

1 Navodilo

Razišči prostor krožnih orbit planeta okrog dvojne zvezde v približku zanemarljive mase planeta. Koliko parametrov ima model?

2 Razmislek

V približku zanemarljive mase planeta, je vsa dinamika ki jo potrebujemo vezana na gibanje planeta v časovno odvisnem zunanjem potencialu (ki ga ustvarjata zvezdi) $V_{\odot}(\mathbf{r}, t)$. Hamiltonian celotnega sistema je

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{|\mathbf{p}_k|^2}{m_k} - \frac{\kappa}{4\pi} \sum_{k,\ell} \frac{m_k m_{\ell}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{\ell}|}, \quad (1)$$

vektorje smo označili z mastnim tiskom.

2.1 Prosti parametri

Da preverimo število prostih parametrov moramo hamiltonko (1) pretvoriti v brezdimenzijsko obliko. Naj bo m_3 masa planeta, m_1 in m_2 pa naj bosta masi zvezde. Definirajmo brezdimenzijski masi

$$M_1 \equiv \frac{m_1}{m_3}, \quad M_2 \equiv \frac{m_2}{m_3}. \quad (2)$$

Nekaj svobode imamo še za to, kako bomo merili dolžine. Smiselno je, da bi merili v enotah oddaljenosti zvezd na začetku, tj. $\rho_0 = |\mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0)|$. Da bomo lahko naredili polno brezdimenzijsko transformacijo potrebujemo še skalo za čas. Merili ga bomo v enotah τ , ki je

$$\frac{1}{\tau^2} \equiv \frac{\kappa m_3}{4\pi \rho_0^3}.$$

Hamiltonian se potem glasi

$$H = \frac{\rho_0^2}{2m_3\tau^2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \tau^2 / \rho_0^2 \right) - \frac{\kappa m_3^2}{4\pi \rho_0} \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/\rho_0} \right),$$

kjer lahko konstanto $\kappa m_3^2 / 4\pi \rho_0$ izrazimo s τ in dobimo $m_3 \rho_0^2 / \tau^2$. Sedaj uvedemo brezdimenzijske impulze in brezdimenzijske dolžine

$$\frac{\mathbf{p}}{m_3 \rho_0 / \tau} \mapsto \mathbf{p}, \quad \frac{\mathbf{r}}{\rho_0} \mapsto \mathbf{r}, \quad (3)$$

kar hamiltonian poenostavi v

$$H = \frac{m_3 \rho_0^2}{2\tau^2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \frac{m_3 \rho_0^2}{\tau^2} \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right).$$

Kar nam še preostana je, da uvedemo brezdimenzijsko transformacijo in energijo merimo v enotah $m_3\rho_0^2/\tau^2$, tj.

$$\frac{\tau^2}{\rho_0^2 m_3} H \mapsto H$$

in dobimo brezdimenzijski hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right). \quad (4)$$

Prosti parametri modela so M_1 , M_2 in pa začetni pogoji, ki jih je $2 \cdot 3d$, kjer je d število prostorskih dimenzij, ki so nam na voljo. Če se držimo vezi, da je oddaljenost med zvezdama na začetku 1, imamo en začetni pogoj manj¹.

Ta hamiltonian je čisto splošen za gibanje treh (ne nujno nebesnih) točkastih teles pod vplivom sile gravitacije. Da bodo zvezde res zvezde, si bomo za zgled vzeli res težak planet, Jupiter, ki je še vedno tisočkrat lažji od našega Sonca. Kot smiselna se zato zdi omejitev $M_{1,2} \geq 1000$. Prav tako je smiselno, da so razdalje med zvezdama na začetku res 1.

2.2 Približek zanemarljive mase planeta

Hamiltonian (4) do sedaj eksaktno ohranja energijo. Vendar vidimo, da bo člen v potencialu, ki je sorazmeren z $M_1 M_2$ bistveno večji od členov, ki so sorazmerni zgolj z $M_{1,2}$ (mogoče za faktor 1000), saj sta M_1 in M_2 vsaj reda velikosti $\mathcal{O}(10^3)$. To pomeni, da planet ne bo bistveno vplival na spremembo gibalne količine zvezde,

$$d\mathbf{p}_{1,2} = \dot{\mathbf{p}}_{1,2} dt = \{\mathbf{p}_{1,2}, V\} dt \approx \left\{ \mathbf{p}_{1,2}, -\frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} dt \quad (5)$$

Prav tako se zvezdi glede na planet premikata zelo počasi – efekt planeta bi bil viden šele po zelo dolgem času (po mnogih planetarnih obhodih), saj je sprememba $\mathbf{r}_{1,2}$ utežena z $1/M_{1,2}$. Sprememba koordinat je

$$d\mathbf{r}_{1,2} = \dot{\mathbf{r}}_{1,2} dt = \{\mathbf{r}_{1,2}, T\} dt = \left\{ \mathbf{r}_{1,2}, \frac{1}{2M_{1,2}} |\mathbf{p}_{1,2}|^2 \right\} dt. \quad (6)$$

Ker smo pri spremembi gibalne količine naredili napako, ki je bila reda $\mathcal{O}(10^3)$, je ta napaka sedaj samo $\mathcal{O}(10^{-6})$, torej smo vpliv planeta upravičeno zanemarili.

2.2.1 Orbiti zvezd

Orbiti zvezd, $\mathbf{r}_1(t)$ in $\mathbf{r}_2(t)$, v približku zanemarljive mase planeta, lahko izračunamo analitično brez uporabe numeričnih orodij. Iz Poissonovih oklepajev dobimo sledeče gibalne enačbe:

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,2}(t) = \frac{\mathbf{p}_{1,2}(t)}{M_{1,2}} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{1,2}(t) = \nabla_{1,2} \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \pm \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (8)$$

¹Enačba (4) velja tudi če je ρ_0 karkoli drugega.

Da bomo to enačbo lahko rešili, uvedemo spremenljivki

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_c &= M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_* &= M_1 \mathbf{r}_1 - M_2 \mathbf{r}_2,\end{aligned}$$

kjer je \mathbf{r}_c sorazmeren s težiščem dvozvezdnega sistema, $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_c/(M_1 + M_2)$. Vektorja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 lahko zapišemo kot linearni kombinaciji \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* ,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2M_1}(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_*) \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2M_2}(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_*).\end{aligned}$$

Vektorjema \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* ustrezata gibalni količini \mathbf{p}_c in \mathbf{p}_* . Dobimo ju iz gibalnih enačb za \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = M_1 \frac{\mathbf{p}_1}{M_1} + M_2 \frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_c, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = M_1 \dot{\mathbf{r}}_1 - M_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = M_1 \frac{\mathbf{p}_1}{M_1} - M_2 \frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_*, \quad (10)$$

kjer vidimo, da mora biti \mathbf{p}_c konstanta gibanja, če je izpeljava pravilna. Impulza \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_*), \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_*).\end{aligned} \quad (11)$$

To lahko vstavimo v enačbi (8), vendar moramo za to vedeti še kako se zapiše $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ z \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* . Velja

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \mathbf{r}_* = \mathbf{r}_*/2\mu.$$

Gibalne enačbe za impulza zvezd lahko sedaj prepišemo v

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_1 &= (\dot{\mathbf{p}}_c + \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3} (-\mathbf{r}_*/2\mu) = -\frac{4\mu^2 M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*, \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= (\dot{\mathbf{p}}_c - \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3} \mathbf{r}_*/2\mu = \frac{4\mu^2 M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*,\end{aligned}$$

kjer je $\hat{\mathbf{r}}_* \equiv \mathbf{r}_*/|\mathbf{r}_*|$ enotski vektor v smeri \mathbf{r}_* . Če ti dve enačbi seštejemo, nemudoma dobimo $\dot{\mathbf{p}}_c = 0$, kar smo tudi pričakovali. Nadaljujemo z razliko prejšnjih enačb, po katerih dobimo $\dot{\mathbf{p}}_*$,

$$\dot{\mathbf{p}}_* = -8\mu^2 \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*.$$

Brez izgube splošnosti lahko izhodišče sistema postavimo v težišče ob času $t = 0$, tj. $\mathbf{r}_c(t = 0) = 0$. Lahko si izberemo tudi pravi težiščni sistem, tj. $\dot{\mathbf{r}}_c = 0$, kar pomeni tudi $\mathbf{p}_c = 0$. Za opis gibanja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 sedaj zadošča le \mathbf{r}_* , katerega Newtonov zakon je

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = -8\mu^2 \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_* = -\frac{\alpha}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*, \quad (12)$$

Ta problem je dvo-dimenzionalen (ker je potencial centralen), zaradi simetrije problema se nam ponujajo polarne koordinate $\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_*(r(t), \varphi(t))$. Pričeli bomo s prehodom v polarne koordinate:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin \varphi \mathbf{e}_x + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (13)$$

Potem lahko naš krajevni vektor prepišemo v

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_* &= \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,\tag{15}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{\rho} \dot{\varphi}}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi.\tag{16}$$

Baza v tem primeru ni normirana ($|\mathbf{e}_\varphi| \neq 1$), vendar $|\mathbf{r}_*| = \rho$. Zaradi tega dobimo in $\hat{\mathbf{r}}_* = \mathbf{r}_*/\rho = \mathbf{e}_\rho$. S procesom „reverse engineering“ enačbe (12) lahko zapišemo Lagrangeian

$$L = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_*|^2 + \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2) + \frac{\alpha}{\rho}.$$

Tu φ ne nastopa eksplicitno, kar pomeni $\dot{p}_\varphi = 0$ oz. ohranitev vrtilne količine:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)}_{=p_\varphi} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0, \quad p_\varphi = \dot{\varphi} \rho^2,\tag{17}$$

kar pomeni $\dot{\varphi} = p_\varphi / \rho^2$. Opomba: $\mathbf{p}_* = p_\rho \mathbf{e}_\rho + p_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Gibalni zakoni za ρ so

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho - \left(-\frac{\alpha}{\rho^2} \right) &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho + \frac{\alpha}{\rho^2} &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Enačbo (17) uporabimo za da se znebimo φ ,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{p_\varphi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi},\tag{19}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{p_\varphi}{\rho^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).\tag{20}$$

Zmenili se bomo $\partial \bullet / \partial \varphi = \bullet'$, da bo manj pisanja. Ko to vstavimo v enačbo (18) dobimo

$$\frac{p_\varphi^2}{\rho^4} \left(\rho'' - \frac{2}{\rho} (\rho')^2 - \rho \right) + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0.\tag{21}$$

Uvedemo novo spremenljivko $\rho = 1/u$,

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{1}{u^2} u' \\ \rho'' &= 2 \frac{1}{u^3} (u')^2 - \frac{1}{u^2} u''.\end{aligned}\tag{22}$$

Sedaj to vstavimo v enačbo (21), kar nam da izraz

$$p_\varphi^2 u^4 \left[2 \frac{u'^2}{u^3} - \frac{u''}{u^2} - 2 \frac{u'^2}{u^3} - \frac{1}{u} \right] + \alpha u^2 = 0,$$

ki pa se pokrajša v

$$u'' + u - \frac{\alpha}{p_\varphi^2} = 0. \quad (23)$$

Rešitev te enačbe je seveda elipsa,

$$\rho(\varphi(t)) = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi(t))}, \quad (24)$$

Parameter ε je ekscentričnost orbite, ki so zaključene (vezano gibanje) samo za $0 \leq \varepsilon < 1$. Seveda se bomo omejili samo na take. Kot $\varphi(t)$ je rešitev enačbe

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2. \quad (25)$$

Enačbo (25) lahko rešimo z integralom

$$\int_0^\varphi \frac{d\tilde{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cos \tilde{\varphi})^2} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} t. \quad (26)$$

Ta integral je k sreči analitičen in tabeliran v matematičnem priročniku. Za $0 \leq \varepsilon < 1$ je rešitev

$$\begin{aligned} t \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} &= \left[\frac{\varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left(\frac{(1 - \varepsilon) \tan \varphi/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] \\ &= F(\varphi; \varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

Končno lahko sedaj zapišemo $\varphi = F^{-1}(t\alpha^2/p_\varphi^3; \varepsilon)$. To moramo računati numerično, imamo pa to smolo, da je ta funkcija zaradi $\tan \varphi/2$ v funkciji $\arctan(x)$ smiselna samo za $\varphi \in [-\pi, \pi)$, sicer pa močno oscilira. Pravilna je kadar $t \in [-T/2, T/2)$, kjer je T čas enega obhoda. Tako bomo čas pri računanju te enačbe z modulom omejili na ta interval. Vendar pa je ta časovni interval grd – raje bomo vzeli $t \in [0, T)$, tako da bomo rezultatu prišteli $\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3}$. Zaradi osebne preference bi tudi φ radi merili tako, da $\varphi \in [0, 2\pi)$, zato bomo v enačbi (27) krivuljo prestavili v desno za fazo π , torej $\varphi \mapsto \varphi - \pi$. Tako smo se znebili nezveznosti pri π . Sedaj lahko izračunamo čas obhoda (oz. periodo). Veljati mora torej

$$t = \frac{p_\varphi^3}{\alpha^2} \left[\frac{\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi))} + \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \left(\frac{(1 - \varepsilon) \tan \frac{\varphi - \pi}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] + \frac{T}{2} \quad (28)$$

Obhodni čas določimo tako, da $t(\varphi = 0) = 0$, oz. $t(\varphi = 2\pi) = T$. To pomeni

$$\frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \underbrace{\arctan(-\infty)}_{-\pi/2} = -\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3},$$

od koder pa z lahkoto pokažemo

$$T = \frac{2\pi p_\varphi^3}{\alpha^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

2.2.2 Začetni pogoji

Da bomo res imeli vezana stanja, mora biti ekscentričnost orbite $\varepsilon \in [0, 1)$. Ta je definirana kot

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{\alpha^2}},$$

od koder lahko slepamo, da mora biti

$$-\frac{\alpha^2}{2p_\varphi^2} \leq E < 0.$$

E je energija sistema, ki jo lahko izračunamo iz začetnih pogojev zvezd:

$$E = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_\varphi^2/\rho^2) - \frac{\alpha}{\rho} \quad (30)$$

Ker je razdalja med zvezdama na začetku 1, je $\rho = 2\mu$ in $\mathbf{r}_*(t=0) = 2\mu\mathbf{e}_x$, torej mora veljati

$$\rho(\varphi=0) = 2\mu = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (31)$$

To lahko prepakiramo v identiteto

$$p_\varphi = \sqrt{2\mu\alpha(1 - \varepsilon)}. \quad (32)$$

s katero lahko povsod eliminiramo p_φ :

$$\rho(\varphi) = \frac{2\mu(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \quad (33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{M_1 + M_2}} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^{3/2} \quad (34)$$

Sedaj smo dvozvezden sistem v celoti rešili, prosta parametra sta le M_1 in M_2 , začetni pogoj pa je odvisen le od ekscentričnosti orbite, ε .

2.2.3 Računanje orbit zvezd

Na vsakem časovnem koraku bomo morali rešiti enačbo (28), ki je k sreči monotona. Paziti moramo, da ne pademo ven iz tega intervala. Ničle lahko učinkovito računamo z analitičnim odvodom – ponujajo se nam Newtonova, Halleyeva in Baileyeva metoda. Za slednji potrebujemo še drugi odvod. Ker velja $\partial t / \partial \varphi = (\partial \varphi / \partial t)^{-1}$ lahko zapišemo

$$\frac{\alpha^2 t'}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2} \quad (35)$$

$$\frac{\alpha^2 t''}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{2\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^3} \quad (36)$$

Na koncu smo uporabili kar Newtonovo metodo, preciznost je 10^{-12} .

2.2.4 Dinamika planeta

Sedaj smo izračunali vse, kar potrebujemo za izračun „zunanjega“ potenciala v kateraga vržemo naš planet. Hamiltonka se glasi

$$H_3 = \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) + V_\odot(\mathbf{r}_3, t), \quad (37)$$

kjer je potencial $V_\odot = V_\odot(\mathbf{r}, t)$ enak

$$V_\odot(\mathbf{r}, t) \equiv - \left[\frac{M_1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2M_1}\mathbf{r}_*(t)|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2M_2}\mathbf{r}_*(t)|} \right]. \quad (38)$$

Kljub temu, da čas eksplicitno nastopa v hamiltonki, se Poissonov oklepaj pri tem ne spremeni. Uvedli smo še polarne koordinate planeta:

$$\mathbf{r}_3 = \zeta \cos \psi \mathbf{e}_x + \zeta \sin \psi \mathbf{e}_y = \zeta \mathbf{e}_\zeta.$$

Gibalne zakone dobimo iz Poissonovih oklepajev $\{\bullet, T_3\}$ in $\{\bullet, V_\odot\}$:

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\zeta} = p_\zeta, & \{p_\zeta, T_3\} &= -\frac{\partial T_3}{\partial \zeta} = p_\psi^2/\zeta^3, \\ \{\zeta, V_\odot\} &= 0, & \{p_\zeta, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta} \\ \{\psi, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\psi} = p_\psi/\zeta^2, & \{p_\psi, T_3\} &= 0 \\ \{\psi, V_\odot\} &= 0, & \{p_\psi, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (39)$$

Potencial V_\odot se v polarnih koordinatah zapiše kot

$$V_\odot = -\frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|} - \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|}, \quad (40)$$

$$|\mathbf{r}_{31}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_1^2}\rho^2 - \frac{1}{M_1}\rho\zeta \cos(\psi - \varphi), \quad (41)$$

$$|\mathbf{r}_{32}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_2^2}\rho^2 + \frac{1}{M_2}\rho\zeta \cos(\psi - \varphi). \quad (42)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta} &= (-1) \cdot \left[+\frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \left(2\zeta - \frac{\rho}{M_1} \cos(\varphi - \psi) \right) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \left(2\zeta + \frac{\rho}{M_2} \cos(\varphi - \psi) \right) \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \cos(\varphi - \psi) - \zeta \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi} &= (-1) \cdot \left[-\frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \frac{\rho\zeta}{M_1} \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \frac{\rho\zeta}{M_2} \sin(\varphi - \psi) \right] \\ &= \frac{\rho\zeta}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \sin(\varphi - \psi) \end{aligned} \quad (44)$$

2.3 Numerični izračun

Ker imamo na planet vpliv zunanjega časovno odvisnega potenciala energija planeta ne bo konstantna. Vendar pa tudi za tretja časovno odvisnih hamiltonk uporabimo simplektične integratorje, saj pojem simplektičnosti ni omejen na ohranitev energije², ampak na ohranjanje hamiltonske forme [3] (tj. Poissonovega oklepaja), ki se ne spremeni tudi če čas eksplicitno nastopa v Hamiltonianu. Prednost simplektičnih integratorjev je ta, da nam dajo stabilnejše orbite, poleg tega pa jih je enostavneje naprogramirati

Za konstrukcijo simplektičnega integratorja potrebujemo $H(t) = A(t) + B(t)$, kjer $\{A(t), B(t)\} \neq 0$. Vektor integracijskih spremenljivk je $\mathbf{x} = (\zeta, \psi, p_\zeta, p_\psi)^T$. Za integracijo bomo uporabili simetrizirane sheme drugega reda³, S_2 , četrtega reda, S_4 in osmega reda, S_8 :

$$S_2(c, \delta t) \equiv \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}) \exp(c \delta t \{\bullet, B\}) \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}),$$

shema četrtega reda S_4 je

$$S_4(\delta t) = S_2(x_0, \delta t) S_2(x_1, \delta t) S_2(x_0, \delta t), \quad x_0 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, \quad x_1 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, \quad (45)$$

za shemo osmega reda, S_8 , pa bomo vzeli koeficiente w_1 , rešitev 'A' iz članka [1] s čimer aproksimiramo Liouvillov propagator. Integracija zatorej izgleda tako:

$$\mathbf{x}(t + \delta t) = S_m(\delta t) \mathbf{x}(t) + \mathcal{O}(\delta t^{m+1}).$$

Opomba:

$$\exp(c \delta t \{\bullet, A\}) x = x + c \delta t \{x, A\}.$$

Izbrati si moramo taka $A(t)$ in $B(t)$, ki delujeta na disjunktna hilbertova prostora. Ker smo v polarnih koordinatah, zato ne bomo mogli vzeti kar T_3 in V_\odot , ampak bomo morali vzeti efektivni potencial V_{ef} in radialno kinetično energijo T_ζ :

$$T_\zeta = \frac{1}{2} p_\zeta^2, \quad V_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\zeta^2} + V_\odot. \quad (46)$$

Potrebujemo še vrednosti vse možnih Poissonovih oklepajev. Na srečo si lahko pomagamo s tistimi, ki smo jih naračunali v enačbah (39):

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_\zeta\} &= p_\zeta, & \{\zeta, V_{\text{ef}}\} &= 0, \\ \{\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{\psi, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi / \zeta^2, \\ \{p_\zeta, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\zeta, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi^2 / \zeta^3 - \frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta}, \\ \{p_\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\psi, V_{\text{ef}}\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (47)$$

Vidimo, da je tak razcep hamiltonke H_3 res ustrezen. Sedaj smo lahko gotovi, da bo „drift“ orbite posledica $\partial H_3 / \partial t \neq 0$ in ne posledica slabega integratorja.

²V tem primeru se zelo natančno računa $\partial H / \partial t$.

³Napaka za red m je reda $\mathcal{O}(\delta t^{m+1})$.

Vseeno pa obstaja možnost, da se bo po dolgem času planet močno približal eni izmed zvezd, zaradi česar bo planet vrglo osončja po ti. „slingshot“ efektu. Da se to ne zgodi prekmalu, moramo imeti še dodatno zagotovilo stabilnosti orbit – adaptiven korak. Če smo preblizu zvezde, ima najmanjša napaka v kotu/radiju daljnosežne posledice na evolucijo. Pri izbiri adaptivnega koraka koramo biti pozorni, da med drobljenjem koraka na manjše ne smemo zadeti ob frekvenco, ki je lastna dvozvezdju [2]. Zato bomo na začetku vzeli časovni korak, ki je v iracionalnem razmerju z obhodnim časom zvezde, korake pa bomo drobili po Rombergovem zaporedju (potence števila 2). Za primerjavo sem za integrator preizkusil še Runge-Kutta reda 4, ki pa se ni obnesel najbolje.

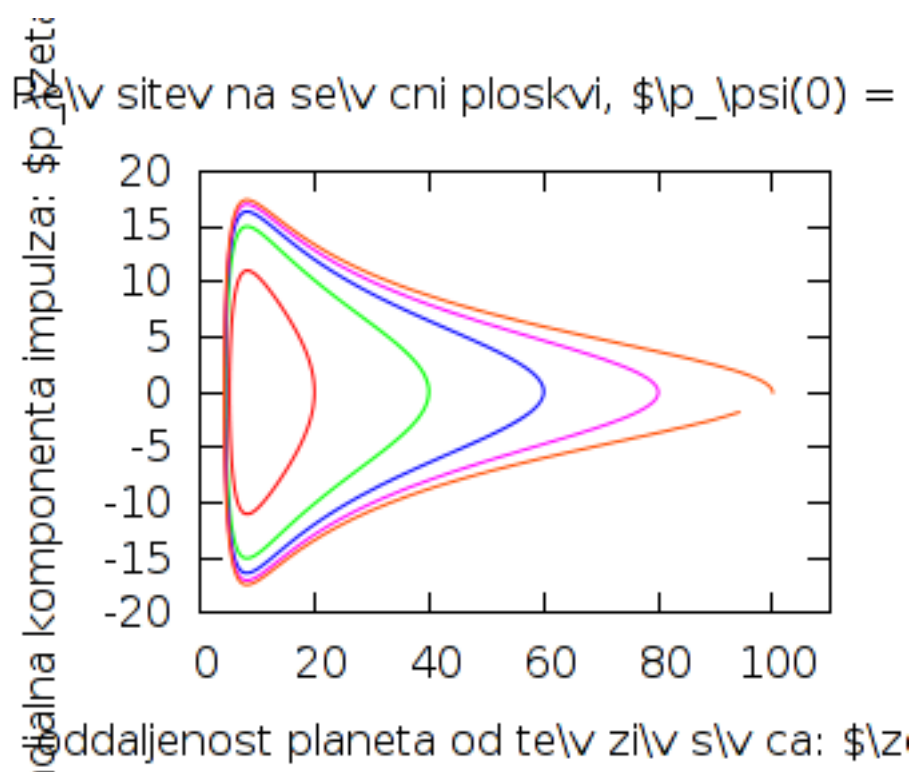
Orbite planeta niso več preproste elipse, zato Laplace-Runge-Lenzov vektor ni več invarianta in ga bomo tudi spremljali. Z našimi opazljivkami ζ , ψ , p_ζ in p_ψ ga v kartezičnih koordinatah na sečni ploskvi $\psi = 0$ zapišemo kot

$$\mathbf{e} = \left\{ \left[p_\zeta^2 + \left(\frac{p_\psi}{\zeta} \right)^2 \right] \zeta - \zeta p_\zeta^2 - 1 \right\} \mathbf{e}_x - p_\zeta p_\psi \mathbf{e}_y. \quad (48)$$

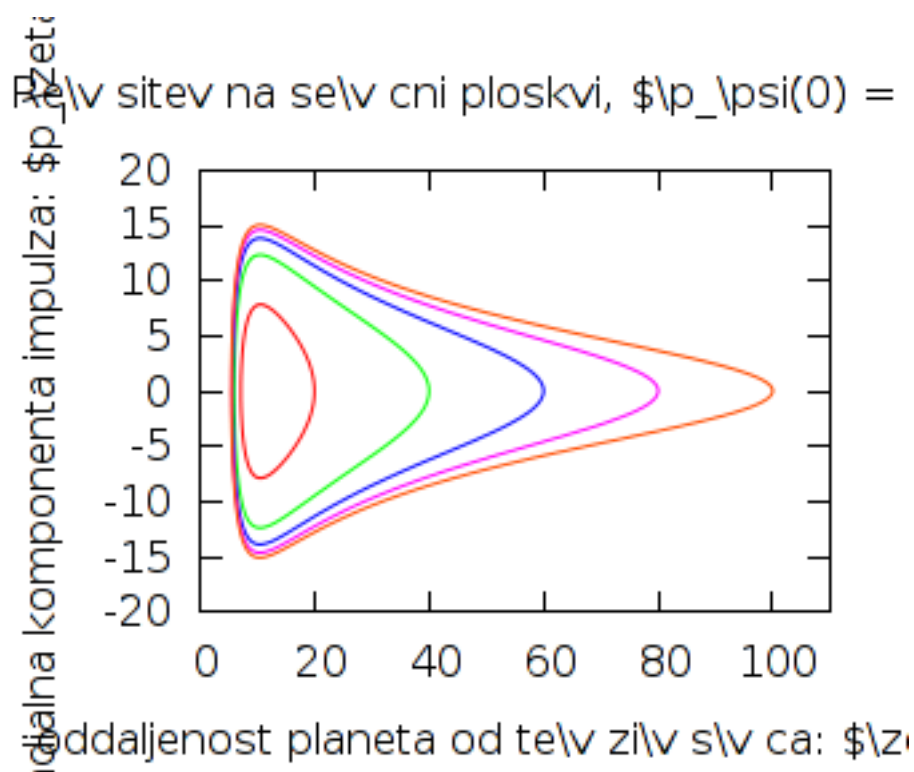
To je v resnici vektor ekscentričnosti, vendar pa se od Laplace-Runge-Lenz-ovega vektorja razlikuje le za multiplikativno konstanto. Glavna motivacija za računanje tega Laplace-Runge-Lenz-ovega vektorja nam je bila izračun smeri in ekscentričnosti orbite, zato je računanje vektorja ekscentričnosti ustreznejše.

3 Rezultati

Nalogo sem reševal s programskim jezikom C, da bi dosegel čim višjo preciznost za čim krajši čas računanja sem preizkušal prej omenjene integratorje. Kot sem že povedal prej, se Runge-Kutta reda 4 vede precej slabo, zato sem se posvetil le simplektičnim integratorjem. Drugi red ni bil zadosten, orbita planeta ni bila dovolj stabilna. Integratorski shemi S_8 in S_4 sta bili dokaj primerljivi, vendar je v bližini zvezde shema S_8 dajala bolj gladke tirnice, zato sem pristal kar na S_8 , ki je najnatančnejša, vendar tudi najpočasnejša.

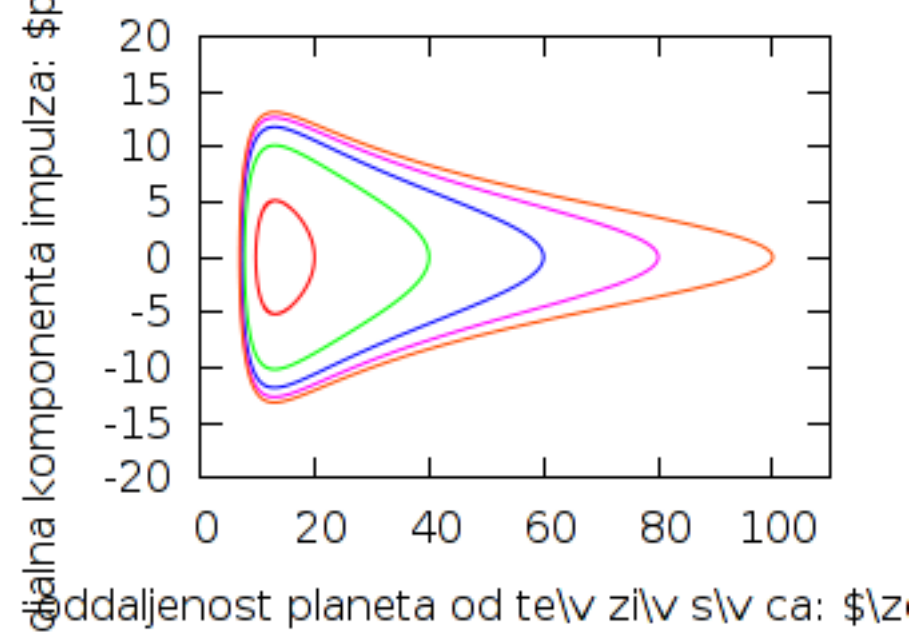


Slika 1:



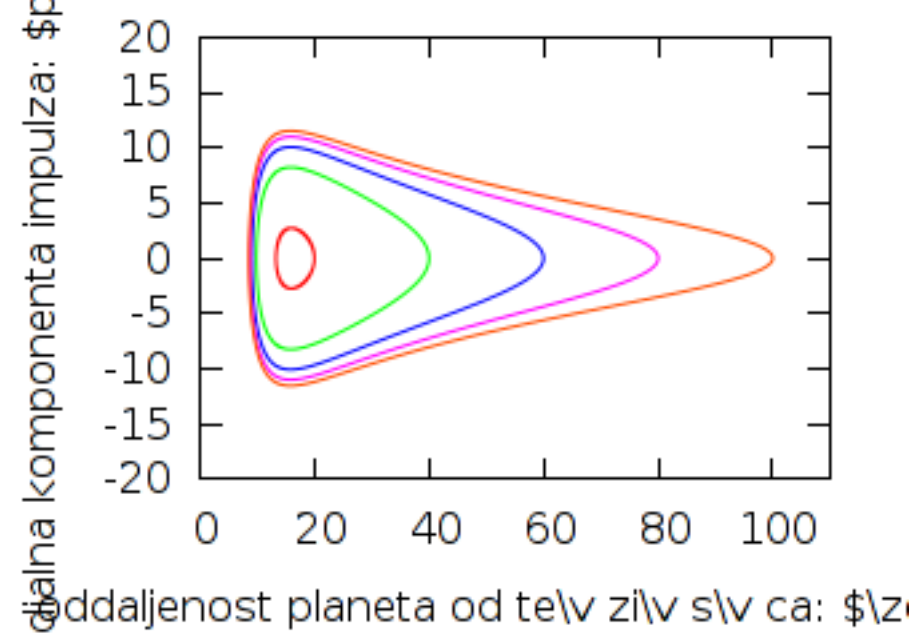
Slika 2:

Rešitev sitev na se\vnici ploskvi, $\psi(0) =$



Slika 3:

Rešitevitev na se\vnici ploskvi, $\psi(0) =$



Slika 4:

Literatura

- [1] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A, Vol. 150, no. 5,6,7, str. 262, (1990)
- [2] A. S. Richardson and J. M. Finn, *Symplectic integrators with adaptive time steps*, arXiv:1108.0322v1 [physics.comp-ph], (2011)
- [3] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)