Modelska analiza II
2011/12

12. naloga – Navier-Stokesov sistem

Jože Zobec

1 Razmislek

V tej nalogi bomo reševali Navier-Stokesov sistem dvo-dimenzionalne nestisljive tekočine (kapljevine). Izmed možnosti, ki so nam na voljo, bomo za to vajo uporabili metodo, ki reducira eno izmed enačb – metodo, ki dinamiko napove prek vrtinčnosti, 'ζ',

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u\zeta}{\partial x} + \frac{\partial v\zeta}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Hitrostno polje, $\mathbf{v} = (u, v)$, dobimo iz tokovne funkcije, 'ψ',

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

ki je z vrtinčnostjo povezana prek Poissonove enačbe,

$$\nabla^2 \psi = \zeta. \tag{1}$$

Pri tem je zagotovljena identiteta $\partial_x u + \partial_y v = 0$. Časovni korak je omejen po Courtanovem pogoju. Robni pogoj za ψ prevedemo na robni pogoj ζ, toka v steno ne sme biti. Vse odvode prepišemo v diskretne in dobimo eksplicitne enačbe za časovni razvoj:

$$\zeta_{i,j}^{t+1} = \zeta_{i,j}^t + \Delta_{i,j}^t, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{i,j}^t =& \tfrac{\delta}{h}\Big[\tfrac{1}{h\mathrm{Re}}\big(\zeta_{i,j+1}^t + \zeta_{i,j-1}^t + \zeta_{i+1,j}^t + \zeta_{i-1,j}^t - 4\zeta_{i,j}^t\big) \\ &- \tfrac{1}{2}\big((u\zeta)_{i,j+1}^t - (u\zeta)_{i,j-1}^t + (v\zeta)_{i+1,j}^t - (v\zeta)_{i-1,j}^t\big)\Big],\end{aligned} \tag{3}$$

hitrostno polje dobimo kot

$$\tfrac{1}{2h}\big(\psi_{i+1,j}^t - \psi_{i-1,j}^t\big) = u_{i,j}^t, \quad \tfrac{1}{2h}\big(\psi_{i,j-1}^t - \psi_{i,j+1}^t\big) = v_{i,j}^t. \tag{4}$$

Enačbo (1) lahko rešujemo na mnogo različnih načinov, vendar mislim, da gre najhitreje z metodo `SOR` s Čebiševim pospeševanjem konvergence.

2 Implementacija

Tako kot prej sem napisal karseda za hitrost optimizirano različico programa v programskem jeziku `C`, kjer sem najbolj požrešne funkcije pohitril/nadomestil ob namigih progrma `gprof`. Dodatno optimizacijo sem napravil tako, da je za mojo $N \times N$ mrežo bil N vedno lih. Skušal sem napraviti program, ki bi čim manj preverjal parametre in se čim bolj osredotočil na računanje.

Nekako je bilo treba pravilno določiti δ (tj. časovni korak). Tega sem določil tako, da sem prvih 10 časovnih iteracij δ računal sproti s hitrostmi in rekel

$$\delta = \frac{1}{40 N v_{\max}},$$

nato pa preostanek upošteval po zadnjem izračunanem δ. Za izračun nove iteracije ζ sem imel pripravjeno pomožen blok spomina. Za izračun ζ^{t+1} sem ju zamenjal v konstantem času (tj. zgolj zamenjal naslov spominskega bloka).

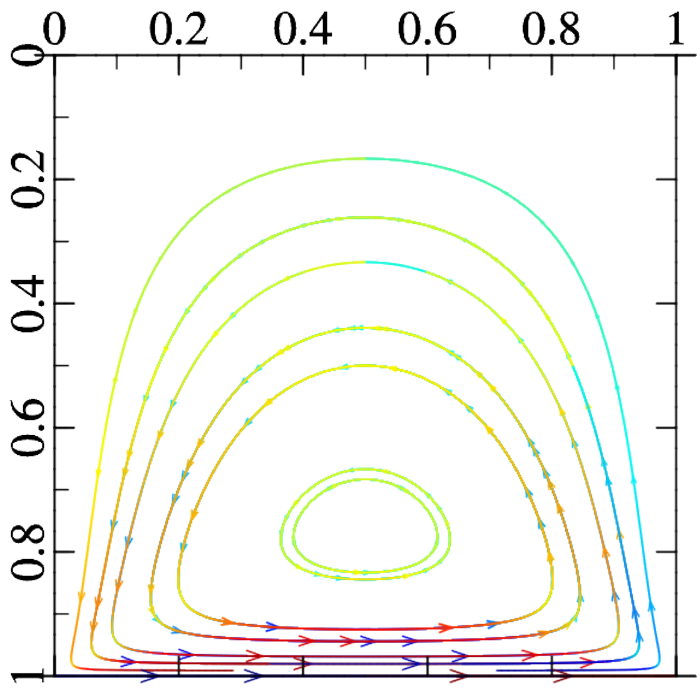
Tabela 1: Spodaj vidimo kolikšen delež časa izvajanja programa vzame posamezen del algoritma. Kot vidimo, se je Čebiševo pospeševanje izplačalo, saj je računanje Poissonove enačbe primerljivo z računanjem eksplicitne časovne sheme za ζ.

delež	Proces
31%	lihi koraki (`SOR`)
31%	sodi koraki (`SOR`)
22%	$\zeta^t \to \zeta^{t+1}$
11%	izračuni u_{ij} in v_{ij}
0%	izračun δ
0%	zamenjava spominskega bloka
5%	ostalo (alokacija spomina, robni pogoji ζ ...)

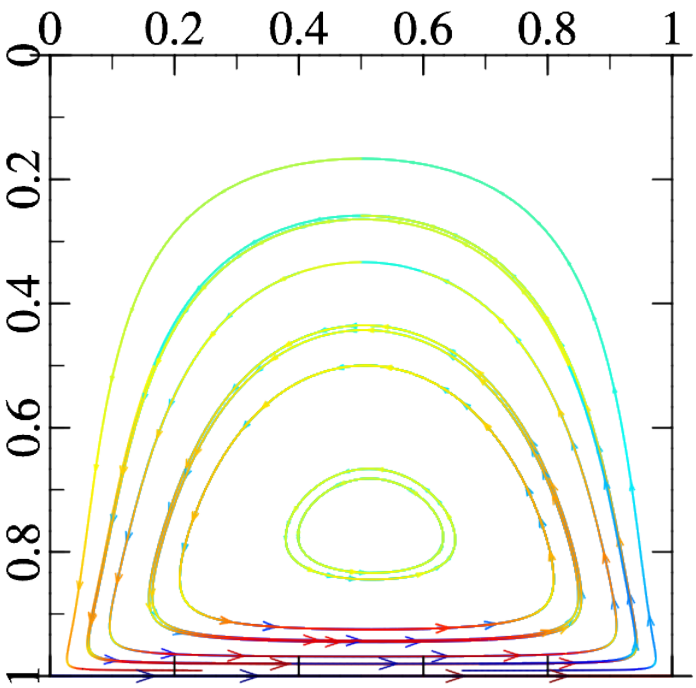
Začetno stanje sem izbral $\psi_{i,j} \equiv 0$, $v_{i,j} \equiv 0$. Tudi $u_{i,j}$ je povsod 0, razen na spodnjem robu, tam je $u_{N,j} \equiv 1$. Zaradi tega je tudi $\zeta_{i,j}$ povsod 0, razen vrstici $\zeta_{N-1,j}$ in $\zeta_{N,j}$.

3 Rezultati

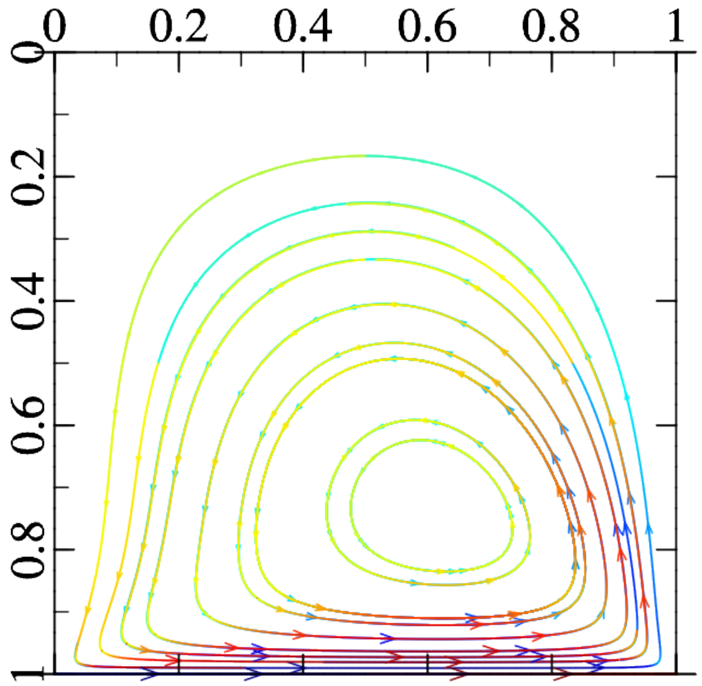
Tokovnice so prikazane na spodnjih slikah (tj. 1, 2, 3, 4 in 5), animacije pa so v priloženi datoteki `anim.tar.gz`. Hitrosti animacij niso sorazmerne s hitrostmi tekočine, ampak so skalirane tako, da se čim bolje vidi začetni prehod iz mirne tekočine v vrtečo se gmoto z vrtincem.



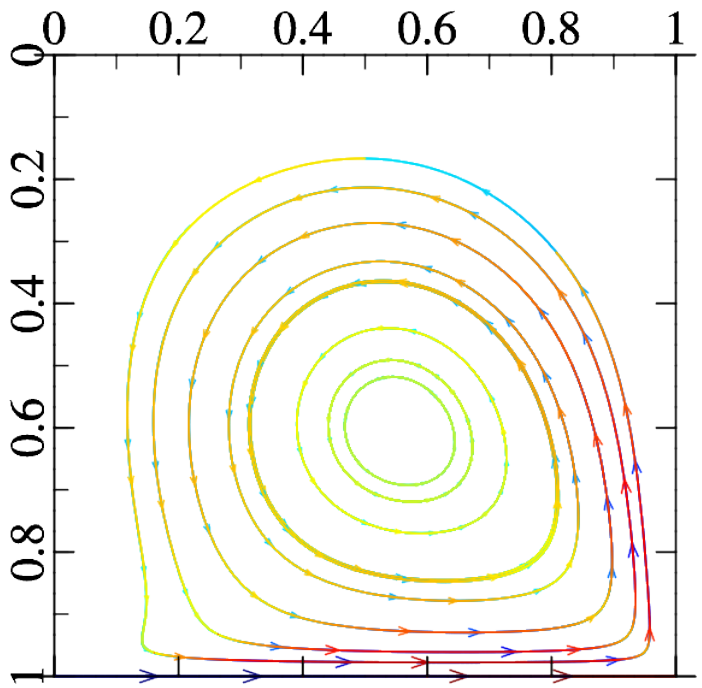
Slika 1: Tokovnice za Re = 0.1, N = 101. Animacija je v datoteki `Re-0.avi`. Ker je mreža premajhna, padejo nekateri markerji v stik s ploščo, ki jih nato zaradi robnega pogoja odnese s sabo.



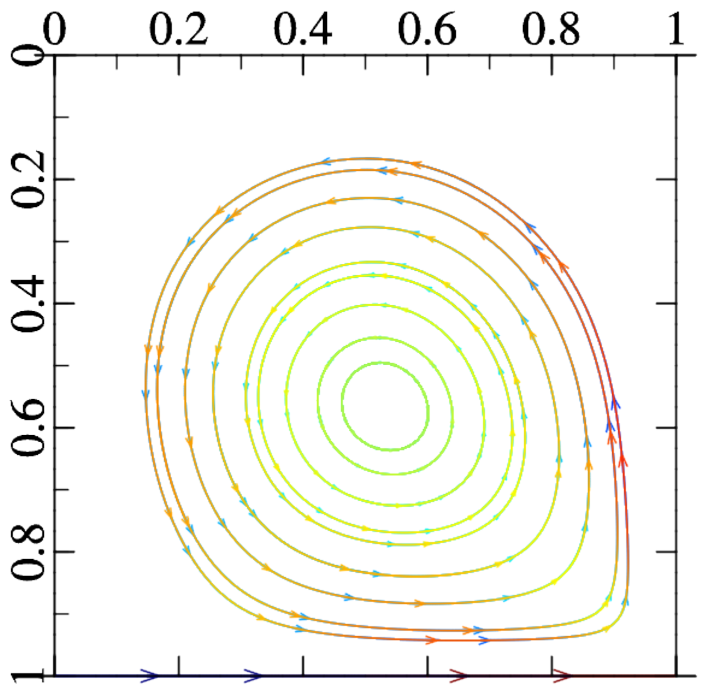
Slika 2: Tokovnice za Re = 10, $N = 201$. Ne razlikujejo se bistveno od grafa na sliki 1. Animacija je v datoteki `Re-10.avi`.



Slika 3: Tokovnice za Re = 100, $N = 201$. Tukaj je situacija že malo drugačna in premikajoča se stranica vrtinec potegne proti sebi. Animacija je v datoteki `Re-100.avi`.



Slika 4: Imamo prehoden primer med tokovnicami na sliki 3 in 5. Tu je Re = 400 in N = 201. Animacija je v datoteki `Re-400.avi`.



Slika 5: Tokovnice za Re = 1000, $N = 201$. Vidimo, da se vrtinec iz 4 v tem primeru končno centrira. Animacija je v datoteki `Re-1000.avi`.