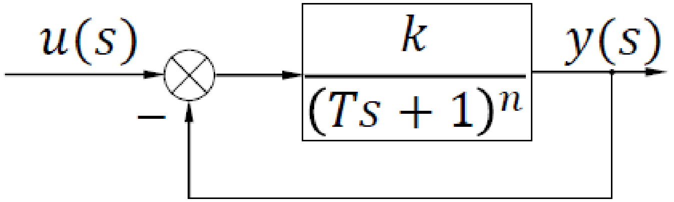
Zadanie 1

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać

$$G_0(s) = \frac{k}{(1+sT)^n}$$

Przedyskutować problem stabilności układu po zamknięciu go ujemnym jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Przeanalizować pracę układu na granicy stabilności (przyjąć n=3).

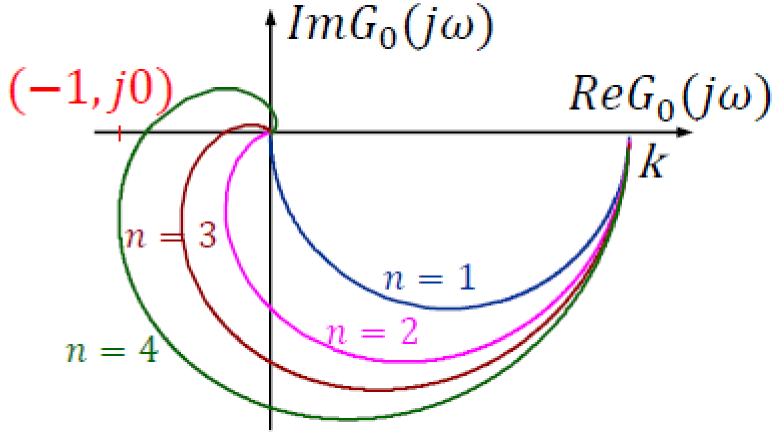


Przy badaniu stabilności tego układu, kryteria algebraiczne zawodzą, postać wielomianu charakterystycznego zmienia się wraz ze zmianą rzędu układu inercyjnego.

Jedynym podejściem, które można tu zastosować to kryterium Nyquista.

Układ otwarty ma n pierwiastków s=-1/T i jest układem stabilnym.

Charakterystyki amplitudowo – fazowe elementu inercyjnego n – tego rzędu:



Aby układ zamknięty był stabilny charakterystyka amplitudowo – fazowa układu otwartego nie powinna obejmować punktu krytycznego $(-1, j0)$

oznacza to, że dla argumentu transmitancji widmowej $-\pi$, moduł transmitancji widmowej musi być mniejszy od 1.

Daje to układ złożony z równania i nierówności:

$$\begin{cases} \varphi(\omega) = arg\{G_0(j\omega)\} = -\pi \\ A(\omega) = |G_0(j\omega)| < 1 \end{cases}$$

Transmitancja widmowa układu otwartego (element inercyjny n – tego rzędu) jest postaci:

$$G_0(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega T)^n} = \frac{k}{\left(\sqrt{1+\omega^2 T^2}\right)^n} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \mathrm{arctg}(\omega T)}$$

stąd

$$-n \cdot \mathrm{arctg}(\omega_{-\pi} \cdot T) = -\pi$$

$$\mathrm{arctg}(\omega_{-\pi} \cdot T) = \frac{\pi}{n} \quad \Rightarrow \quad \omega_{-\pi} \cdot T = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Pulsacja drgań na granicy stabilności jest równa $$\omega_{-\pi} = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Okres oscylacji $$T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{-\pi}} = \frac{2\pi \cdot T}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Z równości $A(\omega_{-\pi}) = 1$ wyznacza się wartość krytycznego współczynnika wzmocnienia:

$$\frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{1+\omega_{-\pi}^2 T^2}\right)^n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{1+\omega_{-\pi}^2 T^2}\right)^n} = \frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{T^2}\cdot \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot T^2}\right)^n} = \frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)^n}$$

$$= \frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{1+\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)^n} = \frac{k_{kr}}{\left(\sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}}\right)^n} = k_{kr}\cdot\left|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right|^n = 1$$

Ostatecznie więc $k_{kr} = \dfrac{1}{\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\right|^{n}}$ a układ zamknięty jest stabilny dla każdego $k < k_{kr}$

Krytyczna wartość współczynnik wzmocnienia i okres oscylacji układu zamkniętego

Rząd układu inercyjnego n	2	3	4	6	$\to \infty$
Krytyczna wartość współczynnik wzmocnienia	$\to \infty$	8	4	$\dfrac{64}{27}$	1
Okres oscylacji T_{osc} w układzie na granicy stabilności	0	$\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}T$	$2\pi T$	$2\pi\sqrt{3}T$	$\to \infty$

Dla $n=3$ oraz $G_0(s)=\dfrac{k_{kr}}{(1+sT)^3}=\dfrac{8}{T^3s^3+3Ts^2+3T^2s+1}$

$$G(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}=\frac{8}{\left(T^3s^3+3Ts^2+3T^2s+1\right)+8}=\frac{8}{T^3s^3+3Ts^2+3T^2s+9}$$

$$\Rightarrow \quad M(s)=T^3s^3+3T^2s^2+3Ts+9=T^2s^2(Ts+3)+3(Ts+3)$$

$$=(Ts+3)\left(T^2s^2+3\right)=T^3\left(s+\frac{3}{T}\right)\left(s^2+\frac{3}{T^2}\right)$$

$$G(s)=\frac{8}{T^3\left(s+\frac{3}{T}\right)\left(s^2+\frac{3}{T^2}\right)}=\frac{8}{T^3}\left(\frac{A}{s+\frac{3}{T}}+\frac{Bs+C}{s^2+\frac{3}{T^2}}\right)=\frac{8}{T^3}\cdot\frac{A\left(s^2+\frac{3}{T^2}\right)+(Bs+C)\left(s+\frac{3}{T}\right)}{\left(s+\frac{3}{T}\right)\left(s^2+\frac{3}{T^2}\right)}$$

$$1 = A\left(s^2 + \frac{3}{T^2}\right) + (Bs + C)\left(s + \frac{3}{T}\right) \quad = (A+B)s^2 + \left(\frac{3B}{T} + C\right)s + \left(\frac{3A}{T^2} + \frac{3C}{T}\right)$$

$$s = -\frac{3}{T} \quad \Rightarrow \quad 1 = A\left(s^2 + \frac{3}{T^2}\right)_{s=-\frac{3}{T}} \quad = A\left(\frac{9}{T^2} + \frac{3}{T^2}\right) \quad = \frac{12A}{T^2} \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{T^2}{12}$$

$$A + B = 0 \qquad \Rightarrow \quad B = -A = \frac{-T^2}{12}$$

$$\frac{3A}{T^2} + \frac{3C}{T} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{3C}{T} = 1 - \frac{3A}{T^2} \;\Rightarrow\; C = \frac{T}{3}\left(1 - \frac{3A}{T^2}\right) = \frac{T}{3}\left(1 - \frac{3}{T^2}\cdot\frac{T^2}{12}\right) \;\Rightarrow\; C = \frac{T}{4}$$

$$G(s) = \frac{8}{T^3}\left(\frac{A}{s + \frac{3}{T}} + \frac{Bs + C}{s^2 + \frac{3}{T^2}}\right) = \frac{8}{T^3}\cdot\frac{T^2}{12}\left(\frac{1}{s + \frac{3}{T}} + \frac{-s + \frac{T}{4}\cdot\frac{12}{T^2}}{s^2 + \frac{3}{T^2}}\right) = \frac{2}{3T}\left(\frac{1}{s + \frac{3}{T}} + \frac{-s + \frac{3}{T}}{s^2 + \frac{3}{T^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{2}{3T} \cdot \frac{1}{s + \frac{3}{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \left[-\frac{3}{T} \right] \quad \mathbf{B}_1 = [1] \quad \mathbf{C}_1 = \left[\frac{2}{3T} \right]$$

$$G_2(s) = \frac{2}{3T} \cdot \frac{-s + \frac{3}{T}}{s^2 + \frac{3}{T^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{T^2} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{T^2} & -\frac{2}{3T} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -\frac{3}{T} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{T^2} & 0 \end{array} \right] \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{2}{3T} & \frac{2}{T^2} & -\frac{2}{3T} \end{array} \right]$$

Resolwenta

$$\left(s\mathbf{1}_n-\mathbf{A}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} s+\frac{3}{T} & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{3}{T^2} & s \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{3}{T} \end{bmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{3}{T^2} & s \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\frac{3}{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{3}{T^2} & s \end{bmatrix}}{s^2+\frac{3}{T^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\frac{3}{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{s^2+\frac{3}{T^2}} & \dfrac{1}{s^2+\frac{3}{T^2}} \\ 0 & \dfrac{-\frac{3}{T^2}}{s^2+\frac{3}{T^2}} & \dfrac{s}{s^2+\frac{3}{T^2}} \end{bmatrix}$$

Macierz tranzycyjna

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{-\frac{3}{T}t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) & \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{T}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

Przebieg zmiennych stanu przy pobudzeniu impulsowym

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{-\frac{3}{T}t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) & \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{T}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{-\frac{3}{T}t} \\ \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

W stanie ustalonym, czyli dla bardzo dużego czasu :

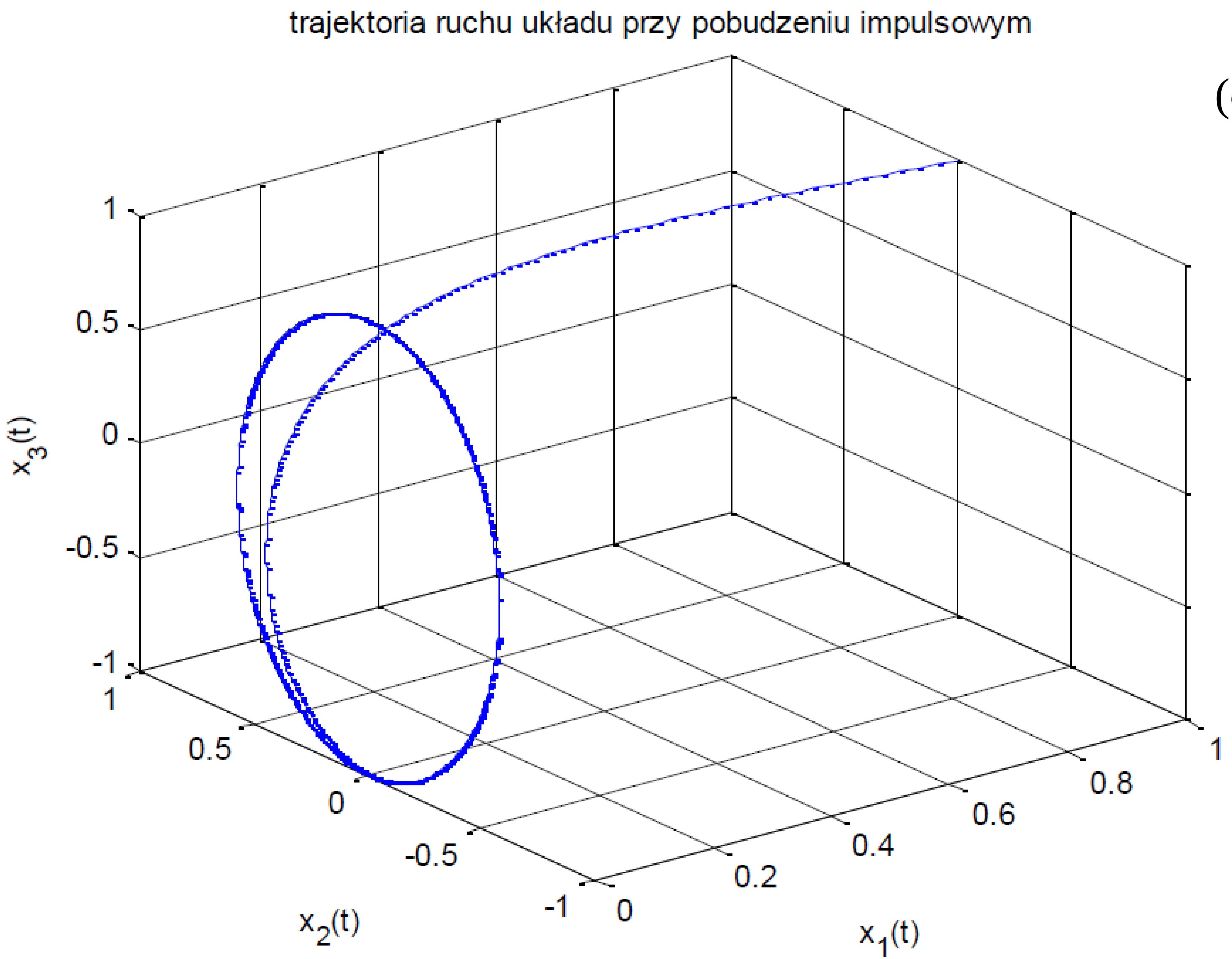
$$\mathbf{x}(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

czyli:

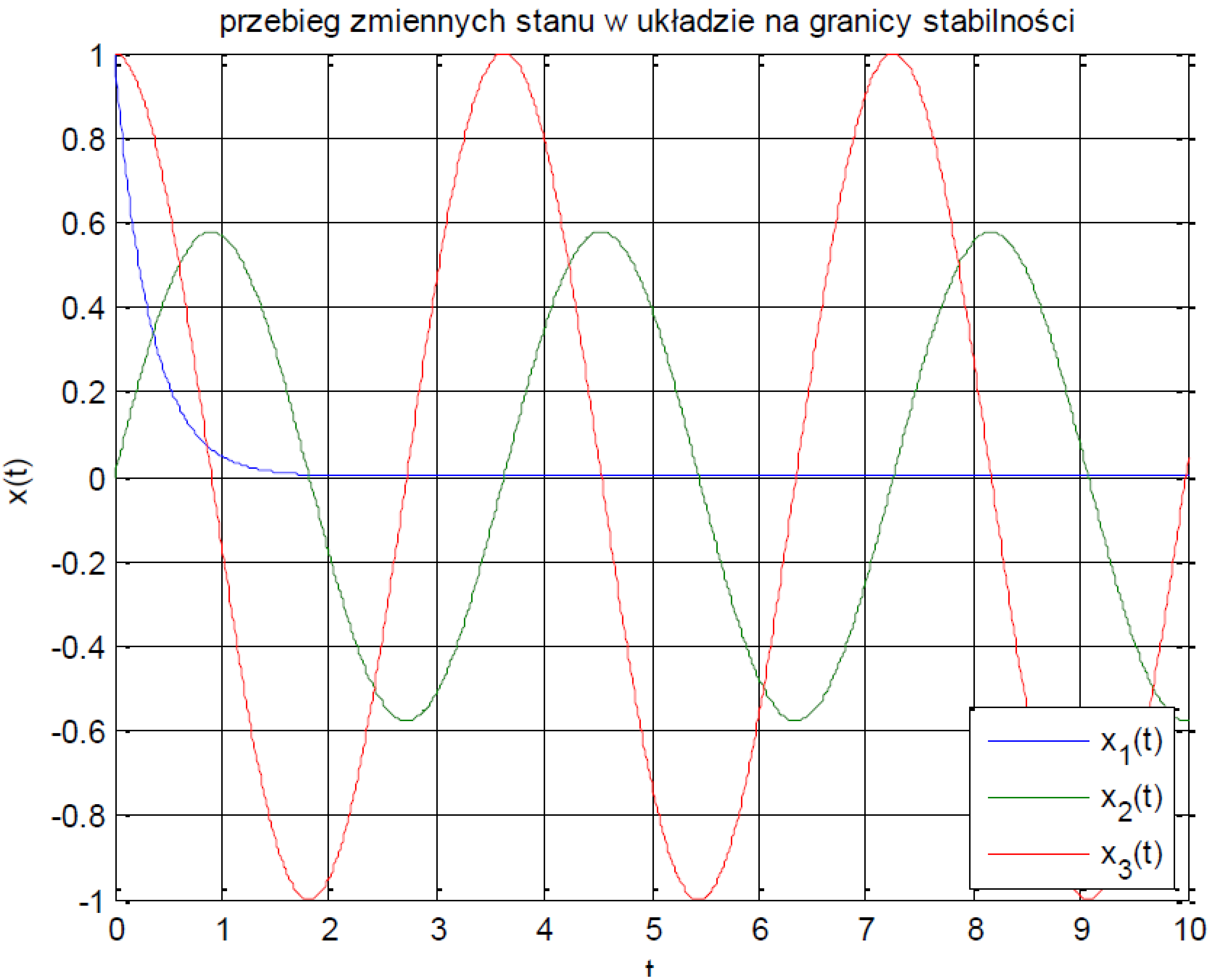
$$\begin{cases} x_2(t) = \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \\ x_3(t) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) = \frac{\sqrt{3}}{T}\cdot x_2(t) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) = x_3(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) = \frac{3}{T^2}\cdot x_2^2(t) \\ \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right) = x_3^2(t) \end{cases} + \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{T^2}\cdot x_2^2(t) + x_3^2(t) = 1$$

R-nie elipsy


trajektoria ruchu układu przy pobudzeniu impulsowym
1
0.5
0
-0.5
-1
x3(t)
1
0.5
0
-0.5
-1
x2(t)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x1(t)

(dla T=1)


przebieg zmiennych stanu w układzie na granicy stabilności
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
x(t)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t
$x_1(t)$
$x_2(t)$
$x_3(t)$

Można obliczyć amplitudę oscylacji w stanie ustalonym.

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\cdot\mathbf{x}(t)\to\begin{bmatrix}\frac{2}{3T} & \frac{2}{T^2} & -\frac{2}{3T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)\\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)\end{bmatrix}=\frac{2}{T^2}\cdot\frac{T}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)-\frac{2}{3T}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}T}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)-\frac{2}{3T}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)\quad=\frac{2}{3T}\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)\right]$$

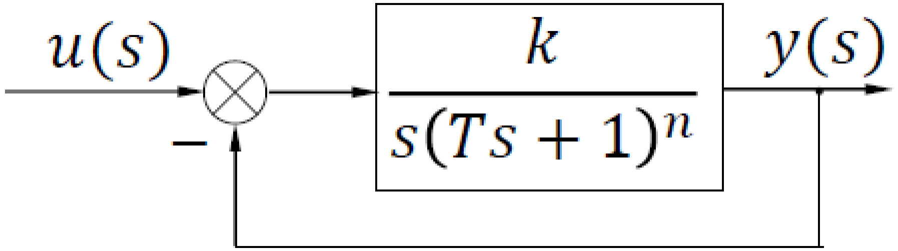
$$=\frac{4}{3T}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t\right)\right]\quad=\frac{4}{3T}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{T}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

Zadanie 2

Transmitancja operatorowa układu otwartego ma postać $G_0(s) = \dfrac{k}{s(1+sT)^n}$

Przedyskutować problem stabilności układu po zamknięciu go ujemnym jednostkowym sprzężeniem zwrotnym.

Przeanalizować pracę układu na granicy stabilności (przyjąć n=2).



Pomimo, że układ otwarty jest niestabilny (biegun zerowy) układ zamknięty będzie stabilny, jeżeli charakterystyka amplitudowo – fazowa układu otwartego nie obejmie punktu krytycznego $(-1, j0)$, oznacza to, że dla argumentu transmitancji widmowej $-\pi$, moduł transmitancji widmowej musi być mniejszy od 1.

Transmitancja widmowa układu otwartego (element całkujący z inercją n – tego rzędu) jest postaci:

$$G_0(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)^n} = \frac{k}{\omega\left(\sqrt{1+\omega^2T^2}\right)^n} \cdot e^{-j\cdot\left[\frac{\pi}{2}+n\cdot \mathrm{arctg}(\omega T)\right]}$$

stąd

$$-\frac{\pi}{2} - n\cdot \mathrm{arctg}\left(\omega_{-\pi}\cdot T\right) = -\pi$$

$$\mathrm{arctg}\left(\omega_{-\pi}\cdot T\right) = \frac{\pi}{2n} \quad \Rightarrow \quad \omega_{-\pi}\cdot T = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Pulsacja drgań na granicy stabilności jest równa $\omega_{-\pi} = \frac{1}{T}\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

Okres oscylacji $T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{-\pi}} = \frac{2\pi\cdot T}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Z równości $A\left(\omega_{-\pi}\right)=1$ wyznacza się wartość krytycznego współczynnika wzmocnienia:

$$\frac{k_{kr}}{\omega_{-\pi}\left(\sqrt{1+\omega_{-\pi}^{2}T^{2}}\right)^{n}}=1 \;\Rightarrow\; \frac{k_{kr}}{\omega_{-\pi}\left(\sqrt{1+\omega_{-\pi}^{2}T^{2}}\right)^{n}}=\frac{k_{kr}}{\frac{1}{T}\cdot tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{T^{2}}\cdot tg^{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot T^{2}}\right)^{n}}$$

$$=\frac{k_{kr}\cdot T}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\sqrt{1+tg^{2}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)^{n}}=k_{kr}\cdot T\cdot\frac{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|^{n}}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=1$$

Ostatecznie więc $k_{kr}=\dfrac{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{T\cdot\left|\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right|^{n}}$ a układ zamknięty jest stabilny dla każdego $k<k_{kr}$

Krytyczny współczynnik wzmocnienia i okres oscylacji układu zamkniętego

Rząd n układu inercyjnego	1	2	3
Krytyczna wartość współczynnika wzmocnienia	$\to\infty$	$\frac{2}{T}$	$\frac{8}{9T}$
Okres oscylacji T_{osc} układu na granicy stabilności	0	$2\pi T$	$2\pi\sqrt{3}T$

Dla $n=2$ oraz $G_0(s)=\dfrac{k_{kr}}{s(1+sT)^2}=\dfrac{\frac{2}{T}}{T^2s^3+2Ts^2+s}=\dfrac{2}{T^3s^3+2T^2s^2+Ts}$

$$G(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}=\frac{2}{T^3s^3+2T^2s^2+Ts+2}$$

$$\Rightarrow \quad M(s) = T^3s^3 + 2T^2s^2 + Ts + 2 \quad = T^2s^2(Ts+2) + (Ts+3)$$

$$= (Ts+2)(T^2s^2+1) \quad = T^3\left(s + \frac{2}{T}\right)\left(s^2 + \frac{1}{T^2}\right)$$

$$G(s) = \frac{2}{T^3\left(s+\frac{2}{T}\right)\left(s^2+\frac{1}{T^2}\right)} = \frac{2}{T^3}\left(\frac{A}{s+\frac{2}{T}} + \frac{Bs+C}{s^2+\frac{1}{T^2}}\right) = \frac{2}{T^3}\cdot\frac{A\left(s^2+\frac{1}{T^2}\right)+(Bs+C)\left(s+\frac{2}{T}\right)}{\left(s+\frac{2}{T}\right)\left(s^2+\frac{1}{T^2}\right)}$$

$$1 = A\left(s^2+\frac{1}{T^2}\right)+(Bs+C)\left(s+\frac{2}{T}\right) \quad = (A+B)s^2 + \left(\frac{2B}{T}+C\right)s + \left(\frac{A}{T^2}+\frac{2C}{T}\right)$$

$$s = -\frac{2}{T} \quad \Rightarrow \quad 1 = A\left(s^2+\frac{1}{T^2}\right)_{s=-\frac{2}{T}} \quad = A\left(\frac{4}{T^2}+\frac{1}{T^2}\right) \quad = \frac{5A}{T^2} \qquad \Rightarrow \quad A = \frac{T^2}{5}$$

$$A + B = 0 \qquad \Rightarrow \quad B = -A = \frac{-T^2}{5}$$

$$\frac{A}{T^2} + \frac{2C}{T} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2C}{T} = 1 - \frac{A}{T^2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{A}{T^2}\right) = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{1}{T^2}\cdot\frac{T^2}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2T}{5}$$

$$G(s) = \frac{2}{T^3}\left(\frac{A}{s + \frac{2}{T}} + \frac{Bs + C}{s^2 + \frac{1}{T^2}}\right) = \frac{2}{T^3}\cdot\frac{T^2}{5}\left(\frac{1}{s + \frac{2}{T}} + \frac{-s + \frac{2T}{5}\cdot\frac{5}{T^2}}{s^2 + \frac{1}{T^2}}\right) = \frac{2}{5T}\left(\frac{1}{s + \frac{2}{T}} + \frac{-s + \frac{2}{T}}{s^2 + \frac{1}{T^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

$$G_1(s) = \frac{2}{5T}\cdot\frac{1}{s+\frac{2}{T}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_1 = \left[-\frac{2}{T}\right] \quad \mathbf{B}_1 = [1] \quad \mathbf{C}_1 = \left[\frac{2}{5T}\right]$$

$$G_2(s) = \frac{2}{5T}\cdot\frac{-s+\frac{2}{T}}{s^2+\frac{1}{T^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5T^2} & -\frac{2}{5T} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T^2} & 0 \end{array}\right] \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{2}{5T} & \frac{4}{5T^2} & -\frac{2}{5T} \end{array}\right]$$

Resolwenta

$$\left(s\mathbf{1}_n - \mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+\frac{2}{T} & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{1}{T^2} & s \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s+\frac{2}{T} \end{bmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{1}{T^2} & s \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\frac{2}{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dfrac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ -\frac{1}{T^2} & s \end{bmatrix}}{s^2+\frac{1}{T^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\frac{2}{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{s^2+\frac{1}{T^2}} & \dfrac{1}{s^2+\frac{1}{T^2}} \\ 0 & \dfrac{-\frac{1}{T^2}}{s^2+\frac{1}{T^2}} & \dfrac{s}{s^2+\frac{1}{T^2}} \end{bmatrix}$$

Macierz tranzycyjna

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} e^{-\frac{2}{T}t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{1}{T}t\right) & T\sin\left(\frac{1}{T}t\right) \\ 0 & -\frac{1}{T}\sin\left(\frac{1}{T}t\right) & \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

Przebieg zmiennych stanu przy pobudzeniu impulsowym

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{-\frac{2}{T}t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{1}{T}t\right) & T\sin\left(\frac{1}{T}t\right) \\ 0 & -\frac{1}{T}\sin\left(\frac{1}{T}t\right) & \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{2}{T}t} \\ T\sin\left(\frac{1}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

W stanie ustalonym, czyli dla bardzo dużego czasu :

$$\mathbf{x}(t) \to \begin{bmatrix} 0 \\ T\sin\left(\frac{1}{T}t\right) \\ \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \end{bmatrix}$$

czyli:

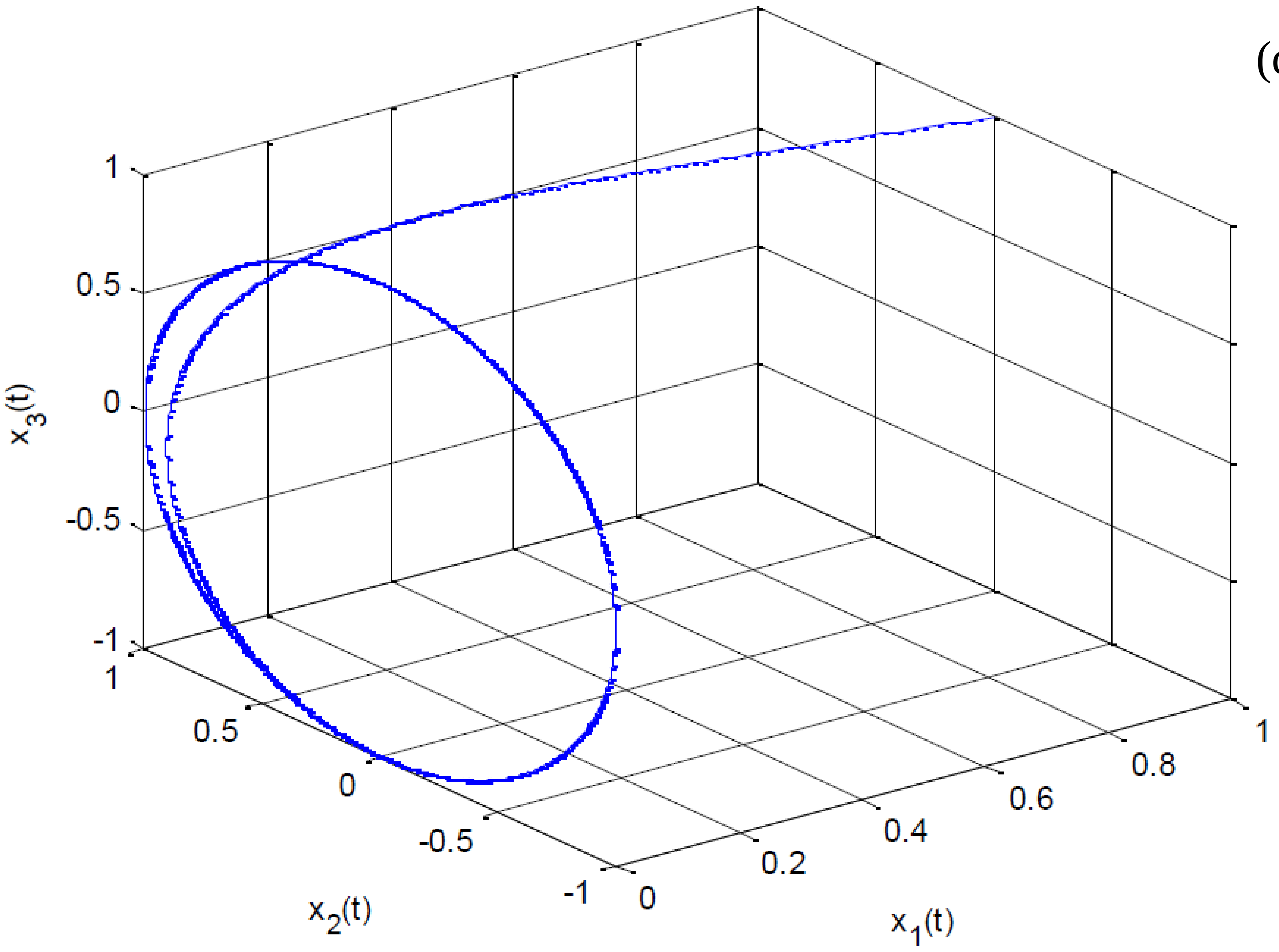
$$\begin{cases} x_2(t) = T\sin\left(\frac{1}{T}t\right) \\ x_3(t) = \cos\left(\frac{1}{T}t\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{T}t\right) = \frac{1}{T}\cdot x_2(t) \\ \cos\left(\frac{1}{T}t\right) = x_3(t) \end{cases}$$

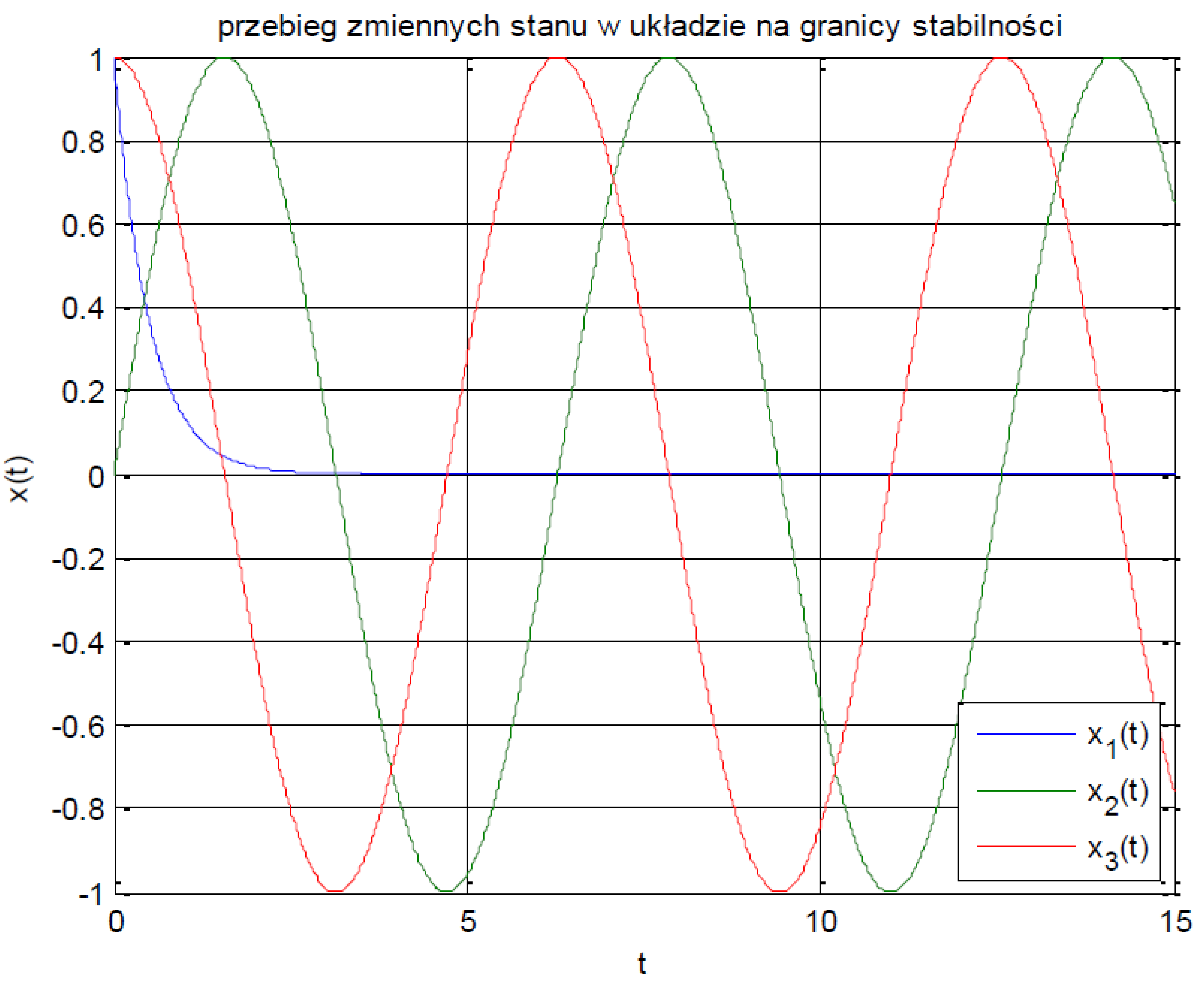
$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2\left(\frac{1}{T}t\right) = \frac{1}{T^2}\cdot x_2^2(t) \\ \cos^2\left(\frac{1}{T}t\right) = x_3^2(t) \end{cases} + \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T^2}\cdot x_2^2(t) + x_3^2(t) = 1$$

R-nie elipsy

trajektoria ruchu układu przy pobudzeniu impulsowym

(dla T=1)




przebieg zmiennych stanu w układzie na granicy stabilności
x(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
5
10
15
$x_1(t)$
$x_2(t)$
$x_3(t)$