

# 1 Navodilo

Razišči prostor krožnih orbit planeta okrog dvojne zvezde v približku zanemarljive mase planeta. Koliko parametrov ima model?

## 2 Razmislek

V približku zanemarljive mase planeta, je vsa dinamika ki jo potrebujemo vezana na gibanje planeta v časovno odvisnem zunanjem potencialu (ki ga ustvarjata zvezdi)  $V_{\odot}(\mathbf{r}, t)$ . Hamiltonian celotnega sistema je

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{|\mathbf{p}_k|^2}{m_k} - \frac{\kappa}{4\pi} \sum_{k,\ell} \frac{m_k m_{\ell}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{\ell}|}, \quad (1)$$

vektorje smo označili z mastnim tiskom.

### 2.1 Prosti parametri

Da preverimo število prostih parametrov moramo hamiltonko (1) pretvoriti v brezdimenzijsko obliko. Naj bo  $m_3$  masa planeta,  $m_1$  in  $m_2$  pa naj bosta masi zvezde. Definirajmo brezdimenzijski masi

$$M_1 \equiv \frac{m_1}{m_3}, \quad M_2 \equiv \frac{m_2}{m_3}. \quad (2)$$

Nekaj svobode imamo še za to, kako bomo merili dolžine. Smiselno je, da bi merili v enotah oddaljenosti zvezd na začetku, tj.  $\rho_0 = |\mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0)|$ . Da bomo lahko naredili polno brezdimenzijsko transformacijo potrebujemo še skalo za čas. Merili ga bomo v enotah  $\tau$ , ki je

$$\frac{1}{\tau^2} \equiv \frac{\kappa m_3}{4\pi \rho_0^3}.$$

Hamiltonian se potem glasi

$$H = \frac{\rho_0^2}{2m_3\tau^2} \left( \frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \tau^2 / \rho_0^2 \right) - \frac{\kappa m_3^2}{4\pi \rho_0} \left( \frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/\rho_0} \right),$$

kjer lahko konstanto  $\kappa m_3^2 / 4\pi \rho_0$  izrazimo s  $\tau$  in dobimo  $m_3 \rho_0^2 / \tau^2$ . Sedaj uvedemo brezdimenzijske impulze in brezdimenzijske dolžine

$$\frac{\mathbf{p}}{m_3 \rho_0 / \tau} \mapsto \mathbf{p}, \quad \frac{\mathbf{r}}{\rho_0} \mapsto \mathbf{r}, \quad (3)$$

kar hamiltonian poenostavi v

$$H = \frac{m_3 \rho_0^2}{2\tau^2} \left( \frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \frac{m_3 \rho_0^2}{\tau^2} \left( \frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right).$$

Kar nam še preostana je, da uvedemo brezdimenzijsko transformacijo in energijo merimo v enotah  $m_3\rho_0^2/\tau^2$ , tj.

$$\frac{\tau^2}{\rho_0^2 m_3} H \mapsto H$$

in dobimo brezdimenzijski hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \left( \frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right). \quad (4)$$

Prosti parametri modela so  $M_1$ ,  $M_2$  in pa začetni pogoji, ki jih je  $2 \cdot 3d$ , kjer je  $d$  število prostorskih dimenzij, ki so nam na voljo. Če se držimo vezi, da je oddaljenost med zvezdama na začetku 1, imamo en začetni pogoj manj<sup>1</sup>.

Ta hamiltonian je čisto splošen za gibanje treh (ne nujno nebesnih) točkastih teles pod vplivom sile gravitacije. Da bodo zvezde res zvezde, si bomo za zgled vzeli res težak planet, Jupiter, ki je še vedno tisoč-krat lažji od našega Sonca. Kot smiselna se zato zdi omejitev  $M_{1,2} \geq 1000$ . Prav tako je smiselno, da so razdalje med zvezdama na začetku res 1.

## 2.2 Približek zanemarljive mase planeta

Hamiltonian (4) do sedaj eksaktno ohranja energijo. Vendar vidimo, da bo člen v potencialu, ki je sorazmeren z  $M_1 M_2$  bistveno večji od členov, ki so sorazmerni zgolj z  $M_{1,2}$  (mogoče za faktor 1000), saj sta  $M_1$  in  $M_2$  vsaj reda velikosti  $\mathcal{O}(10^3)$ . To pomeni, da planet ne bo bistveno vplival na spremembo gibalne količine zvezde,

$$d\mathbf{p}_{1,2} = \dot{\mathbf{p}}_{1,2} dt = \{\mathbf{p}_{1,2}, V\} dt \approx \left\{ \mathbf{p}_{1,2}, -\frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} dt \quad (5)$$

Prav tako se zvezdi glede na planet premikata zelo počasi – efekt planeta bi bil viden šele po zelo dolgem času (po mnogih planetarnih obhodih), saj je sprememba  $\mathbf{r}_{1,2}$  utežena z  $1/M_{1,2}$ . Sprememba koordinat je

$$d\mathbf{r}_{1,2} = \dot{\mathbf{r}}_{1,2} dt = \{\mathbf{r}_{1,2}, T\} dt = \left\{ \mathbf{r}_{1,2}, \frac{1}{2M_{1,2}} |\mathbf{p}_{1,2}|^2 \right\} dt. \quad (6)$$

Ker smo pri spremembi gibalne količine naredili napako, ki je bila reda  $\mathcal{O}(10^3)$ , je ta napaka sedaj samo  $\mathcal{O}(10^{-6})$ , torej smo vpliv planeta upravičeno zanemarili.

### 2.2.1 Orbiti zvezd

Orbiti zvezd,  $\mathbf{r}_1(t)$  in  $\mathbf{r}_2(t)$ , v približku zanemarljive mase planeta, lahko izračunamo analitično brez uporabe numeričnih orodij. Iz Poissonovih oklepajev dobimo sledeče gibalne enačbe:

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,2}(t) = \frac{\mathbf{p}_{1,2}(t)}{M_{1,2}} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{1,2}(t) = \nabla_{1,2} \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \pm \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (8)$$

---

<sup>1</sup>Enačba (4) velja tudi če je  $\rho_0$  karkoli drugega.

Da bomo to enačbo lahko rešili, uvedemo spremenljivki

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_c &= M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_* &= M_1\mathbf{r}_1 - M_2\mathbf{r}_2,\end{aligned}$$

kjer je  $\mathbf{r}_c$  sorazmeren s težiščem dvozvezdnega sistema,  $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_c/(M_1 + M_2)$ . Vektorja  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$  lahko zapišemo kot linearni kombinaciji  $\mathbf{r}_c$  in  $\mathbf{r}_*$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2M_1}(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_*) \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2M_2}(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_*).\end{aligned}$$

Vektorjema  $\mathbf{r}_c$  in  $\mathbf{r}_*$  ustrezata gibalni količini  $\mathbf{p}_c$  in  $\mathbf{p}_*$ . Dobimo ju iz gibalnih enačb za  $\mathbf{r}_c$  in  $\mathbf{r}_*$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = M_1\frac{\mathbf{p}_1}{M_1} + M_2\frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_c, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = M_1\dot{\mathbf{r}}_1 - M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = M_1\frac{\mathbf{p}_1}{M_1} - M_2\frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_*, \quad (10)$$

kjer vidimo, da mora biti  $\mathbf{p}_c$  konstanta gibanja, če je izpeljava pravilna. Impulza  $\mathbf{p}_1$  in  $\mathbf{p}_2$  lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_*), \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_*).\end{aligned} \quad (11)$$

To lahko vstavimo v enačbi (8), vendar moramo za to vedeti še kako se zapiše  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  z  $\mathbf{r}_c$  in  $\mathbf{r}_*$ . V težiščnem sistemu  $\mathbf{r}_c = 0$  velja

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_*/2\mu.$$

Gibalne enačbe za impulza zvezd lahko sedaj prepišemo v

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_1 &= (\dot{\mathbf{p}}_c + \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3}(-\mathbf{r}_*/2\mu) = -\frac{4\mu^2M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_*, \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= (\dot{\mathbf{p}}_c - \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3}\mathbf{r}_*/2\mu = \frac{4\mu^2M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_*,\end{aligned}$$

kjer je  $\hat{\mathbf{r}}_* \equiv \mathbf{r}_*/|\mathbf{r}_*|$  enotski vektor v smeri  $\mathbf{r}_*$ . Če ti dve enačbi seštejemo, nemudoma dobimo  $\dot{\mathbf{p}}_c = 0$ , kar smo tudi pričakovali. Nadaljujemo z razliko prejšnjih enačb, po katerih dobimo  $\dot{\mathbf{p}}_*$ ,

$$\dot{\mathbf{p}}_* = -8\mu^2\frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_*.$$

Brez izgube splošnosti lahko izhodišče sistema postavimo v težišče ob času  $t = 0$ , tj.  $\mathbf{r}_c(t = 0) = 0$ . Lahko si izberemo tudi pravi težiščni sistem, tj.  $\dot{\mathbf{r}}_c = 0$ , kar pomeni tudi  $\mathbf{p}_c = 0$ . Za opis gibanja  $\mathbf{r}_1$  in  $\mathbf{r}_2$  sedaj zadošča le  $\mathbf{r}_*$ , katerega Newtonov zakon je

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = -8\mu^2\frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_* = -\frac{\alpha}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_*, \quad (12)$$

Ta problem je dvo-dimenzionalen (ker je potencial centralen), zaradi simetrije problema se nam ponujajo polarne koordinate  $\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_*(\rho(t), \varphi(t))$ . Pričeli bomo s preходом v polarne koordinate:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin \varphi \mathbf{e}_x + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (13)$$

Potem lahko naš krajevni vektor prepisemo v

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &= \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (15)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \left( \ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{\rho} \dot{\varphi}}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi. \quad (16)$$

Baza v tem primeru ni normirana ( $|\mathbf{e}_\varphi| \neq 1$ ), vendar  $|\mathbf{r}_*| = \rho$ . Zaradi tega dobimo in  $\hat{\mathbf{r}}_* = \mathbf{r}_*/\rho = \mathbf{e}_\rho$ . S procesom „reverse engineering“ enačbe (12) lahko zapišemo Lagrangeian

$$L = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_*|^2 + \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2) + \frac{\alpha}{\rho}.$$

Tu  $\varphi$  ne nastopa eksplicitno, kar pomeni  $\dot{p}_\varphi = 0$  oz. ohranitev vrtilne količine:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)}_{=p_\varphi} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0, \quad p_\varphi = \dot{\varphi} \rho^2, \quad (17)$$

kar pomeni  $\dot{\varphi} = p_\varphi / \rho^2$ . Opomba:  $\mathbf{p}_* = p_\rho \mathbf{e}_\rho + p_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ . Gibalni zakoni za  $\rho$  so

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho - \left( -\frac{\alpha}{\rho^2} \right) &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho + \frac{\alpha}{\rho^2} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Enačbo (17) uporabimo za da se znebimo  $\varphi$ ,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{p_\varphi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (19)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{p_\varphi^2}{\rho^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (20)$$

Zmenili se bomo  $\partial \bullet / \partial \varphi = \bullet'$ , da bo manj pisanja. Ko to vstavimo v enačbo (18) dobimo

$$\frac{p_\varphi^2}{\rho^4} \left( \rho'' - \frac{2}{\rho} (\rho')^2 - \rho \right) + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0. \quad (21)$$

Uvedemo novo spremenljivko  $\rho = 1/u$ ,

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{1}{u^2}u' \\ \rho'' &= 2\frac{1}{u^3}(u')^2 - \frac{1}{u^2}u''.\end{aligned}\tag{22}$$

Sedaj to vstavimo v enačbo (21), kar nam da izraz

$$p_\varphi^2 u^4 \left[ 2\frac{u'^2}{u^3} - \frac{u''}{u^2} - 2\frac{u'^2}{u^3} - \frac{1}{u} \right] + \alpha u^2 = 0,$$

ki pa se pokrajša v

$$u'' + u - \frac{\alpha}{p_\varphi^2} = 0.\tag{23}$$

Rešitev te enačbe je seveda elipsa,

$$\rho(\varphi(t)) = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi(t))},\tag{24}$$

Parameter  $\varepsilon$  je ekscentričnost orbite, ki so zaključene (vezano gibanje) samo za  $0 \leq \varepsilon < 1$ . Seveda se bomo omejili samo na take. Kot  $\varphi(t)$  je rešitev enačbe

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2.\tag{25}$$

Enačbo (25) lahko rešimo z integralom

$$\int_0^\varphi \frac{d\tilde{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cos \tilde{\varphi})^2} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} t.\tag{26}$$

Ta integral je k sreči analitičen in tabeliran v matematičnem priročniku [1]. Za  $0 \leq \varepsilon < 1$  je rešitev

$$\begin{aligned}t \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} &= \left[ \frac{\varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left( \frac{(1 - \varepsilon) \tan \varphi/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] \\ &= F(\varphi; \varepsilon).\end{aligned}\tag{27}$$

Končno lahko sedaj zapišemo  $\varphi = F^{-1}(t\alpha^2/p_\varphi^3; \varepsilon)$ . To moramo računati numerično, imamo pa to smolo, da je ta funkcija zaradi  $\tan \varphi/2$  v funkciji  $\arctan(x)$  smiselna samo za  $\varphi \in [-\pi, \pi)$ , sicer pa močno oscilira. Pravilna je kadar  $t \in [-T/2, T/2)$ , kjer je  $T$  čas enega obhoda. Tako bomo čas pri računanju te enačbe z modulom omejili na ta interval. Vendar pa je ta časovni interval grd – raje bomo vzeli  $t \in [0, T)$ , tako da bomo rezultatu prišteli  $\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3}$ . Zaradi osebne preference bi tudi  $\varphi$  radi merili tako, da  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , zato bomo v enačbi (27) krivuljo predstavili v desno za fazo  $\pi$ , torej  $\varphi \mapsto \varphi - \pi$ . Tako smo se znebili nezveznosti pri  $\pi$ . Sedaj lahko izračunamo čas obhoda (oz. periodo). Veljati mora torej

$$t = \frac{p_\varphi^3}{\alpha^2} \left[ \frac{\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi))} + \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \left( \frac{(1 - \varepsilon) \tan \frac{\varphi - \pi}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] + \frac{T}{2} \tag{28}$$

Obhodni čas določimo tako, da  $t(\varphi = 0) = 0$ , oz.  $t(\varphi = 2\pi) = T$ . To pomeni

$$\frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \underbrace{\arctan(-\infty)}_{-\pi/2} = -\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3},$$

od koder pa z lahkoto pokažemo

$$T = \frac{2\pi p_\varphi^3}{\alpha^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

### 2.2.2 Začetni pogoji

Da bomo res imeli vezana stanja, mora biti ekscentričnost orbite  $\varepsilon \in [0, 1)$ . Ta je definirana kot

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{\alpha^2}},$$

od koder lahko slepamo, da mora biti

$$-\frac{\alpha^2}{2p_\varphi^2} \leq E < 0.$$

$E$  je energija sistema, ki jo lahko izračunamo iz začetnih pogojev zvezd:

$$E = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_\varphi^2/\rho^2) - \frac{\alpha}{\rho} \quad (30)$$

Ker je razdalja med zvezdama na začetku 1, je  $\rho = 2\mu$  in  $\mathbf{r}_*(t = 0) = 2\mu\mathbf{e}_x$ , torej mora veljati

$$\rho(\varphi = 0) = 2\mu = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (31)$$

To lahko prepakiramo v identiteto

$$p_\varphi = \sqrt{2\mu\alpha(1 - \varepsilon)}. \quad (32)$$

s katero lahko povsod eliminiramo  $p_\varphi$ :

$$\rho(\varphi) = \frac{2\mu(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \quad (33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{M_1 + M_2}} \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^{3/2} \quad (34)$$

Sedaj smo dvozvezden sistem v celoti rešili, prosta parametra sta le  $M_1$  in  $M_2$ , začetni pogoj pa je odvisen le od ekscentričnosti orbite,  $\varepsilon$ .

### 2.2.3 Računanje orbit zvezd

Na vsakem časovnem koraku bomo morali rešiti enačbo (28), ki je k sreči monotona. Paziti moramo, da ne pademo ven iz tega intervala. Ničle lahko učinkovito računamo z analitičnim odvodom – ponujajo se nam Newtonova, Halleyeva in Baileyeva metoda. Za slednji potrebujemo še drugi odvod. Ker velja  $\partial t / \partial \varphi = (\partial \varphi / \partial t)^{-1}$  lahko zapišemo

$$\frac{\alpha^2 t'}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2} \quad (35)$$

$$\frac{\alpha^2 t''}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{2\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^3} \quad (36)$$

Na koncu smo uporabili kar Newtonovo metodo, preciznost je  $10^{-12}$ .

### 2.2.4 Dinamika planeta

Sedaj smo izračunali vse, kar potrebujemo za izračun „zunanjega“ potenciala v kateraga vržemo naš planet. Hamiltonka se glasi

$$H_3 = \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) + V_\odot(\mathbf{r}_3, t), \quad (37)$$

kjer je potencial  $V_\odot = V_\odot(\mathbf{r}, t)$  enak

$$V_\odot(\mathbf{r}, t) \equiv - \left[ \frac{M_1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2M_1} \mathbf{r}_*(t)|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2M_2} \mathbf{r}_*(t)|} \right]. \quad (38)$$

Kljub temu, da čas eksplicitno nastopa v hamiltonki, se Poissonov oklepaj pri tem ne spremeni. Uvedli smo še polarne koordinate planeta:

$$\mathbf{r}_3 = \zeta \cos \psi \mathbf{e}_x + \zeta \sin \psi \mathbf{e}_y = \zeta \mathbf{e}_\zeta.$$

Gibalne zakone dobimo iz Poissonovih oklepajev  $\{\bullet, T_3\}$  in  $\{\bullet, V_\odot\}$ :

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\zeta} = p_\zeta, & \{\zeta, V_\odot\} &= 0, \\ \{\psi, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\psi} = p_\psi/\zeta^2, & \{\psi, V_\odot\} &= 0, \\ \{p_\zeta, T_3\} &= -\frac{\partial T_3}{\partial \zeta} = p_\psi^2/\zeta^3, & \{p_\zeta, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta}, \\ \{p_\psi, T_3\} &= 0, & \{p_\psi, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (39)$$

Potencial  $V_\odot$  se v polarnih koordinatah zapiše kot

$$V_\odot = -\frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|} - \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|}, \quad (40)$$

$$|\mathbf{r}_{31}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_1^2} \rho^2 - \frac{1}{M_1} \rho \zeta \cos(\psi - \varphi), \quad (41)$$

$$|\mathbf{r}_{32}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_2^2} \rho^2 + \frac{1}{M_2} \rho \zeta \cos(\psi - \varphi). \quad (42)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta} &= (-1) \cdot \left[ + \frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \left( 2\zeta - \frac{\rho}{M_1} \cos(\varphi - \psi) \right) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \left( 2\zeta + \frac{\rho}{M_2} \cos(\varphi - \psi) \right) \right] \\
&= \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \cos(\varphi - \psi) - \zeta \left( \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right)
\end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi} &= (-1) \cdot \left[ - \frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \frac{\rho \zeta}{M_1} \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \frac{\rho \zeta}{M_2} \sin(\varphi - \psi) \right] \\
&= \frac{\rho \zeta}{2} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \sin(\varphi - \psi)
\end{aligned} \tag{44}$$

### 2.3 Približek povprečnega polja

Za  $M_1 = 2000$  in  $M_2 = 1000$  dobimo  $p_\varphi \sim 10^4$ . Ocenimo maksimalno dovoljeno energijo planeta kot

$$E_3 = \frac{1}{2} (p_\zeta^2 + p_\psi^2 / \zeta^2) - \mu / \zeta \tag{45}$$

Energija mora biti negativna za vezan sistem, tj.  $T_3 < V_\odot$ . Za začetne pogoje si brez izgube splošnosti izberemo  $p_\zeta = 0$ , od koder dobimo oceno za  $p_\psi(t=0)$ .

$$p_\psi^2 < 2\zeta^2 \mu / \zeta = 2\mu \zeta$$

oziroma malce drugače

$$-\sqrt{2\mu\zeta} \lesssim p_\psi \lesssim \sqrt{2\mu\zeta}. \tag{46}$$

Oddaljenost planeta od dvozvezdja ne sme biti prevelika, tj.  $\zeta \sim 10^2$ , reducirana masa zvezd pa je reda  $\mu \sim 10^3$ . Odtod dobimo oceno za maksimalno dovoljeno vrtilno količino  $p_\psi^{\max} \sim 10^{5/2} \approx 300$ . Vidimo, da je  $p_\psi^{\max} \sim 10^2 \ll p_\varphi \sim 10^4$ . To pomeni, da bo planet gotovo spreminjajoče se polje čutil kot časovno povprečno polje, torej lahko časovno odvisnost izintegriramo. Označimo  $\langle \bullet \rangle_t$  za operator časovnega povprečja. Časovno povprečno polje bomo definirali kot

$$\langle V_\odot(\mathbf{r}) \rangle_t \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt V_\odot(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{-1} V_\odot(\mathbf{r}, \varphi(t)), \tag{47}$$

saj je v eni periodi vsa informacija, ki jo potrebujemo. S pomočjo enačb (34) in (35) lahko enačbo (47) prepišemo v

$$\langle V_\odot(\mathbf{r}) \rangle_t = (1 - \varepsilon)^{3/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{V_\odot(\mathbf{r}, \varphi)}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2}. \tag{48}$$

Tekom tega poročila smo izračunali vse, kar potrebujemo, da ta integral eksplicitno zapišemo, vendar pa je grd. Tudi če analitična rešitev obstaja, je nepraktična za uporabo (program *Mathematica*, ga ni uspel izračunati po dveh celih urah), zato bi ga morali računati kar numerično. Tudi v Poissonovih oklepajih ga lahko še vedno uporabimo:

$$\{A, \langle V_\odot \rangle_t\} = \frac{(1 - \varepsilon)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2} \{A, V_\odot(\mathbf{r}, \varphi)\}, \tag{49}$$

kjer je  $A$  neka kanonična spremenljivka.



### 2.3.1 Krožne orbite zvezd

Kljub temu pa obstaja relativno lepa analitična rešitev za krožne orbite zvezdnega sistema ( $\varepsilon = 0$ ). Če je planet daleč proč od zvezd, ekscentričnost zvezdnih orbit nima nobenega vpliva, tako da je ta približek v našem primeru upravičen, za  $\zeta \gtrsim 10$ . Takrat vzamemo limito  $\varepsilon \rightarrow 0$  za naše količine:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varphi) = 2\mu = \text{konst.} \quad (50)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\odot} \quad (51)$$

Za izračun  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\odot}$  potrebujemo limiti  $|\mathbf{r}_{31}|^2$  in  $|\mathbf{r}_{32}|^2$  iz enačb (41) in (42):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\mathbf{r}_{31}|^2 &= \zeta^2 + \frac{\mu^2}{M_1^2} - 2\frac{\mu}{M_1}\zeta \cos(\varphi - \psi) \\ &= \left(\zeta - \frac{\mu}{M_1}\right)^2 + 4\frac{\mu}{M_1}\zeta \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\mathbf{r}_{32}|^2 &= \zeta^2 + \frac{\mu^2}{M_2^2} + 2\frac{\mu}{M_2}\zeta \cos(\varphi - \psi) \\ &= \left(\zeta + \frac{\mu}{M_2}\right)^2 - 4\frac{\mu}{M_2}\zeta \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Integral (51) lahko sedaj s pomočjo integrala ki je spet tabeliran v priročniku [1]

$$\frac{1}{a_k} \int_0^{\theta} \frac{dx}{\sqrt{1 \mp b_k \sin^2 c_k x}} = \frac{1}{a_k c_k} F(c_k \theta; \pm b_k), \quad |b_k| < 1 \quad (54)$$

kjer je  $F(x; k)$  nepopolni eliptični integral prve vrste. Če privzamemo

$$\begin{aligned} x &= \varphi - \psi, & c_{1,2} &= 1/2, \\ a_1 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_1), & a_2 &= 2\pi(\zeta + \mu/M_2), \\ b_1 &= 4\frac{\mu\zeta/M_1}{(\zeta - \mu/M_1)^2}, & b_2 &= 4\frac{\mu\zeta/M_2}{(\zeta + \mu/M_2)^2}, \end{aligned} \quad (55)$$

potem lahko integral (51) s pomočjo enačbe (54) rešimo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= -\frac{2M_1}{a_1} \left[ F(\psi/2; -b_1) + F(\pi - \psi/2; -b_1) \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[ F(\psi/2; b_2) + F(\pi - \psi/2; b_2) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

pri tem dobimo še pogoj  $\zeta \neq \pm\mu/M_1$  oz.  $\zeta \neq \pm\mu/M_2$ , ki pride iz  $|b_k| < 1$  in iz tega, da je deljenje z nič tabu. Ta pogoj je avtomatično izpolnjen za  $\zeta \gg 1$ , saj je  $\mu/M_{1,2} \sim 1$ .

**Gibalne enačbe:** Sam eliptični integral je transcendentna funkcija. Za gibalne enačbe potrebujemo še odvode

$$\{p_{\psi}, \langle V_{\odot} \rangle_t\} = -\frac{\partial}{\partial \psi} \langle V_{\odot} \rangle_t, \quad \{p_{\zeta}, \langle V_{\odot} \rangle_t\} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle V_{\odot} \rangle_t. \quad (57)$$

Da rešimo ti dve enačbi pa potrebujemo odvode eliptičnih integralov. Velja

$$\frac{\partial F(x; k)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial F(x; k)}{\partial k} = \frac{\sin 2x}{4(k-1)\sqrt{1 - k \sin^2 x}} - \frac{1}{2k} \left[ F(x; k) + \frac{1}{k-1} E(x; k) \right], \quad (59)$$

$$\frac{\partial F(x; -k)}{\partial k} = \frac{\sin 2x}{4(k+1)\sqrt{1 + k \sin^2 x}} - \frac{1}{2k} \left[ F(x; -k) - \frac{1}{k+1} E(x; -k) \right], \quad (60)$$

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial \zeta} = 2\pi, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{1,2}}{\partial \zeta} &= \frac{4 \frac{\mu}{M_{1,2}} (\zeta \mp \mu/M_{1,2})^2 - 4\zeta \frac{\mu}{M_{1,2}} \cdot 2(\zeta \mp \mu/M_{1,2})}{(\zeta \mp \mu/M_{1,2})^4} \\ &= b_{1,2} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{2}{\zeta \mp \mu/M_{1,2}} \right) \\ &= b_{1,2} (1/\zeta - 4\pi/a_{1,2}), \end{aligned} \quad (62)$$

kjer je  $E(x; k)$  nepopoln eliptični integral druge vrste. Odvode potem lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= - \frac{2M_1}{a_1} \left[ \frac{\partial F(\psi/2; -b_1)}{\partial \psi/2} \frac{\partial \psi/2}{\partial \psi} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; -b_1)}{\partial (\pi - \psi/2)} \frac{\partial (\pi - \psi/2)}{\partial \psi} \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[ \frac{\partial F(\psi/2; b_2)}{\partial \psi/2} \frac{\partial \psi/2}{\partial \psi} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; b_2)}{\partial (\pi - \psi/2)} \frac{\partial (\pi - \psi/2)}{\partial \psi} \right] \\ &= + \frac{M_1}{a_1} \frac{\partial F(x; -b_1)}{\partial x} \Big|_{x=\psi/2}^{x=\pi-\psi/2} + \frac{M_2}{a_2} \frac{\partial F(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=\psi/2}^{x=\pi-\psi/2} \\ &= - \frac{2M_1/a_1}{\sqrt{1 + b_1 \sin^2(\psi/2)}} - \frac{2M_2/a_2}{\sqrt{1 - b_2 \sin^2(\psi/2)}}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= + \frac{2M_1}{a_1^2} \frac{\partial a_1}{\partial \zeta} \left[ F(\psi/2; -b_1) + F(\pi - \psi/2; -b_1) \right] \\ &\quad + \frac{2M_2}{a_2^2} \frac{\partial a_2}{\partial \zeta} \left[ F(\psi/2; b_2) + F(\pi - \psi/2; b_2) \right] \\ &\quad - \frac{2M_1}{a_1} \left[ \frac{\partial F(\psi/2; -b_1)}{\partial b_1} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; -b_1)}{\partial b_1} \right] \frac{\partial b_1}{\partial \zeta} \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[ \frac{\partial F(\psi/2; b_2)}{\partial b_2} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; b_2)}{\partial b_2} \right] \frac{\partial b_2}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (64)$$

Vidimo, da kljub približku krožnih zvezdnih orbit, končne rešitve niso trivialne.

**Popravek:** Časovno povprečen potencial (56) ima eno hibo. Vsa informacija o tem, kje se zvezde nahajajo (v povprečju) je podana z ničlami  $a_{1,2}$ . Vidimo, da ima  $a_1$  ničlo za  $\zeta > 0$ , vendar pa ima  $a_2$  ničlo za  $\zeta < 0$ , kar pa ni prav. Po tistem, ko izintegriramo kot  $\varphi$ , so eliptični integrali na celotnem našem definicijskem končni.

K sreči je  $\mathbf{r}_3$  (in posledično tudi  $|\mathbf{r}_{32}|$  in  $V_\odot(\mathbf{r}, t)$ ) invarianten<sup>2</sup> na transformacijo

$$(\zeta, \psi) \mapsto (-\zeta, \psi - \pi).$$

Pri tem vektor  $\mathbf{r}$  še vedno kaže v isto točko, vendar pa dobimo pravilno divergenco za drugo zvezdo. To pomeni, da moramo popraviti enačbo (53)

$$|\mathbf{r}_{32}|^2 = \left(\zeta - \frac{\mu}{M_2}\right)^2 + 4\frac{\mu}{M_2} \sin^2 \frac{\varphi - \psi + \pi}{2} \quad (65)$$

in temu primerno spremeniti enačbe (55):

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi - \psi, & x_2 &= \varphi - \psi + \pi, \\ a_1 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_1), & a_2 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_2), \\ b_1 &= 4\frac{\mu\zeta/M_1}{(\zeta - \mu/M_1)^2}, & b_2 &= 4\frac{\mu\zeta/M_2}{(\zeta - \mu/M_2)^2}, \end{aligned} \quad (66)$$

$c_{1,2}$  pa je še vedno enak  $c_{1,2} = c = 1/2$ . Od tod dobimo popravljen potencial

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t &= -\frac{2M_1}{a_1} \left[ F\left(\frac{\psi}{2}; -b_1\right) + F\left(\frac{2\pi - \psi}{2}; -b_1\right) \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[ F\left(\frac{\psi - \pi}{2}; -b_2\right) + F\left(\frac{3\pi - \psi}{2}; -b_2\right) \right], \end{aligned} \quad (67)$$

ki je pravilno definiran na  $\zeta > 0$  in  $\psi \in [0, 2\pi)$ . Definirajmo

$$\begin{aligned} \Lambda_k(\zeta, \psi) &\equiv \frac{2\pi}{a_k} F(\psi/2; b_k) - \frac{\partial b_k}{\partial \zeta} \frac{\partial F(\psi/2; -b_k)}{\partial b_k} \\ &= \frac{1}{b_k + 1} \left[ \frac{\sin \psi}{4\sqrt{1 + b_k \sin^2(\psi/2)}} \left(1 - \frac{b_k}{\zeta}\right) + E(\psi/2; -b_k) \left(1 - \frac{1}{2\zeta}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2b_k} F(\psi/2; -b_k) \end{aligned} \quad (68)$$

Popraviti je treba še nekatere odvode:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t = -\frac{2M_1/a_1}{\sqrt{1 + b_1 \sin^2(\psi/2)}} - \frac{2M_2/a_2}{\sqrt{1 + b_2 \sin^2((\psi - \pi)/2)}} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t &= +\frac{2M_1}{a_1} \left[ \Lambda_1(\zeta, \psi) + \Lambda_1(\zeta, 2\pi - \psi) \right] \\ &\quad + \frac{2M_2}{a_2} \left[ \Lambda_2(\zeta, \psi - \pi) + \Lambda_2(\zeta, 3\pi - \psi) \right] \end{aligned} \quad (70)$$

Rezultate za  $V_\odot(\mathbf{r}, t)$  bi bilo zanimivo primerjati z rezultati v povprečnem polju,  $\langle V_\odot \rangle_t(\mathbf{r})$  ob  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Gibalni zakoni so isti, le  $\partial V_\odot / \partial x$  zamenjamo z odvodi povprečnega polja  $\partial \langle V_\odot \rangle_t / \partial x$ .

---

<sup>2</sup>Povprečni potencial  $\langle V_\odot \rangle_t$  pa nima te simetrije, ker jo integriranje zlomi, zaradi česar ga moramo znova izračunati.

## 2.4 Numerični izračun

Ker imamo na planet vpliv zunanjega časovno odvisnega potenciala energija planeta ne bo konstantna. Vendar pa tudi za tretja časovno odvisnih hamiltonk uporabimo simplektične integratorje, saj pojem simplektičnosti ni omejen na ohranitev energije<sup>3</sup>, ampak na ohranjanje hamiltonske forme [2] (tj. Poissonovega oklepaja), ki se ne spremeni tudi če čas eksplicitno nastopa v Hamiltonianu. Prednost simplektičnih integratorjev je ta, da nam dajo stabilnejše orbite, poleg tega pa jih je enostavneje naprogramirati

Za konstrukcijo simplektičnega integratorja potrebujemo  $H(t) = A(t) + B(t)$ , kjer  $\{A(t), B(t)\} \neq 0$ . Vektor integracijskih spremenljivk je  $\mathbf{x} = (\zeta, \psi, p_\zeta, p_\psi)^T$ . Za integracijo bomo uporabili simetrizirane sheme drugega reda<sup>4</sup>,  $S_2$ , četrtega reda,  $S_4$  in osmega reda,  $S_8$ :

$$S_2(c, \delta t) \equiv \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}) \exp(c \delta t \{\bullet, B\}) \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}),$$

shema četrtega reda  $S_4$  je

$$S_4(\delta t) = S_2(x_0, \delta t) S_2(x_1, \delta t) S_2(x_0, \delta t), \quad x_0 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, \quad x_1 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, \quad (71)$$

za shemo osmega reda,  $S_8$ , pa bomo vzeli koeficiente  $w_1$ , rešitev 'A' iz članka [3] s čimer aproksimiramo Liouvillov propagator. Integracija zatorej izgleda tako:

$$\mathbf{x}(t + \delta t) = S_m(\delta t) \mathbf{x}(t) + \mathcal{O}(\delta t^{m+1}).$$

Opomba:

$$\exp(c \delta t \{\bullet, A\}) x = x + c \delta t \{x, A\}.$$

Izbrati si moramo taka  $A(t)$  in  $B(t)$ , ki delujeta na disjunktna hilbertova prostora. Ker smo v polarnih koordinatah, zato ne bomo mogli vzeti kar  $T_3$  in  $V_\odot$ , ampak bomo morali vzeti efektivni potencial  $V_{\text{ef}}$  in radialno kinetično energijo  $T_\zeta$ :

$$T_\zeta = \frac{1}{2} p_\zeta^2, \quad V_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\zeta^2} + V_\odot. \quad (72)$$

Potrebujemo še vrednosti vse možnih Poissonovih oklepajev. Na srečo si lahko pomagamo s tistimi, ki smo jih naračunali v enačbah (39):

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_\zeta\} &= p_\zeta, & \{\zeta, V_{\text{ef}}\} &= 0, \\ \{\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{\psi, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi / \zeta^2, \\ \{p_\zeta, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\zeta, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi^2 / \zeta^3 - \frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta}, \\ \{p_\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\psi, V_{\text{ef}}\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (73)$$

Vidimo, da je tak razcep hamiltonke  $H_3$  res ustrezen. Sedaj smo lahko gotovi, da bo „drift“ orbite posledica  $\partial H_3 / \partial t \neq 0$  in ne posledica slabega integratorja.

<sup>3</sup>V tem primeru se zelo natančno računa  $\partial H / \partial t$ .

<sup>4</sup>Napaka za red  $m$  je reda  $\mathcal{O}(\delta t^{m+1})$ .

Vseeno pa obstaja možnost, da se bo po dolgem času planet močno približal eni izmed zvezd, zaradi česar bo planet vrglo osončja po ti. „slingshot“ efektu. Da se to ne zgodi prekmalu, moramo imeti še dodatno zagotovilo stabilnosti orbit – adaptiven korak. Če smo preblizu zvezde, ima najmanjša napaka v kotu/radiju daljnosežne posledice na evolucijo. Pri izbiri adaptivnega koraka koramo biti pozorni, da med drobljenjem koraka na manjše ne smemo zadeti ob frekvenco, ki je lastna dvozvezdju [4]. Zato bomo na začetku vzeli časovni korak, ki je v iracionalnem razmerju z obhodnim časom zvezde, korake pa bomo drobili po Rombergovem zaporedju (potence števila 2). Za primerjavo sem za integrator preizkusil še Runge-Kutta reda 4, ki pa se ni obnesel najbolje.

Orbite planeta niso več preproste elipse, zato Laplace-Runge-Lenzov vektor ni več invarianta in ga bomo tudi spremljali. Z našimi opazljivkami  $\zeta$ ,  $\psi$ ,  $p_\zeta$  in  $p_\psi$  ga v kartezičnih koordinatah na sečni ploskvi  $\psi = 0$  zapišemo kot

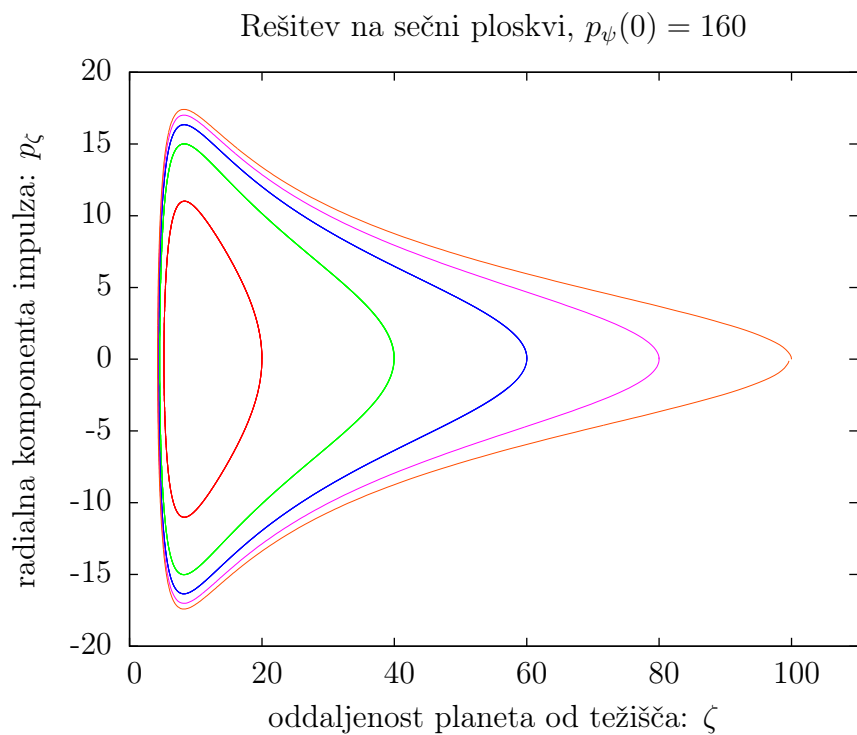
$$\mathbf{e} = \left\{ \left[ p_\zeta^2 + \left( \frac{p_\psi}{\zeta} \right)^2 \right] \zeta - \zeta p_\zeta^2 - 1 \right\} \mathbf{e}_x - p_\zeta p_\psi \mathbf{e}_y. \quad (74)$$

To je v resnici vektor ekscentričnosti, vendar pa se od Laplace-Runge-Lenzovega vektorja razlikuje le za multiplikativno konstanto. Glavna motivacija za računanje tega Laplace-Runge-Lenzovega vektorja nam je bila izračun smeri in ekscentričnosti orbite, zato je računanje vektorja ekscentričnosti ustreznejše.

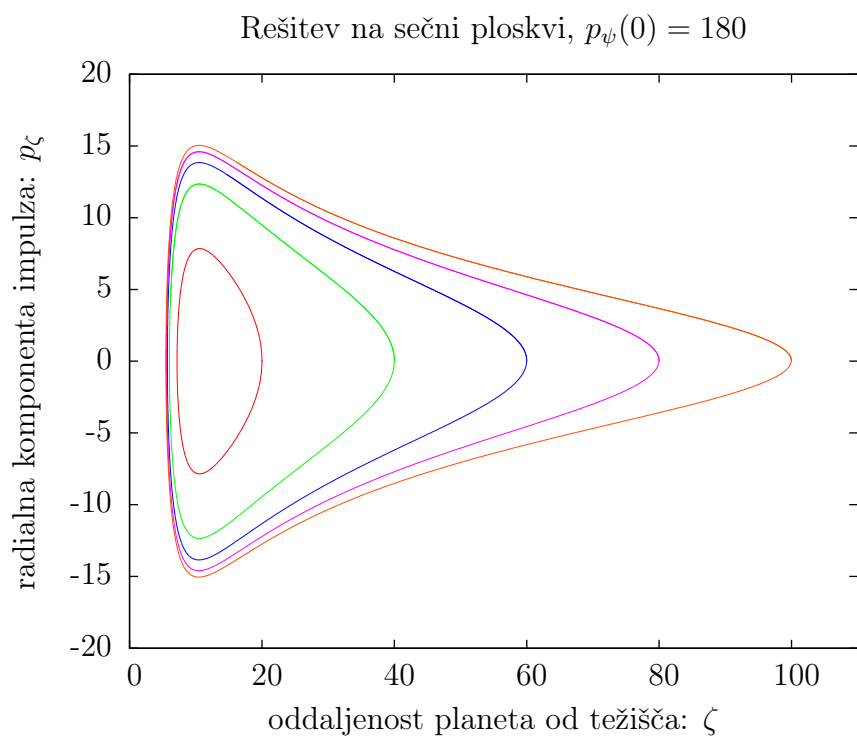
### 3 Rezultati

Nalogo sem reševal s programskim jezikom C, da bi dosegel čim višjo preciznost za čim krajši čas računanja sem preizkušal prej omenjene integratorje. Kot sem že povedal prej, se Runge-Kutta reda 4 vede precej slabo, zato sem se posvetil le simplektičnim integratorjem. Drugi red ni bil zadosten, orbita planeta ni bila dovolj stabilna. Integratorski shemi  $S_8$  in  $S_4$  sta bili dokaj primerljivi, vendar je v bližini zvezde shema  $S_8$  dajala bolj gladke tirnice, zato sem pristal kar na  $S_8$ , ki je najnatančnejša, vendar tudi najpočasnejša.

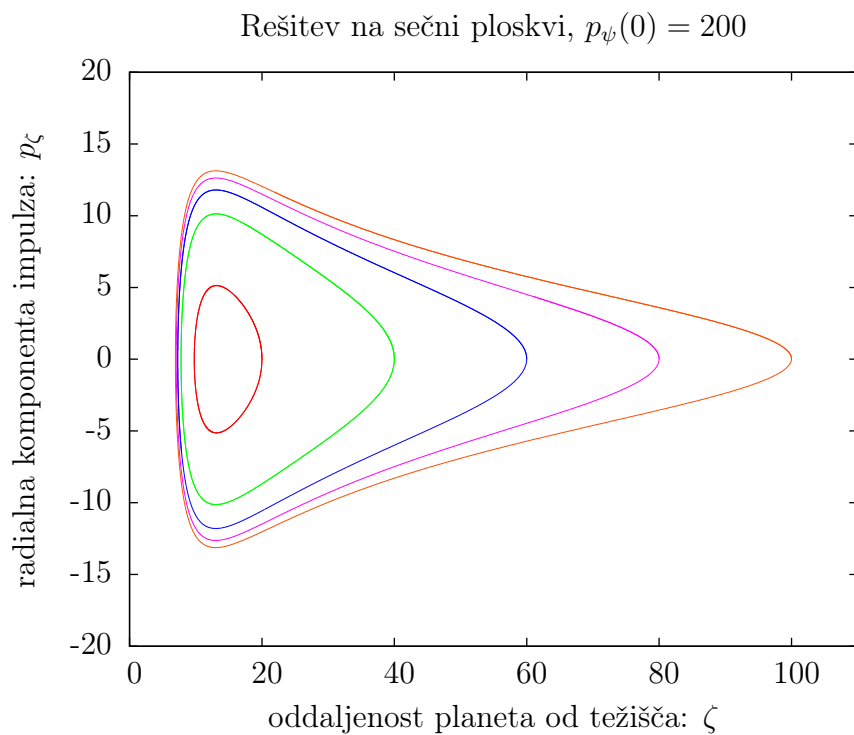
Grafi 1, 2, 3 in 4 prikazujejo stabilne orbite v takem sistemu na sečni ploskvi  $\psi = 0$  in  $\varepsilon = 0.4$ ,  $M_1 = 2000$  in  $M_2 = 1000$ . Pri tem je  $p_\psi$  konstanten (na sečni ploskvi), zaradi česar imamo tu samo dve neodvisni spremenljivki:  $\zeta$  in  $p_\zeta$ . Rešitve so nekakšne elipse, ki se vrtijo okrog težišča zvezd.



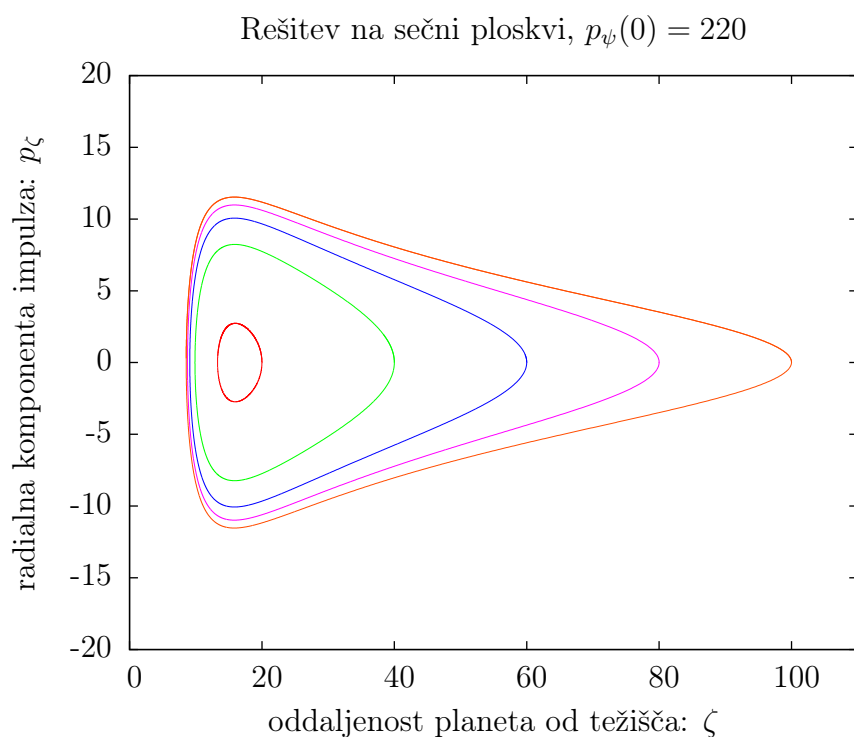
*Slika 1* – Zaradi zaokrožitvenih napak se zadnji graf ne sklene, vendar je ostalo v redu.



*Slika 2* – Graf je sklenjen in ne tako stisnjen proti težišču zvezd.



*Slika 3* – Graf je tu še bolj sploščen.



*Slika 4* – Graf je tu še bolj sproščen.

Grafi 1, 2, 3 in 4 napovedujejo, da bomo za stabilne orbite dobili podobne diagrame,

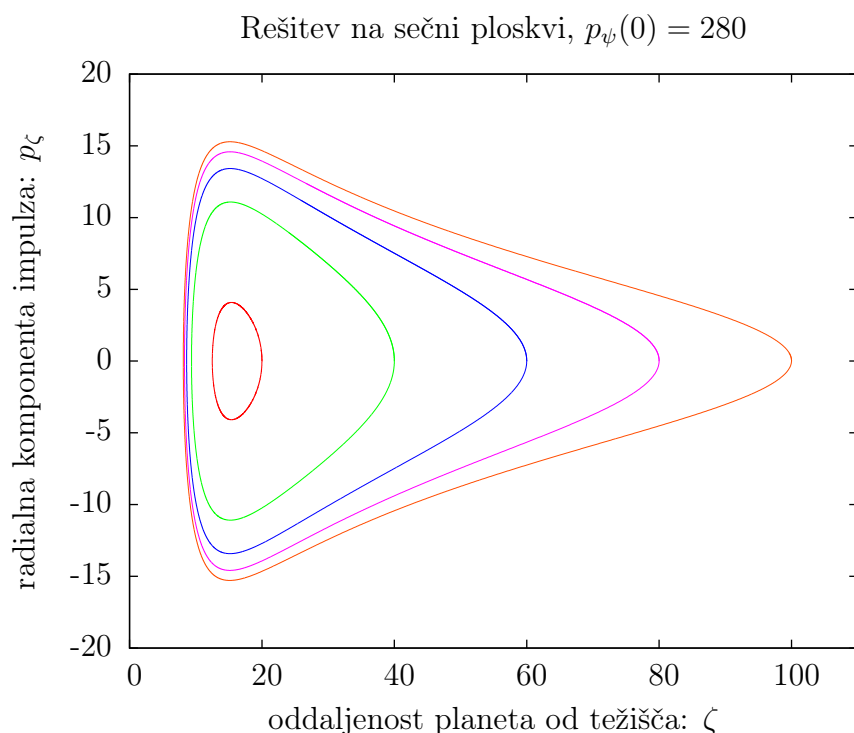
ne glede nato, s kakšnim  $\zeta$  oz.  $p_\zeta$  pričnemo. Tudi če je  $p_\zeta$  na začetku nič, bomo zaradi precesije enkrat prišli v točko, kjer bo  $p_\zeta = 0$ .

Nekje znotraj grafa je zastojna točka, okrog katere se vse ostale trajektorije vrtijo. V tem primeru nimamo precesije.

Predpostavljamo, da imamo tudi prepovedano območje: če smo preblizu zvezd nas bodo slednje izvrgele iz osončja. Prav tako ne moremo biti predaleč ali imeti prevelikih hitrosti, ker potem namesto potencialne prevlada kinetična energija in planet sam od sebe uide.

### 3.1 Stabilne orbite

Poglejmo si, kako se fazni diagram spremeni, če spremenimo maso zvezd. Graf 5 prikazuje situacijo, ko  $\varepsilon = 0.4$ ,  $M_1 = 4000$ ,  $M_2 = 1000$ .

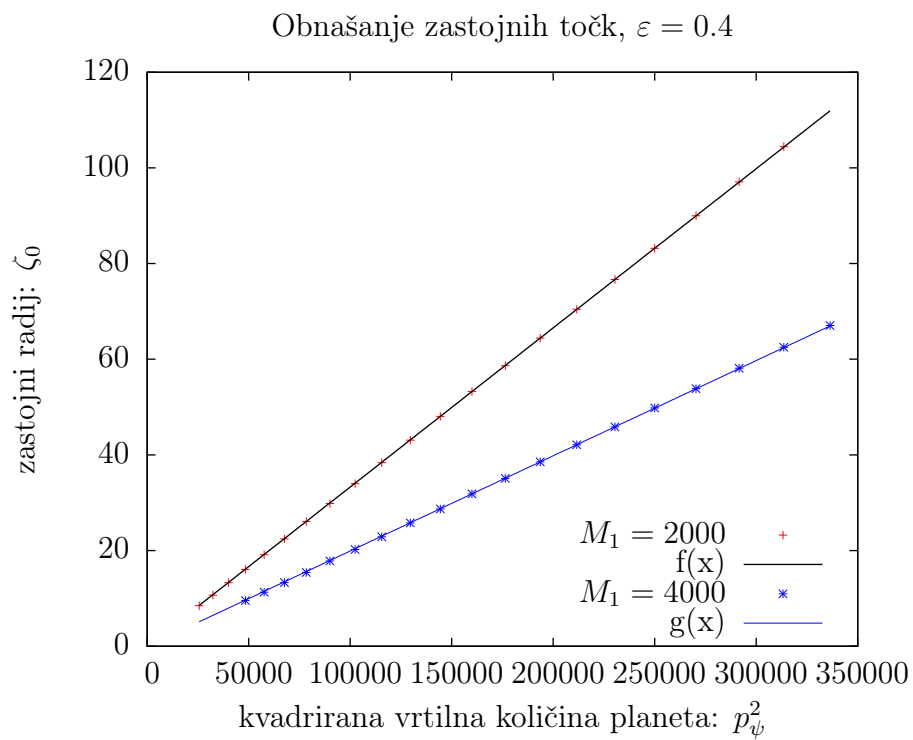


*Slika 5* – Graf močno spominja na prejšnje grafe. Kljub temu, da smo spremenili razmerje mas, so ti grafi na te spremembe skoraj neobčutljivi. Pozna se le ta vpliv, da je skupna masa zvezd večja, zaradi česar potrebujemo višjo vrtilno količino, da planet ne pade notri. Zato je  $p_\psi = 280$ .

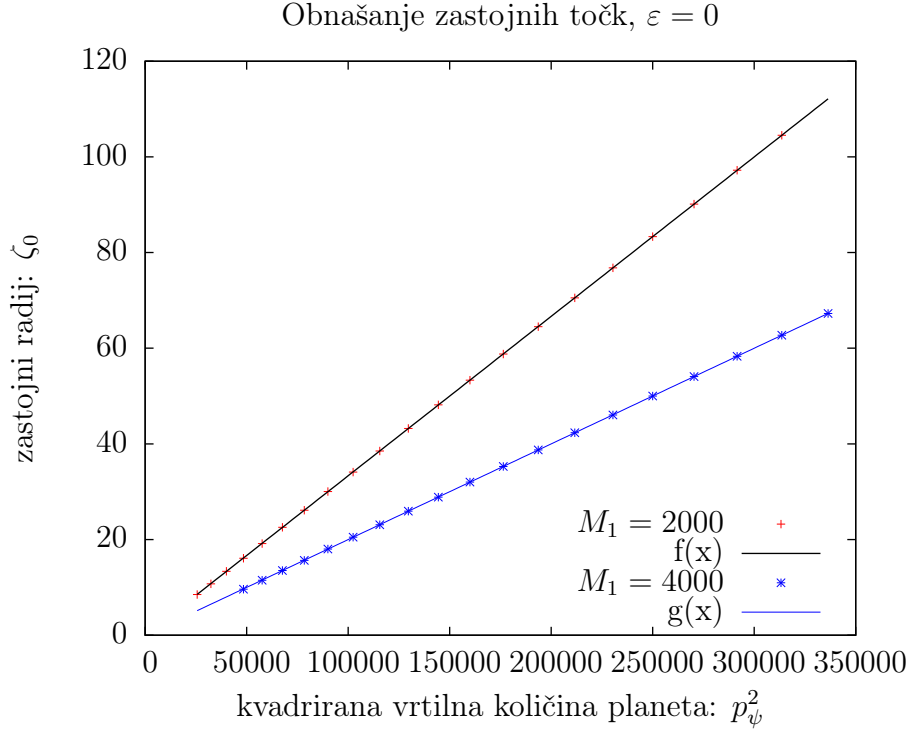
Da bi imeli čim boljši opis teh faznih diagramov si pogledjmo pod drobnogled zastoje točke in orbite planeta, kadar je na zastojni točki.

Z  $\zeta_0$  označimo zastojno točko (radij). Graf 6 prikazuje zastoje za  $M_2 = 1000$  in  $\varepsilon = 0.4$  pri različnih  $M_1$ . Graf 7 prikazuje isto, le za  $\varepsilon = 0$ .





*Slika 6* – Vidimo, da imamo odvisnost  $\zeta_0 \propto p_\psi^2$ , smerni koeficient pa je občutljiv na maso.



*Slika 7* – Vidimo, da imamo odvisnost  $\zeta_0 \propto p_\psi^2$ , smerni koeficient pa je občutljiv na maso. Občutljivost na  $\varepsilon$  je praktično zanemarljiva.

Vidimo, da je graf neobčutljiv na  $\varepsilon$ . Modelsko krivuljo sem ugotovil s pomočjo prilagajanja potenčne funkcije, kjer sem hitro ugotovil  $\zeta_0 \propto p_\psi^2$ . Modelsko krivuljo sem parametriziral kot

$$kp_\psi^2 = \zeta_0. \quad (75)$$

Vrednosti  $k$  po prilagajanju so tabelirane v tabeli 1

*Tabela 1* – Vrednosti  $k$  in  $\delta_k$  (relativna napaka  $k$ ) za prilagajanje različnih grafov. Rezultati so res praktično neodvisni od  $\varepsilon$ .

	$k$	$\delta_k$
$M_1 = 2000, \varepsilon = 0.4$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
$M_1 = 2000, \varepsilon = 0$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
$M_1 = 4000, \varepsilon = 0.4$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
$M_1 = 4000, \varepsilon = 0$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$

Izkaže se, da je v obeh primerih  $k \approx \frac{1}{M_1 + M_2}$ . Kako bi lahko tako obnašanje pojasnili? Napišimo nov hamiltonian za planet, kjer bomo vzeli limito  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tj. obe zvezdi nadomestimo z eno zvezdo, ki ima maso  $M_1 + M_2$ . Tj.

$$H_3 \approx \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) - \frac{M_1 + M_2}{\zeta}. \quad (76)$$

Ugibamo, da je zastojni radij ravno tisti radij, kjer ima energija minimum. Zato moramo  $H_3$  odvajati po  $\zeta$ :

$$\frac{\partial H_3}{\partial \zeta} \approx -\frac{p_\psi^2}{\zeta^3} + \frac{M_1 + M_2}{\zeta^2}. \quad (77)$$

Pri  $\zeta = \zeta_0$  ima odvod ekstrem, tj.

$$\begin{aligned} \frac{p_\psi^2}{\zeta_0^3} &\approx \frac{M_1 + M_2}{\zeta_0^2}, \\ p_\psi^2 &\approx (M_1 + M_2)\zeta_0, \\ \frac{p_\psi^2}{M_1 + M_2} &\approx \zeta_0. \end{aligned} \quad (78)$$

To pa tudi pomeni, da morajo biti tirnice planeta v zastojni točki krožnice (oz. skoraj krožnice) in da v celotni stabilni regiji  $\varepsilon$  lahko mirne volje postavimo na 0, s čimer dodatno utemeljimo približek krožnih orbit v približku povprečnega polja.

Če bi hoteli eksaktno rešitev bi morali namesto  $(M_1 + M_2)/\zeta$  vzeti potencial  $V_\odot$ , vendar pa dobimo transcendentno enačbo.

## Literatura

- [1] J. N. Bronštejn in K. A. Semendjejev, *Matematični priročnik*, Tehniška založba Slovenije v Ljubljani, deseti ponatis, (1988)
- [2] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)
- [3] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A, Vol. 150, no. 5,6,7, str. 262, (1990)
- [4] A. S. Richardson and J. M. Finn, *Symplectic integrators with adaptive time steps*, arXiv:1108.0322v1 [physics.comp-ph], (2011)