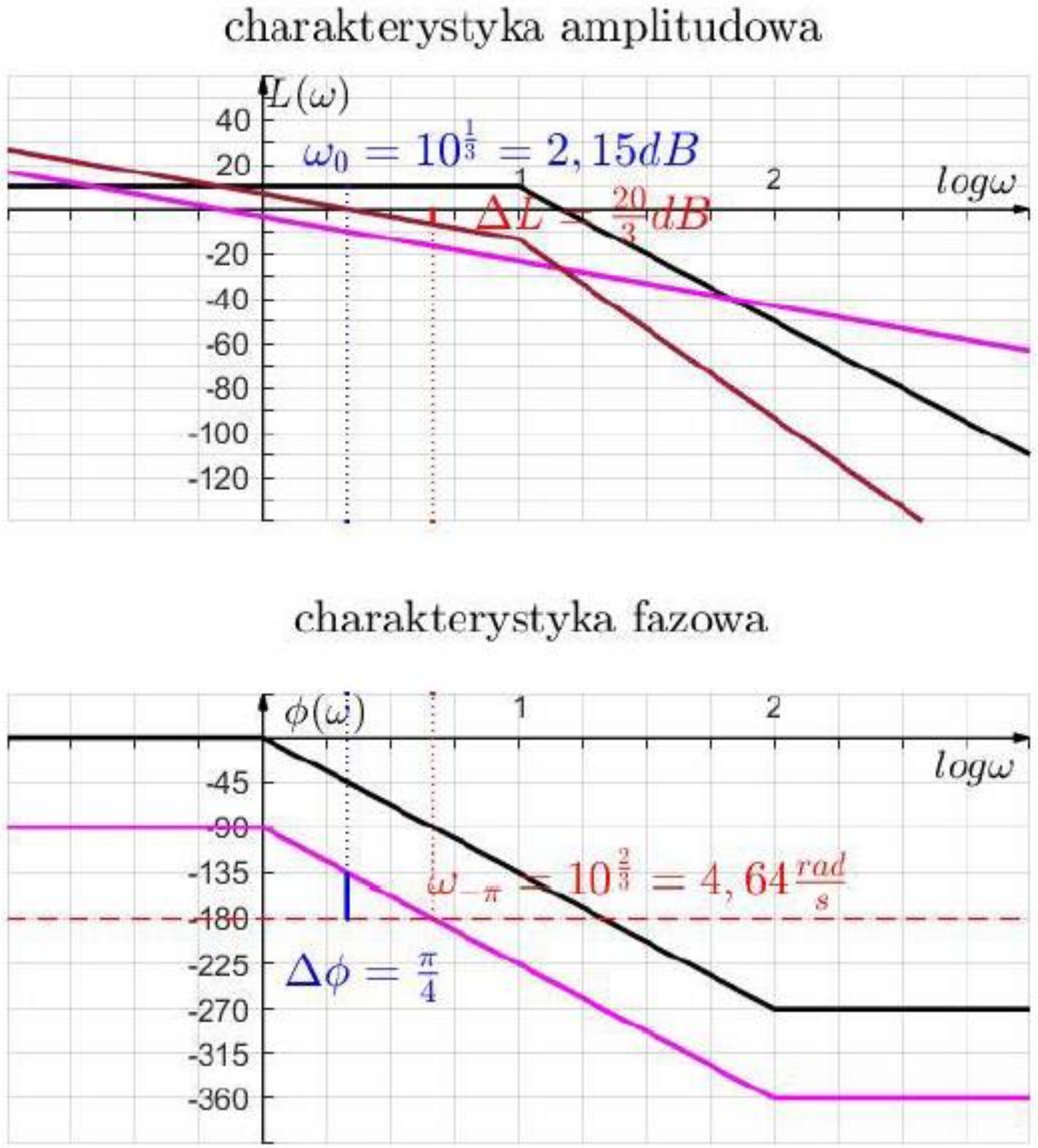
Po odczytaniu $\frac{1}{T_i} = 10^{-\frac{1}{6}} = 0{,}68\frac{rad}{s}$, można obliczyć parametr $T_i = \frac{1}{\omega_i} = 1{,}47s$ transmitancji regulatora.



Pulsacja dla argumentu $-\pi$ jest równa

$$\omega_{-\pi} = 10^{\frac{2}{3}} = 4{,}64\,\frac{rad}{s}$$

zapas modułu $\Delta L = \frac{20}{3}\,dB$



Oblicz wartość ustaloną odpowiedzi jednostkowej w układzie zamkniętym z tym regulatorem.

Układ jest astatyczny, czyli $e_{ust} = 0$.

Na rysunku przedstawiono charakterystyki logarytmiczne układu opisanego transmitancją operatorową o postaci

$$G_{ob}(s) = \frac{K}{(1+sT)^N}$$

A. Wyznacz parametry K, T, N.

B. Naszkicuj charakterystykę amplitudowo-fazową tego układu, określ parametry jej punktów charakterystycznych.

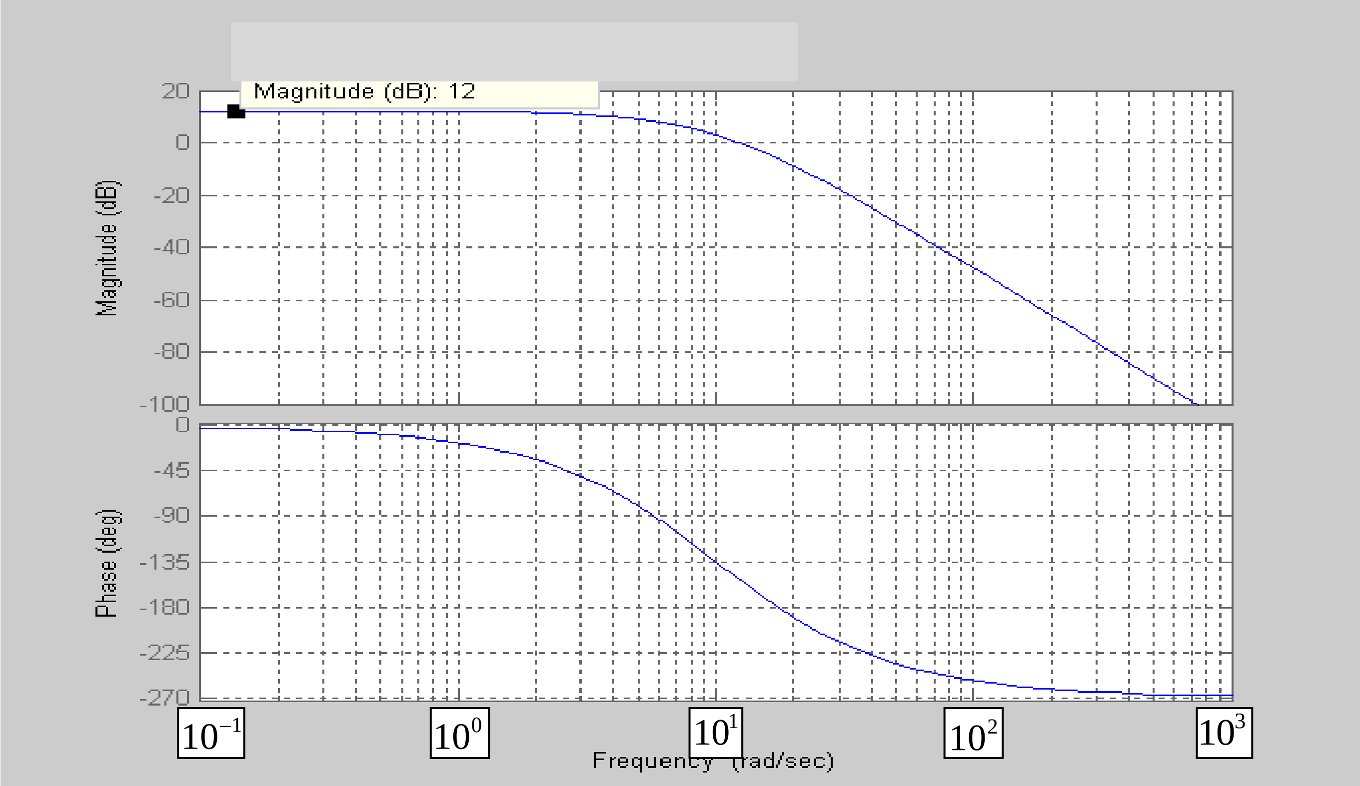
C. Czy po zamknięciu układu ujemnym sprzężeniem zwrotnym otrzymamy układ stabilny?

D. Jaki jest zapas modułu i fazy?

E. O ile zmieni się zapas modułu i fazy po zastosowaniu szeregowego regulatora o transmitancji: $G_r(s) = 0{,}01s + 1$ Dorysuj odpowiednie ch-tyki.

F. Sprawdź rząd astatyzmu zmodyfikowanego układu względem wymuszenia.

G. Wyznacz uchyb ustalony dla wymuszeń w postaci skoku jednostkowego oraz liniowej funkcji czasu.



$$G_{ob}(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega T)^N} = K\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\right)^N e^{-jN\cdot \mathrm{arctg}(\omega T)} \quad \Rightarrow \quad G_{ob}(0) = K$$

$$20\lg(K) = 12$$

$$\Downarrow$$

$$\lg(K) = 0{,}6$$

$$\Downarrow$$

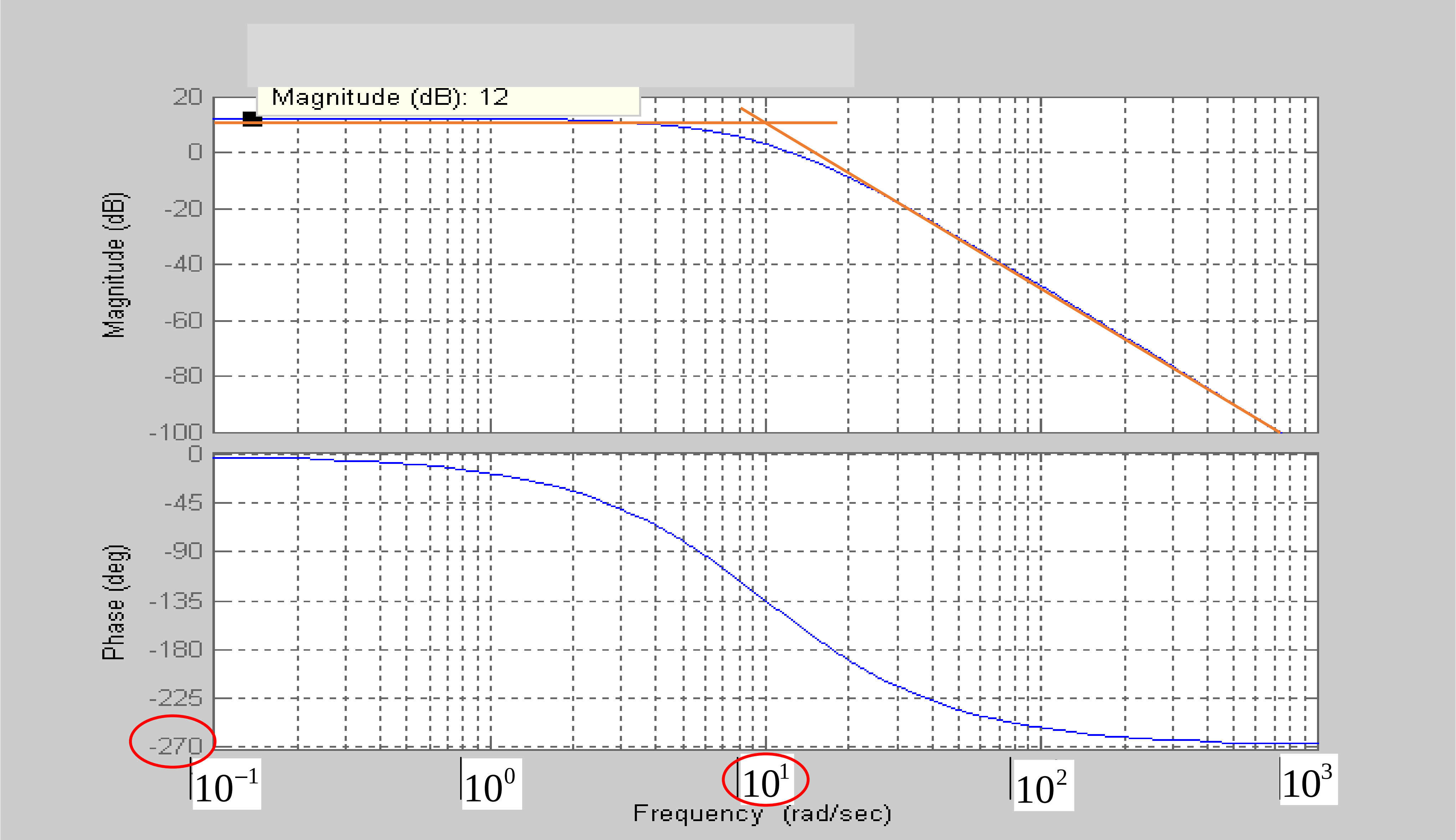
$$K = 10^{0{,}3\cdot 2} = \left(10^{0{,}3}\right)^2 \approx$$

$$\approx 2^2 = 4$$

$$T = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$N = \frac{270}{90} = 3$$

$$G_{ob}(s) = \frac{4}{(1+0{,}1s)^3}$$

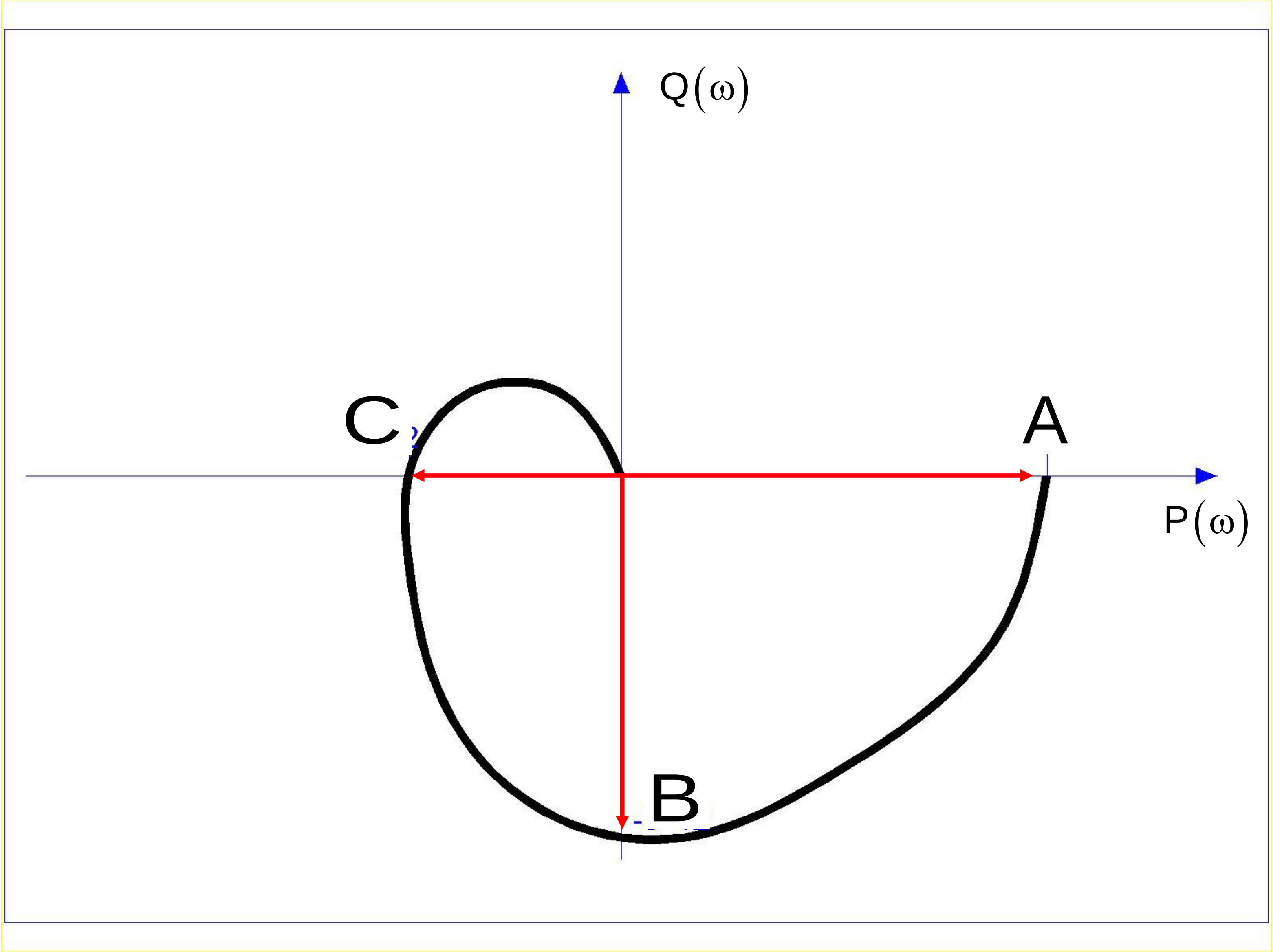


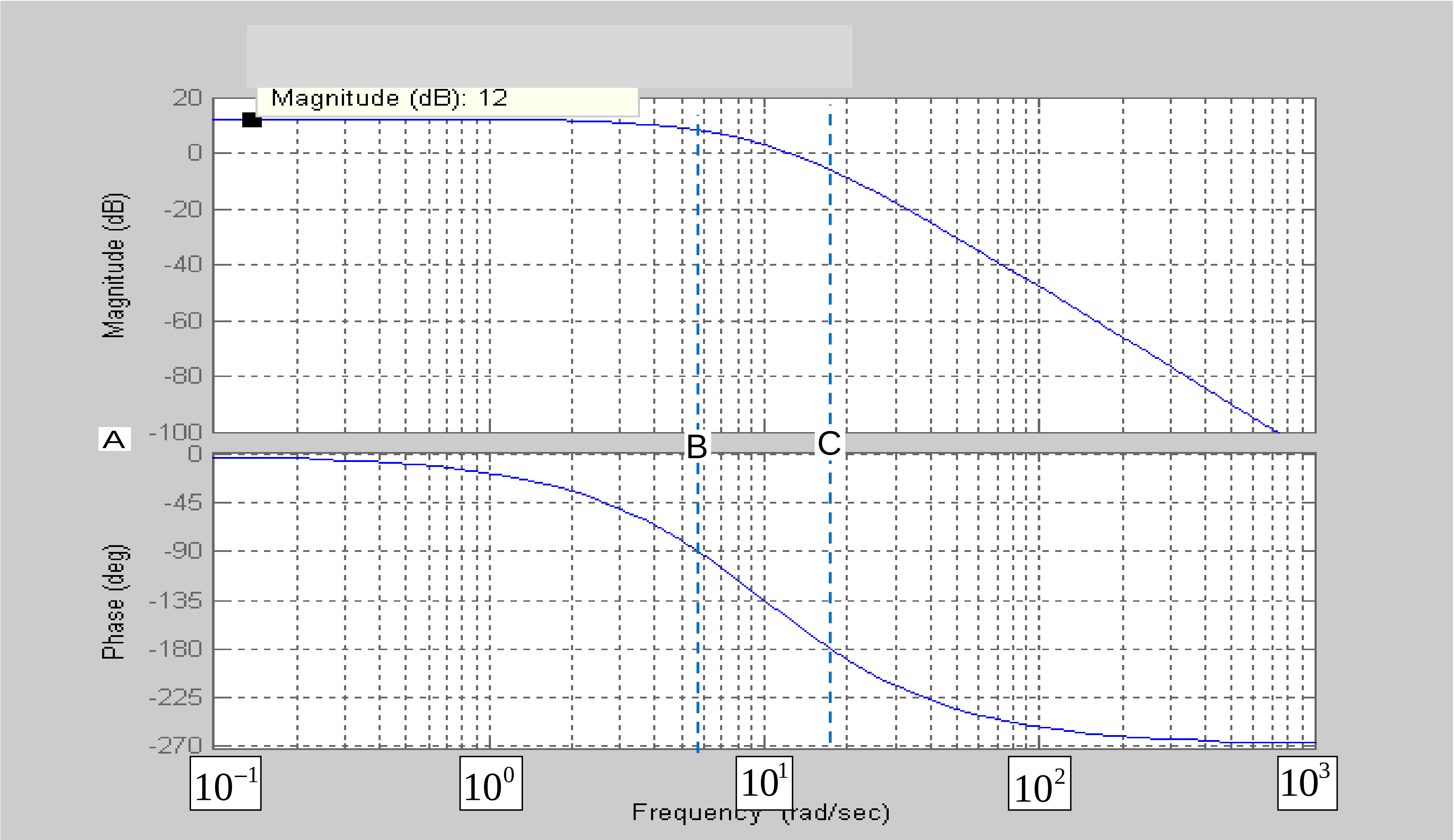
Na rysunku przedstawiono charakterystyki logarytmiczne układu opisanego transmitancją operatorową

$$G_{ob}(s) = \frac{4}{(1+0{,}1s)^3}$$

B.

Naszkicuj charakterystykę amplitudowo-fazową tego układu, określ parametry jej punktów charakterystycznych.





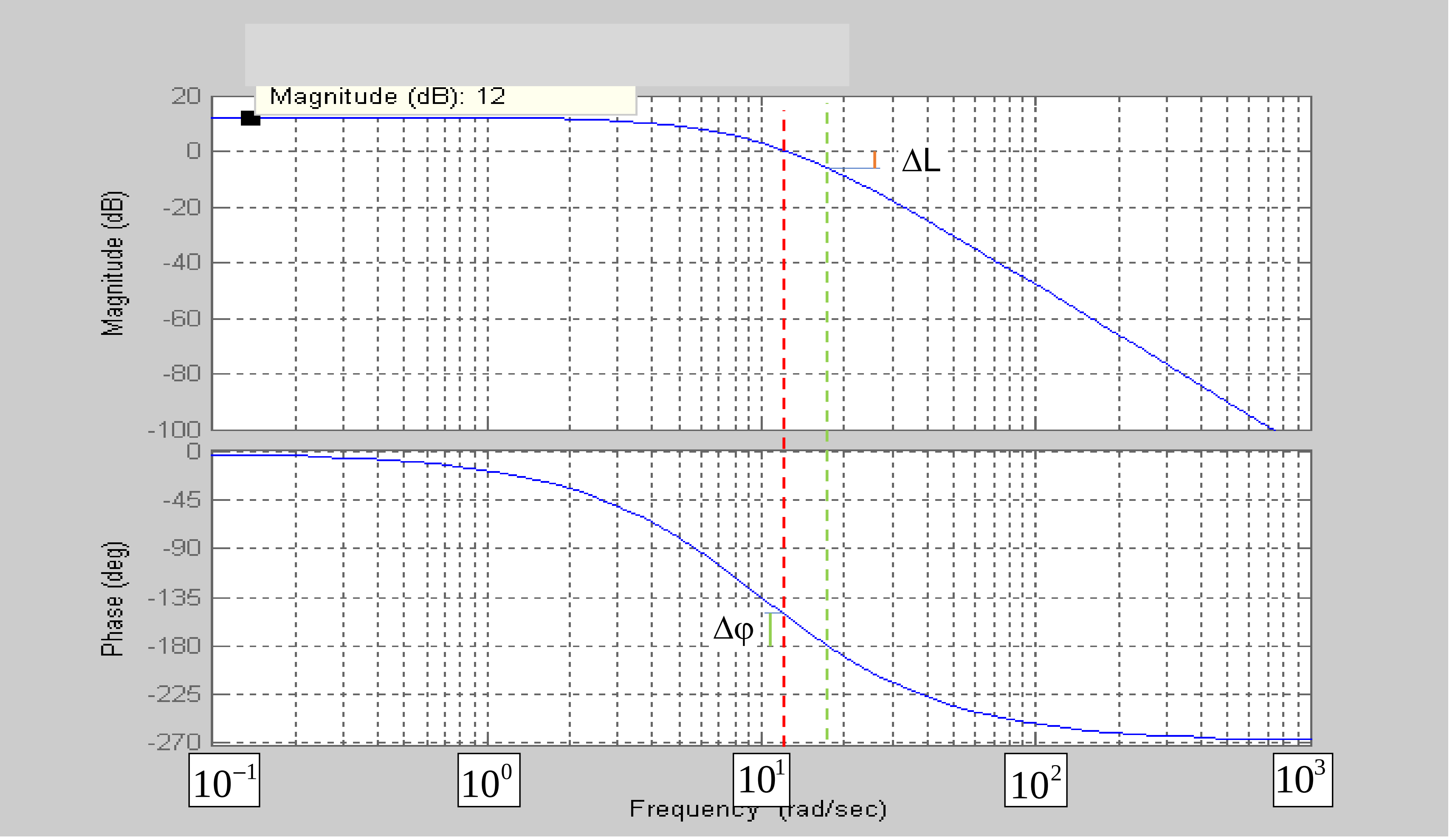
Magnitude (dB): 12
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
Magnitude (dB)
A
B
C
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
Phase (deg)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)

Na rysunku przedstawiono charakterystyki logarytmiczne układu opisanego transmitancją operatorową

$$G_{ob}(s) = \frac{4}{(1+0{,}1s)^3}$$

C.
Czy po zamknięciu układu ujemnym sprzężeniem zwrotnym otrzymamy układ stabilny?

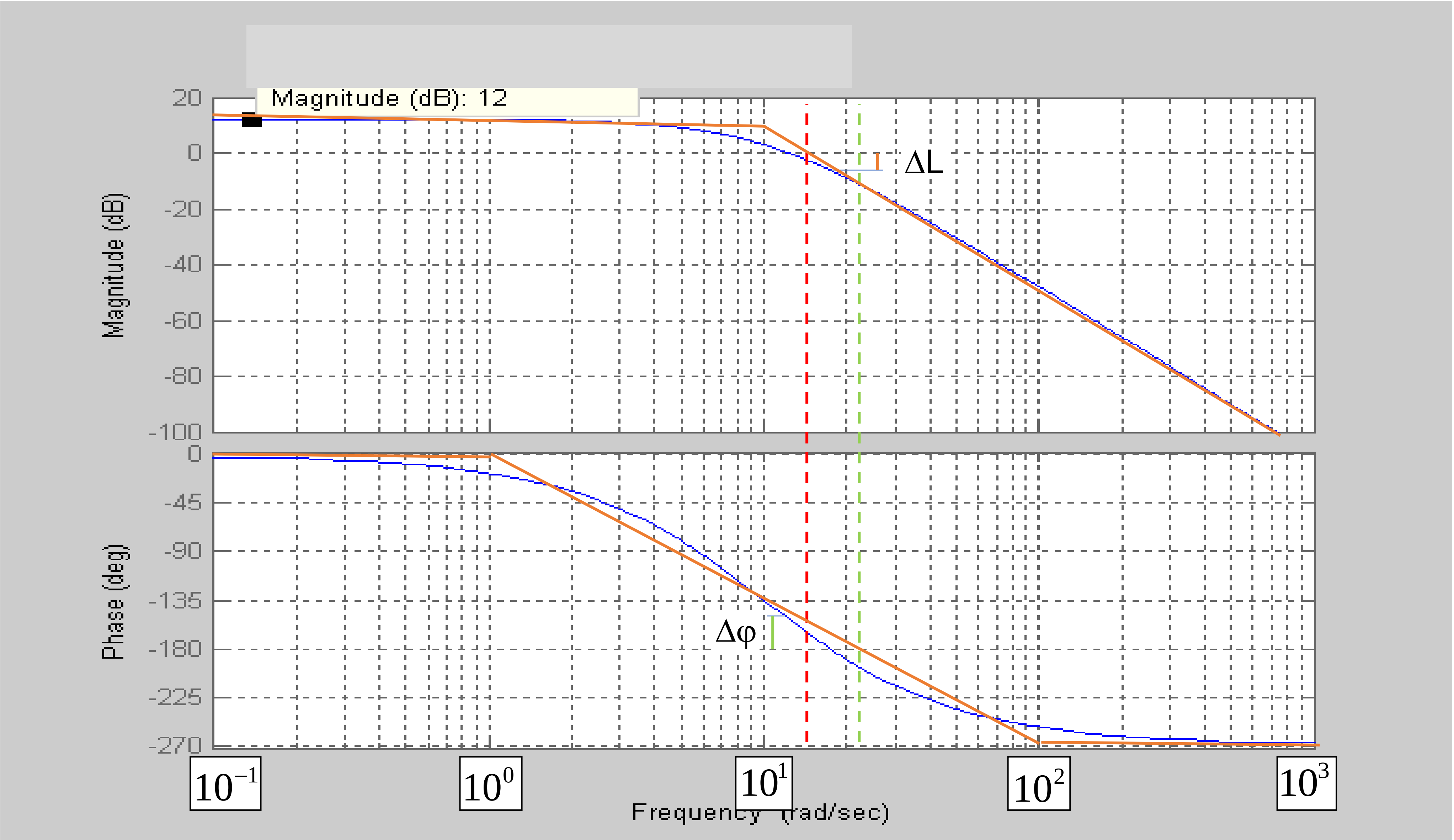
D.
Jaki jest zapas modułu i fazy?



Na rysunku przedstawiono charakterystyki logarytmiczne układu opisanego transmitancją operatorową

$$G_{ob}(s) = \frac{4}{(1+0,1s)^3}$$

C.
Czy po zamknięciu układu ujemnym sprzężeniem zwrotnym otrzymamy układ stabilny?



D.
Jaki jest zapas modułu i fazy?

Na rysunku przedstawiono charakterystyki logarytmiczne układu opisanego transmitancją operatorową

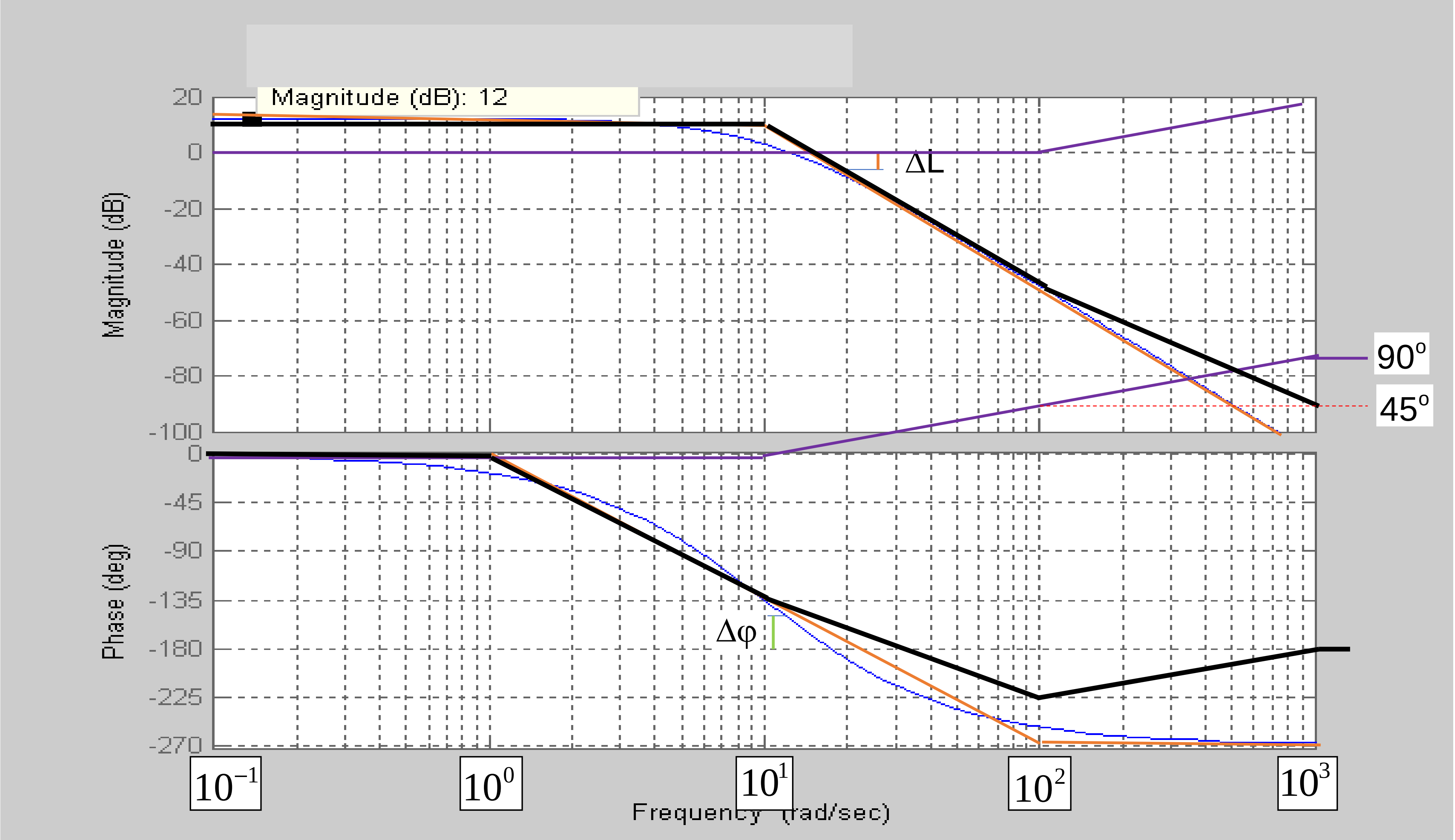
$$G_{ob}(s) = \frac{4}{(1+0{,}1s)^3}$$

E.

O ile zmieni się zapas modułu i fazy po zastosowaniu szeregowego regulatora o transmitancji:

$$G_r(s) = 0{,}01s + 1$$

Dorysuj odpowiednie ch-tyki.



F. Sprawdź rząd astatyzmu zmodyfikowanego układu względem wymuszenia.
G. Wyznacz uchyb ustalony dla wymuszeń w postaci skoku jednostkowego oraz liniowej funkcji czasu.

$$G_r(s)G_{ob}(s)=(0{,}01s+1)\frac{4}{(1+0{,}1s)^3}\quad\Rightarrow\quad k=0$$

$$G_e(s)=\frac{1}{1+G_r(s)G_{ob}(s)}=\frac{1}{1+\frac{4(0{,}01s+1)}{(1+0{,}1s)^3}}=\frac{(1+0{,}1s)^3}{(1+0{,}1s)^3+4(0{,}01s+1)}$$

.

$$e_{ust}=\lim_{t\to\infty}\left[e(t)\right]=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot e(s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[s\cdot G_e(s)\cdot u(s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[s\frac{(1+0{,}1s)^3}{(1+0{,}1s)^3+4(0{,}01s+1)}u(s)\right]$$

$$u(t)=\mathbf{1}(t)\quad\Rightarrow\quad u(s)=\frac{1}{s}\quad\Rightarrow\quad e_{ust}=\lim_{s\to 0}\left[s\frac{(1+0{,}1s)^3}{(1+0{,}1s)^3+4(0{,}01s+1)}\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

$$u(t)=t\cdot\mathbf{1}(t)\quad\Rightarrow\quad u(s)=\frac{1}{s^2}\quad\Rightarrow\quad e_{ust}=\lim_{s\to 0}\left[s\frac{(1+0{,}1s)^3}{(1+0{,}1s)^3+4(0{,}01s+1)}\frac{1}{s^2}\right]=\infty$$

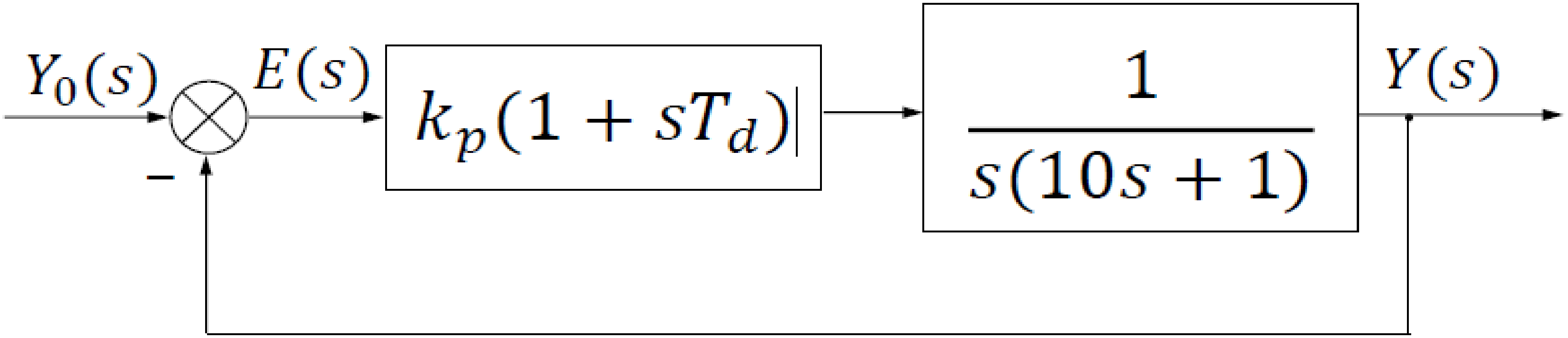
Zadanie.

Dany jest obiekt o transmitancji $G_{ob}(s) = \frac{1}{s(1+10s)}$

Dobrać regulator PD tak by były spełnione warunki:

1. Przy wymuszeniu: $y_0(t) = (1+t)\cdot\mathbf{1}(t)$ uchyb ustalony w układzie zamkniętym jest nie większy od 0.1

2. Zapas fazy układu zamkniętego jest równy ok. π/8



Układ otwarty z regulatorem ma transmitancję operatorową postaci: $G_0(s) = \frac{k_p\cdot(1+sT_d)}{s(1+10s)}$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego:

$$M(s) = k_p\cdot(1+sT_d) + s(1+10s) \quad = 10s^2 + (k_pT_d+1)s + k_p$$

Stąd wynika, że układ zamknięty jest stabilny, bo suma pierwiastków równania charakterystycznego jest ujemna, a iloczyn dodatni.

Dodatkowo układ zamknięty wykazuje astatyzmu I rzędu, ponieważ w transmitancji układu otwartego występuje pojedynczy biegun równy 0, a stąd w transmitancji uchybowej wystąpi zero równe 0:

$$S(s) = \frac{e(s)}{y_0(s)} = \frac{s(1+10s)}{10s^2 + (k_p T_d + 1)s + k_p}$$

Wymuszenie: $y_0(t) = (1+t)\cdot\mathbf{1}(t) = \mathbf{1}(t) + t\cdot\mathbf{1}(t) = y_{01}(t) + y_{02}(t)$

Dla pierwszej składowej uchyb w stanie ustalonym jest równy 0, dla drugiej składowej ma stałą wartość:

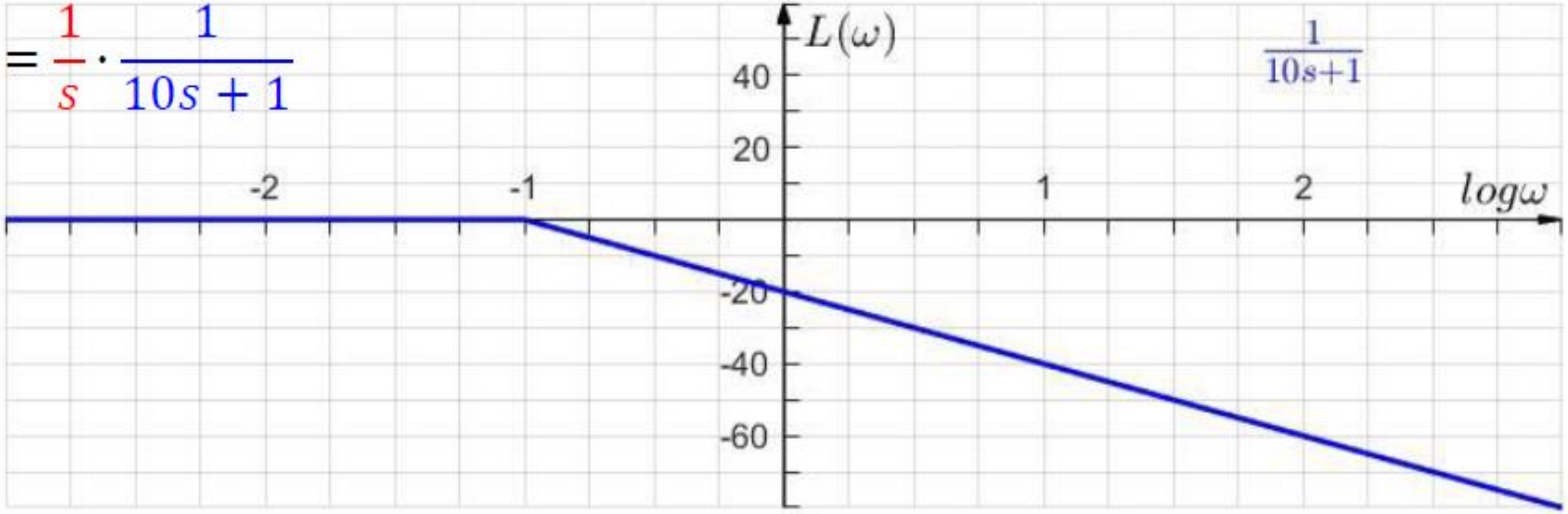
$$e_{ust} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot e(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot S(s)\cdot Y_{02}(s)\right] = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{s(1+10s)}{10s^2 + (k_p T_d + 1)s + k_p}\cdot\frac{1}{s^2}\right]$$

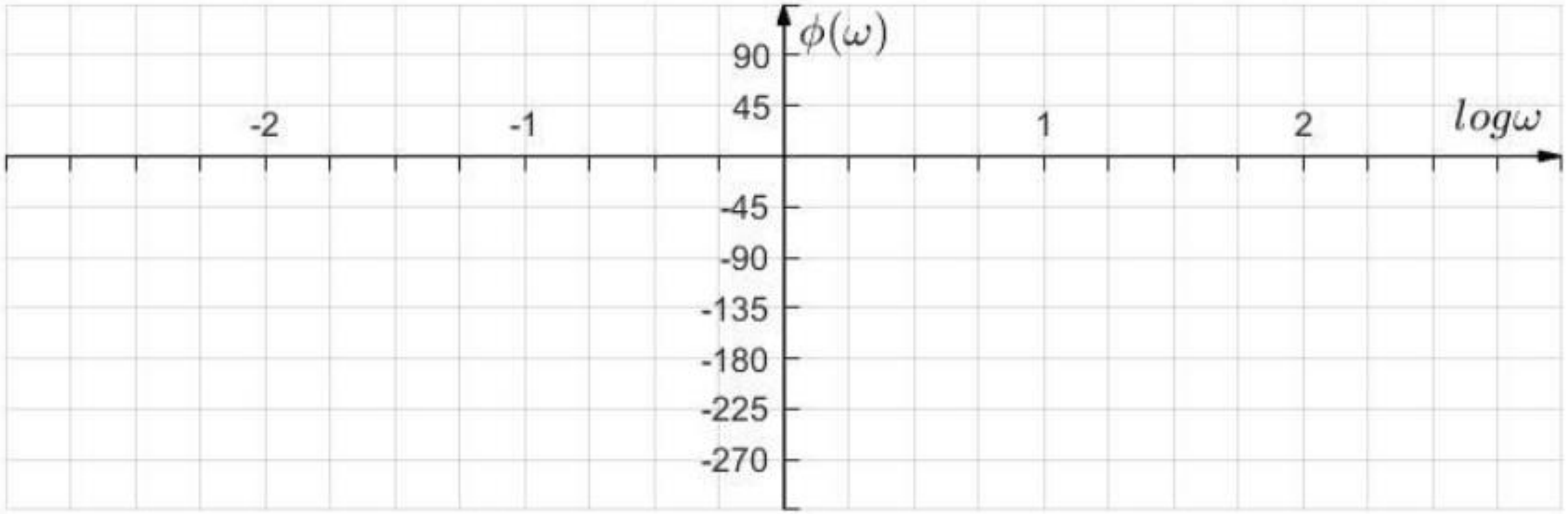
$$= \lim_{s\to 0}\left[\frac{(1+10s)}{10s^2 + (k_p T_d + 1)s + k_p}\right] = \frac{1}{k_p}$$

Obliczony uchyb musi spełniać zależność $\frac{1}{k_p} \le 0.1 \quad \Rightarrow \quad k_p \ge 10$

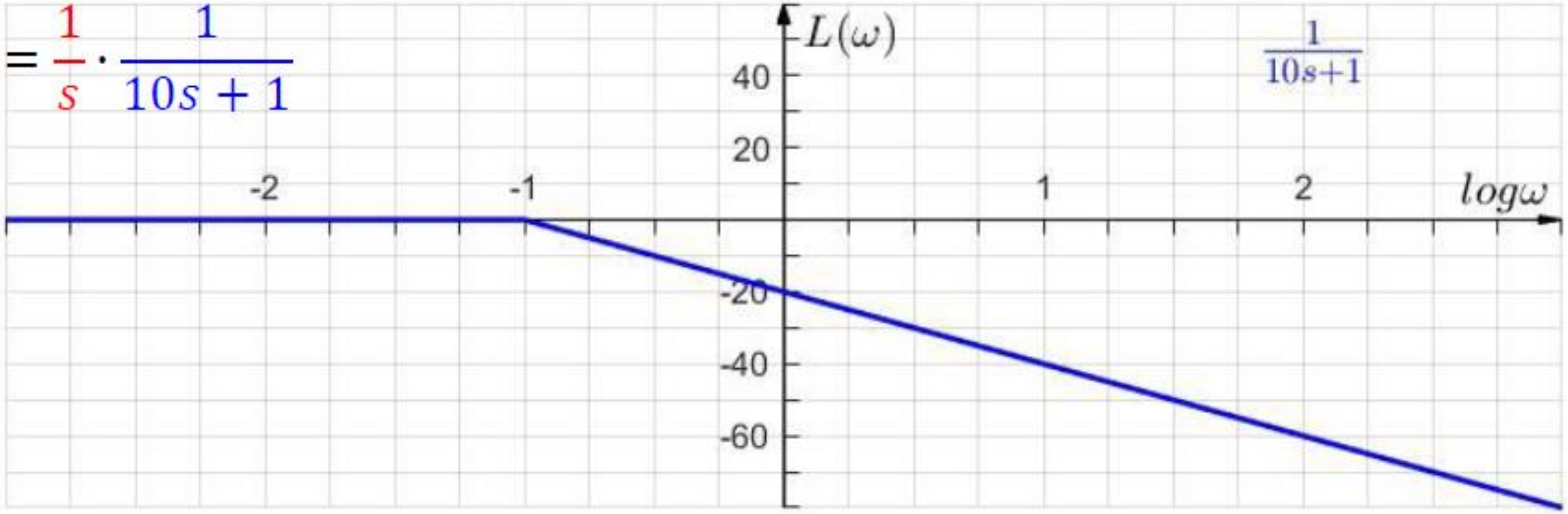
Przyjmujemy najmniejszą możliwą wartość, czyli $k_p = 10$

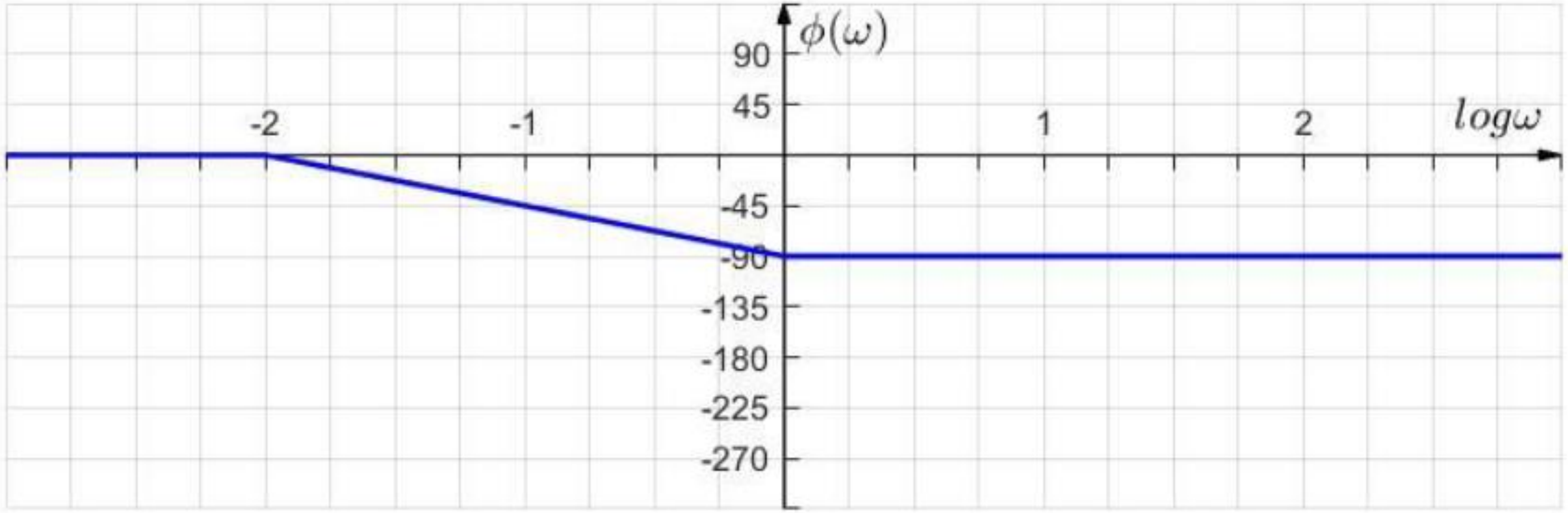
$$G_{OR}(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$$



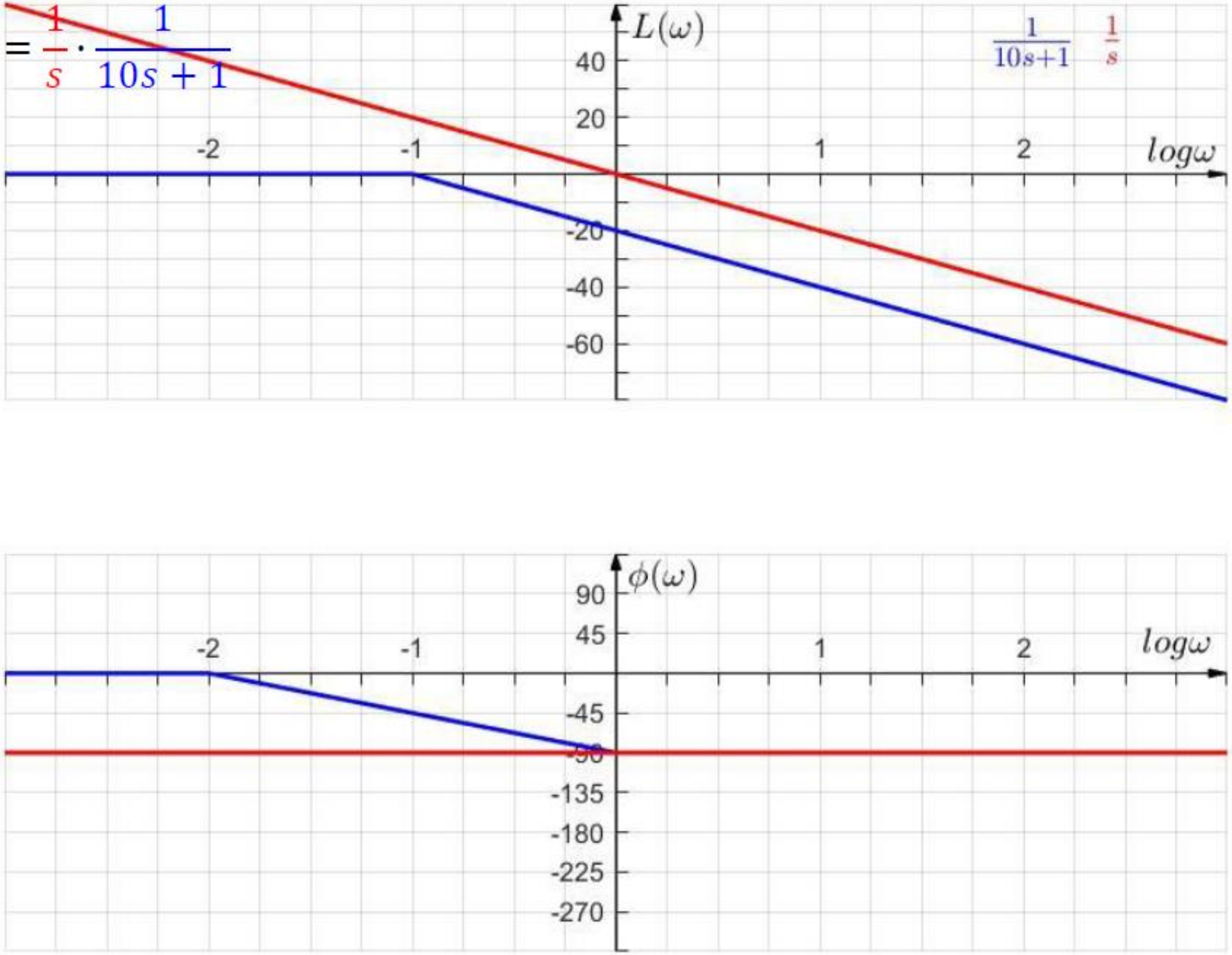


$$G_{OR}(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$$

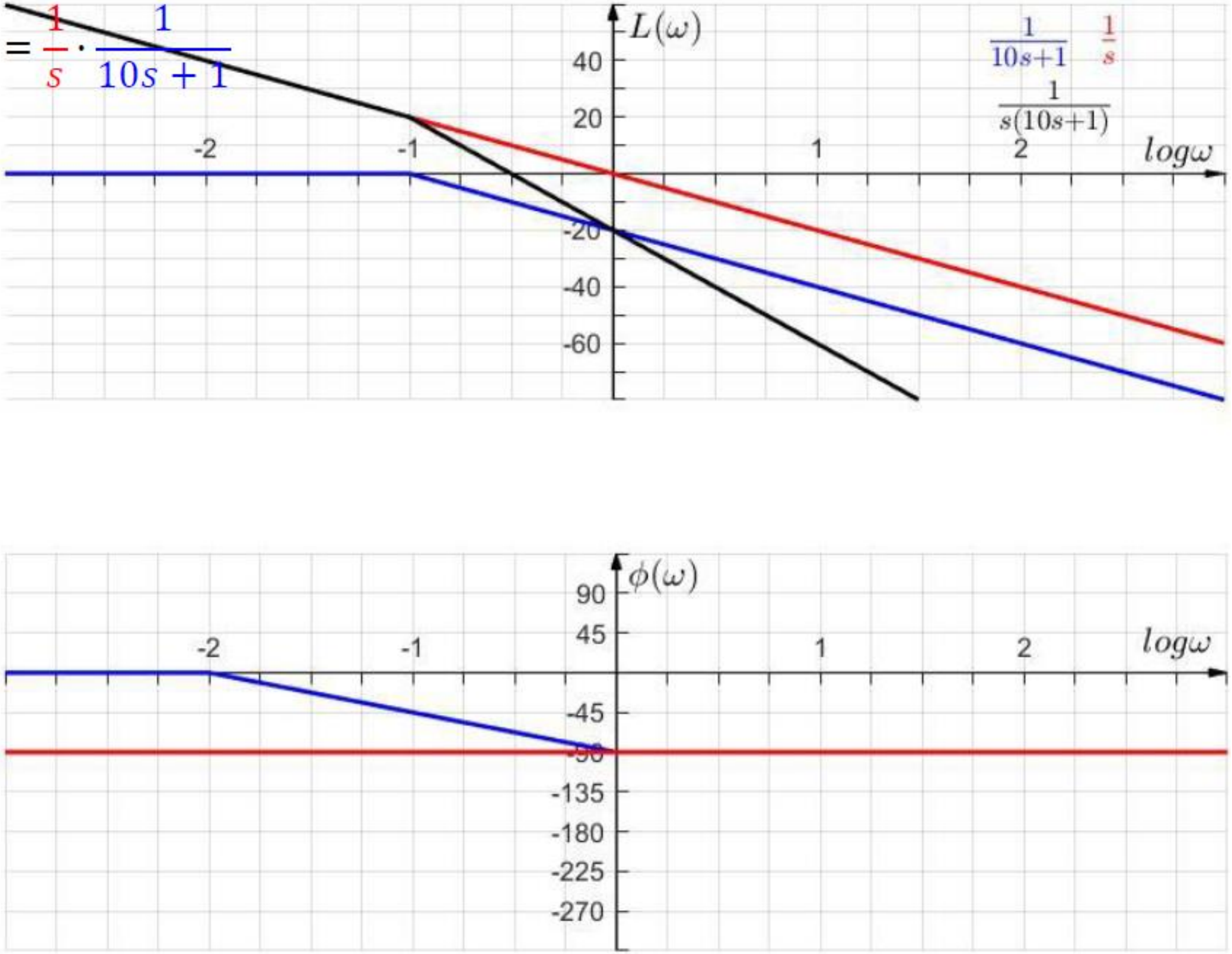




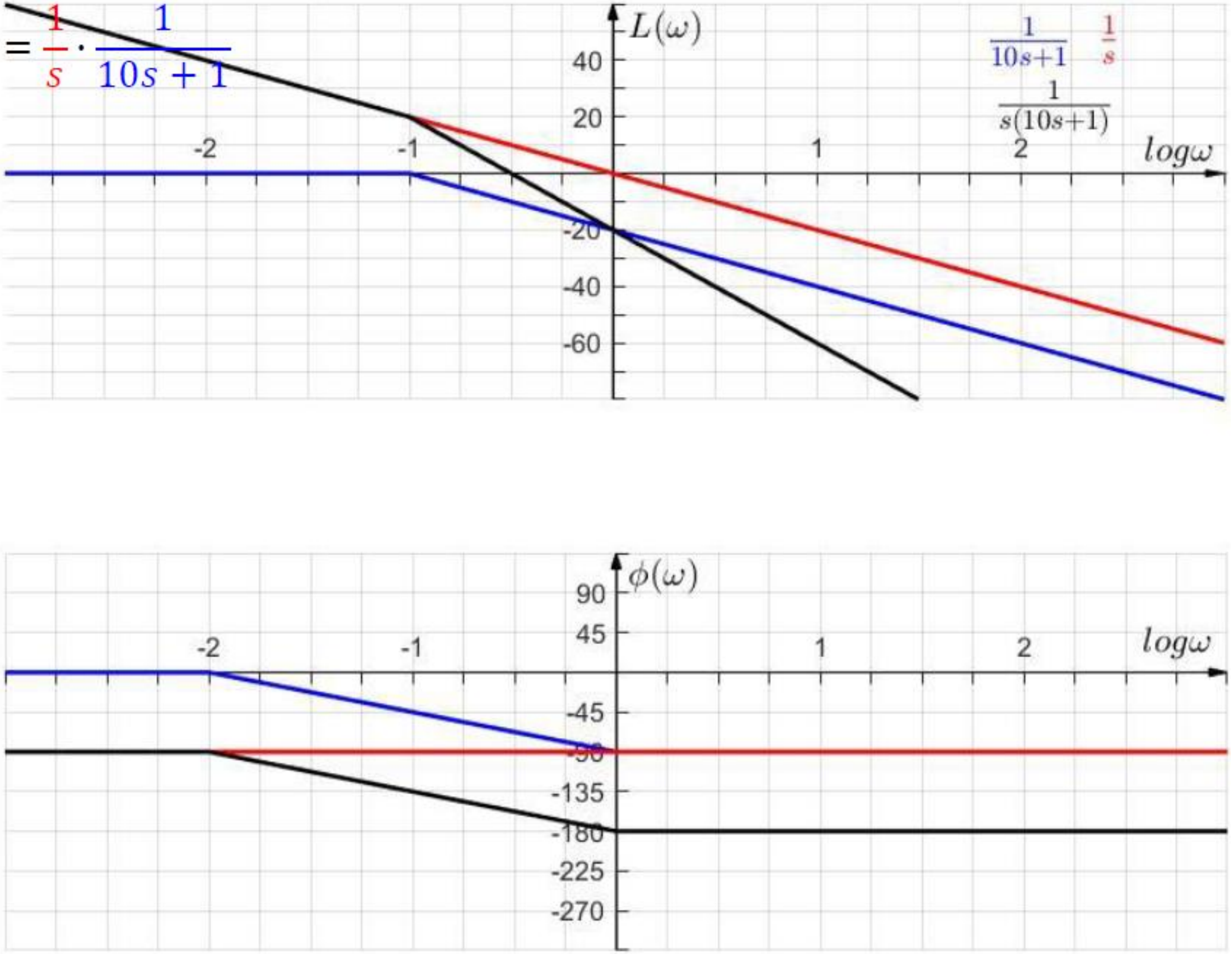
$$G_{OR}(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$$



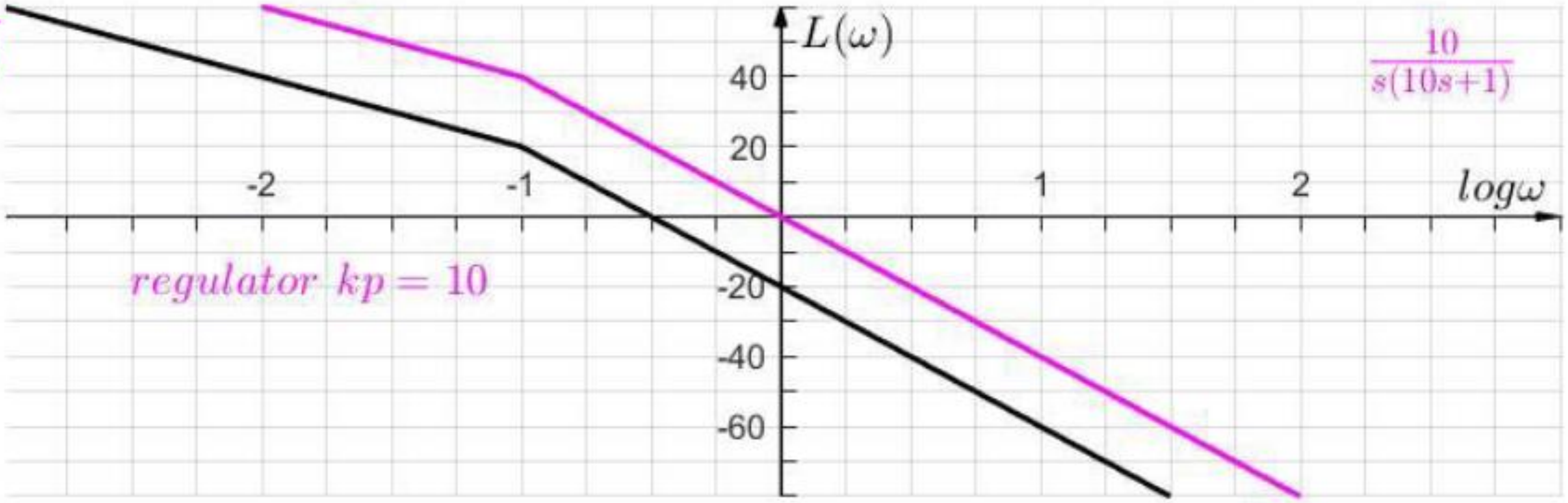
$$G_{OR}(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$$

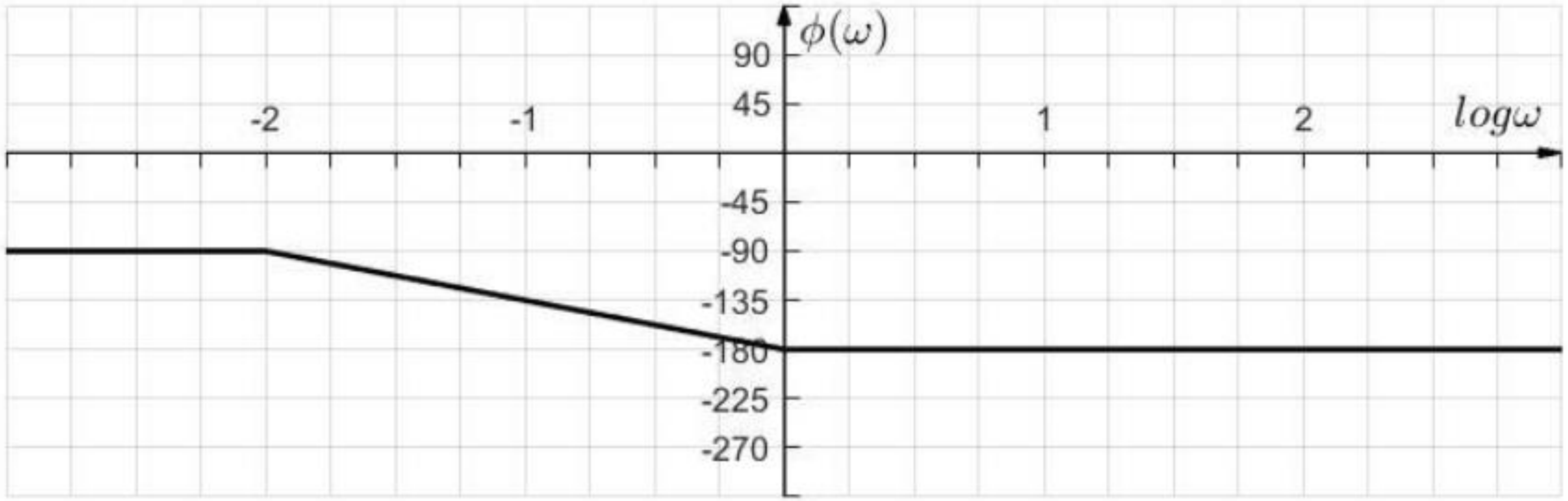


$$G_{OR}(s) = \frac{1}{s(10s+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{10s+1}$$

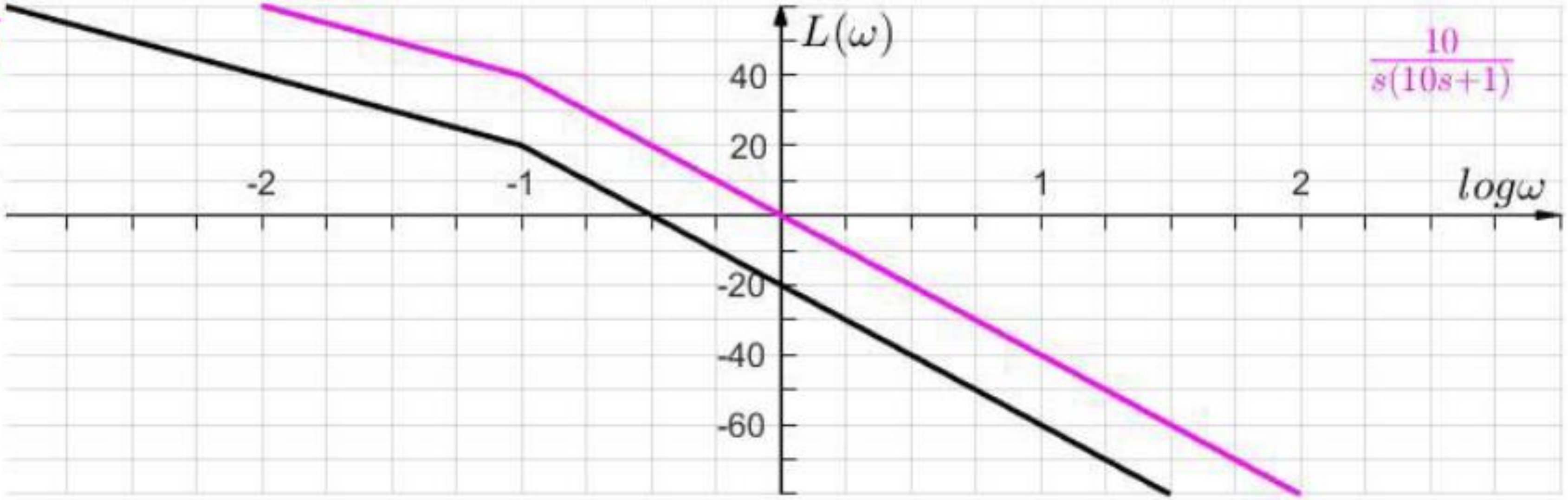


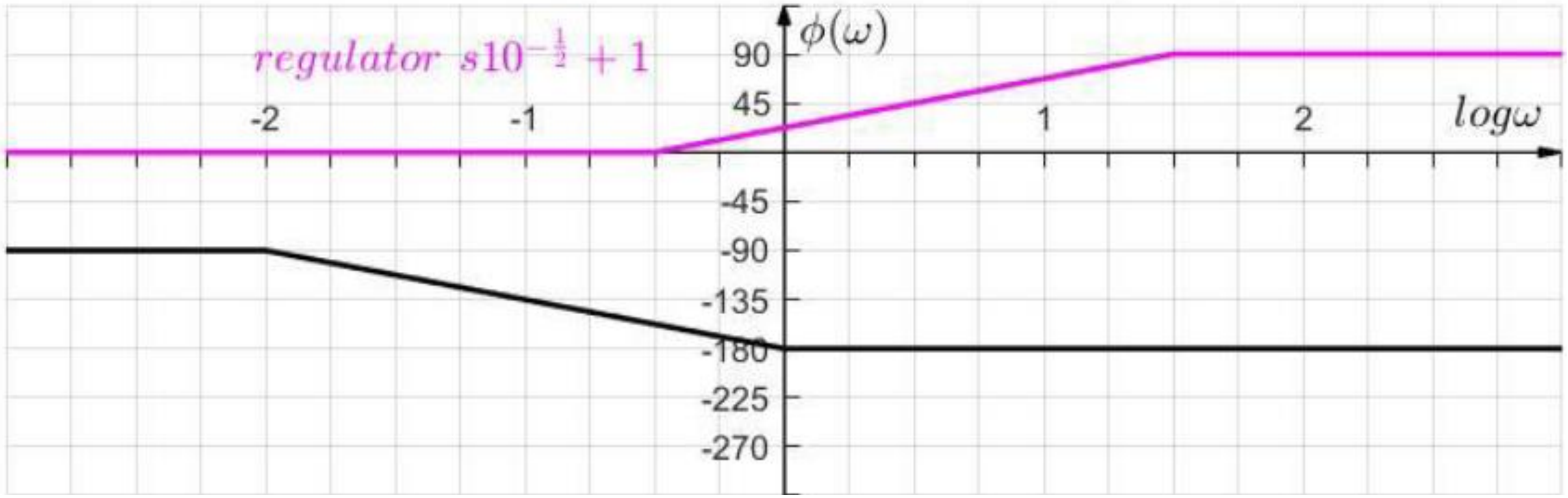
$$k_p G_{OR}(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$$





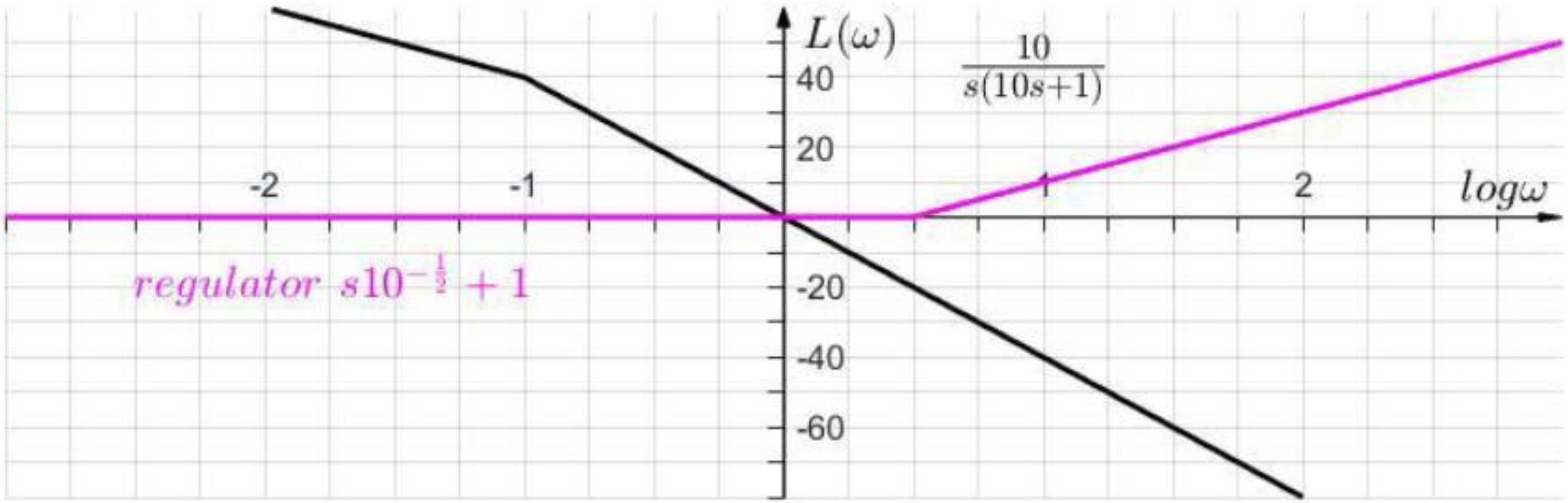
$$k_p G_{OR}(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$$

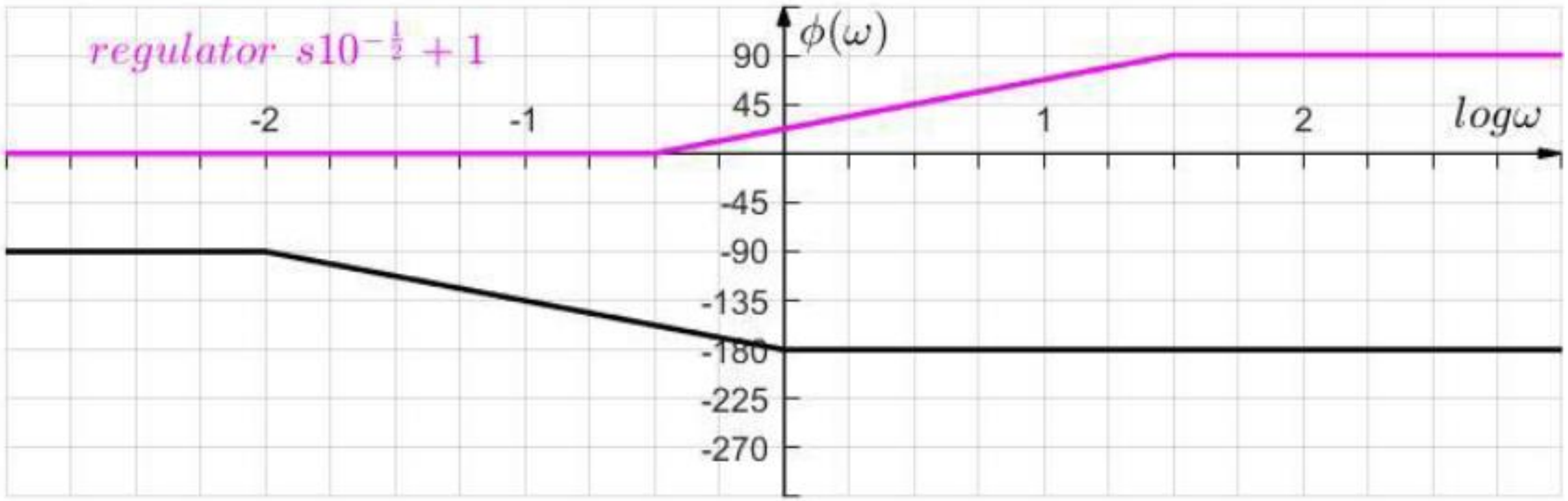




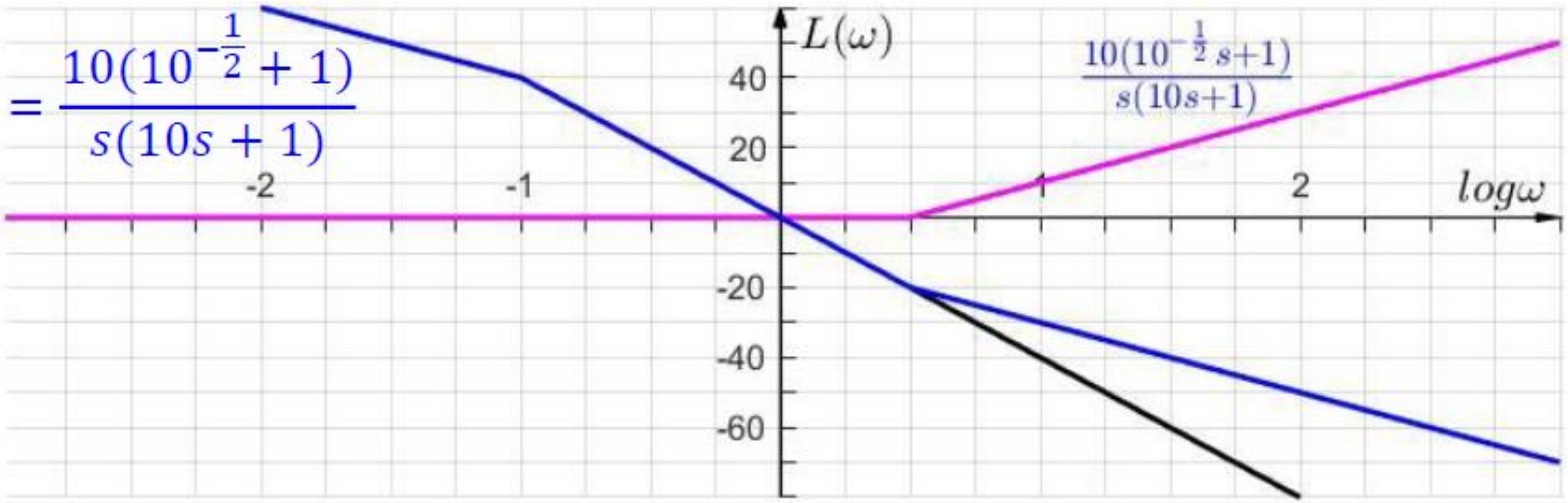
$$k_p G_{OR}(s) = \frac{10}{s(10s+1)}$$

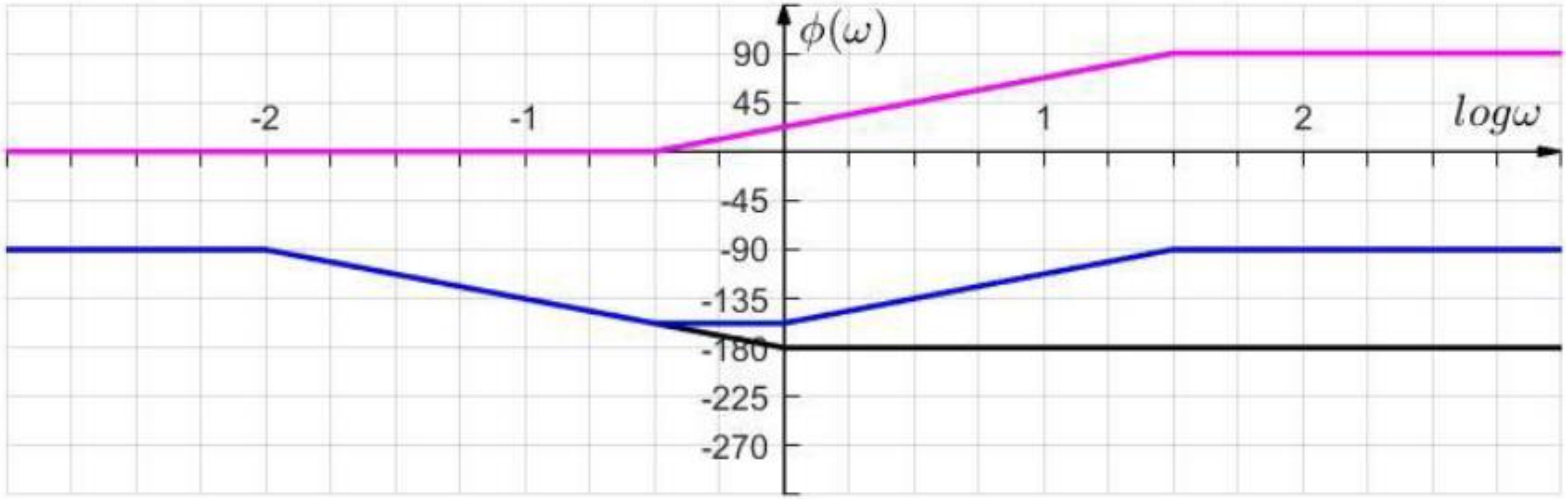
$$G_{PD}(s) = s10^{-\frac{1}{2}} + 1$$

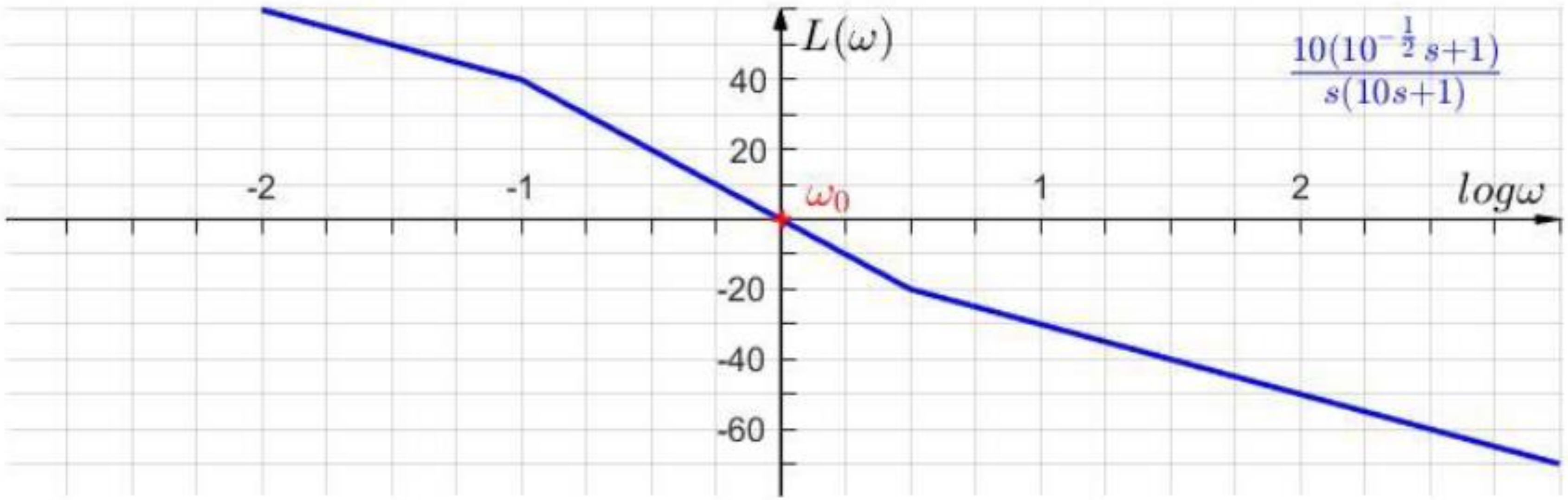




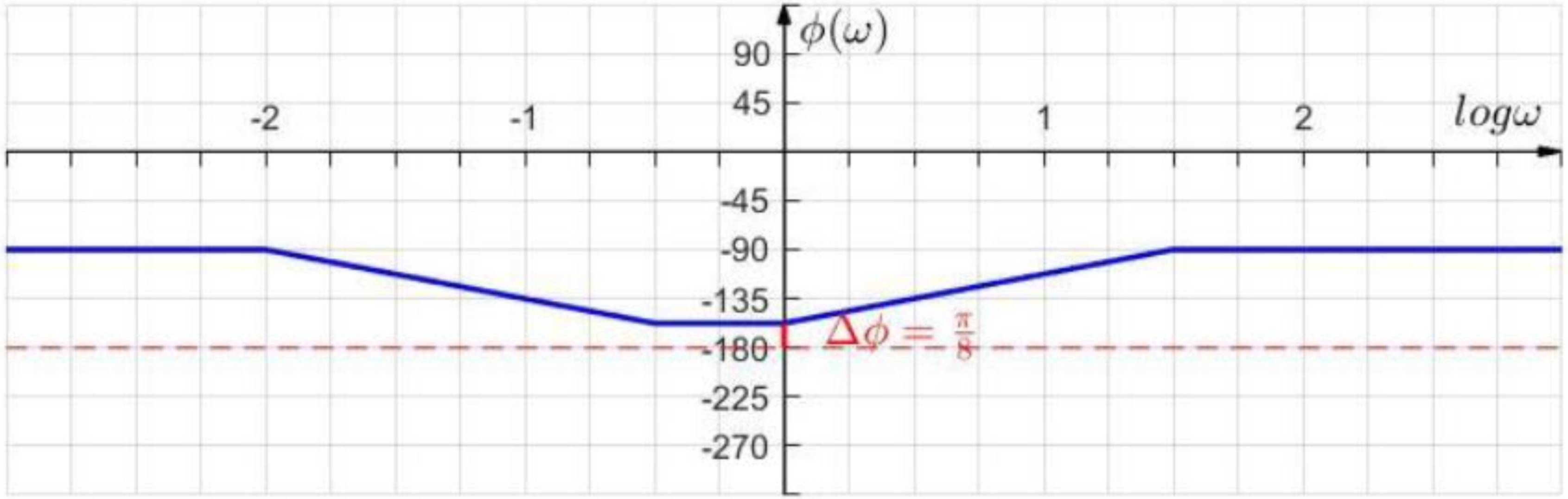
$$G_0(s) = k_p G_{PD}(s) G_{OR}(s) = \frac{10(10^{-\frac{1}{2}} + 1)}{s(10s + 1)}$$



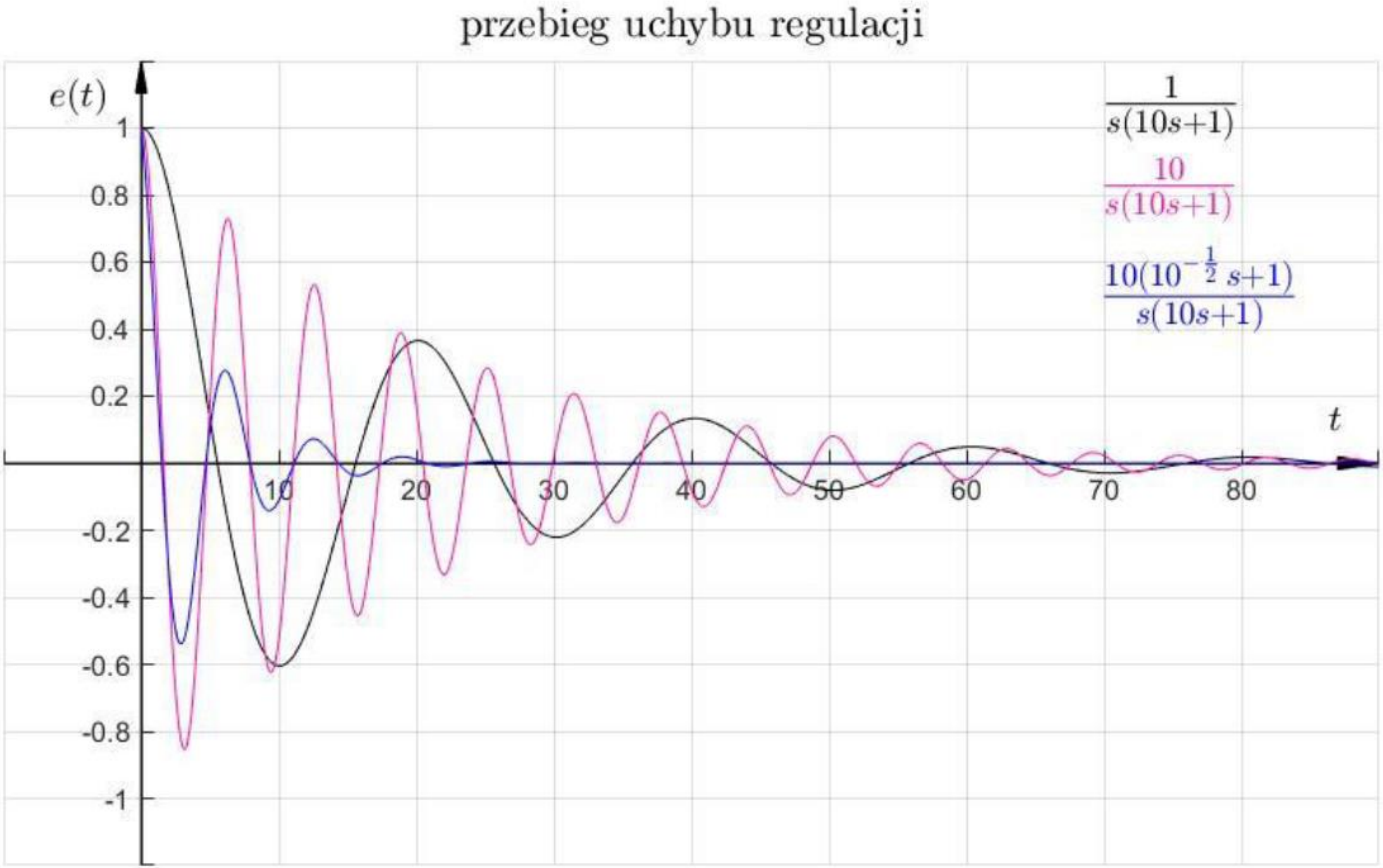




$L(\omega)$
$\frac{10(10^{-\frac{1}{2}}s+1)}{s(10s+1)}$
40
20
-20
-40
-60
-2
-1
1
2
$log\omega$
ω_0

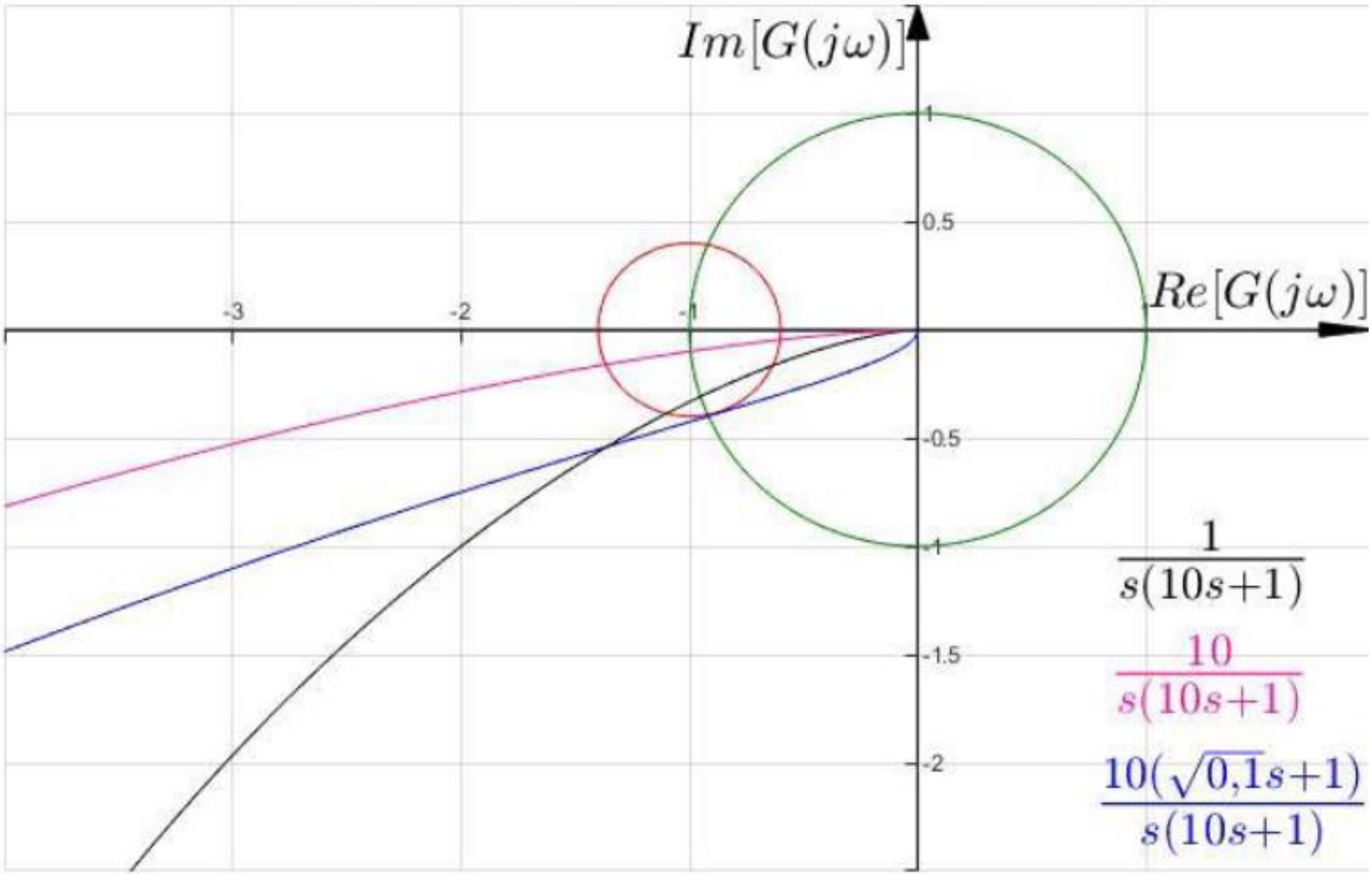


$\phi(\omega)$
90
45
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-2
-1
1
2
$log\omega$
$\Delta\phi = \frac{\pi}{8}$



przebieg uchybu regulacji
e(t)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
t
10
20
30
40
50
60
70
80
$\frac{1}{s(10s+1)}$
$\frac{10}{s(10s+1)}$
$\frac{10(10^{-\frac{1}{2}}s+1)}{s(10s+1)}$

charakterystyki amplitudowo - fazowe



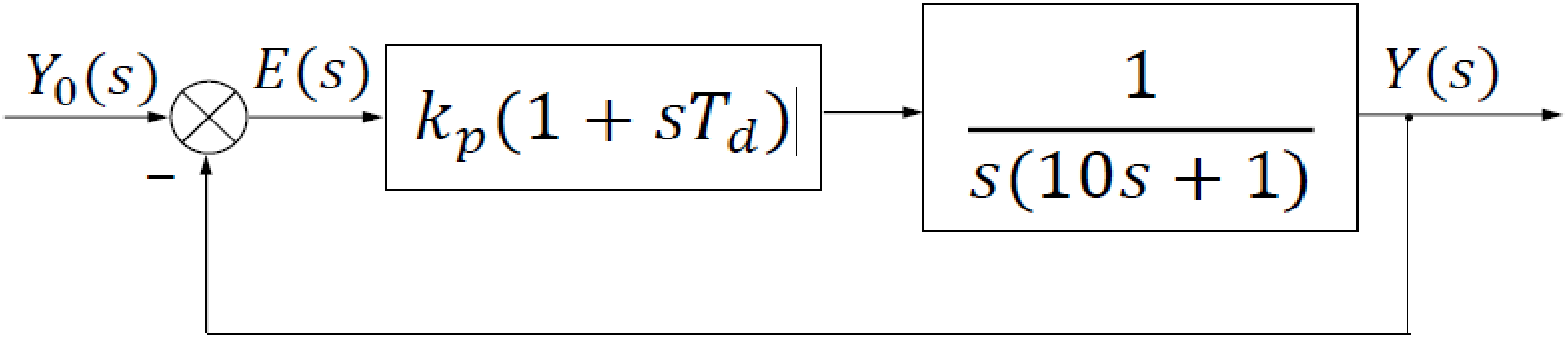
Zadanie. Dany jest obiekt o transmitancji $G_{ob}(s) = \dfrac{1}{s(1+10s)}$

Dobrać regulator PD tak by były spełnione warunki:

1. Przy wymuszeniu jednostkowym: $I_1 = \int_0^\infty e_p(t) \cdot dt \le \dfrac{1}{\sqrt{10}}$
2. Dla pulsacji odcięcia regulator wprowadza przesunięcie fazowe : $\approx \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{\pi}{2}$

Czy odpowiedź jednostkowa ma charakter aperiodyczny?

Jaki jest zapas fazy układu po korekcji?



Układ otwarty z regulatorem ma transmitancję operatorową postaci: $G_0(s) = \frac{k_p \cdot (1 + sT_d)}{s(1 + 10s)}$

Wielomian charakterystyczny układu zamkniętego:

$$M(s) = k_p \cdot (1 + sT_d) + s(1 + 10s) = 10s^2 + (k_p T_d + 1)s + k_p$$

Stąd wynika, że układ zamknięty jest stabilny, bo suma pierwiastków równania charakterystycznego jest ujemna, a iloczyn dodatni.

Dodatkowo układ zamknięty wykazuje astatyzmu I rzędu, ponieważ w transmitancji układu otwartego występuje pojedynczy biegun równy 0, a stąd w transmitancji uchybowej wystąpi zero równe 0:

$$S(s) = \frac{e(s)}{y_0(s)} = \frac{s(1 + 10s)}{10s^2 + (k_p T_d + 1)s + k_p}$$

Wskaźnik całkowy jakości $\quad I_1 = \int_0^\infty e_p(t)\cdot dt$

może być stosowany tylko dla przebiegów nieoscylacyjnych (aperiodycznych). Stąd konieczność sprawdzenia czy w układzie, po zaprojektowaniu regulatora PD, wystąpią oscylacje.

Uchyb regulacji można zawsze zapisać w postaci $\quad e(t) = e_p(t) + e_{ust}$

ale układ jest astatyczny z astatyzmem 1-go rzędu. Powoduje to, że dla skoku jednostkowego $\quad e_{ust} = 0$

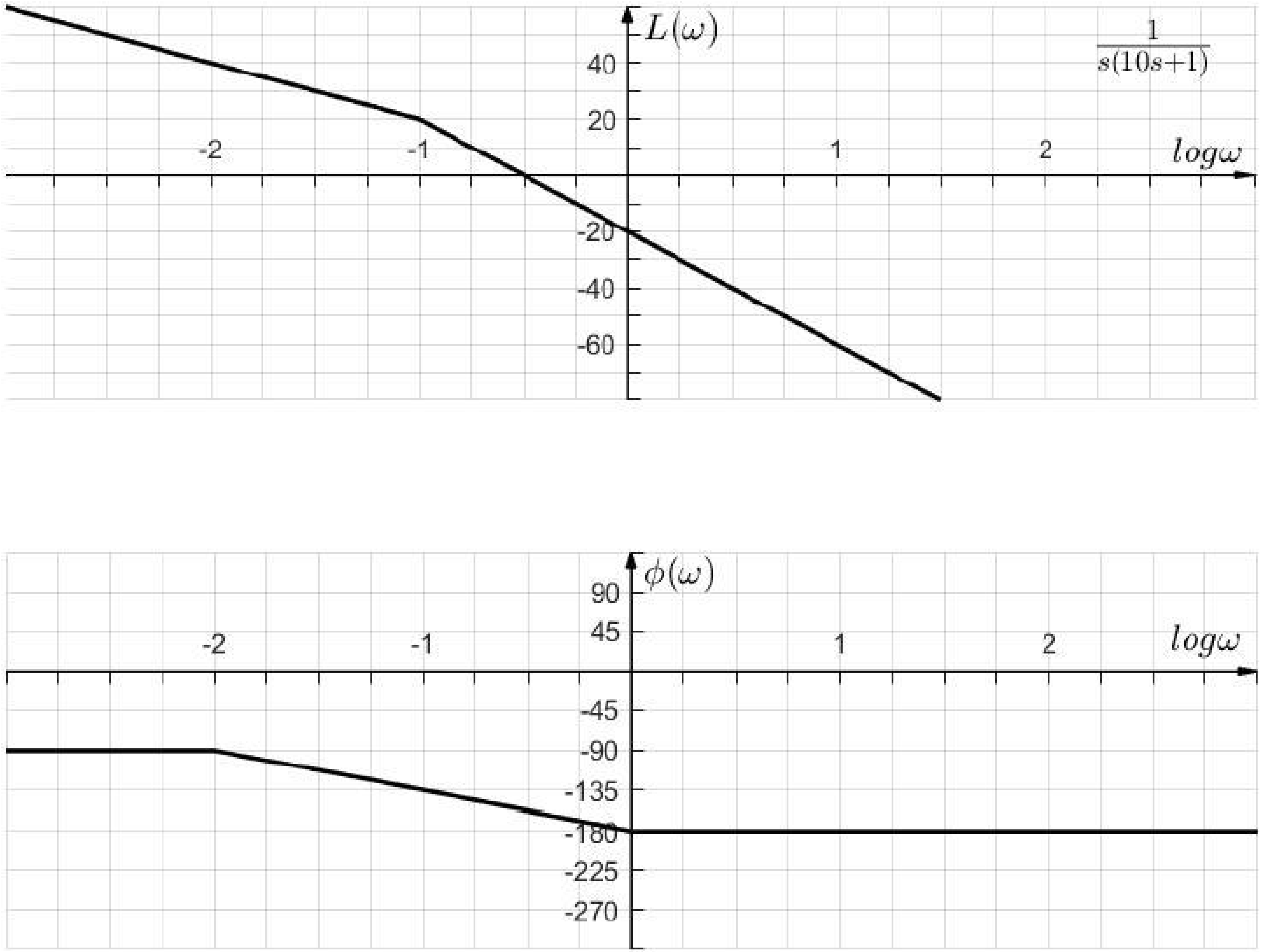
Stąd $\quad I_1 = \int_0^\infty e_p(t)\cdot dt = \int_0^\infty e(t)\cdot dt \quad = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(t)\cdot dt$

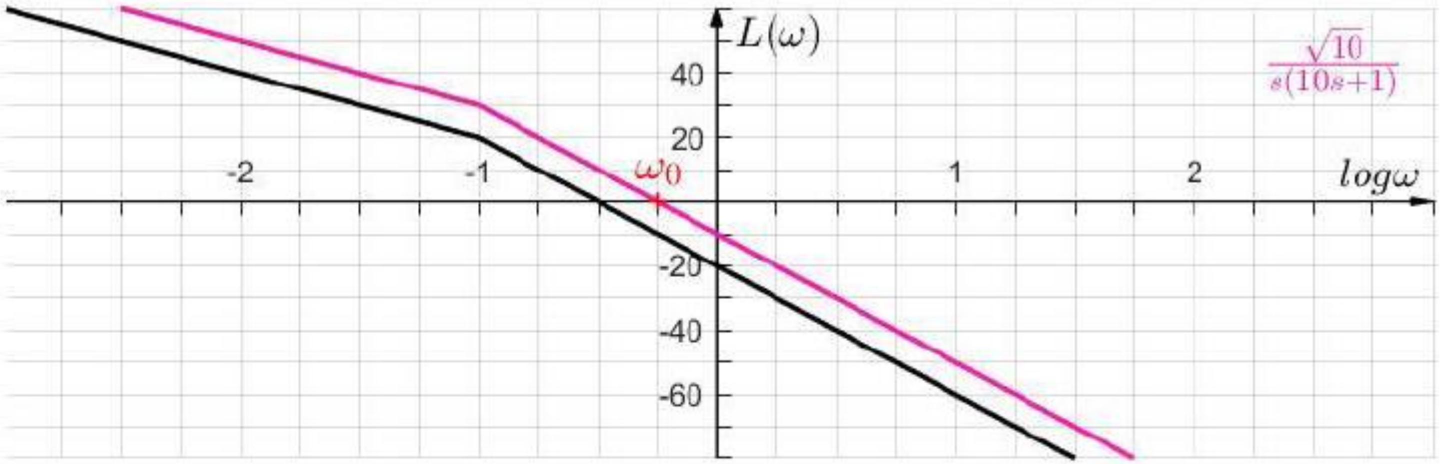
Na podstawie twierdzenia granicznego

$$I_1 = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(t)\cdot dt \;= \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{e(s)}{s}\right] \;= \lim_{s\to 0}\left\{s\cdot\frac{s(1+10s)}{s\left[10s^2+\left(k_pT_d+1\right)s+k_p\right]}\cdot\frac{1}{s}\right\} \;= \lim_{s\to 0}\left\{\frac{(1+10s)}{\left[10s^2+\left(k_pT_d+1\right)s+k_p\right]}\right\} \;= \frac{1}{k_p} \le \frac{1}{\sqrt{10}}$$

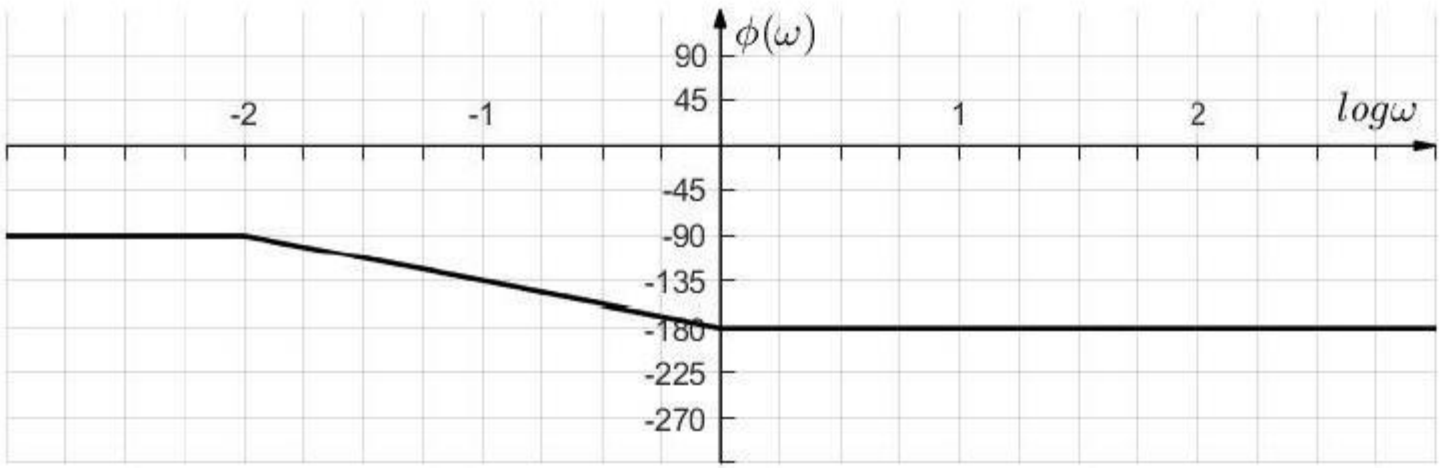
W dalszych rozważaniach przyjmiemy $\quad k_p = \sqrt{10}$

Z poprzedniego przykładu:

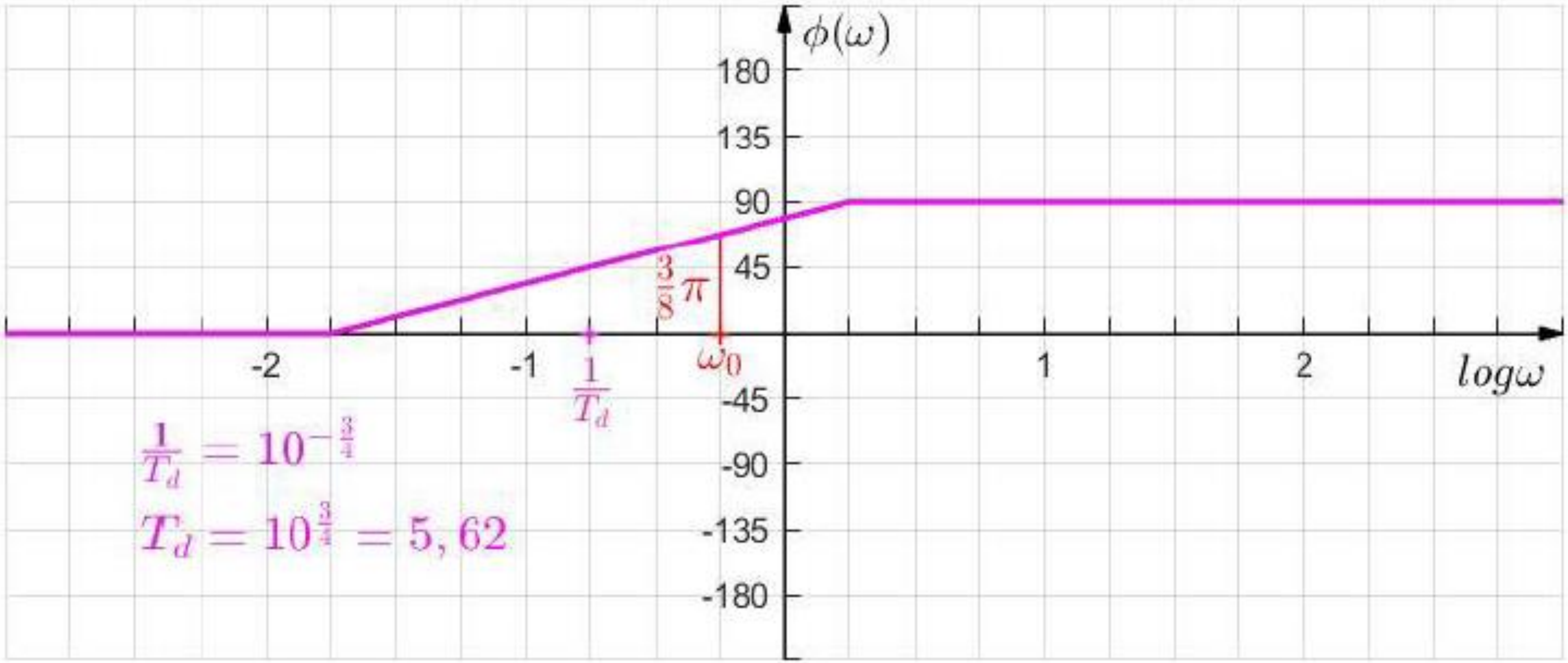




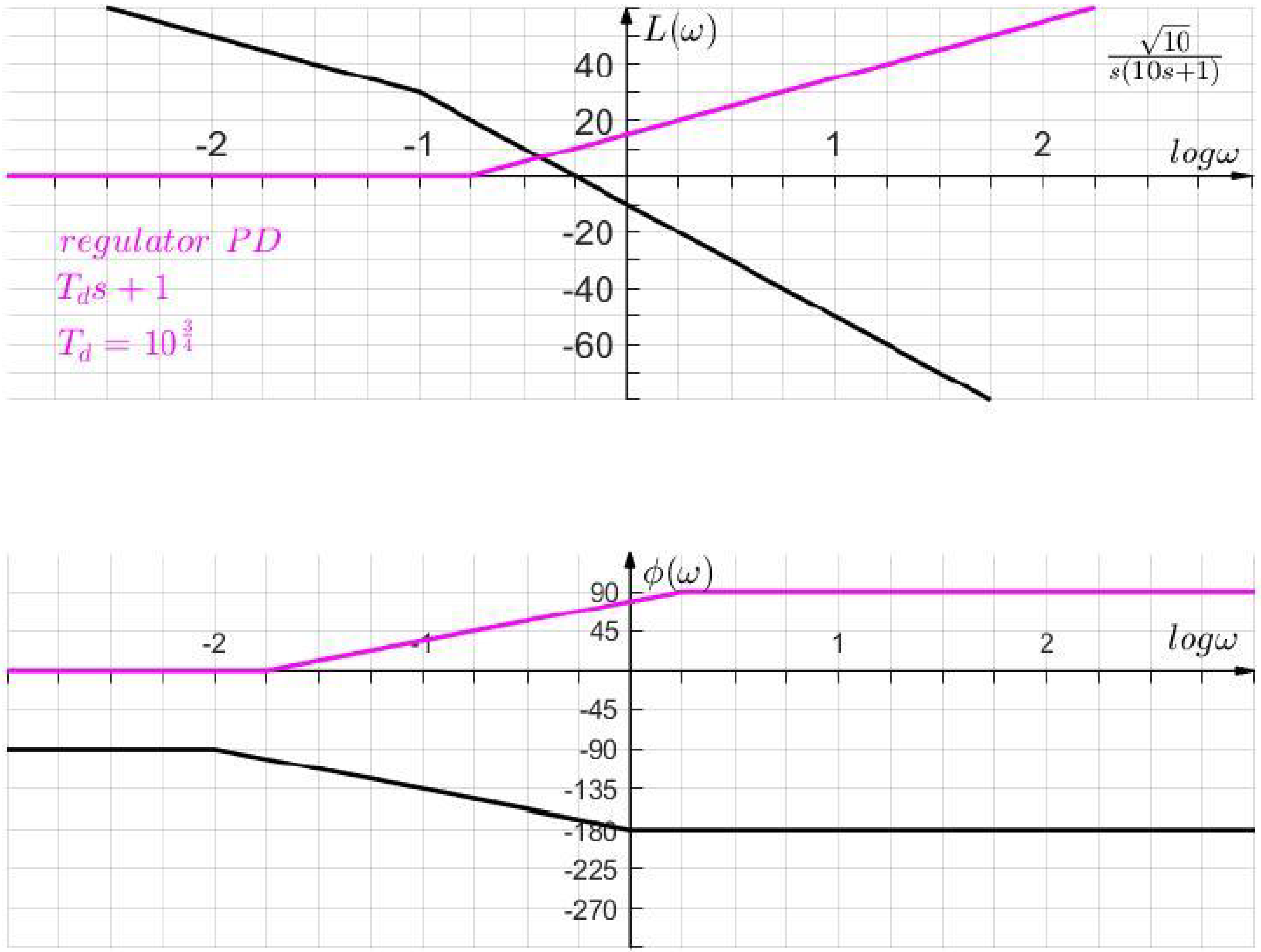
$L(\omega)$
$\frac{\sqrt{10}}{s(10s+1)}$
40
20
-20
-40
-60
-2
-1
1
2
ω_0
$log\omega$



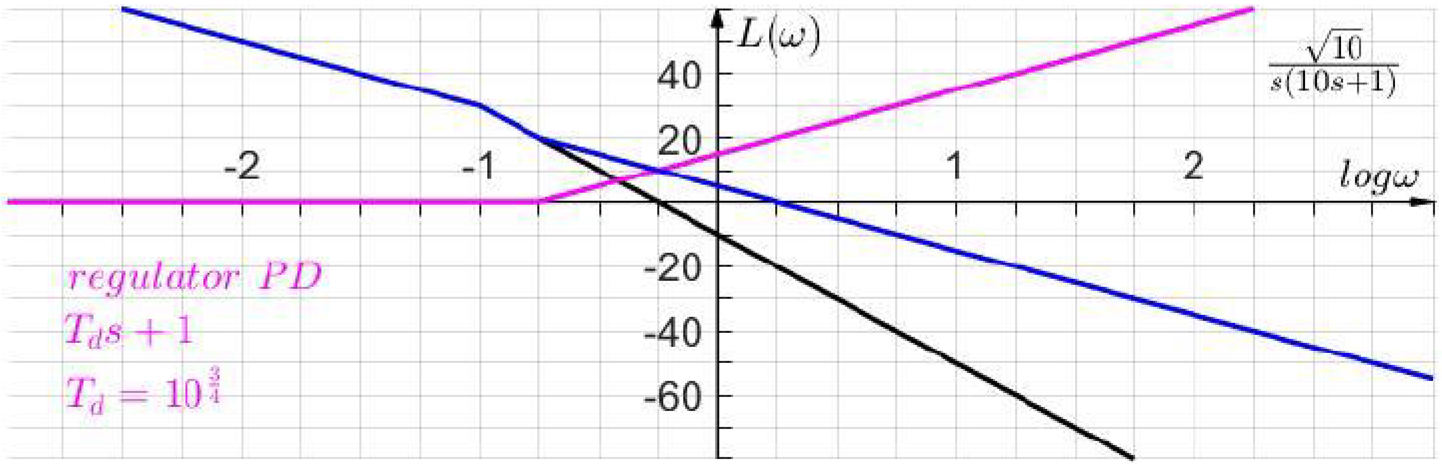
$\phi(\omega)$
90
45
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-2
-1
1
2
$log\omega$



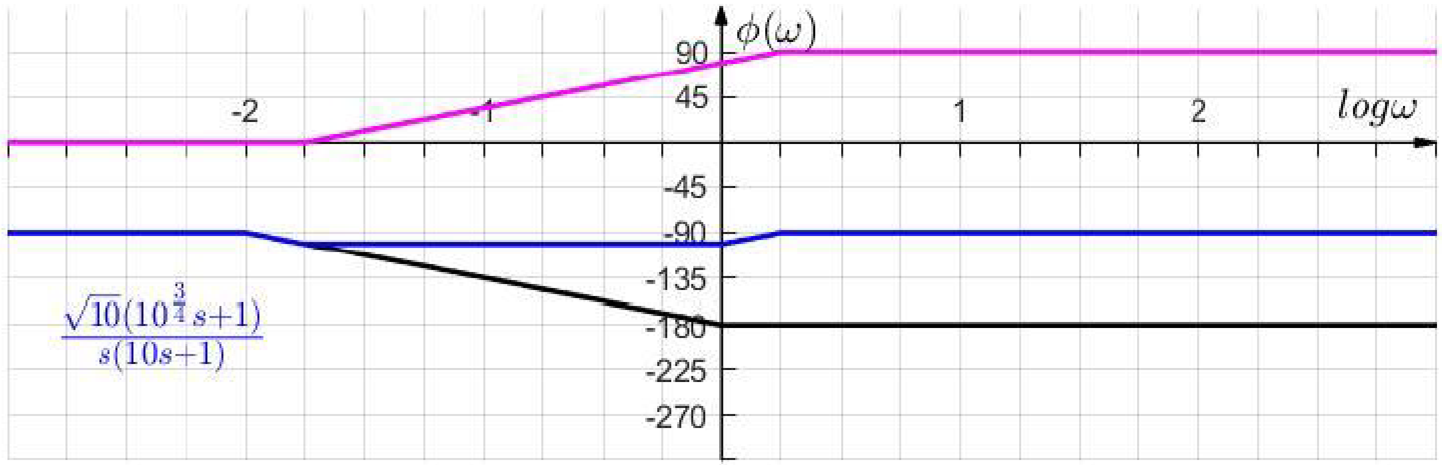
$\phi(\omega)$
180
135
90
45
-45
-90
-135
-180
-2
-1
1
2
$log\omega$
$\frac{3}{8}\pi$
ω_0
$\frac{1}{T_d}$
$\frac{1}{T_d} = 10^{-\frac{3}{4}}$
$T_d = 10^{\frac{3}{4}} = 5,62$



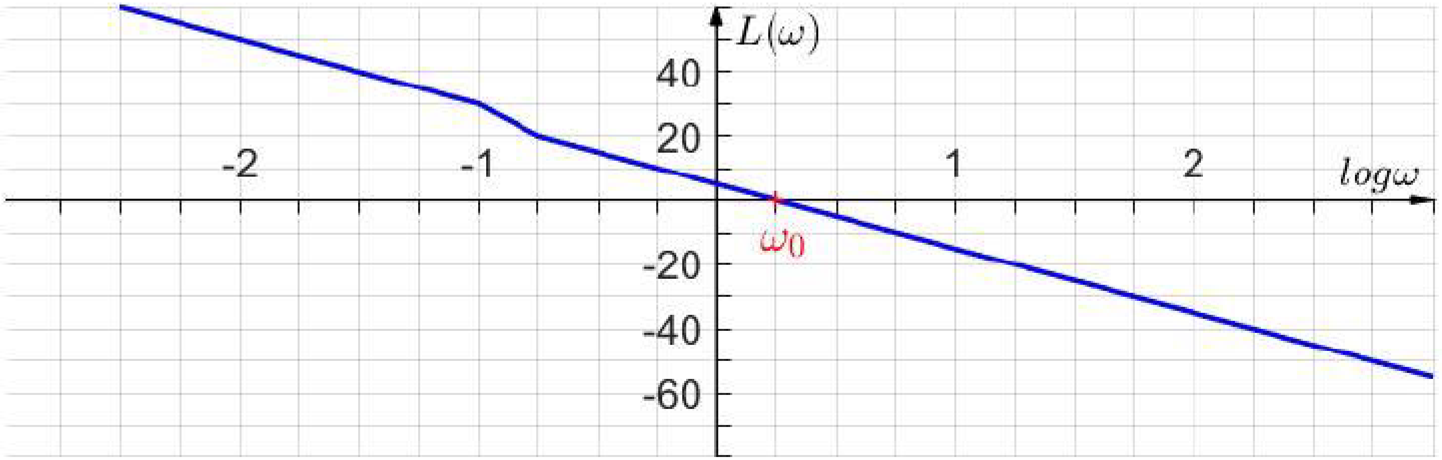
$L(\omega)$
40
20
-20
-40
-60
-2
-1
1
2
$log\omega$
$\frac{\sqrt{10}}{s(10s+1)}$
$regulator\ PD$
$T_d s + 1$
$T_d = 10^{\frac{3}{4}}$
$\phi(\omega)$
90
45
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-2
-1
1
2
$log\omega$



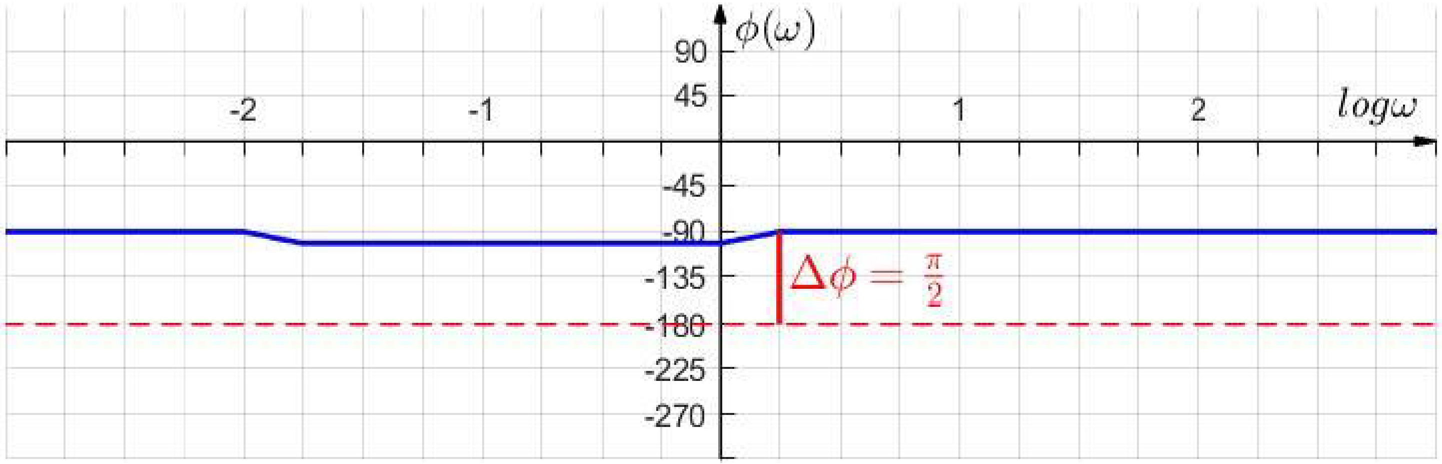
$L(\omega)$
40
20
-20
-40
-60
-2
-1
1
2
$log\omega$
$\frac{\sqrt{10}}{s(10s+1)}$
$regulator\ PD$
$T_d s + 1$
$T_d = 10^{\frac{3}{4}}$



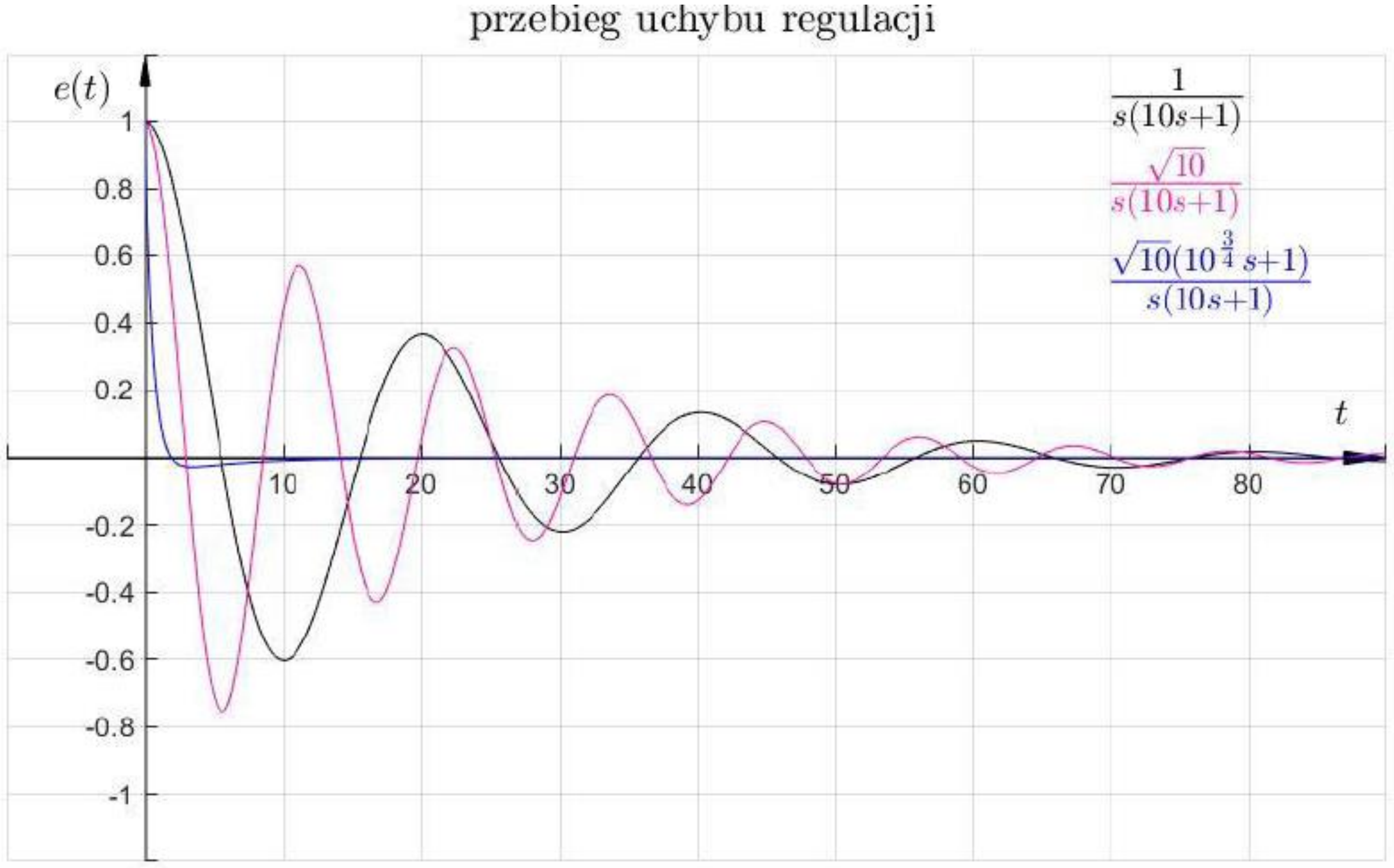
$\phi(\omega)$
90
45
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-2
1
2
$log\omega$
$\frac{\sqrt{10}(10^{\frac{3}{4}}s+1)}{s(10s+1)}$



$L(\omega)$
40
20
-2
-1
1
2
$log\omega$
ω_0
-20
-40
-60



$\phi(\omega)$
90
45
-2
-1
1
2
$log\omega$
-45
-90
-135
-180
-225
-270
$\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$



przebieg uchybu regulacji
e(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
10
20
30
40
50
60
70
80
$\frac{1}{s(10s+1)}$
$\frac{\sqrt{10}}{s(10s+1)}$
$\frac{\sqrt{10}(10^{\frac{3}{4}}s+1)}{s(10s+1)}$

charakterystyki amplitudowo - fazowe