



Politechnika Łódzka



wydział  
elektrotechniki  
elektroniki  
informatyki  
i automatyki

---

---

## PRACA INŻYNIERSKA

na kierunku Automatyka i Sterowanie Robotów  
Studia stacjonarne

**Ocena jakości sterowania temperaturą na podstawie  
modelu opisanego równaniami różniczkowymi cząstkowymi.**

Assessment of the quality of temperature control on the basis of a  
model described by partial differential equations.

Arkadiusz Józwiak  
Nr albumu: 228401

Kierujący pracą:  
dr hab. inż. Jacek Kabziński, prof. uczelni

ŁÓDŹ 2023

# Streszczenie

Tematem pracy jest ocena jakości sterowania temperaturą na podstawie modelu opisanego równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Osiągnięto dwa zasadnicze cele:

1. Napisano program komputerowy, który rozwiązuje równanie różniczkowe cząstkowe przewodnictwa cieplnego w stanie ustalonym i nieustalonym o zadanych warunkach początkowo-brzegowych Metodą Elementów Skończonych (MES) w ujęciu Galerkin dla prostopadłościennych ośmiowęzłowych elementów skończonych.
2. Model opisany równaniami różniczkowymi cząstkowymi zastąpiono transmitancją ciągłą, zamknięto ją pętlą z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, a następnie sterowano obiektem MES przy pomocy otrzymanych sygnałów wychodzących z regulatora PID i badano uzyskane przebiegi temperatury dla wybranych punktów badanego obszaru.

**Słowa kluczowe:** Metoda Elementów Skończonych, Generator siatki, Równanie przewodnictwa cieplnego, Identyfikacja obiektu, Układ automatycznej regulacji

## Abstract

The subject of the thesis is the assessment of the quality of temperature control on the basis of the described model partial differential equations. Two main objectives have been achieved:

1. A computer program was written that solves the partial differential equation of thermal conductivity in steady and unsteady states with given initial-boundary conditions using the Finite Element Method (FEM) in Galerkin's approach for cuboid eight-node finite elements.
2. The model described by partial differential equations was replaced with a continuous transfer function, it was closed with a negative feedback loop, and then the FEM object was controlled using the received signals coming from the PID controller and the obtained temperature plots were examined for selected points of the tested area.

**Keywords:** Finite Element Method, Mesh generator, Thermal conductivity equation, Object identification, Automatic control system

Niniejszą pracę dedykuję mojej  
rodzinie, która wspierała mnie  
podczas procesu jej pisania.

*„Łatwiej zdobyć sukces,  
trudniej na niego zasłużyć.”*

Albert Camus

Za inspirację i natchnienie  
chciałbym podziękować  
promotorowi dr hab. inż.  
Jackowi Kabzińskiemu.

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp teoretyczny do termodynamiki</b>	<b>10</b>
2.1	Termodynamika . . . . .	10
2.2	Ciepło . . . . .	10
2.3	Ciepło właściwe . . . . .	10
2.4	Strumień ciepła . . . . .	10
2.5	Gęstość powierzchniowa strumienia ciepła . . . . .	10
2.6	Gęstość objętościowa strumienia ciepła . . . . .	11
2.7	Transport ciepła . . . . .	11
2.7.1	Przewodnictwo cieplne . . . . .	11
2.7.2	Konwekcja . . . . .	11
2.8	Pole temperatury . . . . .	11
2.9	Równanie przewodnictwa cieplnego . . . . .	12
2.9.1	Warunek początkowy . . . . .	12
2.9.2	Warunki brzegowe . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych</b>	<b>13</b>
3.1	Motywacja . . . . .	13
3.2	Podstawowe pojęcia i definicje . . . . .	13
3.2.1	Metoda Elementów Skończonych . . . . .	13
3.2.2	Element skończony . . . . .	14
3.2.3	Obszar . . . . .	15
3.2.4	Siatka . . . . .	15
3.2.5	Brzeg . . . . .	16
3.2.6	Warunek brzegowy . . . . .	16
3.2.7	Funkcja kształtu . . . . .	16
3.3	Układ globalny i lokalny elementu skończonego . . . . .	16
3.4	Numeracja węzłów . . . . .	17
3.4.1	Układ globalny . . . . .	17
3.4.2	Układ lokalny . . . . .	18
3.5	Różne sformułowania MES . . . . .	18
3.6	Główne etapy rozwiązania w MES . . . . .	19
3.7	Równania przewodnictwa cieplnego rozwiązywane przez MES . . . . .	19
3.8	Wzory użyte do obliczeń w MES . . . . .	20
3.8.1	Konwencja oznaczeń macierzy . . . . .	20
3.8.2	Zagadnienie ustalone . . . . .	21
3.8.3	Zagadnienie nieustalone . . . . .	22
3.8.4	Warunek brzegowy I rodzaju . . . . .	23
3.8.5	Warunek brzegowy II rodzaju . . . . .	23
3.8.6	Warunek brzegowy III rodzaju . . . . .	24
3.8.7	Wyznaczenie temperatury w dowolnym punkcie obszaru . . . . .	24
3.9	Podsumowanie . . . . .	25

<b>4</b>	<b>Opis i działanie programu obliczającego MES</b>	<b>26</b>
4.1	Wstęp . . . . .	26
4.2	Wykorzystane środowiska programistyczne . . . . .	26
4.3	Struktura pliku tekstowego z danymi wejściowymi . . . . .	27
4.4	Generator siatki . . . . .	29
4.4.1	Implementacja siatki jednorodnej przez użytkownika . . . . .	30
4.4.2	Implementacja obszaru wielowarstwowego przez użytkownika . . . . .	30
4.4.3	Implementacja siatki niejednorodnej przez użytkownika . . . . .	31
4.4.4	Zagęszczanie siatki . . . . .	31
4.5	Metody numeryczne stosowane w programie . . . . .	32
4.5.1	Metoda Choleskiego rozwiązywania układu równań . . . . .	32
4.6	Optymalizacja programu . . . . .	33
4.6.1	Stosowanie macierzy w formacie spf . . . . .	33
4.6.2	Duże zagęszczenie węzłów na osi $Z$ i małe na osi $X$ . . . . .	34
4.6.3	Stosowanie metody Choleskiego zamiast innej metody numerycznej . . . . .	35
4.6.4	Jednoczesne składanie macierzy podczas wykonywania obliczeń . . . . .	35
4.6.5	Wielowątkowość . . . . .	35
4.6.6	Inteligentne obsługiwanie plików wejściowych . . . . .	36
4.7	Schematy ideowe obliczania problemów MES przez program . . . . .	38
4.7.1	Schemat ideowy obliczania zagadnienia ustalonego . . . . .	38
4.7.2	Schemat ideowy obliczania zagadnienia nieustalonego . . . . .	39
4.8	Testy programu - porównanie wyników z rozwiązaniami analitycznymi . . . . .	39
4.8.1	Rozwiązania analityczne . . . . .	40
4.8.2	Założenia . . . . .	41
4.8.3	Warunek brzegowy I rodzaju - stan ustalony . . . . .	41
4.8.4	Warunek brzegowy I rodzaju - stan nieustalony . . . . .	43
4.8.5	Warunek brzegowy II rodzaju - stan nieustalony . . . . .	46
4.8.6	Warunek brzegowy III rodzaju - stan nieustalony . . . . .	49
4.9	Podsumowanie . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Ocena jakości regulacji</b>	<b>53</b>
5.1	Wstęp . . . . .	53
5.2	Zmienne w czasie warunki brzegowe . . . . .	54
5.3	Identyfikacja obiektu . . . . .	55
5.3.1	Model zastępczy . . . . .	55
5.3.2	Układ otwarty . . . . .	56
5.3.3	Sinusoidalny sygnał wejściowy . . . . .	56
5.3.4	Funkcja identyfikująca obiekt tfest (Estimate transfer function) . . . . .	57
5.4	Sterowanie obiektem MES . . . . .	58
5.4.1	Ciągły regulator PID i sygnały sterujące . . . . .	58
5.4.2	Układ zamknięty . . . . .	58
5.4.3	Schemat ideowy sterowania obiektem MES . . . . .	60
5.5	Test nr 1 - sterowanie poprzez wymuszenie temperatury jednej ze ścian prostopadłościanu . . . . .	60
5.5.1	Założenia . . . . .	61
5.5.2	Identyfikacja obiektu . . . . .	62
5.5.3	Sterowanie . . . . .	63

5.5.4	Analiza wyników . . . . .	65
5.6	Test nr 2 - sterowanie poprzez wymuszenie strumienia ciepła płynącego przez fragmenty dwóch ścian . . . . .	65
5.6.1	Założenia . . . . .	65
5.6.2	Identyfikacja obiektu . . . . .	66
5.6.3	Sterowanie . . . . .	67
5.6.4	Analiza wyników . . . . .	70
5.7	Podsumowanie . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Podsumowanie końcowe</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>Wyprowadzenie wzoru na funkcję kształtu</b>	<b>73</b>
<b>B</b>	<b>Wyprowadzenie wzorów - MES w sformułowaniu Galerkina</b>	<b>76</b>
<b>C</b>	<b>Przedstawienie macierzy w lokalnym układzie współrzędnych elementu skończonego</b>	<b>80</b>
<b>D</b>	<b>Wyprowadzenie wzorów w zagadnieniu nieustalonym</b>	<b>83</b>
<b>E</b>	<b>Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy I rodzaju</b>	<b>84</b>
<b>F</b>	<b>Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy II rodzaju</b>	<b>85</b>
<b>G</b>	<b>Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy III rodzaju</b>	<b>86</b>

# Oznaczenia

- $[-]$  - brak jednostki
- $[*]$  - jednostka zależna od kontekstu
- Kropka nad wielkością oznacza jej pochodną czasową
- $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right]$
- $\partial G$  - brzeg obszaru
- $T$  - temperatura albo wektor temperatur w węzłach (w zależności od kontekstu)  $[K]$
- $Q$  - ciepło  $[J]$
- $\dot{Q}$  - strumień ciepła  $[W]$
- $\mathcal{A}$  - pole powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu ciepła  $[m^2]$
- $V$  - objętość  $[m^3]$
- $\mathcal{C}$  - pojemność cieplna  $\left[ \frac{J}{K} \right]$
- $a, b, c$  - długości boków elementu  $[m]$
- $x_c, y_c, z_c$  - współrzędne środka elementu  $[m]$
- $c_w$  - ciepło właściwe elementu  $\left[ \frac{J}{kgK} \right]$
- $\lambda$  - przewodność cieplna elementu  $\left[ \frac{W}{Km} \right]$
- $\rho$  - gęstość elementu  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
- $q_v$  - ciepło wydzielone w objętości po określonym czasie  $\left[ \frac{J}{m^3} \right]$
- $\dot{q}_v$  - gęstość objętościowa strumienia ciepła  $\left[ \frac{W}{m^3} \right]$
- $\psi$  - funkcja kształtu elementu  $[-]$
- $t$  - czas  $[s]$
- $t_0$  - czas początkowy  $[s]$

- $t_c$  - czas całkowity  $[s]$
- $\Delta t$  - krok czasowy  $[s]$
- $T_t$  - wektor temperatur w chwili  $t$   $[K]$
- $N_t$  - funkcja kształtu zależna do czasu w chwili  $t$   $[-]$
- $T_s$  - temperatura zadana w węźle  $[K]$
- $q_s$  - ciepło wydzielone na powierzchni po określonym czasie  $[\frac{J}{m^2}]$
- $\dot{q}_s$  - gęstość powierzchniowa strumienia ciepła  $[\frac{W}{m^2}]$
- $T_\infty$  - temperatura w dużej odległości od ścianki  $[K]$
- $h$  - współczynnik przejmowania ciepła  $[\frac{W}{m^2K}]$
- $n$  - liczba węzłów  $[-]$
- $n_e$  - liczba elementów  $[-]$
- $l_x, l_y, l_z$  - poziomy zagęszczenia siatki węzłów wzdłuż osi układu współrzędnych  $[-]$
- $o_x, o_y, o_z$  - liczby podobszarów wzdłuż osi układu współrzędnych  $[-]$
- $n_x, n_y, n_z$  - liczby węzłów wzdłuż osi układu współrzędnych  $[-]$
- $\xi, \eta, \delta$  - współrzędne lokalne elementu  $[-]$
- $\varphi$  - funkcja wagowa  $[-]$
- $T_0$  - wektor temperatur początkowych
- $K$  - macierz przewodności cieplnej - macierz symetryczna i pasmowa
- $P$  - wektor źródeł ciepła
- $C$  - macierz pojemności cieplnej - macierz symetryczna i pasmowa
- $A$  - macierz główna układu równań dla zagadnienia nieustalonego - macierz symetryczna i pasmowa
- $B$  - wektor wyrazów wolnych dla zagadnienia nieustalonego
- $T^e$  - wektor temperatur w węzłach elementu



- $K^e$  - macierz przewodności cieplnej elementu - macierz symetryczna i pasmowa
- $P^e$  - wektor źródeł ciepła elementu
- $C^e$  - macierz pojemności cieplnej elementu - macierz symetryczna i pasmowa
- $A^e$  - macierz główna układu równań dla zagadnienia nieustalonego dla elementu - macierz symetryczna i pasmowa
- $B^e$  - wektor wyrazów wolnych dla zagadnienia nieustalonego dla elementu
- $\tau$  - stała czasowa obiektu  $G_0(s)$  [s]
- $k$  - wzmocnienie obiektu  $G_0(s)$  [\*]
- $\tau_0$  - opóźnienie obiektu  $G_0(s)$  [s]
- $y_{we}$  - sygnał wejściowy transmitancji  $G_0(s)$  [\*]
- $y_{wy}$  - sygnał wyjściowy transmitancji  $G_0(s)$  [K]
- $y_{sin}$  - sygnał sinusoidalny o zmiennej częstotliwości [\*]
- $A_m$  - amplituda sinusoidalnego sygnału wejściowego [\*]
- $f_0$  - częstotliwość początkowa sinusoidalnego sygnału wejściowego [Hz]
- $y_0$  - translacja sinusoidalnego sygnału wejściowego [\*]
- $k_p$  - wzmocnienie regulatora PID [-]
- $T_i$  - czas zdwojenia regulatora PID [s]
- $T_d$  - czas wyprzedzenia regulatora PID [s]
- $S_{min}, S_{max}$  - ograniczenia sygnału wyjściowego regulatora PID [\*]
- $y_{zad}$  - wartość zadana [K]
- $e$  - sygnał uchybu [K]
- $u$  - sygnał sterujący [\*]
- $y$  - sygnał wyjściowy układu otwartego lub zamkniętego [K]

# Rozdział 1

## Wstęp

Tematem pracy jest ocena jakości sterowania temperaturą na podstawie modelu opisanego równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Zagadnieniem przewodnim jest Metoda Elementów Skończonych (w skrócie MES), która służy do rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych o zadanych warunkach brzegowych. Autor wybrał niniejsze zagadnienie, ponieważ pasjonuje go matematyka i informatyka, a w szczególności programowanie w języku C++, czym zajmuje się również zawodowo.

Pierwszą częścią pracy było napisanie programu komputerowego w C++, które rozwiązuje trójwymiarowe równanie przewodnictwa cieplnego dla zadanych warunków brzegowych Metodą Elementów Skończonych. Po wykonaniu obliczeń przez program otrzymywano rozkład temperatury w prostopadłościennym klocku dla różnych chwil czasu. Autor napisał własne oprogramowanie pomimo faktu istnienia gotowych rozwiązań, żeby poznać i dokładnie zrozumieć Metodę Elementów Skończonych. Ekspertów od MES jest coraz mniej, dlatego w przyszłości może ich zabraknąć, a niewyspecjalizowani w tym temacie informatycy mogą mieć trudności, żeby poprawić bądź ulepszyć istniejące oprogramowanie. Innym powodem dla którego autor zdecydował się na napisanie własnego rozwiązania było stworzenie takiego oprogramowania, które pozwoliłoby na integrację MES z automatyką, dodatkowo w taki sposób, żeby było ono jak najprostsze od strony użytkowej. Korzystając z gotowych rozwiązań taka integracja mogłaby być niemożliwa, albo wymagać skomplikowanej procedury dla osoby chcącej rozwiązać problemy dotyczące identyfikacji i regulacji.

Drugą częścią pracy było wykorzystanie stworzonego oprogramowania do badań związanych z automatyką a w szczególności z teorią sterowania. Korzystając ze środowiska MATLAB/Simulink dokonano identyfikacji obiektu MES i zastąpiono go członem inercyjnym pierwszego rzędu z opóźnieniem. Otrzymałą transmitancję ciąglą zamknięto pętlą z ujemnym sprzężeniem zwrotnym z regulatorem PID, by następnie pozyskane sygnały sterujące przekazać z powrotem do obiektu MES (opisanego równaniami różniczkowymi zwyczajnymi) i porównać wyniki symulacji. Wyjściem układu regulacji była temperatura w środku klocka, jednakże oprócz przebiegu temperatury w punkcie środkowym, znane były również przebiegi w dowolnych punktach obiektu, co pozwalało kontrolować rozchodzenie się ciepła w całym obszarze.

Autor wiedzę dotyczącą Metody Elementów Skończonych czerpał z literatury a w szczególności z: „The Finite Element Method” Hughes T.J.R. [1], „The Finite Element Method” Taylor R.L. Zienkiewicz O.C. [2] oraz z „Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow” Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhalli N. Seetharamu [3]. Natomiast wiedzę na temat termodynamiki z podręczników: „HEAT AND MASS TRANSFER: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS” Yunus A. Çengel i Afshin J. Ghajar [4] i „Wymiana ciepła” Tomasz S. Wiśniewski Stefan Wiśniewski [5].

# Rozdział 2

## Wstęp teoretyczny do termodynamiki

### 2.1 Termodynamika

Termodynamika - jest nauką o cieple i zajmuje się z badaniem zjawisk cieplnych, a także innych procesów, które są związane z przemianą energii. Innymi słowy, termodynamika dotyczy energetycznych efektów przemian, które wpływają na zmiany energii wewnętrznej analizowanych układów.

### 2.2 Ciepło

Ciepło - wielkość skalarna definiowana jako forma energii  $Q$ , która wraz z pracą wykonaną przez otoczenie  $W$  określa zmianę energii wewnętrznej układu  $\Delta U$  zgodnie z I zasadą termodynamiki:

$$\Delta U = Q + W. \quad (2.1)$$

Ciepło przepływa zawsze z ciała cieplejszego do zimniejszego.

### 2.3 Ciepło właściwe

Ciepło właściwe - ciepło potrzebne do zmiany temperatury  $\Delta T$  ciała o masie  $m$  równej 1 kg o 1 K:

$$c_w = \frac{Q}{m\Delta T}. \quad (2.2)$$

### 2.4 Strumień ciepła

Strumień ciepła – prędkość przepływu ciepła:

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.3)$$

### 2.5 Gęstość powierzchniowa strumienia ciepła

Gęstość powierzchniowa strumienia ciepła - wektor  $\dot{q}_s$  prostopadły do powierzchni izotermicznej, skierowany w stronę spadku temperatury. Wyraża się go jako stosunek strumienia ciepła  $\dot{Q}$  do pola powierzchni  $\mathcal{A}$ , przez którą ten strumień przepływa:

$$\dot{q}_s = \frac{\dot{Q}}{\mathcal{A}}. \quad (2.4)$$

Ciepło wydzielone na powierzchni po czasie  $t$  można wyrazić wzorem:

$$q_s = \int_0^t \dot{q}_s dt. \quad (2.5)$$

## 2.6 Gęstość objętościowa strumienia ciepła

Gęstość objętościowa strumienia ciepła - skalar  $\dot{q}_v$  oznaczający prędkość przepływu ciepła w objętości. Wyraża się go jako stosunek strumienia ciepła  $\dot{Q}$  do objętości  $V$ , przez którą ten strumień przepływa:

$$\dot{q}_v = \frac{\dot{Q}}{V}. \quad (2.6)$$

Ciepło wydzielone w objętości po czasie  $t$  można wyrazić wzorem:

$$q_v = \int_0^t \dot{q}_v dt. \quad (2.7)$$

## 2.7 Transport ciepła

### 2.7.1 Przewodnictwo cieplne

Prawo Fouriera - opisuje przewodnictwo cieplne ciał:

$$\dot{q}_s = -\lambda \nabla T(x, y, z, t). \quad (2.8)$$

Dzięki minusowi po prawej stronie równania (2.8) wektor  $\dot{q}_s$  wskazuje spadek temperatury a nie wzrost, co jest zgodne z jego definicją.

Przewodność cieplna  $\lambda$  charakteryzuje dany ośrodek pod względem zdolności do przewodzenia ciepła. Im większą wartość ma ten parametr tym materiał lepiej przewodzi ciepło.

### 2.7.2 Konwekcja

Konwekcja - zjawisko polegające na ruchu materii w ośrodku, w którym przenosi się ciepło:

$$\dot{Q} = hA(T - T_\infty), \quad (2.9)$$

gdzie:

- $h$  - współczynnik przejmowania ciepła,
- $T_\infty$  - temperatura w dużej odległości od ścianki.

Są dwa znane rodzaje konwekcji:

- konwekcja swobodna – ruch cząstek wywołany na skutek różnicy temperatur,
- konwekcja wymuszona – ruch cząstek wywołany w sposób sztuczny.

## 2.8 Pole temperatury

Pole temperatury może zależeć od czasu lub nie:

- stacjonarne - temperatura w danym punkcie ciała dla  $t \rightarrow \infty$

$$T = T(x, y, z) \quad (2.10)$$

- niestacjonarne - temperatura zależy od położenia i od czasu

$$T = T(x, y, z, t). \quad (2.11)$$

## 2.9 Równanie przewodnictwa cieplnego

Równanie przewodnictwa cieplnego opisuje przepływ ciepła w określonym obszarze przy zadanym warunku początkowym i zadanych warunkach brzegowych (2.14)-(2.17). Można z niego wyznaczyć rozkład temperatury. Równanie przewodnictwa cieplnego może opisywać stacjonarne i niestacjonarne pole temperatury:

- zagadnienie ustalone - opisuje stacjonarne pole temperatury:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q}_v = 0, \quad (2.12)$$

- zagadnienie nieustalone - opisuje niestacjonarne pole temperatury:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \dot{q}_v = \rho c_w \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.13)$$

### 2.9.1 Warunek początkowy

Warunek początkowy - warunek narzucony w chwili początkowej  $t_0$ .

W niniejszej pracy warunkiem początkowym jest temperatura początkowa obszaru. Oznacza to, że wszystkie węzły należące do obszaru mają temperaturę  $T_0$  w chwili  $t_0 = 0$ . Warunek początkowy jest istotny wyłącznie dla zagadnienia nieustalonego. Wtedy wektor temperatur w chwili  $t_0$  równa się  $T_{t_0} = T_0$ .

### 2.9.2 Warunki brzegowe

Warunek brzegowy - warunek, który podawany jest na brzeg obszaru  $\partial G$ .

W niniejszej pracy zostały zrealizowane trzy rodzaje warunków brzegowych:

- Warunek brzegowy I rodzaju – warunek Dirichleta - określony jest przez rozkład temperatury na powierzchni ciała:

$$T(x, y, z) = T_s \text{ dla } (x, y, z) \in \partial G. \quad (2.14)$$

- Warunek brzegowy II rodzaju – warunek Neumanna - podany jest przez rozkład gęstości strumieni ciepła na powierzchni ciała:

$$\lambda \nabla T(x, y, z) = -\dot{q}_s \text{ dla } (x, y, z) \in \partial G. \quad (2.15)$$

W szczególnym przypadku, gdy  $\dot{q}_s = 0$ , otrzymuje się warunek adiabatyczny:

$$\nabla T(x, y, z) = 0 \text{ dla } (x, y, z) \in \partial G. \quad (2.16)$$

- Warunek brzegowy III rodzaju – warunek Fouriera - polega na podaniu temperatury płynu lub gazu otaczającego ciało i współczynnika przejmowania ciepła:

$$\lambda \nabla T(x, y, z) = h(T(x, y, z) - T_\infty) \text{ dla } (x, y, z) \in \partial G. \quad (2.17)$$

Warunki brzegowe podawane są w każdej chwili czasu oprócz  $t_0$  czyli dla czasu  $t \in (t_0, t_c]$ . Warunki brzegowe mogą być stałe lub zmienne w czasie.

Należy pamiętać o tym, że warunków brzegowych nie można nakładać na siebie. Innymi słowy, na jeden węzeł, znajdujący się na brzegu obszaru może zostać podany wyłącznie jeden warunek brzegowy.

# Rozdział 3

## Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych

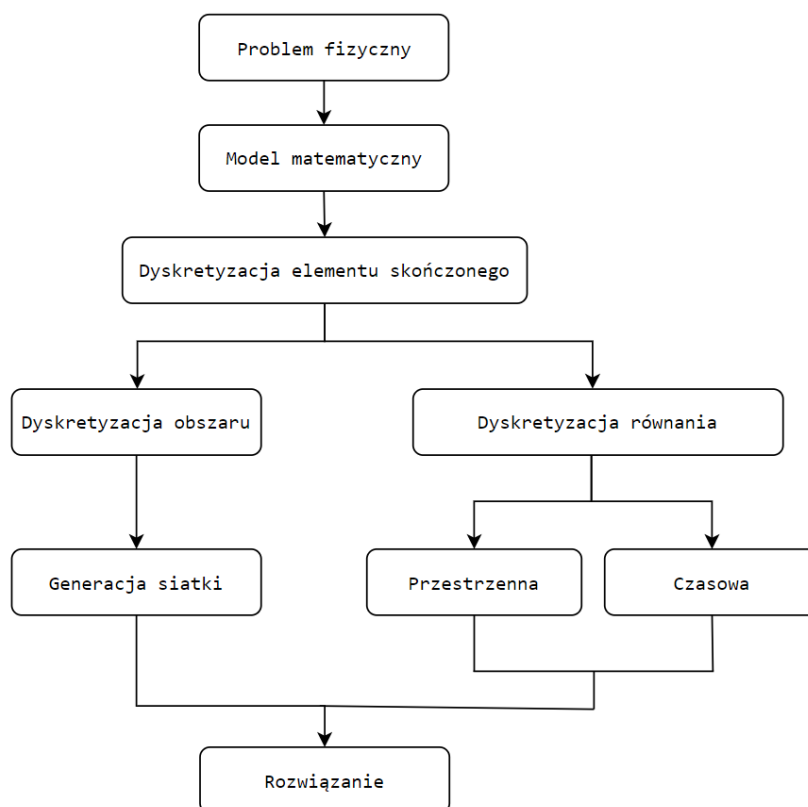
### 3.1 Motywacja

Celem jest znalezienie rozwiązań trójwymiarowych równań przewodnictwa cieplnego opisanych wzorami (2.12) oraz (2.13) o zadanych warunkach początkowo-brzegowych. Okazuje się jednak, że rozwiązania analityczne istnieją tylko i wyłącznie dla problemów jednowymiarowych. W związku z tym równania (2.12) i (2.13) należy rozwiązać numerycznie, czyli znaleźć ich rozwiązania przybliżone. Do tego celu wykorzystać można Metodę Elementów Skończonych.

### 3.2 Podstawowe pojęcia i definicje

#### 3.2.1 Metoda Elementów Skończonych

Metoda Elementów Skończonych (w skrócie MES) - metoda numerycznego rozwiązywania problemów brzegowo-początkowych. Polega na sprowadzeniu danego równania różniczkowego z zadanyymi warunkami początkowo-brzegowymi do układu równań liniowych. Nazwa metody wzięła się stąd, że obszar (na którym określone jest równanie różniczkowe) dzieli się na elementy skończone (albo w skrócie elementy).

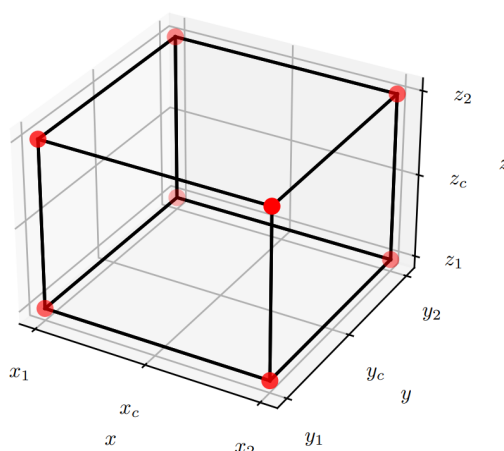


Rysunek 3.1 – Schemat ideowy numerycznego rozwiązania problemu fizycznego poprzez dyskretyzację modelu matematycznego w Metodzie Elementów Skończonych.

### 3.2.2 Element skończony

Element skończony - figura geometryczna płaska lub przestrzenna, dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane węzłami.

W niniejszej pracy założono, że element skończony jest prostopadłościanem, wyznaczonym przez osiem węzłów, umieszczonych w jego narożnikach, tak jak pokazano na rysunku 3.2.



Rysunek 3.2 – Element skończony

Środek elementu przedstawionego na rysunku 3.2 znajduje się w punkcie  $(x_c, y_c, z_c)$ .

Długości boków są oznaczone symbolami  $a$ ,  $b$  i  $c$ , gdzie:

$$a = x_2 - x_1, \quad (3.1)$$

$$b = y_2 - y_1, \quad (3.2)$$

$$c = z_2 - z_1. \quad (3.3)$$

Każdy element może mieć inny kształt geometryczny oraz składać się z innego materiału.

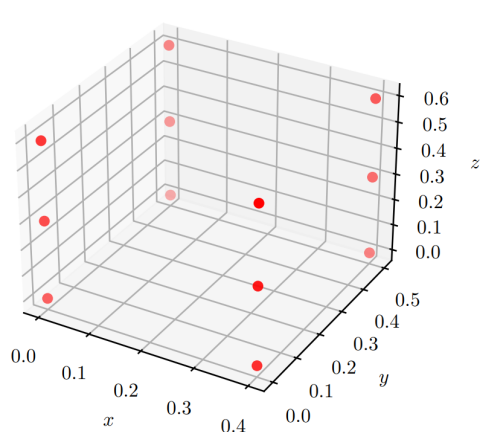
### 3.2.3 Obszar

Obszar - w Metodzie Elementów Skończonych definiowany jest jako zbiór domknięty punktów należący do przestrzeni trójwymiarowej. W MES obszar wymaga dyskretyzacji to znaczy, że należy podzielić go na elementy skończone.

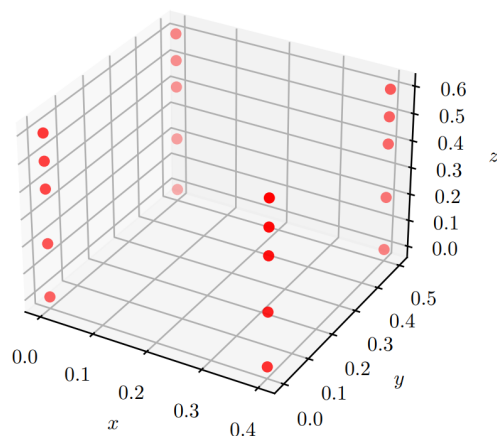
W niniejszej pracy obszarem jest prostopadłościan o dowolnych wymiarach zadanych przez użytkownika.

### 3.2.4 Siatka

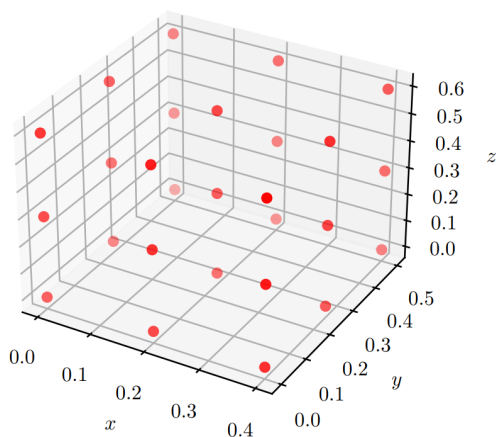
Siatka - składa się z węzłów wszystkich elementów w obszarze. Na rysunku 3.3 przedstawione są przykładowe modele siatek jednorodnych i niejednorodnych.



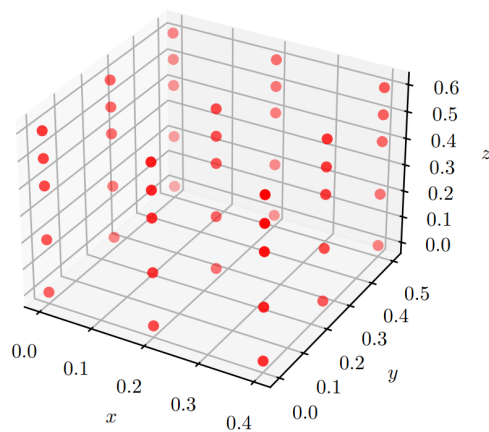
(a) Siatka jednorodna - przykład 1



(b) Siatka niejednorodna - przykład 1



(c) Siatka jednorodna - przykład 2



(d) Siatka niejednorodna - przykład 2

Rysunek 3.3 – Porównanie przykładowych siatek jednorodnych i niejednorodnych



W siatce jednorodnej węzły są od siebie równo oddalone w każdej z osi układu, więc wszystkie prostopadłościennie elementy będą mieć identyczne wymiary. W siatce niejednorodnej parametry te mogą się różnić między elementami. Jednym z powodów stosowania siatki niejednorodnej może być sytuacja, kiedy celem jest zagęszczenie węzłów w pewnym fragmencie obszaru.

Dyskretyzacja obszaru, czyli jego podział na elementy skończone nazywa się procesem generacji siatki.

### 3.2.5 Brzeg

Brzeg - jest to zbiór punktów granicznych danego zbioru.

W niniejszej pracy mowa o brzegu obszaru, a więc o punktach granicznych pewnego zbioru domkniętego należącego do przestrzeni trójwymiarowej. Zatem jeśli obszar jest prostopadłościanem, to jego brzegiem są ściany tej figury.

### 3.2.6 Warunek brzegowy

Należy pamiętać o tym, że warunków brzegowych nie można nakładać na siebie. Innymi słowy, na jeden węzeł, znajdujący się na brzegu obszaru może zostać podany wyłącznie jeden warunek brzegowy.

### 3.2.7 Funkcja kształtu

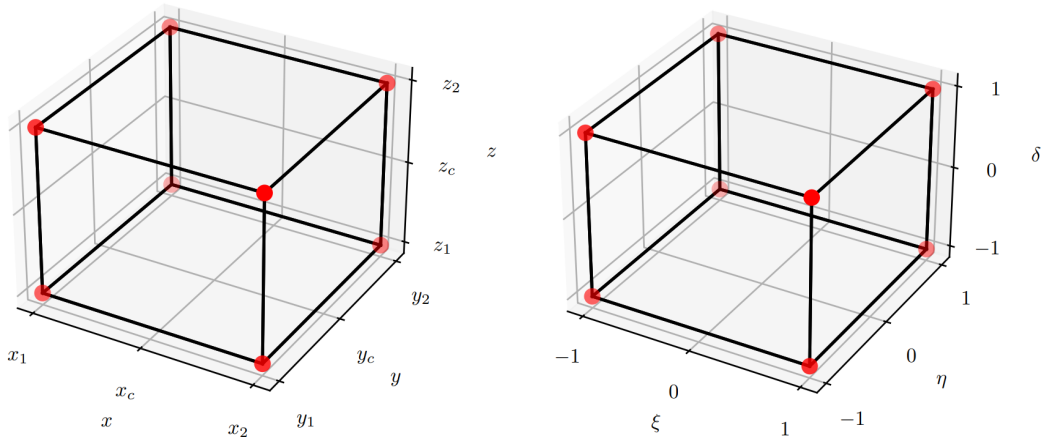
Funkcja kształtu - funkcja interpolacyjna  $\psi$  służąca do opisu rozkładu analizowanej wielkości. Stosujemy je dlatego, ponieważ bez nich temperatura jest znana jedynie w punktach węzłowych. Funkcje kształtu pozwalają więc poznać wartość analizowanej wielkości poza węzłami to znaczy we wnętrzu elementu lub na jego brzegu. Innymi słowy, dzięki funkcjom kształtu można dowiedzieć się, jaka jest temperatura w dowolnym punkcie obszaru.

Jeżeli węzły znajdują się wyłącznie w wierzchołkach, to funkcje interpolacyjne przyjmują postać liniową. W pozostałych przypadkach rząd funkcji kształtu jest równy rzędowi elementu, czyli liczbie węzłów w elemencie w danym wymiarze pomniejszonej o jeden. Liczba funkcji kształtu w pojedynczym elemencie jest równa liczbie jego węzłów. Funkcje kształtu są tak zbudowane, aby w węzłach, których dotyczą ich wartości wynosiły jeden, a pozostałych węzłach przyjmowały wartość zero.

W niniejszej pracy elementy są prostopadłościanami, które mają osiem węzłów w wierzchołkach, więc każdy element ma osiem liniowych funkcji kształtu.

## 3.3 Układ globalny i lokalny elementu skończonego

Każdy element może zostać przedstawiony w układzie lokalnym, w którym jest sześcianiem o krawędzi równej 2, a jego środek znajduje się w punkcie  $(0, 0, 0)$ . Jest to możliwe dzięki odpowiedniej transformacji układu współrzędnych. Sytuację tę ukazano na rysunku 3.4b.



(a) Współrzędne globalne elementu

(b) Współrzędne lokalne elementu

Rysunek 3.4 – Porównanie elementu w układzie globalnym i lokalnym

Aby przekształcić globalne współrzędne danego elementu (rysunek 3.4a) w lokalne (rysunek 3.4b) należy odpowiednio przesunąć i przeskalować osie globalnego układu współrzędnych za pomocą następujących równań:

$$x = \frac{a}{2}\xi + x_c, \implies \xi = \frac{2(x - x_c)}{a}, \quad (3.4)$$

$$y = \frac{b}{2}\eta + y_c, \implies \eta = \frac{2(y - y_c)}{b}, \quad (3.5)$$

$$z = \frac{c}{2}\delta + z_c, \implies \delta = \frac{2(z - z_c)}{c}. \quad (3.6)$$

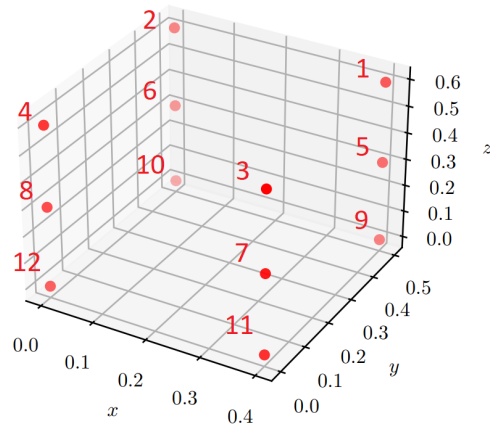
Przedstawienie wszystkich elementów w ich układzie lokalnym znacznie upraszcza wzory i obliczenia w Metodzie Elementów Skończonych.

## 3.4 Numeracja węzłów

Numeracja węzłów jest istotna, ponieważ od to od niej zależy szerokość pasm wyznaczanych macierzy w formacie spf. Czym jest macierz w formacie spf i dlaczego jej rozmiar zależy od numeracji węzłów, wyjaśniono w rozdziale 4.6.1.

### 3.4.1 Układ globalny

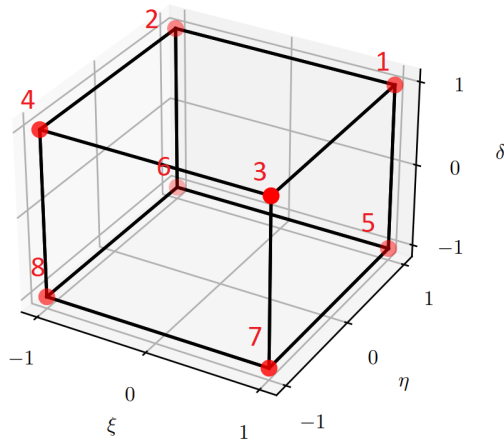
Węzły ponumerowane są według konwencji podanej na rysunku 3.5. Numer węzła  $i$  oznacza, że ma on współrzędne globalne  $x_i, y_i, z_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ . Warto zwrócić uwagę na to, że numeracja przebiega najpierw po osi  $X$ , potem po osi  $Y$  i na końcu po osi  $Z$ .



Rysunek 3.5 – Numeracja węzłów siatki w układzie globalnym

### 3.4.2 Układ lokalny

Węzły w elemencie ponumerowane według konwencji pokazanej na rysunku 3.6. Numer węzła  $i$  oznacza, że ma on współrzędne lokalne  $\xi_i, \eta_i, \delta_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, 8$ .



Rysunek 3.6 – Numeracja węzłów w elemencie opisanym w lokalnym układzie współrzędnych

Na podstawie rysunku 3.6 można zapisać jakie wartości przyjmują  $i$ -te lokalne współrzędne elementu:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \delta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \delta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \delta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \delta_4 \\ \xi_5 & \eta_5 & \delta_5 \\ \xi_6 & \eta_6 & \delta_6 \\ \xi_7 & \eta_7 & \delta_7 \\ \xi_8 & \eta_8 & \delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

## 3.5 Różne sformułowania MES

Metoda Elementów Skończonych ma różne sformułowania:

- sformułowanie wariacyjne,
- sformułowanie Galerkina,
- sformułowanie bilansowe.

W niniejszej pracy skorzystano ze sformułowania Galerkina, ponieważ może być zastosowane w oparciu o różniczkowy opis zagadnienia. Z tego powodu używa się go do rozwiązywania zagadnienia dotyczącego teorii pola (w tym przypadku pola temperatury).

Sformułowanie Galerkina - metoda ważonych reszt, w której wagami są funkcje kształtu. Jej wykorzystanie zademonstrowano w dodatku B.

### 3.6 Główne etapy rozwiązania w MES

Główne etapy, które trzeba zrealizować, żeby otrzymać rozwiązanie w MES:

1. Podział obszaru na elementy skończone. Wygenerowanie siatki zbudowanej z węzłów.
2. Przekształcenie współrzędnych globalnych elementów we współrzędne lokalne.
3. Sformułowanie metody w ujęciu Galerkina dla analizowanego problemu brzegowego w obszarze jednego elementu.
4. Wyznaczenie funkcji kształtu, które interpolują rozkład temperatury wewnątrz elementu.
5. Wyznaczenie układu równań algebraicznych dla zagadnienia ustalonego lub układu równań różniczkowych zwyczajnych dla zagadnienia nieustalonego dla jednego elementu za pomocą metody Galerkina.
6. Łączenie układów równań dla poszczególnych elementów w celu utworzenia jednego globalnego układu równań temperatur w węzłach dla całego analizowanego obszaru.
7. Uwzględnienie parametrów występujących w warunkach brzegowych w globalnym układzie równań.
8. Rozwiązanie układu równań algebraicznych w przypadku zagadnienia ustalonego lub układu równań różniczkowych zwyczajnych w przypadku zagadnienia nieustalonego.
9. Przedstawienie wyników obliczeń w formie wykresów.

### 3.7 Równania przewodnictwa cieplnego rozwiązywane przez MES

Zakładając, że przewodność cieplna w każdym wymiarze jest taka sama w celu uproszczenia zagadnienia:

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda, \quad (3.8)$$

wtedy równania różniczkowe (2.12) oraz (2.13) przyjmą postać:

- zagadnienie ustalone:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v = 0, \quad (3.9)$$

- zagadnienie nieustalone:

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v = \rho c_w \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.10)$$

W niniejszej pracy zamiast pełnych równań (2.12) i (2.13) rozwiązywane będą zagadnienia (3.9) oraz (3.10), które są zgodne z założeniami (3.8).

## 3.8 Wzory użyte do obliczeń w MES

### 3.8.1 Konwencja oznaczeń macierzy

Macierze lub wektory dotyczące całego obszaru mają rozmiary zależne od liczby węzłów to znaczy  $n \times n$  lub  $n \times 1$ . Przyjęte oznaczenia:

- $T$  - wektor temperatur w węzłach,
- $K$  - macierz przewodności cieplnej - macierz symetryczna i pasmowa, czyli o zerowych elementach z wyjątkiem leżących na głównej przekątnej i bezpośrednio nad i pod główną przekątną,
- $P$  - wektor źródeł ciepła,
- $C$  - macierz pojemności cieplnej - macierz symetryczna i pasmowa,
- $A$  - macierz główna układu równań dla zagadnienia nieustalonego - macierz symetryczna i pasmowa,
- $B$  - wektor wyrazów wolnych dla zagadnienia nieustalonego.

Macierze lub wektory dotyczące pojedynczego elementu mają rozmiary zależne od liczby węzłów w elemencie to znaczy  $8 \times 8$  lub  $8 \times 1$ . Każdemu elementowi skończonemu można przypisać unikalny numer  $e = 1, 2, \dots, n_e$ , dlatego macierze i wektory dotyczące elementu są oznaczane indeksem górnym „e”:

- $T^e$  - wektor temperatur w węzłach elementu,
- $K^e$  - macierz przewodności cieplnej elementu - macierz symetryczna i pasmowa,
- $P^e$  - wektor źródeł ciepła elementu,
- $C^e$  - macierz pojemności cieplnej elementu - macierz symetryczna i pasmowa,
- $A^e$  - macierz główna układu równań dla zagadnienia nieustalonego dla elementu - macierz symetryczna i pasmowa,
- $B^e$  - wektor wyrazów wolnych dla zagadnienia nieustalonego dla elementu.

### 3.8.2 Zagadnienie ustalone

Żeby rozwiązać zagadnienie ustalone (3.9) to znaczy wyznaczyć wektor temperatur  $T$  we wszystkich węzłach dla czasu  $t \rightarrow \infty$  należy rozwiązać układ równań algebraicznych:

$$KT = P. \quad (3.11)$$

Jednakże żeby otrzymać układ równań (3.11) należy odpowiednio dodać wszystkie układy równań dla elementów skończonych:

$$K^e T^e = P^e \quad (3.12)$$

w celu utworzenia jednego globalnego układu równań temperatur w węzłach dla całego analizowanego obszaru. Oznacza to, że elementy macierzy  $K_{ij}$  i  $P_i$  będą sumą odpowiednich elementów macierzy  $K_{ij}^e$  i  $P_i^e$ :

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} K_{ij}^e, \quad (3.13)$$

$$P_i = \sum_{e=1}^{n_e} P_i^e, \quad (3.14)$$

gdzie  $K_{ij}^e$  i  $P_i^e$  są opisane wzorami wyprowadzonymi w dodatku B:

$$K_{ij}^e = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (3.15)$$

$$P_i^e = \dot{q}_v \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \psi_i dx dy dz, \quad (3.16)$$

gdzie funkcja kształtu  $\psi(x, y, z)$  podana jest wzorem wyprowadzonym w dodatku A:

$$\psi_i(x, y, z) = \frac{1}{8} (1 + \xi(x, y, z) \xi_i) (1 + \eta(x, y, z) \eta_i) (1 + \delta(x, y, z) \delta_i). \quad (3.17)$$

Żeby wzory (3.15) i (3.16) przedstawić za pomocą lokalnych współrzędnych należy wykonać szereg przekształceń z tym związanych. Wzory na elementy macierzy  $K^e$  i  $P^e$  opisane w układzie lokalnym zostały wyprowadzone w dodatku C i przyjmują postać:

$$K_{ij}^e = \lambda \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \delta} \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} \right) d\xi d\eta d\delta, \quad (3.18)$$

$$P_i^e = \dot{q}_v \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i d\xi d\eta d\delta, \quad (3.19)$$

gdzie funkcja kształtu  $\psi(\xi, \eta, \delta)$  podana jest wzorem:

$$\psi_i(\xi, \eta, \delta) = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i). \quad (3.20)$$

Podstawiając (3.20) do (3.18) i (3.19), a następnie całkując uzyskane równania otrzymuje się wzory końcowe:

$$K_{ij}^e = \frac{1}{144} \lambda \left( \frac{ab\delta_i\delta_j(\eta_i\eta_j + 3)(\xi_i\xi_j + 3)}{c} + \frac{ac\xi_i\xi_j(\delta_i\delta_j + 3)(\eta_i\eta_j + 3)}{b} + \frac{bc\eta_i\eta_j(\delta_i\delta_j + 3)(\xi_i\xi_j + 3)}{a} \right), \quad (3.21)$$

$$P_i^e = \frac{1}{8} \dot{q}_v abc. \quad (3.22)$$

Element macierzy kolumnowej  $P_i^e$  jest ściśle związany z węzłem o numerze lokalnym  $i$ . Podobnie element macierzy  $K_{ij}^e$  dotyczy węzłów o numerach lokalnych  $i$  i  $j$ .

### 3.8.3 Zagadnienie nieustalone

Żeby rozwiązać zagadnienie nieustalone 3.10 to znaczy wyznaczyć wektor temperatur  $T_{t+\Delta t}$  we wszystkich węzłach w chwili  $t + \Delta t$  należy rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych wyznaczony w dodatku D:

$$2K + \frac{3}{\Delta t} C T_{t+\Delta t} = \left( \frac{3}{\Delta t} C - K \right) T_t + 3P. \quad (3.23)$$

Jeżeli macierze  $A$  i  $B$  oznaczy się:

$$A = 2K + \frac{3}{\Delta t} C, \quad (3.24)$$

$$B = \left( \frac{3}{\Delta t} C - K \right) T_t + 3P, \quad (3.25)$$

to układ równań przyjmuje postać:

$$A T_{t+\Delta t} = B. \quad (3.26)$$

Uwzględniając warunek początkowy wszystkie węzły w chwili  $t = t_0$  mają temperaturę  $T_0$ , co można zapisać:

$$T_{t_0} = T_0. \quad (3.27)$$

Podobnie jak to zostało omówione w rozdziale 3.8.2 dotyczącym zagadnienia ustalonego, żeby otrzymać układ równań (3.26) należy odpowiednio dodać wszystkie układy równań dla elementów skończonych:

$$A^e T_{t+\Delta t}^e = B^e \quad (3.28)$$

czyli:

$$2K^e + \frac{3}{\Delta t} C^e T_{t+\Delta t}^e = \left( \frac{3}{\Delta t} C^e - K^e \right) T_t^e + 3P^e \quad (3.29)$$

w celu utworzenia jednego globalnego układu równań temperatur w węzłach dla całego analizowanego obszaru. Sumy dla  $K_{ij}$  i  $P_i$  są opisane równaniami (3.13) i (3.14), natomiast dla  $C_{ij}$  wynosi ona:

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^{n_e} C_{ij}^e, \quad (3.30)$$

gdzie  $C_{ij}^e$  są opisany jest wzorem wyprowadzonym w dodatku B:

$$C_{ij}^e = \rho c_w \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \psi_j \psi_i dx dy dz, \quad (3.31)$$

gdzie  $\psi(x, y, z)$  jest funkcją kształtu podaną wzorem (3.17).

Żeby wzór (3.31) przedstawić za pomocą lokalnych współrzędnych należy wykonać szereg przekształceń z tym związanych. Wzór na elementy macierzy  $C^e$  opisany w układzie lokalnym został wyprowadzony w dodatku C i przyjmuje postać:

$$C_{ij}^e = c_w \rho \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\xi d\eta d\delta, \quad (3.32)$$

gdzie funkcja kształtu  $\psi(\xi, \eta, \delta)$  podana jest wzorem (3.20).

Podstawiając (3.20) do (3.32), a następnie całkując uzyskane równanie otrzymuje się wzór końcowy:

$$C_{ij}^e = \frac{1}{1728} c_w \rho a b c \left( \delta_i \delta_j + 3 \right) \left( \eta_i \eta_j + 3 \right) \left( \xi_i \xi_j + 3 \right). \quad (3.33)$$

Element macierzy  $C_{ij}^e$  jest ściśle związany z węzłami o numerach lokalnych  $i$  i  $j$ .

### 3.8.4 Warunek brzegowy I rodzaju

Wyprowadzenie wzorów na warunek brzegowy I rodzaju zostało podane w dodatku E.

W  $i$ -tym węźle znajdującym się na brzegu narzucony jest warunek I rodzaju, czyli  $i$ -ty węzeł przyjmuje zadaną temperaturę  $T_s$ :

$$T_i = T_s. \quad (3.34)$$

Żeby osiągnąć taki rezultat należy zmodyfikować  $K_{ii}$  oraz  $P_i$  w następujący sposób:

$$K'_{ii} = K_{ii} \cdot 10^8, \quad (3.35)$$

$$P'_i = K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_s. \quad (3.36)$$

Współczynnik  $10^8$  pełni funkcję bardzo dużej liczby, co wyjaśniono w dodatku E.

### 3.8.5 Warunek brzegowy II rodzaju

Wyprowadzenie wzorów na warunek brzegowy II rodzaju zostało podane w dodatku F.

Wzór na warunek brzegowy II rodzaju zależy od tego w jaki sposób strumień cieplny pada na ściankę elementu. Można zrozumieć jak wyprowadzić szukany wzór poprzez analogie na następującym przykładzie. Załóżmy, że strumień cieplny pada na ściankę  $YZ$ . Wtedy:

$$P'^e = P^e + \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T. \quad (3.37)$$

Element macierzy kolumnowej  $P_i^e$  jest ściśle związany z węzłem o numerze lokalnym  $i$ . Zatem jeśli strumień ciepła oddziałuje wyłącznie na węzły o numerze lokalnym 2, 4, 6 i 8, stąd wektor  $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$  wartości równe zero dla tych węzłów, na które strumień nie wpływa.



### 3.8.6 Warunek brzegowy III rodzaju

Wyprowadzenie wzorów na warunek brzegowy III rodzaju zostało podane w dodatku G.

Wzór na warunek brzegowy III rodzaju zależy od tego w jaki sposób konwekcja oddziałuje na ściankę elementu. Można zrozumieć jak wyprowadzić szukany wzór poprzez analogie na następującym przykładzie. Załóżmy, że konwekcja zachodzi na ścianie elementu  $YZ$ . Wtedy:

$$P^{te} = P^e + hT_\infty \frac{b}{2} \frac{c}{2} [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T, \quad (3.38)$$

$$K_{ij}^{te} = K_{ij}^e + h \frac{b}{2} \frac{c}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Element macierzy kolumnowej  $P_i^e$  jest ściśle związany z węzłem o numerze lokalnym  $i$ . Podobnie element macierzy  $K_{ij}^e$  dotyczy węzłów o numerach lokalnych  $i$  i  $j$ . Można zauważyć, że jeśli na węzły narzucony jest trzeci warunek brzegowy, to niektóre elementy macierzy mnoży się przez liczbę  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{2}{9}$  lub  $\frac{4}{9}$  według następujących reguł:

- jeśli węzły  $i$  oraz  $j$  usytuowane są względem siebie po przekątnej, to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{1}{9}$ ,
- jeśli węzły  $i$  oraz  $j$  leżą w linii równoległej do którejś z osi układu współrzędnych, to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{2}{9}$ ,
- jeśli  $i = j$  to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{4}{9}$ .

### 3.8.7 Wyznaczenie temperatury w dowolnym punkcie obszaru

Żeby móc odczytać temperaturę w innym punkcie niż punkcie węzłowym należy w jakiś sposób zaproksymować jej wartość. Do tego celu wykorzystuje się funkcje kształtu, które przybliżają wartość temperatury w elemencie skończonym. Zatem, żeby wyznaczyć temperaturę w dowolnym punkcie  $(x, y, z)$  należącym do obszaru trzeba zsumować temperaturę we wszystkich węzłach elementu, który zawiera zadany punkt  $(x, y, z)$ :

$$T(x, y, z) = \sum_i^8 T_i^e \psi_i(x, y, z), \quad (3.40)$$

gdzie  $\psi_i$  opisane jest wzorem (3.17), a zależności między globalnymi a lokalnymi współrzędnymi podane są w (3.4)-(3.6).

### 3.9 Podsumowanie

- Metoda Elementów Skończonych służy do numerycznego rozwiązywania problemów brzegowo-początkowych.
- Element skończony ma kształt prostopadłościanu i składa się z ośmiu węzłów umieszczonych w jego narożnikach.
- Obszarem jest prostopadłościanem o wielkości zadanej przez użytkownika.
- Brzeg rozumiany jest jako powierzchnia prostopadłościanu.
- Siatka zbudowana jest z elementów.
- Podział obszaru na elementy nazywa się generacją siatki.
- Funkcja kształtu służy do opisu rozkładu analizowanej wielkości. Dzięki niej można dowiedzieć się jaka jest temperatura w dowolnym punkcie obszaru.
- Wszystkie elementy przedstawiane są we własnych układach lokalnych zamiast w globalnych, żeby uprościć późniejsze obliczenia.

# Rozdział 4

## Opis i działanie programu obliczającego MES

### 4.1 Wstęp

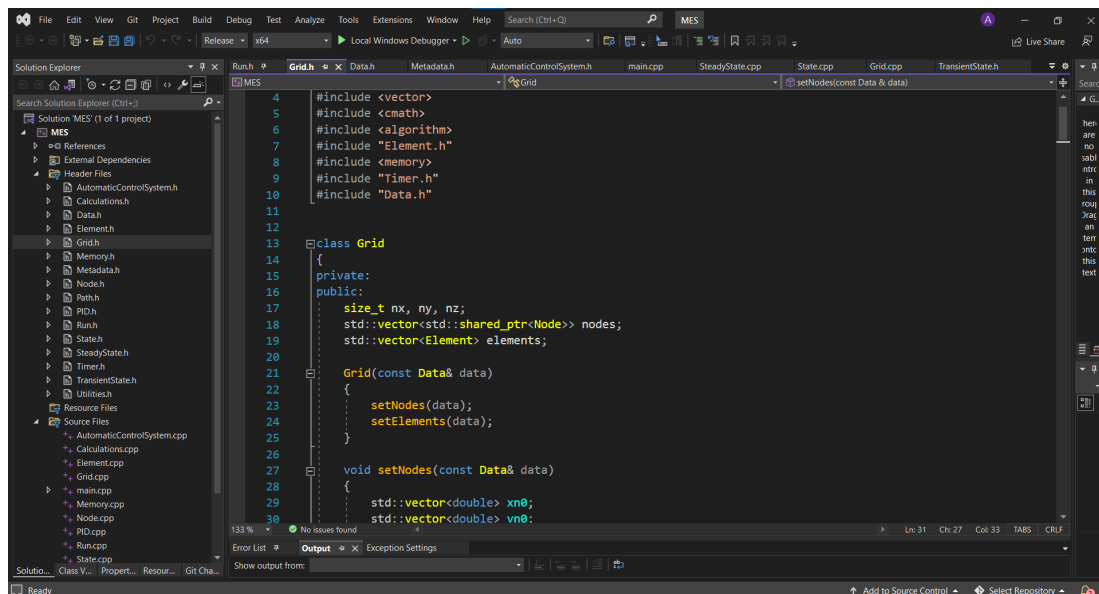
Program obliczający rozwiązania w Metodzie Elementów Skończonych, generujący siatkę i odczytujący wejściowy plik tekstowy został napisany w języku C++ ze względu na jego szybkość, ponieważ obliczenia w MES bywają bardzo czasochłonne.

Graficzne reprezentacje wyników zostały stworzone w Pythonie z wykorzystaniem modułów między innymi takich jak matplotlib czy numpy.

Wyprowadzone wzory wykorzystane wyznaczone zostały w aplikacji MATLAB z wykorzystaniem narzędzia Symbolic Math Toolbox służącym do wykonywania obliczeń symbolicznych.

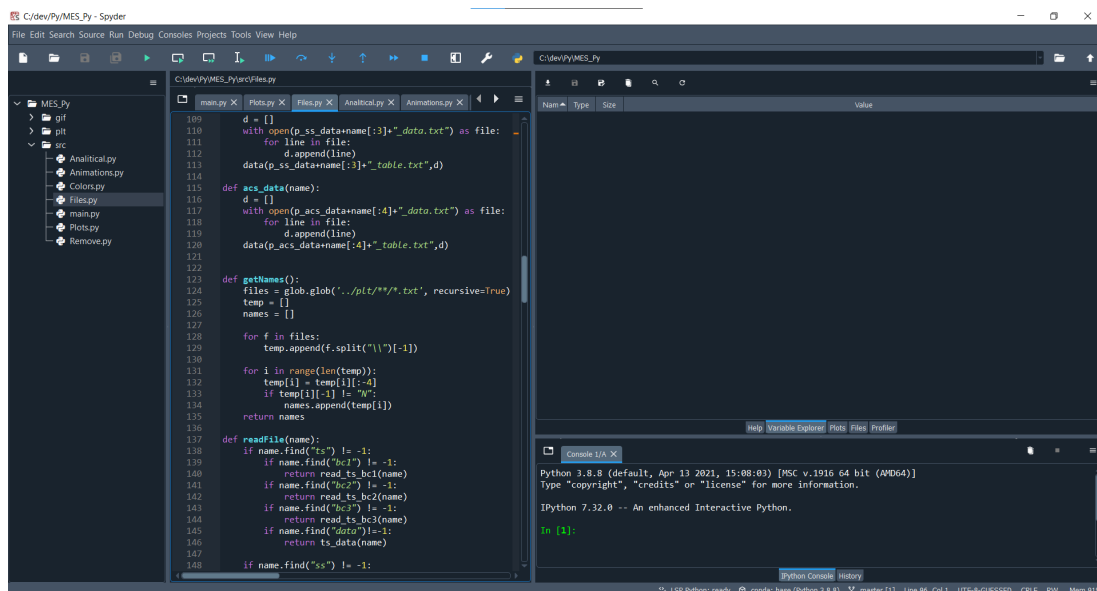
### 4.2 Wykorzystane środowiska programistyczne

Do napisania programu w języku C++ rozwiązującego MES wykorzystano zintegrowane środowisko programistyczne Visual Studio 2022. Przykładowy zrzut ekranu pokazano na rysunku 4.1.



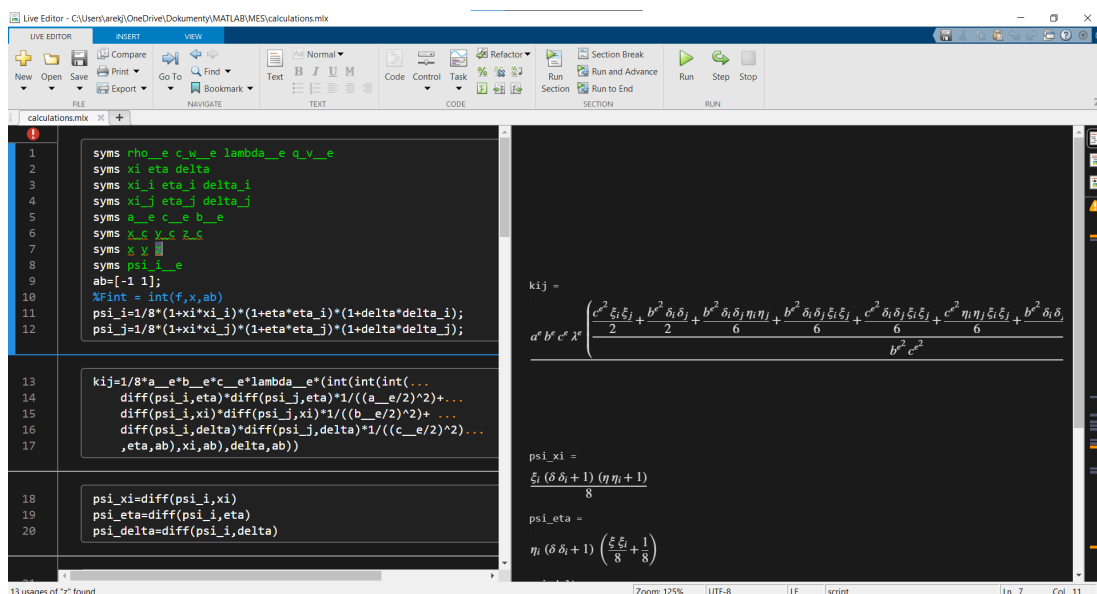
Rysunek 4.1 – Visual Studio 2022 - zdjęcie pokazowe

Do stworzenia wykresów dwuwymiarowych i trójwymiarowych w Pythonie wykorzystano środowisko Spyder 5, które jest szeroko wykorzystywane przez inżynierów w celach naukowych. Przykładowy zrzut ekranu pokazano na rysunku 4.2.



Rysunek 4.2 – Spyder 5 - zdjęcie pokazowe

Do obliczeń symbolicznych wykorzystano aplikację MATLAB R2022a. Przykładowy zrzut ekranu pokazano na rysunku 4.3.



Rysunek 4.3 – MATLAB R2022a - zdjęcie pokazowe

## 4.3 Struktura pliku tekstowego z danymi wejściowymi

Zarówno plikami wejściowymi jak i wyjściowymi są pliki tekstowe, które są odczytywane lub dane są do nich zapisywane. Warto skupić się na zaprojektowaniu uporządkowanej i przemyślanej struktury pliku tekstowego. Powodem może być duża liczba danych wejściowych, w których można się pogubić. Od wejściowego pliku tekstowego zależą możliwości napisanego programu na przykład czy program będzie w stanie zrealizować obszar wielowarstwowy, stworzyć siatkę niejednorodną czy obsłużyć dowolną liczbę warunków brzegowych.

W niniejszej pracy program przyjmuje pliki tekstowe o następującej strukturze:

Area	Conditions	Identification
(	(	(
{	T0 = 293	Am = 10
x1 = 0	BoundaryCondition1	f0 = 0.0005
x2 = 0.4	{	y0 = 293
y1 = 0	x1 = 0	);
y2 = 0.5	x2 = 0.4	AutomaticControlSystem
z1 = 0	y1 = 0	(
z2 = 0.6	y2 = 0	yIn = 270
lambda = 79	z1 = 0	PID
rho = 7700	z2 = 0.6	(
cw = 478	T = 400	kp = 10
qv = 0	control = 1	Ti = 100
}	}	Td = 5
);	BoundaryCondition2	Smin = -5
Time	{	Smax = 5
(	x1 = 0	);
dt = 1	x2 = 0	);
tc = 400	y1 = 0	Monitor
);	y2 = 0.5	(
Density	z1 = 0	{
(	z2 = 0.6	x = 0.2
l_x = 1	qs = 2000	y = 0.25
l_y = 1	}	z = 0.3
l_z = 5	BoundaryCondition3	},
);	{	{
Points	x1 = 0	x = 0.1
(	x2 = 0.4	y = 0.125
{	y1 = 0	z = 0.15
x = 0.2	y2 = 0.5	}
y = 0.25	z1 = 0	);
z = 0.3	z2 = 0	
}	h = 5	
);	T = 2000	
	}	
	);	

Tabela 4.1 – Struktura danych wejściowych podawanych w pliku tekstowym stosowana w zrealizowanej pracy

Można zauważyć, że plik tekstowy podzielony jest sekcje zatytułowane nagłówkami na przykład „Area”. Dane należące do określonej sekcji znajdują się wewnątrz nawiasów okrągłych „()”.

Niektóre dane w sekcjach podawane są między nawiasami klamrowymi „{}”, które oznaczają, że użytkownik może umieścić więcej podobnych struktur. Oznacza to, że można umieścić kilka struktur danych jakiegoś typu na przykład:

```
Monitor
(
{
x = 0.2
y = 0.25
z = 0.3
},
```

```
{
x = 0.1
y = 0.125
z = 0.15
}
);
```

Dodając wiele struktur do danych sekcji danych można tworzyć na przykład obszary składające się z wielu materiałów, siatkę niejednorodną, wiele warunków brzegowych tego samego rodzaju czy wiele punktów, w których mierzona jest temperatura.

Wyjaśnienie znaczenia poszczególnych sekcji w wejściowym pliku tekstowym:

- `Area(...)`; - zawiera dane dotyczące właściwości obszaru,
- `Time(...)`; - zawiera dane dotyczące czasu,
- `Density(...)`; - zawiera dane dotyczące zagęszczenia siatki,
- `Points(...)`; - zawiera dane dotyczące punktów, które pozwalają na pomiar temperatury w kilku punktach, a następnie wyciągnięcie średniej arytmetycznej i otrzymanie temperatury punktu referencyjnego,
- `Conditions(...)`; - zawiera dane dotyczące warunku początkowego i warunków brzegowych,
- `Identification(...)`; - zawiera dane dotyczące sinusoidalnego sygnału wejściowego potrzebnego do zidentyfikowania obiektu,
- `AutomaticControlSystem(...)`; - zawiera dane dotyczące automatycznego układu regulacji,
- `Monitor(...)`; - zawiera dane dotyczące punktów, w których ma być mierzona temperatura (oprócz punktu referencyjnego).

## 4.4 Generator siatki

Generator siatki to oprogramowanie tworzące siatkę stworzoną z węzłów i elementów skończonych.

Istnieją powszechnie dostępne oprogramowania służące do generacji siatki związanych z problemami dotyczącymi MES. Jednym z najbardziej znanych jest GNU Gmsh, który służy do tworzenia siatek trójwymiarowych o zadanych kształtach i rozmiarach. Jednakże pomimo faktu istnienia gotowego oprogramowania skorzystano z własnego, autorskiego generatora siatki napisanego w C++ specjalnie na potrzeby niniejszej pracy.

Program generuje siatkę o zadanej gęstości na podstawie danych wejściowych z pliku tekstowego. Możliwe jest zrealizowanie siatki jednorodnej lub niejednorodnej, a także stworzenie obszaru wielowarstwowego składającego się z wielu materiałów.

#### 4.4.1 Implementacja siatki jednorodnej przez użytkownika

Implementacja siatki jednorodnej przez użytkownika w wejściowym pliku tekstowym i schemat poglądowy obszaru jaki wówczas wtedy powstaje:

```
Area
(
{
x1 = 0
x2 = 5
y1 = 0
y2 = 1
z1 = 0
z2 = 3
lambda = 79
rho = 7700
cw = 478
qv = 0
}
);
```

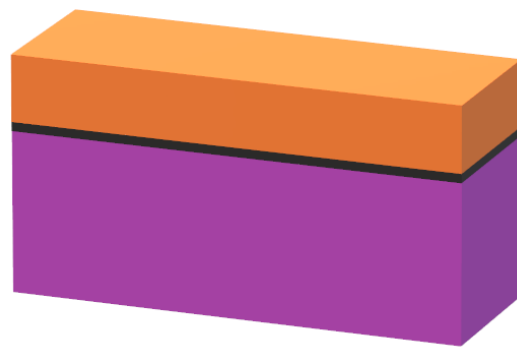


Rysunek 4.4 – Schemat obszaru jednowarstwowego zrobionego ze stali

#### 4.4.2 Implementacja obszaru wielowarstwowego przez użytkownika

Implementacja obszaru wielowarstwowego przez użytkownika w wejściowym pliku tekstowym i schemat poglądowy tego obszaru:

```
Area
(
{
x1 = 0
x2 = 5
y1 = 0
y2 = 1
z1 = 0
z2 = 3
lambda = 79
rho = 7700
cw = 478
qv = 0
},
{
x1 = 0
x2 = 5
y1 = 0
y2 = 1
z1 = 3
z2 = 4
lambda = 0.16
rho = 1500
cw = 2400
qv = 0
}
);
```



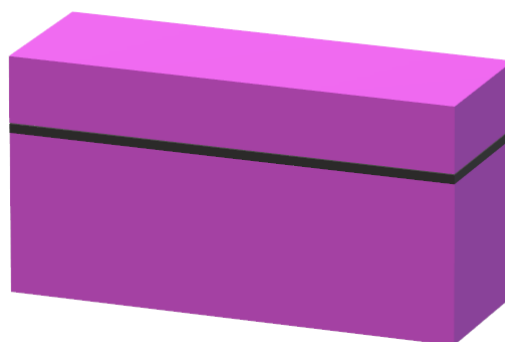
Rysunek 4.5 – Obszar wielowarstwowy stworzony z dwóch podobszarów ze stali i drewna

### 4.4.3 Implementacja siatki niejednorodnej przez użytkownika

Siatkę niejednorodną można stworzyć z kilku podobszarów o takich samych parametrach materiałowych połączonych w jeden obszar.

Implementacja siatki niejednorodnej przez użytkownika w wejściowym pliku tekstowym i schemat poglądowy obszaru jaki wówczas wtedy powstaje:

```
Area
(
{
x1 = 0
x2 = 5
y1 = 0
y2 = 1
z1 = 0
z2 = 3
lambda = 79
rho = 7700
cw = 478
qv = 0
},
{
x1 = 0
x2 = 5
y1 = 0
y2 = 1
z1 = 3
z2 = 4
lambda = 79
rho = 7700
cw = 478
qv = 0
}
);
```



Rysunek 4.6 – Schemat obszaru jednowarstwowego zrobionego ze stali, ale składający się z dwóch podobszarów zrobionych z tego samego materiału

### 4.4.4 Zagęszczanie siatki

Jeśli  $n_x$ ,  $n_y$  i  $n_z$  są liczbami węzłów w każdym wymiarze, to liczba wszystkich węzłów  $n$  opisana jest równaniem:

$$n = n_x n_y n_z, \quad (4.1)$$

a liczbę elementów  $n_e$  można policzyć ze wzoru:

$$n_e = (n_x - 1)(n_y - 1)(n_z - 1). \quad (4.2)$$

Zagęszczenie siatki ustawiane jest z poziomu wejściowego pliku tekstowego w sekcji pod nazwą „Density”:

```
Density
(
l_x = 1
l_y = 2
l_z = 3
);
```



Liczby węzłów  $n_x$ ,  $n_y$  i  $n_z$  zależą od ich poziomów zagęszczenia  $l_x$ ,  $l_y$  i  $l_z$ , które są wykładnikami liczby 2. Jeśli obszar składa się z jednego podobszaru, to wzory na liczby węzłów przyjmują postać:

$$n_x = 1 + 2^{l_x}, \quad (4.3)$$

$$n_y = 1 + 2^{l_y}, \quad (4.4)$$

$$n_z = 1 + 2^{l_z}. \quad (4.5)$$

Z każdym zwiększaniem poziomu zagęszczenia o jeden dodaje się węzły pomiędzy te już istniejące, stąd potęga liczby dwa w powyższych wzorach. Tym sposobem węzły są rozmieszczane od siebie w równych odległościach, tworząc siatkę jednorodną.

Jeśli obszar składa się z wielu podobszarów, to wzory na liczbę węzłów wzdłuż poszczególnych wymiarów przyjmują postać:

$$n_x = 1 + o_x 2^{l_x} \quad (4.6)$$

$$n_y = 1 + o_y 2^{l_y} \quad (4.7)$$

$$n_z = 1 + o_z 2^{l_z}, \quad (4.8)$$

gdzie  $o_x$ ,  $o_y$ ,  $o_z$  - liczby podobszarów wzdłuż osi układu.

## 4.5 Metody numeryczne stosowane w programie

### 4.5.1 Metoda Choleskiego rozwiązywania układu równań

W niniejszej pracy, żeby rozwiązać układy równań:

- dla zagadnienia nieustalonego:

$$KT = P \quad (4.9)$$

- dla zagadnienia nieustalonego:

$$AT_{t+\Delta t} = B \quad (4.10)$$

skorzystano z metody numerycznej zwanej metodą Choleskiego. Wybór ten nie jest jednak przypadkowy. Zalety tej metody wyjaśniono w rozdziale 4.6.3.

Metoda Choleskiego - metoda dekompozycji. Polega na zastąpieniu jednego układu równań opisanego macierzą pełną dwoma układami równań opisanymi macierzami trójkątnymi. Metoda ta ma jednak pewne ograniczenia, to znaczy warunki, które są narzucone i muszą być spełnione, żeby móc z niej skorzystać:

- $A = A^T$  - macierz  $A$  musi być symetryczna,
- $X^T A X > 0$  - macierz  $A$  musi być dodatnio określona. W tym przypadku macierz  $A$  można przedstawić w postaci rozkładu  $A = LL^T$ , w którym  $L$  jest macierzą trójkątną dolną.

Układ równań zapisany z wykorzystaniem macierzy trójkątnej  $L$ :

$$\begin{aligned} AX &= B \\ LL^T X &= B \end{aligned} \quad (4.11)$$

można zastąpić dwoma równoważnymi układami:

$$LY = B, \quad (4.12)$$

$$L^T X = Y \quad (4.13)$$

Wzór ogólny na macierz  $L$  można wyznaczyć na podstawie następującego przykładu:

$$\begin{aligned} A &= LL^T \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ 0 & L_{22} & L_{32} \\ 0 & 0 & L_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{21} & L_{11}L_{31} \\ L_{11}L_{21} & L_{21}^2 + L_{22}^2 & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} \\ L_{11}L_{31} & L_{21}L_{31} + L_{22}L_{32} & L_{31}^2 + L_{32}^2 + L_{33}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Zatem wzory ogólne na elementy macierzy  $L$  opisane są wzorami:

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2}, \quad (4.15)$$

$$L_{ij} = \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}L_{ik} \right) \frac{1}{L_{jj}} \quad (4.16)$$

dla

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, \dots, n \\ i &= j + 1, \dots, n \end{aligned}$$

W programie skorzystano z metody Choleskiego, ponieważ jest bardziej oszczędna od innych metod dokładnych takich jak na przykład eliminacja Gaussa. Wadą metody Choleskiego są jej ograniczenia dotyczące macierzy układu równań  $A$ , jednakże przy rozwiązywaniu problemu Metodą Elementów Skończonych macierz ta jest zawsze symetryczna i dodatnio określona a więc spełnia wymagane warunki.

## 4.6 Optymalizacja programu

### 4.6.1 Stosowanie macierzy w formacie spf

Jeżeli macierz jest pasmowa oraz symetryczna, to można zapisać ją w formacie spf.

Format macierzy spf (ang. symmetric-profile format) - wykorzystuje symetrię macierzy. Macierz w tym systemie przechowywana jest kolumnami, począwszy od elementu położonego na diagonalu do ostatniego niezerowego elementu w kolumnie.

W programie zastosowano taką konwencję, że zapisywana jest wyłącznie górna połowa pasma (równie dobrze można by zapisać dolną część pasma zamiast górnej). Na przykład jeśli mamy taką macierz pasmową i symetryczną:

$$X = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ d & b & e \\ 0 & e & c \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

to jej postać w formacie spf dla górnej połowy pasma jest następująca:

$$X_{\text{spf}} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Zarówno macierz przewodności cieplnej  $K$  jak i macierz pojemności cieplnej  $C$  są symetryczne oraz pasmowe, więc można je przedstawić w formacie spf:

$$\begin{aligned} K &\rightarrow K_{\text{spf}}, \\ C &\rightarrow C_{\text{spf}}. \end{aligned}$$

Jeśli  $K$  i  $C$  są symetryczne i pasmowe, to macierz  $A$  też musi być symetryczna i pasmowa, więc można przedstawić ją w formacie spf:

$$A \rightarrow A_{\text{spf}}.$$

Macierze w formacie spf mają mniejszy rozmiar od macierzy kwadratowych  $M \times M$ , jednakże pomimo tego zawierają takie same informacje jak macierze pasmowe i symetryczne ze względu na ich specyfikę. W ogólności macierze w formacie spf mają rozmiar  $M \times N$ , gdzie wymiar  $N$  nazywany jest szerokością pasma. W niniejszej pracy macierze spf  $A_{\text{spf}}$ ,  $K_{\text{spf}}$ ,  $C_{\text{spf}}$  mają wymiary zależne od liczby węzłów  $n$ :

$$M = n, \quad (4.19)$$

$$N = n_x n_y + n_x + 2. \quad (4.20)$$

Wymiar  $N$  jest odległością w elemencie skończonym między węzłem o najmniejszym numerze a węzłem o największym numerze. Zależność (4.20) opisana jest takim wzorem ze względu na przyjętą numerację globalną, którą pokazano na rysunku 3.5. Jeśli węzły ponumerowano by w inny sposób, to wzór (3.5) miał by inną postać zależną od przyjętej konwencji.

Stosowanie macierzy w formacie spf znacznie ogranicza liczbę pętli wykonywanych przez program (szczególnie przy siatkach o dużej liczbie węzłów).

Im mniejsza jest macierz, tym mniej obliczeń jest wymaganych ze względu na mniejszą liczbę wykonanych pętli, co skutkuje zredukowaniem czasu działania programu.

#### 4.6.2 Duże zagęszczenie węzłów na osi $Z$ i małe na osi $X$

Rozmiary macierzy spf stosowanych w programie  $A_{\text{spf}}$ ,  $K_{\text{spf}}$  i  $C_{\text{spf}}$  zależą od liczby węzłów i w zredukowanej postaci mają rozmiary  $n \times (n_x n_y + n_x + 2)$ . Biorąc pod

uwagę rozmiary tych macierzy można zauważyć, że wymiar  $N'$  nie zależy od  $n_z$  - liczby węzłów w osi  $Z$  a także, że na jego wartość największy wpływ ma  $n_x$  - liczba węzłów w osi  $X$ . Tę obserwację można wykorzystać przy tworzeniu siatki w taki sposób, żeby liczby węzłów na różnych osiach spełniały nierówność:

$$n_x < n_y < n_z, \quad (4.21)$$

a więc optymalne siatki węzłów będą miały bardzo dużą liczbę węzłów w osi  $Z$  i bardzo mało węzłów na pozostałych osiach w szczególności na osi  $X$ .

Stosując się do tej reguły można diametralnie zmniejszyć rozmiar macierzy spf a w efekcie znacznie zredukować czas obliczeń wykonywanych przez program.

### 4.6.3 Stosowanie metody Choleskiego zamiast innej metody numerycznej

W programie skorzystano z metody Choleskiego, ponieważ jest bardziej oszczędna od innych metod takich jak na przykład eliminacja Gaussa, zatem przyspiesza obliczenia wykonywane w programie.

Jednakże głównym powodem stosowania metody Choleskiego był fakt, że możliwe jest stosowanie macierzy w formacie spf podczas korzystania z niej, co okazało się kluczowe w wyborze odpowiedniej metody numerycznej rozwiązującej układy równań w MES.

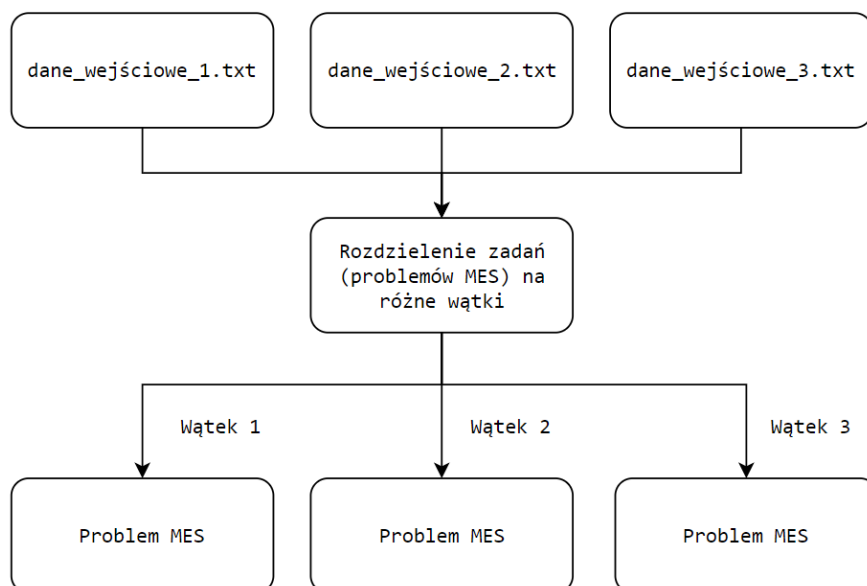
Podsumowując, metoda Choleskiego nie tylko jest relatywnie szybką metodą numeryczną rozwiązującą układ równań, ale co ważniejsze potrafi obsługiwać niezwykle ważne macierze w formacie spf.

### 4.6.4 Jednoczesne składanie macierzy podczas wykonywania obliczeń

Wyprowadzone wzory na macierze  $A$  i  $B$  wskazują na to, że należy obliczać macierze  $K$ ,  $P$  i  $C$  po kolei to znaczy jedna po drugiej a następnie wyznaczyć na ich podstawie macierze  $A$  i  $B$ , jednak program został napisany w taki sposób, że oblicza wszystko jednocześnie. Innymi słowy, macierze  $A$  i  $B$  składane macierze równolegle z obliczanymi elementami  $i$  i  $j$  macierzy  $K$ ,  $P$  i  $C$ . Takie podejście minimalizuje liczbę wykonywanych pętli i w konsekwencji skraca czas obliczeń.

### 4.6.5 Wielowątkowość

Jeden wejściowy plik tekstowy odpowiedzialny jest za jeden problem MES, dlatego jeśli na wejściu zostanie podanych kilka plików, to program ma do rozwiązania kilka problemów, a rozwiązanie ich wszystkich może być bardzo czasochłonne. Z tego powodu zdecydowano się na napisanie programu wielowątkowego, który potrafi rozwiązywać wiele problemów MES w tym samym czasie. Działa to na takiej zasadzie, że program po odczytaniu pliku tekstowego przydziela dane zadanie będące w tym przypadku problem MES na osobny wątek zamiast rozwiązywać wszystkie zagadnienia w sposób sekwencyjny to znaczy jeden po drugim.



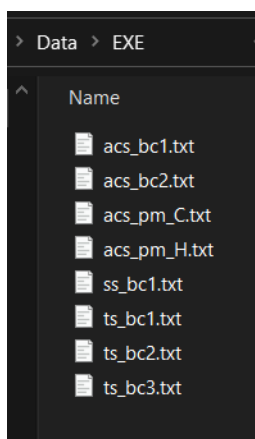
Rysunek 4.7 – Schemat ideowy rozdzielania zadań na osobne wątki przez program dla trzech plików wejściowych

#### 4.6.6 Inteligentne obsługiwane plików wejściowych

Program rozwiązuje różne rodzaje problemów między innymi:

- zagadnienie nieustalone,
- zagadnienie ustalone,
- przypadki dla różnych warunków brzegowych,
- identyfikacje obiektu - odpowiedź obiektu na sygnał sinusoidalny,
- obsługę sygnałów sterujących,

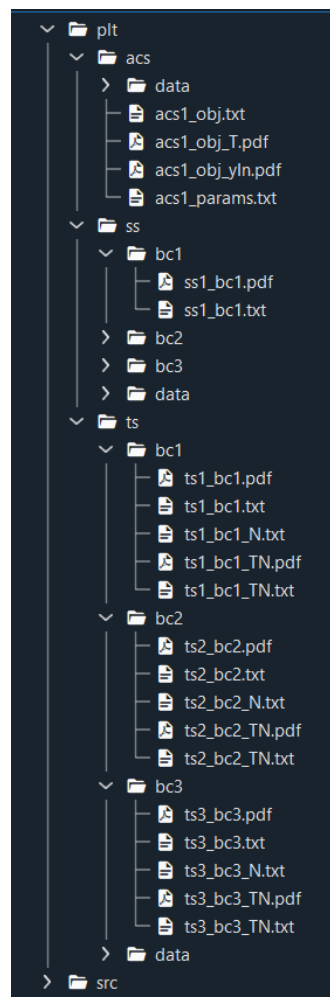
dlatego celem było stworzenie takiego programu, który będzie potrafił identyfikować rodzaj problemu i rozwiązywać go bez konieczności ingerencji użytkownika w kod źródłowy. Zrealizowane zostało w taki sposób, że nazwy plików odczytywane są automatycznie z wybranego folderu na przykład na wejściu podajemy kilka plików tekstowych w folderze „EXE”, które mają zostać odczytane i zinterpretowane:



Rysunek 4.8 – Przykładowe pliki wejściowe

Dane podane w plikach określają warunki problemów, które mają zostać rozwiązane Metodą Elementów Skończonych po uruchomieniu programu. Jednakże mimo tego, że wszystkie są rozwiązywane przez MES, to zagadnienie może być ustalone, nieustalone, albo dotyczyć automatyki. Różne problemy rozwiązywane są na różne sposoby zaimplementowane w programie. Pliki należy więc właściwie rozpoznać i zinterpretować, żeby program użył odpowiednich narzędzi do odpowiednich problemów. Rozpoznawanie i interpretowanie plików przebiega dwuetapowo - najpierw po ich nazwie a później po zawartości:

- Po nazwie - można wyróżnić trzy rodzaje rozpoznawanych plików ze względu na ich specyfikę:
  - ss.txt (z ang. steady state)
  - ts.txt (z ang. transient state)
  - acs.txt (z ang. automatic control system)
- Po zawartości - między innymi w przypadku zagadnienia ustalonego i nieustalonego sprawdzane są, które warunki brzegowe zostały podane, żeby wyjściowe pliki tekstowe zostały zapisane w odpowiednim folderze wyjściowym w celu segregacji wyników.

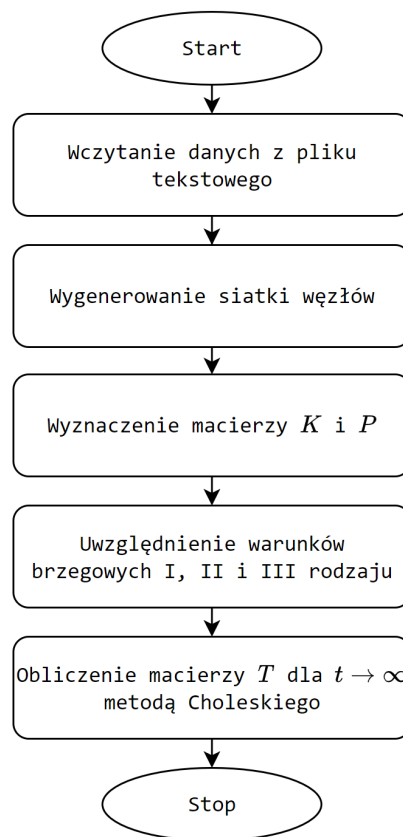


Rysunek 4.9 – Automatycznie posegregowane pliki wyjściowe po zakończeniu działania programu liczącego

Podsumowując, należy stworzyć plik tekstowy według określonego szablonu i odpowiednio go nazwać, a program właściwie odczyta jego nazwę, rozpozna jego specyfikę, rozwiąże zadany problem i zapisze plik wyjściowy w odpowiednim folderze z wynikami.

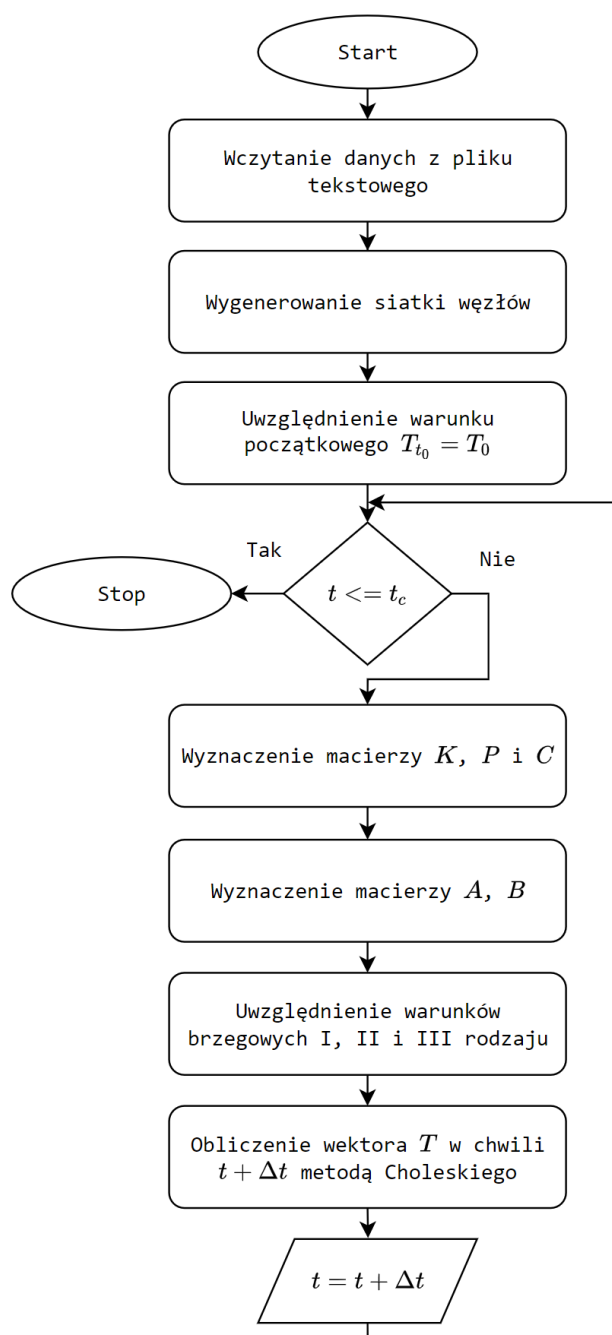
## 4.7 Schematy ideowe obliczania problemów MES przez program

### 4.7.1 Schemat ideowy obliczania zagadnienia ustalonego



Rysunek 4.10 – Schemat ideowy obliczania zagadnienia ustalonego

#### 4.7.2 Schemat ideowy obliczania zagadnienia nieustalonego



Rysunek 4.11 – Schemat ideowy obliczania zagadnienia nieustalonego

### 4.8 Testy programu - porównanie wyników z rozwiązaniami analitycznymi

Żeby sprawdzić poprawność otrzymanych wyników należy porównać rozwiązanie policzone Metodą Elementów Skończonych z rozwiązaniem analitycznym dla różnych warunków brzegowych. Jednak niestety z powodu wysokiego stopnia skomplikowania zagadnienia nie istnieją rozwiązania analityczne dla przypadku trójwymiarowego. Okazuje się, że problemy dwu i trójwymiarowe można rozwiązać jedynie numerycznie. Wzory analityczne istnieją wyłącznie dla przypadków



jednowymiarowych.

### 4.8.1 Rozwiązania analityczne

Niektóre z rozwiązań analitycznych zawierają w sobie funkcję specjalną erf, która określona jest wzorem:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.22)$$

Istnieje również funkcja erfc oznaczająca:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.23)$$

Wzory analityczne dotyczą jedynie przypadków jednowymiarowych:

- warunek brzegowy I rodzaju - stan ustalony - skończony przewodnik o przewodności cieplnej  $\lambda$  o długości  $a$ , w którym na całej długości wydzielają się ciepło  $\dot{q}_v$  oraz o zadanej temperaturze  $T_1$  na jednym brzegu  $x = 0$ , oraz o zadanej temperaturze  $T_2$  na drugim brzegu  $x = a$  dla  $x \in [0, a]$ :

$$T(x) = \frac{\dot{q}_v a^2}{2\lambda} \left( \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{T_1 - T_2}{a} x + T_1, \quad (4.24)$$

- warunek brzegowy I rodzaju - stan nieustalony - pół-nieskończony przewodnik o przewodności cieplnej  $\lambda$ , cieple właściwym  $c_w$ , gęstości  $\rho$ , temperaturze początkowej  $T_0$  na całej długości oraz o zadanej temperaturze  $T_s$  na jednym brzegu  $x = 0$  dla  $x \in [0, \infty)$ :

$$T(x, t) = T_s + (T_0 - T_s) \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\rho c_w} x}{2\sqrt{\lambda t}} \right), \quad (4.25)$$

- warunek brzegowy II rodzaju - stan nieustalony - pół-nieskończony przewodnik o przewodności cieplnej  $\lambda$ , cieple właściwym  $c_w$ , gęstości  $\rho$ , temperaturze początkowej  $T_0$  na całej długości oraz o zadanej gęstości powierzchniowej strumienia cieplnego  $\dot{q}_s$  na jednym brzegu  $x = 0$  dla  $x \in [0, \infty)$ :

$$T(x, t) = T_0 + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} \left[ \sqrt{\frac{4\lambda t}{\pi \rho c_w}} \exp \left( -\frac{x^2 \rho c_w}{4\lambda t} \right) - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x \sqrt{\rho c_w}}{2\sqrt{\lambda t}} \right) \right], \quad (4.26)$$

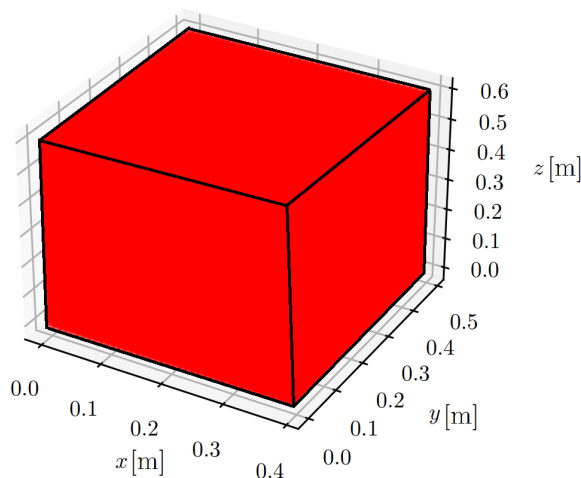
- warunek brzegowy III rodzaju - stan nieustalony - pół-nieskończony przewodnik o przewodności cieplnej  $\lambda$ , cieple właściwym  $c_w$ , gęstości  $\rho$ , temperaturze początkowej  $T_0$  na całej długości oraz o zadanej temperaturze w dużej odległości od ścianki  $T_\infty$  i współczynniku przejmowania ciepła  $h$  na jednym brzegu  $x = 0$  dla  $x \in [0, \infty)$ :

$$T(x, t) = T_0 + (T_\infty - T_0) \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{x \sqrt{\rho c_w}}{2\sqrt{\lambda t}} \right) - \exp \left( \frac{hx}{\lambda} + \frac{h^2 t}{\lambda \rho c_w} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{x \sqrt{\rho c_w}}{2\sqrt{\lambda t}} + \frac{h \sqrt{\lambda t}}{\lambda \sqrt{\rho c_w}} \right) \right). \quad (4.27)$$

Pomimo tego, że we wzorach została użyta współrzędna  $x$  należąca do osi  $X$  i długość obszaru wzdłuż osi  $X$  o długości  $a$ , to pod  $x$  i  $a$  można podstawić także odpowiednio symbole  $y$  i  $b$  lub symbole  $z$  i  $c$ . Ważne jest, żeby były to parametry związane z tym samym wymiarem.

## 4.8.2 Założenia

Do badań został użyty klocek o wymiarach  $0.4\text{ m} \times 0.5\text{ m} \times 0.6\text{ m}$  zrobiony ze stali.



Rysunek 4.12 – Schemat klocka o wymiarach  $0.4\text{ m} \times 0.5\text{ m} \times 0.6\text{ m}$  zrobionego ze stali.

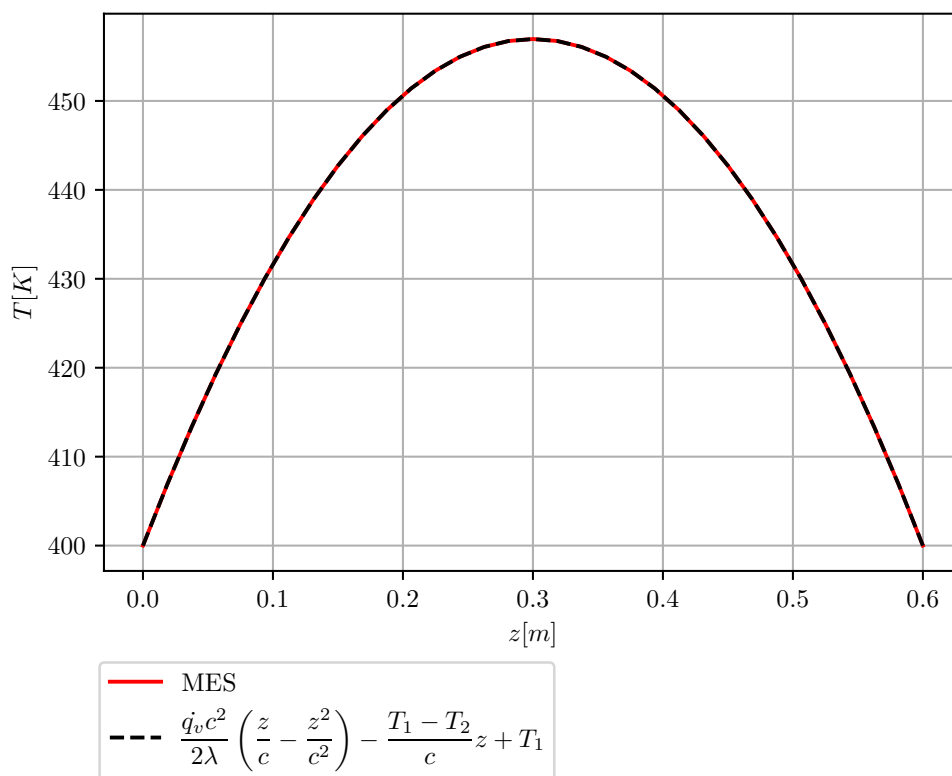
Punkt, w którym mierzono temperaturę znajdował się w środku tego prostopadłościanu czyli w punkcie  $(0.2, 0.25, 0.3)$ . Ponieważ rozwiązania analityczne dotyczą jednego wymiaru trzeba było wybrać jedną z trzech osi układu współrzędnych. Wybrano oś  $Z$  z powodu opisanego w rozdziale 4.6.2. Zatem pomimo tego, że wybrany punkt  $(0.2, 0.25, 0.3)$  składa się z trzech współrzędnych, to istotna jest jedynie ta, która znajduje się na osi  $Z$ , czyli temperatura będzie mierzona dla  $z = 0.3\text{ m}$ . Do przeprowadzonych badań użyto siatek jednorodnych.

Dla stanów nieustalonych zrealizowane zostały także wykresy, w których pokazane jest jaka jest temperatura w każdym punkcie klocka na jednej osi, w tym przypadku na osi  $Z$  dla różnych czasów  $t$ .

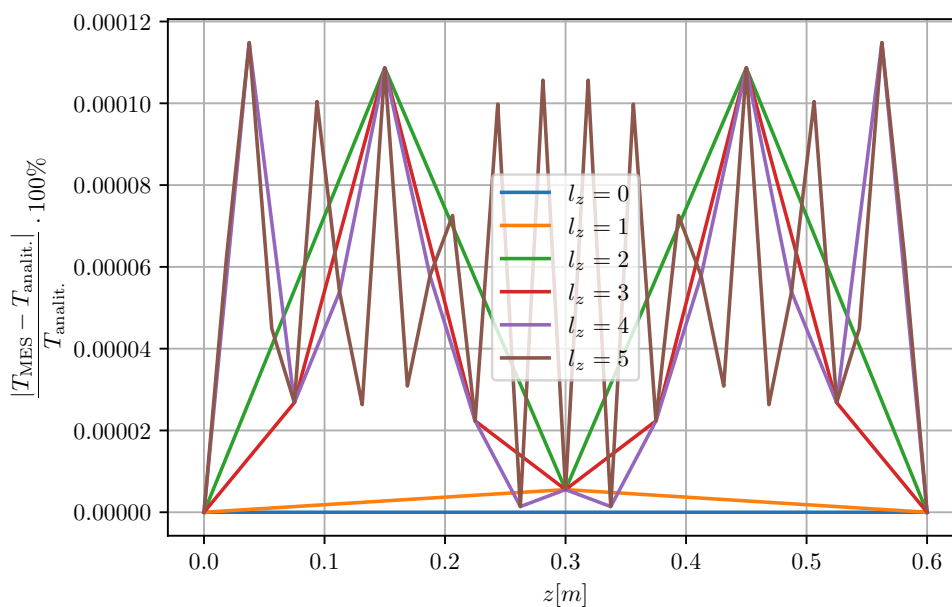
## 4.8.3 Warunek brzegowy I rodzaju - stan ustalony

Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a\text{ [m]}$	0.4	$\lambda\left[\frac{\text{W}}{\text{Km}}\right]$	79	$t_c\text{ [s]}$	400
$b\text{ [m]}$	0.5	$\rho\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	7700	$\Delta t\text{ [s]}$	1
$c\text{ [m]}$	0.6	$c_w\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$	1e+5	$T_0\text{ [K]}$	293	$n[-]$	297
Warunek brzegowy I		Warunek brzegowy II		Warunek brzegowy III	
$T_s\text{ [K]}$	400	$\dot{q}_s\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	—	$T_\infty\text{ [K]}$	—
				$h\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]$	—

Tabela 4.2 – Dane wejściowe.



Rysunek 4.13 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(z)$



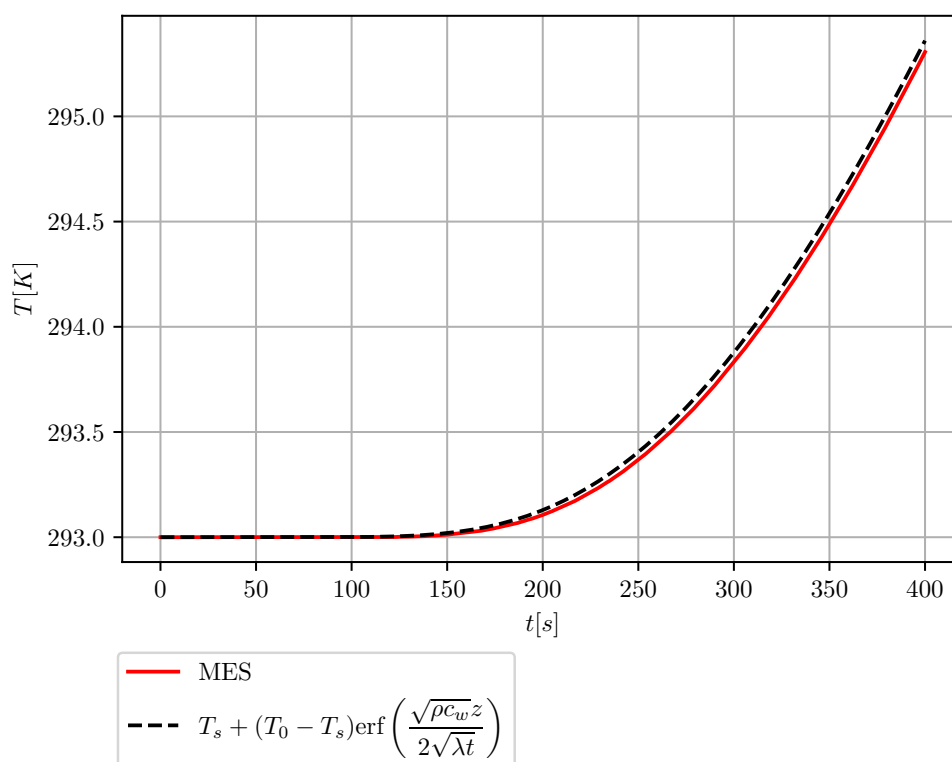
Rysunek 4.14 – Błąd względny dla różnych zagęszczeń siatki.

Z rysunków 4.13, 4.14 wynika, że problem z warunkiem początkowym pierwszego rodzaju jest poprawnie rozwiązywany przez przygotowane oprogramowanie. Błędy względne są znikomo małe to znaczy mniejsze od 0.001%.

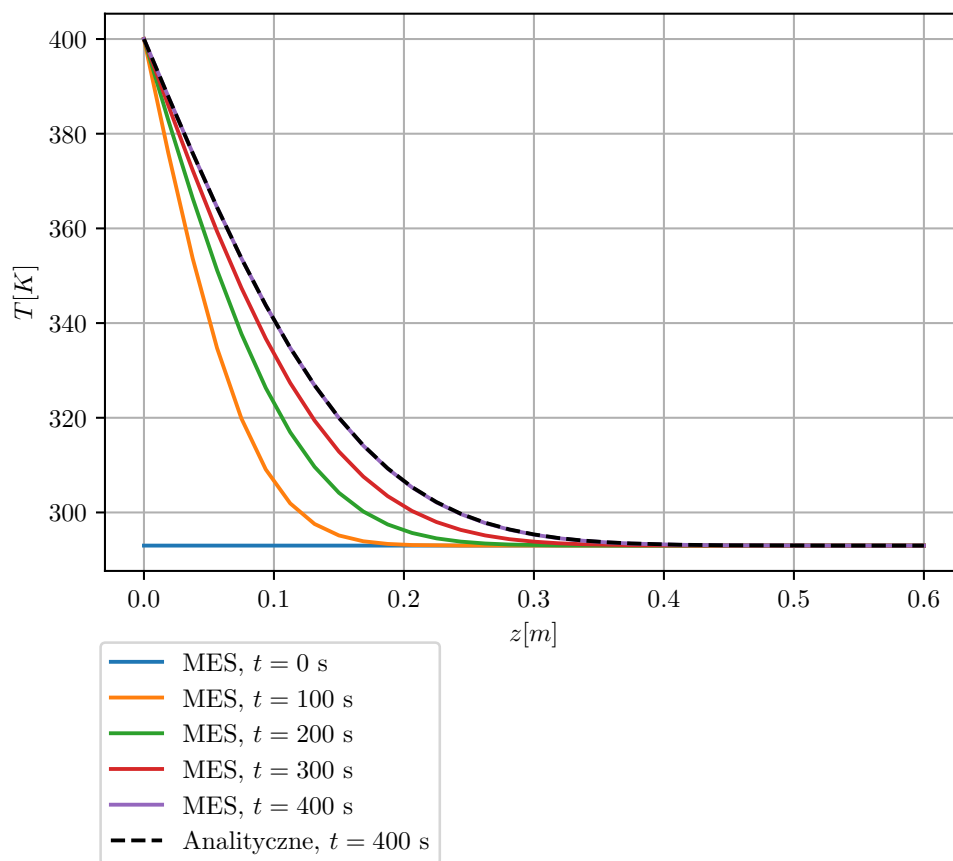
#### 4.8.4 Warunek brzegowy I rodzaju - stan nieustalony

Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a \left[ \text{m} \right]$	0.4	$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{Km}} \right]$	79	$t_c \left[ \text{s} \right]$	400
$b \left[ \text{m} \right]$	0.5	$\rho \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	7700	$\Delta t \left[ \text{s} \right]$	1
$c \left[ \text{m} \right]$	0.6	$c_w \left[ \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$	0	$T_0 \left[ \text{K} \right]$	293	$n \left[ - \right]$	297
Warunek brzegowy I		Warunek brzegowy II		Warunek brzegowy III	
$T_s \left[ \text{K} \right]$	400	$\dot{q}_s \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$	—	$T_\infty \left[ \text{K} \right]$	—
				$h \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	—

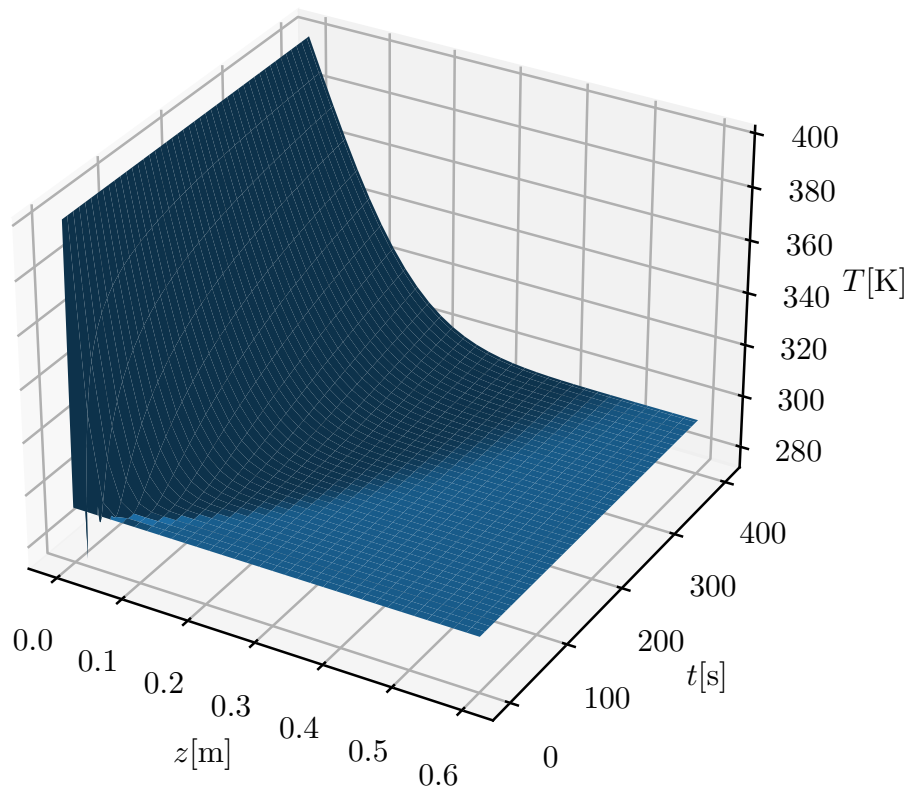
Tabela 4.3 – Dane wejściowe.



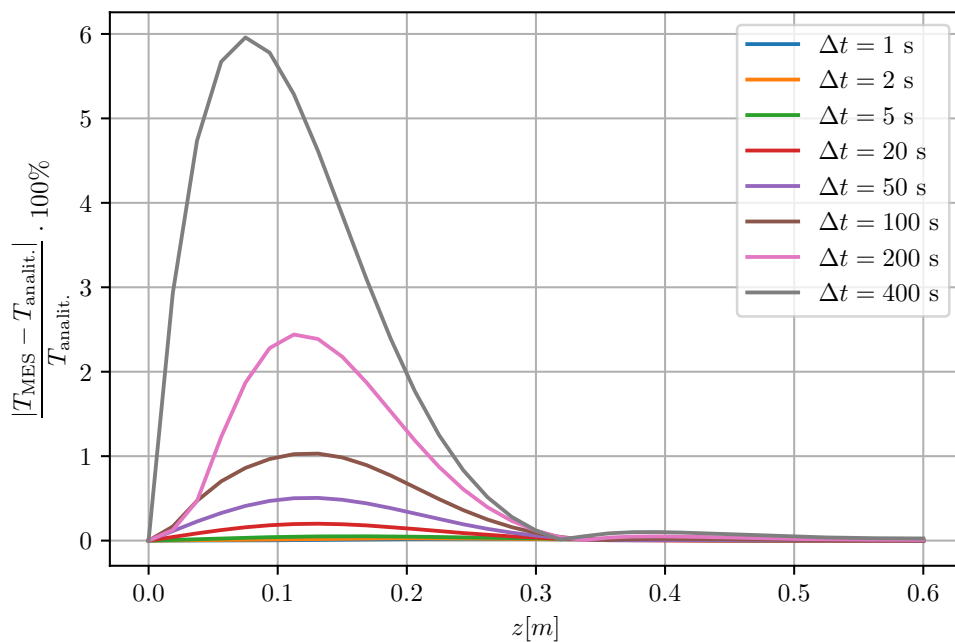
Rysunek 4.15 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(t)$  dla  $z = 0.3$  m.



Rysunek 4.16 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(z)$  dla dla określonych w legendzie chwil czasowych.



Rysunek 4.17 – Wykres trójwymiarowy  $T(z, t)$ .



Rysunek 4.18 – Błąd względny dla różnych kroków czasowych po czasie  $t_c = 400$  s.

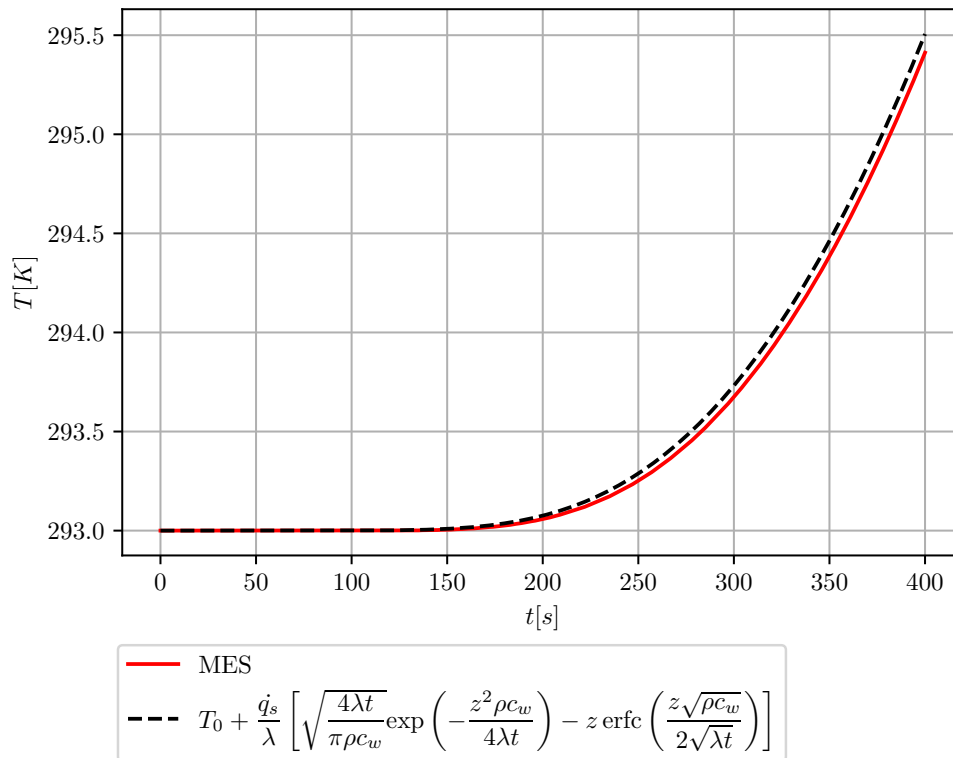
Z rysunków 4.15, 4.18 wynika, że problem z warunkiem początkowym pierwszego rodzaju jest poprawnie rozwiązywany przez przygotowane oprogramowanie. Dla

kroku czasowego  $\Delta t = 1$  s błąd względny osiąga wartości mniejsze niż 1%. Błędy względne są tym większe, im większy jest krok czasowy.

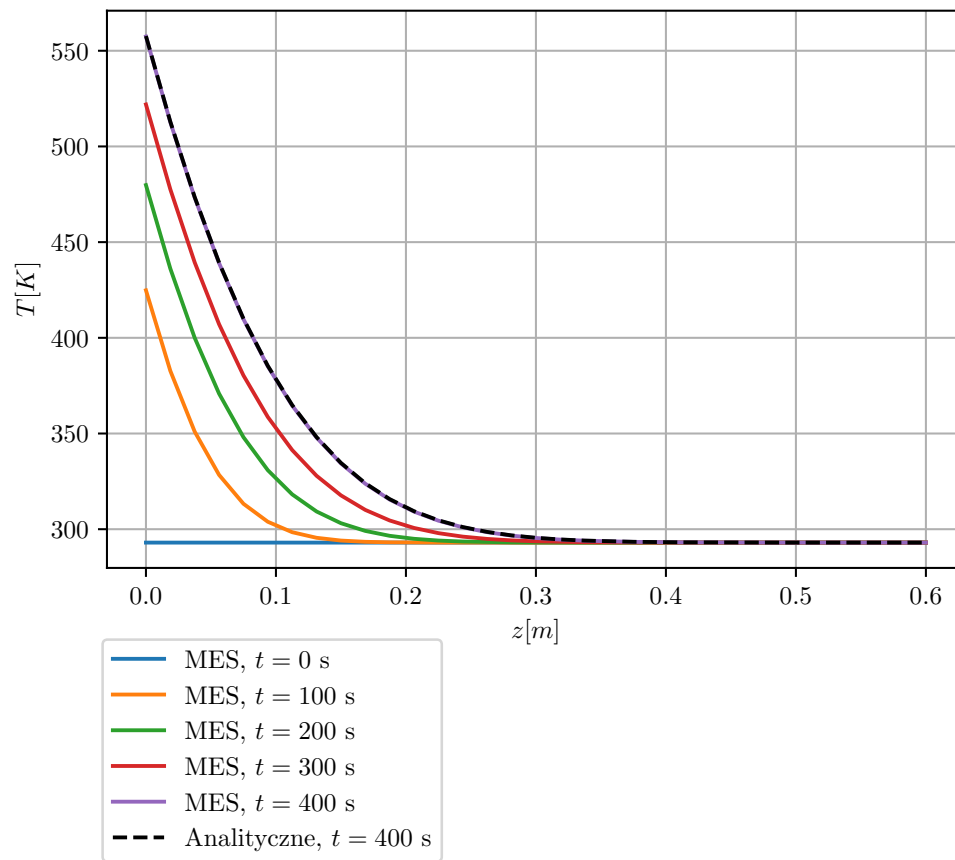
#### 4.8.5 Warunek brzegowy II rodzaju - stan nieustalony

Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a$ [m]	0.4	$\lambda$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{Km}}\right]$	79	$t_c$ [s]	400
$b$ [m]	0.5	$\rho$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	7700	$\Delta t$ [s]	1
$c$ [m]	0.6	$c_w$ $\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$	0	$T_0$ [K]	293	$n$ [—]	297
Warunek brzegowy I		Warunek brzegowy II		Warunek brzegowy III	
$T_s$ [K]	—	$\dot{q}_s$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	2e+5	$T_\infty$ [K]	—
				$h$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]$	—

Tabela 4.4 – Dane wejściowe.

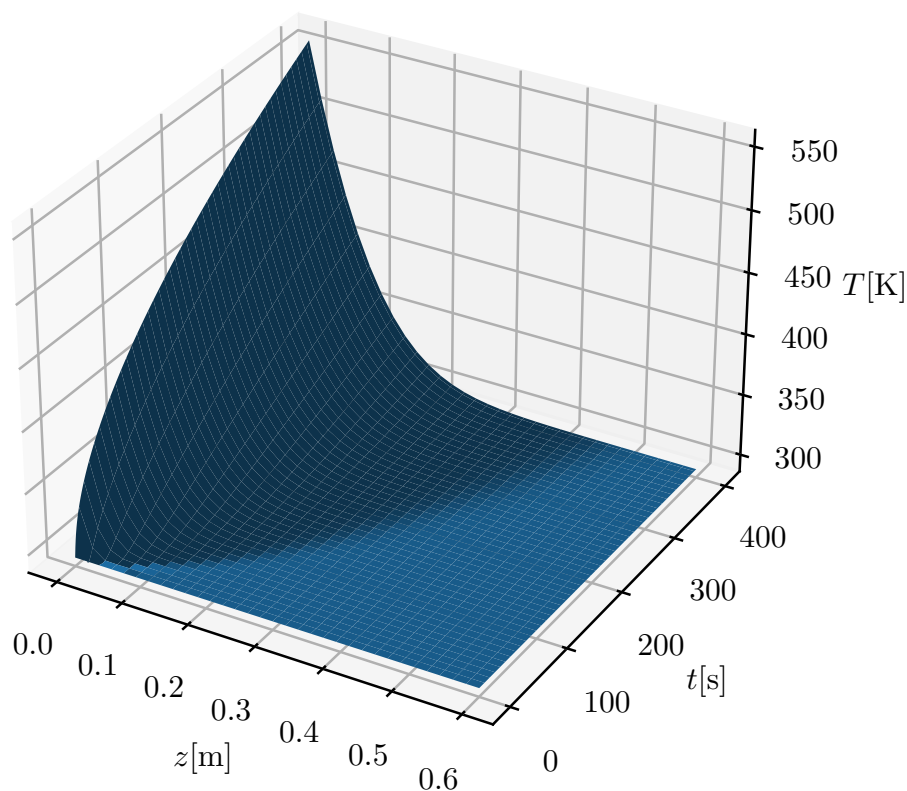


Rysunek 4.19 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(t)$  dla  $z = 0.3$  m.

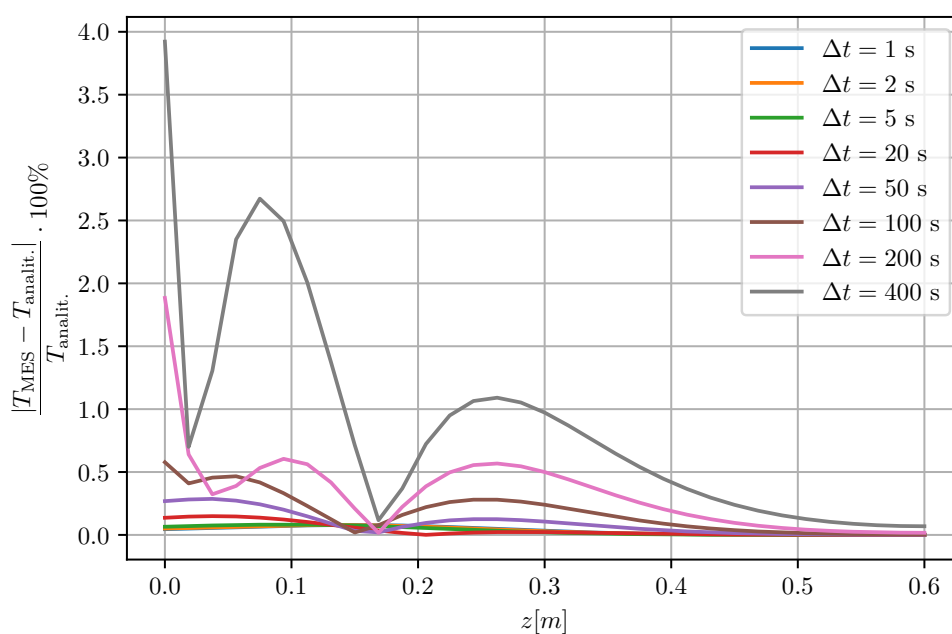


Rysunek 4.20 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(z)$  dla dla określonych w legendzie chwil czasowych.





Rysunek 4.21 – Wykres trójwymiarowy  $T(z, t)$ .



Rysunek 4.22 – Błąd względny dla różnych kroków czasowych po czasie  $t_c = 400$  s.

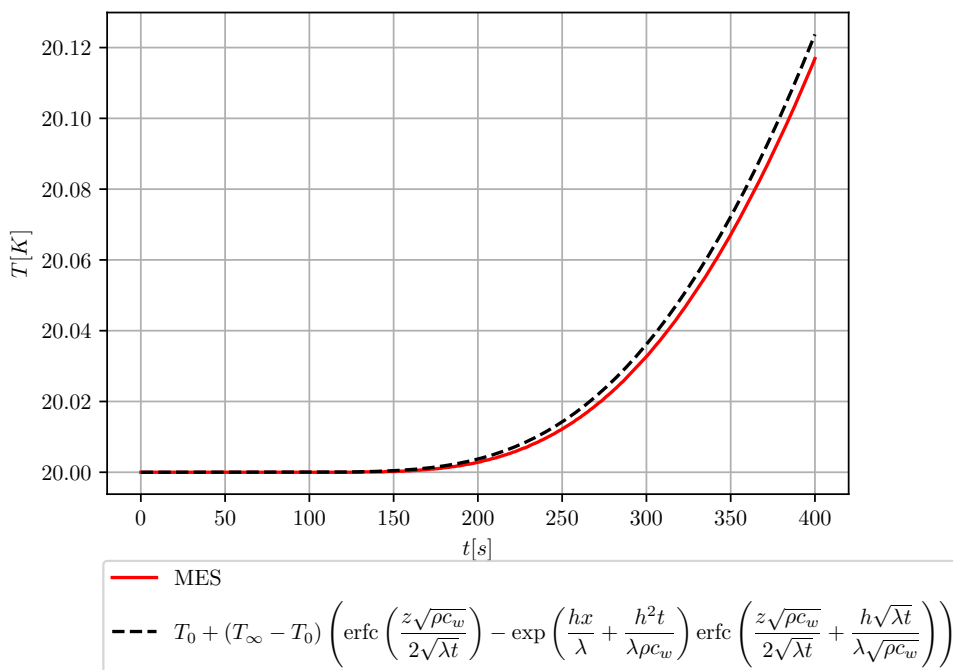
Z rysunków 4.19, 4.22 wynika, że problem z warunkiem początkowym drugiego rodzaju jest poprawnie rozwiązywany przez przygotowane oprogramowanie. Dla kroku czasowego  $\Delta t = 1$  s błąd względny osiąga wartości mniejsze niż 1%. Błędy

względne są tym większe, im większy jest krok czasowy.

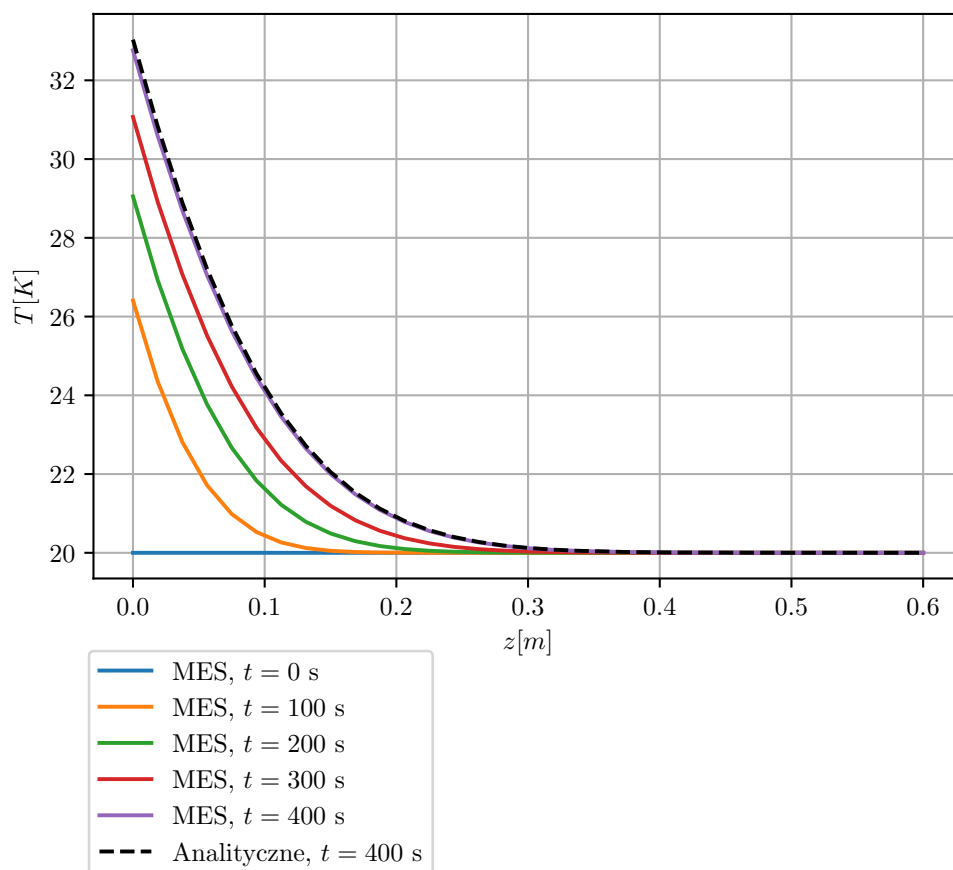
#### 4.8.6 Warunek brzegowy III rodzaju - stan nieustalony

Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a[\text{m}]$	0.4	$\lambda\left[\frac{\text{W}}{\text{Km}}\right]$	79	$t_c[\text{s}]$	400
$b[\text{m}]$	0.5	$\rho\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	7700	$\Delta t[\text{s}]$	1
$c[\text{m}]$	0.6	$c_w\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$	0	$T_0[\text{K}]$	20	$n[-]$	297
Warunek brzegowy I		Warunek brzegowy II		Warunek brzegowy III	
$T_s[\text{K}]$	—	$\dot{q}_s\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right]$	—	$T_\infty[\text{K}]$	2000
				$h\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}\right]$	5

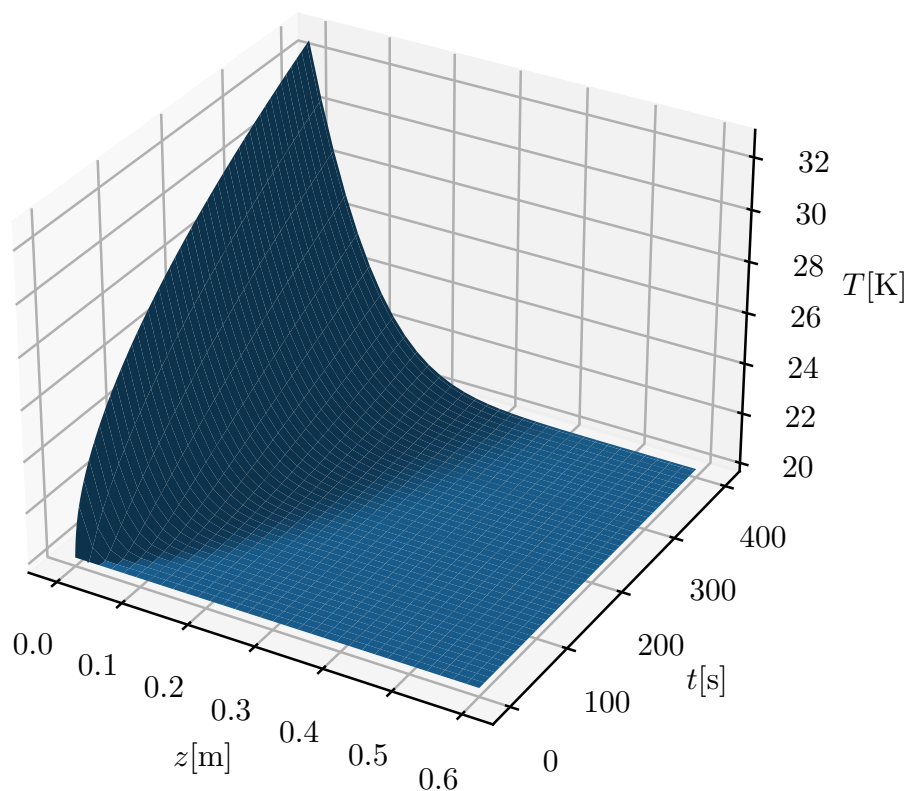
Tabela 4.5 – Dane wejściowe.



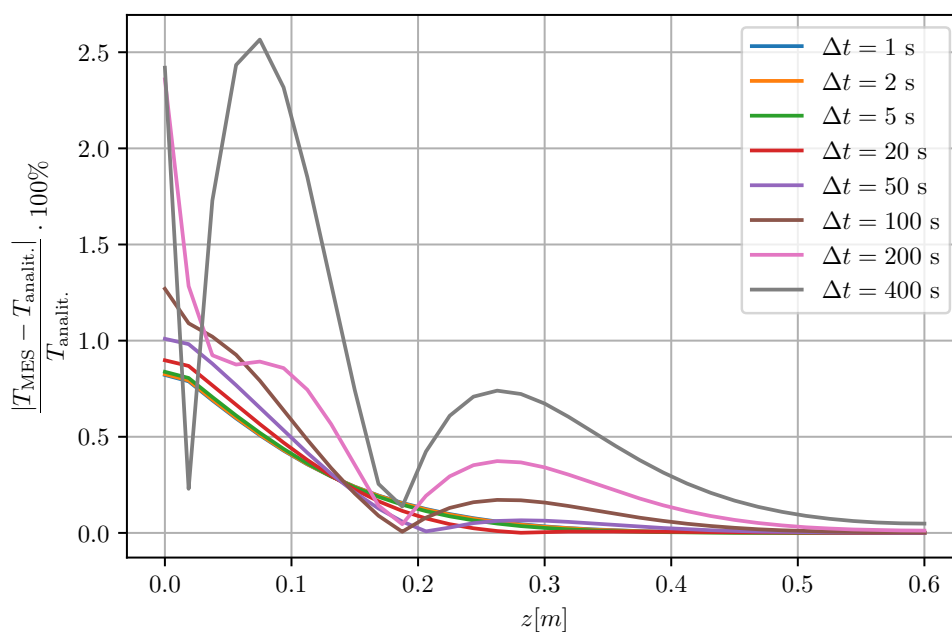
Rysunek 4.23 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(t)$  dla  $z = 0.3$  m.



Rysunek 4.24 – Porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym - wykres  $T(z)$  dla dla określonych w legendzie chwil czasowych.



Rysunek 4.25 – Wykres trójwymiarowy  $T(z, t)$ .



Rysunek 4.26 – Błąd względny dla różnych kroków czasowych po czasie  $t_c = 400$  s.

Z rysunków 4.23, 4.26 wynika, że problem z warunkiem początkowym trzeciego rodzaju jest poprawnie rozwiązywany przez przygotowane oprogramowanie. Dla kroku czasowego  $\Delta t = 1$  s błąd względny osiąga wartości mniejsze niż 1%. Błędy

względne są tym większe, im większy jest krok czasowy.

## 4.9 Podsumowanie

- Program obliczający MES został napisany w C++ ze względu na jego szybkość.
- Plik wejściowy dzieli się na sekcje zatytułowane nagłówkami oraz zawiera struktury znajdujące się wewnątrz sekcji, żeby móc je powielać.
- Wyniki MES podawane przez program pokrywają się z wynikami analitycznymi dla stanu ustalonego i nieustalonego dla różnych warunków brzegowych.
- Główną optymalizacją programu było implementowanie macierzy w formacie spf i przeprowadzanie obliczeń na nich zamiast na macierzach kwadratowych.
- Metoda Choleskiego jest oszczędna i obsługuje macierze w formacie spf.
- Żeby wygenerować siatkę niejednorodną należy połączyć ze sobą kilka obszarów z tego samego materiału.
- Dla stosowanej konwencji numeracji węzłów optymalne siatki będą miały bardzo dużą liczbę węzłów w osi  $Z$  i bardzo mało węzłów na pozostałych osiach w szczególności na osi  $X$ .

# Rozdział 5

## Ocena jakości regulacji

### 5.1 Wstęp

Układy regulacji temperatury bazują z reguły na modelu obiektu opisanego liniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Do takiego obiektu dobiera się regulator i ocenia działanie układu regulacji temperatury w wybranym punkcie. Oprogramowanie wytworzone w tej pracy pozwala na ocenę wynikających z działania układu regulacji zmian temperatury nie tylko w jednym z punktów ogrzewanego/chłodzonego obiektu, ale w całej jego objętości.

Celem tego rozdziału jest identyfikacja obiektu opisanego równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, zastąpienie go transmitancją ciągłą, a następnie zaprojektowanie układu automatycznej regulacji i ocena jakości regulacji obiektem MES.

Rozważanym zadaniem jest zmiana temperatury prostopadłościanu wykonanego ze stali. Sygnałem wejściowym dla modelu MES rozważanego obiektu będą wymuszone warunki brzegowe różnego rodzaju w wybranych węzłach. W przedstawionych przykładach uwzględniono sterowanie poprzez:

- wymuszenie temperatury jednej ze ścian,
- wymuszenie gęstości strumienia ciepła na fragmentach powierzchni dwóch ścian.

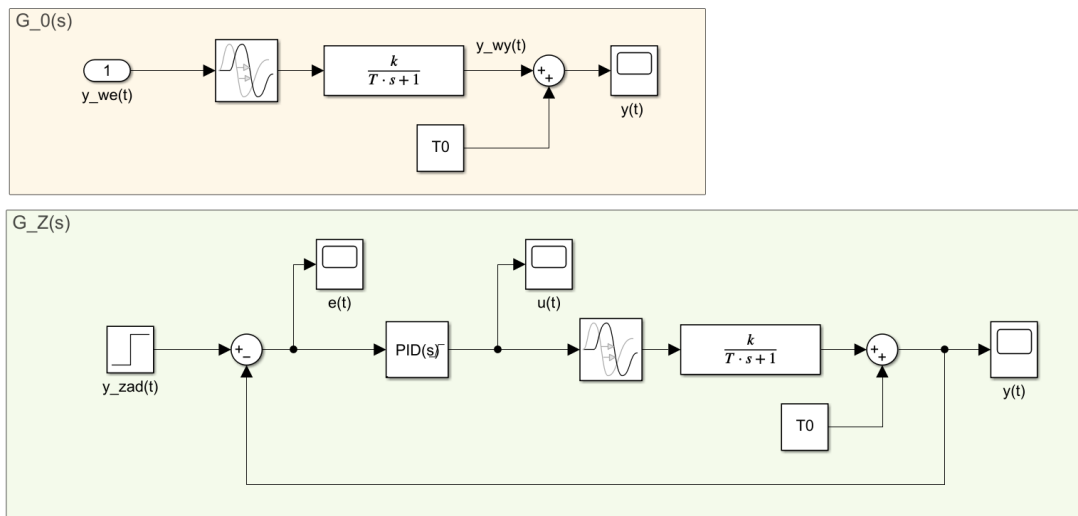
Możliwe jest wykorzystanie przedstawionej metody do analizy wielu innych problemów regulacji temperatury, przy innych wymuszeniach.

Lista kroków, które należy wykonać:

1. Konfiguracja pliku z danymi wejściowymi. Zdefiniowanie, który brzeg ma przyjmować zmienne w czasie sygnały (podczas identyfikacji będzie to sinusoidalny sygnał wejściowy, a podczas regulacji sygnał sterujący).
2. Podanie na określony obszar warunku brzegowego danego rodzaju w formie sinusoidalnego sygnału o zmiennej częstotliwości.
3. Rozwiązanie problemu MES przez oprogramowanie. Rejestracja wartości temperatur otrzymanych w środkowym punkcie prostopadłościanu.
4. Identyfikacja obiektu na podstawie odpowiedzi MES na sinusoidalny sygnał wejściowy. Rozwiązanie problemu w środowisku MATLAB/Simulink. Otrzymanie transmitancji obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem.
5. Sprawdzenie w jakim stopniu przebieg sygnału wyjściowego obiektu zastępczego pokrywa się z odpowiedzią MES na sygnał wejściowy.
6. Dobór odpowiedniej wartości opóźnienia.

7. Wykonanie symulacji układu zamkniętego z modelem zastępczym. Dobranie nastaw regulatora.
8. Rejestracja sygnałów sterujących.
9. Przekazanie sygnałów sterujących do oprogramowania obliczającego MES.
10. Rozwiązanie problemu MES przez oprogramowanie. Rejestracja wartości temperatur otrzymanych w środkowym punkcie klocka.
11. Porównanie wyników MES z tymi otrzymanymi dla modelu zastępczego.

Układ otwarty i zamknięty zostały zamodelowane w środowisku Simulink. Pokazano na rysunku 5.1 i będą omówione w dalszej części rozdziału.



Rysunek 5.1 – Układ otwarty i zamknięty.

## 5.2 Zmienne w czasie warunki brzegowe

Zrealizowany program rozwiązujący MES domyślnie nakłada warunki brzegowe, które mają stałe w czasie wartości parametrów (odpowiednie dla danego warunku brzegowe). Jednakże, żeby właściwie zidentyfikować obiekt należy wymusić odpowiedź np. o sinusoidalnym kształcie o rosnącej z czasem częstotliwości. W związku z tym na potrzeby pracy autor rozbudował program o możliwość nakładania zmiennych w czasie warunków brzegowych. Ta funkcjonalność będzie później także potrzebna do przesłania i odczytania sygnałów sterujących, które wyznaczy zamknięty układ regulacji. Poniżej przedstawione są założenia dotyczące zmienności parametrów w czasie dla poszczególnych warunków brzegowych:

- warunek brzegowy I rodzaju:

$$T_s = T_s(t), \quad (5.1)$$

- warunek brzegowy II rodzaju:

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(t), \quad (5.2)$$

- warunek brzegowy III rodzaju:

$$T_{\infty} = T_{\infty}(t), \quad (5.3)$$

$$h = \text{const.} \quad (5.4)$$

W niniejszej pracy testowane będzie sterowanie z wykorzystaniem pierwszego i drugiego warunku brzegowego.

## 5.3 Identyfikacja obiektu

Identyfikowanym obiektem jest obiekt MES, który w niniejszej pracy rozumiany jest jako problem opisany równaniami różniczkowymi cząstkowymi, które są rozwiązywane Metodą Elementów Skończonych.

Proces identyfikacji obiektu dzieli się na dwa etapy. Pierwszym z nich jest wygenerowanie odpowiedzi MES na sinusoidalny sygnał wejściowy, a drugim etapem jest zrealizowanie takiej transmitancji, która w sposób zadowalający zastąpi obiekt MES.

### 5.3.1 Model zastępczy

Obiekt opisany równaniami różniczkowymi zwyczajnymi zostanie zastąpiony transmitancją obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z opóźnieniem:

$$G_0(s) = e^{-s\tau_0} \frac{k}{1 + s\tau}, \quad (5.5)$$

gdzie:

- $s \in \mathbb{C}$ ,
- $\tau$  - stała czasowa  $\left[ \text{s} \right]$ ,
- $k$  - wzmacnienie  $\left[ * \right]$ ,
- $\tau_0$  - opóźnienie  $\left[ \text{s} \right]$ .

Wejściem modelu będzie:

- dla warunku brzegowego I rodzaju:

$$y_{we}(t) = T_s(t) - T_0, \quad (5.6)$$

- dla warunku brzegowego II rodzaju:

$$y_{we}(t) = \dot{q}_s(t), \quad (5.7)$$

- dla warunku brzegowego III rodzaju:

$$y_{we}(t) = T_{\infty}(t), \quad (5.8)$$

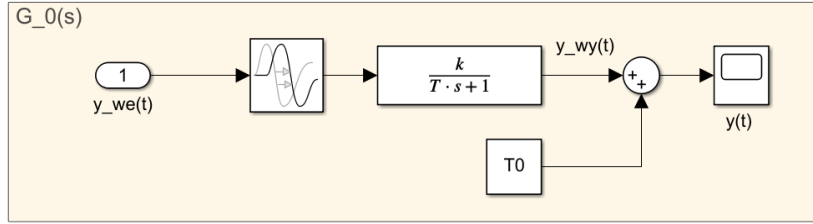
natomiast wyjściem (bez względu na rodzaj warunku brzegowego):

$$y_{wy}(t) = T(t) - T_0. \quad (5.9)$$



### 5.3.2 Układ otwarty

Układ otwarty wykonany w Simulinku pokazano na rysunku 5.2.



Rysunek 5.2 – Układ otwarty.

Transmitancja z definicji ma zerowe warunki początkowe, zatem do wyjścia modelu  $y_{wy}(t)$  należy dodać  $T_0$ , więc wyjście układu  $y(t)$  jest równe:

$$y(t) = y_{wy}(t) + T_0. \quad (5.10)$$

### 5.3.3 Sinusoidalny sygnał wejściowy

Testowano różne sygnały takie jak odpowiedź skokowa i sygnał kwadratowy o zmiennej częstotliwości, jednak najlepsze rezultaty identyfikacji dał sygnał sinusoidalny o zmiennej częstotliwości.

Niech zdefiniowany zostanie sygnał sinusoidalny  $y_{sin}(t)$ , którego częstotliwość rośnie dwukrotnie po upływie każdego pełnego okresu:

- dla  $t \in \left[0, \frac{1}{f_0}\right)$

$$y_{sin}(t) = A_m \sin(2\pi f_0 t) + y_0,$$

- dla  $t \in \left[\frac{1}{f_0}, \frac{1}{2f_0}\right)$

$$y_{sin}(t) = A_m \sin(2\pi(2f_0)t) + y_0,$$

- dla  $t \in \left[\frac{1}{2if_0}, \frac{1}{2(i+1)f_0}\right)$  dla  $i = 1, 2, \dots$

$$y_{sin}(t) = A_m \sin(2\pi(2(i+1)f_0)t) + y_0. \quad (5.11)$$

Jeśli na określony obszar zostanie nałożony warunek brzegowy danego rodzaju w formie sygnału sinusoidalnego  $y_{sin}(t)$  to:

- dla warunku brzegowego I rodzaju:

$$T_s(t) = y_{sin}(t), \quad (5.12)$$

- dla warunku brzegowego II rodzaju:

$$\dot{q}_s(t) = y_{sin}(t), \quad (5.13)$$

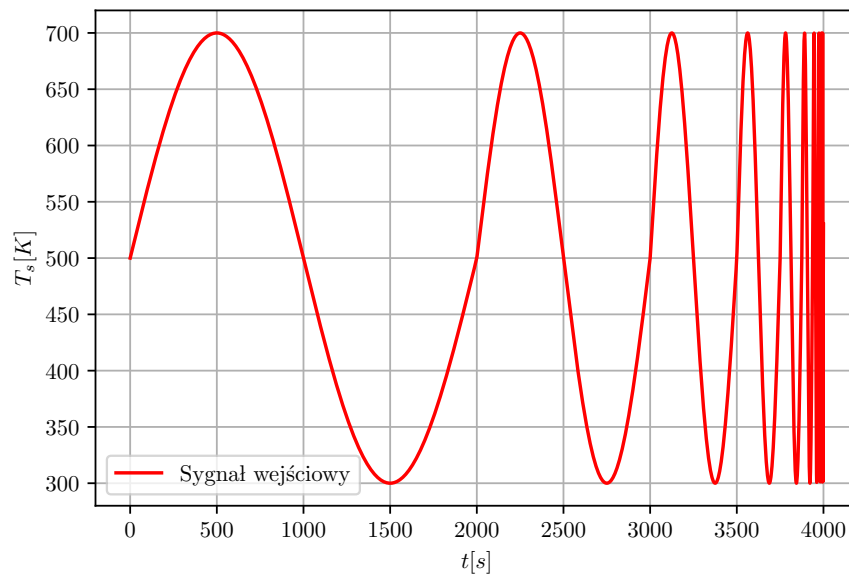
- dla warunku brzegowego III rodzaju:

$$T_{\infty}(t) = y_{\sin}(t). \quad (5.14)$$

Na przykład jeśli zostanie nałożony warunek brzegowy I rodzaju o parametrach:

$$\begin{aligned} A_m &= 200 \text{ K}, \\ f_0 &= 0.0005 \text{ Hz}, \\ y_0 &= 500 \text{ K}, \end{aligned}$$

to sygnał  $T_s(t) = y_{\sin}(t)$  będzie wyglądał w następujący sposób:



Rysunek 5.3 – Przykładowy sinusoidalny sygnał wejściowy

### 5.3.4 Funkcja identyfikująca obiekt tfest (Estimate transfer function)

Do identyfikacji obiektu użyto wbudowanej funkcji MATLABowej o nazwie tfest (Estimate transfer function), zapewnionej przez System Identification Toolbox:

```
sys = tfest(data, np, nz, iodelay),
```

gdzie:

- sys - obiekt typu Identified transfer function - zidentyfikowany obiekt opisany transmitancją ciągłą  $G_0(s)$ ,
- data - obiekt typu iddata, w którym przechowywane są wektory wartości sygnału wejściowego  $X$  i sygnału wyjściowego  $Y$ ,
- np - liczba biegunów,
- nz - liczba zer,
- iodelay - opóźnienie  $\tau_0$ .

Funkcja tfest zwraca procentowe dopasowanie estymowanego modelu z danymi estymacji. Jeśli dopasowanie równa się 100 % oznacza to, że jest ono idealne.

## 5.4 Sterowanie obiektem MES

Sterowanie obiektem MES odbywa się poprzez zmienne w czasie warunki brzegowe. Natomiast regulacja będzie odbywać się z wykorzystaniem regulatora PID.

### 5.4.1 Ciągły regulator PID i sygnały sterujące

Regulator PID - regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący. Zmienia sygnał uchybu w sygnał sterujący w następujący sposób:

$$u(t) = k_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \quad (5.15)$$

Sygnał sterujący jest ograniczony i może osiągnąć minimalnie wartość  $S_{\min}$  a maksymalnie  $S_{\max}$ .

W zależności od rodzaju warunku brzegowego  $u(t)$  może przyjąć różną postać:

- dla warunku brzegowego I rodzaju:

$$u(t) = T_s(t) - T_0, \quad (5.16)$$

- dla warunku brzegowego II rodzaju:

$$u(t) = \dot{q}_s(t), \quad (5.17)$$

- dla warunku brzegowego III rodzaju:

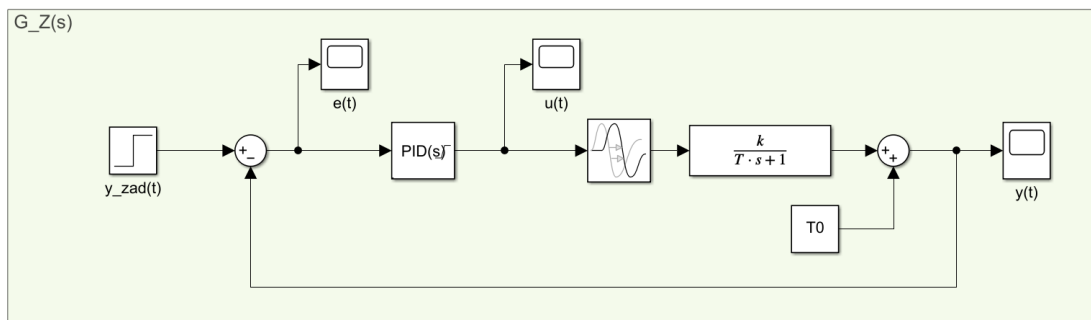
$$u(t) = T_{\infty}(t). \quad (5.18)$$

Do badań symulacyjnych w środowisku Simulink wykorzystana została transmitancja regulatora z rzeczywistym członem różniczkującym i jednostkowym współczynnikiem filtra:

$$C(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+s} \right). \quad (5.19)$$

### 5.4.2 Układ zamknięty

Podczas symulacji układu zamkniętego (rysunek 5.4)



Rysunek 5.4 – Zamknięty układ regulacji.

otrzymywane są sygnały sterujące  $u(t)$ , które w późniejszym etapie są przesyłane do MES i uwzględniane jako wartości dla danych warunków brzegów w następujący sposób:

- dla warunku brzegowego I rodzaju:

$$T_s(t) = u(t) + T_0, \quad (5.20)$$

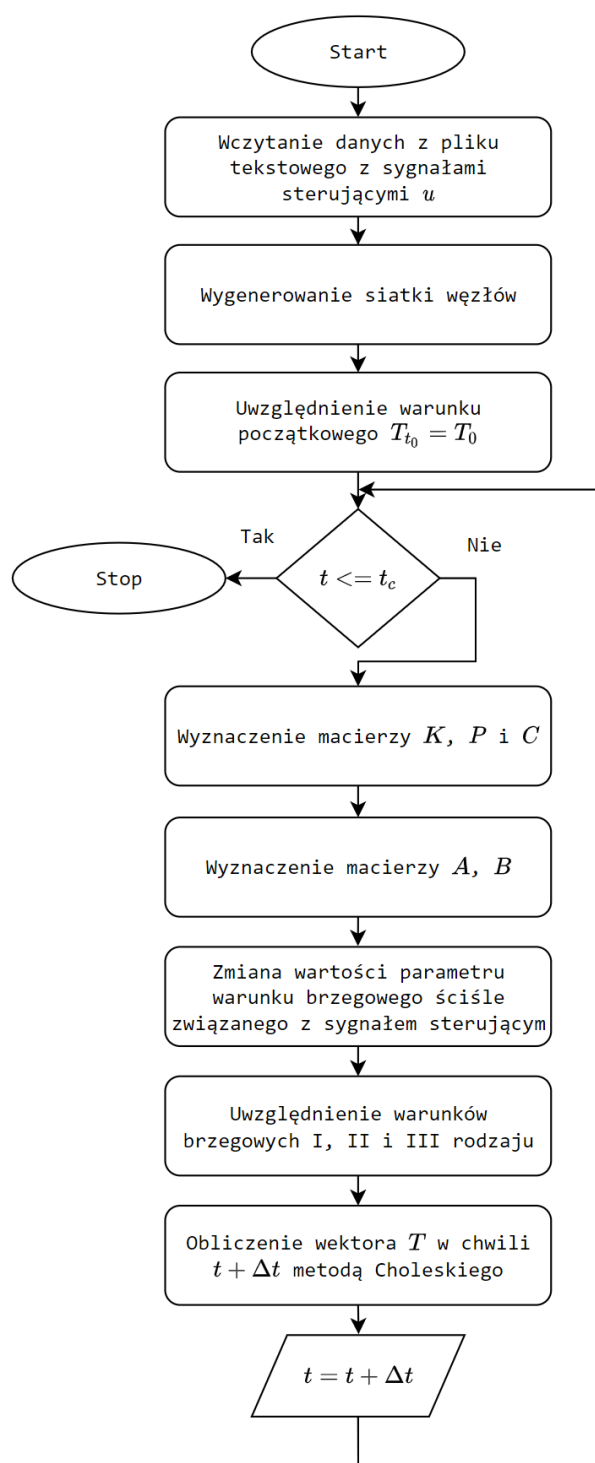
- dla warunku brzegowego II rodzaju:

$$\dot{q}_s(t) = u(t), \quad (5.21)$$

- dla warunku brzegowego III rodzaju:

$$T_\infty(t) = u(t). \quad (5.22)$$

### 5.4.3 Schemat ideowy sterowania obiektem MES



Rysunek 5.5 – Schemat ideowy sterowania obiektem rzeczywistym MES

## 5.5 Test nr 1 - sterowanie poprzez wymuszenie temperatury jednej ze ścian prostopadłościanu

Celem eksperymentu jest sterowanie poprzez wymuszenie temperatury jednej ze ścian prostopadłościanu przy pomocy warunku brzegowego I rodzaju. Na

pozostałe (niesterowane) ściany nałożony zostanie stały warunek brzegowy I rodzaju, który pełnić będzie funkcję temperatury otoczenia niewytracającego energii.

Fizyczną interpretację tego eksperymentu można przedstawić jako prostopadłościan, który ze wszystkich stron otoczony jest ciałami stałymi nie wytracającymi energii - o dużej pojemności cieplnej. Zatem warto zaznaczyć, że żeby wymusić (zmienić) temperaturę jednej ze ścian potrzeba użyć odpowiednio dużej ilości energii, żeby zmienić temperaturę ciała stałego do niej przyłożonego.

### 5.5.1 Założenia

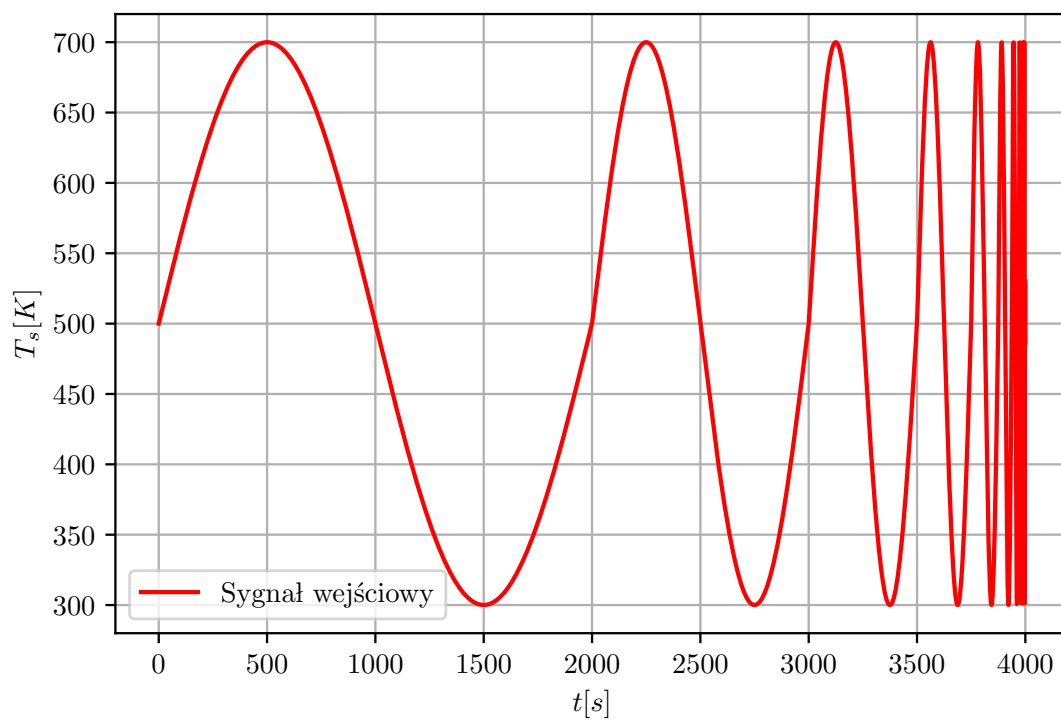
Eksperyment został przeprowadzony z przyjętymi założeniami:

- Układ współrzędnych i wymiary klocka są takie same jak na rysunku 4.12.
- Na całą dolną ścianę nałożony jest zmienny w czasie warunek brzegowy I rodzaju.
- Na pozostałe (niesterowane) ściany nałożony jest warunek brzegowy I rodzaju  $T_s = 293$  K.
- Wyjściem układu regulacji jest temperatura w środku ciężkości obiektu.
- Dane wejściowe zostały podsumowane w Tabeli 5.1.

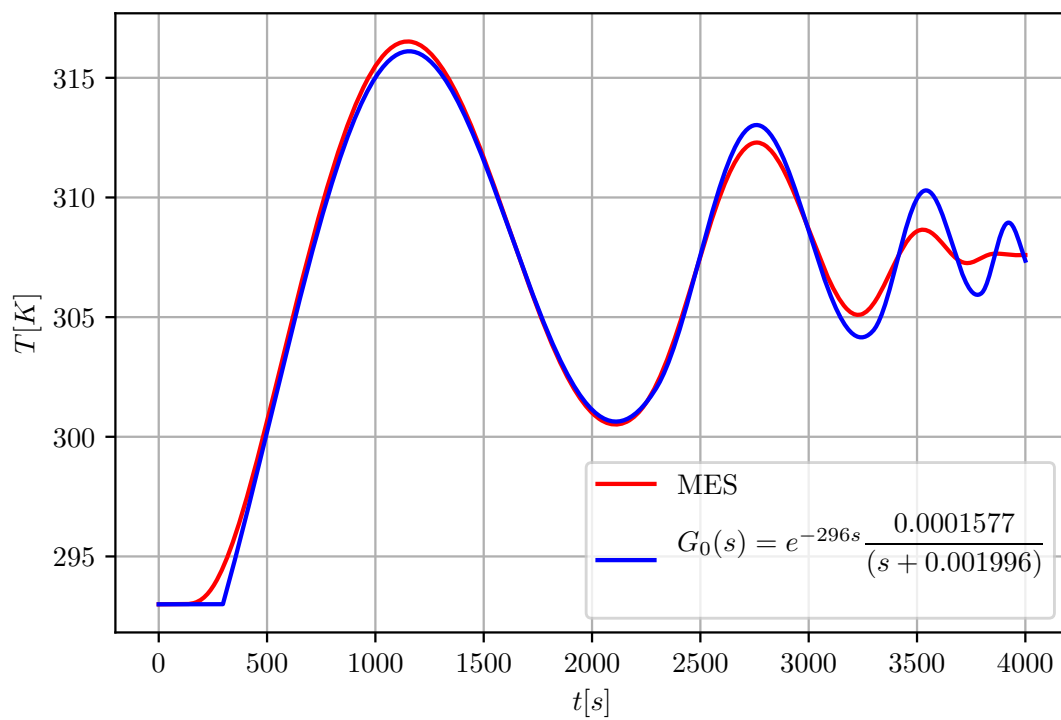
Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a$ [m]	0.4	$\lambda$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{Km}}\right]$	79	$t_c$ [s]	4000
$b$ [m]	0.5	$\rho$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$	7700	$\Delta t$ [s]	1
$c$ [m]	0.6	$c_w$ $\left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}}\right]$	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v$ $\left[\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right]$	0	$T_0$ [K]	293	$n$ [—]	297
Sygnał wejściowy		Regulator PID		Wartość zadana	
$A_m$ [K]	200	$k_p$ [—]	5	$y_{\text{zad}}$ [K]	320
$f_0$ [Hz]	5e-4	$T_i$ [s]	400		
$y_0$ [K]	500	$T_d$ [s]	2		
		$S_{\min}$ [K]	270		
		$S_{\max}$ [K]	750		

Tabela 5.1 – Dane wejściowe.

### 5.5.2 Identyfikacja obiektu

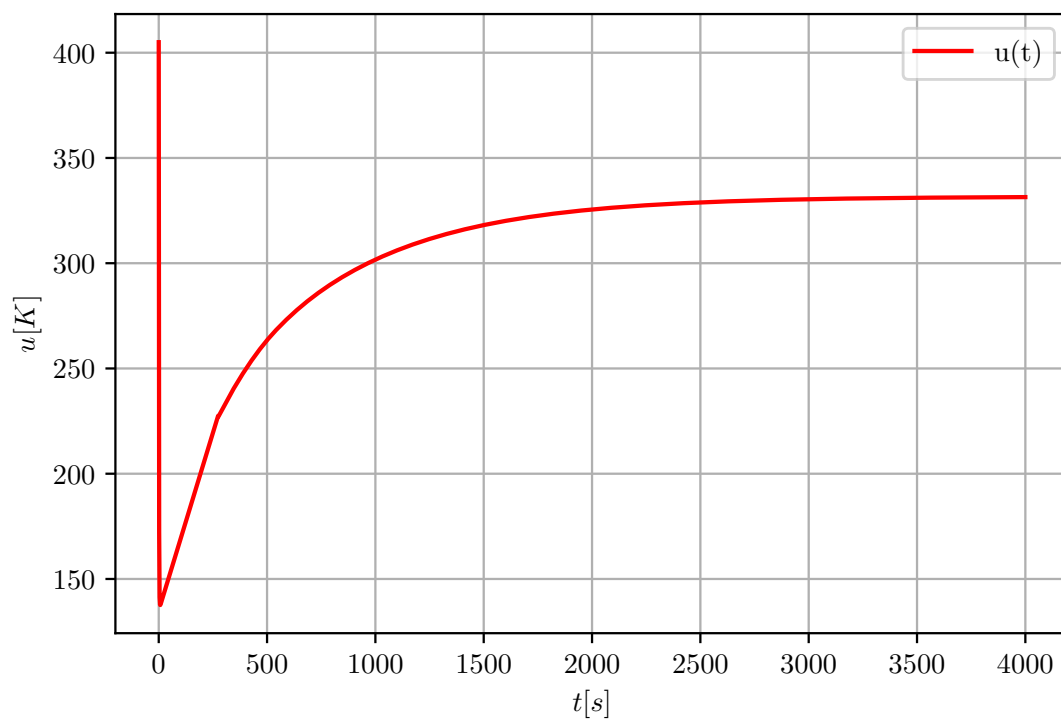


Rysunek 5.6 – Sygnał wejściowy potrzebny do identyfikacji obiektu.

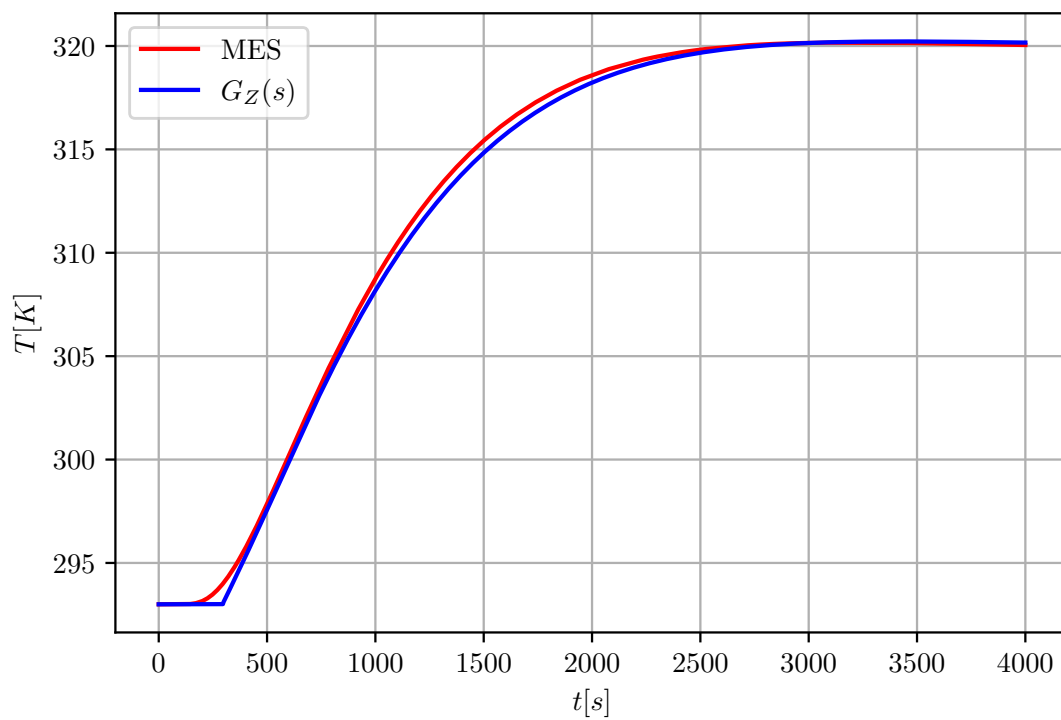


Rysunek 5.7 – Porównanie wyniku identyfikacji z przebiegiem MES.

### 5.5.3 Sterowanie

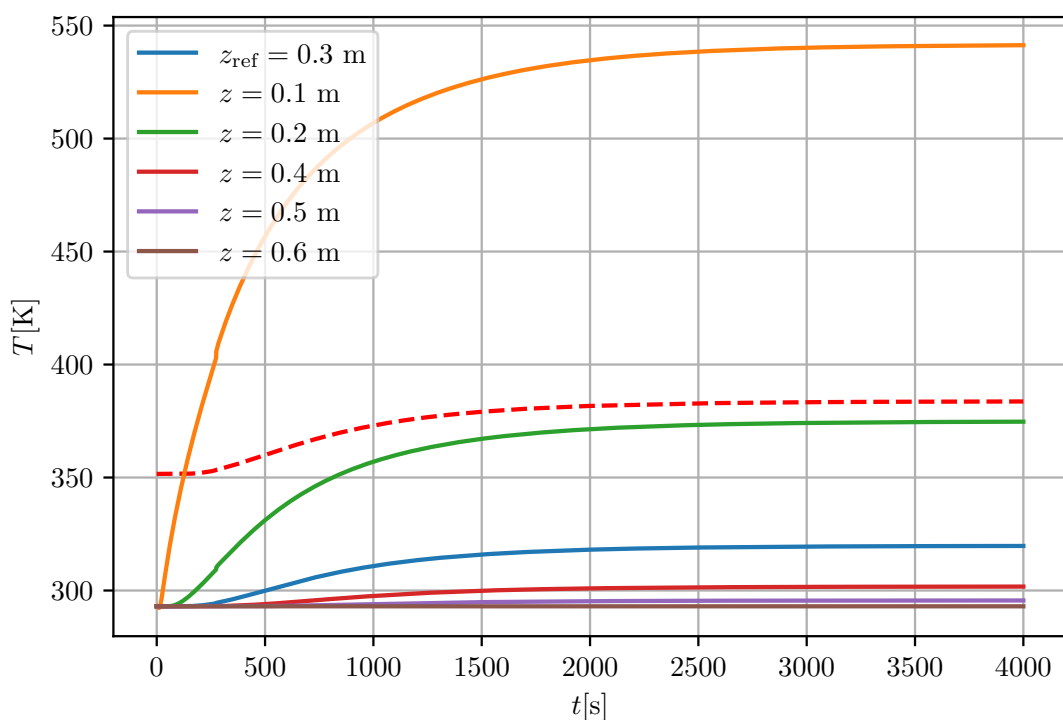


Rysunek 5.8 – Sygnał sterujący.

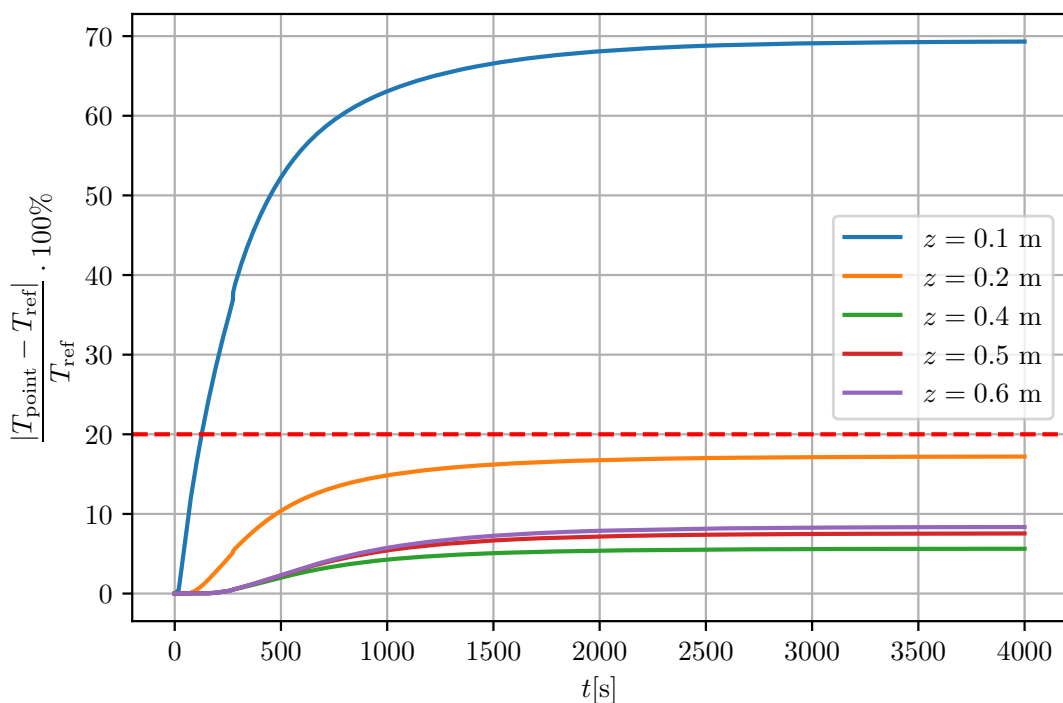


Rysunek 5.9 – Porównanie wysterowanego przebiegu MES z sygnałem wyjściowym układu zamkniętego.





Rysunek 5.10 – Przebiegi temperatury dla wybranych punktów w obiekcie. Punkty te mają stałe wartości współrzędnych  $x = 0.2 \text{ m}$  i  $y = 0.25 \text{ m}$  (takie same jak punkt znajdujący się w środku klocka, ale różnią się od siebie współrzędną  $z$ ).



Rysunek 5.11 – Błąd względny dla wybranych punktów w obiekcie w relacji do punktu referencyjnego. Punkty te mają stałe wartości współrzędnych  $x = 0.2 \text{ m}$  i  $y = 0.25 \text{ m}$  (takie same jak punkt znajdujący się w środku klocka, ale różnią się od siebie współrzędną  $z$ ).

### 5.5.4 Analiza wyników

Według MATLABa dopasowanie przebiegów na rysunku 5.7 równa się 90.70 %. Z wykresu 5.9 można wywnioskować, że sterowanie modelem zastępczym bardzo dobrze odwzorowuje sterowanie obiektem MES, co oznacza, że dynamika wyznaczonej transmitancji poprawnie odwzorowuje zasymulowany problem fizyczny. Na rysunku 5.10 pokazane zostały także przebiegi w wybranych punktach klocka. Czerwona przerywana linia oznacza błąd równy 20 %, a dokładniej  $T'(z_{\text{ref}}, t) = 1.2T(z_{\text{ref}}, t)$ . Można zauważyć, że dla punktu mającego współrzędną  $z = 0.1$  m temperatura w stanie ustalonym osiąga wartości przekraczające ten błąd, ponieważ ów punkt znajduje się relatywnie blisko źródła ciepła (sterowanego). Na rysunku 5.11 pokazane zostały przebiegi błędów względnych w odniesieniu do punktu referencyjnego. Największy błąd względny został osiągnięty dla  $z = 0.1$  m i osiąga wartość 70 % w stanie ustalonym.

## 5.6 Test nr 2 - sterowanie poprzez wymuszenie strumienia ciepła płynącego przez fragmenty dwóch ścian

Celem eksperymentu jest sterowanie poprzez wymuszenie strumienia ciepła płynącego przez fragmenty dwóch ścian (mającymi wspólną krawędź) przy pomocy warunku brzegowego II rodzaju. Na pozostałe (niesterowane) ściany nałożony zostanie stały warunek brzegowy I rodzaju, który pełnić będzie funkcję temperatury otoczenia niewytracającego energii.

Fizyczną interpretację tego eksperymentu można przedstawić jako prostopadłościan, który z czterech stron otoczony jest ciałami stałymi nie wytracającymi energii - o dużej pojemności cieplnej, natomiast do fragmentów dwóch ścian przyłożone są elementy grzejne, które przekazują energię do prostopadłościanu poprzez wymuszenie strumienia cieplnego.

### 5.6.1 Założenia

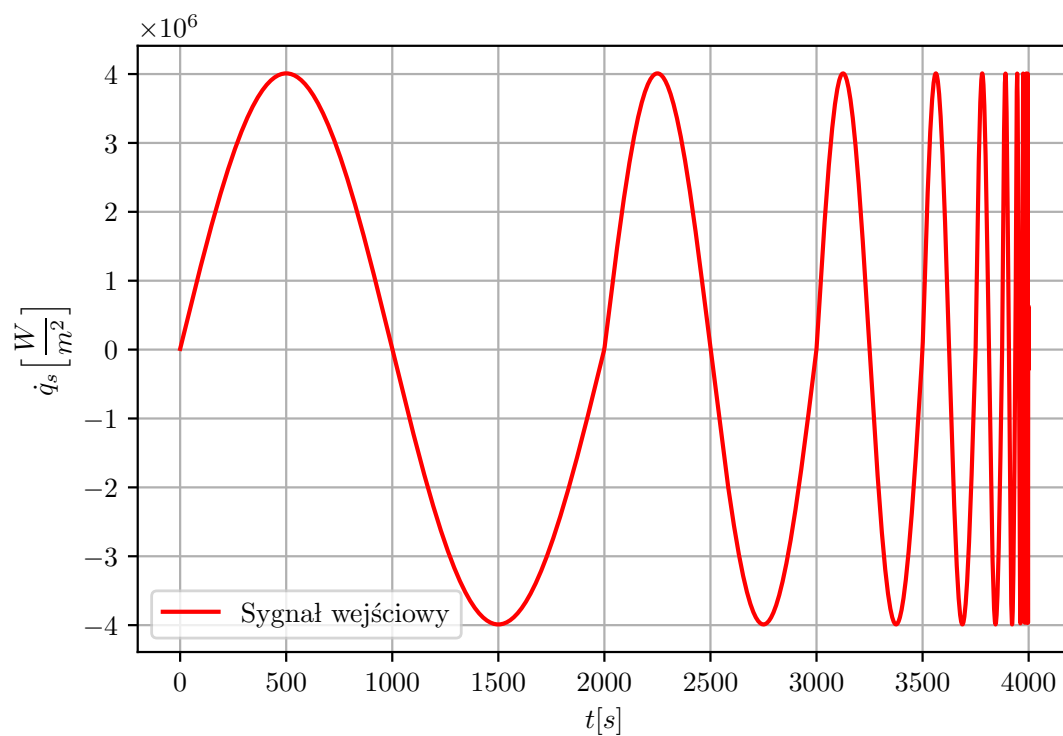
Eksperyment został przeprowadzony z przyjętymi założeniami:

- Układ współrzędnych i wymiary klocka są takie same jak na rysunku 4.12.
- Na fragment dolnej ściany podanej iloczynem kartezjańskim  $[0.1 \text{ m}, 0.3 \text{ m}] \times [0.1 \text{ m}, 0.4 \text{ m}] \times 0 \text{ m}$  i na fragment prawej ściany podanej iloczynem kartezjańskim  $0.4 \text{ m} \times [0.1 \text{ m}, 0.4 \text{ m}] \times [0.1 \text{ m}, 0.5 \text{ m}]$  nałożone są zmienne w czasie warunki brzegowe II rodzaju.
- Na pozostałe (niesterowane) ściany nałożony jest warunek brzegowy I rodzaju  $T_s = 293 \text{ K}$ .
- Wyjściem układu regulacji jest temperatura w środku ciężkości obiektu.
- Dane wejściowe zostały podsumowane w Tabeli 5.2.

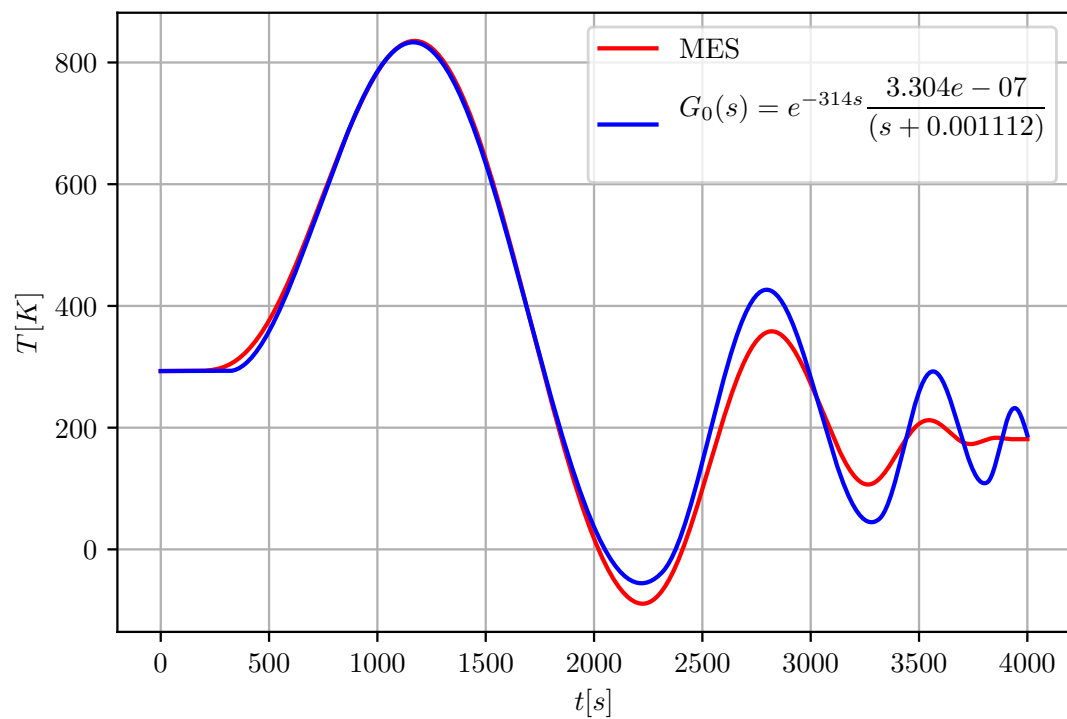
Parametry geometryczne		Parametry materiałowe		Parametry czasowe	
$a$ [m]	0.4	$\lambda$ [ $\frac{W}{Km}$ ]	79	$t_c$ [s]	4000
$b$ [m]	0.5	$\rho$ [ $\frac{kg}{m^3}$ ]	7700	$\Delta t$ [s]	1
$c$ [m]	0.6	$c_w$ [ $\frac{J}{kgK}$ ]	478		
Źródła ciepła		Warunek początkowy		Liczba węzłów	
$\dot{q}_v$ [ $\frac{W}{m^3}$ ]	0	$T_0$ [K]	293	$n$ [—]	4913
Sygnał wejściowy		Regulator PID		Wartość zadana	
$A_m$ [ $\frac{W}{m^2}$ ]	4e+6	$k_p$ [—]	5867	$y_{zad}$ [K]	320
$f_0$ [Hz]	5e−4	$T_i$ [s]	880		
$y_0$ [ $\frac{W}{m^2}$ ]	1e+4	$T_d$ [s]	10		
		$S_{min}$ [K]	−2e+5		
		$S_{max}$ [K]	2e+5		

Tabela 5.2 – Dane wejściowe.

### 5.6.2 Identyfikacja obiektu

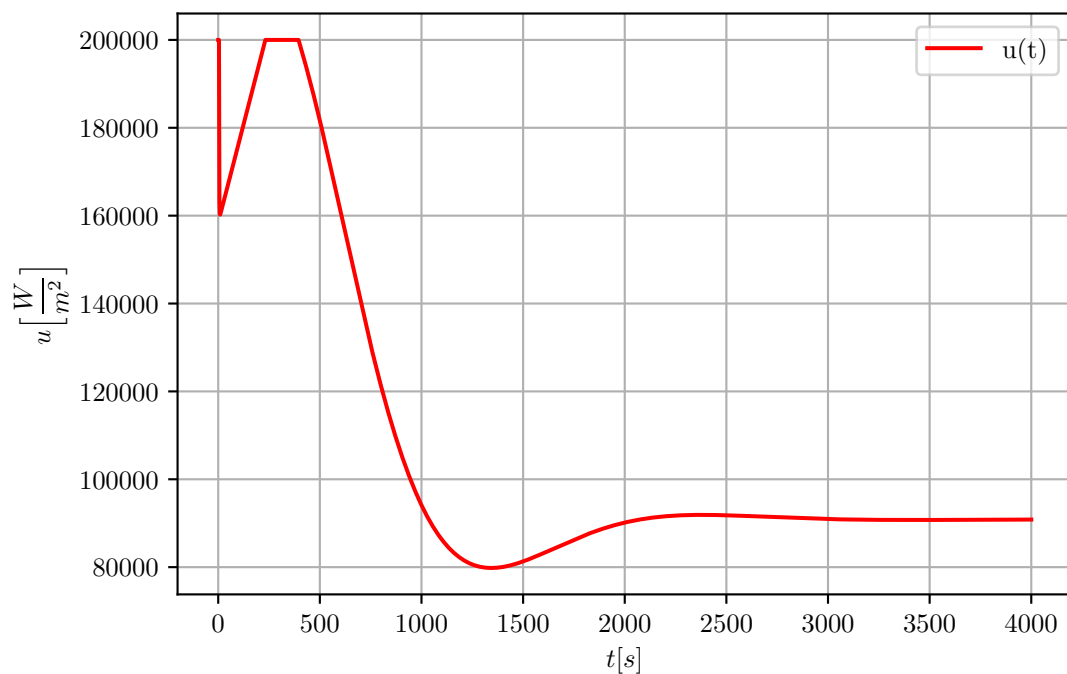


Rysunek 5.12 – Sygnał wejściowy potrzebny do identyfikacji obiektu.

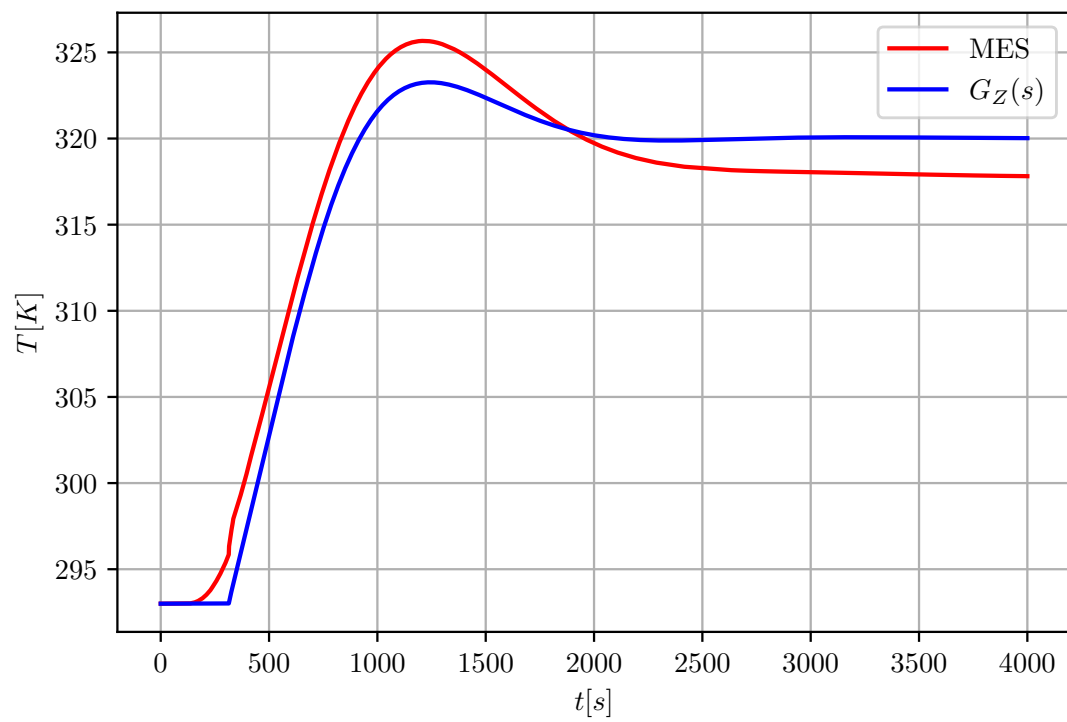


Rysunek 5.13 – Porównanie wyniku identyfikacji z przebiegiem MES.

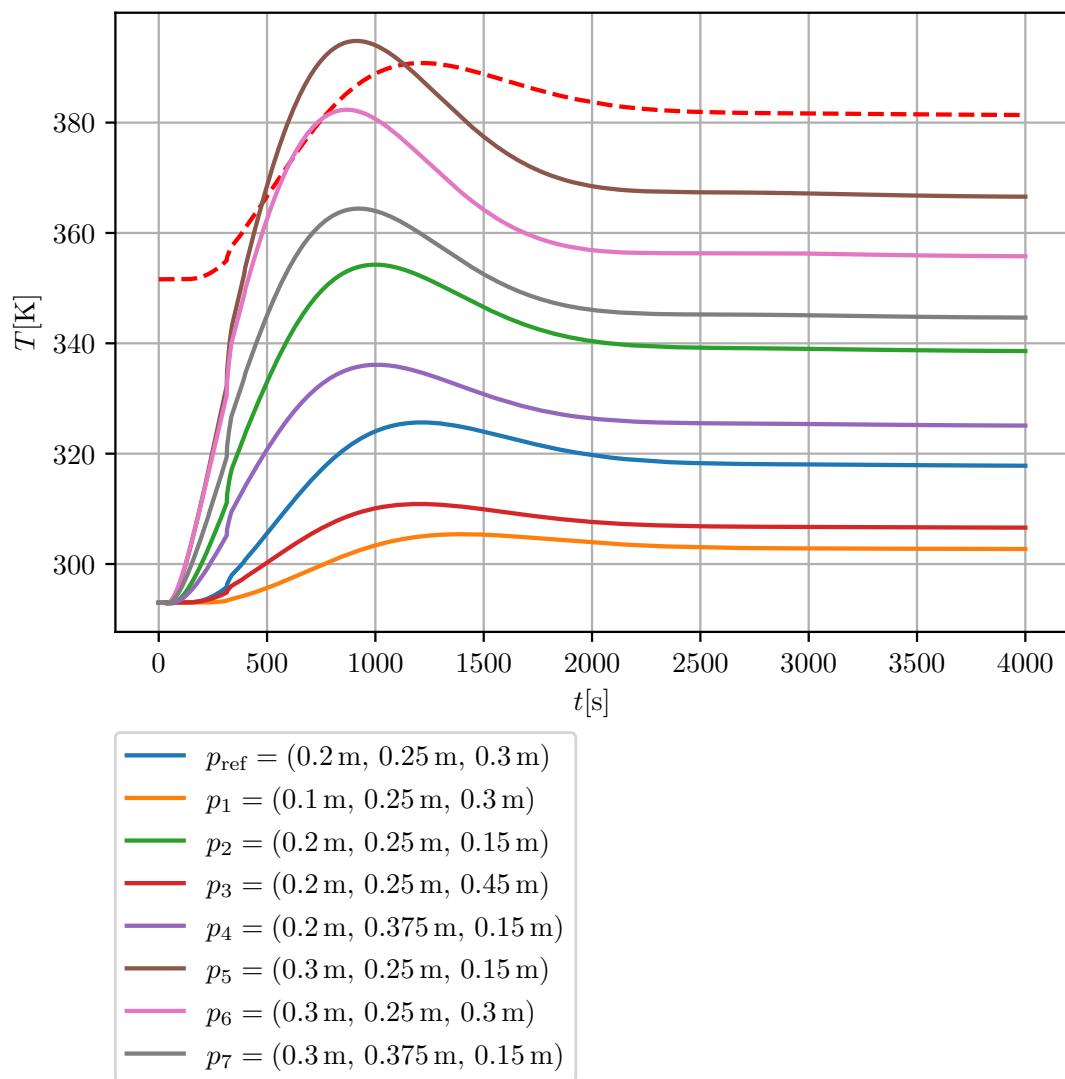
### 5.6.3 Sterowanie



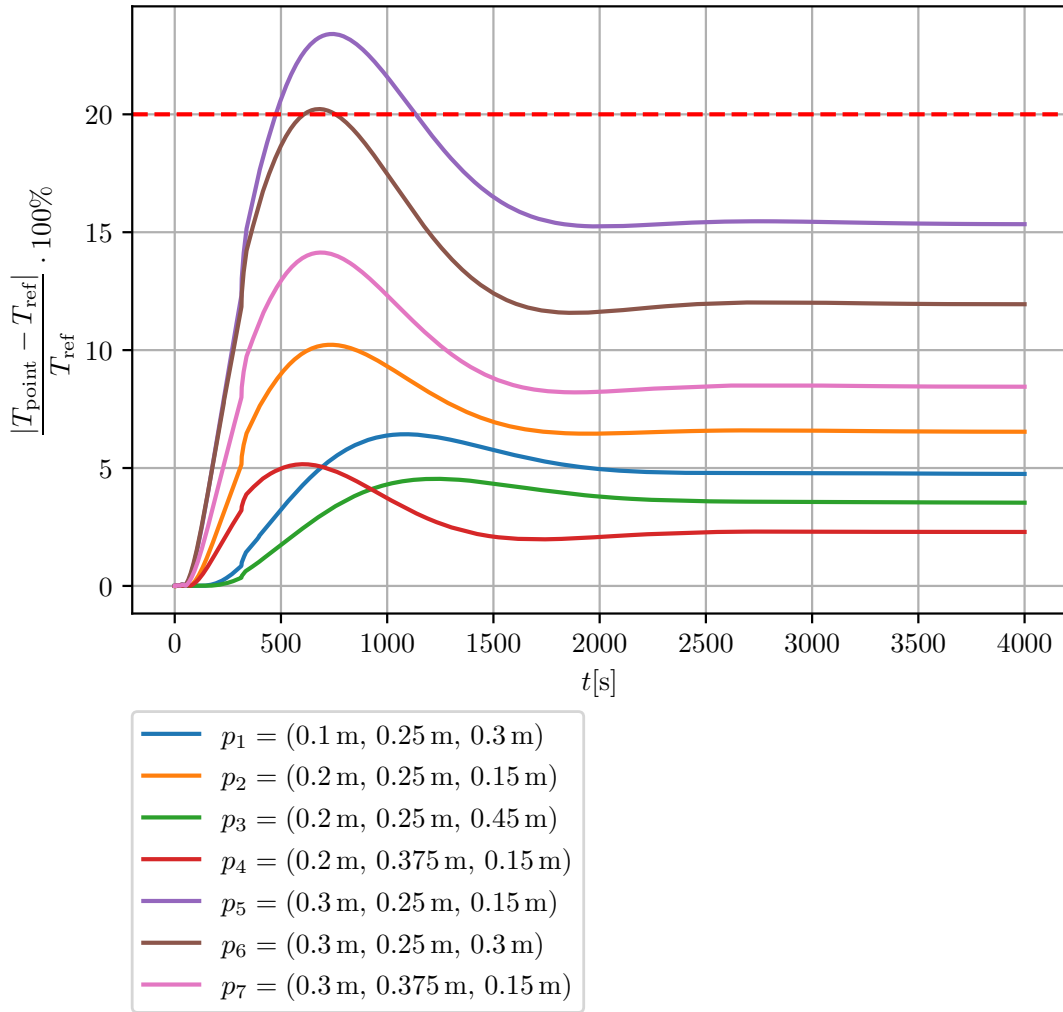
Rysunek 5.14 – Sygnał sterujący.



Rysunek 5.15 – Porównanie wysterowanego przebiegu MES z sygnałem wyjściowym układu zamkniętego.



Rysunek 5.16 – Przebiegi temperatury dla wybranych punktów w obiekcie.



Rysunek 5.17 – Błąd względny dla wybranych punktów w obiekcie w relacji do punktu referencyjnego.

#### 5.6.4 Analiza wyników

Według MATLABa dopasowanie przebiegów na rysunku 5.13 równa się 86.27 %, a więc jest gorsze od tego wykonanego w rozdziale 5.5 o około 4 punkty procentowe. Powodem tego może być bardziej złożony problem (model fizyczny).

Porównując wyniki uzyskane na wykresie 5.15 do tych pokazanych na rysunku 5.9, można wywnioskować, że sterowanie modelem zastępczym nie odwzorowuje sterowania obiektem MES tak dobrze jak w teście nr 1 (rozdział 5.5). Błąd bezwzględny między przebiegami (na rysunku 5.15 stanie ustalonym wynosi  $320 - 317.8 = 2.2 \text{ K}$ , a błąd względny równa się  $(320 - 317.8)/320 \cdot 100\% = 0.6875\%$ . Jednym z powodów otrzymania gorszych wyników może być niepoprawnie zrealizowany model zastępczy. Warto zwrócić uwagę na to, że na wykresie 5.13 w momencie kiedy przebieg MES osiąga stan quasi-ustalony, to przebieg modelu nadal oscyluje, co może stanowić powód błędu w stanie ustalonym. Być może problem tkwi również w zbyt krótkim czasie trwania identyfikacji. Kolejny wniosek jaki można wysnuć dotyczy czasu opóźnienia. Podczas identyfikacji na rysunku 5.13 wyznaczono pewne opóźnienie, które podczas regulacji okazało się zbyt duże. Prawdopodobnie powodem była za mała wartość  $y_0$  dla sygnału identyfikującego (pokazanego na rysunku 5.12) przez co odpowiedź na sinusoidalny sygnał wejściowy narastała

zbyt wolno, wpływając na dużą wartość opóźnienia. Natomiast podczas sterowania sygnał osiąga od początku większe wartości przez co odpowiedź na sygnały sterujące narasta zbyt szybko. Dodatkowo eksperyment przeprowadzony w rozdziale 5.6 (sterowanie warunkiem brzegowym I rodzaju) miał znacznie większy stopień skomplikowania od tego opisanego w rozdziale 5.5 (sterowanie warunkiem brzegowym II rodzaju), ponieważ sterowano dwoma ścianami, dlatego trudniej było zidentyfikować obiekt i nim później sterować

Na rysunku 5.16 pokazane zostały przebiegi w wybranych punktach klocka. Czerwona przerywana linia oznacza błąd równy 20 %, a dokładniej  $T'(z_{\text{ref}}, t) = 1.2T(z_{\text{ref}}, t)$ . Można zauważyć, że dla wszystkich przebiegów na wykresie temperatura w stanie ustalonym osiąga wartości nie przekracza czerwonej przerywanej linii. Na rysunku 5.17 pokazane zostały przebiegi błędów względnych w odniesieniu do punktu referencyjnego. Można zauważyć, że dla punktu  $p_5$  błąd względny w momencie przeregulowania przekracza wartość 20 %. (osiągając wartość ok. 24 %).

## 5.7 Podsumowanie

- Obiekt MES został zastąpiony członem inercyjnym pierwszego rzędu z opóźnieniem.
- Do badań wykorzystano regulator PID z rzeczywistym członem różniczkującym i ograniczeniem sygnału sterującego.
- Podczas sterowania znana była nie tylko temperatura w środku klocka, ale też dla wybranych punktów w obiekcie, żeby monitorować przebiegi temperatur lub ich błędów względnych.
- Sinusoidalny sygnał o zmiennej częstotliwości dawał lepsze rezultaty podczas identyfikacji niż odpowiedź skokowa lub sygnał prostokątny.
- Im więcej ścian było sterowanych tym trudniej dało się zidentyfikować obiekt.
- Sterowanie sterowanie energią (warunkiem brzegowym II rodzaju) okazało się trudniejsze niż sterowanie temperaturą (warunkiem brzegowym I rodzaju), ponieważ nie można było tak łatwo przewidzieć odpowiedzi obiektu.
- Jeśli sinusoidalny sygnał wejściowy zaczynał się od zbyt małej wartości (tak jak w teście nr 2), to temperatura w środku klocka za wolno narastała, generując przy tym zbyt duże opóźnienie. Dało się to zauważyć dopiero podczas prób sterowania obiektem MES.



# Rozdział 6

## Podsumowanie końcowe

Autor pracy napisał oprogramowanie w języku C++, które rozwiązuje trójwymiarowe równanie różniczkowe cząstkowe przewodnictwa cieplnego w stanie ustalonym i nieustalonym dla zadanych warunków brzegowych Metodą Elementów Skończonych podejściem Galerkinia dla ośmiowęzłowych prostopadłościennych elementów skończonych. Stworzono również własny generator siatki, który daje możliwość projektowania zarówno obszarów wielowarstwowych jak i siatek niejednorodnych. Do obliczania układów równań wykorzystano metodę Choleskiego, którą wybrano z powodów optymalizacyjnych, ponieważ obsługuje macierze spf. Zaletą stworzonego oprogramowania jest jego wielowątkowość, co daje możliwość rozwiązywania kilku problemów w tym samym czasie, co znacznie ułatwiło autorowi prowadzenie badań eksperymentów dla różnych parametrów. Dużym atutem zrealizowanego programu jest również jego prostota w użyciu, ponieważ jedyne co musi zrobić użytkownik, to uzupełnić plik tekstowy z danymi wejściowymi, który ma uporządkowaną, strukturalną postać i podzielony jest na sekcje tematyczne. Poprawność działania programu potwierdzono na podstawie porównania wyników MES z rozwiązaniami analitycznymi dla przypadków jednowymiarowych.

W dalszej części pracy program został wykorzystany do badań związanych z automatyką i teorią sterowania. W tym celu rozbudowano go o możliwość nakładania zmiennych w czasie warunków brzegowych. Następnie oprogramowanie zostało zintegrowane ze środowiskiem MATLAB/Simulink w celu dokonania identyfikacji obiektu MES, zastąpienia transmitancją ciągłą i zamknięcia go pętlą z ujemnym sprzężeniem zwrotnym z regulatorem PID. Wygenerowane sygnały sterujące przekazywano z powrotem do MES i porównywano otrzymane wyniki z tymi uzyskanymi dla modelu zastępczego. Po wykonaniu testów okazało się, że kluczowe znaczenie ma podanie odpowiedniego sinusoidalnego sygnału wejściowego do MES, ponieważ to od niego zależy jak dobrze obiekt zostanie zidentyfikowany, a następnie wysterowany.

Podsumowując, cele pracy zostały osiągnięte.

# Dodatek A

## Wyprowadzenie wzoru na funkcję kształtu

Wyprowadzona zostanie funkcja kształtu zależnych od współrzędnych lokalnych  $\psi = \psi(\xi, \eta, \delta)$ , która opisana jest wzorem:

$$\psi = SW^{-1}. \quad (\text{A.1})$$

Postać wektora  $S$  ma związek z trójkątem Pascala. Dla przypadku dwuwymiarowego elementu czterowęzłowego przyjęłaby postać:

$$S_{2D} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta]. \quad (\text{A.2})$$

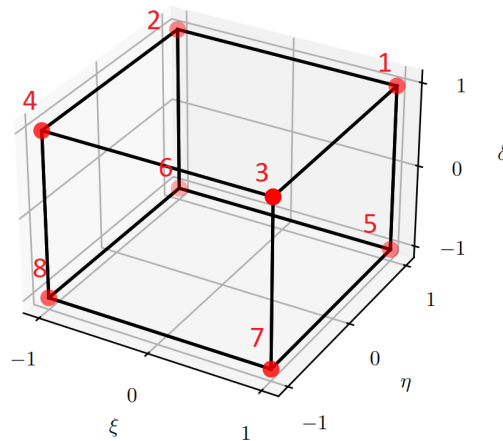
Analogicznie dla przypadku trójwymiarowego i ośmiowęzłowego elementu macierz  $S$  przedstawia się w następujący sposób:

$$S = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \delta \quad \xi\eta \quad \xi\delta \quad \eta\delta \quad \xi\eta\delta]. \quad (\text{A.3})$$

Macierz  $W$  tworzy się z macierzy  $S_i$  dla wszystkich  $i$ -tych węzłów w elemencie:

$$W = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \delta_1 & \xi_1\eta_1 & \xi_1\delta_1 & \eta_1\delta_1 & \xi_1\eta_1\delta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \delta_2 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\delta_2 & \eta_2\delta_2 & \xi_2\eta_2\delta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \delta_3 & \xi_3\eta_3 & \xi_3\delta_3 & \eta_3\delta_3 & \xi_3\eta_3\delta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \delta_4 & \xi_4\eta_4 & \xi_4\delta_4 & \eta_4\delta_4 & \xi_4\eta_4\delta_4 \\ 1 & \xi_5 & \eta_5 & \delta_5 & \xi_5\eta_5 & \xi_5\delta_5 & \eta_5\delta_5 & \xi_5\eta_5\delta_5 \\ 1 & \xi_6 & \eta_6 & \delta_6 & \xi_6\eta_6 & \xi_6\delta_6 & \eta_6\delta_6 & \xi_6\eta_6\delta_6 \\ 1 & \xi_7 & \eta_7 & \delta_7 & \xi_7\eta_7 & \xi_7\delta_7 & \eta_7\delta_7 & \xi_7\eta_7\delta_7 \\ 1 & \xi_8 & \eta_8 & \delta_8 & \xi_8\eta_8 & \xi_8\delta_8 & \eta_8\delta_8 & \xi_8\eta_8\delta_8 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Numer węzła  $i$  oznacza, że ma on współrzędne lokalne  $\xi_i, \eta_i, \delta_i$ , gdzie  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Węzły w elemencie ponumerowane według konwencji pokazanej na rysunku A.1.



Rysunek A.1 – Numeracja węzłów w elemencie opisanym w lokalnym układzie współrzędnych.

Na podstawie rysunku A.1 można zapisać jakie wartości przyjmują  $i$ -te lokalne

współrzędne elementu:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \delta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \delta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \delta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \delta_4 \\ \xi_5 & \eta_5 & \delta_5 \\ \xi_6 & \eta_6 & \delta_6 \\ \xi_7 & \eta_7 & \delta_7 \\ \xi_8 & \eta_8 & \delta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

zatem macierz  $W$  przyjmuje wartości:

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \delta_1 & \xi_1\eta_1 & \xi_1\delta_1 & \eta_1\delta_1 & \xi_1\eta_1\delta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \delta_2 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\delta_2 & \eta_2\delta_2 & \xi_2\eta_2\delta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \delta_3 & \xi_3\eta_3 & \xi_3\delta_3 & \eta_3\delta_3 & \xi_3\eta_3\delta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \delta_4 & \xi_4\eta_4 & \xi_4\delta_4 & \eta_4\delta_4 & \xi_4\eta_4\delta_4 \\ 1 & \xi_5 & \eta_5 & \delta_5 & \xi_5\eta_5 & \xi_5\delta_5 & \eta_5\delta_5 & \xi_5\eta_5\delta_5 \\ 1 & \xi_6 & \eta_6 & \delta_6 & \xi_6\eta_6 & \xi_6\delta_6 & \eta_6\delta_6 & \xi_6\eta_6\delta_6 \\ 1 & \xi_7 & \eta_7 & \delta_7 & \xi_7\eta_7 & \xi_7\delta_7 & \eta_7\delta_7 & \xi_7\eta_7\delta_7 \\ 1 & \xi_8 & \eta_8 & \delta_8 & \xi_8\eta_8 & \xi_8\delta_8 & \eta_8\delta_8 & \xi_8\eta_8\delta_8 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

a po jej odwróceniu:

$$W^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Ostatecznie wzór na funkcję kształtu  $\psi$  przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\psi &= SW^{-1} = \\
&= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \xi + \xi\eta + \xi\eta\delta + \xi\delta + \eta + \eta\delta + \delta + 1 \\ \eta - \xi\eta - \xi\eta\delta - \xi\delta - \xi + \eta\delta + \delta + 1 \\ \xi - \xi\eta - \xi\eta\delta + \xi\delta - \eta - \eta\delta + \delta + 1 \\ \xi\eta - \xi + \xi\eta\delta - \xi\delta - \eta - \eta\delta + \delta + 1 \\ \xi + \xi\eta - \xi\eta\delta - \xi\delta + \eta - \eta\delta - \delta + 1 \\ \xi\eta\delta - \xi\eta - \xi + \xi\delta + \eta - \eta\delta - \delta + 1 \\ \xi - \xi\eta + \xi\eta\delta - \xi\delta - \eta + \eta\delta - \delta + 1 \\ \xi\eta - \xi - \xi\eta\delta + \xi\delta - \eta + \eta\delta - \delta + 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 - \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \delta \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Liczba równań  $\psi_i$  dla danego elementu jest równa osiem, czyli liczbie węzłów w danym elemencie, ponieważ poszukiwanymi wielkościami są temperatury w węzłach danego elementu.

Funkcje kształtu  $\psi_i$  dla poszczególnych węzłów w elemencie można przedstawić w formie skróconej z wykorzystaniem zapisu  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\delta_i$  według konwencji przyjętej w (A.5):

$$\psi_i(\xi, \eta, \delta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \delta\delta_i). \tag{A.9}$$

Pochodne cząstkowe funkcji kształtu przyjmują postać:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} = \frac{1}{8}\xi_i(\delta\delta_i + 1)(\eta\eta_i + 1), \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = \frac{1}{8}\eta_i(\delta\delta_i + 1)(\xi\xi_i + 1), \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} = \frac{1}{8}\delta_i(\eta\eta_i + 1)(\xi\xi_i + 1). \tag{A.12}$$

## Dodatek B

### Wyprowadzenie wzorów - MES w sformułowaniu Galerкина

Szukane jest rozwiązanie przybliżone  $T^e(x, y, z, t)$  to znaczy takie, że

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v - \rho c_w \frac{\partial T^e}{\partial t} = \vartheta \neq 0, \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $\vartheta$  jest resztą (błędem).

Całkując obustronnie równanie (B.1) po obszarze, a następnie mnożąc je obustronnie przez  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , która jest pewną funkcją wagową (zupełnie dowolną, ale musi być całkowita) otrzymano:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v - \rho c_w \frac{\partial T^e}{\partial t} \right) \varphi \, dx dy dz = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \vartheta \varphi \, dx dy dz. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Pierwszym krokiem jest wybranie takich rozwiązań przybliżonych, które spełniają warunek:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v - \rho c_w \frac{\partial T^e}{\partial t} \right) \varphi \, dx dy dz = \\ = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \vartheta \varphi \, dx dy dz = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

stąd powstaje następujący problem do rozwiązania:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \right) + \dot{q}_v - \rho c_w \frac{\partial T^e}{\partial t} \right) \varphi \, dx dy dz = 0. \quad (\text{B.4})$$

Żeby zastąpić kłopotliwe pochodne cząstkowe drugiego rzędu  $\frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2}$  w równaniu (B.4) należy skorzystać ze wzorów na całkowanie przez części iloczynów owych pochodnych i wspomnianej wyżej funkcji wagowej:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} \varphi \, dx = \left[ \frac{\partial T^e}{\partial x} \varphi \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx, \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} \varphi \, dy = \left[ \frac{\partial T^e}{\partial y} \varphi \right]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dy, \quad (\text{B.6})$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \varphi \, dz = \left[ \frac{\partial T^e}{\partial z} \varphi \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial T^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \, dz. \quad (\text{B.7})$$

Następnie, żeby uniknąć długich obliczeń można założyć warunek adiabatyczny  $\nabla T = 0$  czyli:

$$\frac{\partial T^e}{\partial x}(x_1, y, z) = \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_2, y, z) = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial y}(x, y_1, z) = \frac{\partial T^e}{\partial y}(x, y_2, z) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial T^e}{\partial z}(x, y, z_1) = \frac{\partial T^e}{\partial z}(x, y, z_2) = 0, \quad (\text{B.10})$$

wtedy:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} \varphi dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx, \quad (\text{B.11})$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} \varphi dy = - \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \varphi dz = - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial T^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (\text{B.13})$$

ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 T^e}{\partial x^2} \varphi = - \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial^2 T^e}{\partial y^2} \varphi = - \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 T^e}{\partial z^2} \varphi = - \frac{\partial T^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{B.16})$$

Podstawiając (B.14)-(B.16) do (B.4) otrzymano:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( - \frac{\partial T^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial T^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial T^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \varphi + \right. \\ & \left. - \rho c_w \frac{\partial T^e}{\partial t} \varphi \right) dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Funkcja bazowa  $\psi$  nazywana jest funkcją kształtu i w niniejszej pracy dana jest wzorem wyprowadzonym w dodatku A:

$$\psi_i(x, y, z) = \frac{1}{8} (1 + \xi(x, y, z) \xi_i) (1 + \eta(x, y, z) \eta_i) (1 + \delta(x, y, z) \delta_i) \quad (\text{B.18})$$

Niezależne funkcje kształtu  $\psi$  są tej samej klasy co  $T^e$  i  $\varphi$  z zerowymi wartościami na krańcach. Wówczas dowolną funkcję  $T^e(x, y, z, t)$  można wyznaczyć jako:

$$T^e(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j^e \psi_j(x, y, z), \quad (\text{B.19})$$

gdzie  $T_j^e$  nazywa się stopniami swobody aproksymowanego problemu. Dla skończonej liczby wyrazów otrzyma się:

$$T_h^e(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^N T_j^e \psi_j(x, y, z). \quad (\text{B.20})$$

Jeśli  $T^e$  w równaniu (B.17) zastąpi się wyrażeniem  $T_h^e$  opisanym wzorem (B.20), to otrzyma się:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( -\frac{\partial T_h^e}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial T_h^e}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial T_h^e}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \dot{q}_v \varphi + \right. \\ \left. - \rho c_w \frac{\partial T_h^e}{\partial t} \varphi \right) dx dy dz = 0 \quad (\text{B.21})$$

Kombinacja liniowa funkcji kształtu przybliżana jest pochodną po czasie danej chwili:

$$\frac{\partial T_h^e(x, y, z, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \dot{T}_j^e \psi_j(x, y, z). \quad (\text{B.22})$$

Metoda Galerkiina używa tych samych funkcji bazowych do konstruowania funkcji  $\varphi(x, y, z)$ :

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i(x, y, z). \quad (\text{B.23})$$

Podstawiając zależności (B.22) i (B.23) do wzoru (B.21) otrzyma się:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{j=1}^N T_j^e \psi_j \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \right] + \right. \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{j=1}^N T_j^e \psi_j \right] \frac{\partial}{\partial y} \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sum_{j=1}^N T_j^e \psi_j \right] \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \right] \right) + \\ \left. + \dot{q}_v \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \right] - \rho c_w \left[ \sum_{j=1}^N \dot{T}_j^e \psi_j \right] \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \right] \right) dx dy dz = 0 \quad (\text{B.24})$$

po uproszczeniu:

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left( \sum_{j=1}^N \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \lambda \left( -\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} - \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) dx dy dz \right) T_j^e + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \dot{q}_v \psi_i dx dy dz - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \rho c_w \psi_j \dot{T}_j^e \right) dx dy dz \right) \beta_i = 0. \quad (\text{B.25})$$

Jeśli przyjmie się, że:

$$K_{ij}^e = \lambda \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (\text{B.26})$$

$$P_i^e = \dot{q}_v \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \psi_i dx dy dz, \quad (\text{B.27})$$

$$C_{ij}^e = \rho c_w \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \psi_j \psi_i dx dy dz, \quad (\text{B.28})$$

to równanie przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \left( \sum_{j=1}^N K_{ij}^e T_j^e + C_{ij}^e \dot{T}_j^e - P_i^e \right) = 0. \quad (\text{B.29})$$

Ponieważ funkcja wagowa

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \beta_i \psi_i \quad (\text{B.30})$$

może być zupełnie dowolna stąd w szczególności można przyjąć, że:

- $\beta_i = 1$  dla dowolnego  $i$ ,
- $\beta_k = 0$  dla dowolnego  $k \neq i$ ,

wtedy jest to równoważne warunkowi:

$$\varphi_i = \psi_i, \quad (\text{B.31})$$

stąd:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij}^e T_j^e + C_{ij}^e \dot{T}_j^e = P_i^e \quad (\text{B.32})$$

lub

$$K^e T^e + C^e \dot{T}^e = P^e. \quad (\text{B.33})$$



## Dodatek C

# Przedstawienie macierzy w lokalnym układzie współrzędnych elementu skończonego

Żeby wyznaczyć macierze  $K^e$ ,  $C^e$ ,  $P^e$  w układzie lokalnym poszczególnego elementu należy przekształcić wzory (B.26)-(B.28) wyprowadzone w dodatku B, wykorzystując przy tym zależności między współrzędnymi globalnymi a lokalnymi i ich różniczkami.

Zależności między współrzędnymi globalnymi a lokalnymi:

$$\xi = \frac{x - x_c}{\frac{a}{2}} \implies x = \frac{a}{2}\xi + x_c, \quad (\text{C.1})$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{\frac{b}{2}} \implies y = \frac{b}{2}\eta + y_c, \quad (\text{C.2})$$

$$\delta = \frac{z - z_c}{\frac{c}{2}} \implies z = \frac{c}{2}\delta + z_c, \quad (\text{C.3})$$

Różniczki współrzędnych (C.1)-(C.3) przyjmują postać:

$$d\xi = \frac{dx}{\frac{a}{2}} \implies dx = \frac{a}{2}d\xi, \quad (\text{C.4})$$

$$d\eta = \frac{dy}{\frac{b}{2}} \implies dy = \frac{b}{2}d\eta, \quad (\text{C.5})$$

$$d\delta = \frac{dz}{\frac{c}{2}} \implies dz = \frac{c}{2}d\delta. \quad (\text{C.6})$$

Podstawiając wzory (C.4)-(C.6) do (B.26)-(B.28) otrzymuje się:

$$K_{ij}^e = \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) \frac{2d\xi}{a} \frac{2d\eta}{b} \frac{2d\delta}{c} \quad (\text{C.7})$$

$$C_{ij}^e = \rho c_w \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_j \psi_i \frac{2d\xi}{a} \frac{2d\eta}{b} \frac{2d\delta}{c} \quad (\text{C.8})$$

$$P_i^e = \dot{q}_v \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i \frac{2d\xi}{a} \frac{2d\eta}{b} \frac{2d\delta}{c} \quad (\text{C.9})$$

a po uproszczeniu:

$$K_{ij}^e = \lambda \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) d\xi d\eta d\delta \quad (\text{C.10})$$

$$C_{ij}^e = c_w \rho \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i \psi_j d\xi d\eta d\delta \quad (\text{C.11})$$

$$P_i^e = \dot{q}_v \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i d\xi d\eta d\delta \quad (\text{C.12})$$

Następnie należy wykonać operację całkowania równań (C.10)-(C.12), jednakże żeby móc ją wykonać na wzorze (C.10), to najpierw należy wyrazić pochodne  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  za pomocą  $\frac{\partial}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \eta}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \delta}$  zgodnie ze wzorami transformacyjnymi:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \delta}, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \delta}, \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \delta}. \quad (\text{C.15})$$

Podstawiając zależności (C.13)-(C.15) do wzoru (C.10) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e = & \lambda \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial \delta} \right) \right. \\ & + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial \delta} \right) + \\ & \left. + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} \right) \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial \delta} \right) \right) d\xi d\eta d\delta. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Dla funkcji  $f(x, y, z)$  stworzonej z równań (C.1)-(C.3):

$$f(x, y, z) = (\xi, \eta, \delta) = \left( \frac{2(x - x_c)}{a}, \frac{2(y - y_c)}{b}, \frac{2(z - z_c)}{c} \right) \quad (\text{C.17})$$

otrzymuje się następującą macierz Jacobiego:

$$J_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \delta}{\partial x} & \frac{\partial \delta}{\partial y} & \frac{\partial \delta}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a^e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{c^e} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Podstawiając zależności (C.18) do (C.16) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e = & \lambda \frac{a}{2} \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \frac{1}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial \delta} \frac{\partial \psi_j}{\partial \delta} \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} \right) d\xi d\eta d\delta \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Po podstawieniu zależności (A.10)-(A.12) do (C.16), a następnie wykonaniu operacji całkowania na wzorach (C.16), (C.11) i (C.12) otrzymuje się ostateczne wzory na  $K_{ij}^e$ ,  $C_{ij}^e$  oraz  $P_i^e$ :

$$K_{ij}^e = \frac{1}{144} \lambda \left( \frac{ab\delta_i\delta_j(\eta_i\eta_j + 3)(\xi_i\xi_j + 3)}{c} + \frac{ac\xi_i\xi_j(\delta_i\delta_j + 3)(\eta_i\eta_j + 3)}{b} + \frac{bc\eta_i\eta_j(\delta_i\delta_j + 3)(\xi_i\xi_j + 3)}{a} \right), \quad (\text{C.20})$$

$$C_{ij}^e = \frac{1}{1728} c_w \rho abc \left( \delta_i\delta_j + 3 \right) \left( \eta_i\eta_j + 3 \right) \left( \xi_i\xi_j + 3 \right), \quad (\text{C.21})$$

$$P_i^e = \frac{1}{8} \dot{q}_v abc. \quad (\text{C.22})$$

## Dodatek D

# Wyprowadzenie wzorów w zagadnieniu nieustalonym

Przyjmując, że wektor  $T_t$  reprezentuje temperatury węzłowe w chwili  $t$ , to w przedziale czasu  $\Delta t$  wektor ten będzie wyznaczony równaniem:

$$T = \begin{bmatrix} N_t & N_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t \\ T_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = N_t T_t + N_{t+\Delta t} T_{t+\Delta t}. \quad (D.1)$$

W tym równaniu  $N_t$  i  $N_{t+\Delta t}$  są funkcjami kształtu zależnymi od czasu. Przyjmując, że dla małych przedziałów  $\Delta t$  zależność temperatur węzłowych od czasu jest liniowa, funkcje kształtu przyjmą postać:

$$N_t = \frac{\Delta t - t}{\Delta t}, \quad (D.2)$$

$$N_{t+\Delta t} = \frac{t}{\Delta t}, \quad (D.3)$$

stąd

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_t}{\partial t} & \frac{\partial N_{t+\Delta t}}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t \\ T_{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_t \\ T_{t+\Delta t} \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

Ponieważ wyjściowy wektor temperatur węzłowych jest znany dla przeprowadzenia całkowania równania Fouriera względem czasu wystarczy jedna funkcja wagowa, czyli:

$$KT + C \frac{\partial T}{\partial t} - P = 0, \quad (D.5)$$

stąd

$$\int_0^{\Delta t} \frac{t}{\Delta t} \left[ K \left( \frac{\Delta t - t}{\Delta t} T_t + \frac{t}{\Delta t} T_{t+\Delta t} \right) + \frac{C}{\Delta t} \left( -T_t + T_{t+\Delta t} \right) - P \right] dt = 0. \quad (D.6)$$

Po przeprowadzeniu całkowania otrzymuje się:

$$\left( 2K + \frac{3}{\Delta t} C \right) T_{t+\Delta t} + \left( K - \frac{3}{\Delta t} C \right) T_t - 3P = 0, \quad (D.7)$$

ostatecznie:

$$\left( 2K + \frac{3}{\Delta t} C \right) T_{t+\Delta t} = \left( \frac{3}{\Delta t} C - K \right) T_t + 3P. \quad (D.8)$$

W celu obliczenia wektora temperatur w węzłach po czasie  $\Delta t$  za pomocą metody ważonych reszt należy rozwiązać układ równań liniowych:

$$AT_{t+\Delta t} = B, \quad (D.9)$$

gdzie:

$$A = 2K + \frac{3}{\Delta t} C, \quad (D.10)$$

$$B = \left( \frac{3}{\Delta t} C - K \right) T_t + 3P. \quad (D.11)$$

## Dodatek E

### Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy I rodzaju

W  $i$ -tym węźle znajdującym się na brzegu narzucony jest warunek I rodzaju, czyli  $i$ -ty węzeł przyjmuje zadaną temperaturę  $T_s$ :

$$T_i = T_s. \quad (\text{E.1})$$

Żeby osiągnąć taki rezultat należy zmodyfikować  $K_{ii}$  oraz  $P_i$  w następujący sposób:

$$K'_{ii} = K_{ii} \cdot 10^8, \quad (\text{E.2})$$

$$P'_i = K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_s. \quad (\text{E.3})$$

Żeby zauważyć słuszność wzorów (E.2) i (E.3) należy rozpatrzyć równanie  $K'T = P'$  ze względu na  $i$ -ty element kolumny  $P'$ :

$$P'_i = \sum_j K'_{ij} T_j, \quad (\text{E.4})$$

a następnie do równania (E.4) podstawić wzory (E.2) i (E.3) otrzymując:

$$K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_s = K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_i + \sum_{j \neq i} K_{ij} T_j. \quad (\text{E.5})$$

Równanie (E.5) z faktu, że  $\sum_{j \neq i} K_{ij} T_j \ll K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_i$ , upraszcza się do postaci:

$$K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_s = K_{ii} \cdot 10^8 \cdot T_i \quad (\text{E.6})$$

$$T_i = T_s, \quad (\text{E.7})$$

zatem  $i$ -ty węzeł przyjmuje zadaną temperaturę  $T_s$ .

## Dodatek F

### Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy II rodzaju

Ponieważ dla strumienia cieplnego padającego na ściankę elementu  $YZ$  (czyli  $y \in [y_1, y_2]$  oraz  $z \in [z_1, z_2]$ ) w kierunku od  $x_2$  do  $x_1$  zachodzi

$$\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_2, y, z) = -\dot{q}_s, \quad (\text{F.1})$$

$$\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_1, y, z) = 0, \quad (\text{F.2})$$

to

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{\partial T^e}{\partial x} \varphi \right]_{x_1}^{x_2} dy dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left( \lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_2) \varphi(x_2) + \right. \\ & \quad \left. - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_1) \varphi(x_1) \right) dy dz = \\ & = -\dot{q}_s \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x_2) dy dz = \\ & = -\dot{q}_s \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi_i(x_2) dy dz = \\ & = -\dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i(\xi_2) d\eta d\delta = \\ & = -\dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i) \right) d\eta d\delta = \\ & = -\frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_i) \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i) d\eta d\delta = \\ & = -\frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_i) \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} \left[ \eta + \frac{1}{2} \eta_i \eta^2 \right]_{-1}^1 \left[ \delta + \frac{1}{2} \delta_i \delta^2 \right]_{-1}^1 = \\ & = -\frac{1}{2} (1 + \xi_i \xi_2) \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} = \\ & = (\xi_2 = 1) = \\ & = -\frac{1}{2} (1 + \xi_i) \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Ponieważ  $\xi_i$  może przyjąć wartości  $-1$  lub  $1$  to:

$$P'^e = P^e + \dot{q}_s \frac{b}{2} \frac{c}{2} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T. \quad (\text{F.4})$$

Element macierzy kolumnowej  $P_i^e$  jest ściśle związany z węzłem o numerze lokalnym  $i$ . Zatem jeśli strumień ciepła oddziałuje wyłącznie na węzły o numerze lokalnym 2, 4, 6 i 8, stąd wektor  $[0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$  wartości równe zero dla tych węzłów, na które strumień nie wpływa.

## Dodatek G

### Wyprowadzenie wzoru na warunek brzegowy III rodzaju

Ponieważ dla konwekcji na ścianie elementu  $YZ$  (czyli  $y \in [y_1, y_2]$  oraz  $z \in [z_1, z_2]$ ) w kierunku od  $x_2$  do  $x_1$  dla  $x_2 > x_1$  zachodzi:

$$\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_2, y, z) = h(T^e(x_2, y, z) - T_\infty), \quad (G.1)$$

$$\lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_1, y, z) = 0, \quad (G.2)$$

to

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ \frac{\partial T^e}{\partial x} \varphi \right]_{x_1}^{x_2} dy dz = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left( \lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_2) \varphi(x_2) + \right. \\ & \quad \left. - \lambda \frac{\partial T^e}{\partial x}(x_1) \varphi(x_1) \right) dy dz = \\ & = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} h(T^e(x_2) - T_\infty) \varphi(x_2) dy dz = \\ & = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} h \left( \sum_{j=1}^8 T_j^e \psi_j(x_2) - T_\infty \right) \psi_i(x_2) dy dz = \\ & = h \sum_{j=1}^8 T_j^e \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi_j(x_2) \psi_i(x_2) dy dz - h T_\infty \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \psi_i(x_2) dy dz = \\ & = h \frac{b}{2} \frac{c}{2} \sum_{j=1}^8 T_j^e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_j) (1 + \eta \eta_j) (1 + \delta \delta_j) \right) \left( \frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_i) (1 + \right. \\ & \quad \left. + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i) \right) d\eta d\delta - h \frac{b}{2} \frac{c}{2} T_\infty \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8} (1 + \xi_2 \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i) \right) d\eta d\delta = \\ & = \frac{1}{64} h \frac{b}{2} \frac{c}{2} (1 + \xi_2 \xi_i) \sum_{j=1}^8 T_j^e (1 + \xi_2 \xi_j) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta \eta_j) (1 + \delta \delta_j) (1 + \eta \eta_i) (1 + \\ & \quad + \delta \delta_i) d\eta d\delta - \frac{1}{8} h \frac{b}{2} \frac{c}{2} T_\infty (1 + \xi_2 \xi_i) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 + \eta \eta_i) (1 + \delta \delta_i) d\eta d\delta = \\ & = \frac{1}{64} h \frac{b}{2} \frac{c}{2} (1 + \xi_2 \xi_i) \sum_{j=1}^8 T_j^e (1 + \xi_2 \xi_j) \left( \frac{4}{9} (\delta_i \delta_j + 3) \eta_i \eta_j + \frac{4}{3} \delta_i \delta_j + 4 \right) + \\ & \quad - \frac{1}{2} h \frac{b}{2} \frac{c}{2} T_\infty (1 + \xi_2 \xi_i). \end{aligned} \quad (G.3)$$

Ostatecznie otrzyma się:

$$P'^e = P^e + h T_\infty \frac{b}{2} \frac{c}{2} [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T, \quad (G.4)$$

$$K_{ij}^{te} = K_{ij}^e + h \frac{b}{2} \frac{c}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix}. \quad (\text{G.5})$$

Element macierzy kolumnowej  $P_i^e$  jest ściśle związany z węzłem o numerze lokalnym  $i$ . Podobnie element macierzy  $K_{ij}^e$  dotyczy węzłów o numerach lokalnych  $i$  i  $j$ . Można zauważyć, że jeśli na węzły narzucony jest trzeci warunek brzegowy, to niektóre elementy macierzy mnoży się przez liczbę  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{2}{9}$  lub  $\frac{4}{9}$  według następujących reguł:

- jeśli węzły  $i$  oraz  $j$  usytuowane są względem siebie po przekątnej, to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{1}{9}$ ,
- jeśli węzły  $i$  oraz  $j$  leżą w linii równoległej do którejś z osi układu, współrzędnych, to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{2}{9}$ ,
- jeśli  $i = j$  to  $K_{ij}^e$  mnoży się przez liczbę  $\frac{4}{9}$ .



# Bibliografia

- [1] Hughes T.J.R. *The Finite Element Method*. Prentice-Hall International Editions, 1987.
- [2] Taylor R.L. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heineman, Oxford, 2000.
- [3] Kankanhalli N. Seetharamu Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley Sons, 2 edition, 2004.
- [4] Yunus A. Çengel and Afshin J. Ghajar. *HEAT AND MASS TRANSFER: FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS*. McGraw-Hill Education, 6 edition, 2020.
- [5] Tomasz S. Wiśniewski Stefan Wiśniewski. *Wymiana ciepła*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 5 edition, 1994.
- [6] Szargut J. *Modelowanie numeryczne pól temperatury*. WNT, Warszawa, 1992.
- [7] Wąsowski J. Fortuna Z., Macukow B. *Metody Numeryczne*. WNT, Warszawa, 2 edition, 1993.
- [8] Grzymkowski R. *Metody Numeryczne. Zagadnienia brzegowe*. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice, 2003.

## Dokumentacje

- C++ Documentation - <https://cppreference.com>
- MATLAB Documentation - <https://www.mathworks.com>
- Python Documentation - <https://www.python.org>