Modelska analiza II
2011/12

8. naloga – Metoda končnih elementov: lastne rešitve

Jože Zobec

1 Uvod

Naloga je analogna prejšnji. Globalna matrika A je popolnoma ista, imamo le še dodatno matriko B. Nato rešimo posplošen problem lasnih vrednosti:

$$(A - \lambda B)x = 0,$$

oz.

$$(B^{-1}A - \lambda I)x = 0.$$

Lastni pari so energije in lastni nihajni načini, zaradi česar so vse lastne vrednosti realne (sicer pa je iz definicije A in B očitno, da imamo opravka z realnima simetričnima matrikama).

Galerkinov nastavek lahko rešujemo na popolnoma enak način, le da tam triangulacija prostora ni potrebna, saj morajo bazne funkcije ψ_i^m biti izbrane tako, da že same po sebi zadostijo robnim pogojem, tj.

$$u(r,\varphi) \approx \sum_{m,i} c_{m,i}\psi_i^m(r,\varphi), \qquad \psi_i^m(r,\varphi) \equiv r^{m+i}(r-1)\sin(m\varphi)$$

V tem primeru veljata isti definiciji matrik A in B, kot prej, le da funkcije ψ_i^m niso tako lokalizirane, se pravi

$$A_{ij}^{(m)} \equiv \langle \nabla\psi_i^m, \nabla\psi_j^m \rangle, \quad B_{ij}^{(m)} \equiv \langle \psi_i^m, \psi_j^m \rangle,$$

s skalarnim produktom $\langle \bullet, \bullet \rangle$ nad območjem $\mathcal{A}$

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{\mathcal{A}} \mathrm{d}S\ f(x,y)g(x,y) = \int_{\mathcal{A}} f(r,\varphi)g(r,\varphi)r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi,$$

ki je območje nad katerim velja diferencialna enačba $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, z Dirichletovimi robnimi pogoji na robu, tj. $u(r,\varphi) = 0, \forall (r,\varphi) \in \partial\mathcal{A}$.

Matriki A in B sta potem po definiciji

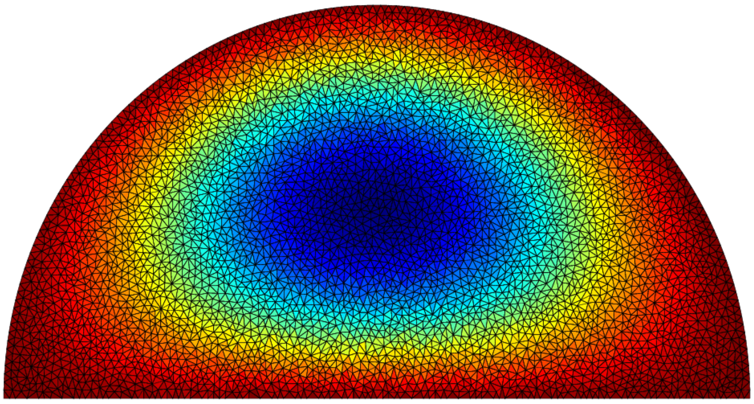
$$B_{ij}^{(m)} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2m+i+j+2} - \frac{2}{2m+i+j+3} + \frac{1}{2m+i+j+4}\right] \tag{1}$$

$$A_{ij}^{(m)} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{ij}{2m+i+j} - \frac{2ij+i+j}{2m+i+j+1} + \frac{(i+1)(j+1)}{2m+i+j+2}\right] \tag{2}$$

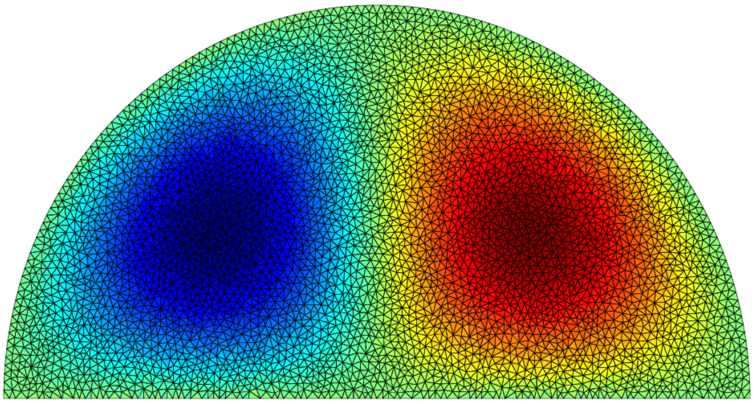
Ta problem je glede na prejšnjo nalogo računsko zahtevnejši (zahteva $\mathcal{O}(N^3)$ operacij), vendar si lahko pomagamo s tem, da ne potrebujemo vseh lastnih vrednosti, pač pa samo npr. nekaj najmanjših.

2 Rezultati

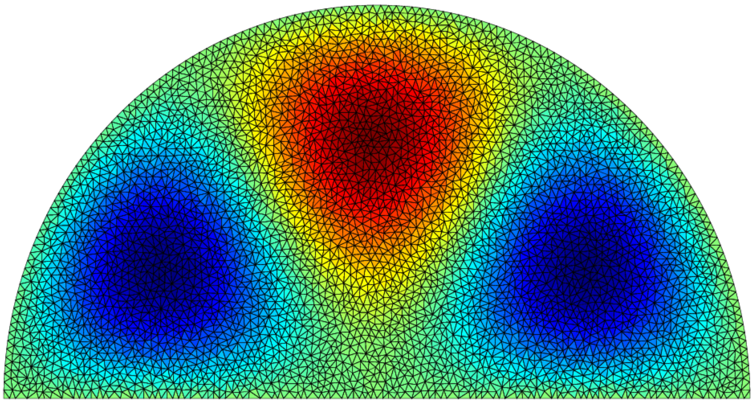
Triangulacijo sem izračunal s programskim jezikom `C`, Galerkonov nastavek pa kar z `Octave`. Nekaj lastnih načinov sem prikazal na graf (triangulacijo sem prikazal z `Octave`). Nekaj takih lasnih rešitev lahko vidimo na slikah 1, 2, 3 in 4. Energije so tabelirane v tabeli 1.



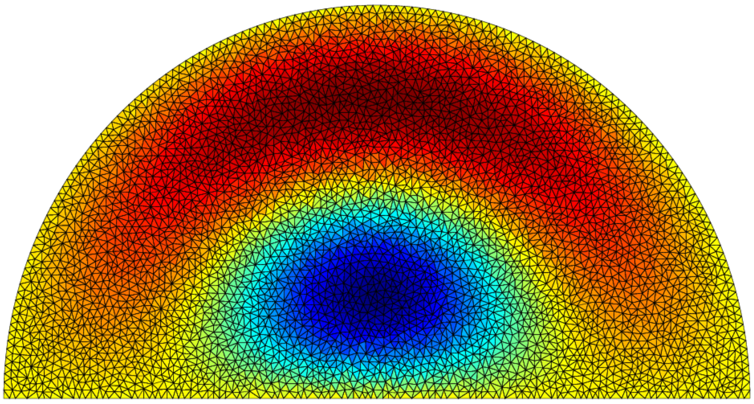
Slika 1: Osnovno stanje polkrožne opne, $n = 1$, $m = 1$.



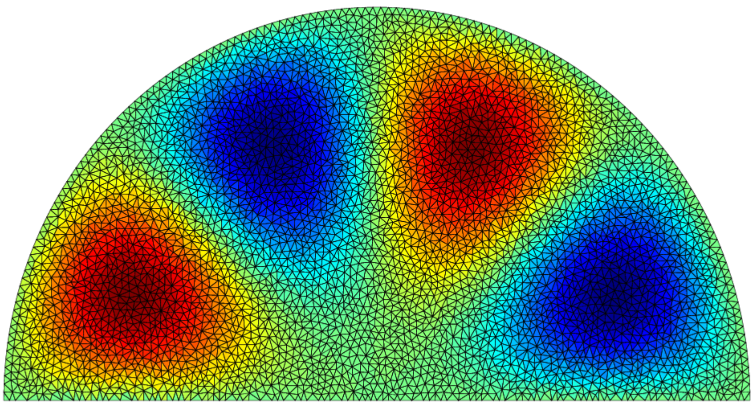
Slika 2: Prvo vzbujeno stanje, $n = 1$, $m = 2$.



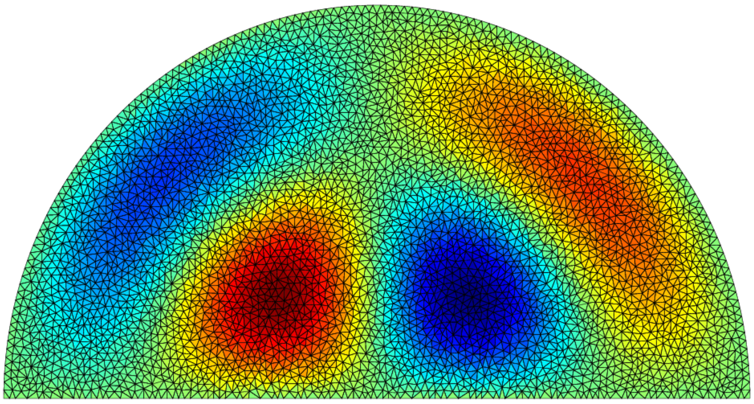
Slika 3: Drugo vzbujeno stanje, $n = 1$, $m = 3$.



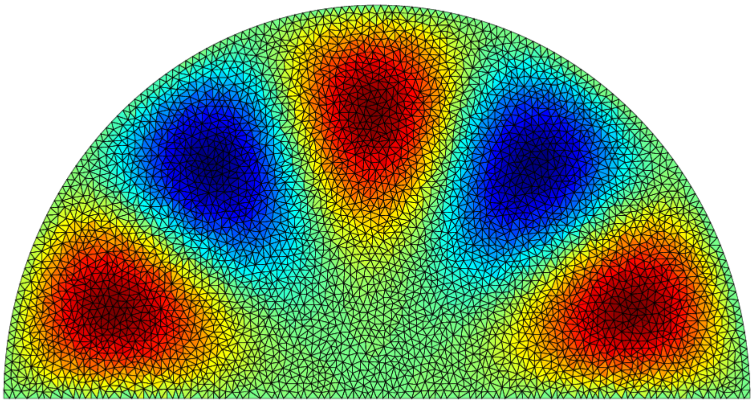
Slika 4: Tretje vzbujeno stanje, $n = 2$, $m = 1$.



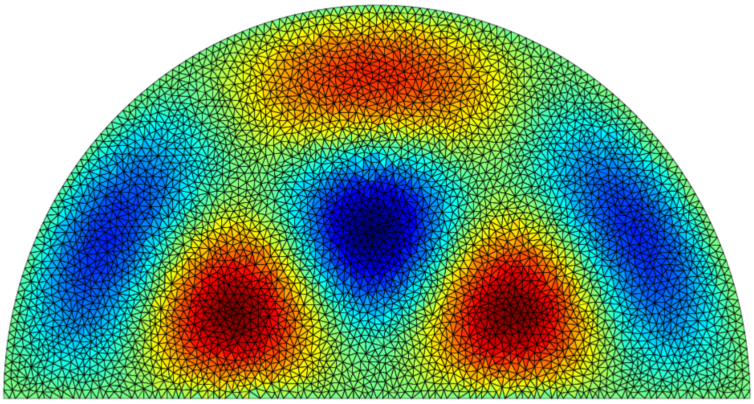
Slika 5: Četrto vzbujeno stanje polkrožne opne, $n = 1$, $m = 4$.



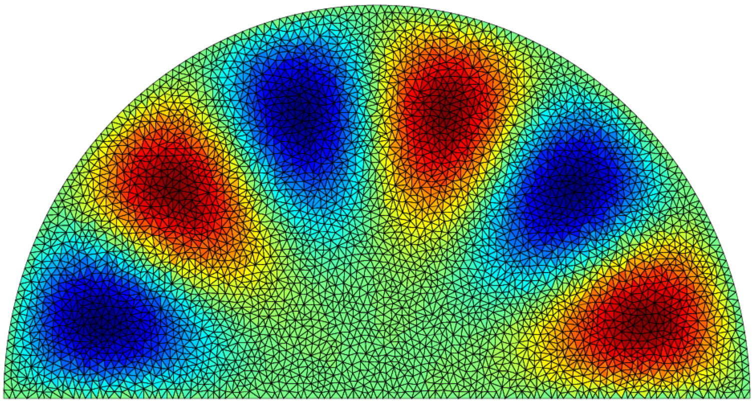
Slika 6: Peto vzbujeno stanje, $n = 2$, $m = 2$.



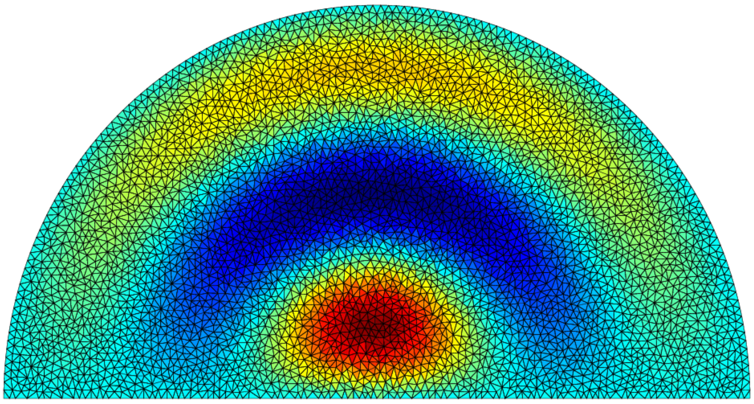
Slika 7: Šesto vzbujeno stanje, $n = 1$, $m = 5$.



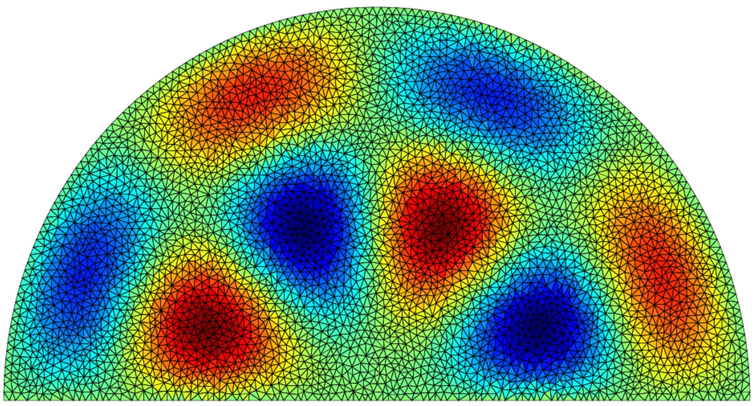
Slika 8: Sedmo vzbujeno stanje, $n = 2$, $m = 3$.



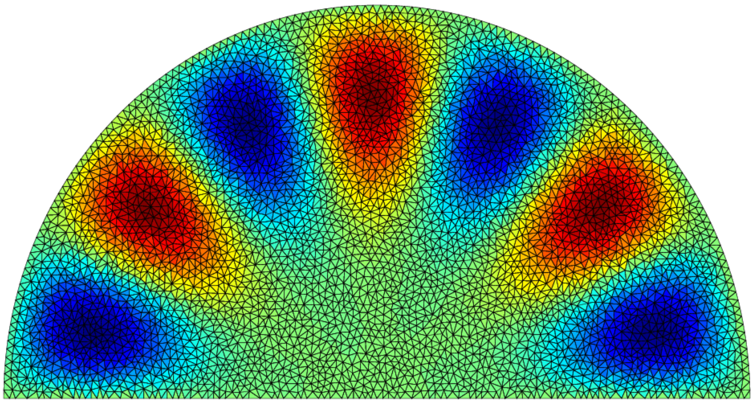
Slika 9: Osmo vzbujeno stanje polkrožne opne, $n = 1$, $m = 6$.



Slika 10: Deveto vzbujeno stanje, $n = 3$, $m = 1$.



Slika 11: Deseto vzbujeno stanje, $n = 2$, $m = 4$.



Slika 12: Enajsto vzbujeno stanje, $n = 1$, $m = 7$.

Tabela 1: Triangulacije so bila izračunane z $\sim 12 \cdot 10^3$ točkami in dajejo rezultate na slabi dve decimalni mesti. Vendar pa nam dajo rezultate na bistveno širšem spektru. Te lastne vrednosti, kar nam jih je dal Galerkin so vse, kar se jih je dalo naračunati, sicer matrika ni bila več pozitivno definitna, vendar pa da občasno napove vse štiri decimalke pravilno. Moj sklep je, če želimo veliko lastnih vrednosti na majhno natančnost potrebujemo končne elemente, sicer pa kar Galerkina, ki je hitrejši.

n	E_n^{TRI}	E_n^{G}	E_n
0	3.8327	3.8337	3.8317
1	5.1379	5.1356	5.1356
2	6.3846	6.3802	6.3802
3	7.0216	7.0219	7.0156
4	7.5959	7.5884	7.5883
5	8.4275	8.4186	8.4127
6	8.7832	8.7715	8.7715
7	9.7770	9.7611	9.7610

Literatura

[1] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)