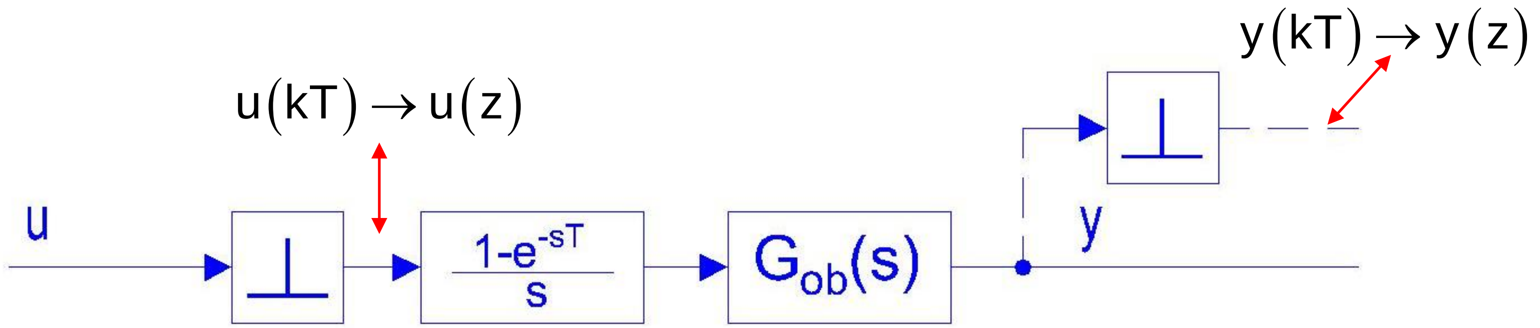


$$G_0(z) = \frac{y(z)}{u(z)}$$

$$G_0(s) = G_{ob}(s) \cdot G_{ext}(s) = G_{ob}(s) \cdot \frac{1-e^{-sT}}{s} = h_{ob}(s) \cdot \left(1-e^{-sT}\right)$$

$$\Rightarrow \quad g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{h_{ob}(s) \cdot \left(1-e^{-sT}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{h_{ob}(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{h_{ob}(s) \cdot e^{-sT}\right\} = h_{ob}(t) \cdot \mathbf{1}(t) - h_{ob}(t-T) \cdot \mathbf{1}(t-T)$$

$$\Rightarrow \quad g_0(kT) = h_{ob}(kT) \cdot \mathbf{1}(kT) - h_{ob}\left[(k-1)T\right] \cdot \mathbf{1}\left[(k-1)T\right]$$

$$\Rightarrow \quad G_0(z) = H_{ob}(z) - z^{-1} \cdot H_{ob}(z) = \left(1-z^{-1}\right) \cdot H_{ob}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot H_{ob}(z)$$

Element inercyjny I rzędu:

$$G_{ob}(s) = \frac{K_1}{1+sT_1} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(s) = \frac{K_1}{s(1+sT_1)} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(t) = K_1 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right] \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$\Rightarrow \quad h_{ob}(kT) = K_1 \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{kT}{T_1}\right)\right] \cdot \mathbf{1}(kT) \underset{A=\exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)}{=} K_1 \cdot \left[1 - (A)^k\right] \cdot \mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow \quad H_{ob}(z) = K_1 \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-A}\right] = K_1(1-A)\frac{z}{(z-1)(z-A)}$$

$$\Rightarrow \quad G_0(z) = \frac{z-1}{z} H_{ob}(z) = \frac{z-1}{z} K_1(1-A)\frac{z}{(z-1)(z-A)} = \frac{K_1(1-A)}{(z-A)}$$

Element całkujący (idealny):

$$G_{ob}(s) = \frac{K_1}{s} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(s) = \frac{K_1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(t) = K_1 \cdot t \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$\Rightarrow \quad h_{ob}(kT) = K_1 \cdot kT \cdot \mathbf{1}(kT) \quad \Rightarrow \quad H_{ob}(z) = K_1 \frac{zT}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad G_0(z) = \frac{z-1}{z} H_{ob}(z) \quad = \frac{z-1}{z} \cdot K_1 \frac{zT}{(z-1)^2} \quad = \frac{K_1 T}{(z-1)}$$

Element całkujący (rzeczywisty):

$$G_{ob}(s)=\frac{K_1}{s(1+sT_1)} \quad\Rightarrow\quad h_{ob}(s)=\frac{K_1}{s^2(1+sT_1)} \quad\Rightarrow\quad h_{ob}(t)=K_1\left[\left(t-T_1\right)+T_1\cdot\exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right]\mathbf{1}(t)$$

$$\Rightarrow\quad h_{ob}(kT)=K_1\left[\left(kT-T_1\right)+T_1\cdot\exp\left(-\frac{kT}{T_1}\right)\right]\mathbf{1}(kT)\underset{A=\exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)}{=}K_1\left(kT-T_1+T_1\cdot A^k\right)\cdot\mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow\quad H_{ob}(z)=K_1\left[\frac{zT}{(z-1)^2}-T_1\frac{z}{z-1}+T_1\frac{z}{z-A}\right]=K_1\cdot z\,\frac{T(z-A)-T_1(z-1)(z-A)+T_1(z-1)^2}{(z-1)^2(z-A)}$$

$$=K_1\cdot z\,\frac{\left[T-T_1(1-A)\right]z+\left[-TA+T_1(1-A)\right]}{(z-1)^2(z-A)}$$

$$\Rightarrow\quad G_0(z)=\frac{z-1}{z}H_{ob}(z)\;=K_1\frac{\left[T-T_1(1-A)\right]z+\left[-TA+T_1(1-A)\right]}{(z-1)(z-A)}\quad=K_1\left[T-T_1(1-A)\right]\frac{z-\dfrac{\left[TA-T_1(1-A)\right]}{\left[T-T_1(1-A)\right]}}{(z-1)(z-A)}$$

$$\underset{\frac{\left[TA-T_1(1-A)\right]}{\left[T-T_1(1-A)\right]}=B}{=}\quad K_1\left[T-T_1(1-A)\right]\frac{z-B}{(z-1)(z-A)}\quad\underset{K_1\left[T-T_1(1-A)\right]=C}{=}\quad C\frac{z-B}{(z-1)(z-A)}\quad=C\frac{z-B}{z^2-(1-A)z+A}$$

Element różniczkujący (rzeczywisty):

$$G_{ob}(s) = \frac{K_1 \cdot s}{1 + sT_1} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(s) = \frac{K_1}{1 + sT_1} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(t) = \frac{K_1}{T_1} \cdot \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \cdot \mathbf{1}(t)$$

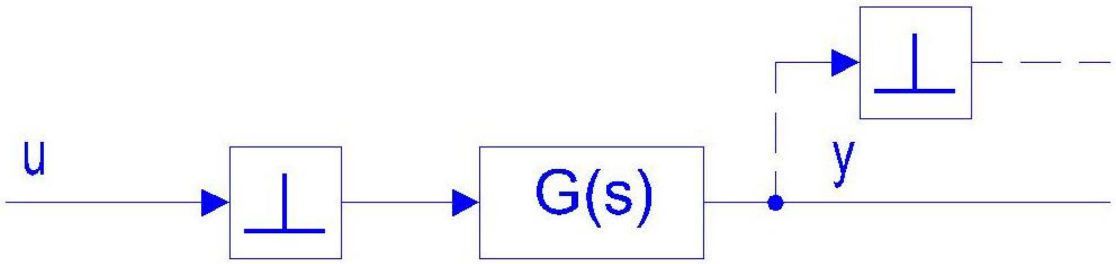
$$\Rightarrow \quad h_{ob}(kT) = \frac{K_1}{T_1} \cdot \exp\left(-\frac{kT}{T_1}\right) \cdot \mathbf{1}(kT) \underset{A = \exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)}{=} \frac{K_1}{T_1} \cdot A^k \cdot \mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow \quad H_{ob}(z) = \frac{K_1}{T_1} \frac{z}{z - A}$$

$$\Rightarrow \quad G_0(z) = \frac{z-1}{z} H_{ob}(z) = \frac{z-1}{z} \frac{K_1}{T_1} \frac{z}{z - A} = \frac{K_1}{T_1} \frac{z-1}{z - A}$$

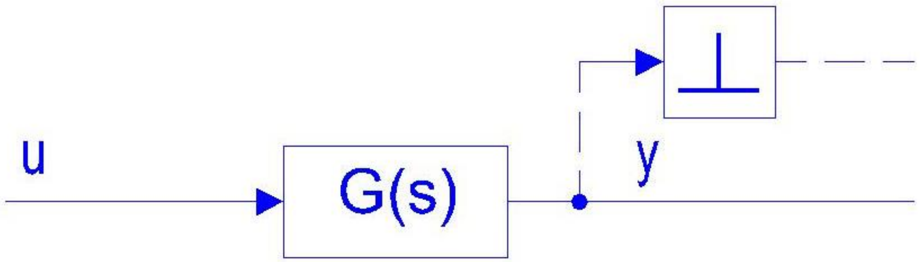
Uwaga!

Nie w każdym przypadku daje się wyznaczyć transmitancję dyskretną

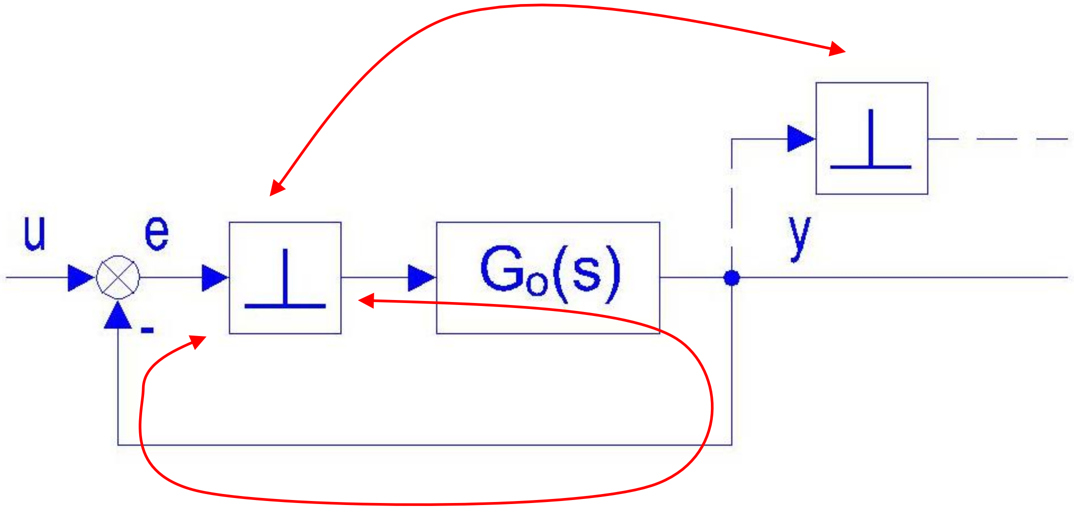


$$y(z) = G(z)\cdot u(z) \quad = \mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\}\cdot u(z)$$

… ale zawsze można wyznaczyć transformatę **Z** odpowiedzi układu



$$y(z) = Gu(z) \quad = \mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G(s)\cdot u(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\}$$



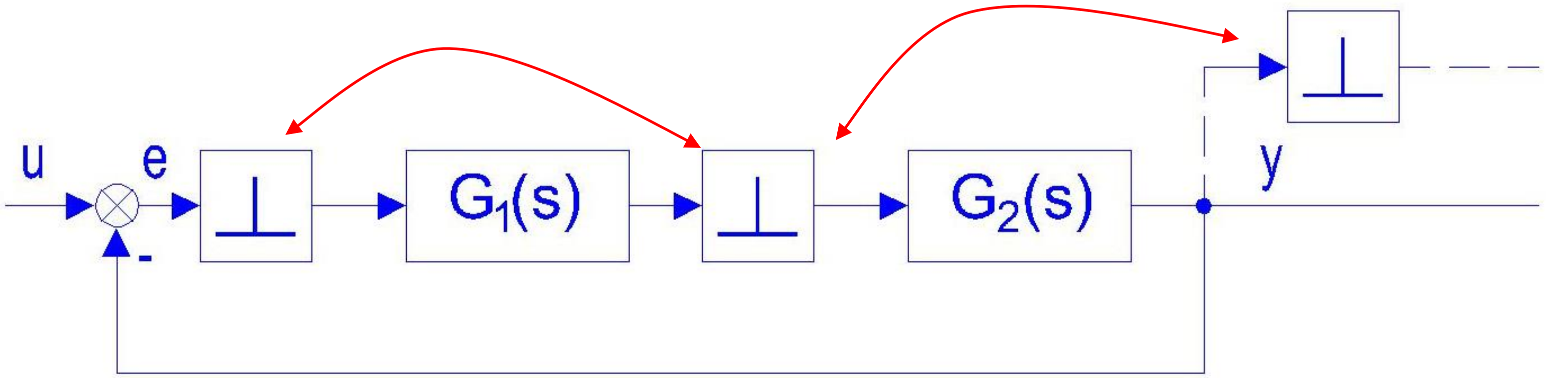
$$y(z)=\mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G_o(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\}\cdot e(z) \;\; =G_o(z)\cdot e(z)$$

$$e(\bullet)=u(\bullet)-y(\bullet)$$

$$e(z)=u(z)-G_o(z)\cdot e(z) \quad \Rightarrow \quad e(z)+G_o(z)\cdot e(z)=u(z) \quad \Rightarrow \quad e(z)=\frac{u(z)}{1+G_o(z)} \quad \Rightarrow \quad y(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}\cdot u(z)$$

$$G(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}$$

$$G_{eu}(z)=\frac{1}{1+G_o(z)}$$



$$G(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)} \qquad G_o(z)=G_1(z)\cdot G_2(z) \quad\Rightarrow\quad G(z)=\frac{G_1(z)\cdot G_2(z)}{1+G_1(z)\cdot G_2(z)}$$

Np. dla:

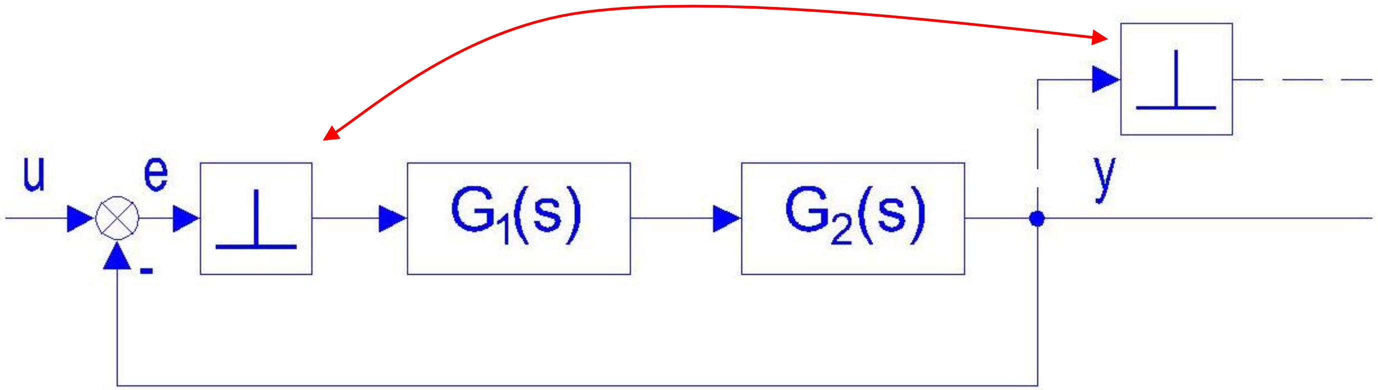
$$G_1(s)=\frac{K_1}{s(1+sT_1)} \quad\Rightarrow\quad g_1(t)=K_1\left(1-e^{-\frac{t}{T_1}}\right)\cdot\mathbf{1}(t) \quad\Rightarrow\quad g_1(kT)=K_1\left(1-e^{-\frac{kT}{T_1}}\right)\cdot\mathbf{1}(kT) \qquad A=\exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)$$

$$\Rightarrow\quad G_1(z)=K_1\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-A}\right)=K_1\cdot z\frac{(z-A)-(z-1)}{(z-1)(z-A)}=K_1(1-A)\frac{z}{(z-1)(z-A)}$$

$$G_2(s)=\frac{K_2}{s} \quad\Rightarrow\quad g_2(t)=K_2\cdot\mathbf{1}(t) \quad\Rightarrow\quad g_2(kT)=K_2\cdot\mathbf{1}(kT) \quad\Rightarrow\quad G_2(z)=K_2\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$G_o(z)=K_1(1-A)\frac{z}{(z-1)(z-A)}\cdot K_2\frac{z}{z-1}=\frac{K_1\cdot K_2(1-A)z^2}{(z-1)^2(z-A)}$$

$$G(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}$$



$$G_o(s)=G_1(s)\cdot G_2(s)=G_{12}(s)\;\Rightarrow\;G(z)=\frac{G_{12}(z)}{1+G_{12}(z)}\qquad G_{12}(s)=\frac{K_1}{s(1+sT_1)}\frac{K_2}{s}=\frac{K_1\cdot K_2}{s^2(1+sT_1)}$$

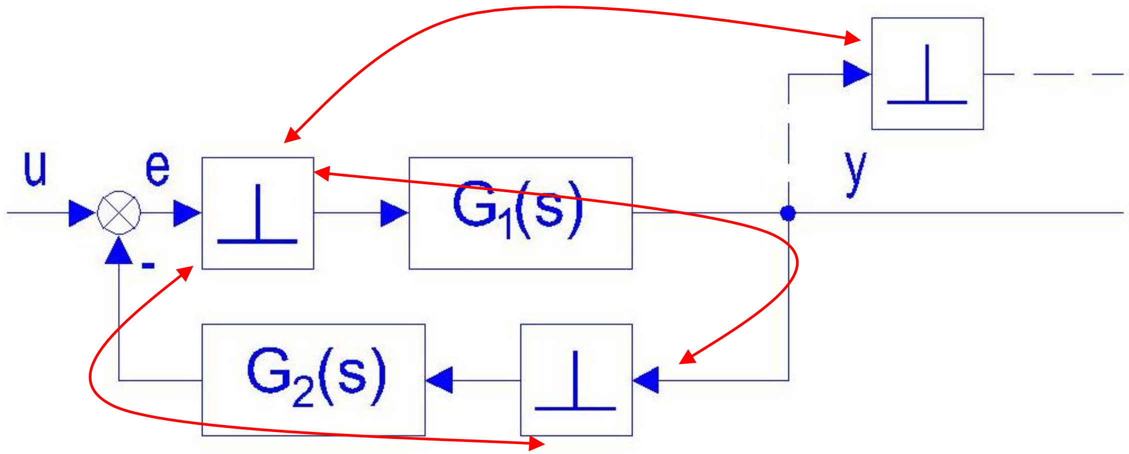
$$\Rightarrow\quad g_{12}(t)=K_1\cdot K_2\left[(t-T_1)+T_1\cdot\exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right]\mathbf{1}(t)\;\Rightarrow\;g_{12}(kT)=K_1\cdot K_2\left[(kT-T_1)+T_1\cdot\exp\left(-\frac{kT}{T_1}\right)\right]\mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow\quad G_{12}(z)=K_1\cdot K_2\left[\frac{zT}{(z-1)^2}-T_1\frac{z}{z-1}+T_1\frac{z}{z-A}\right]=K_1\cdot K_2\cdot z\frac{T(z-A)-T_1(z-1)(z-A)+T_1(z-1)^2}{(z-1)^2(z-A)}\qquad A=\exp\left(-\frac{T}{T_1}\right)$$

$$=K_1\cdot K_2\cdot z\frac{T(z-A)-T_1(z-1)(1-A)}{(z-1)^2(z-A)}=K_1\cdot K_2\cdot z\frac{\left[T-T_1(1-A)\right]z-\left[TA-T_1(1-A)\right]}{(z-1)^2(z-A)}\qquad B=\frac{\left[TA-T_1(1-A)\right]}{\left[T-T_1(1-A)\right]}$$

$$C=K_1\left[T-T_1(1-A)\right]$$

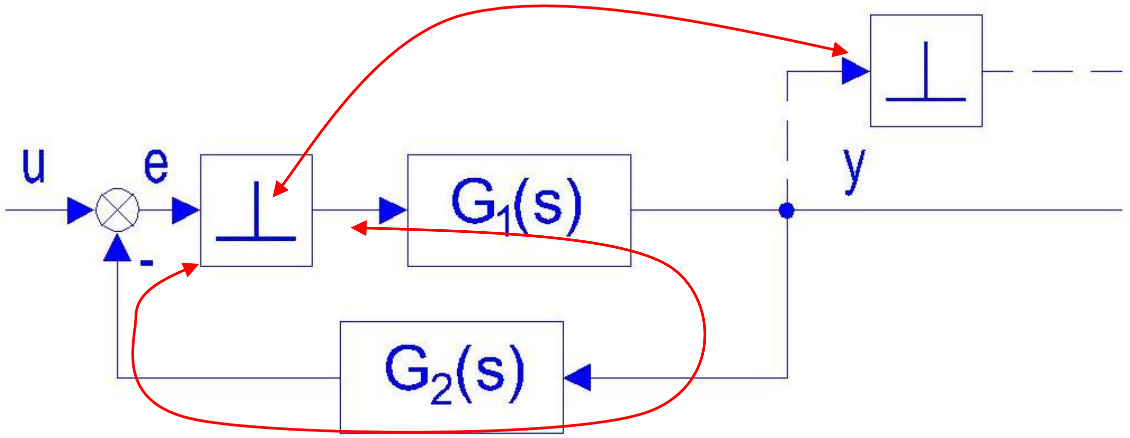
$$=K_1\cdot K_2\cdot\left[T-T_1(1-A)\right]\cdot z\frac{z-\dfrac{\left[TA-T_1(1-A)\right]}{\left[T-T_1(1-A)\right]}}{(z-1)^2(z-A)}=K_2\cdot C\cdot\frac{z(z-B)}{(z-1)^2(z-A)}\neq\frac{K_1\cdot K_2(1-A)z^2}{(z-1)^2(z-A)}$$



$$y(z) = G_1(z) \cdot e(z) \qquad e(z) = u(z) - G_2(z) \cdot y(z)$$

$$\Rightarrow \quad y(z) = G_1(z) \cdot \left[u(z) - G_2(z) \cdot y(z) \right] \quad \Rightarrow \quad y(z) + G_1(z) \cdot G_2(z) \cdot y(z) = G_1(z) \cdot u(z)$$

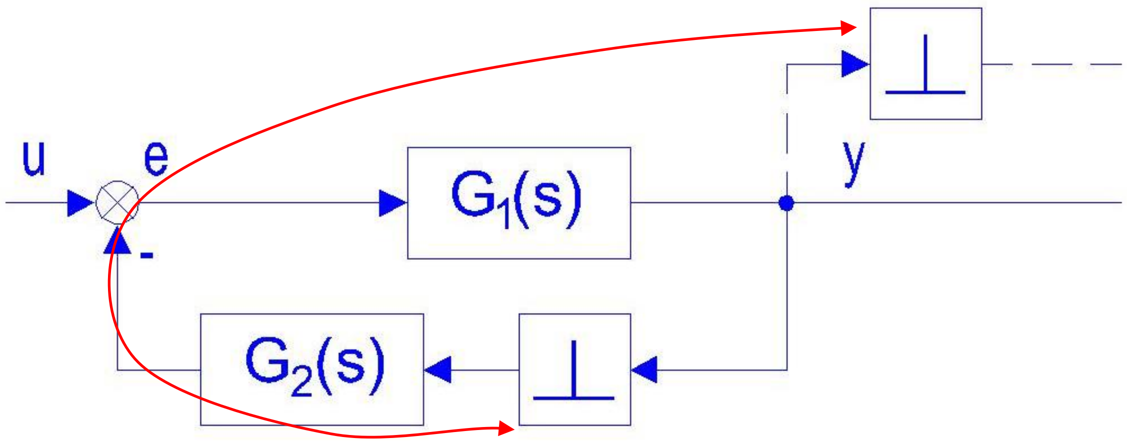
$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z) \cdot G_2(z)}$$



$$y(z) = G_1(z)\cdot e(z) \qquad e(z) = u(z) - G_{12}(z)\cdot e(z) \quad \Rightarrow \quad e(z) = \frac{u(z)}{1+G_{12}(z)}$$

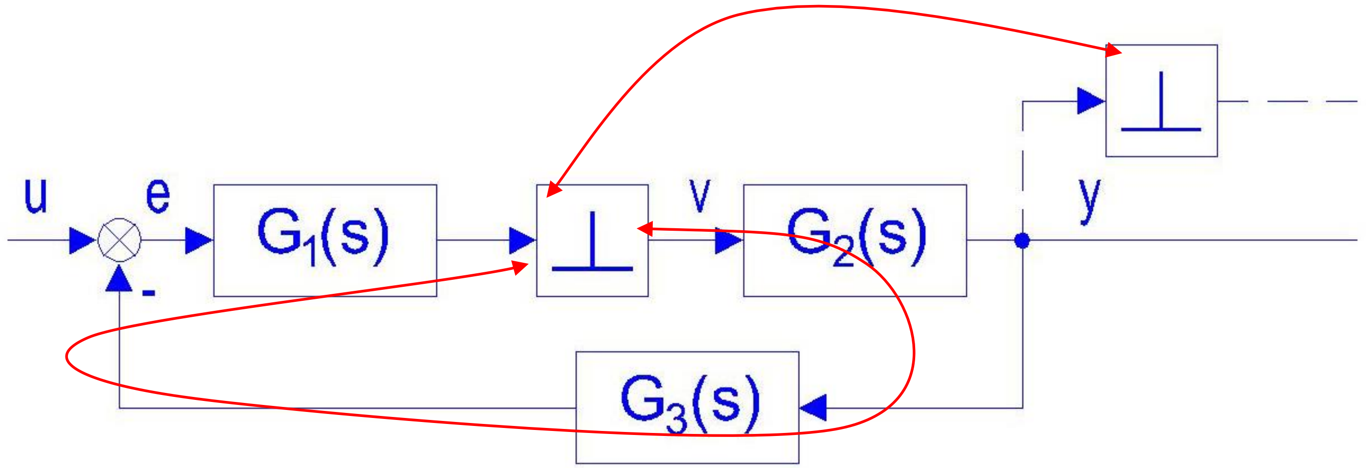
$$\Rightarrow \quad y(z) = G_1(z)\cdot\frac{u(z)}{1+G_{12}(z)}$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{G_1(z)}{1+G_{12}(z)}$$



$$y(z) = \mathbf{Z}\left\{ \mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s) \right]\Big|_{t=kT} \right\} - G_{12}(z)\cdot y(z)$$

$$\Rightarrow \quad y(z) = \frac{\mathbf{Z}\left\{ \mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s) \right]\Big|_{t=kT} \right\}}{1+G_{12}(z)}$$

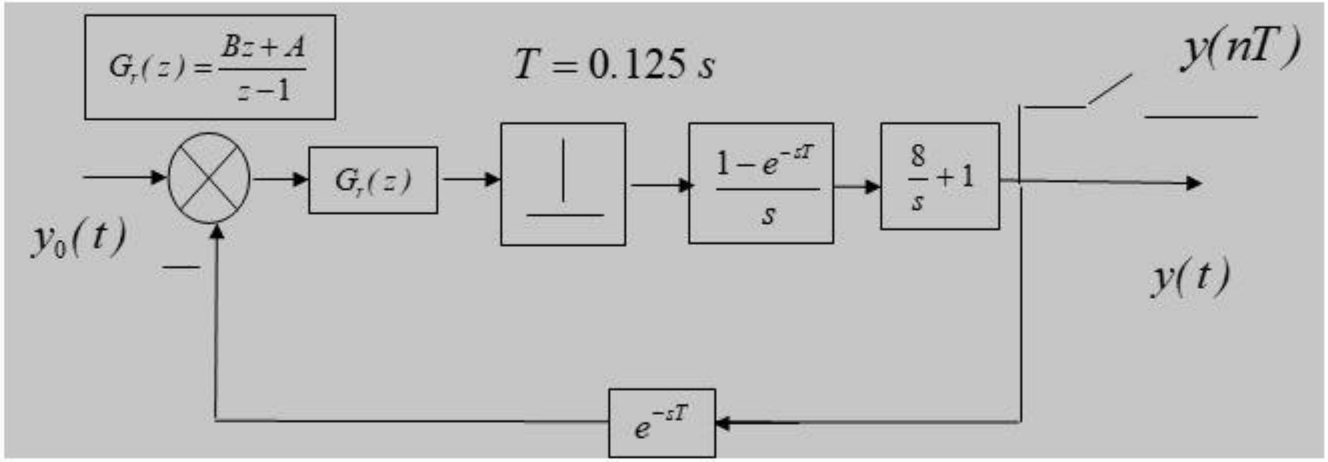


$$y(z) = G_2(z)\cdot v(z) \qquad v(z) = \mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\} - G_{123}(z)\cdot v(z)$$

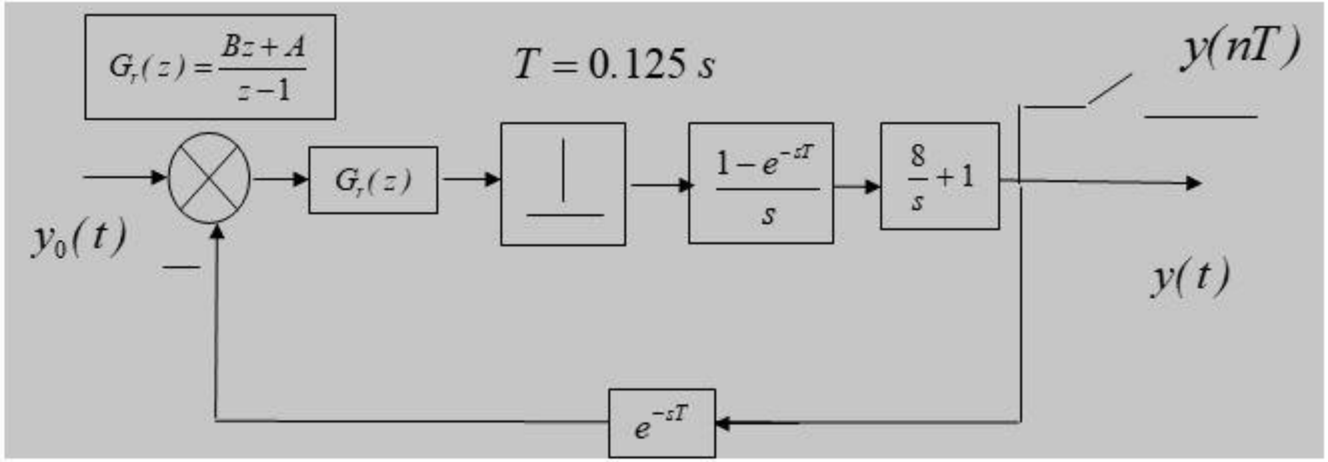
$$\Rightarrow \quad v(z) + G_{123}(z)\cdot v(z) = \mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\} \qquad \Rightarrow \quad v(z) = \frac{\mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\}}{1+G_{123}(z)}$$

$$\Rightarrow \quad y(z) = G_2(z)\cdot\frac{\mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[G_1(s)\cdot u(s)\right]\Big|_{t=kT}\right\}}{1+G_{123}(z)}$$

A. Jaka jest transmitancja dyskretna tego układu.
B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.
C. Sprawdź rząd astatyzmu tego układu.
D. Wyznacz uchyb w stanie ustalonym dla wymuszeń w postaci liniowej oraz kwadratowej funkcji czasu.
E. Dla jakich wartości A, B wystąpią w układzie dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania?
F. Naszkicuj odpowiedź jednostkową układu w tym przypadku.



A. Jaka jest transmitancja dyskretna tego układu.



$$G(z)=\frac{G_r(z)\cdot G_1(z)}{1+G_r(z)\cdot G_2(z)}$$

$$G_1(s)=\frac{8}{s}+1 \quad\Rightarrow\quad H_1(s)=\frac{8}{s^2}+\frac{1}{s} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad H_1(t)=(8\cdot t+1)\cdot\mathbf{1}(t) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad H_1(nT)=(8\cdot nT+1)\cdot\mathbf{1}(nT)$$

$$G_1(z)\underset{T=0,125}{=}\frac{z}{z-1}$$

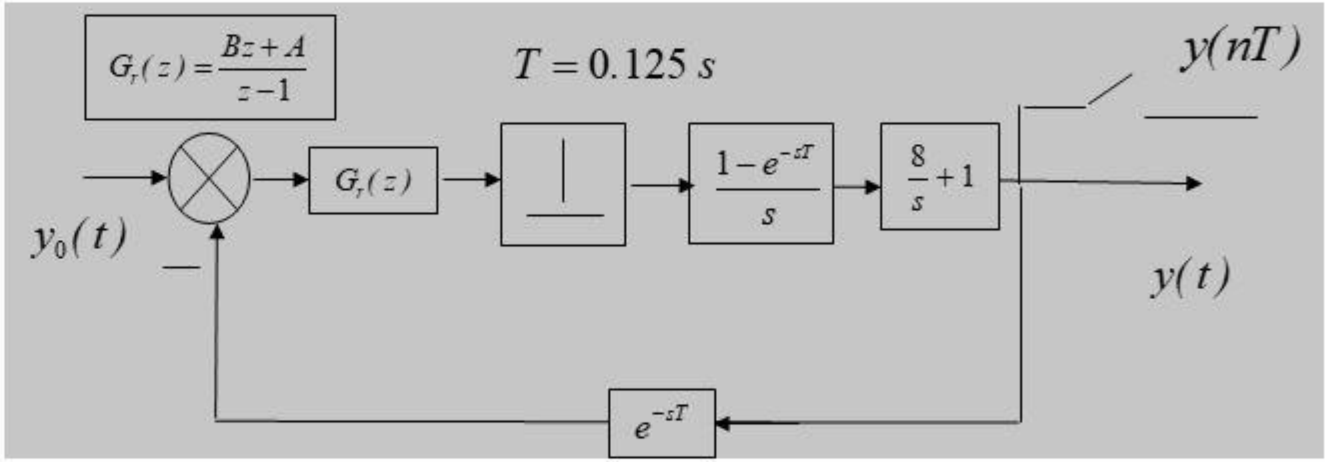
$$G_2(z)\underset{T=0,125}{=}\frac{1}{z-1}$$

$$H_1(z)=8\frac{zT}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}=\frac{z}{(z-1)^2}\left[8T+(z-1)\right]=\frac{z\left[z-(1-8T)\right]}{(z-1)^2}$$

$$G_1(z)=\frac{z-1}{z}H_1(z)=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z\left[z-(1-8T)\right]}{(z-1)^2}=\frac{z-(1-8T)}{z-1}$$

$$G_2(z)=z^{-1}\cdot G_1(z)=z^{-1}\cdot\frac{z-(1-8T)}{z-1}=\frac{z-(1-8T)}{z(z-1)}$$

A. Jaka jest transmitancja dyskretna tego układu.



$$G_1(z)\underset{T=0,125}{=}\frac{z}{z-1}\qquad G_2(z)\underset{T=0,125}{=}\frac{1}{z-1}$$

$$G(z)=\frac{G_r(z)\cdot G_1(z)}{1+G_r(z)\cdot G_2(z)}=$$

$$=\frac{\frac{Bz+A}{z-1}\cdot\frac{z}{z-1}}{1+\frac{Bz+A}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}}=\frac{z(Bz+A)}{(z-1)^2+(Bz+A)}=\frac{z(Bz+A)}{z^2+(B-2)z+(A+1)}$$

B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.

$$M(z) = z^2 + (B-2)z + (A+1)$$

Dla układu II rzędu, którego wielomian charakterystyczny jest postaci

$$M(z) = z^2 + a_1 \cdot z + a_0$$

Warunki konieczne stabilności układu dyskretnego są jednocześnie warunkami wystarczającymi

$$\begin{cases} M(1) > 0 \\ (-1)^2 M(-1) > 0 \\ |a_0| < 1 \\ |a_1| < 2 \end{cases}$$

$$M(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left[z^2 + (B-2)z + (A+1)\right]_{z=1} = 1 + (B-2) + (A+1) = B + A > 0 \qquad B > -A$$

$$(-1)^2 M(-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left[z^2 + (B-2)z + (A+1)\right]_{z=-1} = 1 - (B-2) + (A+1) = -B + A + 4 > 0 \qquad B < A + 4$$

$$|a_0| = |A+1| < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A+1 < 1 \\ A+1 > -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} A < 0 \\ A > -2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A < 0 \\ A > -2 \end{matrix}$$

$$|a_1| = |B-2| < 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} B-2 < 2 \\ B-2 > -2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} B < 4 \\ B > 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B < 4 \\ B > 0 \end{matrix}$$

B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.

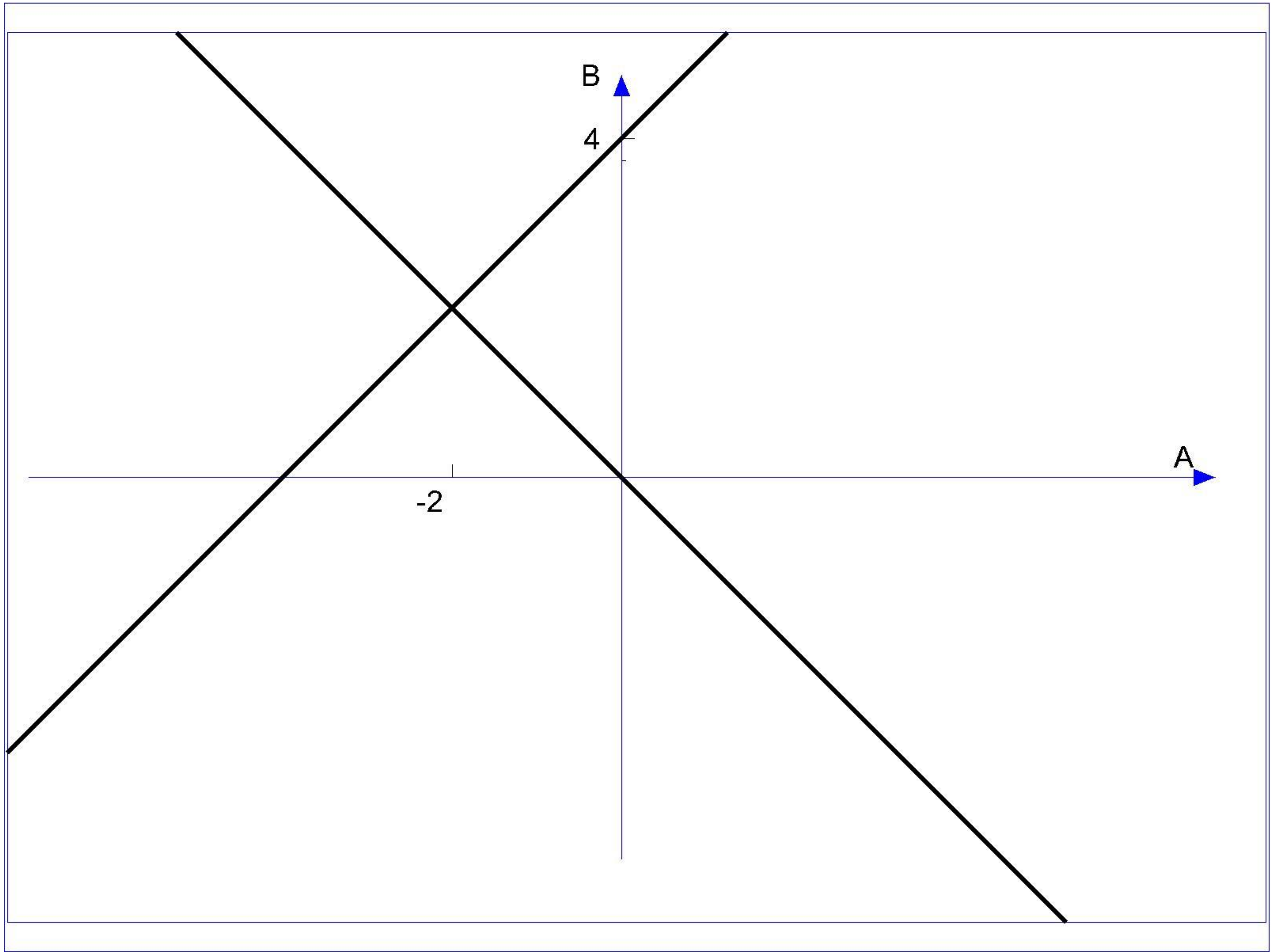
$$M(z) = z^2 + (B-2)z + (A+1)$$

$$B > -A$$

$$B < A + 4$$

$$A < 0$$

$$A > -2$$



B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.

$$M(z) = z^2 + (B-2)z + (A+1)$$

$$B > -A$$

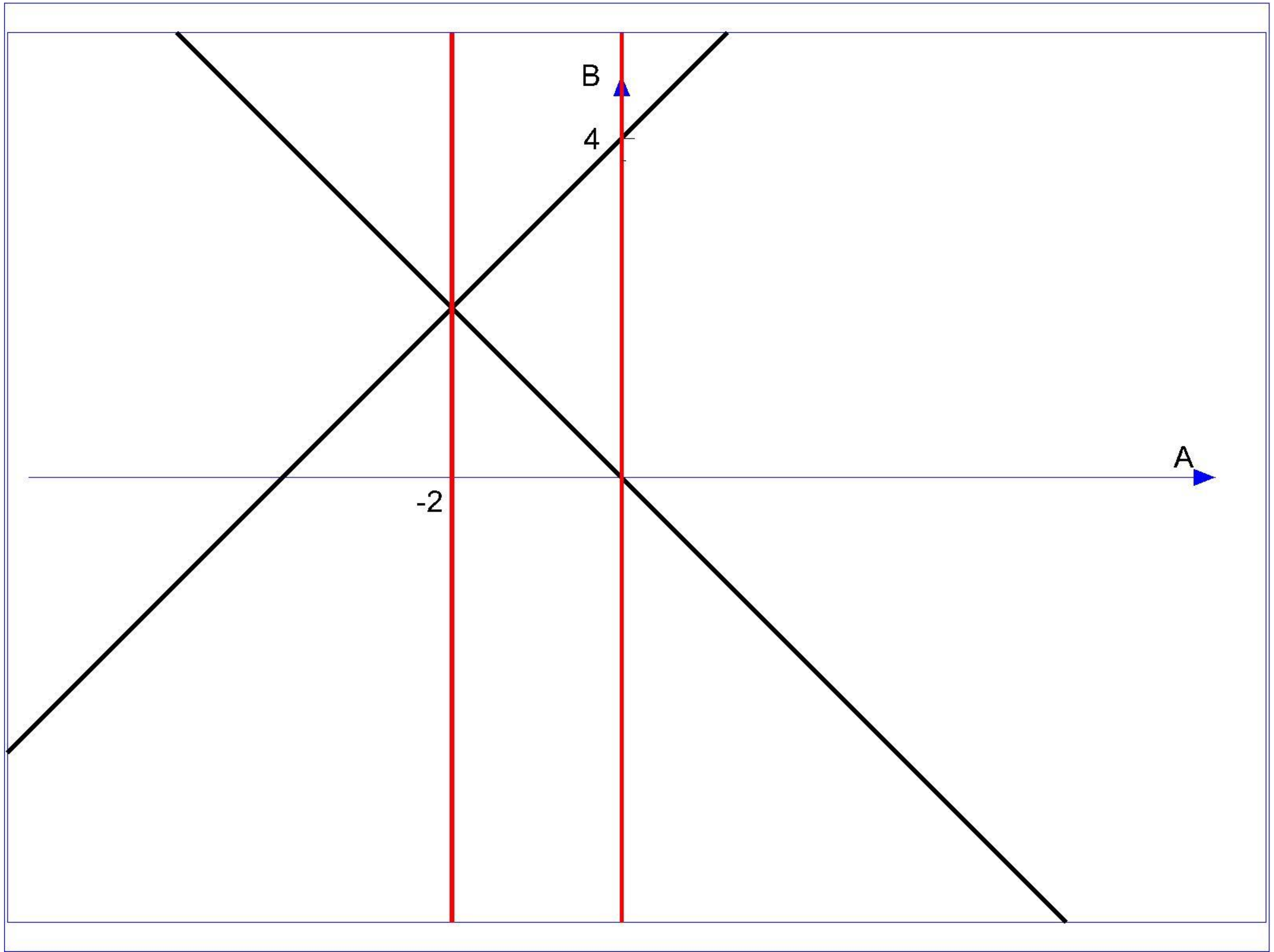
$$B < A + 4$$

$$A < 0$$

$$A > -2$$

$$B < 4$$

$$B > 0$$



B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.

$$M(z) = z^2 + (B-2)z + (A+1)$$

$$B > -A$$

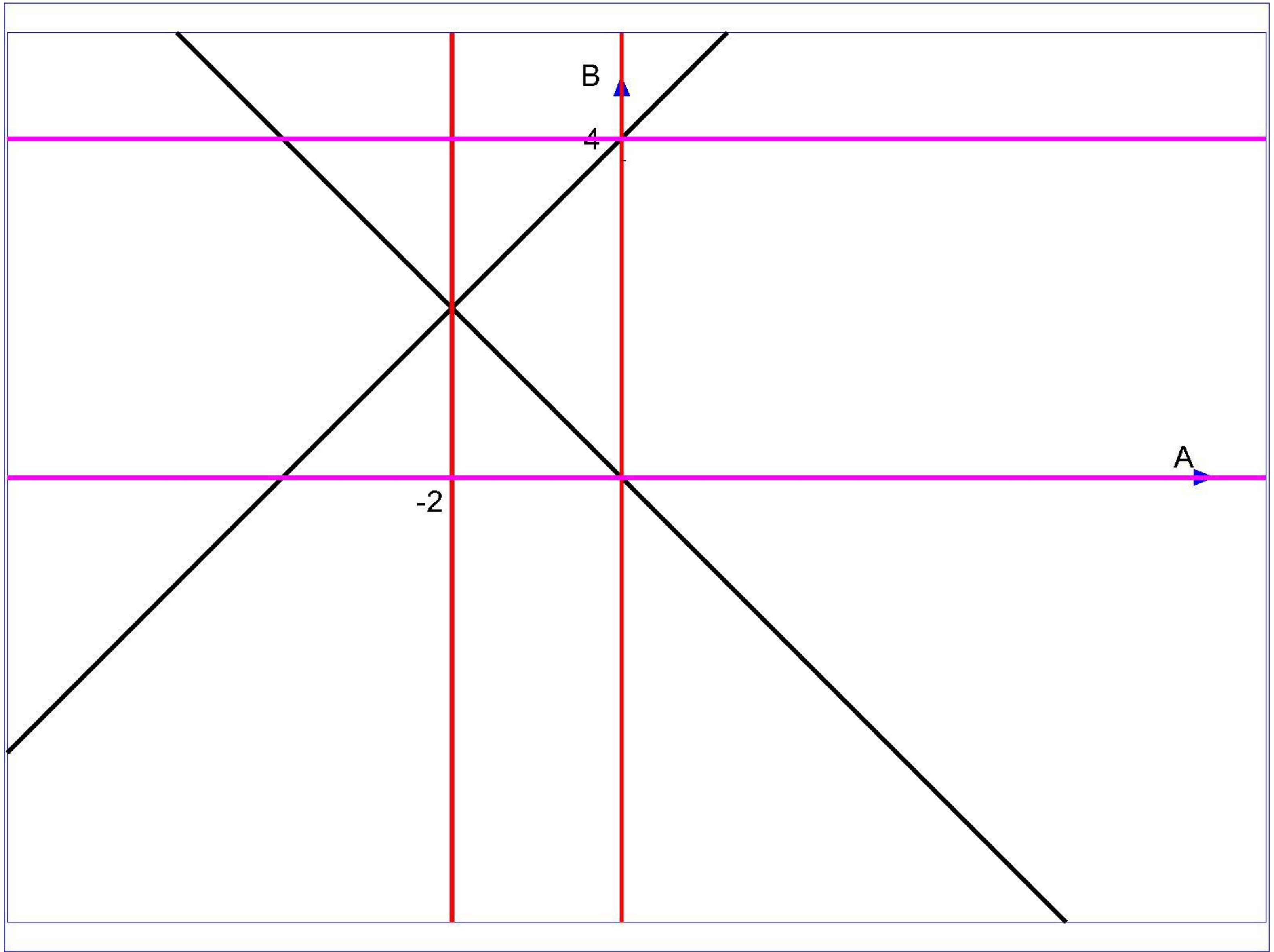
$$B < A + 4$$

$$A < 0$$

$$A > -2$$

$$B < 4$$

$$B > 0$$



B. Na płaszczyźnie (A,B) B>0 wyznacz i narysuj obszar wartości, dla których układ będzie stabilny.

$$M(z) = z^2 + (B-2)z + (A+1)$$

$$B > -A$$

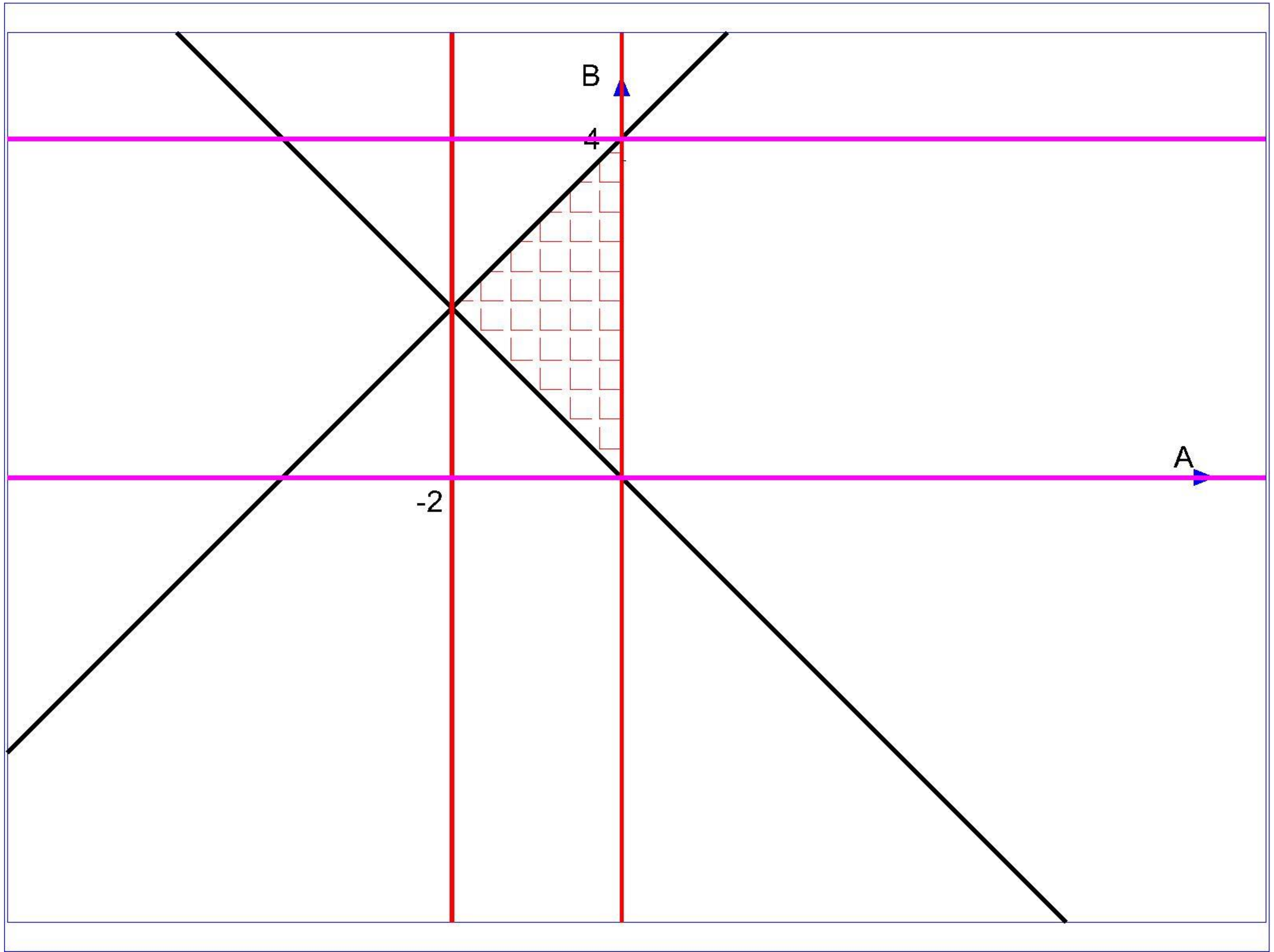
$$B < A + 4$$

$$A < 0$$

$$A > -2$$

$$B < 4$$

$$B > 0$$



C. Sprawdź rząd astatyzmu tego układu.
D. Wyznacz uchyb w stanie ustalonym dla wymuszeń w postaci liniowej oraz kwadratowej funkcji czasu.

$$G_r(z)\cdot G_2(z)=\frac{Bz+A}{z-1}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{Bz+A}{(z-1)^2}\quad\Rightarrow\quad k=2$$

$$G_e(z)=\frac{1}{1+G_r(z)G_2(z)}=\frac{1}{1+\frac{Bz+A}{(z-1)^2}}=\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+(Bz+A)}$$

$$e_{ust}=\lim_{n\to\infty}\left[e(nT)\right]=\lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}\cdot G_e(z)\cdot u(z)\right]=\lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}\cdot\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+(Bz+A)}u(z)\right]$$

$$u(t)=t^2\cdot\mathbf{1}(t)\quad\Rightarrow\quad u(z)=\frac{zT(z+1)}{(z-1)^3}\quad\Rightarrow\quad e_{ust}=\lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}\cdot\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+(Bz+A)}\cdot\frac{zT(z+1)}{(z-1)^3}\right]=$$

$$u(t)=t^1\cdot\mathbf{1}(t)\quad\Rightarrow\quad u(z)=\frac{zT}{(z-1)^2}\quad\Rightarrow\quad e_{ust}=\lim_{z\to1}\left[\frac{z-1}{z}\cdot\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+(Bz+A)}\cdot\frac{zT}{(z-1)^2}\right]=$$

E. Dla jakich wartości A, B wystąpią w układzie dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania?
F. Naszkicuj odpowiedź jednostkową układu w tym przypadku.

$$G(z)=\frac{z(Bz+A)}{z^2+(B-2)z+(A+1)} \underset{\substack{A=-1\\B=2}}{=} \frac{z(2z-1)}{z^2}$$

$$G(z)=2-z^{-1}$$

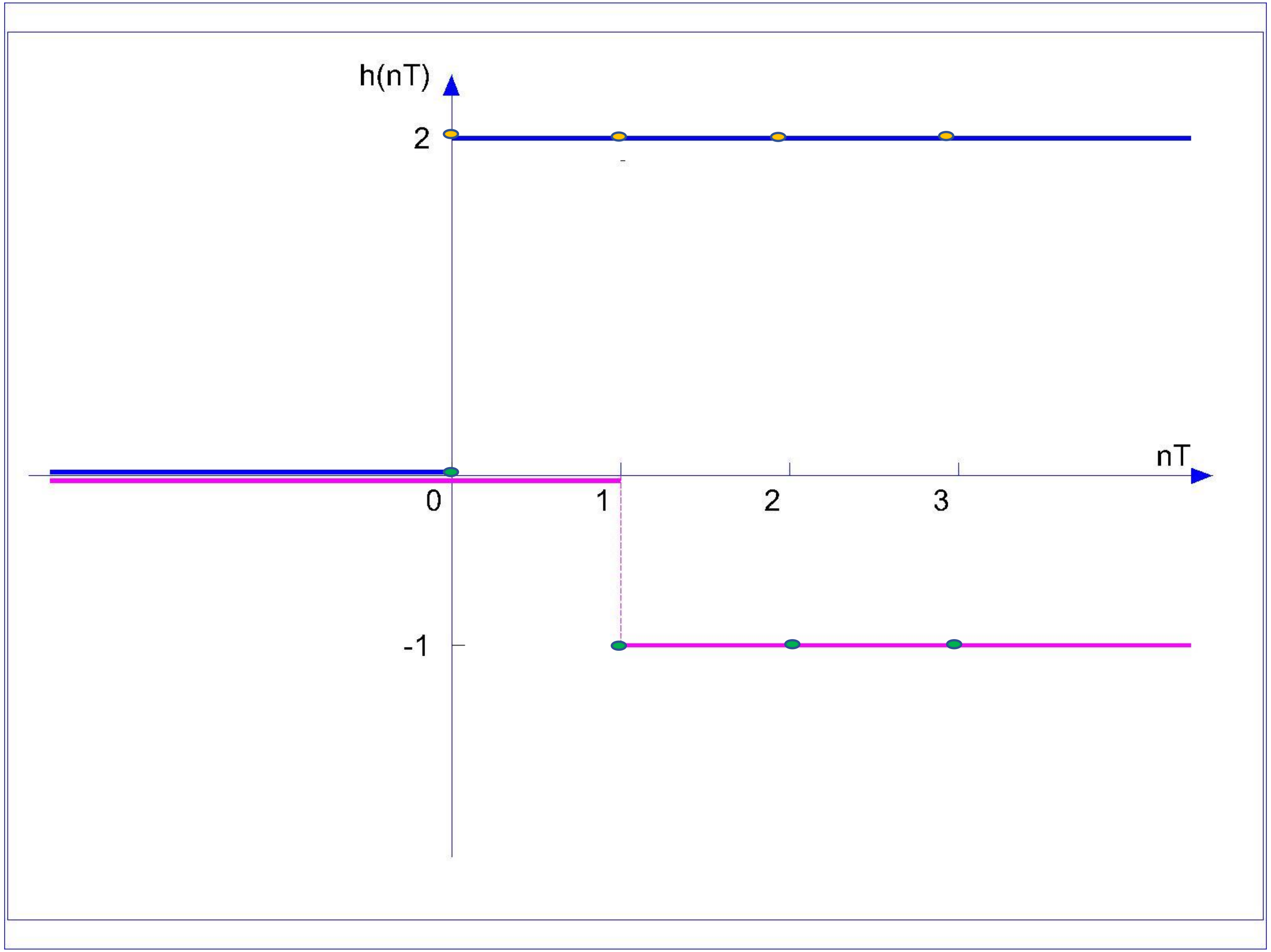
$$h(nT)=\mathcal{Z}^{-1}\left\{G(z)\frac{z}{z-1}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(2-z^{-1}\right)\frac{z}{z-1}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{2\frac{z}{z-1}\right\}-\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\frac{z}{z-1}\right\}=$$

$$=2\cdot\mathbf{1}(nT)-\mathbf{1}(nT-T)=2\cdot\mathbf{1}(nT)-\mathbf{1}\left[(n-1)T\right]$$

E. Dla jakich wartości A, B wystąpią w układzie dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania?
F. Naszkicuj odpowiedź jednostkową układu w tym przypadku.

$$G(z) = 2 - z^{-1}$$

$$h(nT) = 2 \cdot \mathbf{1}(nT) - \mathbf{1}\left[(n-1)T\right]$$



E. Dla jakich wartości A, B wystąpią w układzie dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania?

F. Naszkicuj odpowiedź jednostkową układu w tym przypadku.

$$G(z) = 2 - z^{-1}$$

$$h(nT) = 2 \cdot \mathbf{1}(nT) - \mathbf{1}\left[(n-1)T\right]$$