

9. naloga – Metoda robnih elementov

Jože Zobec

1 Uvod

Metoda robnih elementov je intimno povezana z metodo končnih elementov. V problemih dimenzije tri se obe metodi zanašata na triangulacijo, vendar metodo končnih elementov zanima obnašanje znotraj telesa, z metodo robnih elementov pa obnašanje zunaj telesa, ki ima rob območja \mathcal{A} , nad katerim je definirana naša enačba. V dveh dimenzijah so robni elementi zgolj intervali, tako kot končni elementi v eni dimenziji. To je zato, ker v metodi končnih elementov zadošča zgolj opis $\partial\mathcal{A}$, ki pa ima eno dimenzijo manj, kot \mathcal{A} .

Rob torej razrežemo na robne elemente, kjer lahko izračunamo prispevek kateregakoli elementa na katerokoli točko v prostoru. Tj. $u^{(j)}(\mathbf{r})$ je prispevek j -tega elementa na točko \mathbf{r} (definicija je v navodilu). Medsebojne prispevke robnih elementov zložimo v matriko \mathbf{A} , ki ima komponente

$$A_{ij} = u^{(j)}(\mathbf{r}_i),$$

kjer vektor \mathbf{r}_i kaže v težišče i -tega robnega elementa. Ta matrika je polna in simetrična. Sicer v splošnem potrebujemo še eno matriko, vendar ne v tem konkretnem primeru. Na koncu moramo rešiti sistem N linearnih enačb,

$$A_{ij}\sigma_j = \phi_i = 1, \quad \forall i.$$

Tako dobimo σ_j , ki je porazdelitev naboja na robu. Potencial v točki \mathbf{r} dobimo kot

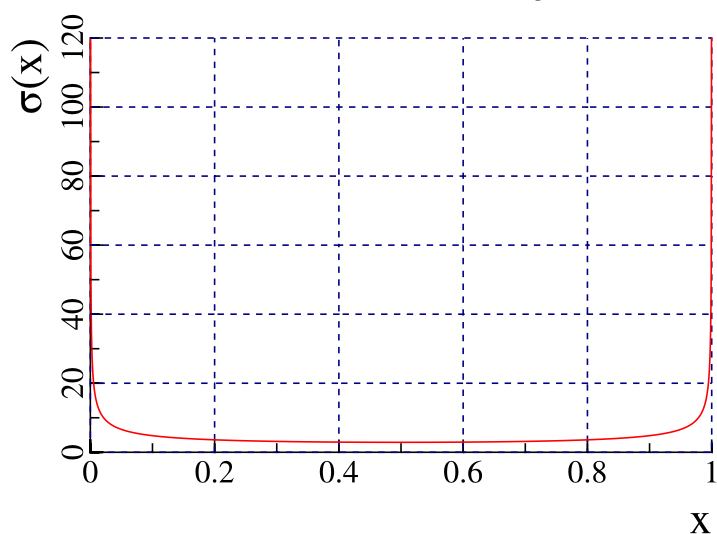
$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i u^{(i)}(\mathbf{r}).$$

Literatura [1, str. 659] sicer navaja, da je v splošnem potrebna še ena matrika, ki problem malo oteži, vendar zaupam poenostavitvi iz navodila naloge.

2 Rezultati

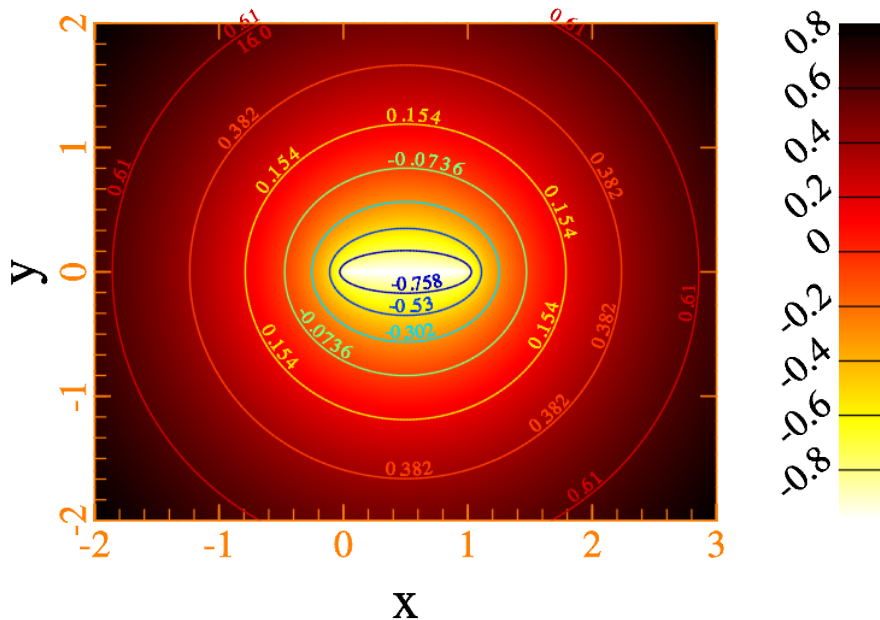
Za računanje in prikaz rezultatov sem uporabil C++ s knjižnicama `MathGL` in `Eigen` in prevajalnik `clang++`. Porazdelitev naboja na traku, $\sigma(x)$, je na sliki 1, potencial $\phi(\mathbf{r})$ pa je na sliki 2.

Porazdelitev naboja, $\sigma(x)$



Slika 1: Na skrajnih robovih je gostota naboja višja, kot v sredini, kar lahko pričakujemo zato, ker se električni naboj z istim znakom odbija.

Potencial, $\phi(x,y)$



Slika 2: Na tej sliki imamo graf z električnim potencialom v okolici traku. Pričakujemo divergenco, kjer je naboj, kar res dobimo.

2.1 Obtekanje krila

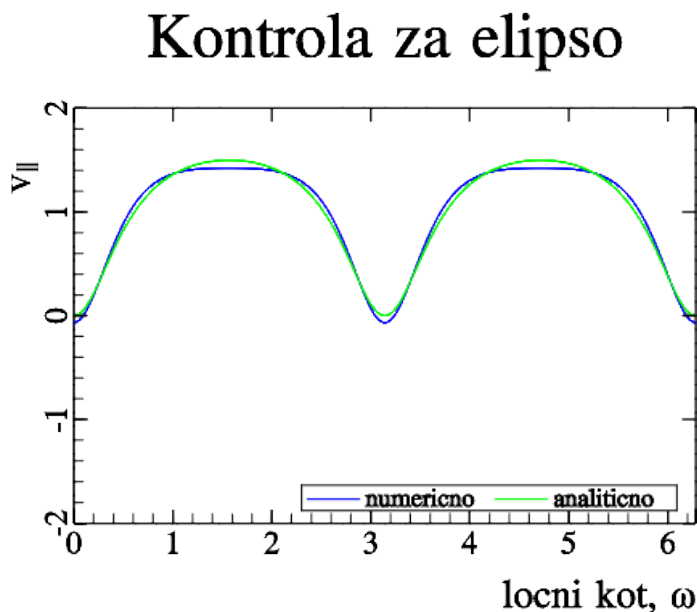
Za obtekanje krila imamo v bistvu lažji problem, saj moramo zgolj izračunati hitrostno polje, ki je gradient potenciala. Tudi definicija matrike A je nekoliko drugačna, saj hitrost v dani točki dobimo kot

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^N (v^{(i)})(\mathbf{r}) \sigma_i,$$

kjer σ_i predstavlja jakost izvora i -tega robnega elementa. N -terico σ_i dobimo z reševanjem enačbe

$$A_{ij} \sigma_j = -\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{u}_\infty, \quad A_{ij} = \mathbf{v}^{(i)}(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{n}_j.$$

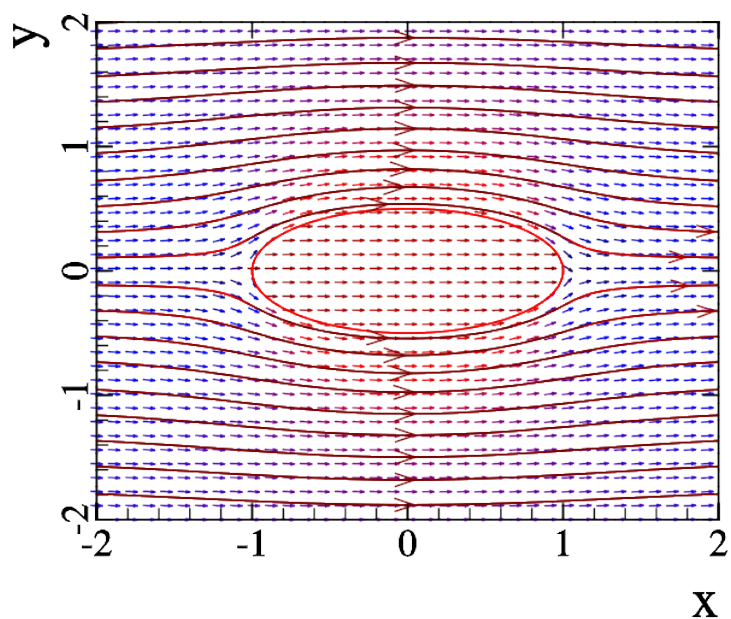
Knjižnica `MathGL` podpira izris tokovnic, ali pa valovnih front, zgolj na podlagi vektorskega polja, torej ni bilo potrebnega dodatnega programiranja. Najprej sem preveril, če so rezultati v skladu z analitičnimi (slika 3):



Slika 3: Kontrola obtekanja elipsoida za $b = 0.5$. Ni popolnega ujemanja, po mojem je to posledica tega, da so robni elementi različnih dolžin, zaradi česar jih je na „nezanimivi“ strani preveč, na delu, ki pa ga tekočina direktno zaliva, pa jih je premalo. Mogoče bi bilo bolje, če bi bili robni elementi enakih dolžin.

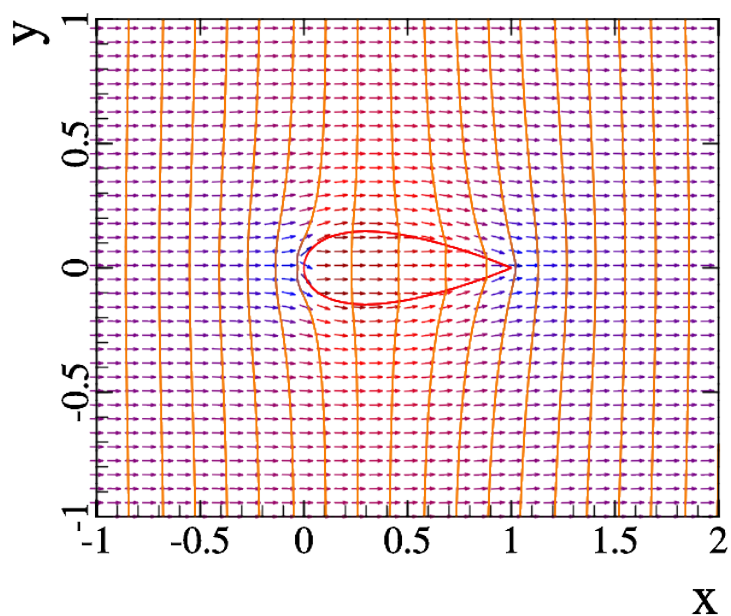
Paralelna komponenta hitrosti glede na površino je zadosti natančna, da lahko prikazemo tokovnice, ki obtekajo vitka telesa, začenši z elipsoidom.

Elipsoid



Slika 4: Vektorsko polje za elipsoid.

NACA-**



Slika 5: Rešitev za ribji profil. To je NACA-0015. Na sliki vidimo valovno fronto, je preglednejša od tokovnic.

Literatura

- [1] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)