

## 12. naloga – Navier-Stokesov sistem

Jože Zobec

### 1 Razmislek

V tej nalogi bomo reševali Navier-Stokesov sistem dvo-dimenzionalne nestisljive tekočine (kapljevine). Izmed možnosti, ki so nam na voljo, bomo za to vajo uporabili metodo, ki reducira eno izmed enačb – metodo, ki dinamiko napove prek vrtničnosti, ‘ $\zeta$ ’,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u \zeta}{\partial x} + \frac{\partial v \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Hitrostno polje,  $\mathbf{v} = (u, v)$ , dobimo iz tokovne funkcije, ‘ $\psi$ ’,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ki je z vrtničnostjo povezana prek Poissonove enačbe,

$$\nabla^2 \psi = \zeta. \quad (1)$$

Pri tem je zagotovljena identiteta  $\partial_x u + \partial_y v = 0$ . Časovni korak je omejen po Courta-novem pogoju. Robni pogoj za  $\psi$  prevedemo na robni pogoj  $\zeta$ , toka v steno ne sme biti. Vse odvode prepisemo v diskretne in dobimo eksplisitne enačbe za časovni razvoj:

$$\zeta_{i,j}^{t+1} = \zeta_{i,j}^t + \Delta_{i,j}^t, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{i,j}^t = & \frac{\delta}{h} \left[ \frac{1}{h\text{Re}} (\zeta_{i,j+1}^t + \zeta_{i,j-1}^t + \zeta_{i+1,j}^t + \zeta_{i-1,j}^t - 4\zeta_{i,j}^t) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} ((u\zeta)_{i,j+1}^t - (u\zeta)_{i,j-1}^t + (v\zeta)_{i+1,j}^t - (v\zeta)_{i-1,j}^t) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

hitrostno polje dobimo kot

$$\frac{1}{2h} (\psi_{i+1,j}^t - \psi_{i-1,j}^t) = u_{i,j}^t, \quad \frac{1}{2h} (\psi_{i,j-1}^t - \psi_{i,j+1}^t) = v_{i,j}^t. \quad (4)$$

Enačbo (1) lahko rešujemo na mnogo različnih načinov, vendar mislim, da gre najhitreje z metodo SOR s Čebiševim pospeševanjem konvergence.

### 2 Implementacija

Tako kot prej sem napisal karseda za hitrost optimizirano različico programa v program-skem jeziku C, kjer sem najbolj požrešne funkcije pohitрил/nadomestil ob namigih progrma gprof. Dodatno optimizacijo sem napravil tako, da je za mojo  $N \times N$  mrežo bil  $N$  vedno

lih. Skušal sem napraviti program, ki bi čim manj preverjal parametre in se čim bolj osredotočil na računanje.

Nekako je bilo treba pravilno določiti  $\delta$  (tj. časovni korak). Tega sem določil tako, da sem prvih 10 časovnih iteracij  $\delta$  računal sproti s hitrostmi in rekel

$$\delta = \frac{1}{40Nv_{\max}},$$

nato pa preostanek upošteval po zadnjem izračunanem  $\delta$ . Za izračun nove iteracije  $\zeta$  sem imel pripravljeno pomožen blok spomina. Za izračun  $\zeta^{t+1}$  sem ju zamenjal v konstantem času (tj. zgolj zamenjal naslov spominskega bloka).

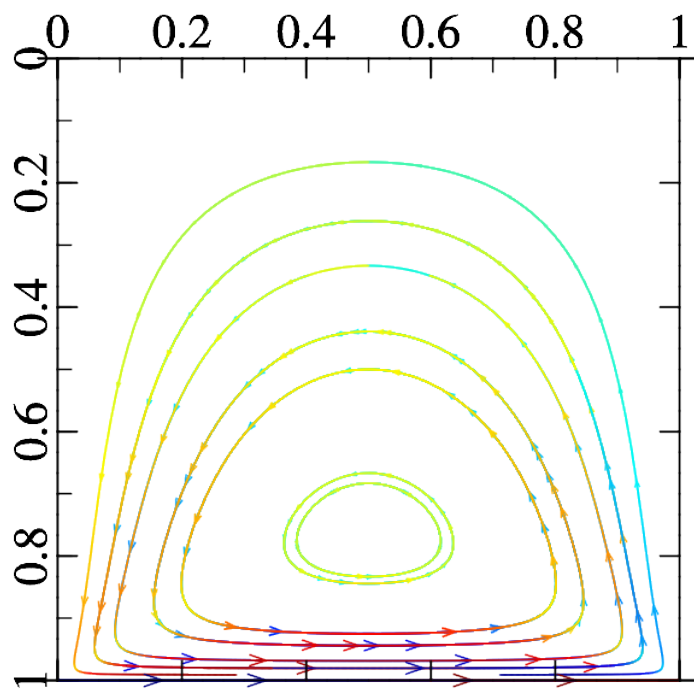
*Tabela 1:* Spodaj vidimo kolikšen delež časa izvajanja programa vzame posamezen del algoritma. Kot vidimo, se je Čebiševo pospeševanje izplačalo, saj je računanje Poissonove enačbe primerljivo z računanjem eksplicitne časovne sheme za  $\zeta$ .

delež	Proces
31%	lihi koraki (SOR)
31%	sodi koraki (SOR)
22%	$\zeta^t \rightarrow \zeta^{t+1}$
11%	izračuni $u_{ij}$ in $v_{ij}$
0%	izračun $\delta$
0%	zamenjava spominskega bloka
5%	ostalo (alokacija spomina, robni pogoji $\zeta \dots$ )

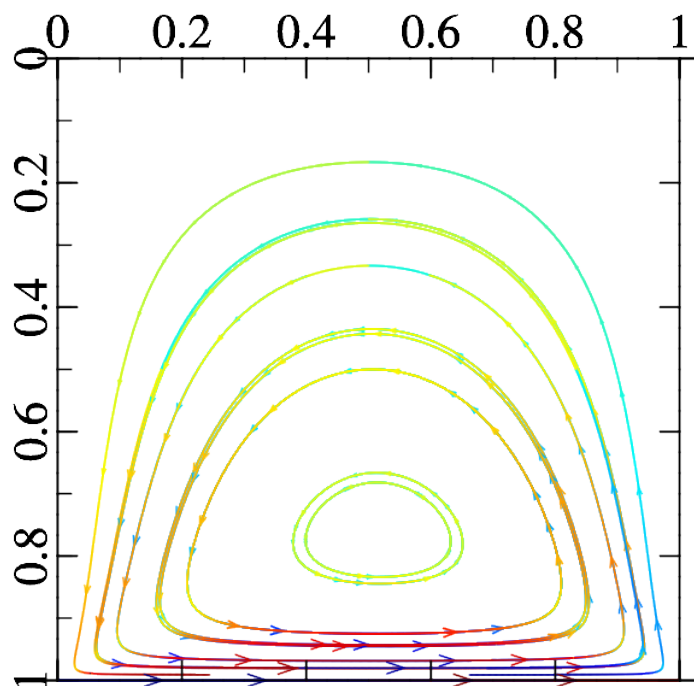
Začetno stanje sem izbral  $\psi_{i,j} \equiv 0$ ,  $v_{i,j} \equiv 0$ . Tudi  $u_{i,j}$  je povsod 0, razen na spodnjem robu, tam je  $u_{N,j} \equiv 1$ . Zaradi tega je tudi  $\zeta_{i,j}$  povsod 0, razen vrstici  $\zeta_{N-1,j}$  in  $\zeta_{N,j}$ .

### 3 Rezultati

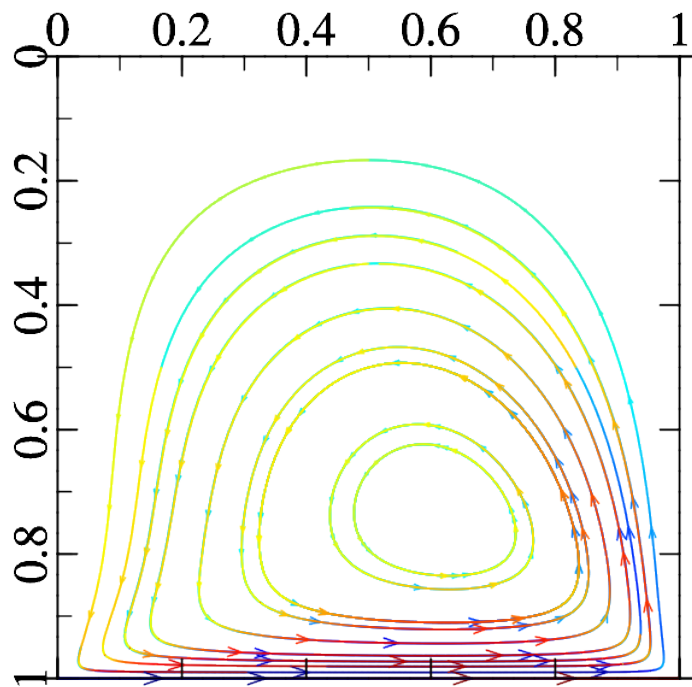
Tokovnice so prikazane na spodnjih slikah (tj. 1, 2, 3, 4 in 5), animacije pa so v priloženi datoteki `anim.tar.gz`. Hitrosti animacij niso sorazmerne s hitrostmi tekočine, ampak so skalirane tako, da se čim bolje vidi začetni prehod iz mirne tekočine v vrtečo se gmoto z vrtincem.



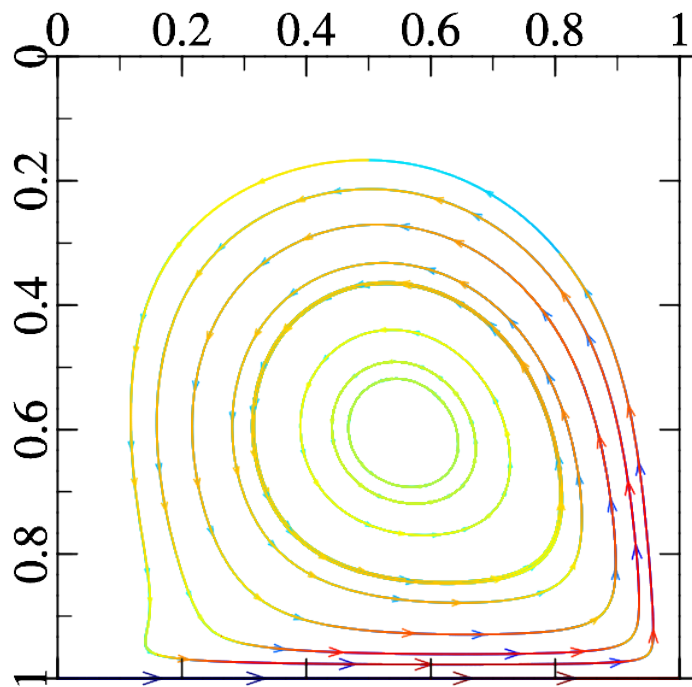
*Slika 1:* Tokovnice za  $Re = 0.1$ ,  $N = 101$ . Animacija je v datoteki `Re-0.avi`.



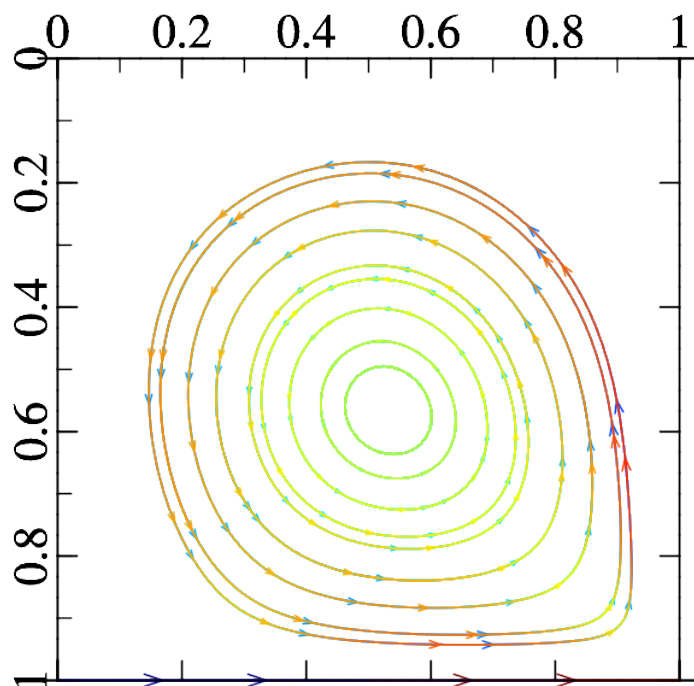
*Slika 2:* Tokovnice za  $Re = 10$ ,  $N = 201$ . Ne razlikujejo se bistveno od grafa na sliki 1. Animacija je v datoteki `Re-10.avi`.



*Slika 3:* Tokovnice za  $Re = 100$ ,  $N = 201$ . Tukaj je situacija že malo drugačna in premikajoča se stranica vrtinec potegne proti sebi. Animacija je v datoteki `Re-100.avi`.



*Slika 4:* Imamo prehoden primer med tokovnicami na sliki 3 in 5. Tu je  $Re = 400$  in  $N = 201$ . Animacija je v datoteki `Re-400.avi`.



*Slika 5:* Tokovnice za  $Re = 1000$ ,  $N = 201$ . Vidimo, da se vrtinec iz 4 v tem primeru končno centrira. Animacija je v datoteki `Re-1000.avi`.