Modelska analiza II
2011/12

7. naloga – Metoda končnih elementov: Poissonova enačba

Jože Zobec

1 Uvod

Spet se vračamo k Poissonovi enačbi. Merimo hitrostni profil skozi cev, katere profil je lik (mnogoterost) $\mathcal{A}$. V brezdim. obliki se enačba zapiše kot

$$\nabla^2 v = -f, \tag{1}$$

robni pogoj pa je $v(\partial\mathcal{A}) = 0$. Prostor diskretiziramo tako, da ga najprej tlakujemo s poljubnimi liki. Najprikladnejši so trikotniki, saj lahko z njmi relativno natančno opišemo vsako obliko. Za to je posebej prikladna Delaunayeva triangulacija, ki ima implementacije v raznoterih knjižnicah in programih.

Po triangulaciji aproksimiramo $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$, katero sestavlja N vozlišč in M trikotnikov. Dokazano je, da enačbo (1) rešimo (dobimo v) natanko tedaj, poiščemo tak $A(w,v)$, da

$$\sum_{t=1}^{M} A^{(t)}(w,v) = \sum_{t=1}^{M} \langle w, f\rangle^{(t)}, \tag{2}$$

kjer t predstavlja indeks po trikotnikih, $A(w,v)^{(t)}$ in $\langle w, f\rangle^{(t)}$ pa sta

$$A(w,v)^{(t)} = \int_{T_t} \left[(\nabla w)^T \cdot (\nabla v)\right] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \langle w, f\rangle^{(t)} = \int_{T_t} wf \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Funkcija w je utežna funkcija. Tako v, kot w aproksimiramo z razvojem po baznih funkcijah

$$v \approx \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j(x,y), \quad w \approx \sum_{j=1} d_j \psi_j(x,y), \tag{4}$$

vendar bomo vzeli Galerkinov način in rekli $\psi_j = \phi_j$. Te funkcije izgledajo kot Trikotnik T_t imenujemo končni element. Vsak trikotnik ima notranje indkse, m, n, ki tečejo po ogliščih trikotnika. Nad trikotnikom z oglišči $\mathbf{r}_1^j = (x_1, y_1)^T$, $\mathbf{r}_2^j = (x_2, y_2)^T$ in $\mathbf{r}_3^j = (x_3, y_3)^T$, kjer funkcija $\phi_j(x,y)$ zapiše kot

$$\phi_j(x,y) = \left[\det\begin{pmatrix} 1 & x_1^j & y_1^j \\ 1 & x_2^j & y_2^j \\ 1 & x_3^j & y_3^j \end{pmatrix}\right]^{-1} \det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^j & y_2^j \\ 1 & x_3^j & y_3^j \end{pmatrix}, \tag{5}$$

očitno je, da je $\mathbf{r}_1^j$ kar enak vozlišču $\mathbf{r}_j$. Funkcija $\phi_j(x,y)$ ni definirana samo nad trikotnikom, ampak nad vsemi sosedi vozlišča $\mathbf{r}_j$ (tj. nad vsemi trikotniki, katerih oglišče je $\mathbf{r}_j$). Velja tudi $\phi_j(\mathbf{r}_k) = \delta_{j,k}$. V enačbi (3) potrebujemo gradiente: $\nabla\phi_j$, ki so

$$\nabla\phi_j = \frac{1}{2|T|}\begin{pmatrix} y_2^j - y_3^j \\ x_3^j - x_2^j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Lokalne prispevke znotraj trikotnika t lahko potem z indeksoma m, n, ki tečeta po ogliščih trikotnika, opišemo z lokalnimi prispevki k togostni matriki A in lokalnim skalarnim produktom

$$A^{(t)}_{m,n}(w,v) = \int_{T_t} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \left[(\nabla\phi_m)^T \nabla\phi_n\right],$$
$$\langle w, f\rangle^{(t)}_m = \int_{T_t} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, \left[\phi_m f\right],$$

na koncu pa moramo iz teh matrik $A^{(t)}_{m,n}$ dobiti globalno matriko $\mathbf{S}$ in vektor skalarnih produktov (obremenitveni vektor) $\mathbf{g}$. Ploskovni integrali in skalarni produkti so zaradi lepote izbire ϕ_j enostavni in jih lahko izračunamo eksaktno vnaprej.

Koeficiente c_j dobimo tako, da rešimo sistem

$$\mathbf{Sc} = \mathbf{g},$$

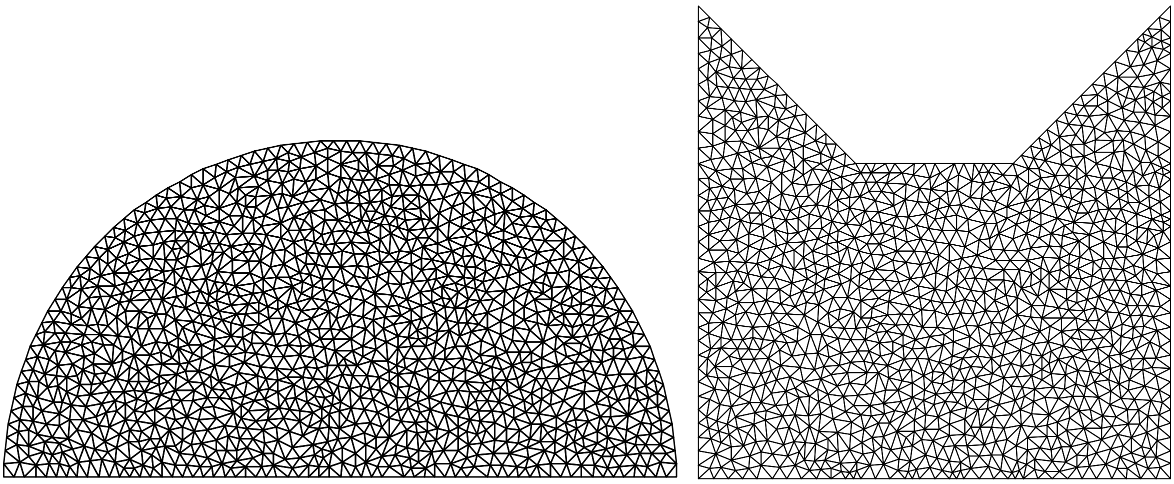
v katerem pa moramo še pravilno upoštevati (Dirichletove) robne pogoje. To storimo tako, da za vsak j, ki teče po robnih točkah, postavimo

$$S_{ji} = S_{ji} = 0, \ \forall i \neq j \quad S_{jj} = 1, \quad g_j = 0,$$

s čimer smo prisiljeni vzeti $c_j = 0$. V našem primeru je $f = 1$.

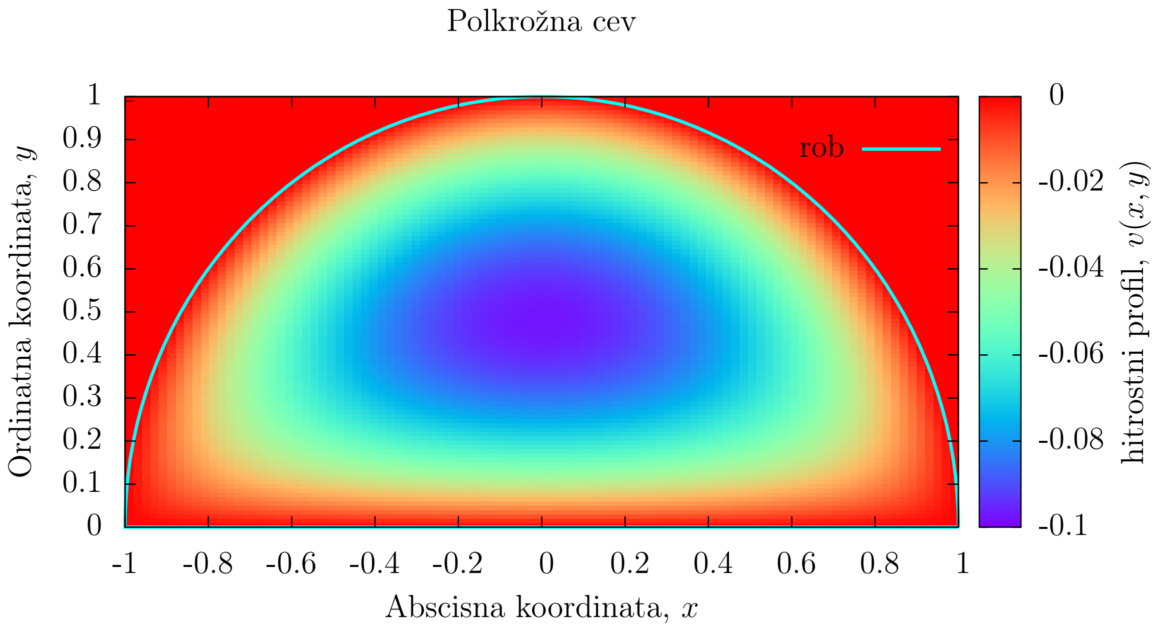
2 Rezultati

Uporabil sem preprost odprtokoden program `Triangle` [2], za katerega je dovolj, da le podamo robove, s trikotniki jih pa zapolni sam in jih po potrebi tudi izriše. Napisan je v jeziku `C`, ima nadvse prijazen vmesnik. Primer triangulacije je na sliki 1. Od tiste triangulacije dobimo pretoka na slikah 2 in 3.

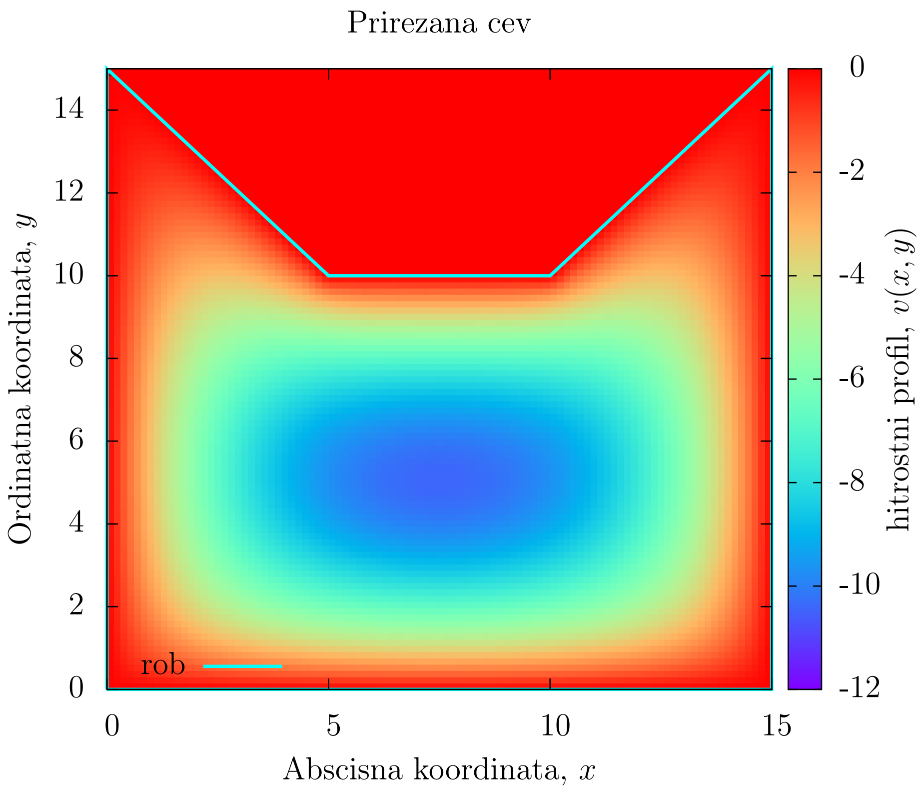


(a) Polkrožna cev. *(b)* Prirezana cev.

Slika 1: Delaunayeva triangulacija s programom `Triangle` za prvi in drugi del naloge. V obeh primerih je naša mreža sestavljena iz ~ 1000 točk.



Slika 2: Hitrostni profil je tak, kot bi ga pričakovali. Naloga ja torej gotovo pravilno rešena.



Slika 3: Profil se ne razlikuje dosti od tistega, ki smo ga dobili pri peti nalogi.

Izračun je bil končan v $\sim 10\ s$, sam izris je bil pa bolj problematičen, vendar je šlo kar s programom `gnuplot`.

2.1 Pretok

Sedaj, ko imamo hitrostni profil, lahko izračunamo tudi pretok:

$$\Phi = \int \mathrm{d}S\ v(x,y) \approx \sum_{t=1}^{M} \int_{T_t} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ v(x,y),$$

vsakega izmed teh integralov pa lahko izračunamo analitčno,

$$\Phi = |T| \sum_{t=1}^{N} \sum_{m=1}^{3} \frac{v_m^{(t)}}{3},$$

hitrost v vozlišču $\mathbf{r}_i$ pa je kar c_i.

V petem poglavju smo raje računali Poiseuillov koeficient, saj slednji poskrbi za to, da „normira“ pretok skozi cev na njihovo površino in je zaradi tega boljši za primerjavo:

$$C = 8\pi \frac{\Phi}{S}.$$

Poiseuillova koeficienta sta $C = 1.63 \cdot 10^{-2}$ za prirezano cev in $-7.44 \cdot 10^{-2}$ za polkrožno cev. Oba sem dobil s $\sim 10^4$ točkami, da bi izostril natančnost.

Literatura

[1] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)

[2] `http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html`