Kryterium Nyquista

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s (czyli wszystkie pierwiastki stabilne), przy równaniu charakterystycznym układu otwartego mającym k pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie (czyli k pierwiastków niestabilnych), wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\underset{-\infty<\omega\leq\infty}{\Delta \arg}\left[1+G_0\left(j\omega\right)\right]=k\cdot 2\pi$$

lub:

$$\underset{0\leq\omega\leq\infty}{\Delta \arg}\left[1+G_0\left(j\omega\right)\right]=k\cdot \pi$$

Oznacza to, że dla układu otwartego mającego k biegunów niestabilnych, układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $G_0\left(j\omega\right)$ przy zmianie pulsacji ω od minus do plus nieskończoności obejmuje punkt (-1, j0) k razy.
Jeśli k=0 (układ otwarty stabilny) to układ zamknięty jest stabilny jeśli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od minus do plus nieskończoności nie obejmuje punktu (-1, j0).

Jeśli wielomian układu otwartego ma pierwiastki s=0, to dla ω=0 w charakterystyce $G_0\left(j\omega\right)$ pojawia się nieciągłość. Można wtedy każdy z pierwiastków s=0 potraktować jako należący do lewej (lub prawej) półpłaszczyzny, a nieciągłości uzupełnić półokręgami o nieskończonym promieniu obchodząc charakterystykę $G_0\left(j\omega\right)$ z prawej (lub lewej) strony. W takim przypadku bada się obchodzenie punktu (-1, j0) przez charakterystykę uzupełnioną półokręgami.

Zadanie 1

Zbadać stabilność układu zamkniętego jeśli $G_0(s)=\dfrac{1}{s^3+3s^2+s+1}$

Stabilność układu otwartego badamy np. za pomocą kryterium Routha:

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ b_0 & \\ c_0 & \end{array}$$

$$b_0=\frac{-1}{3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{-1}{3}\cdot(1-3)=\frac{2}{3}>0$$

$$c_0=1>0$$

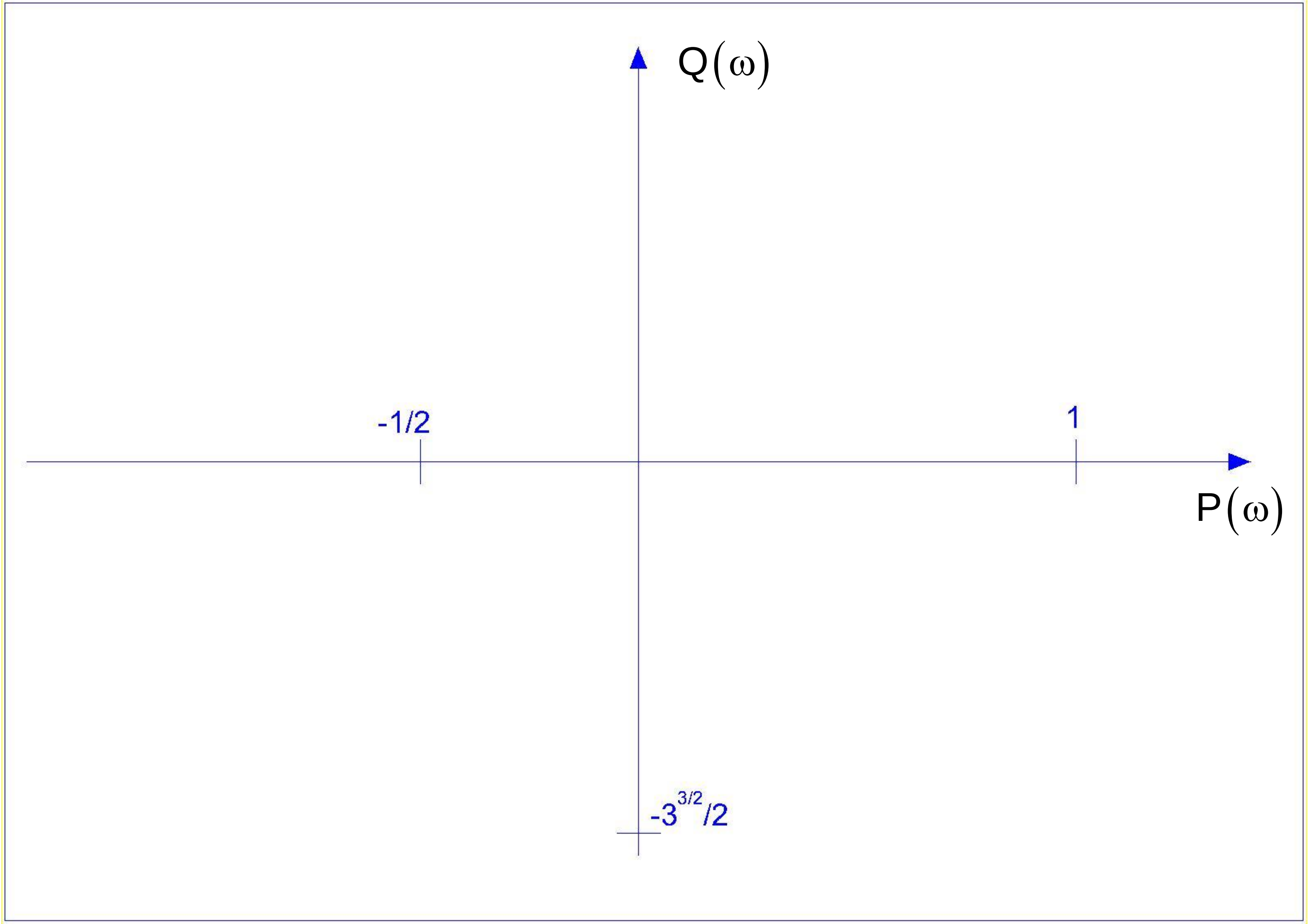
czyli układ otwarty jest stabilny, tzn. ma k=0 pierwiastków niestabilnych.

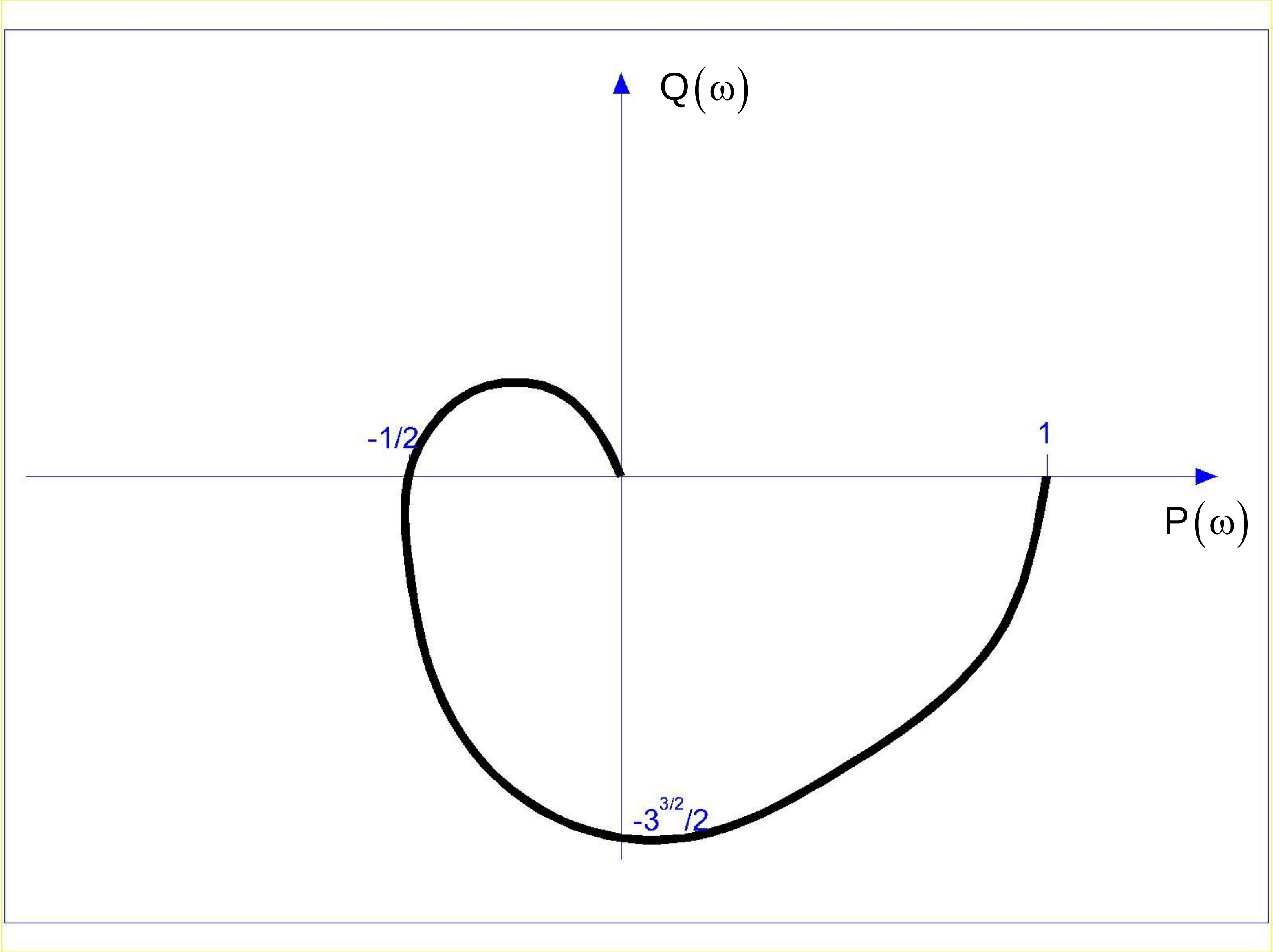
$$G_0(j\omega)=\frac{1}{-j\omega^3-3\omega^2+j\omega+1}=\frac{1}{\left(1-3\omega^2\right)+j\omega\left(1-\omega^2\right)}=\frac{\left(1-3\omega^2\right)-j\omega\left(1-\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2+\omega^2\left(1-\omega^2\right)^2}$$

$$P(\omega)=\frac{\left(1-3\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2+\omega^2\left(1-\omega^2\right)^2}$$

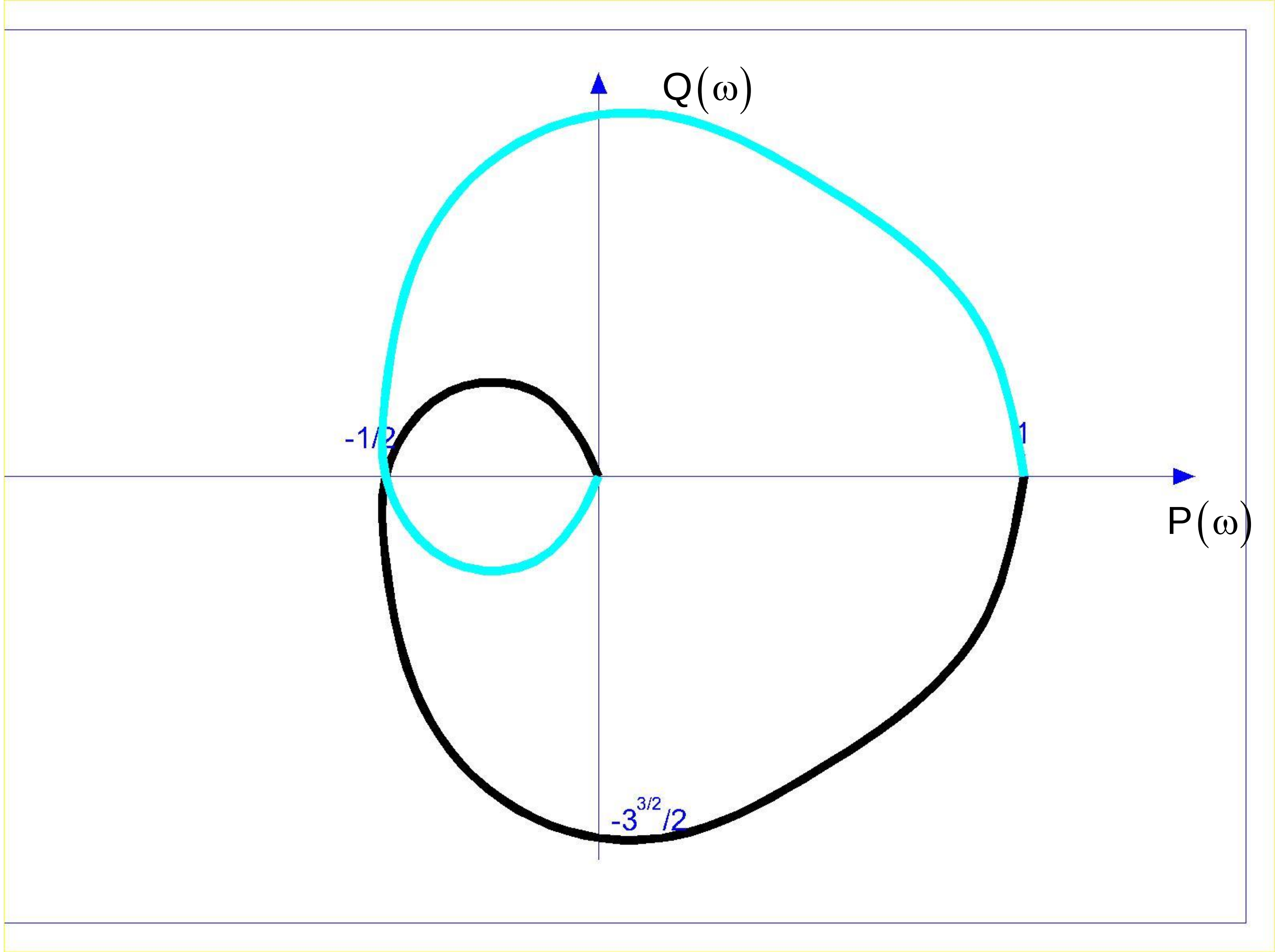
$$Q(\omega)=\frac{-\omega\left(1-\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2+\omega^2\left(1-\omega^2\right)^2}$$

$\omega=$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	∞
$P(\omega)=$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0
$Q(\omega)=$	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	0	0

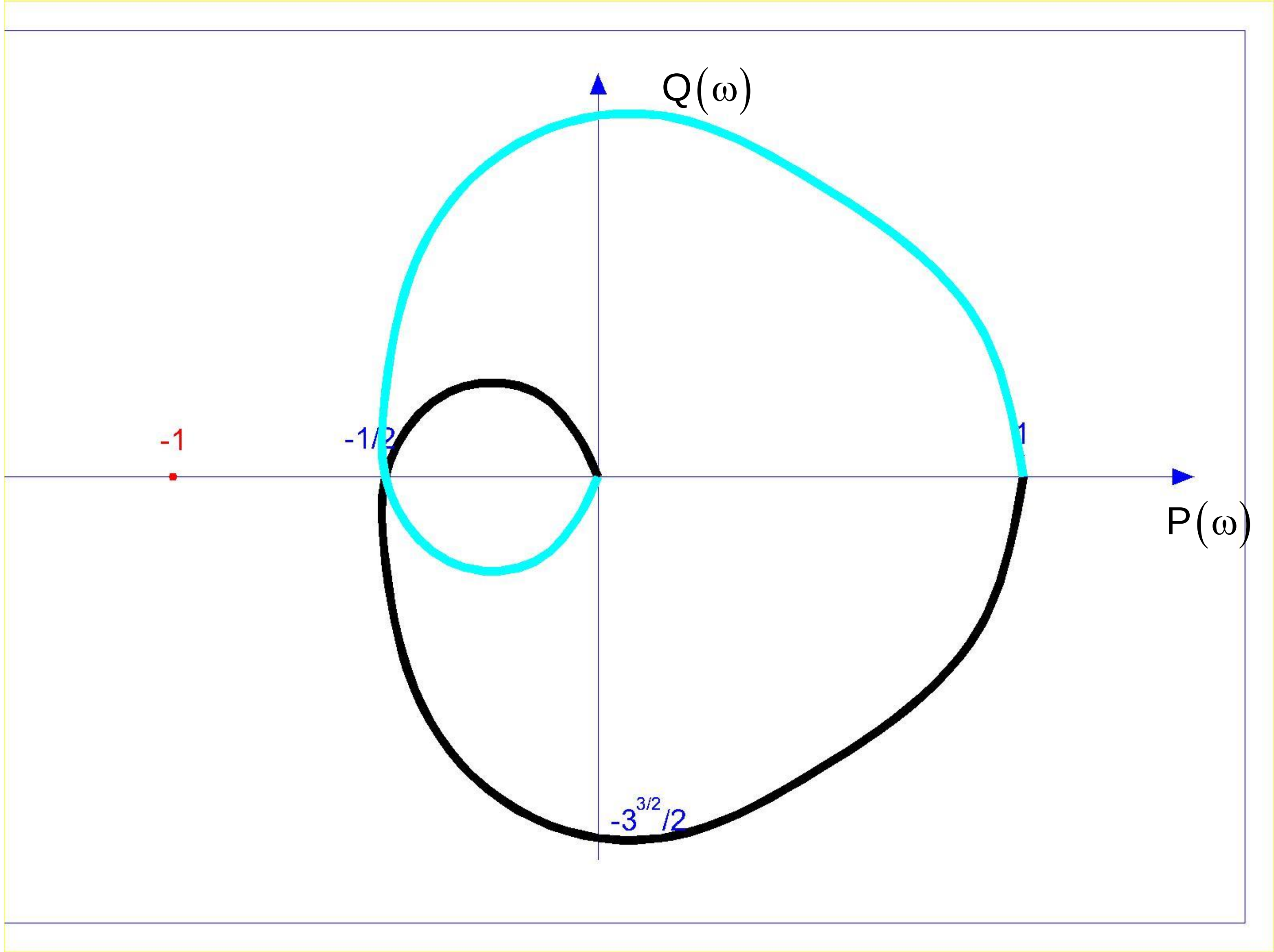

$Q(\omega)$
-1/2
1
$P(\omega)$
$-3^{3/2}/2$



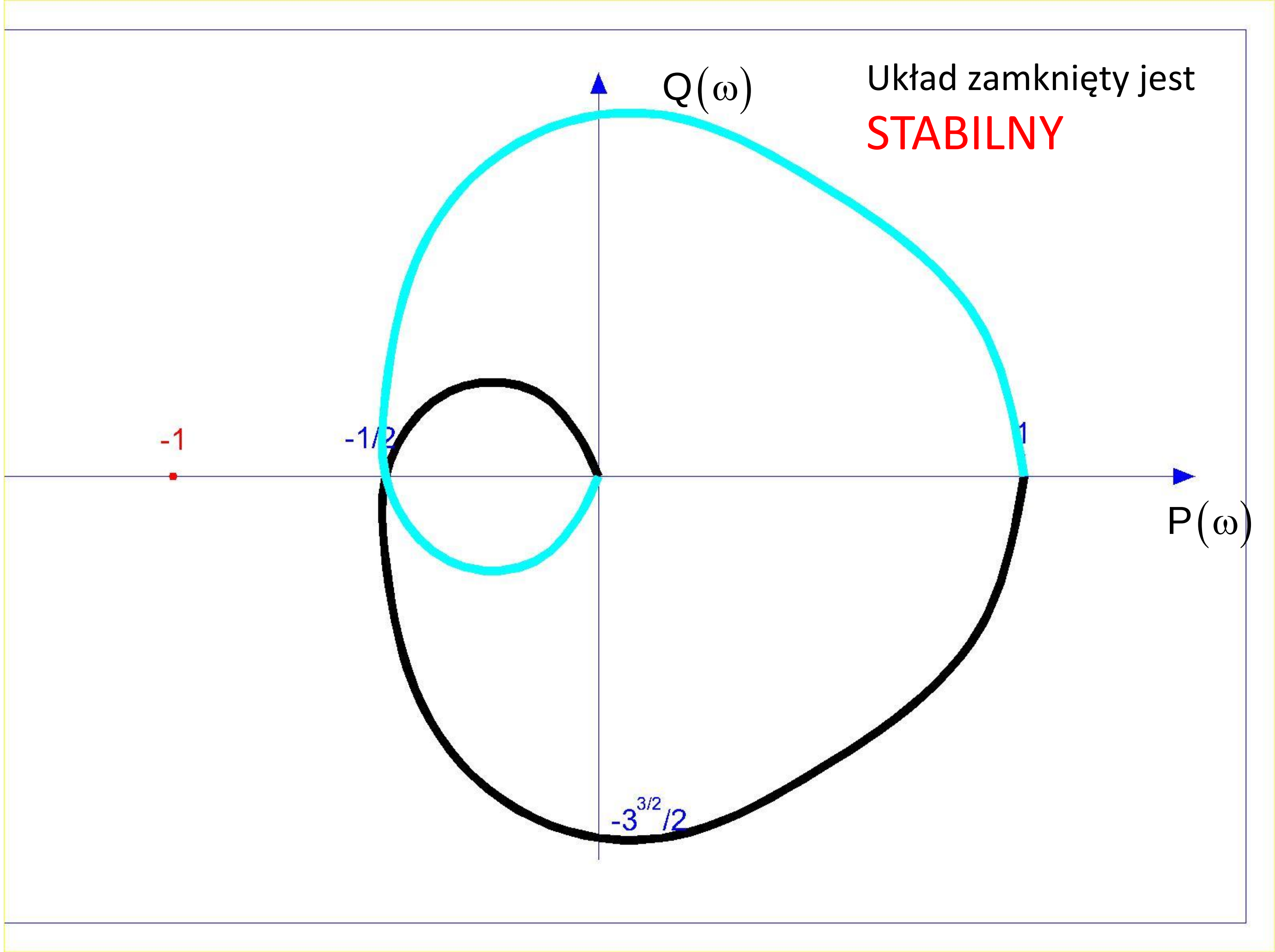
Q(ω)
-1/2
1
P(ω)
-3^3/2/2



Q(ω)
P(ω)
-1/2
1
-3^{3/2}/2



Q(ω)
P(ω)
-1
-1/2
1
-3^{3/2}/2



Q(ω)
Układ zamknięty jest
STABILNY
-1
-1/2
1
P(ω)
-3^{3/2}/2

Zadanie 2

Zbadać stabilność układu zamkniętego jeśli $G_0(s) = \dfrac{1}{2s^3 + 3s^2 + s + 1}$

Stabilność układu otwartego badamy np. za pomocą kryterium Routha:

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ b_0 & \\ c_0 & \end{array}$$

$$b_0 = \frac{-1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3} \cdot (2-3) = \frac{1}{3} > 0$$

$$c_0 = 1 > 0$$

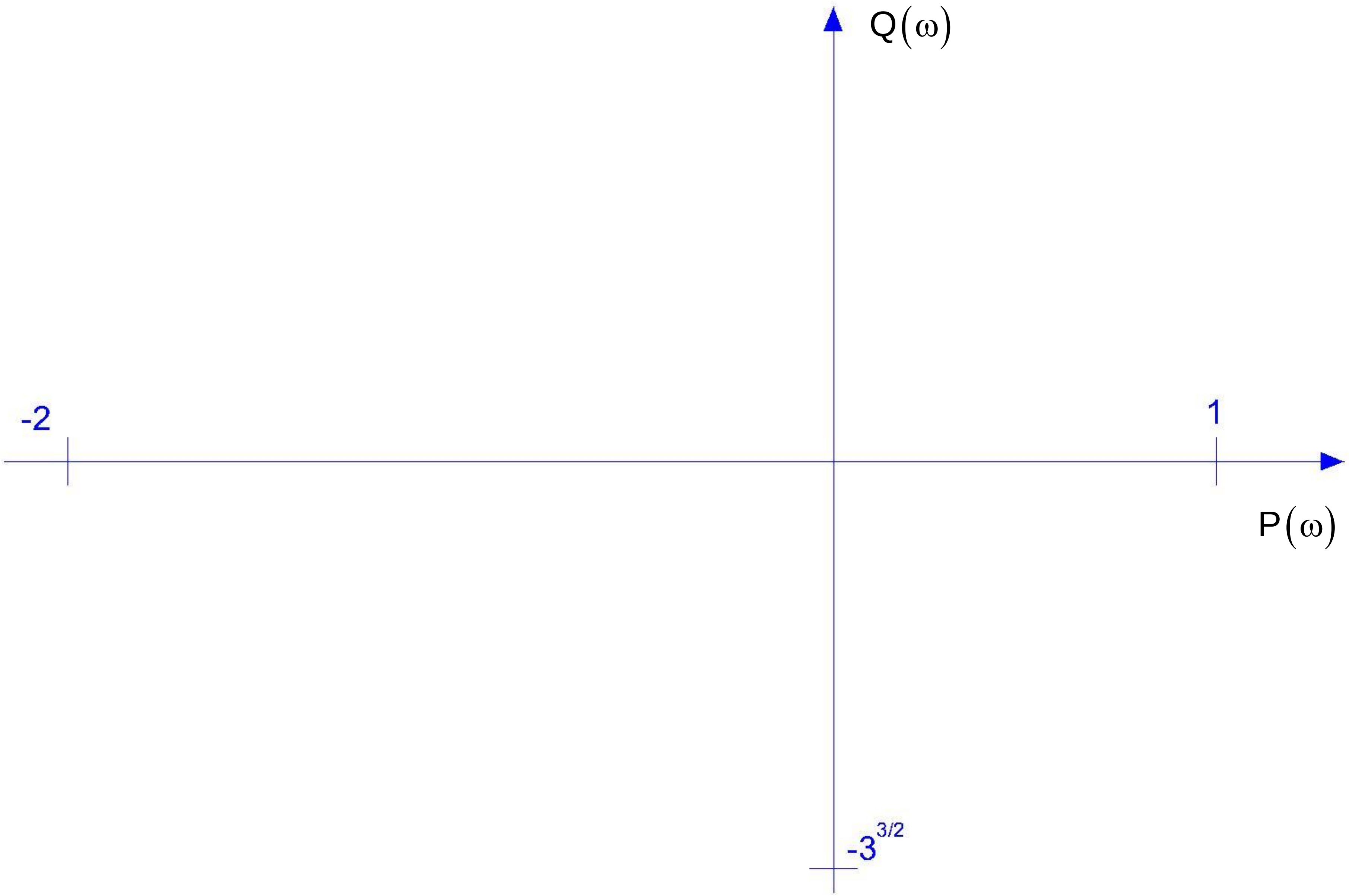
czyli układ otwarty jest stabilny, tzn. ma k=0 pierwiastków niestabilnych.

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{-j2\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{1}{\left(1-3\omega^2\right) + j\omega\left(1-2\omega^2\right)} = \frac{\left(1-3\omega^2\right) - j\omega\left(1-2\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(1-2\omega^2\right)^2}$$

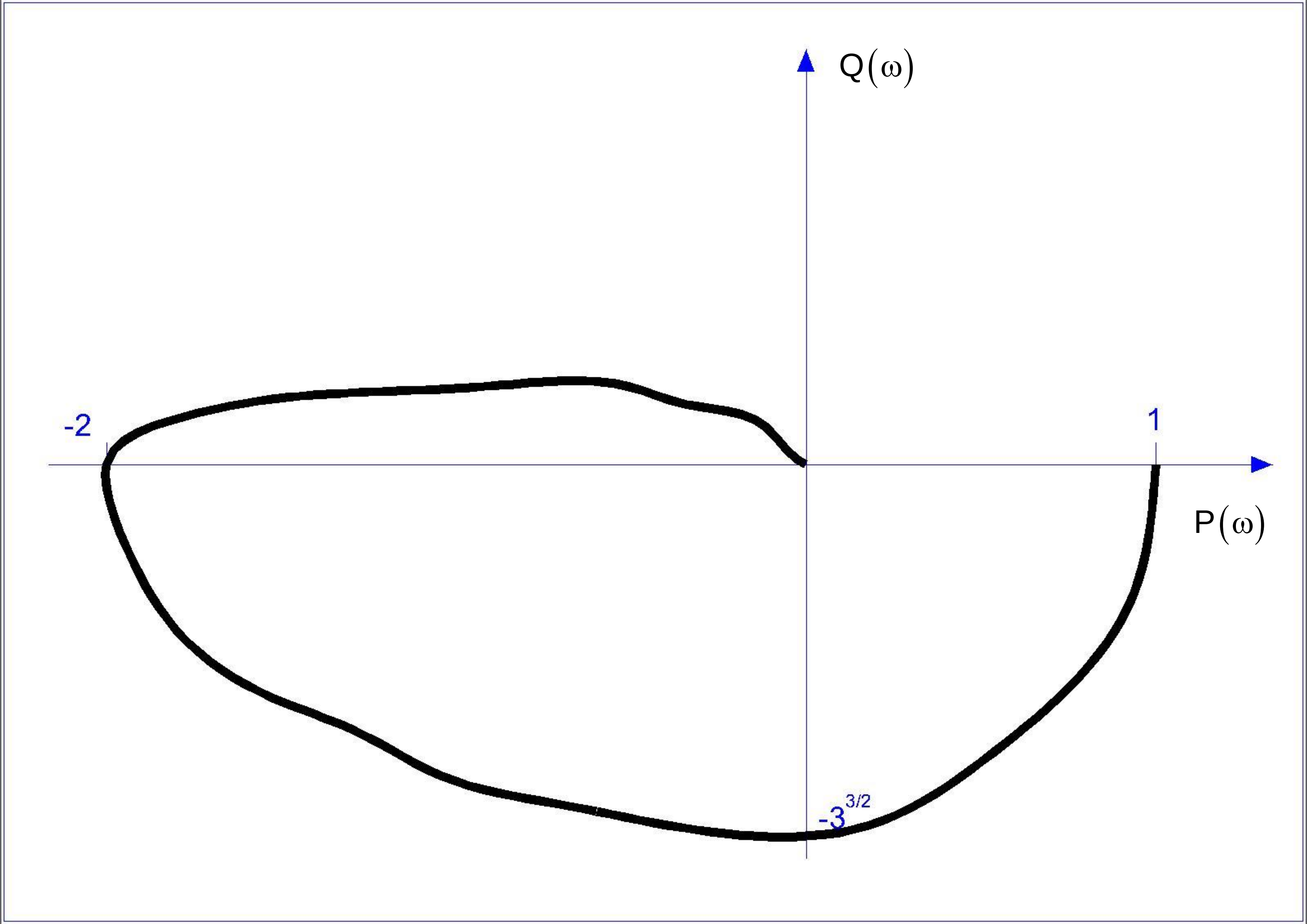
$$P(\omega) = \frac{\left(1-3\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(1-2\omega^2\right)^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-\omega\left(1-2\omega^2\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(1-2\omega^2\right)^2}$$

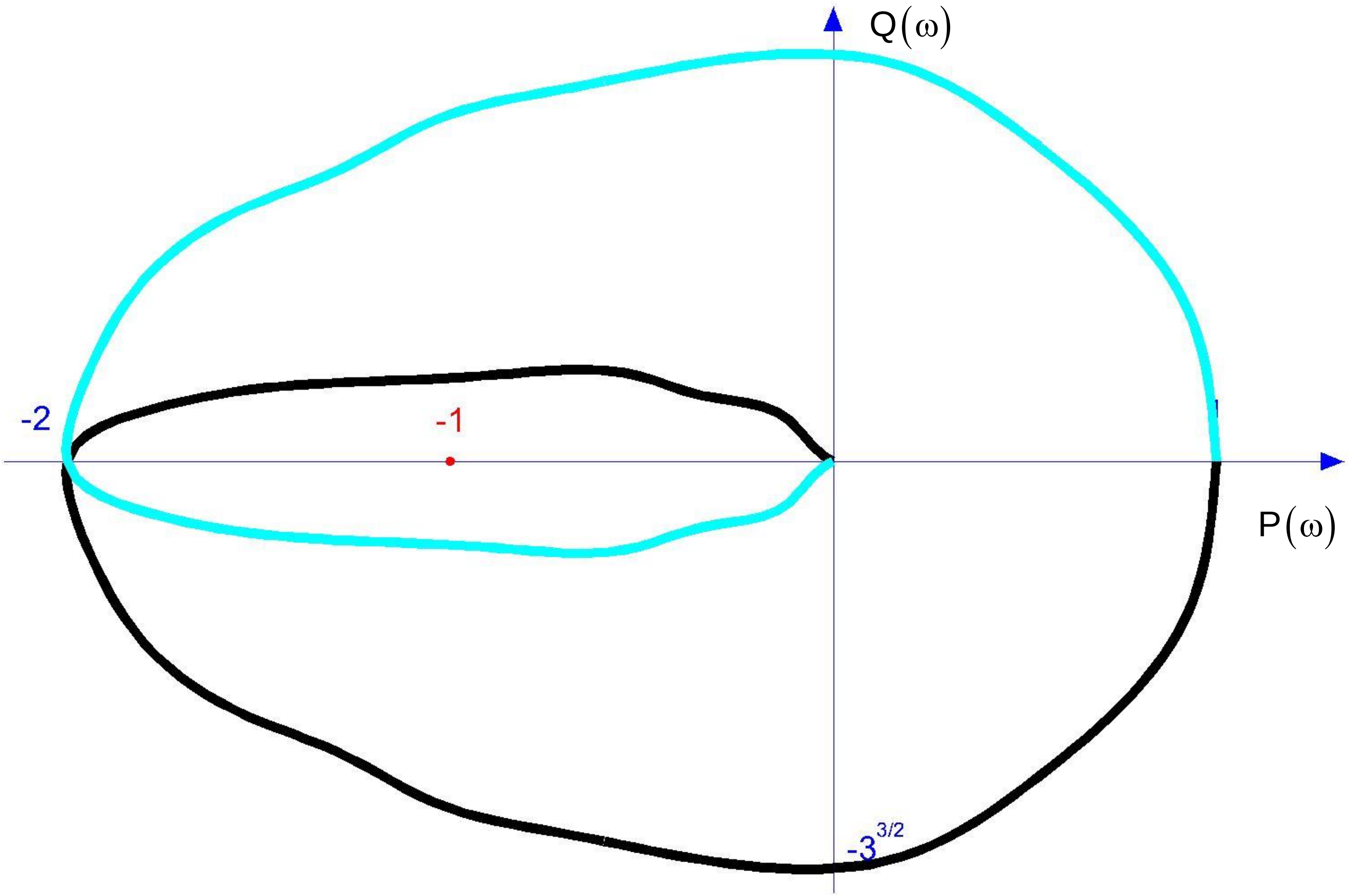
$\omega =$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	∞
$P(\omega) =$	1	0	-2	0
$Q(\omega) =$	0	$-3\sqrt{3}$	0	0



$Q(\omega)$
-2
1
$P(\omega)$
$-3^{3/2}$

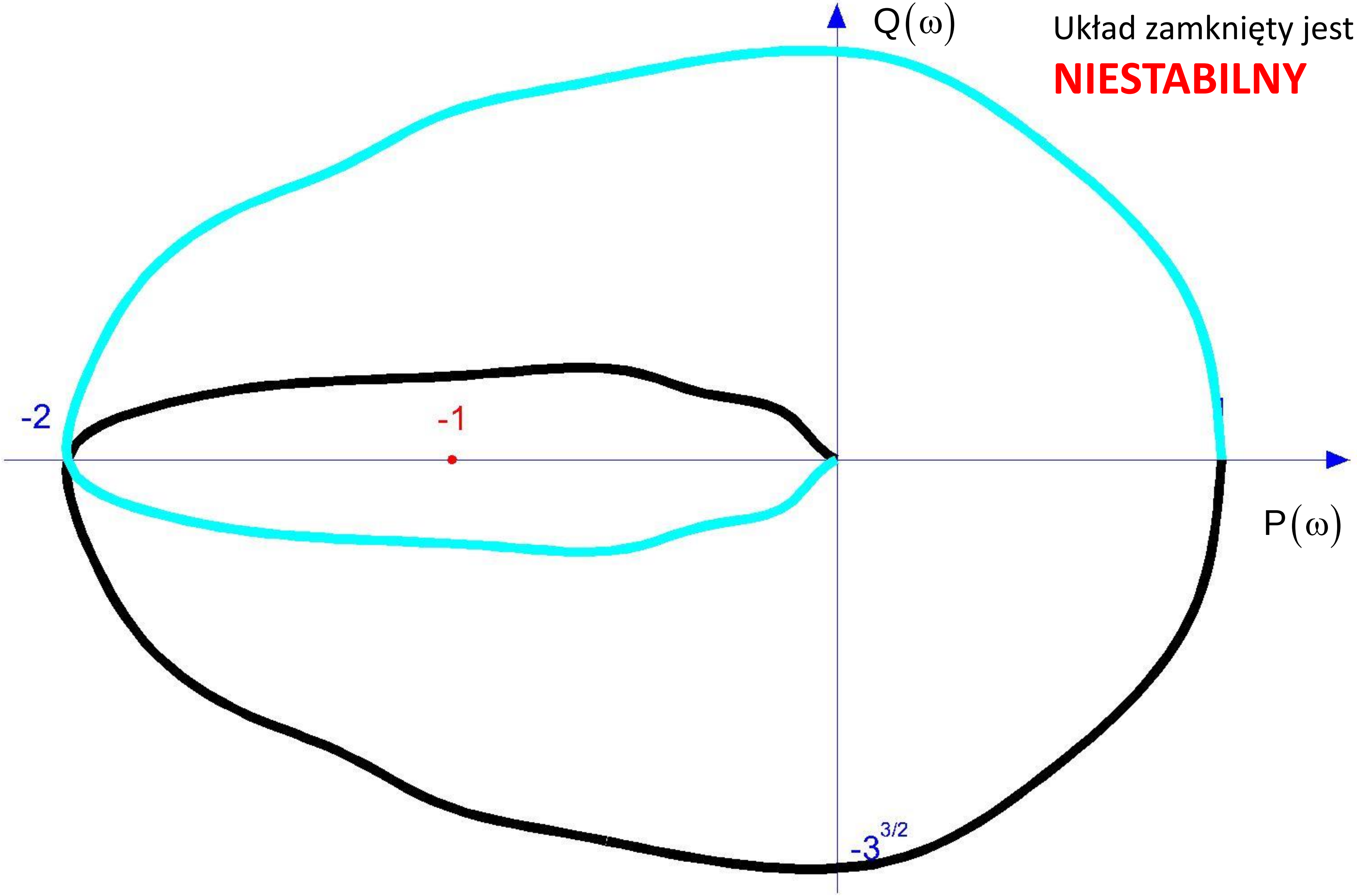


$Q(\omega)$
$P(\omega)$
-2
1
$-3^{3/2}$


Q(ω)
P(ω)
-2
-1
1
$-3^{3/2}$

Układ zamknięty jest

NIESTABILNY



Zadanie 3

Zbadać stabilność układu zamkniętego w funkcji współczynnika K jeśli $G_0(s) = \frac{K}{s(1+2s)(1+3s)}$

$s_1 = -\frac{1}{3} \quad s_2 = -\frac{1}{2} \quad s_3 = 0$ czyli układ otwarty jest na granicy stabilności

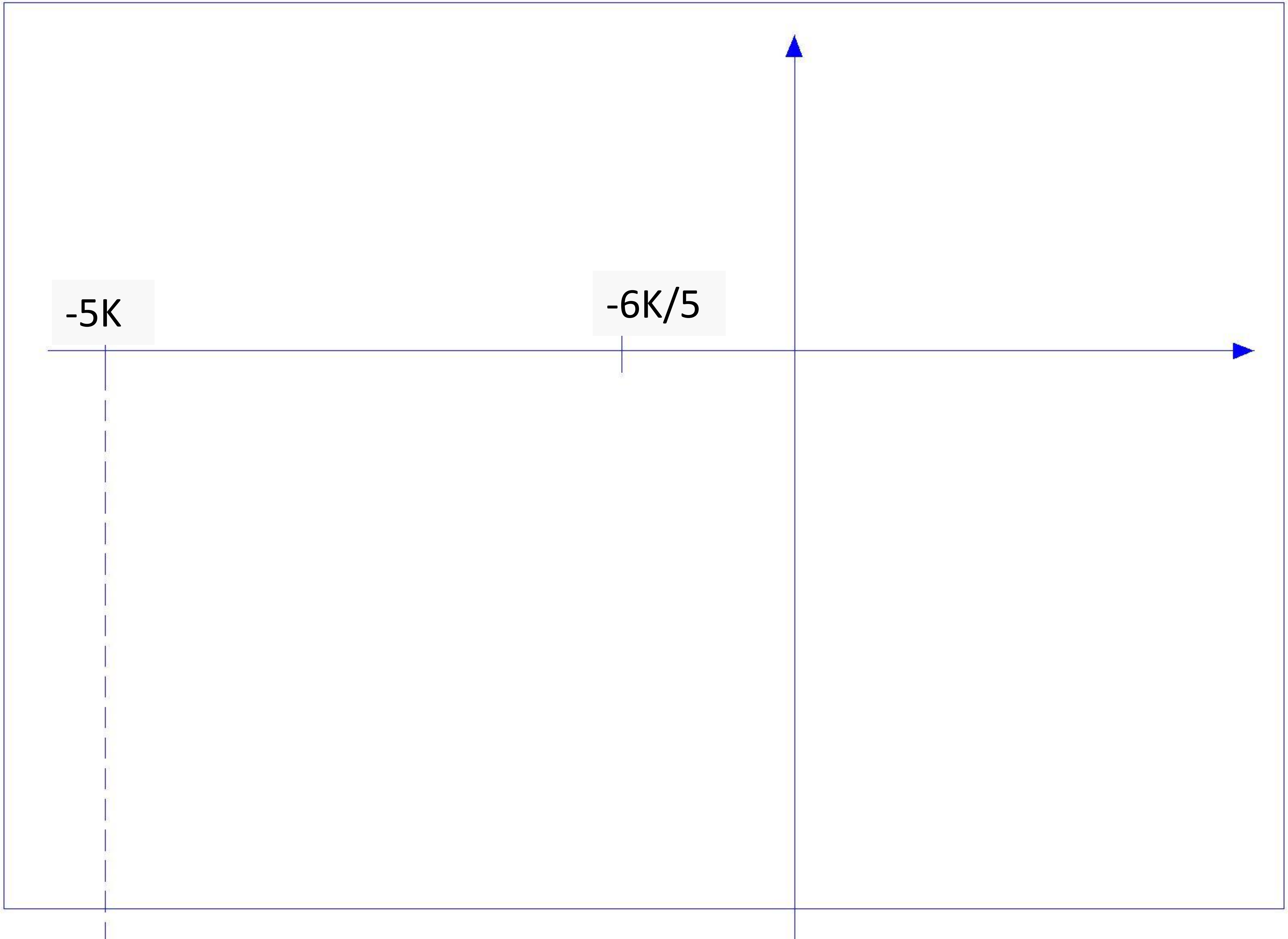
$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j2\omega)(1+j3\omega)} = \frac{K(-j)(1-j2\omega)(1-j3\omega)}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} =$$

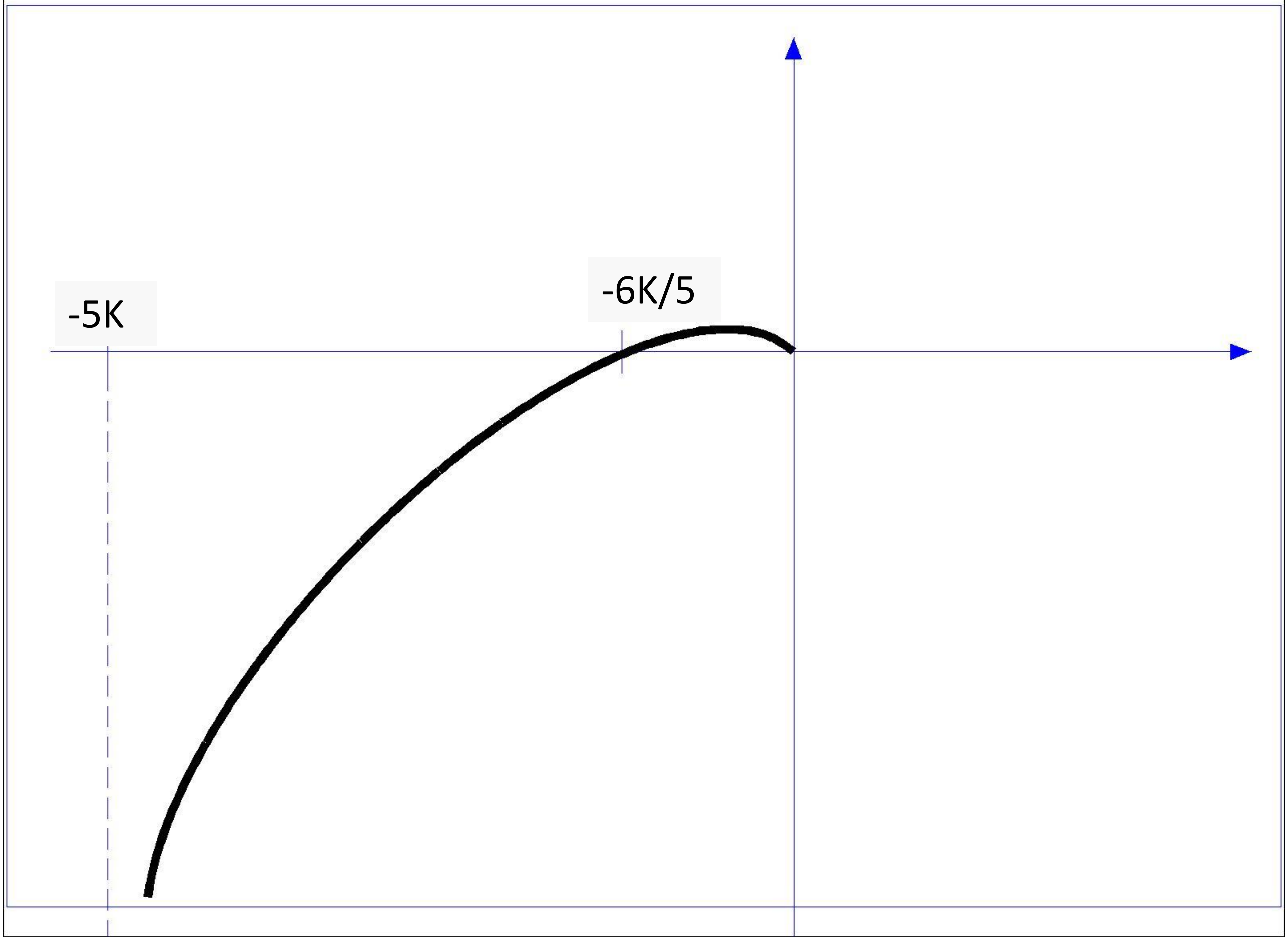
$$= \frac{-K}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}\left\{j\left[(1-6\omega^2)-j5\omega\right]\right\} = \frac{-K}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}\left[5\omega + j(1-6\omega^2)\right]$$

$$P(\omega) = \frac{-5K\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}$$

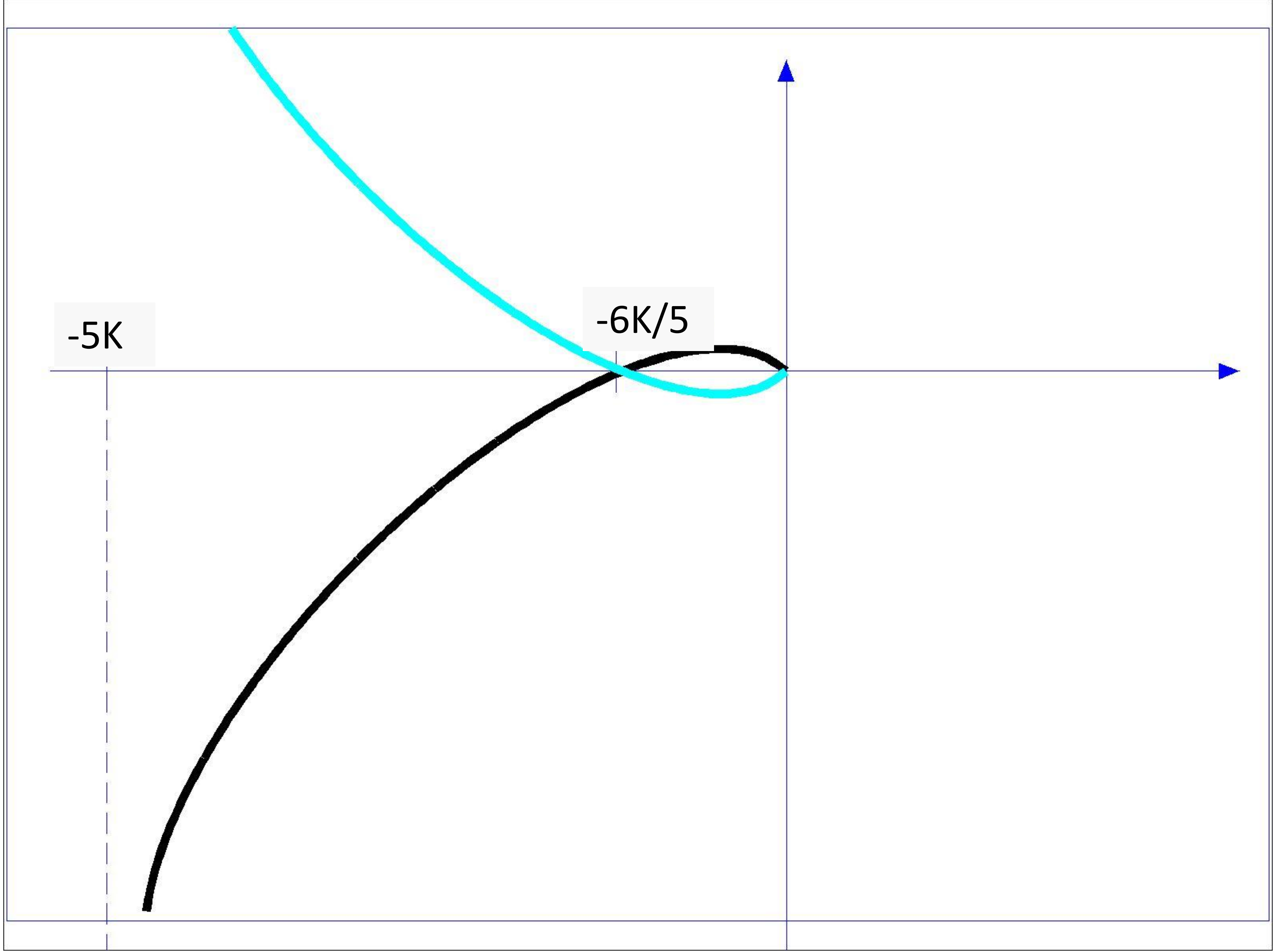
$$Q(\omega) = \frac{-K(1-6\omega^2)}{\omega(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)}$$

$\omega =$	0^+	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$	∞
$P(\omega) =$	$-5K$	$-\frac{6}{5}K$	< 0	0
$Q(\omega) =$	$-\infty$	0	> 0	0

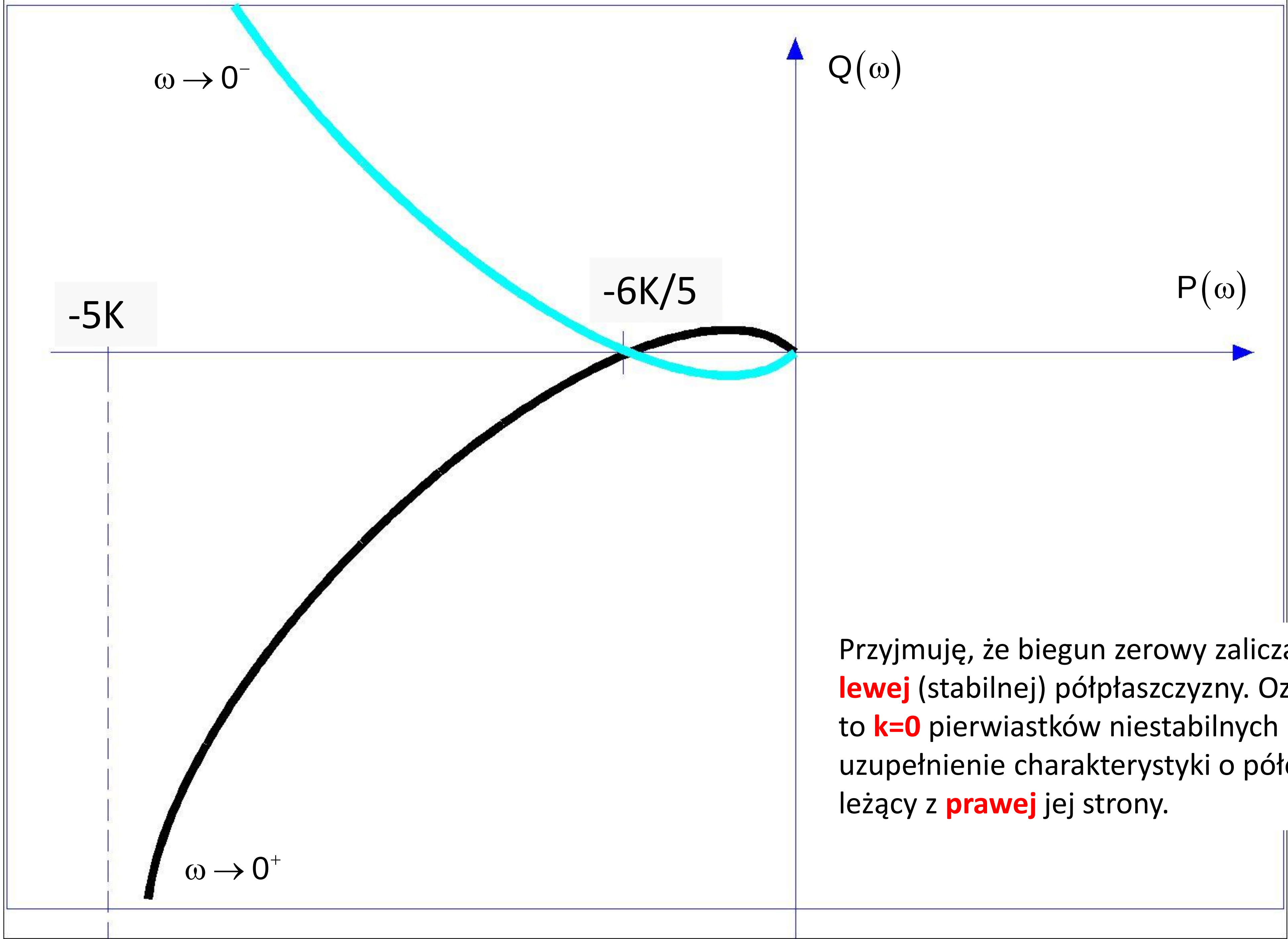

-5K
-6K/5



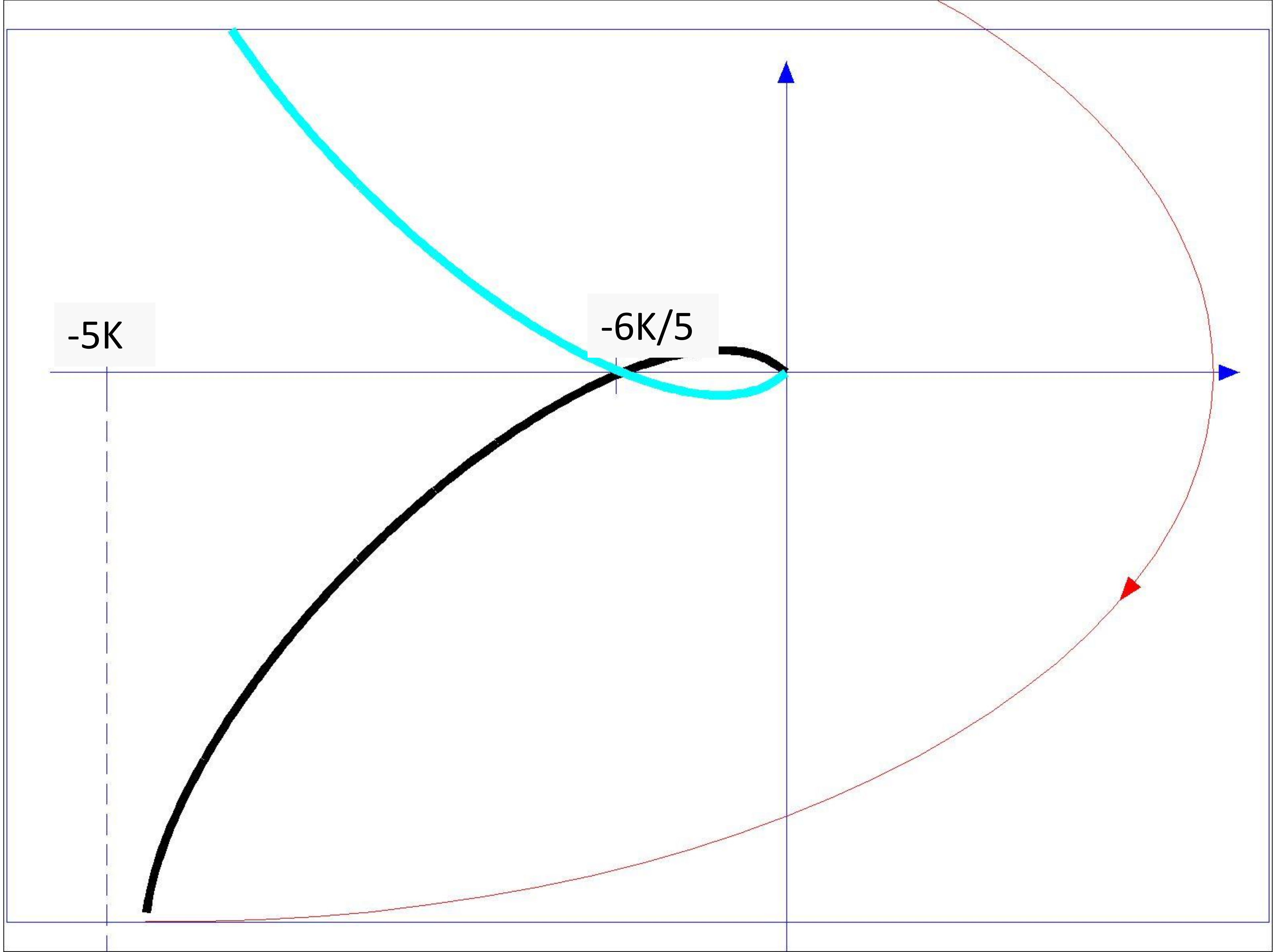
-5K
-6K/5

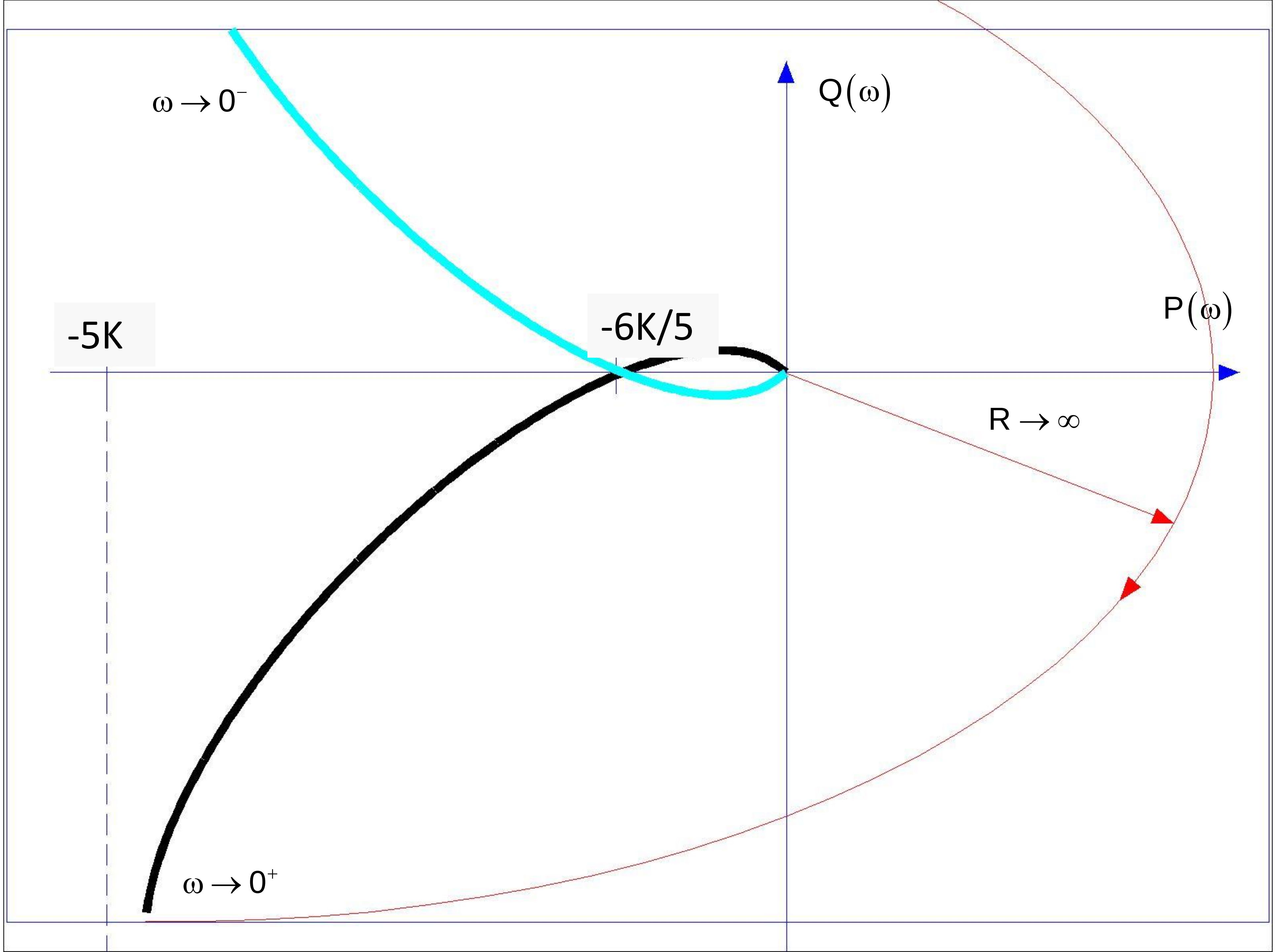


-5K
-6K/5

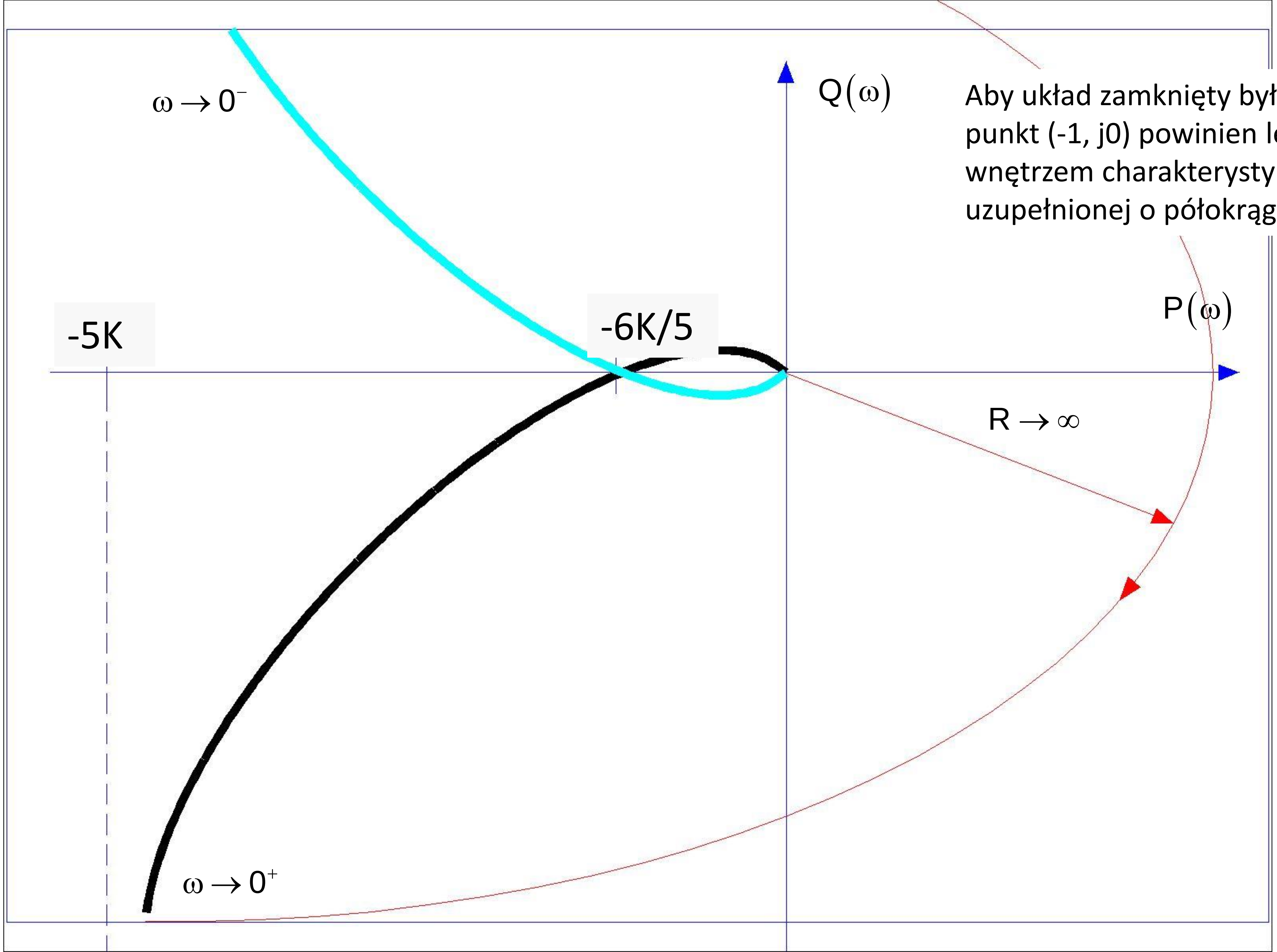


Przyjmuję, że biegun zerowy zaliczam do **lewej** (stabilnej) półpłaszczyzny. Oznacza to **k=0** pierwiastków niestabilnych oraz uzupełnienie charakterystyki o półokrąg leżący z **prawej** jej strony.

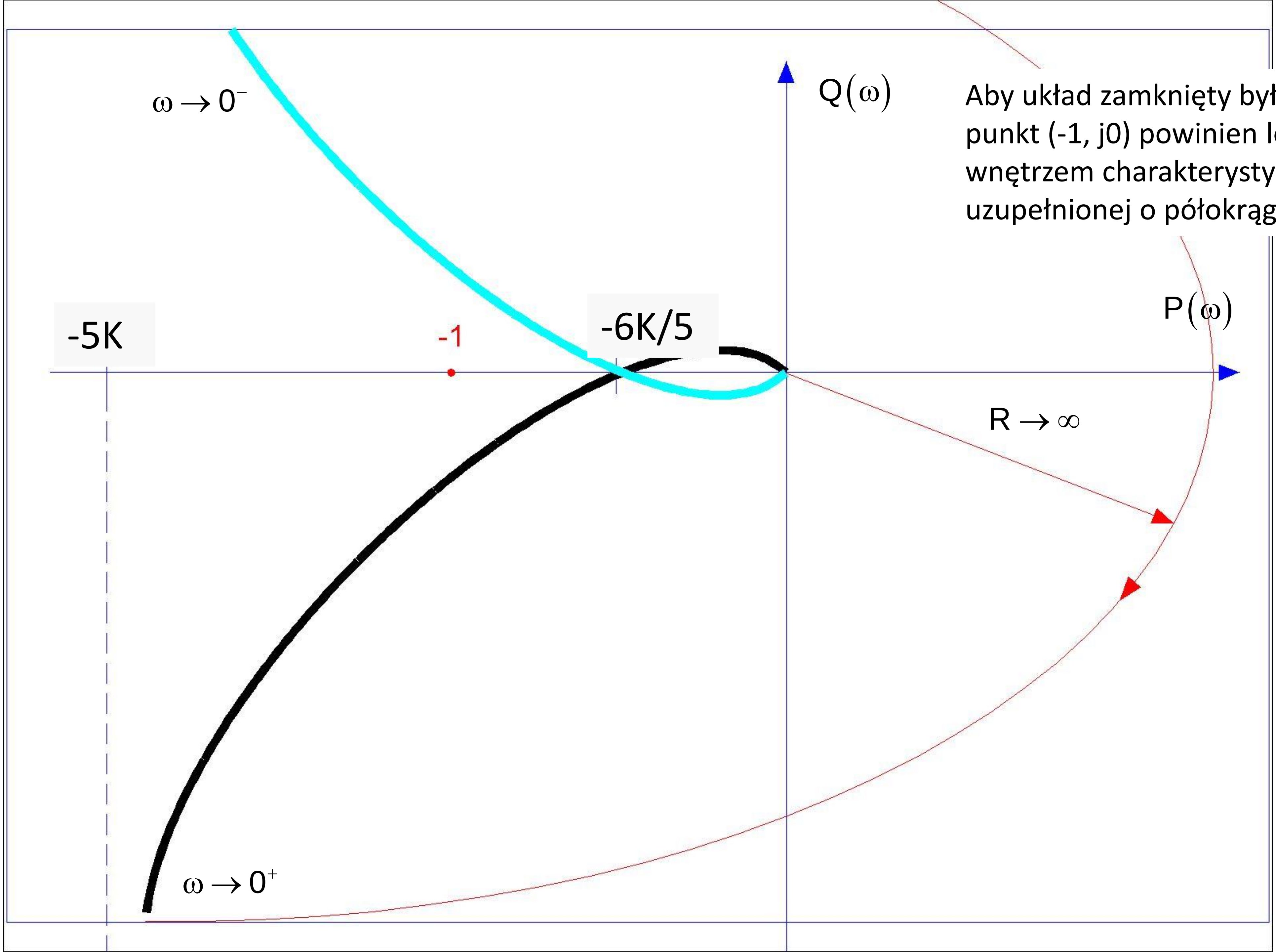

-5K
-6K/5



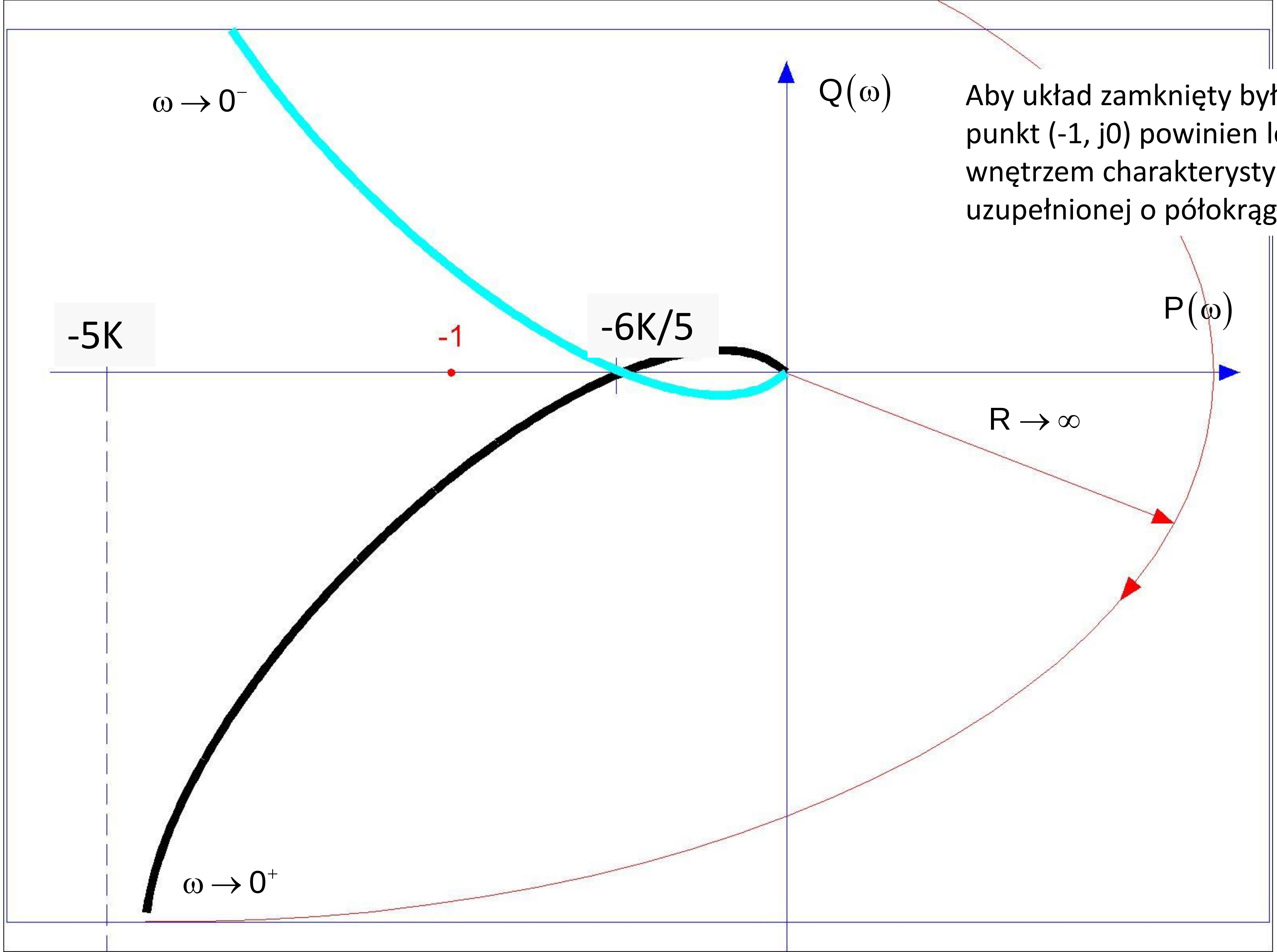
$\omega \to 0^-$
$Q(\omega)$
$P(\omega)$
-5K
-6K/5
$R \to \infty$
$\omega \to 0^+$



ω → 0⁻
Q(ω)
Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć poza wnętrzem charakterystyki uzupełnionej o półokrąg
-5K
-6K/5
P(ω)
R → ∞
ω → 0⁺



Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć poza wnętrzem charakterystyki uzupełnionej o półokrąg



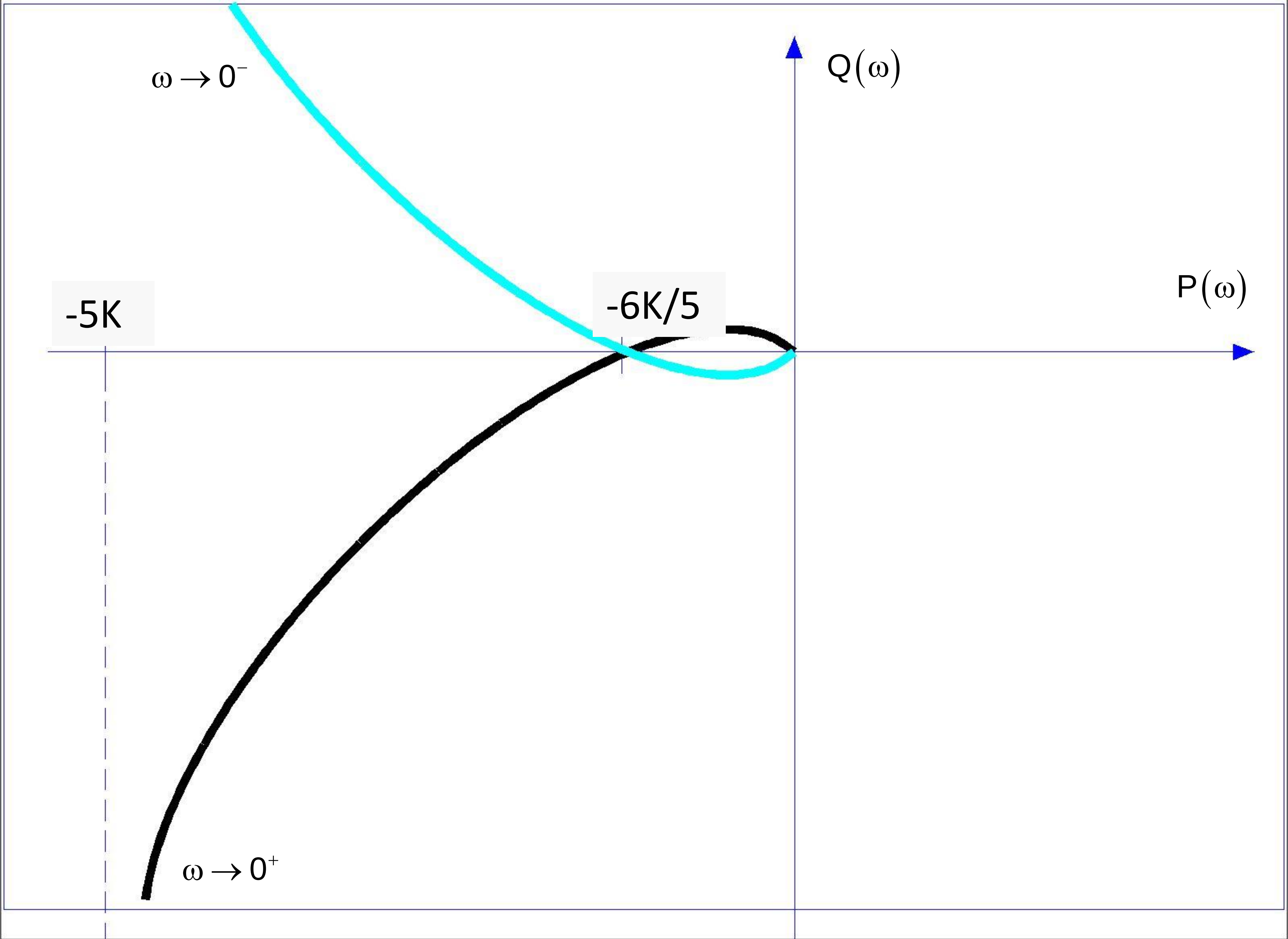
Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć poza wnętrzem charakterystyki uzupełnionej o półokrąg

A to oznacza:

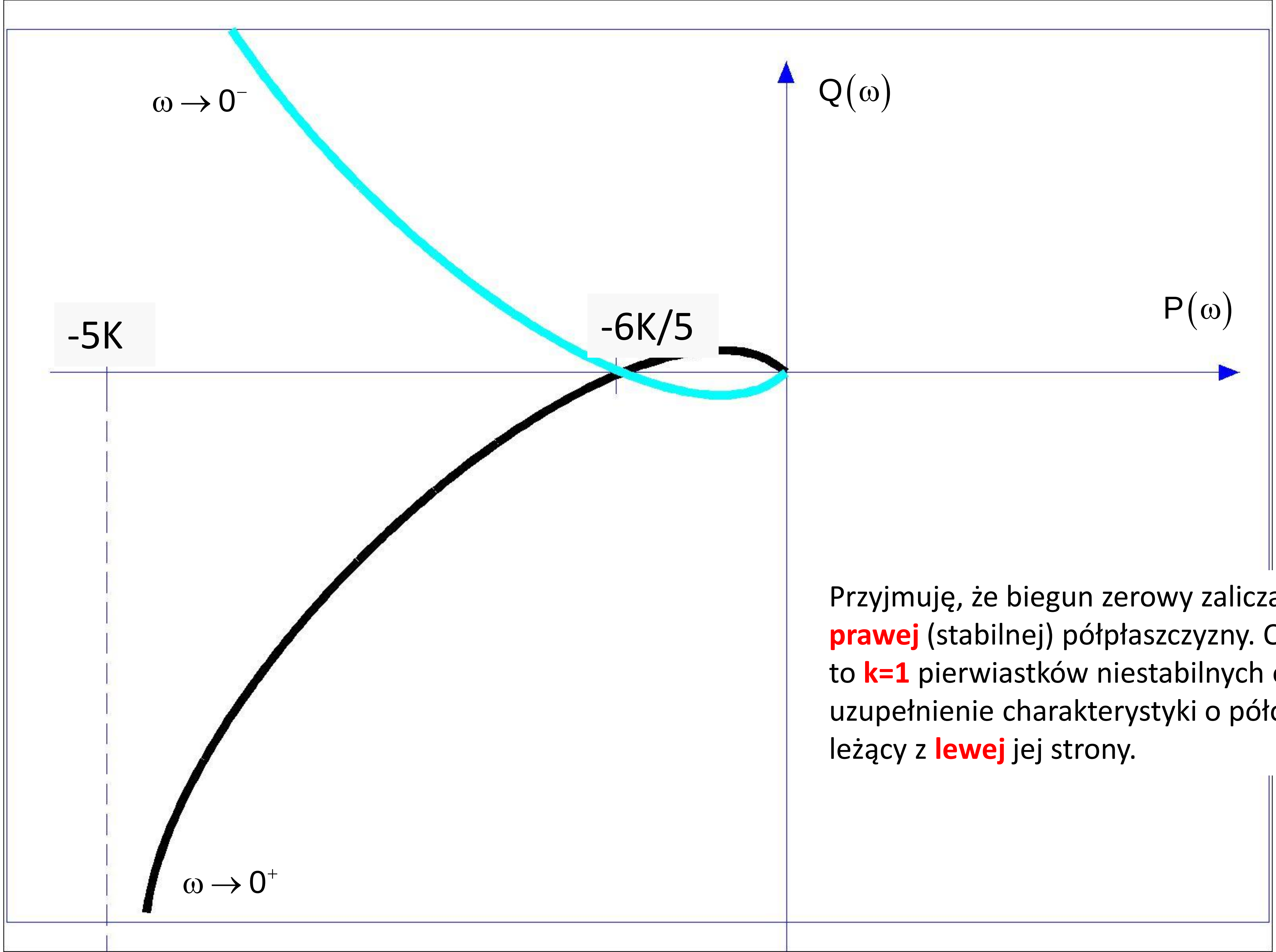
$$-1 < -\frac{6}{5}K$$

$$\Downarrow$$

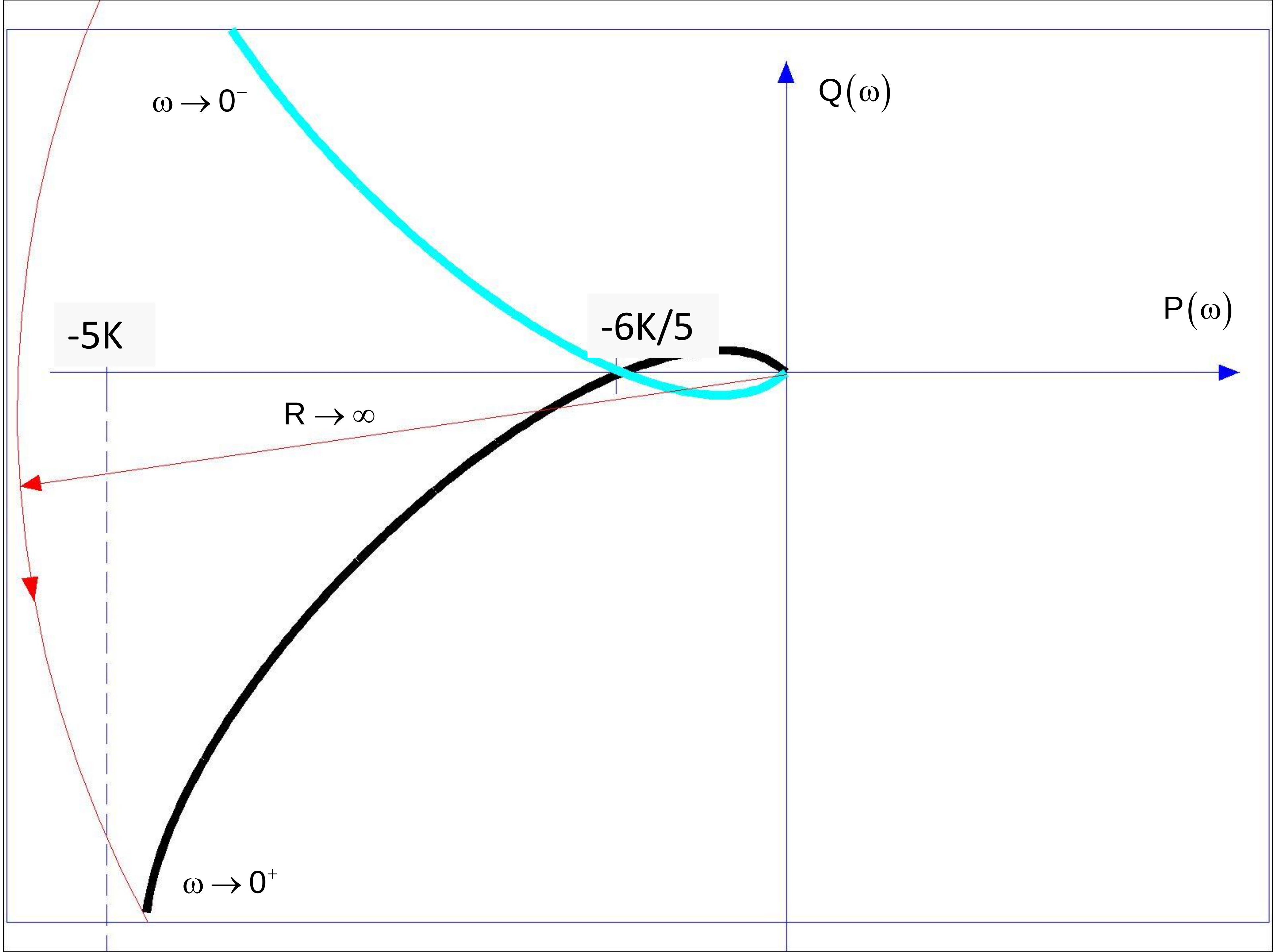
$$K < \frac{5}{6}$$



$\omega \to 0^-$
$Q(\omega)$
$P(\omega)$
-5K
-6K/5
$\omega \to 0^+$



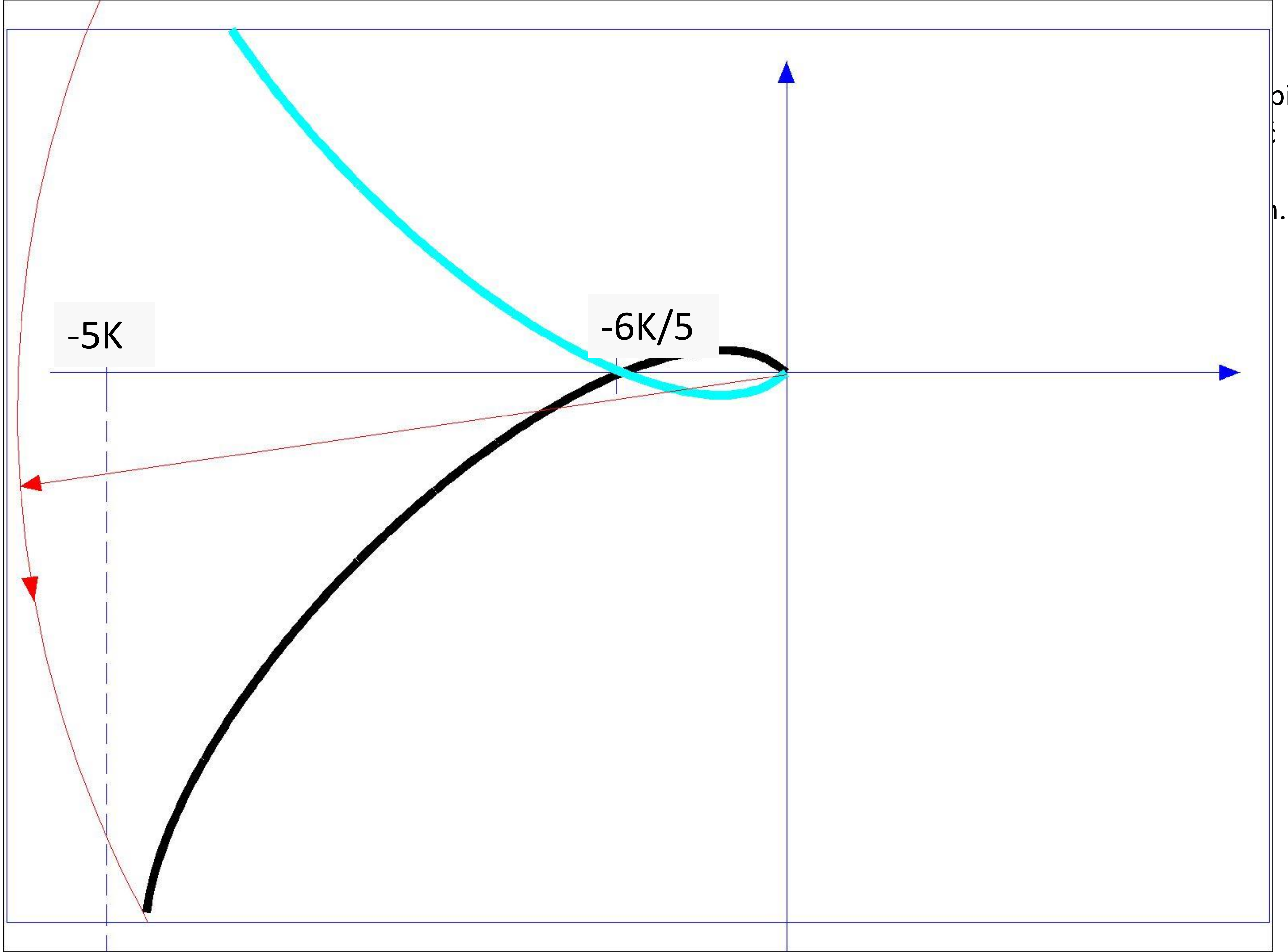
Przyjmuję, że biegun zerowy zaliczam do **prawej** (stabilnej) półpłaszczyzny. Oznacza to **k=1** pierwiastków niestabilnych oraz uzupełnienie charakterystyki o półokrąg leżący z **lewej** jej strony.

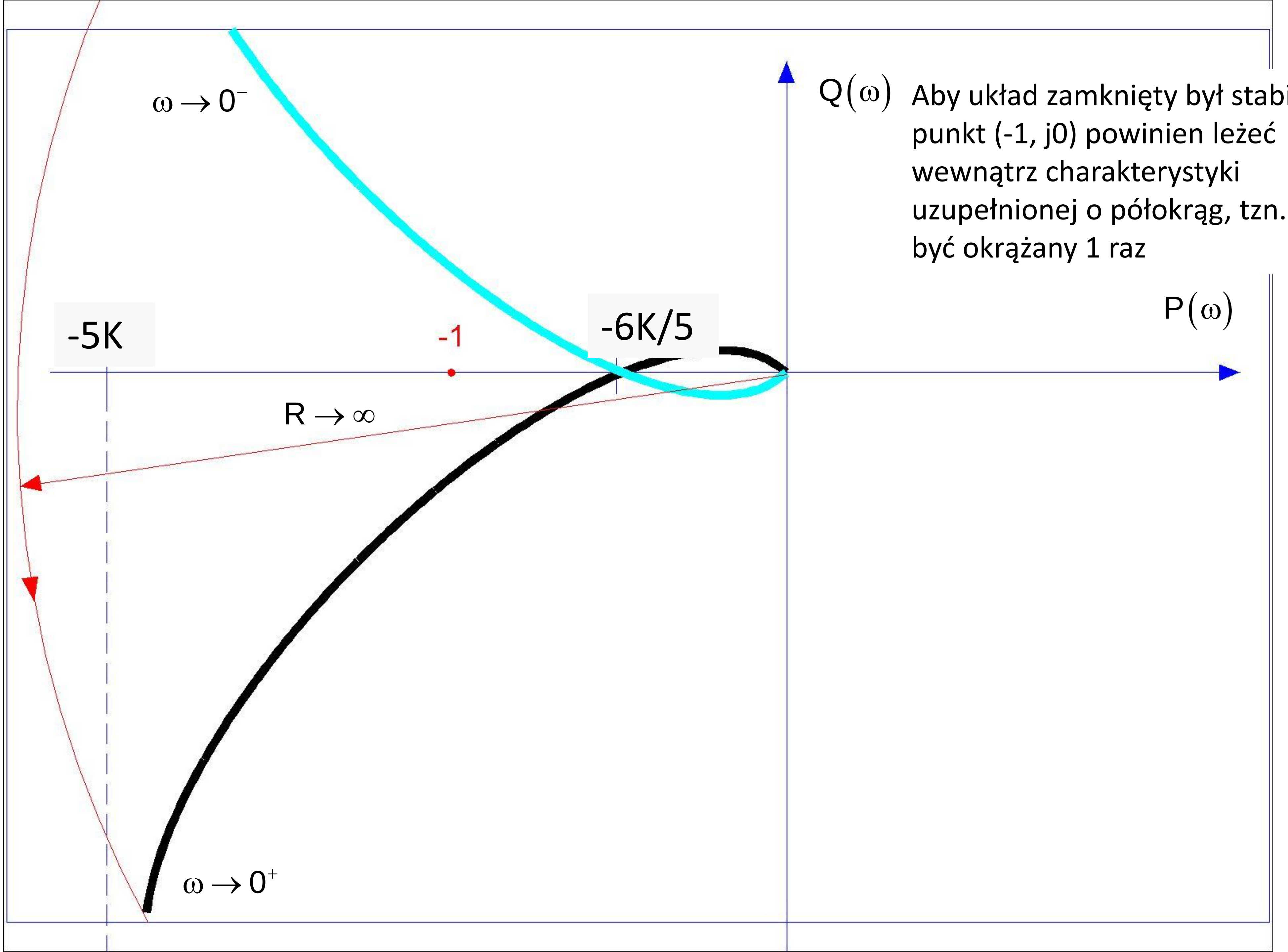


$\omega \to 0^-$
$Q(\omega)$
$P(\omega)$
-5K
-6K/5
$R \to \infty$
$\omega \to 0^+$

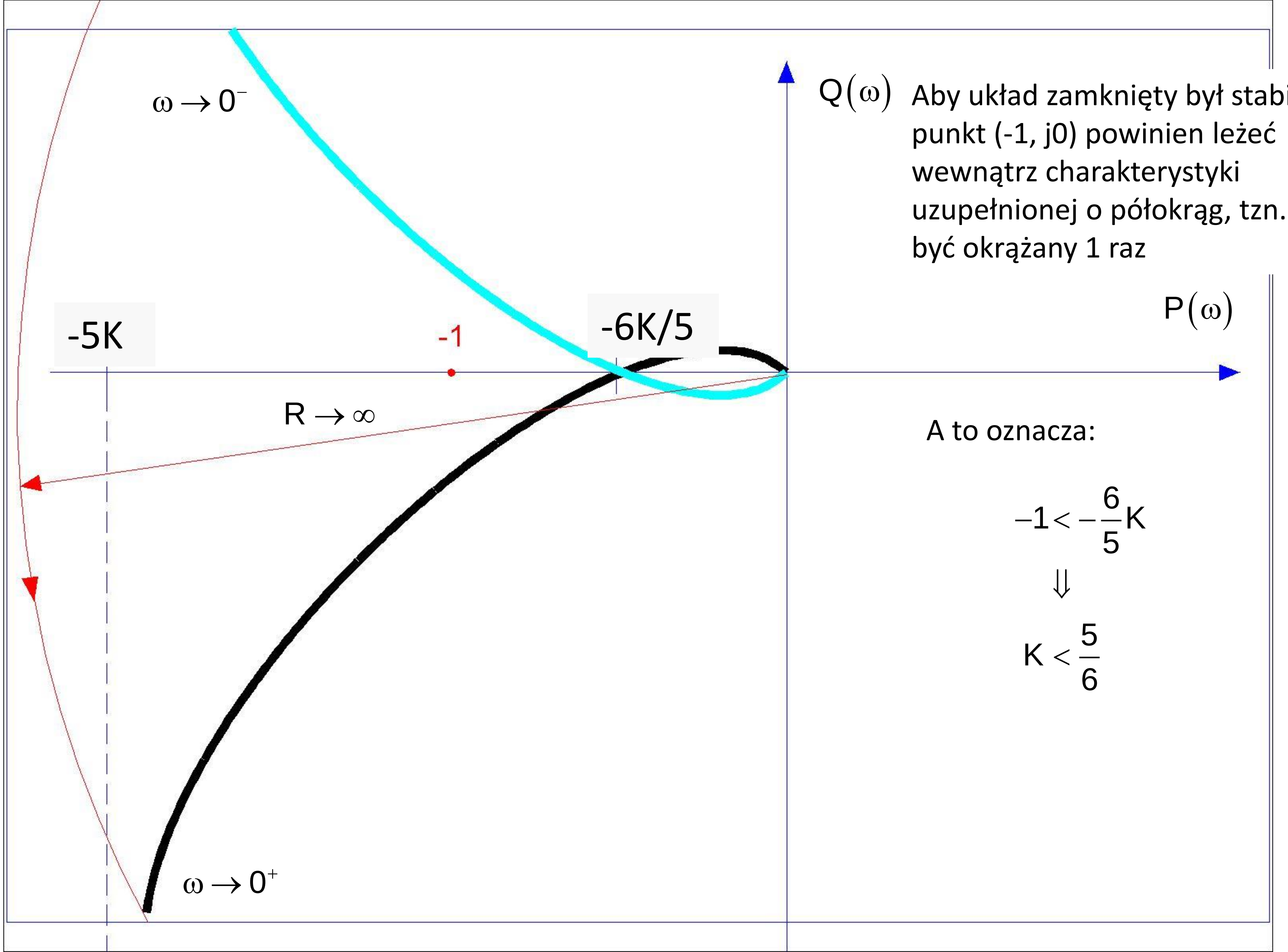
bilny,

n. musi





Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć wewnątrz charakterystyki uzupełnionej o półokrąg, tzn. musi być okrążany 1 raz



Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć wewnątrz charakterystyki uzupełnionej o półokrąg, tzn. musi być okrążany 1 raz

A to oznacza:

$$-1 < -\frac{6}{5}K$$

$$\Downarrow$$

$$K < \frac{5}{6}$$

Oznacza to, że dla utrzymania stabilności układu zamkniętego istotne jest ograniczenie (od góry) wartości współczynnika wzmocnienia układu otwartego. Im ta wartość jest większa, tym bardziej układ zamknięty zbliża się do granicy stabilności, a po jej przekroczeniu – staje się niestabilny.

Chociaż to nie zawsze musi prawdą.

Zadanie 4

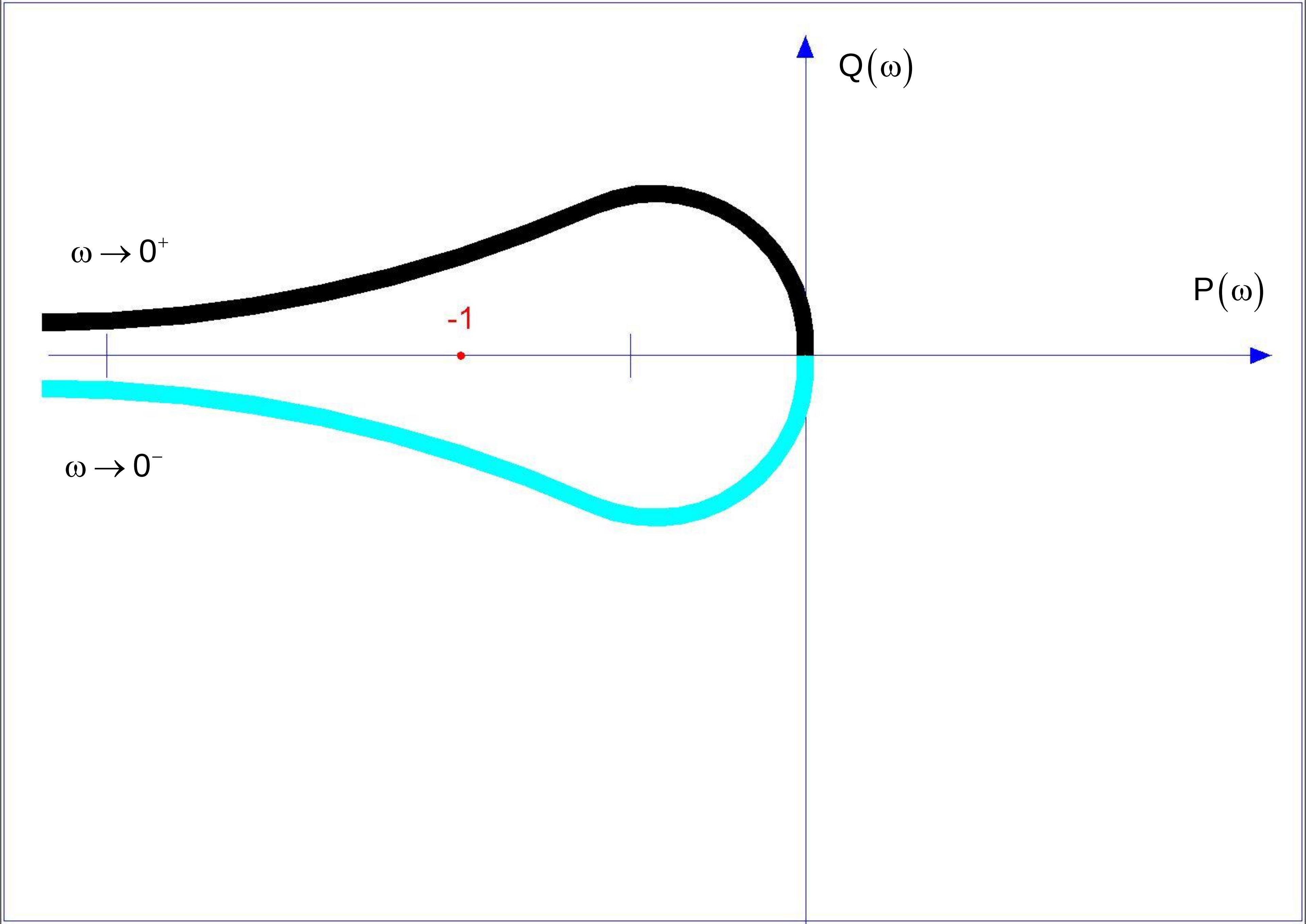
Zbadać stabilność układu zamkniętego w funkcji współczynnika K jeśli $G_0(s) = \dfrac{K}{s^2(1+sT)}$

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T)} = \frac{K(1-j\omega T)}{-\omega^2(1+\omega^2 T^2)} = \frac{-K}{\omega^2(1+\omega^2 T^2)}(1-j\omega T)$$

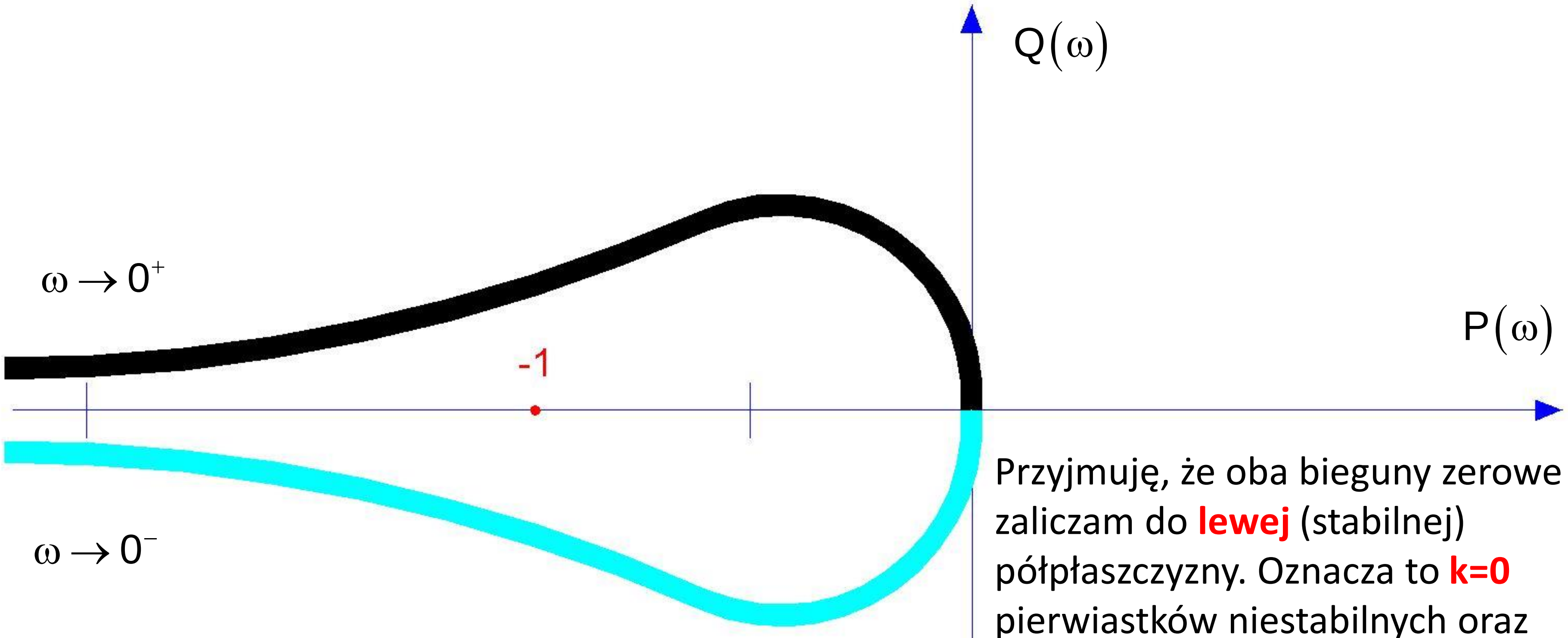
$$P(\omega) = \frac{-K}{\omega^2(1+\omega^2 T^2)}$$

$$Q(\omega) = \frac{K\omega T}{\omega^2(1+\omega^2 T^2)} = \frac{KT}{\omega(1+\omega^2 T^2)}$$

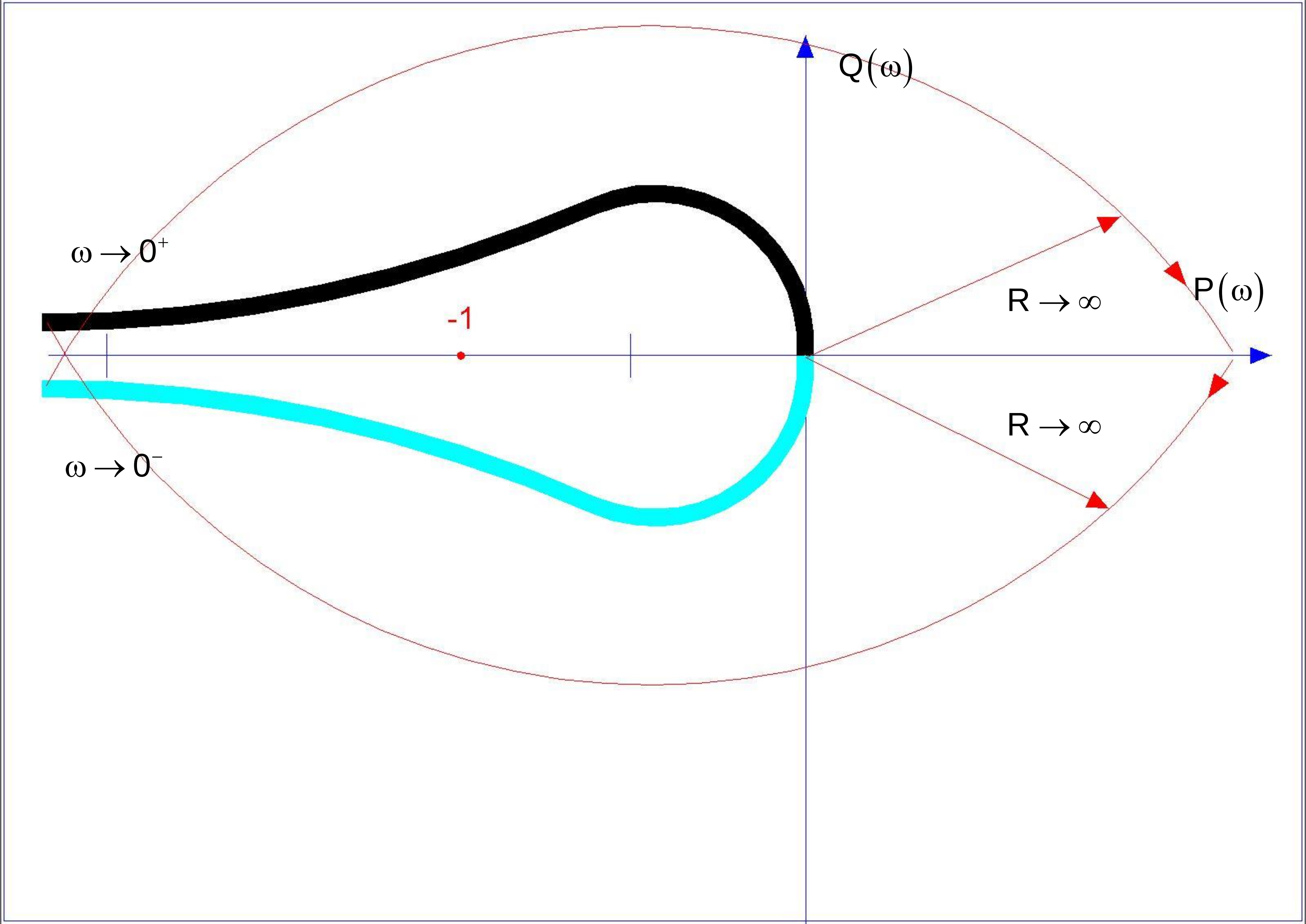
$\omega =$	0^+	$\frac{1}{T}$	∞
$P(\omega) =$	$-\infty$	$-\frac{KT^2}{2}$	0
$Q(\omega) =$	$+\infty$	$\frac{KT^2}{2}$	0

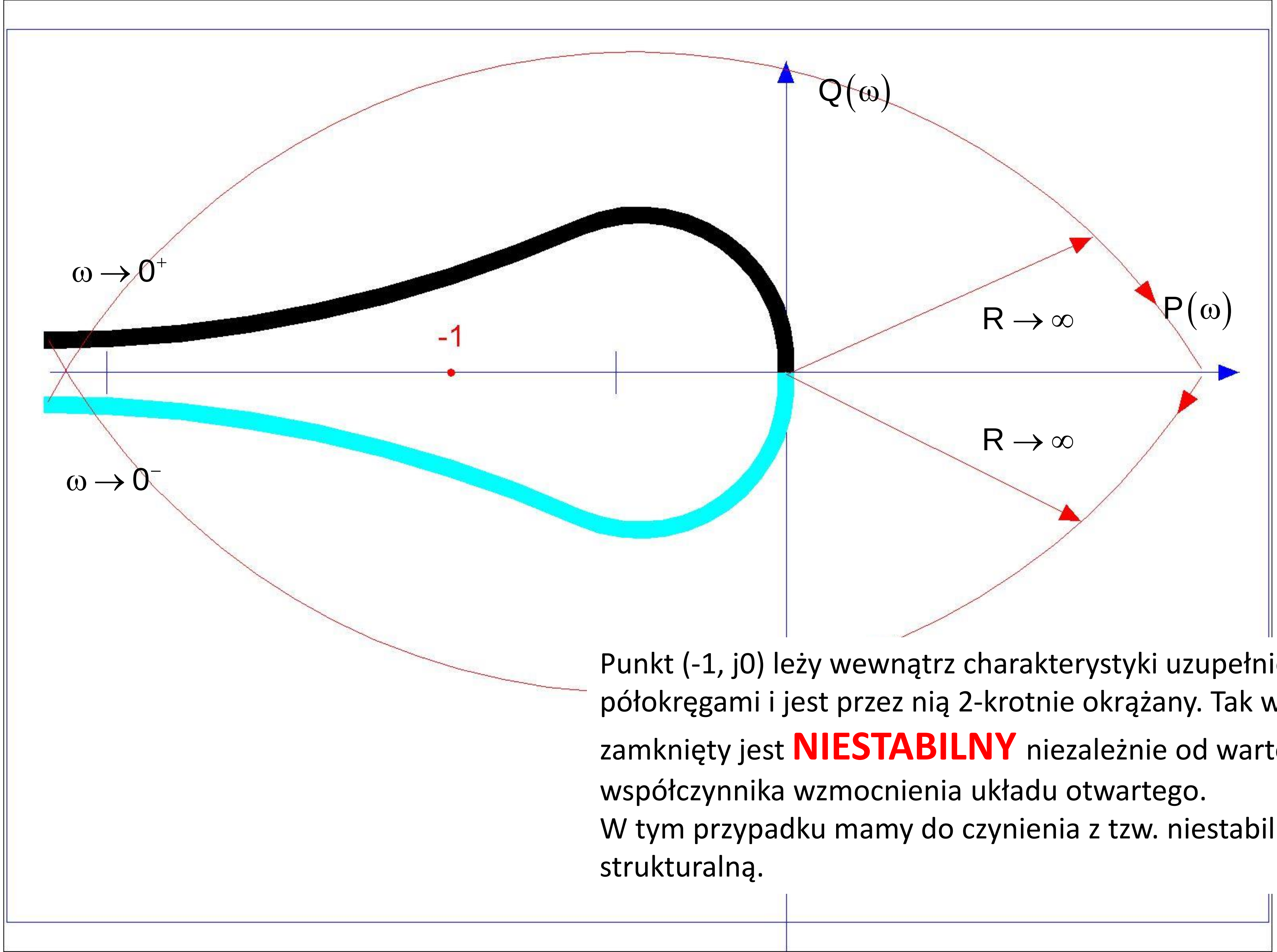


Q(ω)
P(ω)
ω → 0⁺
ω → 0⁻
-1



Przyjmuję, że oba bieguny zerowe zaliczam do **lewej** (stabilnej) półpłaszczyzny. Oznacza to **k=0** pierwiastków niestabilnych oraz uzupełnienie charakterystyki o dwa (po jednym dla każdego bieguna) półokręgi leżące z **prawej** jej strony.


Q(ω)
ω → 0⁺
-1
R → ∞
P(ω)
R → ∞
ω → 0⁻



Punkt (-1, j0) leży wewnątrz charakterystyki uzupełnionej 2 półokręgami i jest przez nią 2-krotnie okrążany. Tak więc układ zamknięty jest **NIESTABILNY** niezależnie od wartości współczynnika wzmocnienia układu otwartego.
W tym przypadku mamy do czynienia z tzw. niestabilnością strukturalną.

Zadanie 5

Zbadać stabilność układu zamkniętego w funkcji stałej czasowej T jeśli $G_0(s)=\dfrac{K}{s(1+sT)(1+s3T)}$

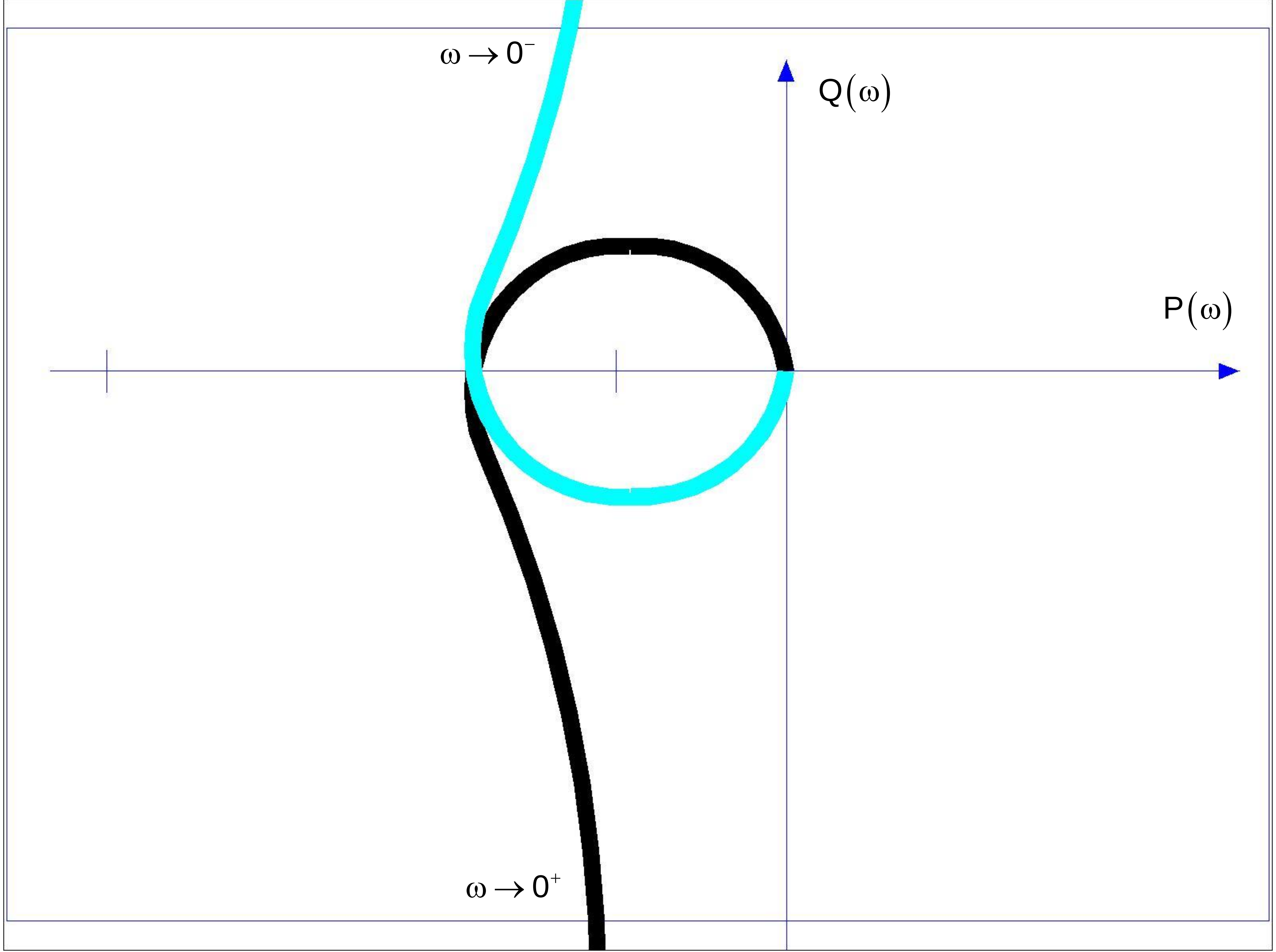
$$G_0(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T)(1+j3\omega T)}=\frac{K(-j)(1-j\omega T)(1-j3\omega T)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}=$$

$$=\frac{-K}{\omega(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}\left\{j\left[(1-3\omega^2T^2)-j4\omega T\right]\right\}=\frac{-K}{\omega(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}\left[4\omega T+j(1-3\omega^2T^2)\right]$$

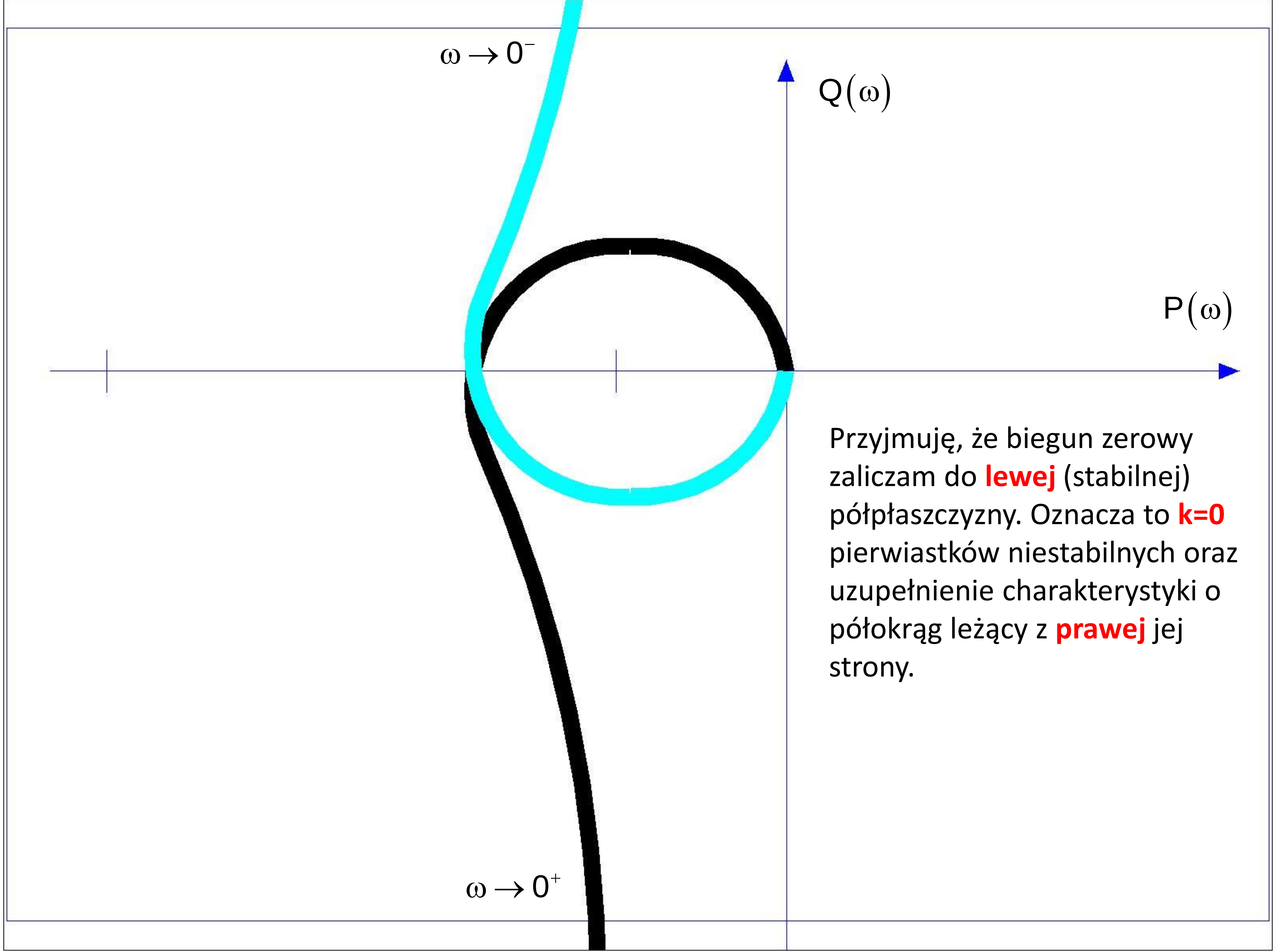
$$P(\omega)=\frac{-4K\omega T}{\omega^2(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}=\frac{-4KT}{\omega(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}$$

$$Q(\omega)=\frac{-K(1-3\omega^2T^2)}{\omega^2(1+\omega^2T^2)(1+9\omega^2T^2)}$$

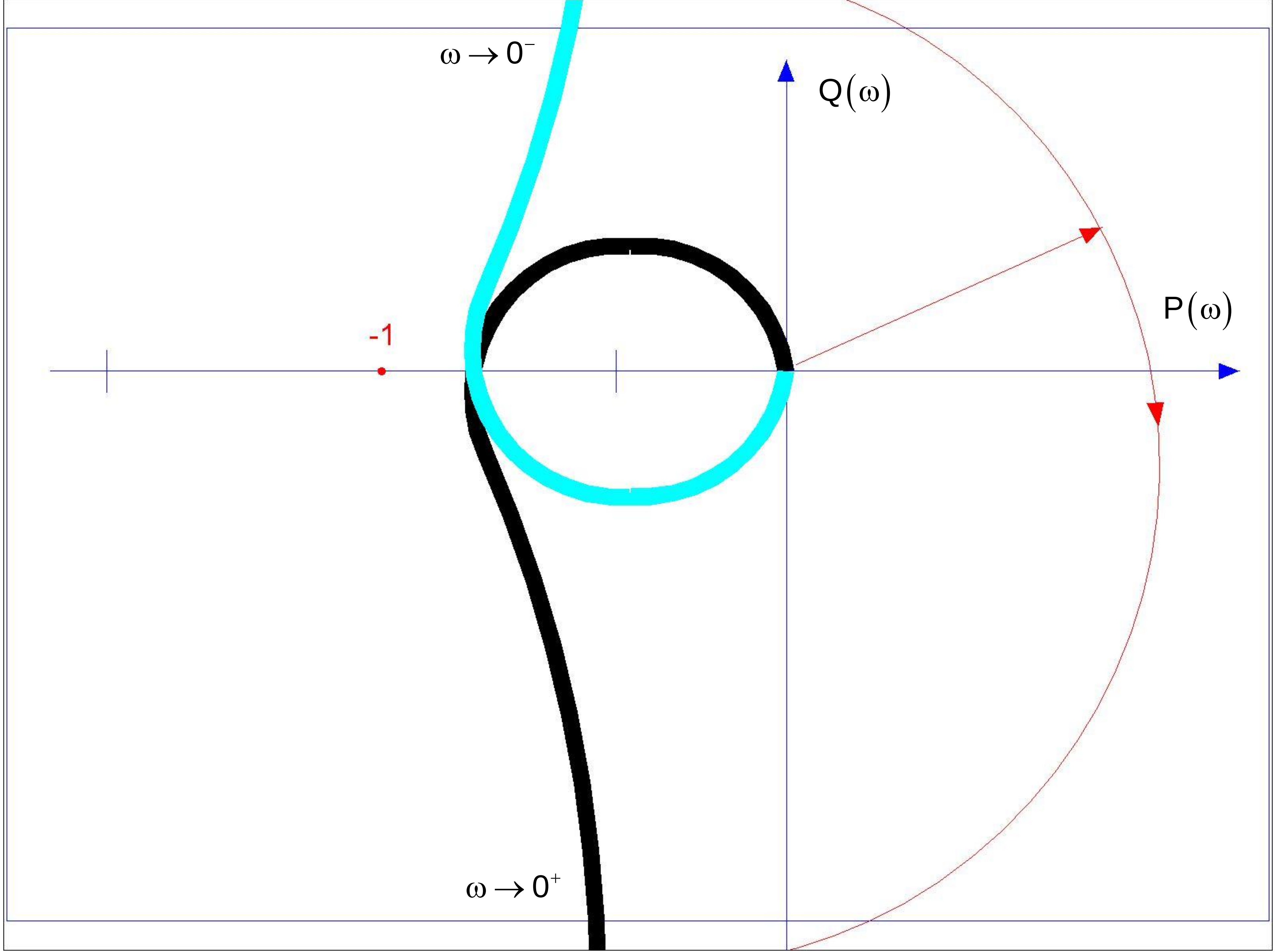
$\omega=$	0^+	$\dfrac{1}{\sqrt{3}T}$	$\nearrow$	∞
$P(\omega)=$	$-\infty$	$-\dfrac{3\sqrt{3}KT^2}{4}$	<0	0
$Q(\omega)=$	$-\infty$	0	>0	0



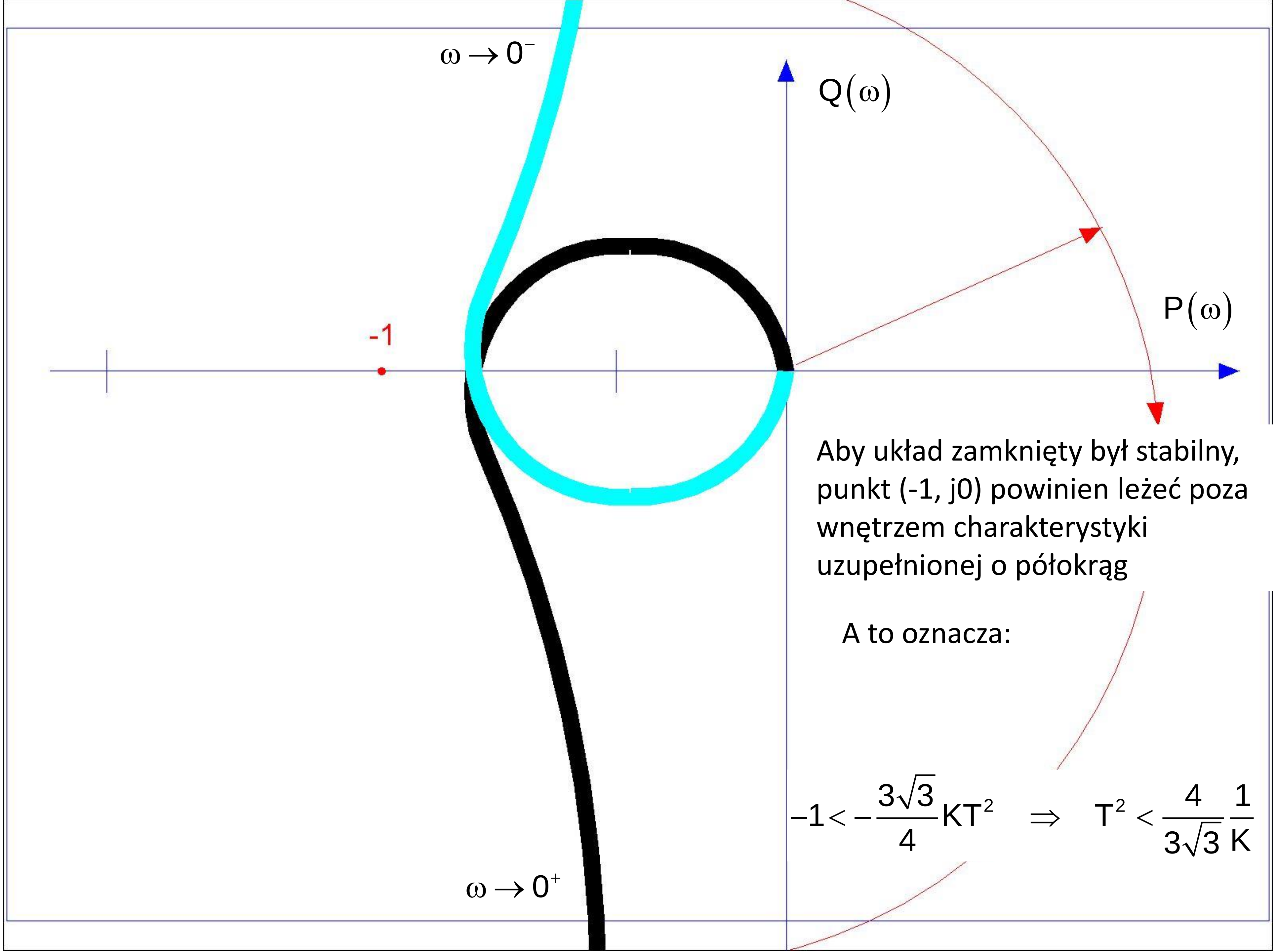
$\omega \to 0^-$
$Q(\omega)$
$P(\omega)$
$\omega \to 0^+$



Przyjmuję, że biegun zerowy zaliczam do **lewej** (stabilnej) półpłaszczyzny. Oznacza to **k=0** pierwiastków niestabilnych oraz uzupełnienie charakterystyki o półokrąg leżący z **prawej** jej strony.



$\omega \to 0^-$
$Q(\omega)$
$P(\omega)$
-1
$\omega \to 0^+$



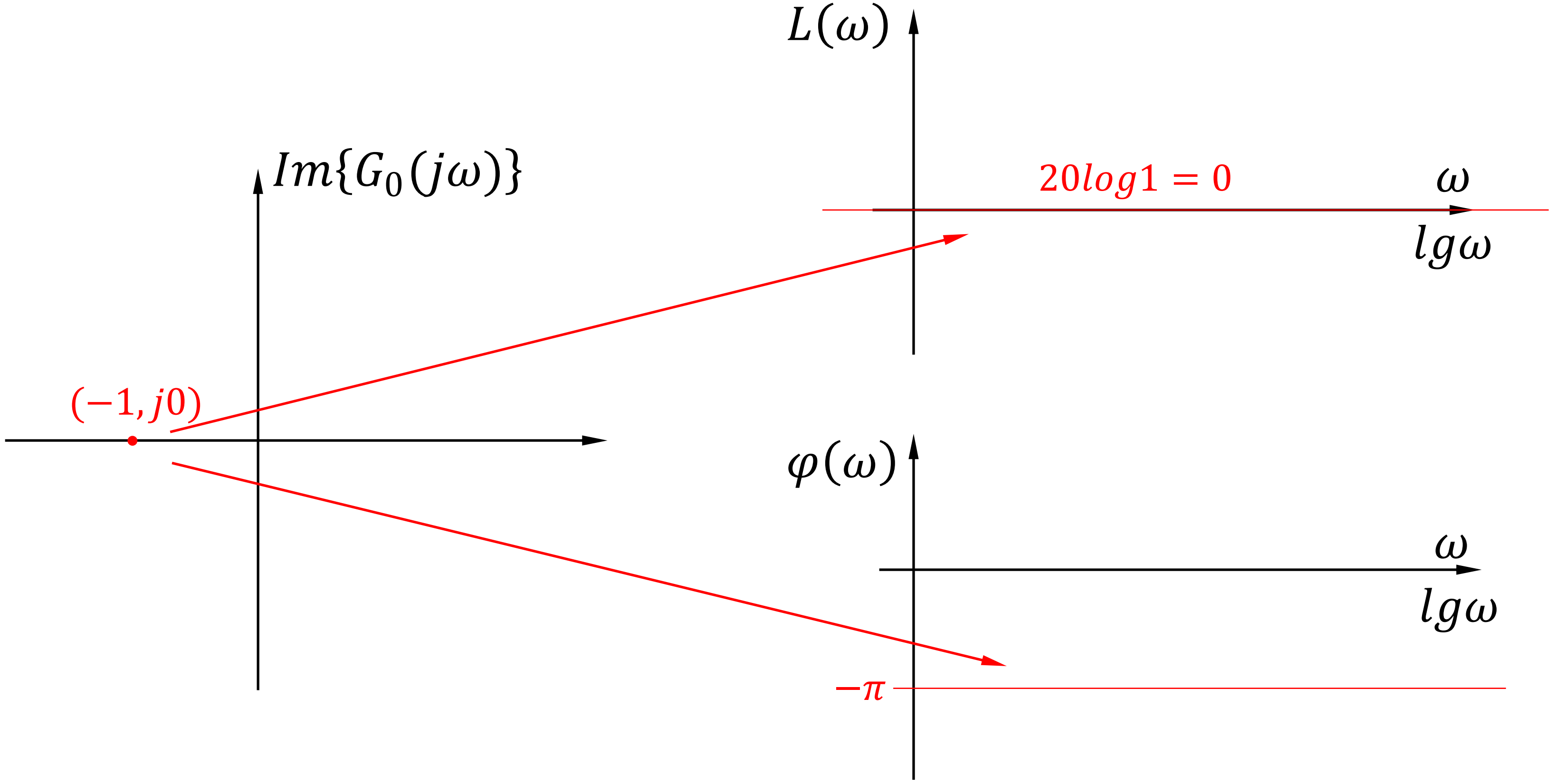
Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć poza wnętrzem charakterystyki uzupełnionej o półokrąg

A to oznacza:

$$-1 < -\frac{3\sqrt{3}}{4}KT^2 \quad \Rightarrow \quad T^2 < \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{1}{K}$$

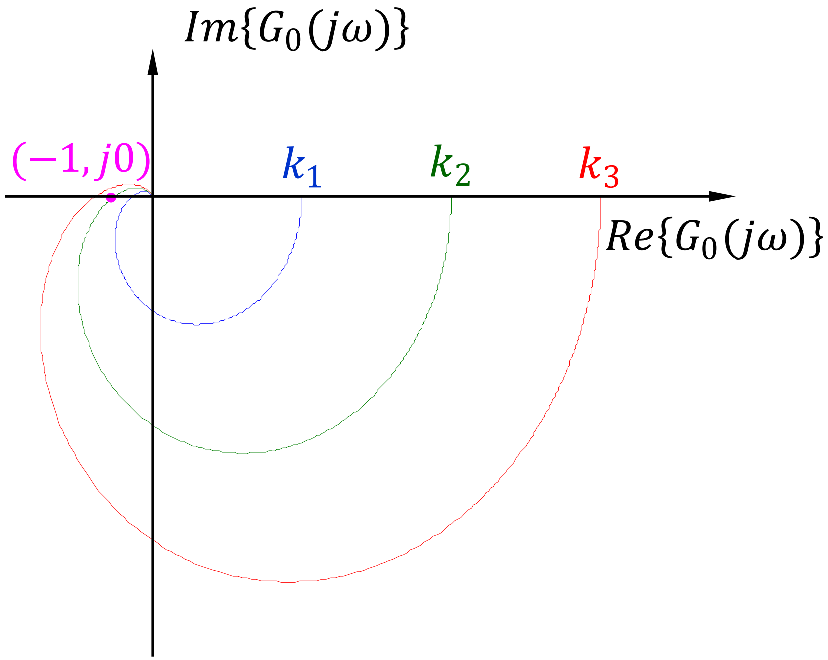
Charakterystyki częstotliwościowe

Kryterium Nyquista

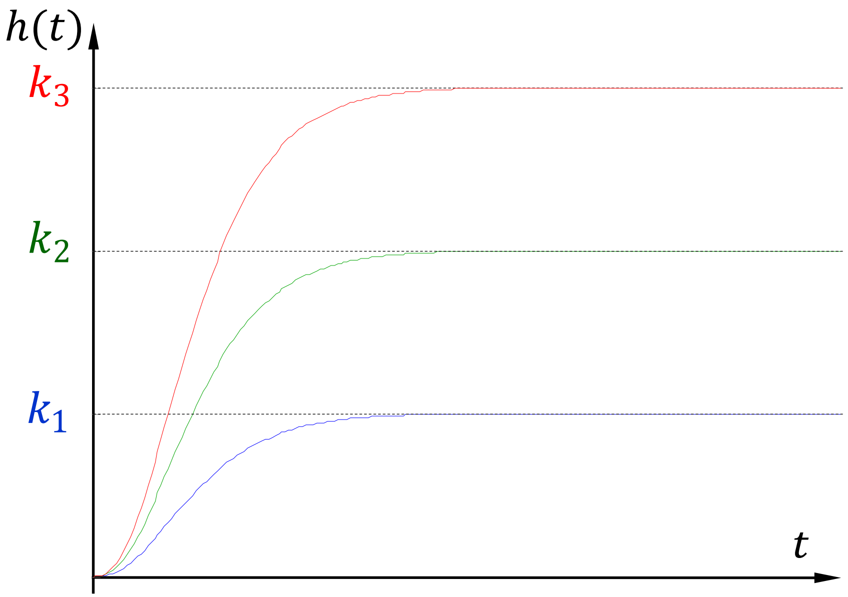


$$-1 + j0 = 1e^{-j\pi} \quad A(\omega) = 1 \quad 20lgA(\omega) = 0 \quad \varphi(\omega) = -\pi$$

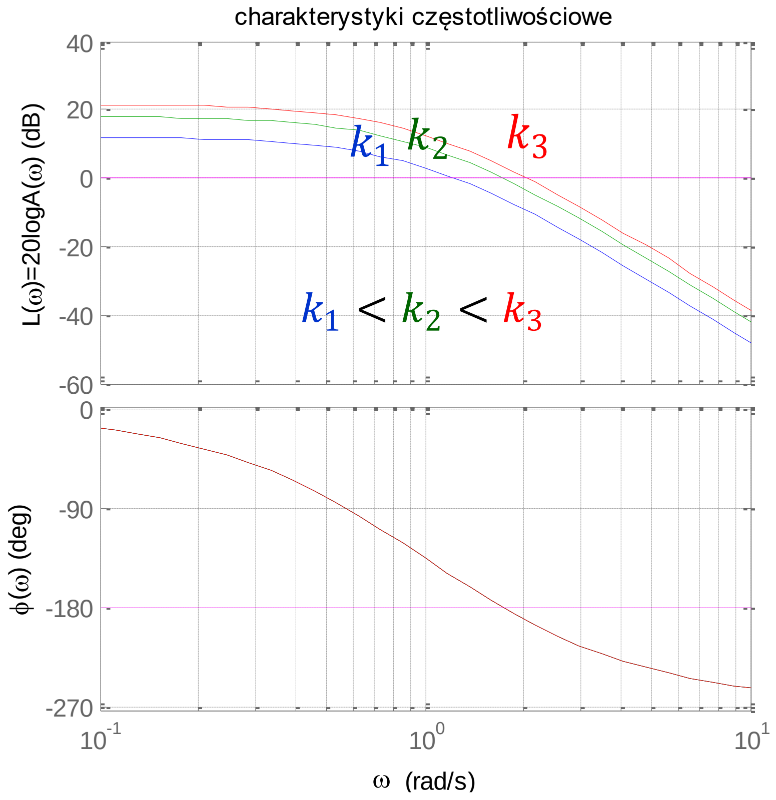
Kryterium Nyquista



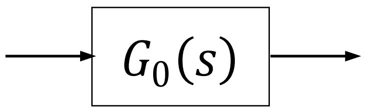
Charakterystyki amplitudowo fazowe stabilnego układu otwartego dla różnych wzmocnień



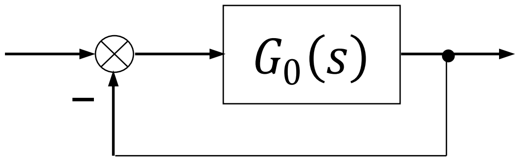
Odpowiedzi jednostkowe stabilnego układu otwartego dla różnych wzmocnień

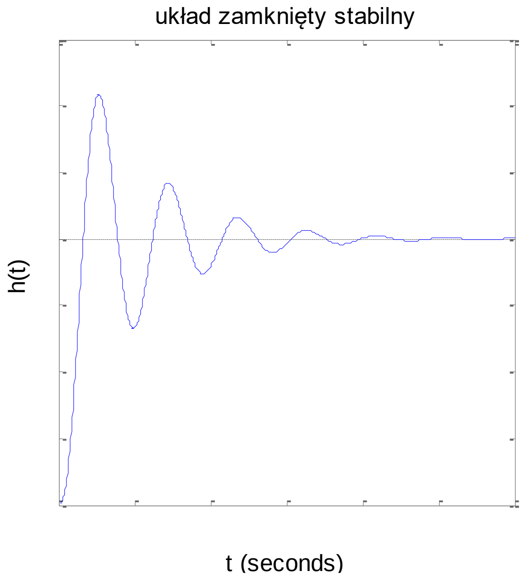


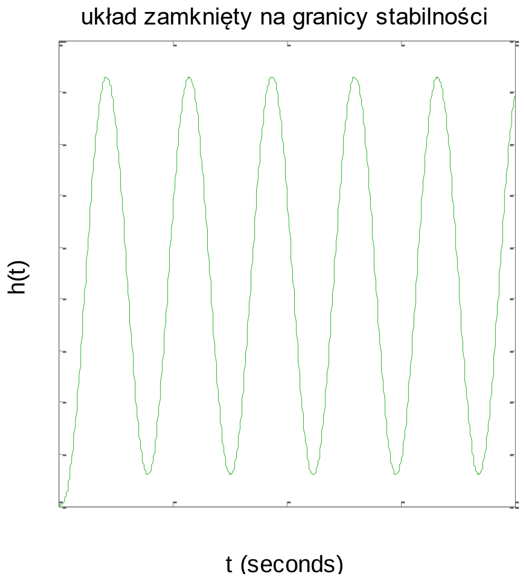
Układ otwarty

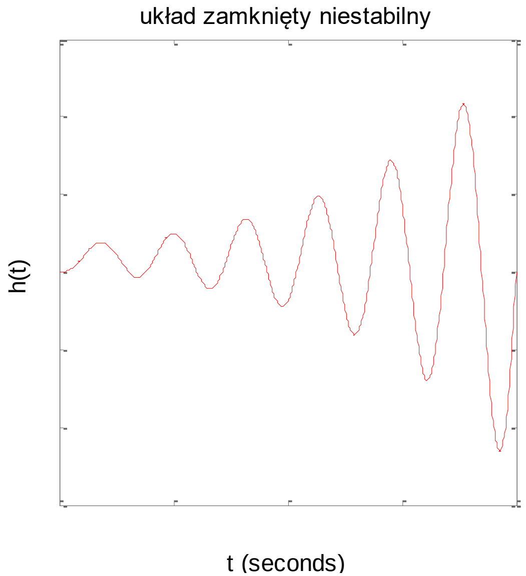


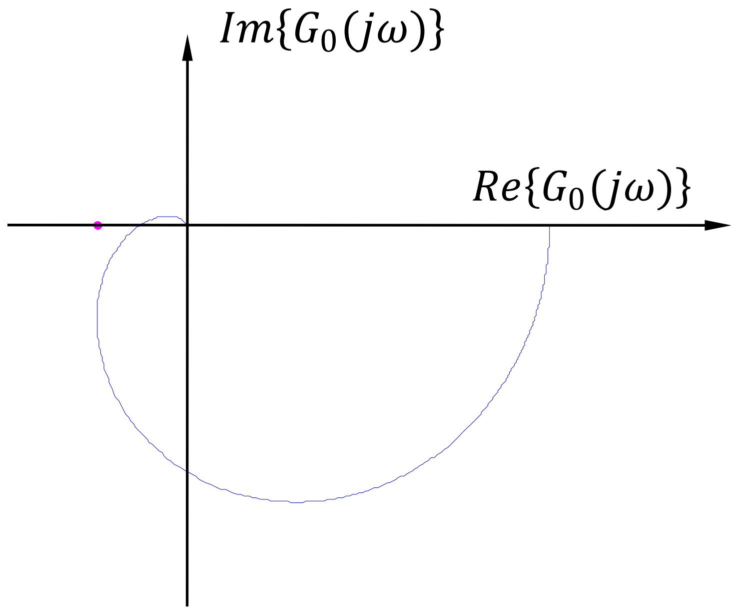
Układ zamknięty

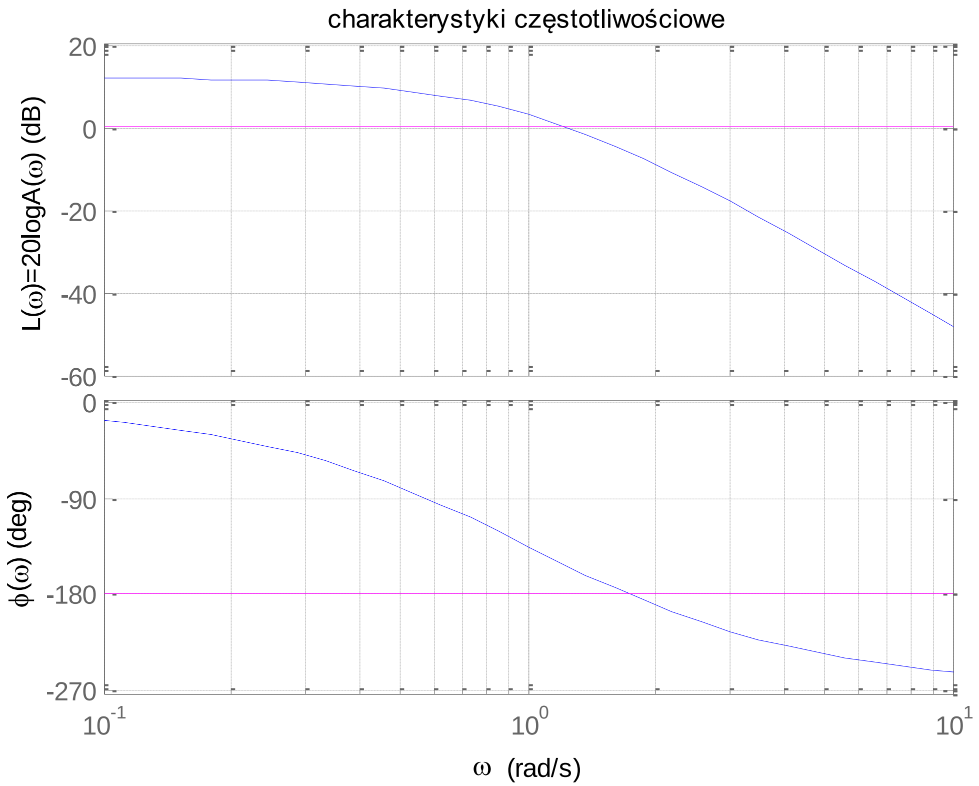


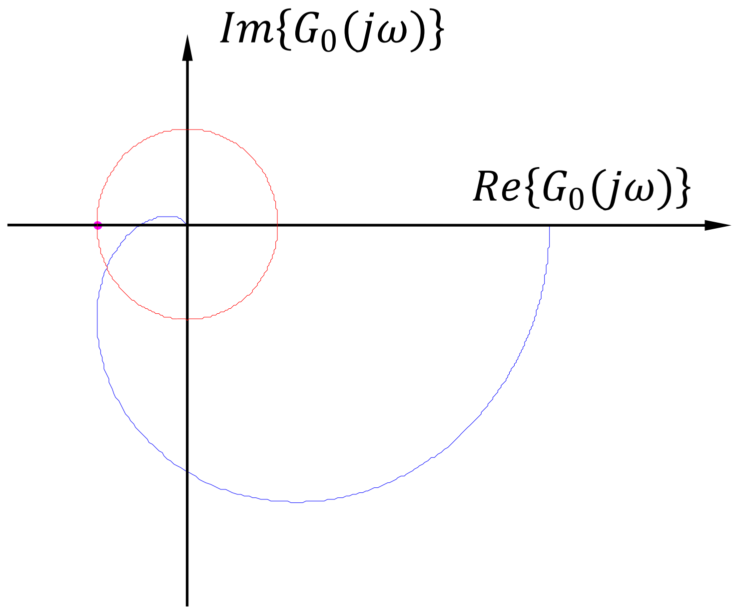




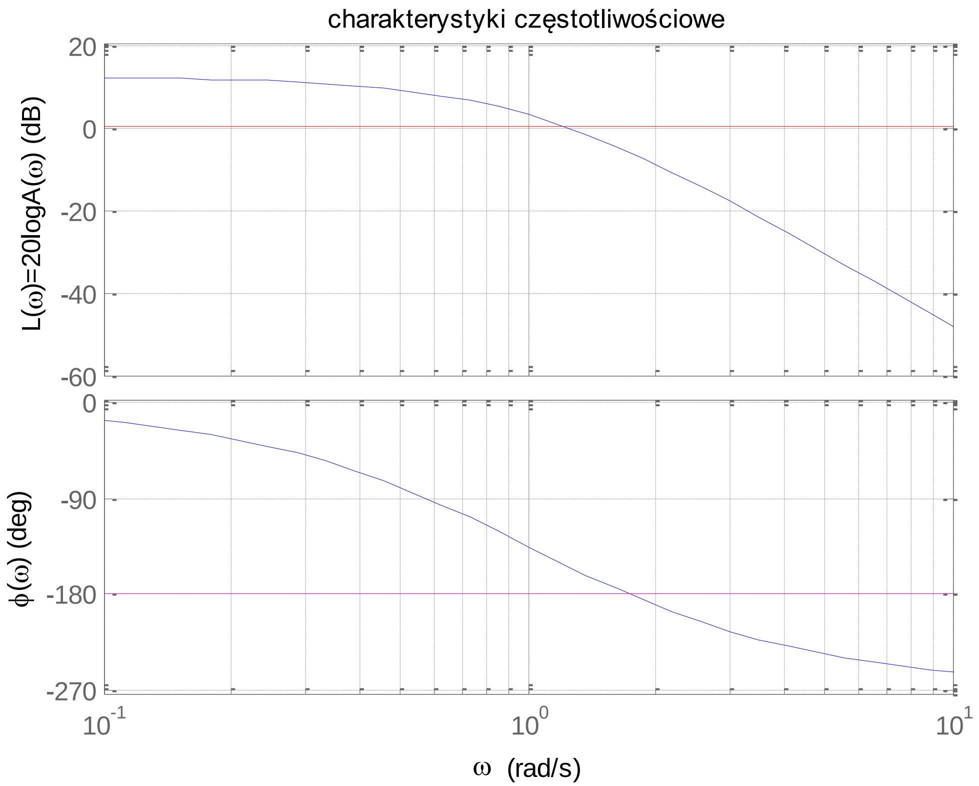



$Im\{G_0(j\omega)\}$
$Re\{G_0(j\omega)\}$


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
20
0
-20
-40
-60
φ(ω) (deg)
0
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
ω (rad/s)

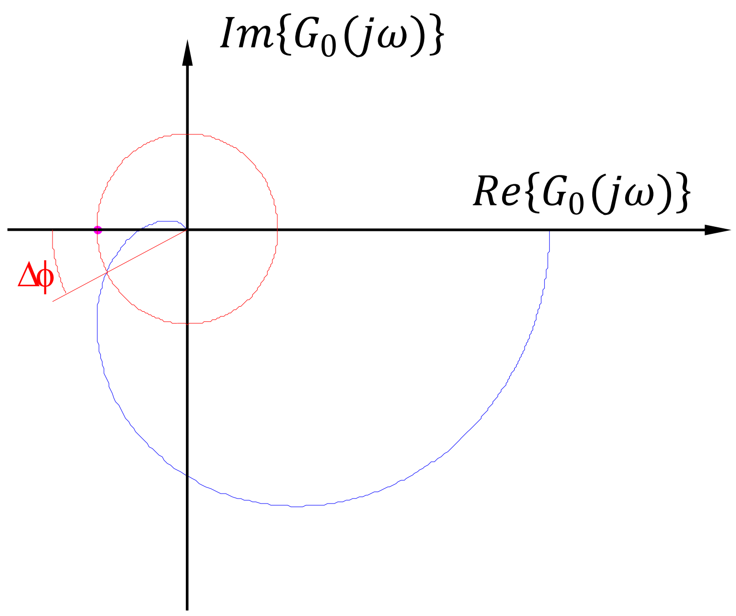


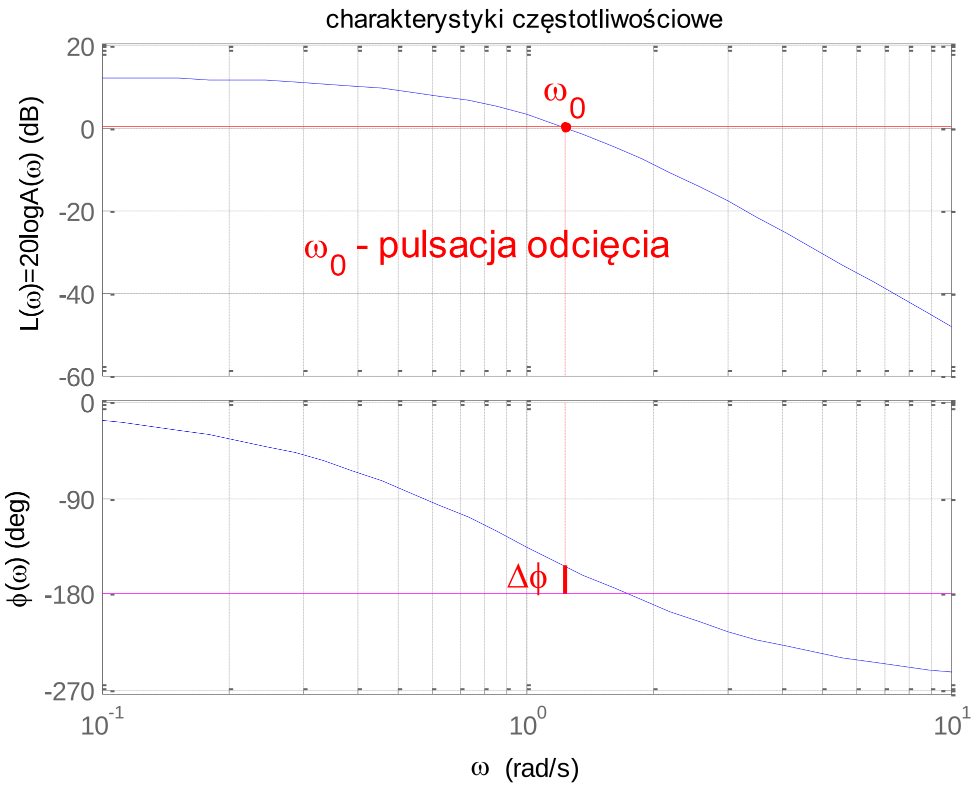
$Im\{G_0(j\omega)\}$
$Re\{G_0(j\omega)\}$



charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
20
0
-20
-40
-60
φ(ω) (deg)
0
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
ω (rad/s)

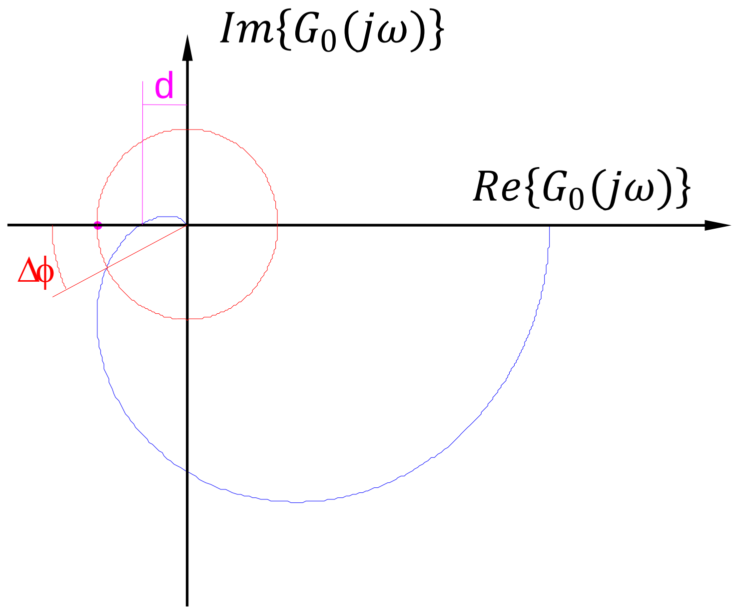
Zapas fazy

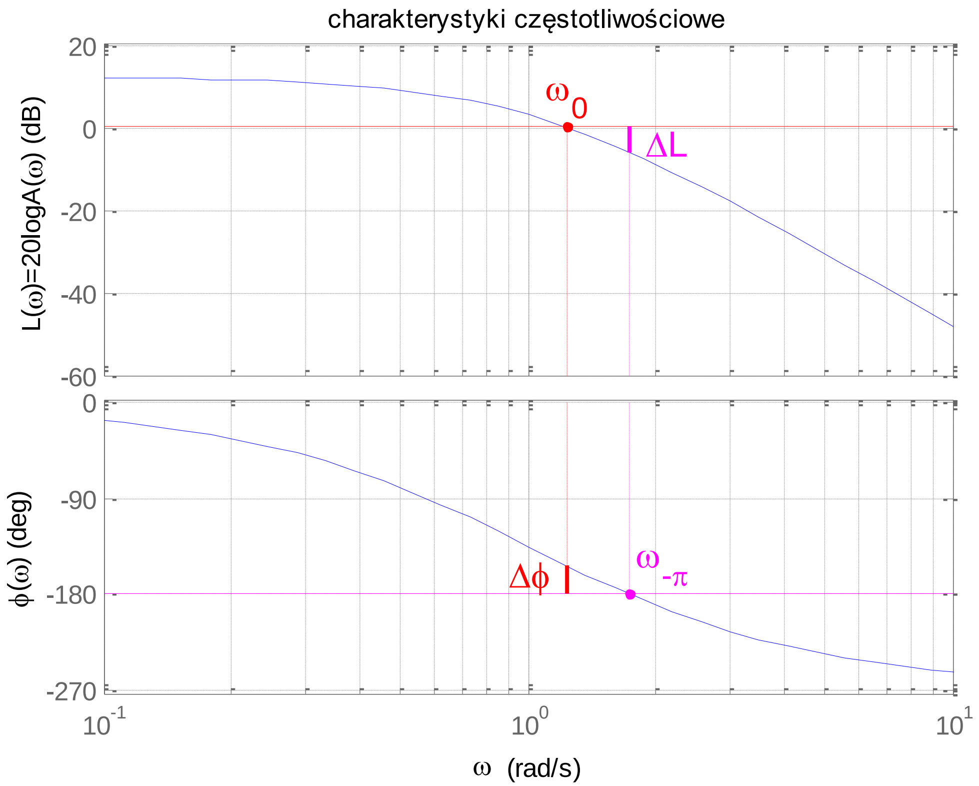




$$\Delta\varphi = \pi + arg\{G_0(j\omega_0)\}$$

Zapas modułu



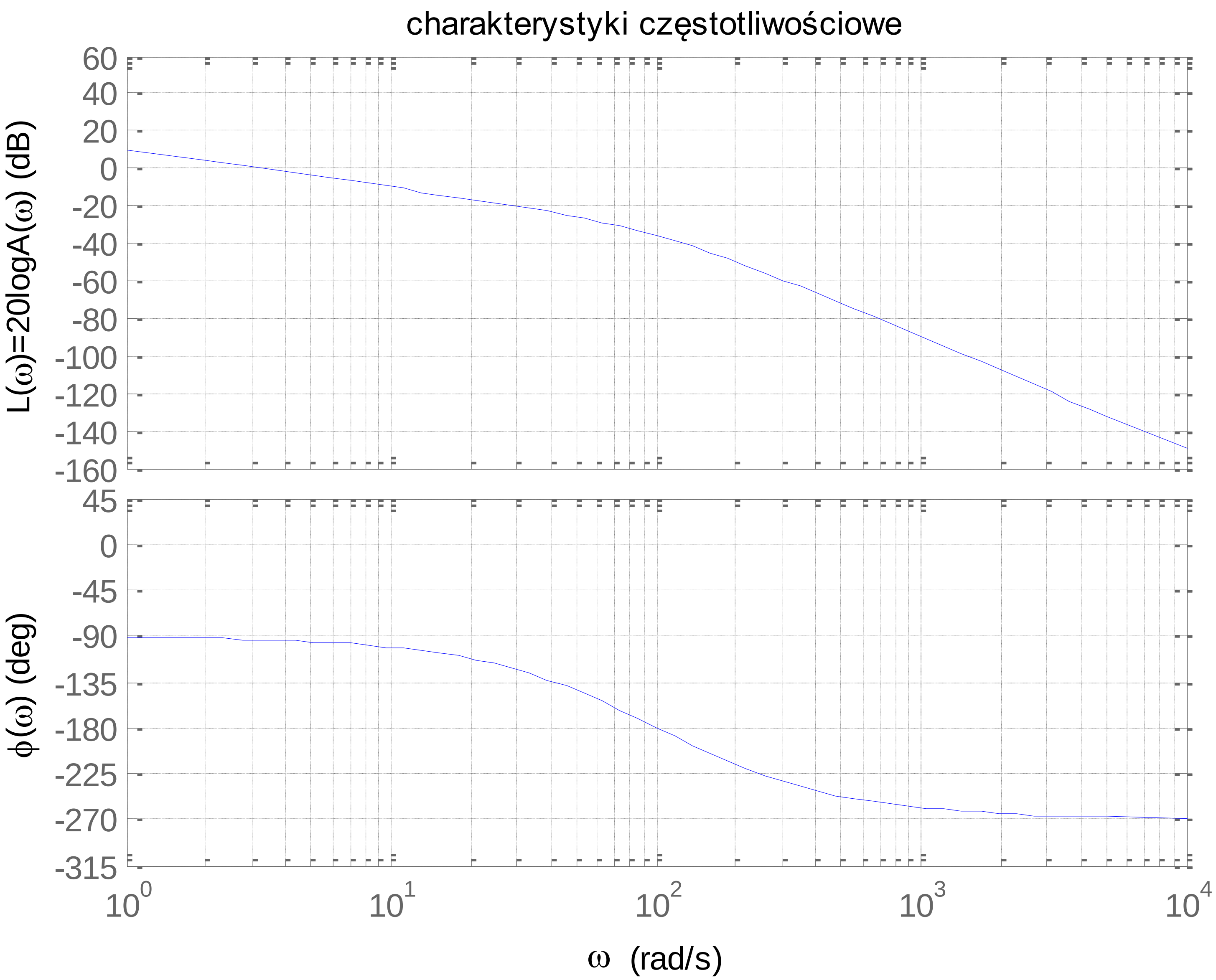


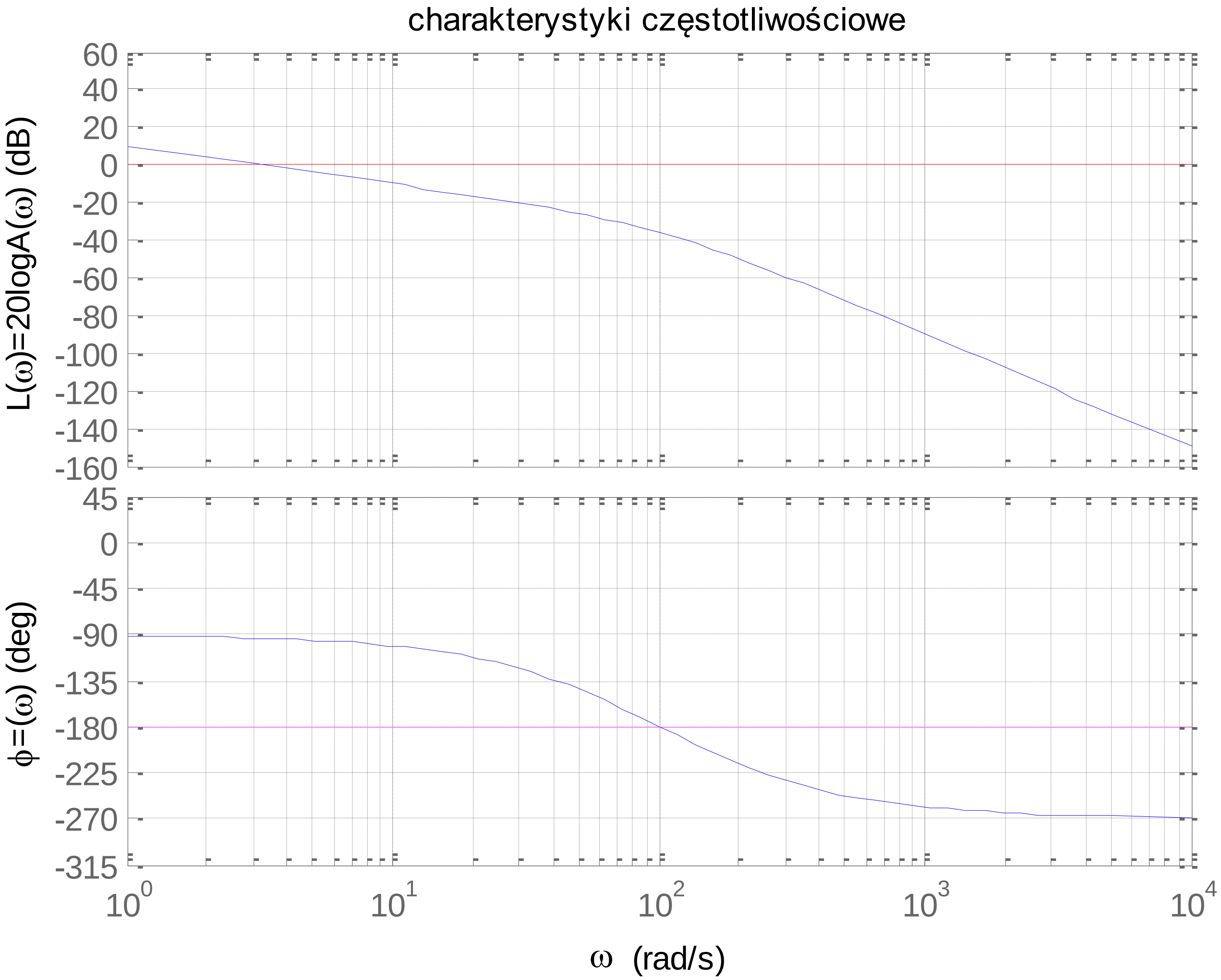
$$\Delta L = 20lg\frac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|} = 20lg\frac{1}{d}$$

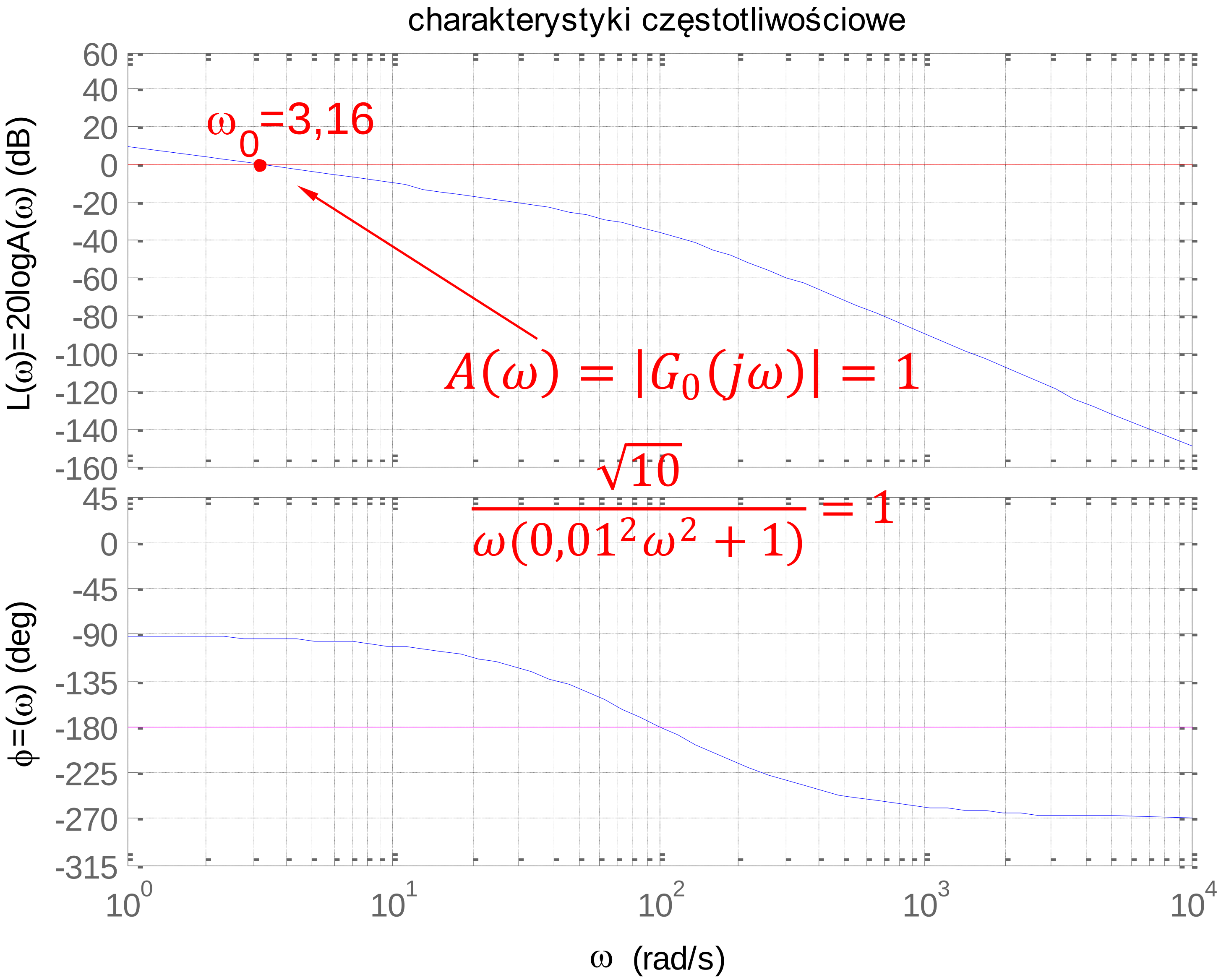
Miary odporności układu

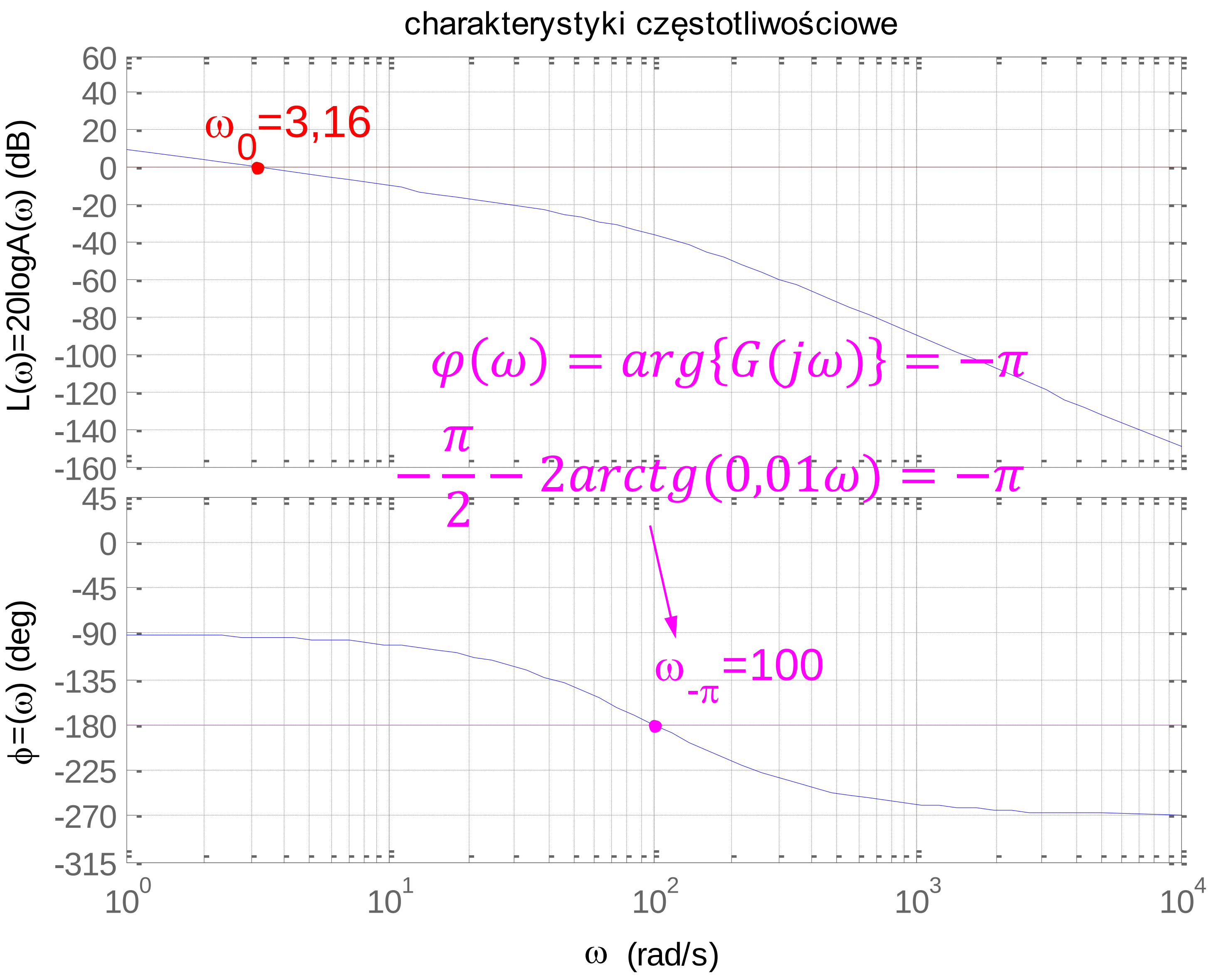
Dany jest układ otwarty o transmitancji operatorowej

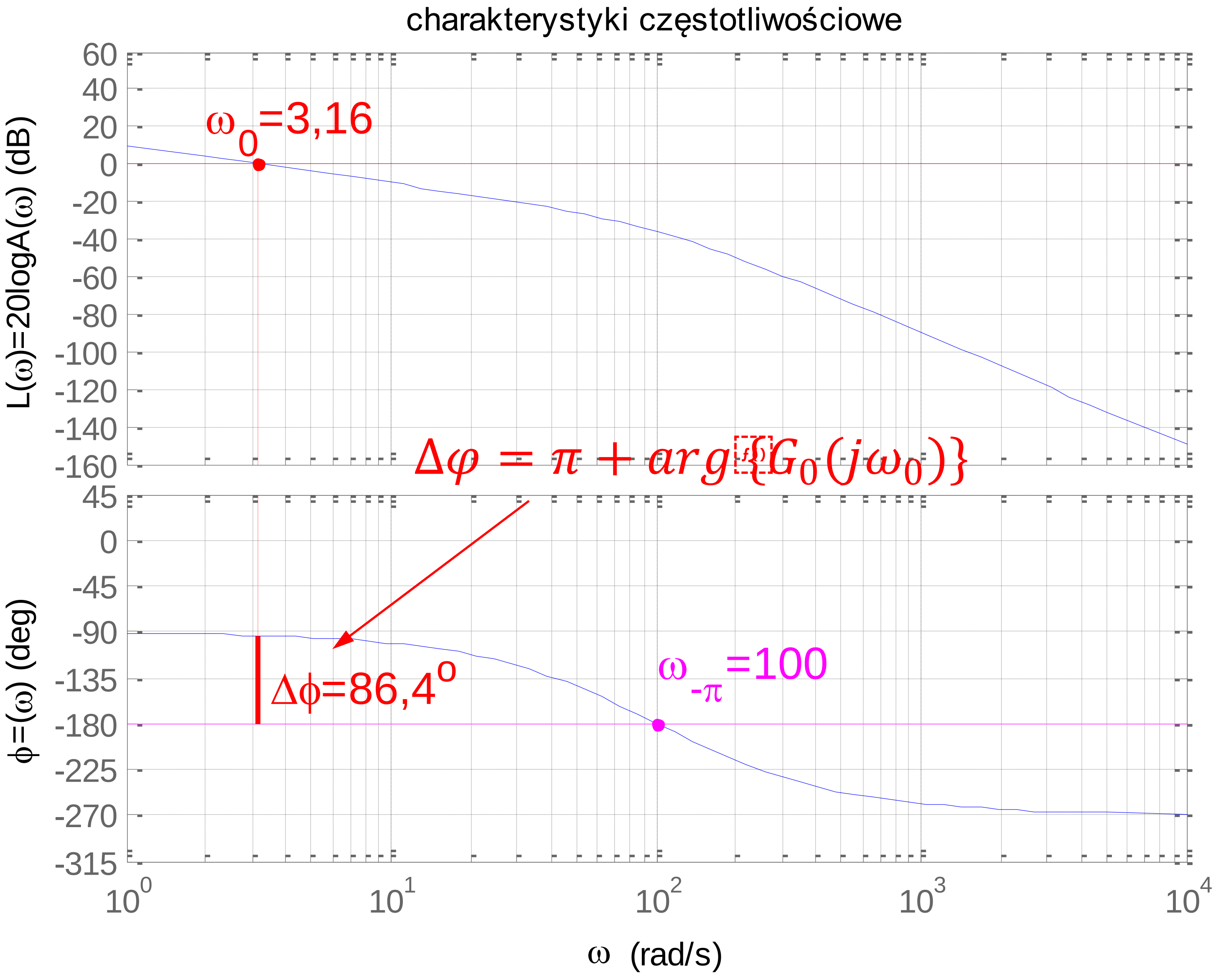
$$G_0(s) = \frac{\sqrt{10}}{s(0{,}01s + 1)^2}$$

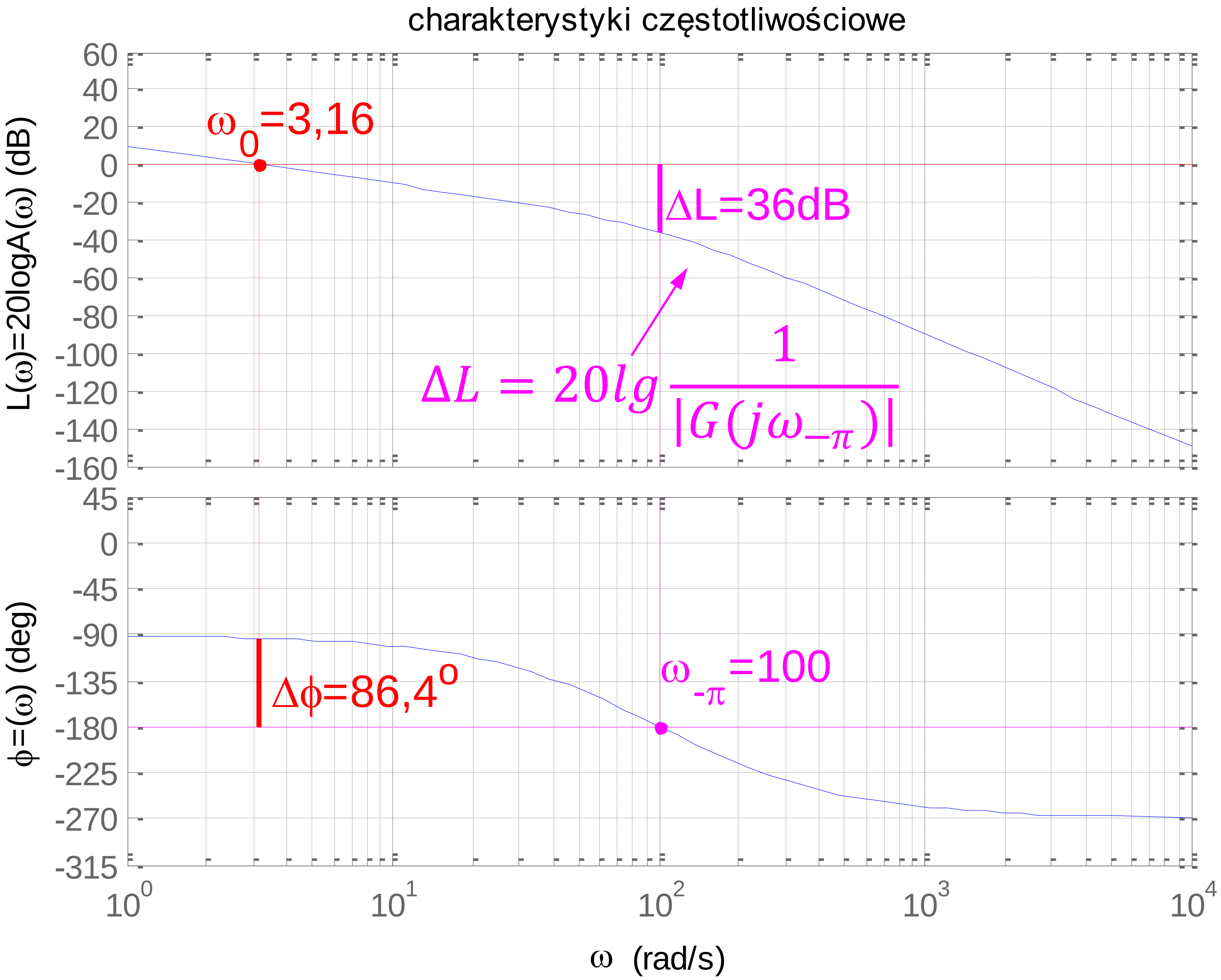

charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
φ(ω) (deg)
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
ω (rad/s)


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
ϕ=(ω) (deg)
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
ω (rad/s)


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
φ=(ω) (deg)
ω (rad/s)
ω0=3,16
$A(\omega) = |G_0(j\omega)| = 1$
$\frac{\sqrt{10}}{\omega(0{,}01^2\omega^2+1)} = 1$


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
ω0=3,16
$\varphi(\omega) = arg\{G(j\omega)\} = -\pi$
$-\frac{\pi}{2} - 2arctg(0{,}01\omega) = -\pi$
ω-π=100
ϕ=(ω) (deg)
ω (rad/s)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
ω0=3,16
Δφ = π + arg{G0(jω0)}
Δϕ=86,4°
ω-π=100
ϕ=(ω) (deg)
ω (rad/s)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4

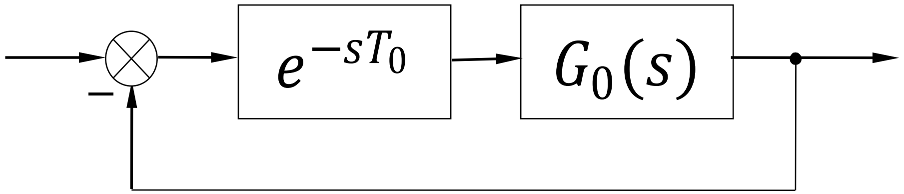


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
φ=(ω) (deg)
ω (rad/s)
ω_0=3,16
ΔL=36dB
$\Delta L = 20lg\frac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|}$
Δφ=86,4°
$\omega_{-\pi}$=100

Odporność układu na opóźnienie

Stawiamy problem:

Jakie opóźnienie w pomiarze uchybu regulacji nie spowoduje utraty stabilności układu zamkniętego?

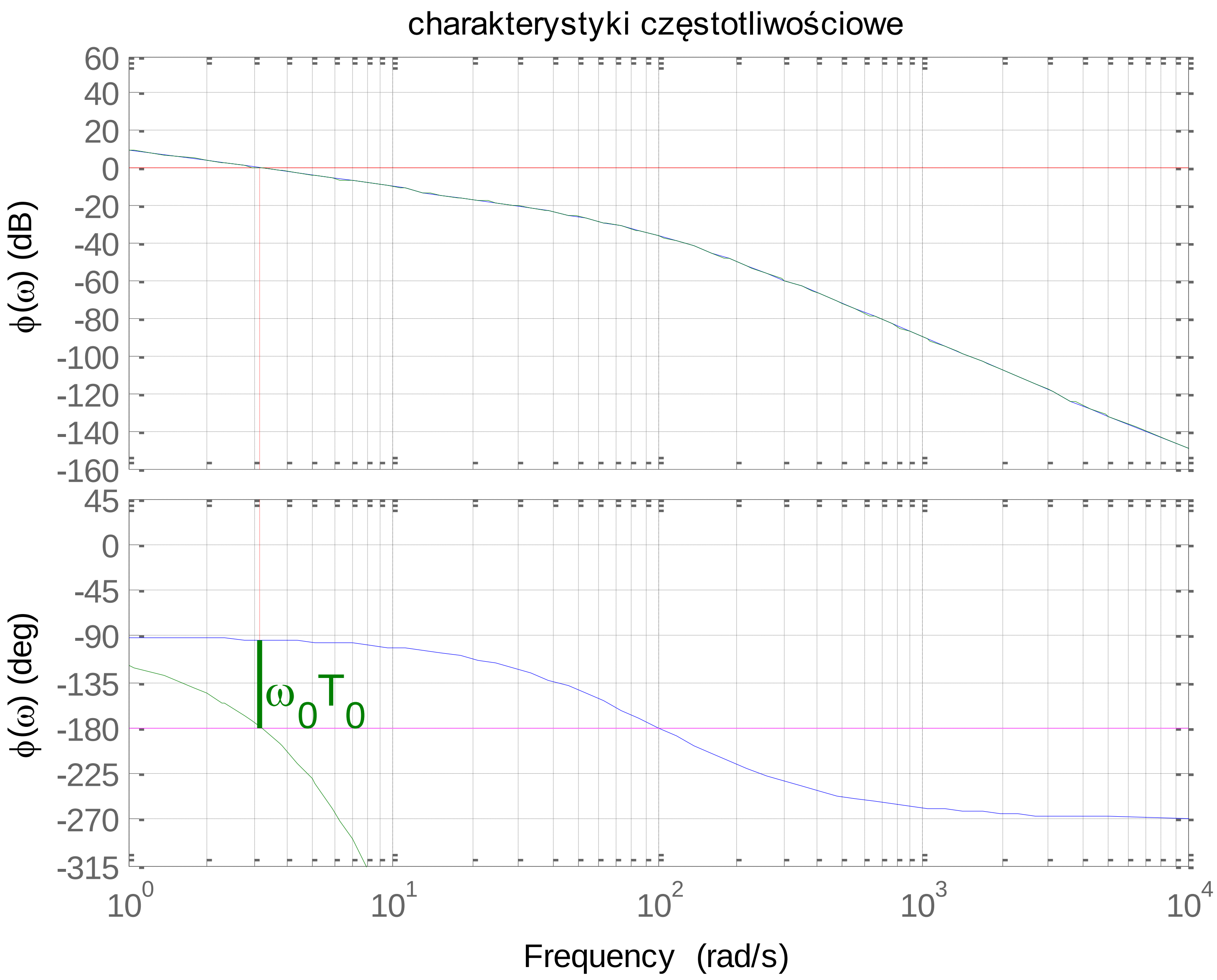


$$e^{-j\omega T_0} = 1 \cdot e^{j[-\omega T_0]}$$

w prezentowanym przykładzie:

$$T_0 < \frac{\Delta\varphi}{\omega_0}\left[\frac{rad}{\frac{rad}{s}} = s\right]$$

$$T_0 < \frac{86{,}4^o \cdot \pi}{180^o \cdot 3{,}16} = 0{,}467s$$

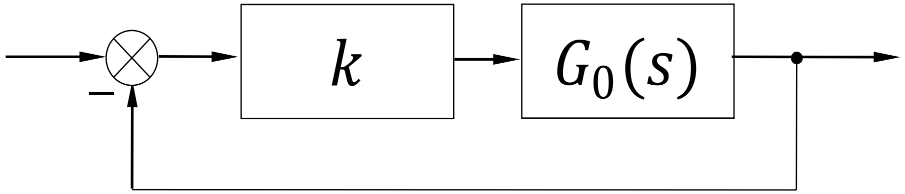


charakterystyki częstotliwościowe
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
φ(ω) (dB)
45
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
-315
φ(ω) (deg)
$\omega_0 T_0$
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/s)

Odporność układu na wzrost wzmocnienia

Stawiamy problem:

Jakie wzmocnienie regulatora proporcjonalnego nie spowoduje utraty stabilności układu zamkniętego?



w prezentowanym przykładzie

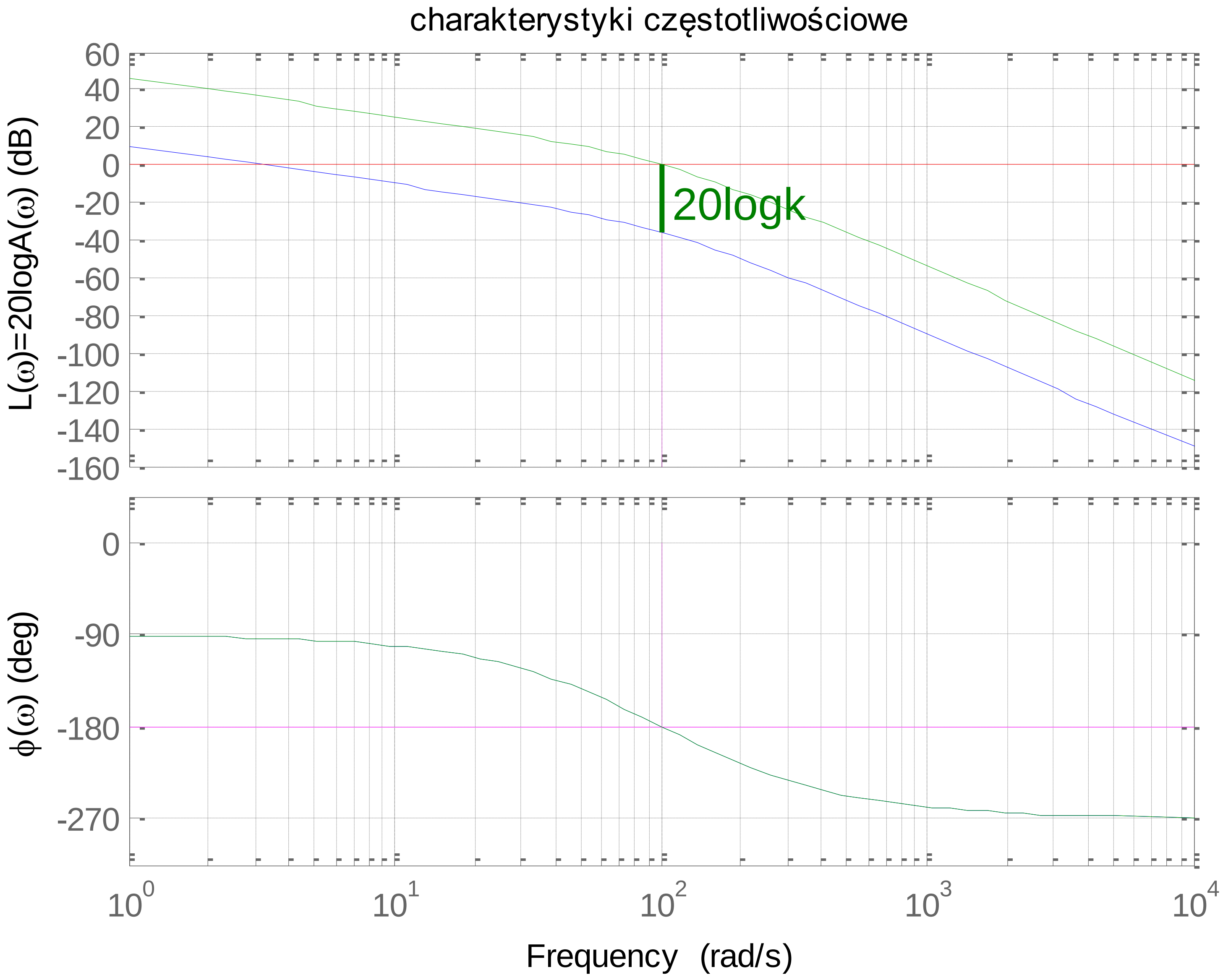
$$k < 10^{\frac{\Delta L}{20}}$$

$$lub$$

$$k < \frac{1}{|G_0(j\omega_{-\pi})|}$$

$$k < 10^{\frac{36}{20}} = 63$$

$$k < \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{100(1+1)}} = 20\sqrt{10}$$


charakterystyki częstotliwościowe
L(ω)=20logA(ω) (dB)
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
20logk
φ(ω) (deg)
0
-90
-180
-270
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
Frequency (rad/s)

Zadanie

Zbadać stabilność układu zamkniętego w funkcji współczynnika K jeśli $G_0(s) = \dfrac{K}{s(1+sT)^2}$ dla T=0,01 [sek]

Wyznaczyć wartość K, dla której układ zamknięty jest stabilny oraz stabilny z zapasem modułu co najmniej 6 dB oraz zapasem fazy co najmniej 30°

$$G_0(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+j\omega T)^2} = \frac{K(-j)(1-j\omega T)^2}{\omega(1+\omega^2T^2)^2} = \frac{-K}{\omega(1+\omega^2T^2)^2}\left\{j\left[(1-\omega^2T^2) - j2\omega T\right]\right\} =$$

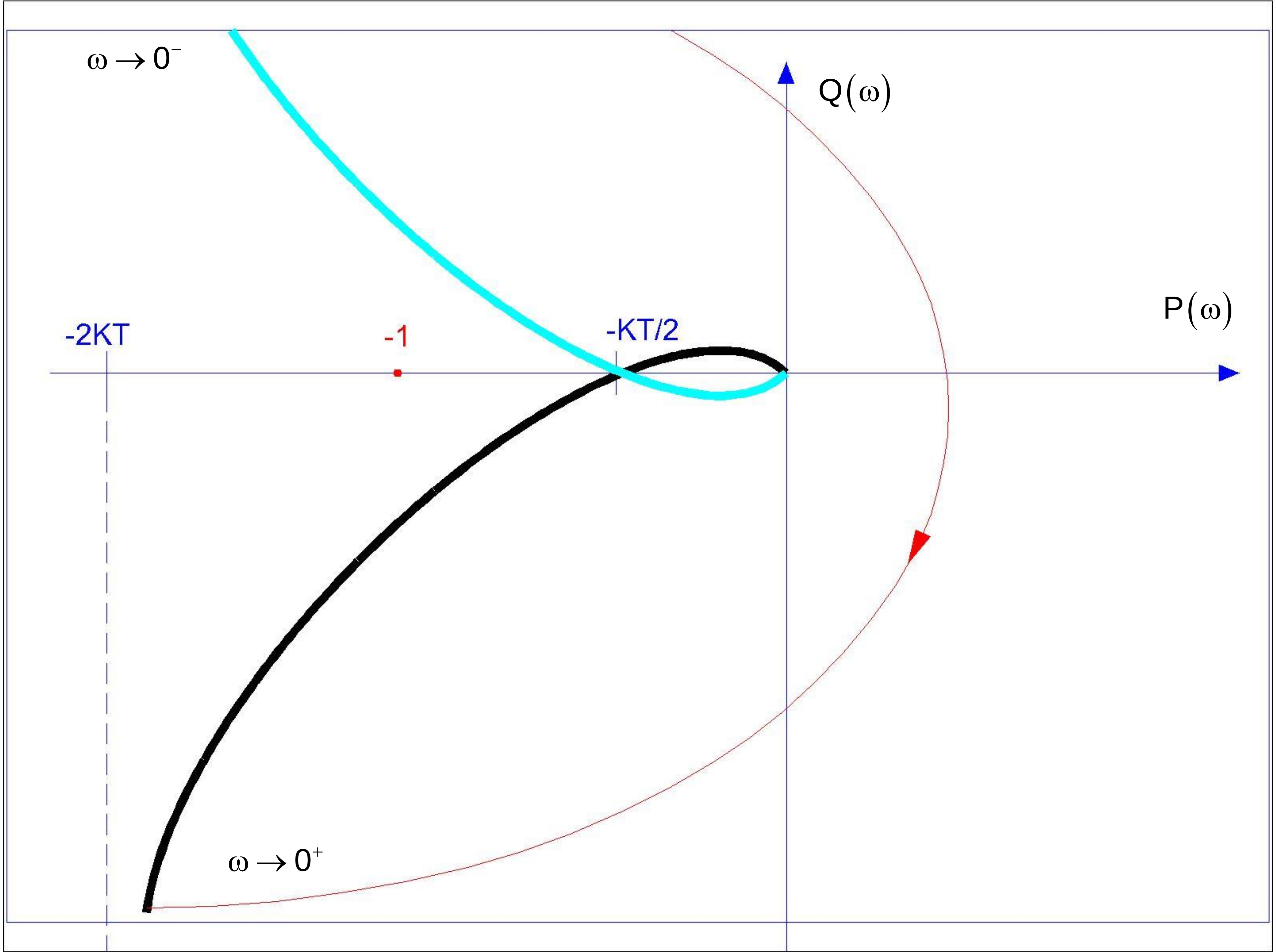
$$= \frac{-K}{\omega(1+\omega^2T^2)^2}\left[2\omega T + j(1-\omega^2T^2)\right]$$

$$P(\omega) = \frac{-K2\omega T}{\omega(1+\omega^2T^2)^2} = \frac{-K2T}{(1+\omega^2T^2)^2} \qquad Q(\omega) = \frac{-K(1-\omega^2T^2)}{\omega(1+\omega^2T^2)^2}$$

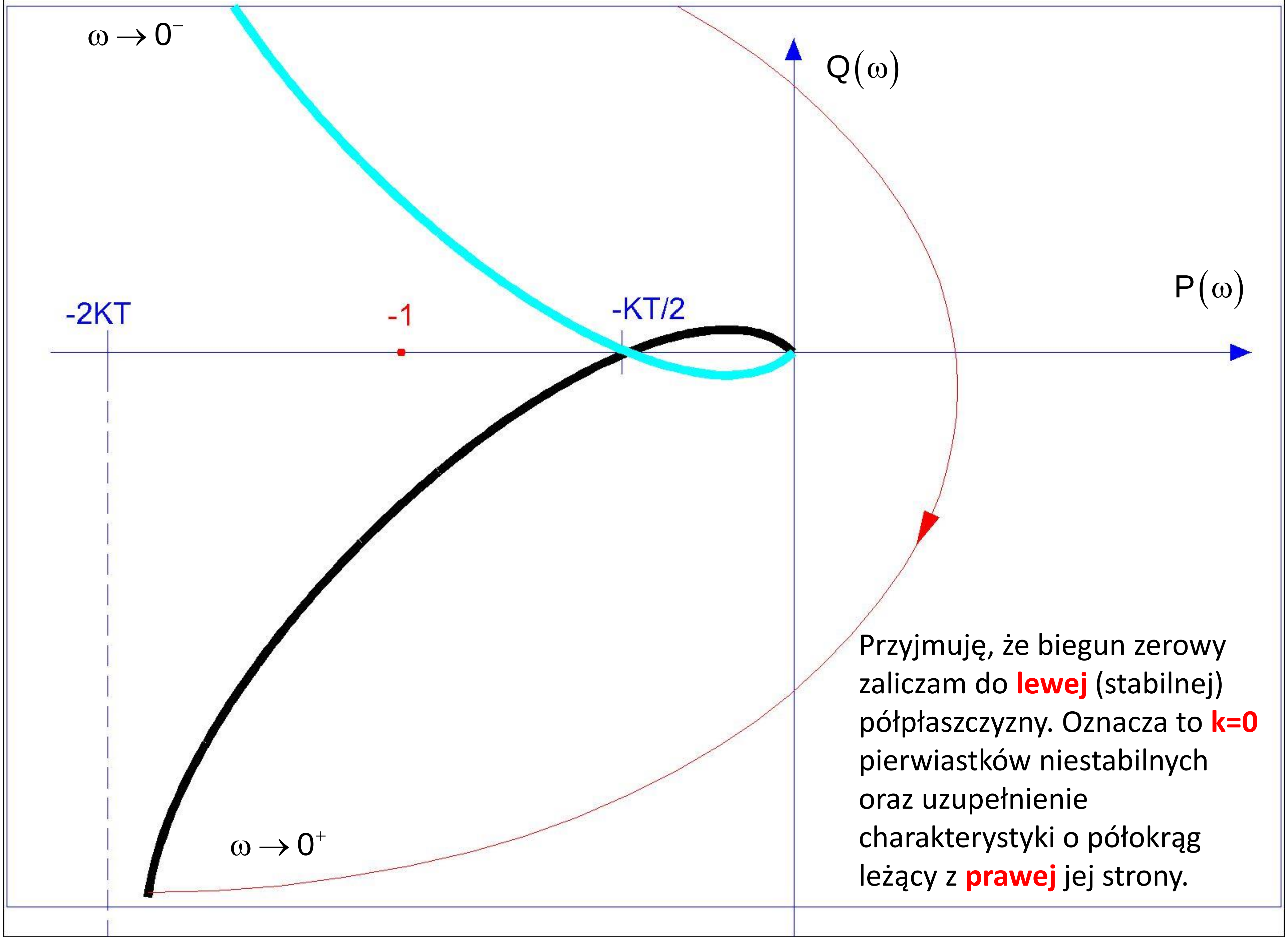
$$A(\omega) = \frac{K}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$

$\omega =$	0^+	$\frac{1}{T}$	$\nearrow$	∞
$P(\omega) =$	$-2KT$	$-\frac{KT}{2}$	<0	0
$Q(\omega) =$	$-\infty$	0	>0	0

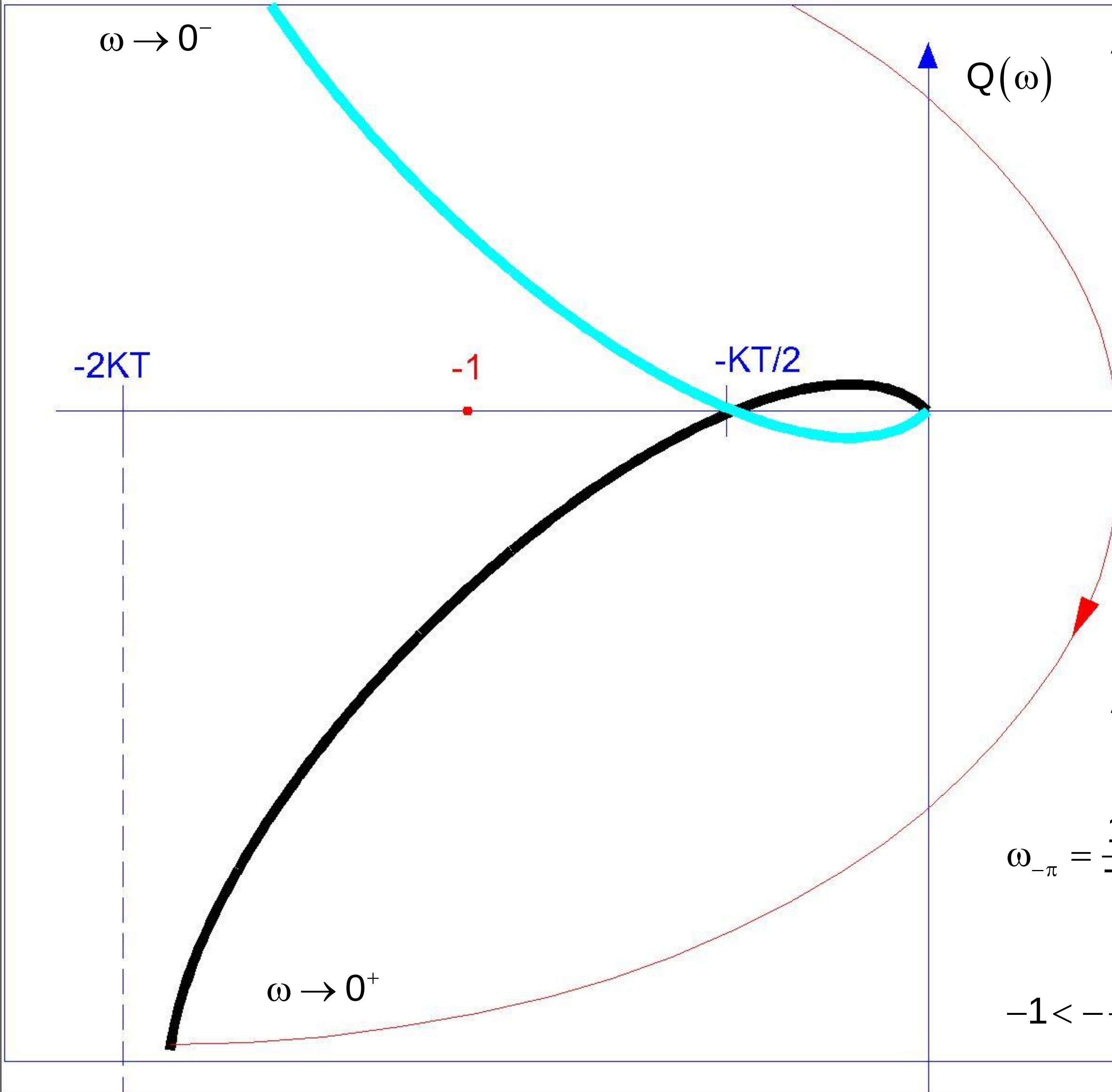
$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{(1-\omega^2T^2)}{2\omega T}\Bigg|_{\text{III ćw}}$$



ω → 0⁻
Q(ω)
P(ω)
-2KT
-1
-KT/2
ω → 0⁺



Przyjmuję, że biegun zerowy zaliczam do **lewej** (stabilnej) półpłaszczyzny. Oznacza to **k=0** pierwiastków niestabilnych oraz uzupełnienie charakterystyki o półokrąg leżący z **prawej** jej strony.



Aby układ zamknięty był stabilny, punkt (-1, j0) powinien leżeć poza wnętrzem ch-tyki uzupełnionej o półokrąg

A to oznacza, że dla:

$$\omega_{-\pi} = \frac{1}{T} = 100$$

$$-1 < -\frac{KT}{2} \quad \Rightarrow \quad K < \frac{2}{T} = 200$$

Zapas modułu: $\begin{cases} \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi \\ 20\lg\dfrac{1}{A(\omega_{-\pi})} > 6\text{dB} \end{cases}$ lub: $\begin{cases} Q(\omega_{-\pi}) = 0 \\ 20\lg\dfrac{1}{|P(\omega_{-\pi})|} > 20 \cdot 0{,}3 = 20\lg 2 \end{cases}$

albo: $\begin{cases} Q(\omega_{-\pi}) = 0 \\ -20\lg|P(\omega_{-\pi})| > -20\lg\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

czyli:

$$Q(\omega_{-\pi}) = \frac{-K\left(1-\omega_{-\pi}{}^{2}T^{2}\right)}{\omega_{-\pi}\left(1+\omega_{-\pi}{}^{2}T^{2}\right)^{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{-\pi} = \frac{1}{T}$$

$$|P(\omega_{-\pi})| = \left|\frac{-K2T}{\left(1+\frac{1}{T^{2}}T^{2}\right)^{2}}\right| = \frac{KT}{2} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad K < \frac{1}{T} = 100$$

Zapas fazy: $\begin{cases} A(\omega_0) = 1 \\ \varphi(\omega_0) = \mathrm{arctg}\dfrac{\left(1-\omega_0^2T^2\right)}{2\omega_0 T} \ge 30^o \end{cases}$ lub: $\begin{cases} A(\omega_0) = 1 \\ \dfrac{\left(1-\omega_0^2T^2\right)}{2\omega_0 T} \ge \mathrm{tg}\left(30^o\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

czyli: $\dfrac{K}{\omega_0\left(1+\omega_0^2T^2\right)} = 1$ $\qquad \omega_0\left(1+\omega_0^2T^2\right) - K = 0$

$$\omega_0^2T^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_0 T - 1 \le 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}T\right)^2 + 4T^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}T\right)^2$$

$$\frac{\left(1-\omega_0^2T^2\right)}{2\omega_0 T} \ge \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \omega_0^2T^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\omega_0 T - 1 \le 0$$

$$\omega_{01,2} = \frac{1}{2T^2}\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}T \pm \frac{4}{\sqrt{3}}T\right] = \begin{cases} -\dfrac{3}{\sqrt{3}T} \\ +\dfrac{1}{\sqrt{3}T} \end{cases}$$

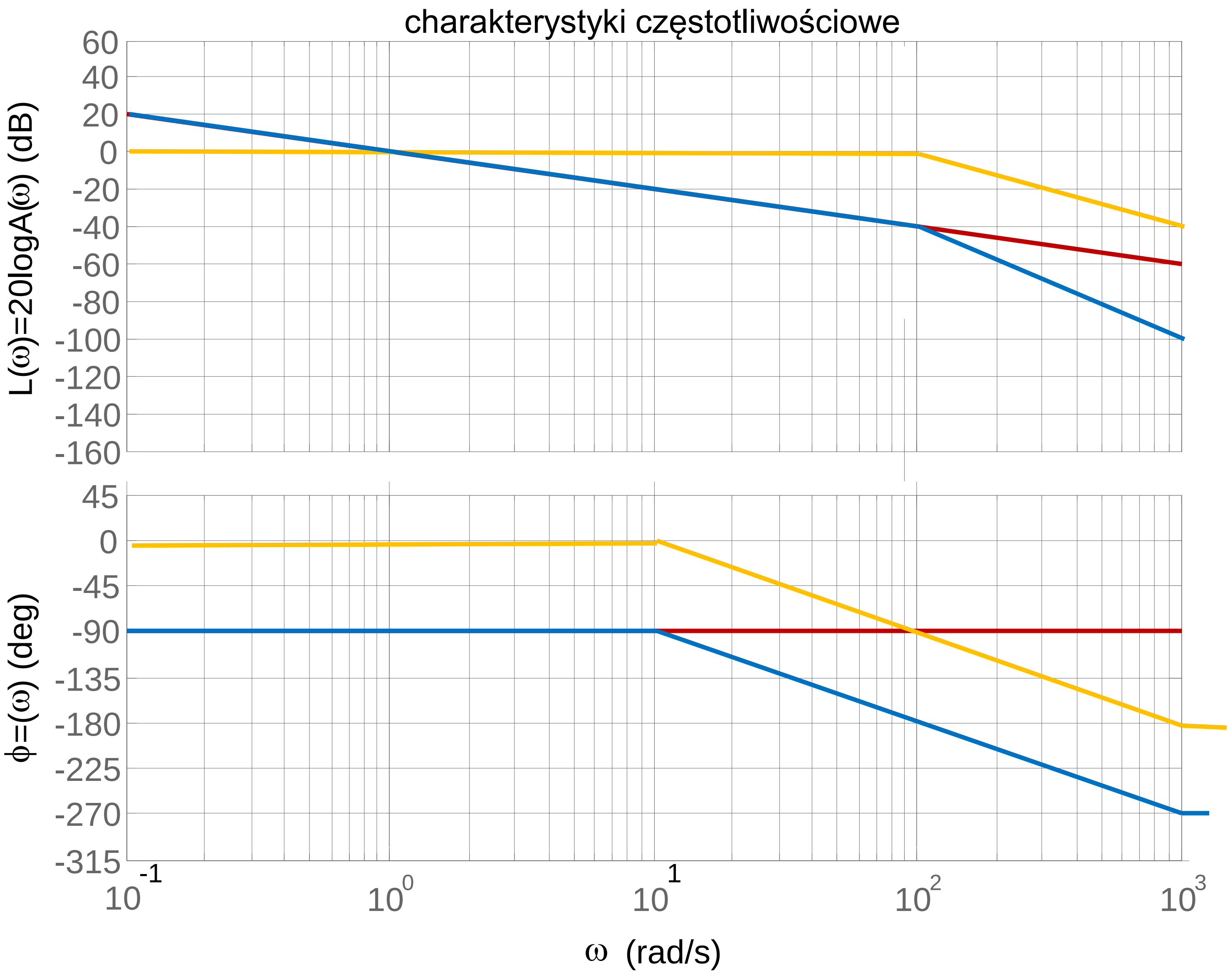
czyli dla dodatnich wartości pulsacji:

$$\omega_0 \in \left\langle -\frac{3}{\sqrt{3}T}; \quad +\frac{1}{\sqrt{3}T} \right\rangle$$

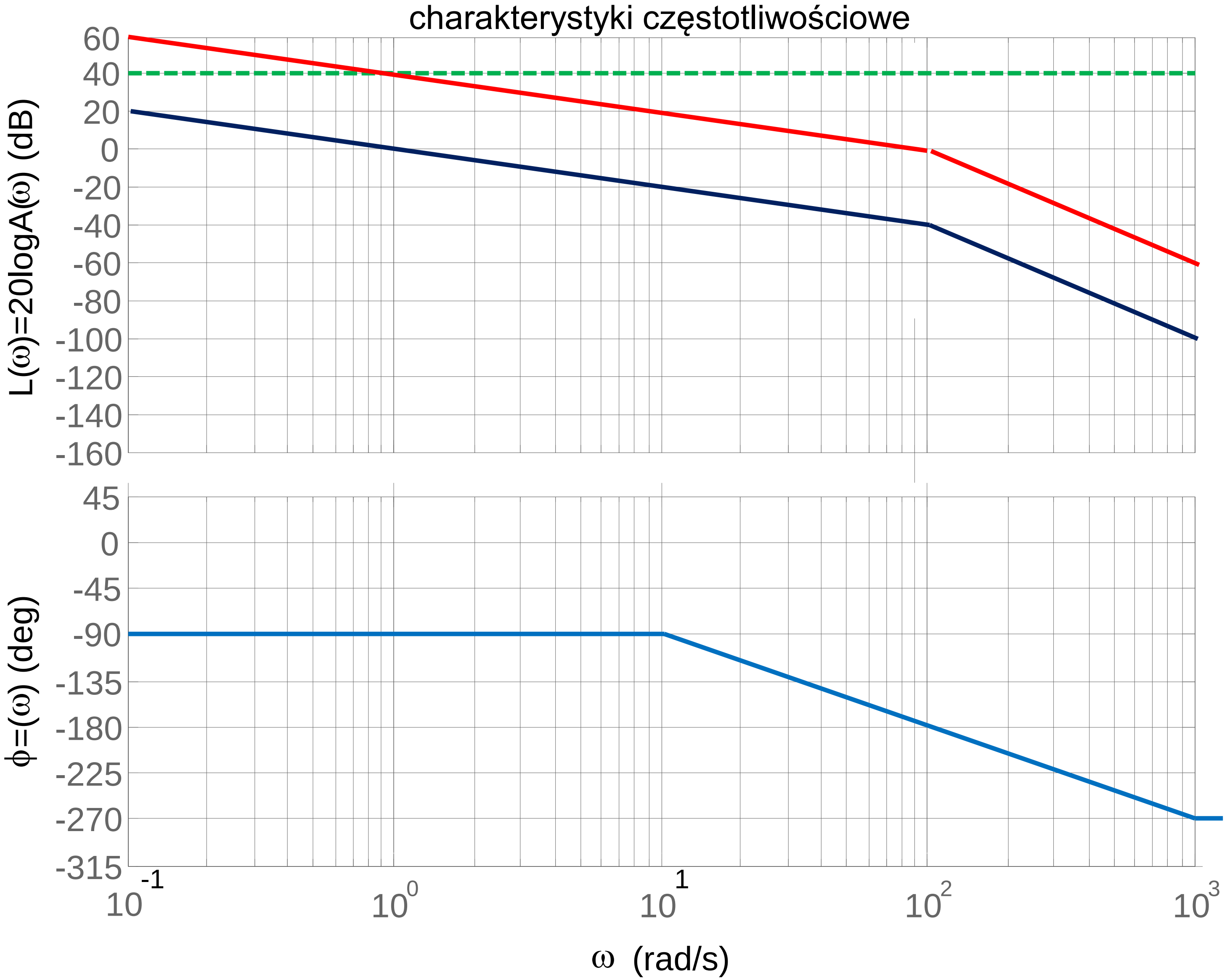
$$\omega_0 \le \frac{1}{\sqrt{3}T} = \omega_{gr}$$

$$K = \omega_0\left(1+\omega_0^2T^2\right) \le \omega_{gr}\left(1+\omega_{gr}^2T^2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}T}\left(1+\frac{1}{3T^2}T^2\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}T} \approx 77$$

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+sT)^2} = K \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+0{,}01s)^2}$$



$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+sT)^2} = K \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+sT)^2}$$



$$20\lg(K) = 40\,[\mathrm{dB}]$$
$$\Downarrow$$
$$\lg(K) = 2$$
$$\Downarrow$$
$$K = 100 \quad \neq \quad 200$$

$$20\lg(K) = 46\,[\mathrm{dB}]$$
$$\Downarrow$$
$$\lg(K) = 2 + 0{,}3$$
$$\Downarrow$$
$$K = 10^2 \cdot 10^{0{,}3} \approx 100 \cdot 2 \quad = \quad 200$$