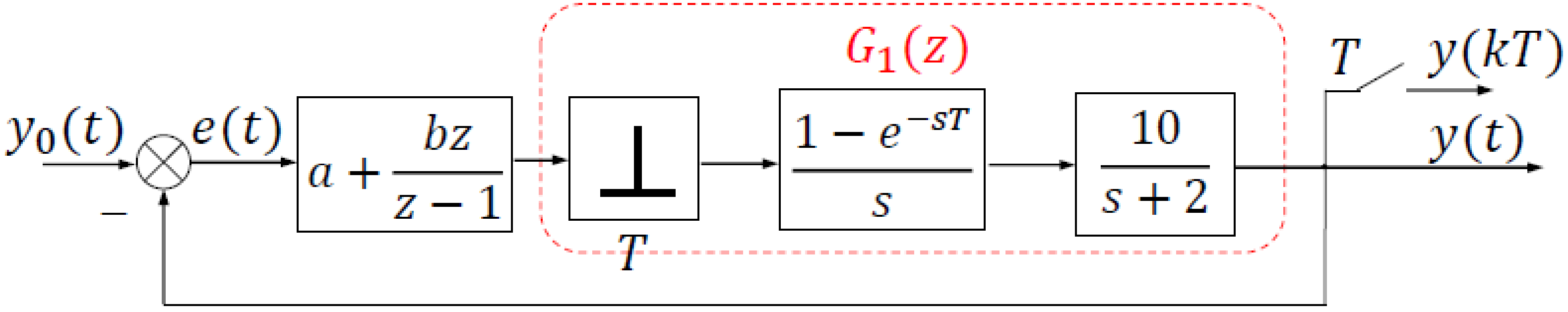
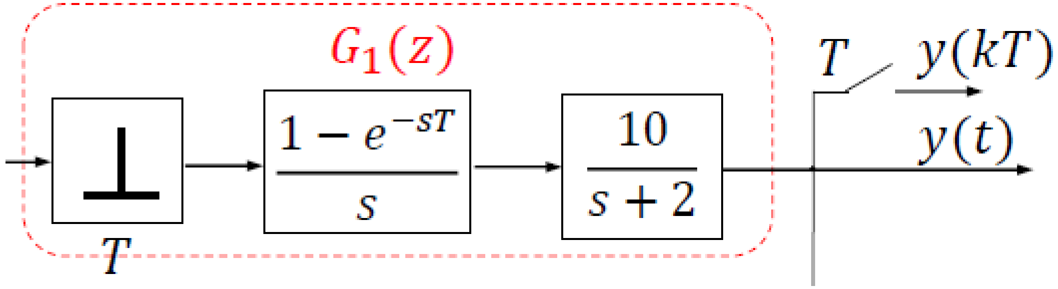
Zadanie.
Dany jest układ jak na rysunku



Przyjmij okres impulsowania taki, że $e^{-2T} = 0.8$

Oblicz transmitancję dyskretną $G_1(z)$.
Oblicz transmitancję dyskretną układu otwartego.
Zapisz równanie różnicowe układu otwartego.
Wyznacz transmitancję dyskretną układu zamkniętego.
Na płaszczyźnie parametrów (a,b) narysuj obszar stabilności dla b>0.
Określ rząd astatyzmu układu.
Czy istnieją takie wartości a i b, dla których wystąpią dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania? Jeśli tak, to po ilu i dla jakich a, b?

Transmitancja dyskretna $G_1(z)$



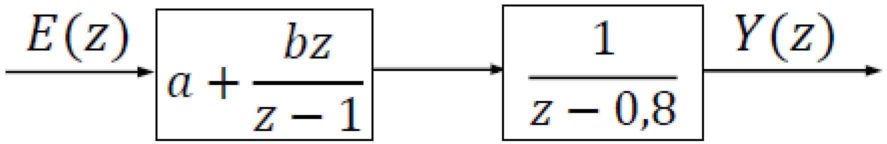
Przyjmij okres impulsowania taki, że $e^{-2T} = 0.8$

$$h_{ob}(s) = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{5}{s(1+0.5s)} \Rightarrow h_{ob}(t) = 5\cdot\left(1-e^{-2t}\right)\cdot\mathbf{1}(t) \Rightarrow h_{ob}(kT) = 5\cdot\left(1-e^{-2kT}\right)\cdot\mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow H_{ob}(z) = 5\cdot\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2T}}\right) = 5\cdot z\cdot\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-0.8}\right) = 5\cdot z\cdot\frac{(1-0.8)}{(z-1)(z-0.8)} = \frac{z}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$\Rightarrow G_1(z) = \frac{z-1}{z}\cdot H_{ob}(z) = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{(z-1)(z-0.8)} = \frac{1}{(z-0.8)}$$

Oblicz transmitancję dyskretną układu otwartego.



$$G_o(z)=\frac{y(z)}{e(z)}=\left(a+\frac{bz}{z-1}\right)\cdot\frac{1}{(z-0.8)}\quad=\frac{(a+b)z-a}{(z-1)(z-0.8)}$$

Zapisz równanie różnicowe układu otwartego.

$$(z-1)(z-0.8)\cdot y(z)=\left[(a+b)z-a\right]\cdot e(z)$$

$$\Rightarrow\quad z^2\cdot y(z)-1.8\cdot z\cdot y(z)+0.8\cdot y(z)=(a+b)z\cdot e(z)-a\cdot e(z)$$

$$\Rightarrow\quad y(kT+2T)-1.8\cdot y(kT+T)+0.8\cdot y(kT)=(a+b)\cdot e(kT+T)-a\cdot e(kT)$$

Wyznacz transmitancję dyskretną układu zamkniętego.

$$G(z) = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)} = \frac{\dfrac{(a+b)z - a}{(z-1)(z-0.8)}}{1 + \dfrac{(a+b)z - a}{(z-1)(z-0.8)}} = \frac{(a+b)z - a}{(z-1)(z-0.8) + (a+b)z - a}$$

$$= \frac{(a+b)z - a}{z^2 + (a+b-1.8)z + (0.8-a)}$$

Na płaszczyźnie parametrów (a,b) narysuj obszar stabilności dla b>0.

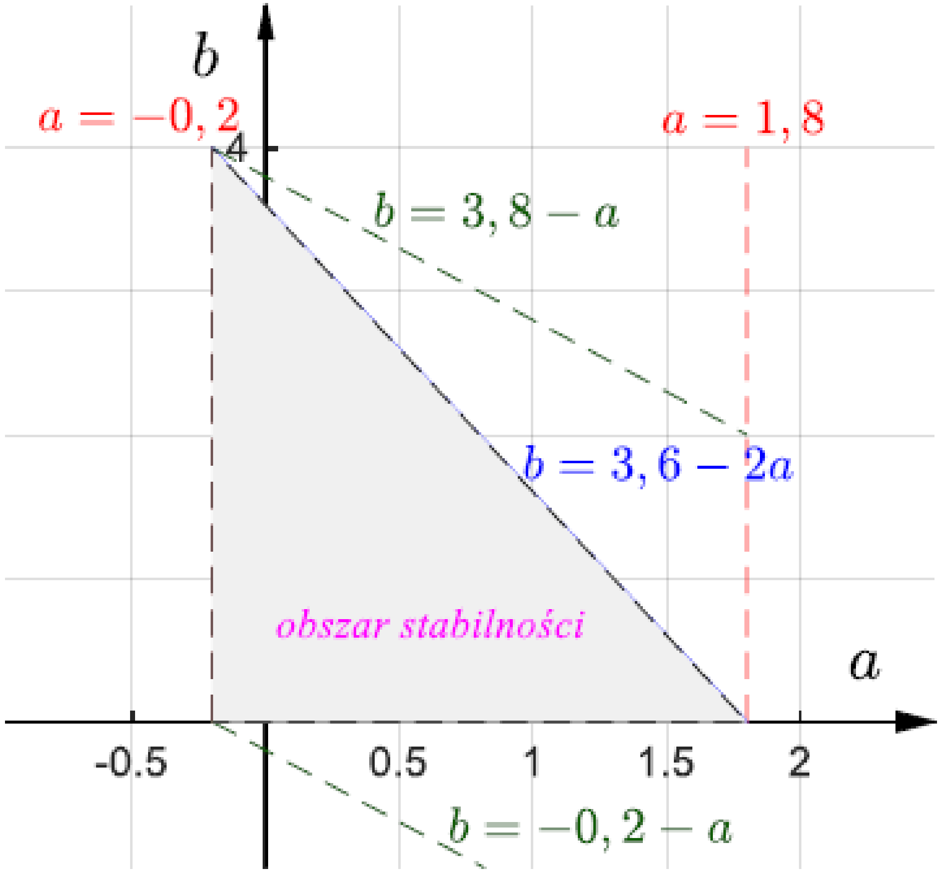
$$M(z) = z^2 + (a+b-1.8)z + (0.8-a)$$

Dla układu II rzędu, którego wielomian charakterystyczny jest postaci $M(z) = z^2 + a_1 \cdot z + a_0$

- warunki konieczne stabilności układu dyskretnego są jednocześnie warunkami wystarczającymi

$$\begin{cases} M(1) > 0 \\ M(-1) > 0 \\ |a_0| < 1 \\ |a_1| < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+(a+b-1.8)+(0.8-a) > 0 \\ 1-(a+b-1.8)+(0.8-a) > 0 \\ |0.8-a| < 1 \\ |a+b-1.8| < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ -b-2a+3.6 > 0 \\ 0.8-a < 1 \\ 0.8-a > -1 \\ a+b-1.8 < 2 \\ a+b-1.8 > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ b < 3.6-2a \\ a > -0.2 \\ a < 1.8 \\ b < 3.8-a \\ b > -0.2-a \end{cases}$$



$$G_o(z)=\frac{(a+b)z-a}{(z-1)(z-0.8)}$$

W transmitancji układu otwartego występuje **pojedynczy** biegun z=1, więc układ jest astatyczny **1-szego rzędu**.

Aby dyskretne przebiegi przejściowe zanikały po 2 okresach impulsowania wielomian charakterystyczny układu zamkniętego powinien być postaci:

$$M(z)=z^2$$

czyli

$$z^2+(a+b-1.8)z+(0.8-a)=z^2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a+b-1.8=0 \\ 0.8-a=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} b=1 \\ a=0.8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad G(z)=\left.\frac{(a+b)z-a}{z^2+(a+b-1.8)z+(0.8-a)}\right|_{\substack{a=0.8\\ b=1}}=\frac{1.8\cdot z-0.8}{z^2}=1.8\cdot z^{-1}-0.8\cdot z^{-2}$$

np. dla skoku jednostkowego

$$h(z)=G(z)\cdot\mathbf{1}(z)=1.8\cdot z^{-1}\cdot\mathbf{1}(z)-0.8\cdot z^{-2}\cdot\mathbf{1}(z)$$

$$\Rightarrow\quad h(kT)=1.8\cdot\mathbf{1}(kT-T)-0.8\cdot\mathbf{1}(kT-2T)$$

$$h(0\cdot T)=0-0=0$$

$$h(1\cdot T)=1.8-0=1.8$$

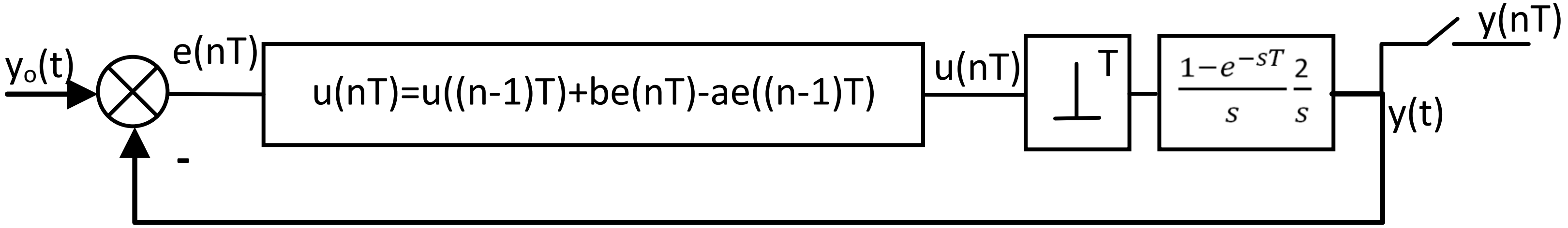
$$h(2\cdot T)=1.8-0.8=1$$

$$h(3\cdot T)=1.8-0.8=1$$

$$\vdots$$

Zadanie.

Schemat blokowy układu został przedstawiony na rysunku :



1. Jaka jest transmitancja dyskretna tego układu?
2. Dla jakich wartości *a* i *b* układ będzie stabilny? Przyjąć T=0,5 s.
3. Dla współczynników a=0.5 i b=2 określić rząd astatyzmu układu.
4. Dla współczynników a=0.5 i b=2 określić wzmocnienie układu zamkniętego.
5. Dla jakich wartości *a* i *b* odpowiedź układu na skok jednostkowy będzie miała postać skoku jednostkowego opóźnionego o jeden okres impulsowania?
6. Naszkicuj odpowiedź jednostkową układu dla przypadku doboru współczynników a i b w taki sposób, że przebiegi przejściowe zanikną po co najwyżej 2 okresach impulsowania.

Regulator: $u(z) = z^{-1} \cdot u(z) + b \cdot e(z) - a \cdot z^{-1} \cdot e(z) \;\Rightarrow\; (1 - z^{-1}) \cdot u(z) = (b - a \cdot z^{-1}) \cdot e(z)$

$$\Rightarrow \quad G_r(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{b - a \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{bz - a}{z - 1}$$

Obiekt: $G_{ob}(s)=\frac{2}{s} \Rightarrow h_{ob}(s)=\frac{2}{s^2} \Rightarrow h_{ob}(t)=2t\cdot\mathbf{1}(t) \Rightarrow h_{ob}(kT)=2\cdot kT\cdot\mathbf{1}(kT)$

$$\Rightarrow h_{ob}(z)=2\cdot\frac{zT}{(z-1)^2} \Rightarrow G_{ob}(z)=\frac{z-1}{z}\cdot h_{ob}(z)=\frac{z-1}{z}\cdot 2\cdot\frac{zT}{(z-1)^2}$$

$$\Rightarrow G_{ob}(z)=\frac{2T}{z-1}$$

Układ otwarty: $G_o(z)=G_r(z)G_{ob}(z)=\frac{bz-a}{z-1}\cdot\frac{2T}{z-1}=2T\cdot\frac{bz-a}{(z-1)^2}$

Układ zamknięty:

$$G_z(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}=\frac{2T\cdot\frac{bz-a}{(z-1)^2}}{1+2T\cdot\frac{bz-a}{(z-1)^2}}=\frac{2T\cdot(bz-a)}{(z-1)^2+2T\cdot(bz-a)}$$

$$\Rightarrow G_z(z)=\frac{2T\cdot(bz-a)}{z^2+(2T\cdot b-2)z+(1-2T\cdot a)}$$

Układ zamknięty dla T=0,5 s:

$$G_z(z)=\frac{(bz-a)}{z^2+(b-2)z+(1-a)}$$

$$M(z)=z^2+(b-2)z+(1-a)$$

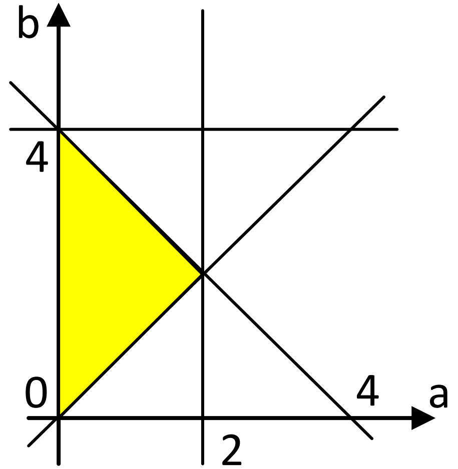
$$\begin{cases} M(1)=z^2+(b-2)z+(1-a)\big|_{z=1}>0 \\ (-1)^n\cdot M(-1)=z^2+(b-2)z+(1-a)\big|_{z=-1}>0 \\ |a_0|=|1-a|<1 \\ |a_1|=|b-2|<2 \end{cases}$$

$$M(1)=1+(b-2)+(1-a)>0 \quad\Rightarrow\quad b>a$$

$$(-1)^2 M(-1)=1-(b-2)+(1-a)>0 \quad\Rightarrow\quad b<-a+4$$

$$|a_0|=|1-a|<1 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 1-a<1 \\ 1-a>-1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a>0 \\ a<2 \end{cases}$$

$$|a_1|=|b-2|<2 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} b-2<2 \\ b-2>-2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} b>0 \\ b<4 \end{cases}$$



Układ otwarty dla T=0,5 s oraz a=0,5 b=2: $G_o(z) = \dfrac{bz-a}{(z-1)^2} \underset{\substack{a=0,5\\ b=2}}{=} \dfrac{2z-0,5}{(z-1)^2} \Rightarrow$ rząd astatyzmu = 2:

Układ zamknięty dla T=0,5 s oraz a=0,5 b=2: $G_z(z) = \dfrac{(bz-a)}{z^2+(b-2)z+(1-a)} \underset{\substack{a=0,5\\ b=2}}{=} \dfrac{2z-0,5}{z^2+0,5}$

$$k_z = \frac{y_{ust}}{u_{ust}} \underset{np.}{=} \frac{h_{ust}}{\mathbf{1}_h\big|_{ust}} = h_{ust} \quad \Rightarrow \quad k_z = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\cdot G_z(z)\cdot\frac{z}{(z-1)}\right] = G_z(1)$$

$$k_z = \left.\frac{2z-0,5}{z^2+0,5}\right|_{z=1} = \frac{2-0,5}{1+0,5} = 1$$

Układ zamknięty dla T=0,5 s: $G_z(z) = \dfrac{(bz-a)}{z^2+(b-2)z+(1-a)} \underset{\substack{a=?\\ b=?}}{=} \dfrac{1}{z}$

Układ zamknięty dla T=0,5 s oraz a=1: $G_z(z) = \dfrac{(bz-1)}{z^2+(b-2)z} = \dfrac{(bz-1)}{z\left[z+(b-2)\right]} \underset{b=?}{=} \dfrac{1}{z}$

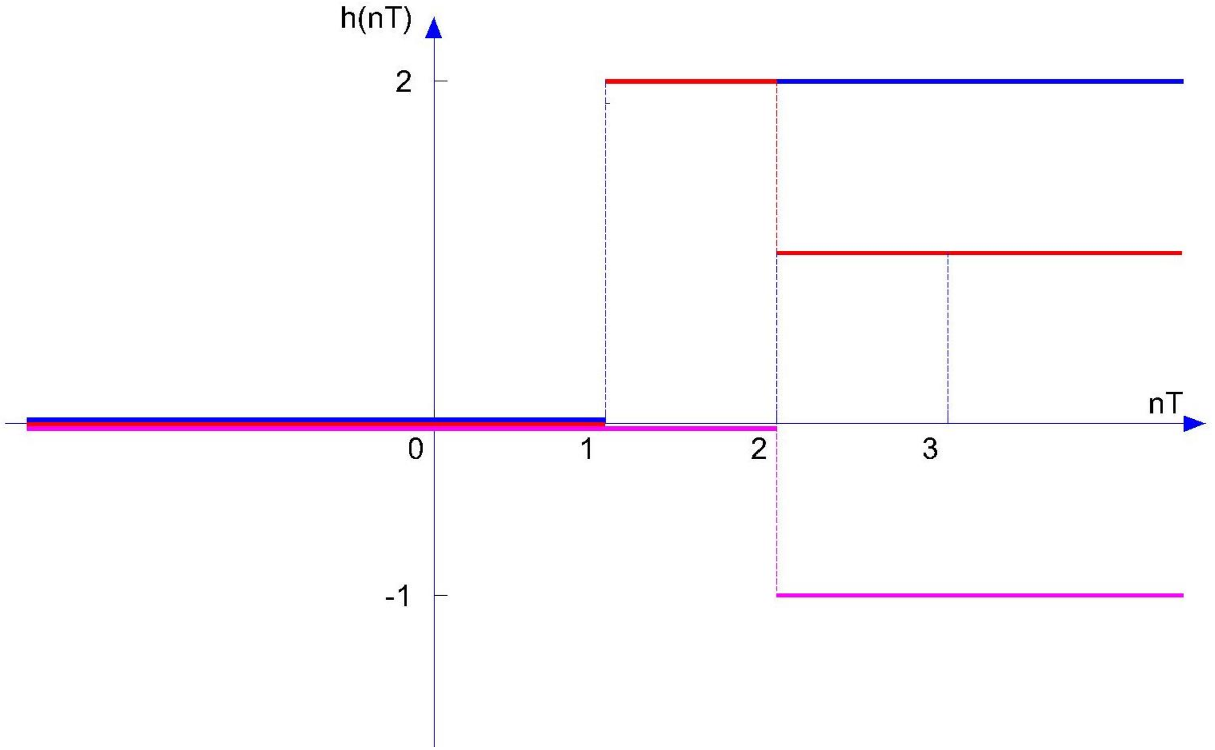
$$\Rightarrow \quad G_z(z) \underset{b=1}{=} \frac{z-1}{z(z-1)} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Układ zamknięty dla T=0,5 s:

$$G_z(z) = \frac{(bz-a)}{z^2+(b-2)z+(1-a)} \underset{\substack{a=?\\b=?}}{=} \frac{1}{z^2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad G_z(z) = \frac{2z-1}{z^2} = 2\cdot z^{-1} - z^{-2}$$

$$h(kT) = 2\cdot \mathbf{1}\left[(k-1)T\right] - \mathbf{1}\left[(k-2)T\right]$$



Zadanie.

Równania opisujące pewien układ są następujące:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 \\ 0.1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

1. Wyznaczyć transmitancję układu.
2. Określić dopuszczany zakres zmian współczynnika **a** ze względu na stabilność układu.

$$G(z)=\begin{bmatrix}4 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z-0.2 & 0.3\\ -0.1 & z-a\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & a\end{bmatrix}\frac{\begin{bmatrix}z-a & -0.3\\ 0.1 & z-0.2\end{bmatrix}}{(z-0.2)(z-a)+0.1\cdot 0.3}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{(a+4)z-(4.1a+1.2)}{z^2-(a+0.2)z+(0.2a+0.03)}$$

$$M(z)=z^2-(a+0.2)z+(0.2a+0.03)$$

$$\begin{cases}M(1)=z^2-(a+0.2)z+(0.2a+0.03)\Big|_{z=1}>0\\ (-1)^n\cdot M(-1)=z^2-(a+0.2)z+(0.2a+0.03)\Big|_{z=-1}>0\\ |a_0|=|0.2a+0.03|<1\\ |a_1|=|a+0.2|<2\end{cases}$$

$$M(1)=1-(a+0.2)+(0.2a+0.03)>0\quad\Rightarrow\quad -0.8a+0.83>0\quad\Rightarrow\quad a<1.0375$$

$$(-1)^2M(1)=1+(a+0.2)+(0.2a+0.03)>0\quad\Rightarrow\quad 1.2a+1.23>0\quad\Rightarrow\quad a>-1.025$$

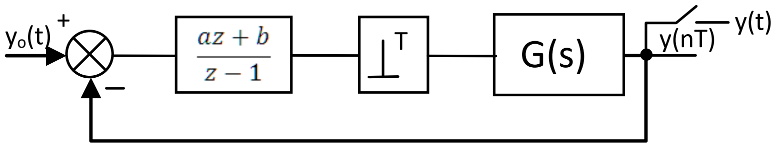
$$|a_0|=|0.2a+0.03|<1\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}0.2a+0.03<1\\0.2a+0.03>-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a<4.85\\a>-5.15\end{cases}$$

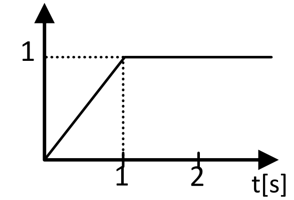
$$\Rightarrow\quad a\in(-1.025;\quad 1.0375)$$

$$|a_1|=|a+0.2|<2\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a+0.2<2\\a+0.2>-2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a<1.8\\a>-2.2\end{cases}$$

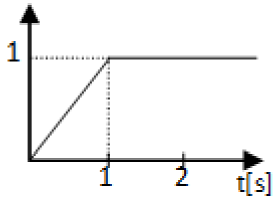
Zadanie.

Schemat blokowy układu oraz odpowiedź obiektu G(s) w postaci ciągłej na skok jednostkowy :





1. Wyznaczyć transmitancję dyskretną obiektu G(z) przy założeniu, że okres próbkowania będzie równy: T= $\frac{1}{\mathrm{m}}$ [s], gdzie „m” to liczba naturalna. Transmitancję wyznaczyć dla dwóch przypadków: a) m>1; b) m=1;
2. Do kolejnych rozważań należy przyjąć czas próbkowania T=1 [s].
3. Jaka jest transmitancja dyskretna układu zamkniętego bez regulatora?
4. Czy układ zamknięty bez regulatora jest stabilny?
5. Dla jakich wartości *a* i *b* przebieg stabilnego sygnału wyjściowego będzie miał charakter aperiodyczny?
6. Dla współczynników a=2 i b=-0.1 określić rząd astatyzmu układu.
7. Dla współczynników a=2 i b=0.5 określić wzmocnienie układu zamkniętego.



$$h(t)=t\cdot\left[\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-1)\right] \Rightarrow h(kT)=(kT)\cdot\left[\mathbf{1}(kT)-\mathbf{1}(kT-1)\right]=(kT)\cdot\left[\mathbf{1}(kT)-\mathbf{1}(kT-mT)\right]$$

$$h(z)=\frac{zT}{(z-1)^2}\left[1-z^{-m}\right] \Rightarrow G_m(z)=h(z)\cdot\frac{z-1}{z}=\frac{zT}{(z-1)^2}\left[1-z^{-m}\right]\cdot\frac{z-1}{z}=\frac{T}{(z-1)}\left[1-z^{-m}\right]=\frac{1}{m\cdot(z-1)}\cdot\frac{\left(z^m-1\right)}{z^m}$$

$$G_1(z)\underset{m=1}{=}\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{(z-1)}{z}=\frac{1}{z}$$

Bez regulatora:

$$G_z(z)=\frac{G_1(z)}{1+G_1(z)}=\frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z+1}$$

granica stabilności, bo z=-1

z regulatorem:

$$G_o(z)=\frac{az+b}{z-1}\cdot\frac{1}{z}$$

$$G_{zr}(z)=\frac{G_o(z)}{1+G_o(z)}=\frac{\frac{az+b}{z(z-1)}}{1+\frac{az+b}{z(z-1)}}=\frac{az+b}{z(z-1)+az+b}=\frac{az+b}{z^2+(a-1)z+b}$$

stabilność

$$M(z) = z^2 + (a-1)z + b$$

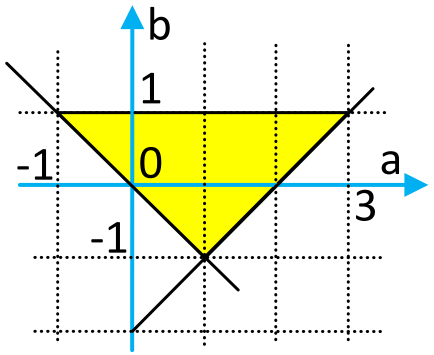
$$\begin{cases} M(1) = z^2 + (a-1)z + b\big|_{z=1} > 0 \\ (-1)^n \cdot M(-1) = z^2 + (a-1)z + b\big|_{z=-1} > 0 \\ |a_0| = |b| < 1 \\ |a_1| = |a-1| < 2 \end{cases}$$

$$M(1) = 1 + (a-1) + b > 0 \quad \Rightarrow \quad b > -a$$

$$(-1)^2 M(-1) = 1 - (a-1) + b > 0 \quad \Rightarrow \quad b > a-2$$

$$|b| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < b < 1$$

$$|a-1| < 2 \quad \Rightarrow \quad -1 < a < 3$$



aperiodyczność $\Delta = (a-1)^2 - 4b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 4b \leq (a-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 4b \leq (a-1)^2$

astatyzm

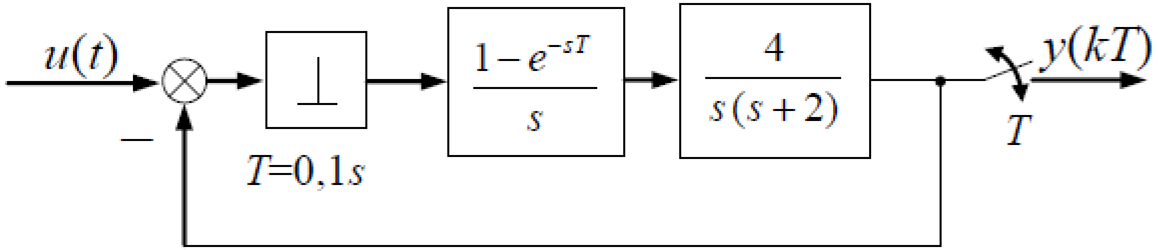
$$G_o(z) \underset{\substack{a=2 \\ b=-0.1}}{=} \left.\frac{az+b}{z(z-1)}\right|_{\substack{a=2 \\ b=-0.1}} = \frac{2z-0.1}{z(z-1)}$$

rząd astatyzmu = 1

wzmocnienie

$$G_{zr}(z) \underset{\substack{a=2 \\ b=0.5}}{=} \left.\frac{az+b}{z^2+(a-1)z+b}\right|_{\substack{a=2 \\ b=0.5}} = \frac{2z+0.5}{z^2+z+0.5} \quad \Rightarrow \quad k_z = G_{zr}(1) = \left.\frac{2z+0.5}{z^2+z+0.5}\right|_{z=1} = \frac{2+0.5}{1+1+0.5} = 1$$

Dany jest układ: (Dla ułatwienia obliczeń przyjmij zaokrąglenie $e^{-0.2}=0.8$



a. Zapisz równanie różnicowe układu otwartego.
b. Wyznacz transmitancję dyskretną układu zamkniętego.
c. Czy układ zamknięty jest stabilny?
d. Czy układ jest astatyczny? Jaki jest rząd astatyzmu układu?
e. Wyznacz opis układu na płaszczyźnie stanów $G(z) \Rightarrow \{A, B, C\}$.

$$h_{ob}(s)=\frac{4}{s^2(s+2)}=\frac{2}{s^2(1+0.5s)}=\frac{a}{s^2}+\frac{b}{s}+\frac{c}{1+0.5s}=\frac{a(1+0.5s)+bs(1+0.5s)+cs^2}{s^2(1+0.5s)}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\c=0.5\\b=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad h_{ob}(t)=\left(2t-1+e^{-2t}\right)\cdot\mathbf{1}(t)\quad\Rightarrow\quad h_{ob}(kT)=\left(2\cdot kT-1+e^{-2\cdot kT}\right)\cdot\mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow\quad h_{ob}(z)=2\cdot\frac{zT}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-2T}}=\frac{z}{(z-1)^2(z-0.8)}\left[0.8(z-0.8)-(z-1)(z-0.8)+(z-1)^2\right]$$

$$=\frac{z}{(z-1)^2(z-0.8)}[0.6z-0.44]$$

$$\Rightarrow\quad G_o(z)=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z}{(z-1)^2(z-0.8)}[0.6z-0.44]=\frac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$\frac{y(z)}{e(z)}=\frac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)}\quad\Rightarrow\quad\left(z^2-1.8z+0.8\right)\cdot y(z)=(0.6z-0.44)\cdot u(z)$$

$$\Rightarrow\quad y(kT+2T)-1.8y(kT+T)+0.8y(kT)=0.6u(kT+T)-0.44u(kT)$$

$$G(z) = \frac{\dfrac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)}}{1+\dfrac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)}} = \frac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)+0.6z-0.44} = \frac{0.6z-0.44}{z^2-1.2z+0.36} = \frac{0.6z-0.44}{(z-0.6)^2}$$

$$(z-0.6)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = 0.6 < 1$$ czyli układ stabilny

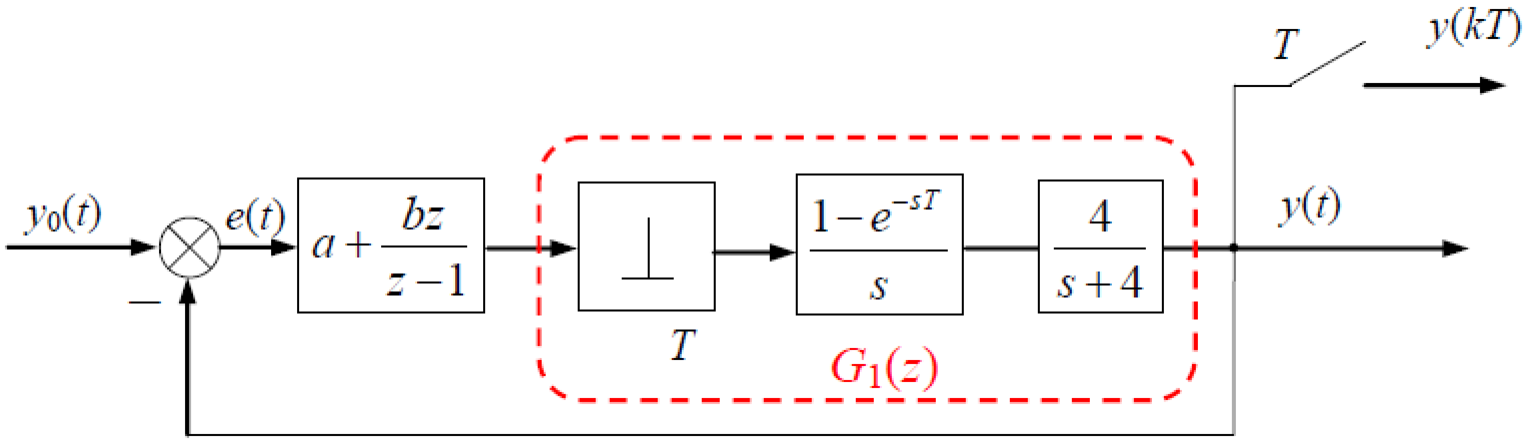
$$G_o(z) = \frac{0.6z-0.44}{(z-1)(z-0.8)}$$ czyli układ astatyczny 1-go rzędu

Z metody bezpośredniej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.36 & 1.2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -0.44 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Dla układu:



Przyjmij $e^{-4T}=0{,}1$.

a. Oblicz transmitancję dyskretną $G_1(z)$.
b. Oblicz transmitancję dyskretną układu otwartego.
c. Zapisz równanie różnicowe układu otwartego.
d. Wyznacz transmitancję dyskretną układu zamkniętego.
e. Na płaszczyźnie parametrów (a,b) narysuj obszar stabilności.
f. Czy układ jest astatyczny? Jeśli tak, to którego rzędu?
g. Czy istnieją takie wartości a i b dla których wystąpią dyskretne przebiegi przejściowe zanikające po skończonej liczbie okresów impulsowania? Jeśli tak, to po ilu i dla jakich a, b?

$$h_{ob}(s) = \frac{4}{s(s+4)} = \frac{1}{s(1+0.25s)}$$

$$\Rightarrow \quad h_{ob}(t) = \left(1 - e^{-4t}\right)\cdot \mathbf{1}(t) \qquad \Rightarrow \quad h_{ob}(kT) = \left(1 - e^{-4\cdot kT}\right)\cdot \mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow \quad h_{ob}(z) = \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.1}\right) = \frac{z}{(z-1)(z-0.1)}\left[(z-0.1)-(z-1)\right] = \frac{0.9z}{(z-1)(z-0.1)}$$

$$\Rightarrow \quad G_1(z) = \frac{z-1}{z}\cdot\frac{0.9z}{(z-1)(z-0.1)} = \frac{0.9}{(z-0.1)}$$

$$G_o(z) = G_r(z)\cdot G_1(z) = \frac{a(z-1)+bz}{(z-1)}\cdot\frac{0.9}{(z-0.1)} = \frac{0.9(a+b)z - 0.9a}{z^2 - 1.1z + 0.1} = \frac{y(z)}{e(z)}$$

$$\Rightarrow \quad y(kT+2T) - 1.1y(kT+T) + 0.1y(kT) = 0.9(a+b)u(kT+T) - 0.9au(kT)$$

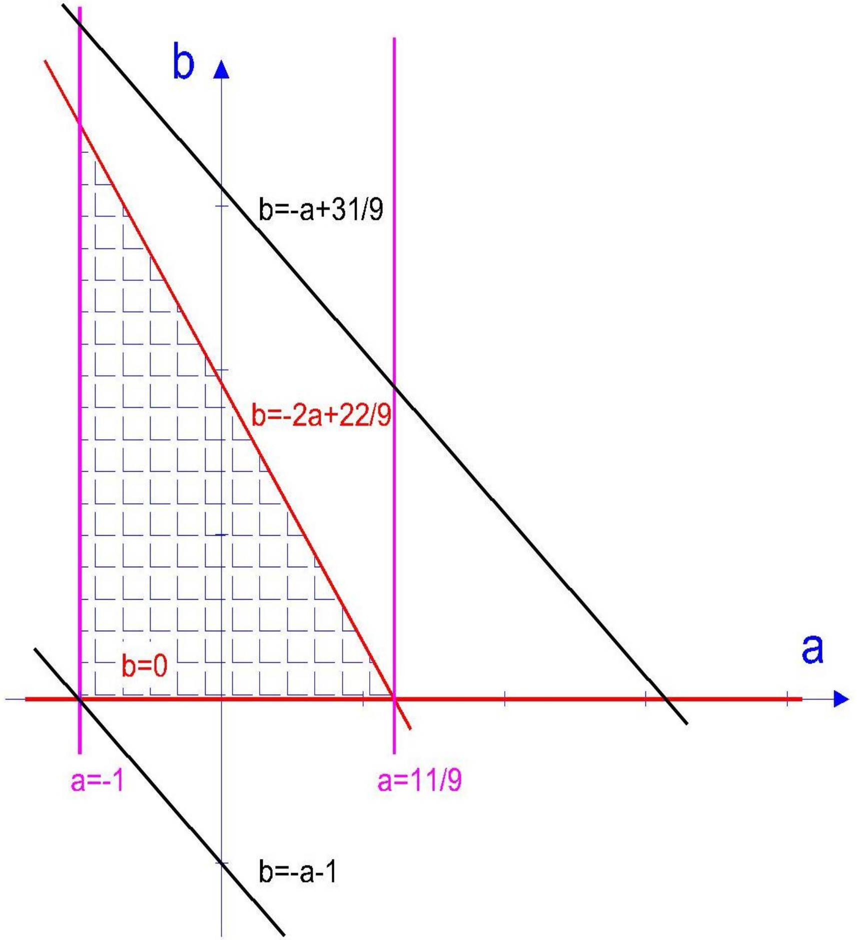
$$G(z)=\frac{\dfrac{0.9(a+b)z-0.9a}{z^2-1.1z+0.1}}{1+\dfrac{0.9(a+b)z-0.9a}{z^2-1.1z+0.1}}=\frac{0.9(a+b)z-0.9a}{\left[z^2-1.1z+0.1\right]+\left[0.9(a+b)z-0.9a\right]}=\frac{0.9(a+b)z-0.9a}{z^2+(0.9a+0.9b-1.1)z+(0.1-0.9a)}$$

$$M(z)=z^2+(0.9a+0.9b-1.1)z+(0.1-0.9a)$$

$$\begin{cases} M(1)=z^2+(0.9a+0.9b-1.1)z+(0.1-0.9a)\big|_{z=1}>0 \\ (-1)^n\cdot M(-1)=z^2+(0.9a+0.9b-1.1)z+(0.1-0.9a)\big|_{z=-1}>0 \\ |a_0|=|0.1-0.9a|<1 \\ |a_1|=|0.9a+0.9b-1.1|<2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} M(1)=1+0.9a+0.9b-1.1+0.1-0.9a>0 \\ M(-1)=1-0.9a-0.9b+1.1+0.1-0.9a>0 \\ |a_0|=|0.1-0.9a|<1 \\ |a_1|=|0.9a+0.9b-1.1|<2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} 0.9b>0 \\ 0.9b<-1.8a+2.2 \\ 0.1-0.9a<1 \\ 0.1-0.9a>-1 \\ 0.9a+0.9b-1.1<2 \\ 0.9a+0.9b-1.1>-2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b>0 \\ b<-2a+\dfrac{22}{9} \\ a>-1 \\ a<\dfrac{11}{9} \\ b<-a+\dfrac{31}{9} \\ b>-a-1 \end{cases}$$



$$G_o(z) = \frac{a(z-1)+bz}{(z-1)} \cdot \frac{0.9}{(z-0.1)}$$ czyli układ astatyczny 1-go rzędu

$$M(z) = z^2 + (0.9a + 0.9b - 1.1)z + (0.1 - 0.9a) \underset{\substack{0.1-0.9a=0 \\ 0.9a+0.9b-1.1=0}}{=} z^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{9} \\ b = \dfrac{10}{9} \end{cases}$$

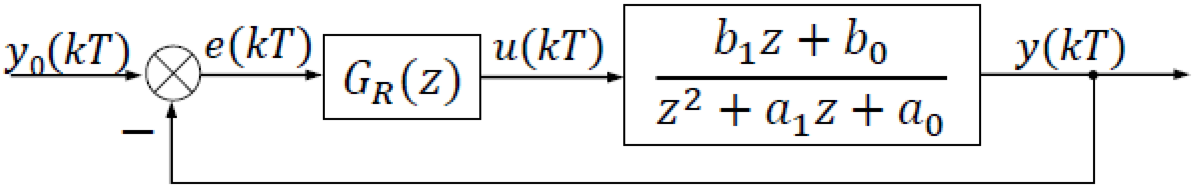
$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{1.1z - 0.1}{z^2} \quad = 1.1z^{-1} - 0.1z^{-2}$$

$$h(kT) = 1.1 \cdot \mathbf{1}(kT - T) - 0.1 \cdot \mathbf{1}(kT - 2T)$$

$$\Rightarrow \quad h(0) = 0 \quad h(T) = 1.1 \quad h(2T) = 1.1 - 0.1 = 1 \quad h(3T) = 1 \quad \cdots$$

Zadanie

Dany jest układ dyskretny jak na rysunku:



Zakładając, że układ jest stabilny oblicz transmitancję regulatora $G_R(z)$ tak, by układ był astatyczny z astatyzmem I rzędu oraz dla wymuszenia $y_0(kT) = 1(kT)$ i dla zerowych warunków początkowych przebiegi przejściowe zanikały po dwóch okresach impulsowania.

$$\Rightarrow \quad e_{ust} = y_{ust} - \mathbf{1} = 0 \qquad \Rightarrow \quad y_{ust} = \mathbf{1} = 1 \qquad \Rightarrow \quad y_{ust} = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}\right] = G(1) = 1$$

Transmitancja układu spełniająca warunki zadania jest równa

$$G(z) = \frac{1}{L_{ob}(1)} \frac{b_1 z + b_0}{z^2} = \frac{b_1 z + b_0}{(b_1 + b_0) z^2}$$

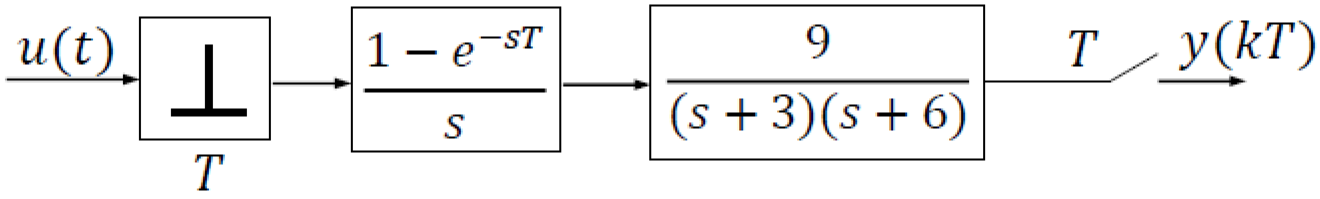
$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{G_R(z)G_{ob}(z)}{1+G_R(z)G_{ob}(z)} \qquad \Rightarrow \quad G(z)+G(z)G_R(z)G_{ob}(z)=G_R(z)G_{ob}(z)$$

$$\Rightarrow \quad -G(z)G_R(z)G_{ob}(z)+G_R(z)G_{ob}(z)=G(z) \qquad \Rightarrow \quad G_R(z)=\frac{G(z)}{1-G(z)}\cdot\frac{1}{G_{ob}(z)}$$

$$\Rightarrow \quad G_R(z)=\frac{\dfrac{b_1z+b_0}{(b_1+b_0)z^2}}{1-\dfrac{b_1z+b_0}{(b_1+b_0)z^2}}\cdot\frac{1}{\dfrac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}} \quad =\frac{b_1z+b_0}{(b_1+b_0)z^2-(b_1z+b_0)}\cdot\frac{z^2+a_1z+a_0}{b_1z+b_0} \quad =\frac{z^2+a_1z+a_0}{(b_1+b_0)z^2-b_1z-b_0}$$

$$\Rightarrow \quad G_R(z)=\frac{z^2+a_1z+a_0}{b_1z(z-1)+b_0(z^2-1)} \quad =\frac{z^2+a_1z+a_0}{(z-1)\left[b_1z+b_0(z+1)\right]} \quad =\frac{z^2+a_1z+a_0}{(z-1)\left[(b_1+b_0)z+b_0\right]}$$

Dany jest układ jak na rysunku



Przyjmij okres impulsowania taki, że $e^{-3T} = 0{,}5$

Napisz równanie różnicowe opisujące dynamikę układu. Zaprojektuj regulator dead-beat,

$$G_{ob}(s) = \frac{9}{(s+3)(s+6)} = \frac{3}{s+3} - \frac{3}{s+6} \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(s) = \frac{1}{s\left(1+\frac{1}{3}s\right)} - \frac{0.5}{s\left(1+\frac{1}{6}s\right)}$$

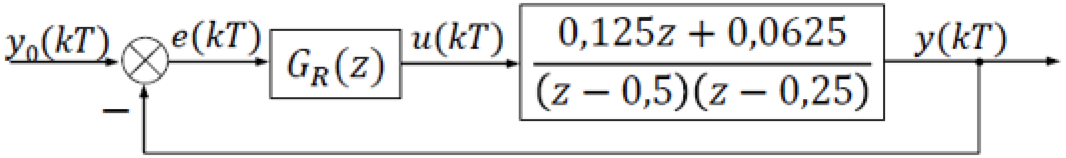
$$\Rightarrow \quad h_{ob}(t) = \left[\left(1-e^{-3t}\right) - 0.5\left(1-e^{-6t}\right)\right]\mathbf{1}(t) \quad \Rightarrow \quad h_{ob}(kT) = 0.5\left[1+e^{-6kT} - 2e^{-3kT}\right]\mathbf{1}(kT)$$

$$\Rightarrow \quad h_{ob}(z) = 0.5\left[\frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-6T}} - 2\frac{z}{z-e^{-3T}}\right] = 0.5\frac{z\left[(z-0.5)(z-0.25) + (z-0.5)(z-1) - 2(z-1)(z-0.25)\right]}{(z-1)(z-0.5)(z-0.25)}$$

$$= \frac{0.5z\left[0.25z+0.125\right]}{(z-1)(z-0.5)(z-0.25)} \quad \Rightarrow \quad G_{ob}(z) = \frac{z-1}{z}\frac{0.5z\left[0.25z+0.125\right]}{(z-1)(z-0.5)(z-0.25)} = \frac{0.125(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0.125(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)} \qquad \Rightarrow \quad y(z)\left(z^2 - 0.75z + 0.125\right) = u(z)\cdot 0.125(z+0.5)$$

$$\Rightarrow \quad y(kT+2T) - 0.75y(kT+T) + 0.125y(kT) = 0.125u(kT+T) + 0.0625u(kT)$$



$$G(z) = \frac{1}{L_{ob}(1)} \frac{0.125(z+0.5)}{z^2} = \frac{16}{3} \frac{0.125(z+0.5)}{z^2}$$

$$G_R(z) = \frac{G(z)}{1-G(z)} \cdot \frac{1}{G_{ob}(z)} = \frac{\frac{16}{3}\frac{0.125(z+0.5)}{z^2}}{1-\frac{16}{3}\frac{0.125(z+0.5)}{z^2}} \cdot \frac{1}{\frac{0.125(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.25)}} = \frac{\frac{16}{3}\cdot(z-0.5)(z-0.25)}{z^2 - \frac{16}{3}\cdot 0.125(z+0.5)}$$

$$= \frac{\frac{16}{3}\cdot(z-0.5)(z-0.25)}{z^2 - \frac{16}{3}\cdot 0.125(z+0.5)} = \frac{16z^2 - 12z + 2}{3z^2 - 2z - 1}$$

$$G(z) = \frac{16}{3}\frac{0.125(z+0.5)}{z^2} = \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad h(kT) = \frac{2}{3}\mathbf{1}(kT - T) + \frac{1}{3}\mathbf{1}(kT - 2T) \qquad \Rightarrow \quad h(0) = 0 \quad h(T) = \frac{2}{3} \quad h(2T) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad h(3T) = 1 \quad \cdots$$