

## 10. naloga – Direktno reševanje Poissonove enačbe

Jože Zobec

### 1 Uvod

V tej nalogi bomo Poissonovo enačbo reševali po zgledu iz Matematične fizike II, z razvojem v Fourierovo vrsto. Problemi so tipa

$$\nabla^2 u(x, y) = g(x, y).$$

Prva naloga zahteva, da izračunamo povprečje, zaradi lastne teže. To je isto, kot če na idealno brezmasno ploščo pritiskamo z neko silo  $-F_z(x, y)$  v smeri 'z'. Iz kurza mehanike kontinuov [2, str. 84] se spomnimo, da elastično deformacijo opiše enačba

$$K_c \Delta^2 \zeta(x, y) = +F_z(x, y), \quad \Delta = \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2,$$

kar lahko razcepimo v dve enačbi:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x, y) &= F_z(x, y), \\ K_c \nabla^2 \zeta(x, y) &= f(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

kjer je  $K_c$  elastični modul opne/tanke plošče. Ker tega ne poznamo se bomo zadovoljili z rešitvijo  $f(x, y) \approx -K_c \zeta(x, y)$ , saj  $f(x, y)$  prav tako reši povprečje, vendar ne kot posledico elastičnosti, ampak kot posledica minimizacije površine ob zunanji obremenitvi. V brezdimenzijski obliki bomo rekli kar  $F_z(x, y) = \rho(x, y)$ , tj. porazdelitev mase opne. Naša enačbo bo torej

$$\nabla^2 \zeta(x, y) = \rho(x, y).$$

Prednost uporabe Fourierove transformacije je ta, da diferencialne enačbe v dualnem prostoru (Four. prostor) postanejo algebrajske, ki pa jih lažje rešimo. Žal pa take metode lahko uporabimo zgolj na lepih geometrijah.

K sreči je druga naloga analogna. Poiskati moramo temperaturni profil valja v stacionarnem stanju, kjer sta osnovni ploskvi na stalni temperaturi  $T_1$ , plašč pa na stalni temperaturi  $T_2$ . Problem ima cilindrično rotacijsko simetrijo. Reševati moramo

$$\nabla^2 T(x, y) = g(x, y), \quad g(x, y) = 0.$$

Formalno je to Laplaceova enačba, vendar nehomogeni Dirichletovi robni pogoji poskrbijo, da  $g(x, y) \neq 0$  za  $(x, y) \in \partial\mathcal{A}$ . Tako imamo spet Poissonovo enačbo s homogenimi Dirichletovimi robnimi pogoji z  $g(x, y)$

$$g(x, y) = \begin{cases} -N^2, & \text{ko } y = 0, \\ -N^2, & \text{ko } y = 1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Tu smo predpostavili, da je  $\mathcal{A} = [0, 1] \times [0, 1]$  in da ga razrežemo na  $N$  kosov v obeh smereh. V obeh primerih se poslužimo (hitre) sinusne transformacije. Vendar jo za valj lahko uporabimo samo v osi cilindrične simetrije: v radialni smeri so lastne rešitve namreč Besselove funkcije. Po analogiji za tudi tu v radialni smeri rešujemo tridiagonalen sistem, ki odvod v radialni smeri aproksimira s končnimi diferencami. Relevantni del Laplaceovega operatorja se zapiše kot

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 + \partial_z^2,$$

če prvi odvod aproksimiramo s simetrično prvo diferenco, dobimo

$$U_{\ell-1}^m \left(1 - \frac{h}{2r}\right) + U_{\ell+1}^m \left(1 + \frac{h}{2r}\right) + U_{\ell}^m (2 - 4 \cos(m\pi/N))$$

Za mnoge prostorske simetrije operatorja  $\nabla^2$  nastopajo trigonometrične funkcije med lastnimi, kar pomeni, da čeprav ne moremo narediti FFT v vseh smereh, ga lahko izvedemo vsaj v eni smeri, preostale pa pa nadomestimo lahko z diferencami. Žal pa je FFT omejena le na diferencialne enačbe nad lepimi domenami  $\mathcal{A}$  (tj. njihov rob je odsekoma raven).

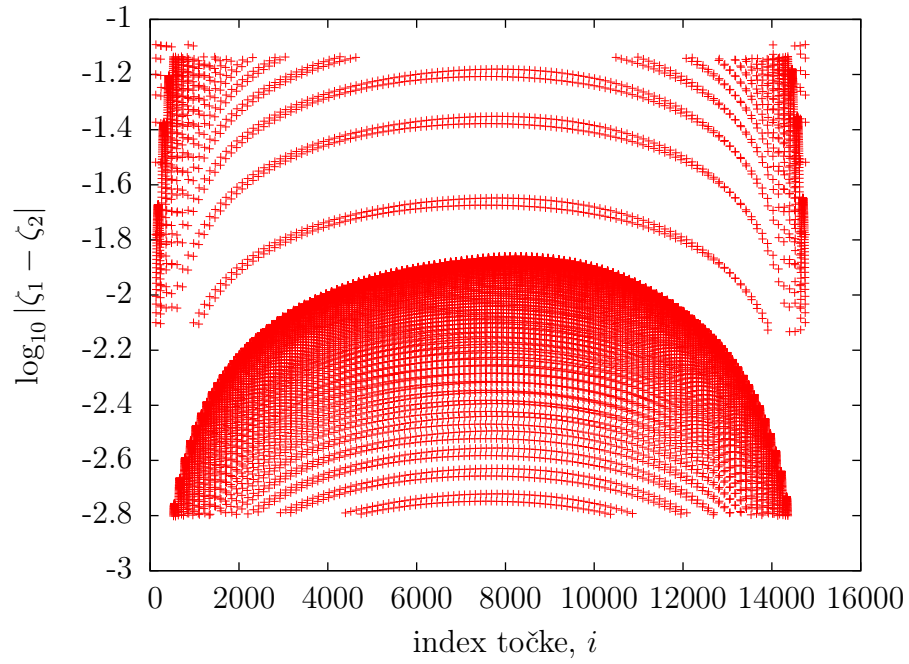
## 2 Rezultati

Za izračun sem kombiniral C++ in Octave, za prikaz pa Gnuplot in MathGL, da bi dosegel optimalno razmerje med hitrostjo računanja, izrisovanja in seveda hitrostjo programiranja.

Funkcijo gostote  $\rho(x, y)$  sem si zamislil kot

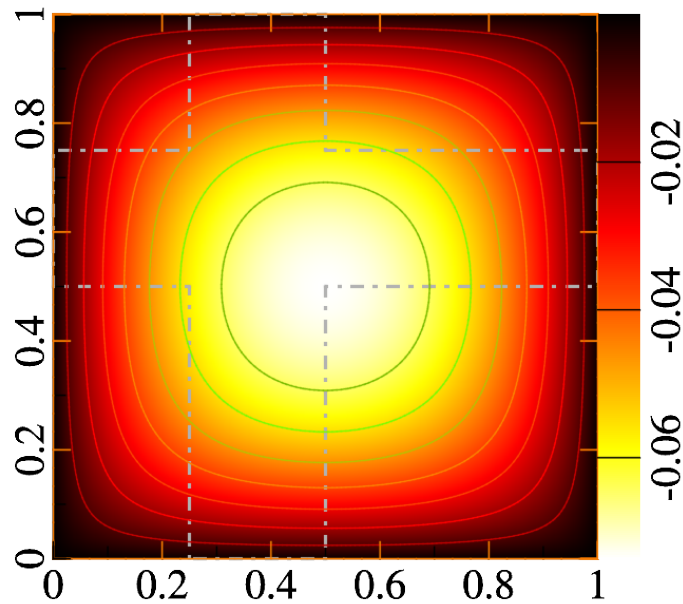
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ko nismo na križu,} \\ 1 + \Delta m, & \text{ko smo na križu,} \end{cases}$$

kjer je „križ“ lik iz šeste naloge. Homogena opna torej ustreza primeru  $\Delta m = 0$ . Rezultati so bili zadosti dobre že z  $N = 120$ . Primerjal sem samo 1D FFT in 2D FFT. Ugotovil sem, da 2D FFT metoda traja skoraj dvakrat dlje za  $N = 120$ , vendar pa da bolj natančne rezultate, kar lahko vidimo na sliki 1. Poglejmo si rezultate za nekaj različnih  $\Delta m$  na slikah 2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9.



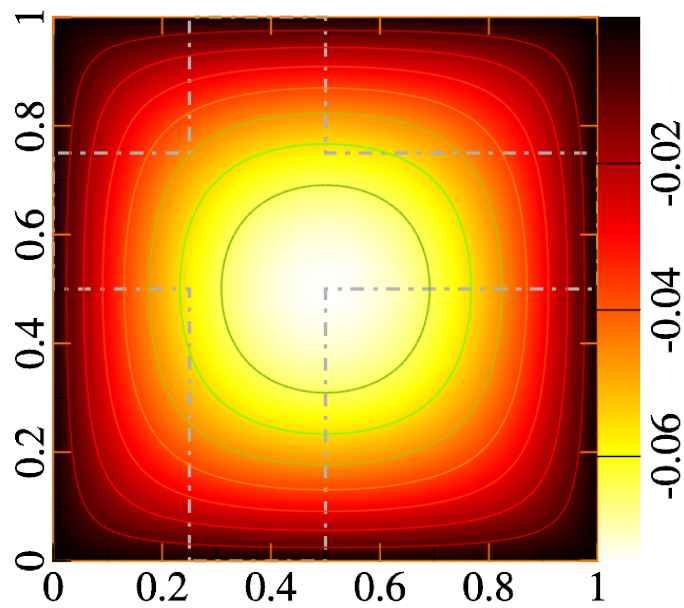
*Slika 1:* Ujemanje 1D in 2D FFT po decimalkah. Vidimo, da imamo ujemanje med eno in tremi decimalnimi mesti, kar ni dovolj dobro.

## Poves, $\Delta m = 0$



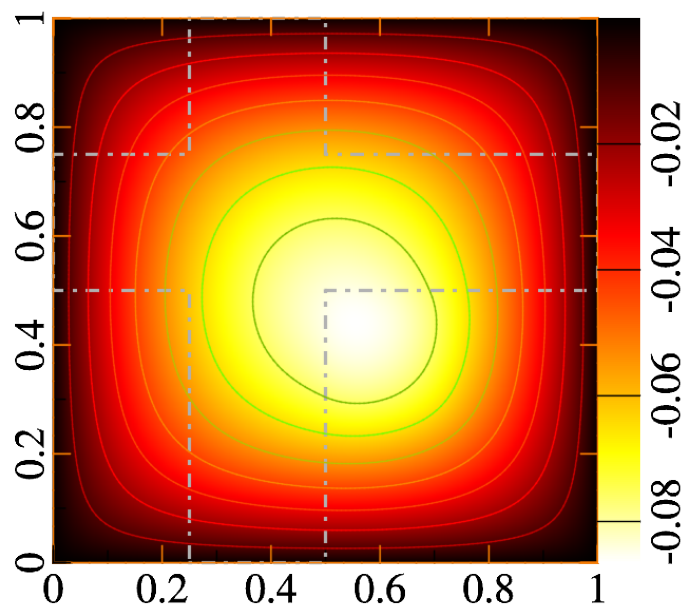
*Slika 2:* 2D FFT za homogeno opno.

Poves,  $\Delta m = 0$



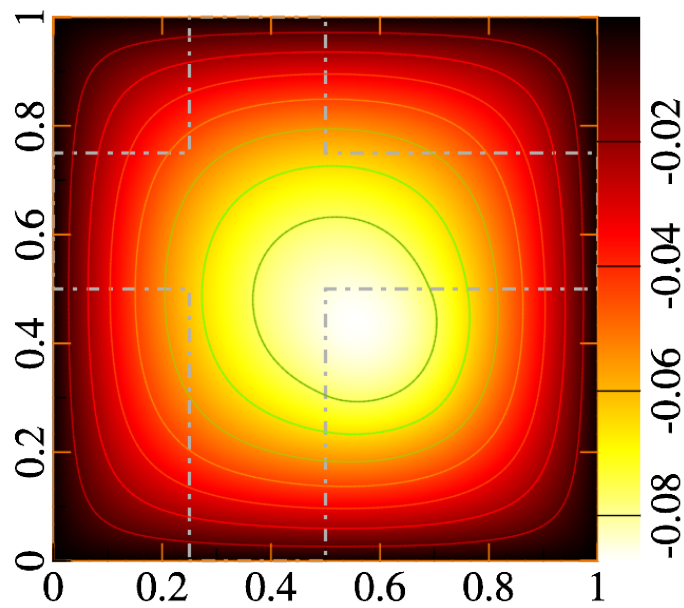
Slika 3: 1D FFT za homogeno opno.

Poves,  $\Delta m = 1$



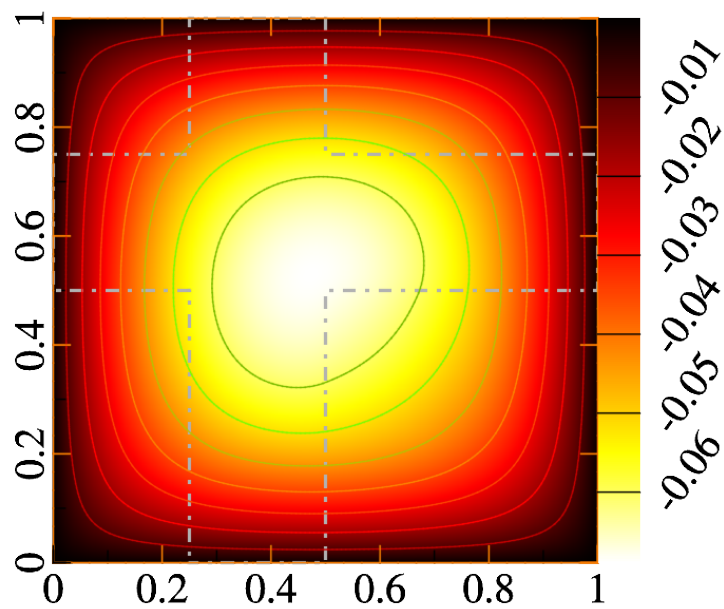
Slika 4: 2D FFT za opno, katere „križ“ ima dvakratno maso.

# Poves, $\Delta m = 1$



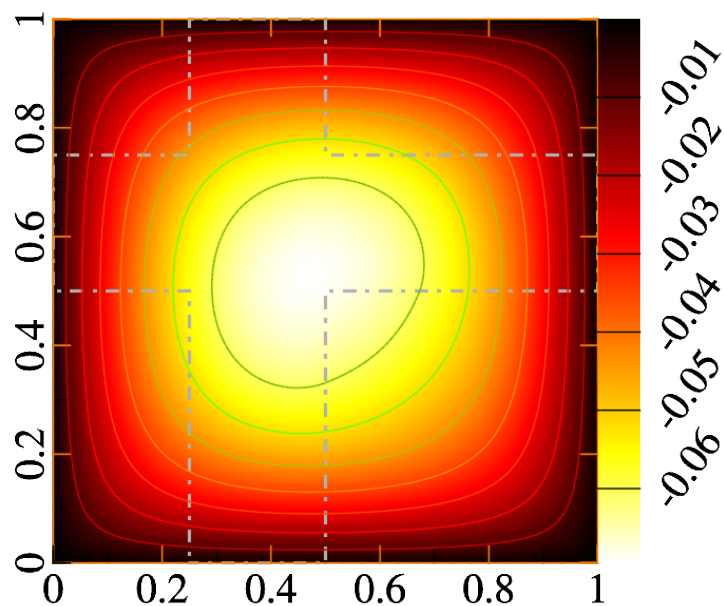
Slika 5: Ista situacija kot na sliki 4, le da imamo 1D FFT.

# Poves, $\Delta m = -0.5$



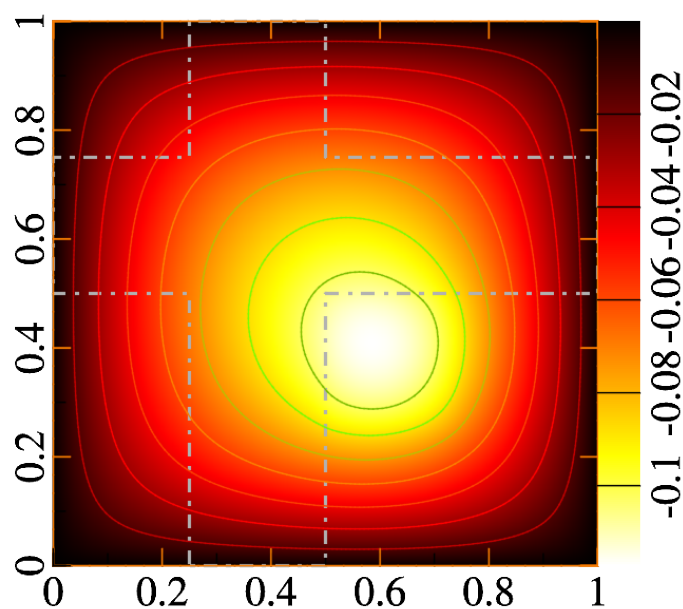
Slika 6: 2D FFT za opno, katere „križ“ tehta pol toliko, kot preostali del.

## Poves, $\Delta m = -0.5$



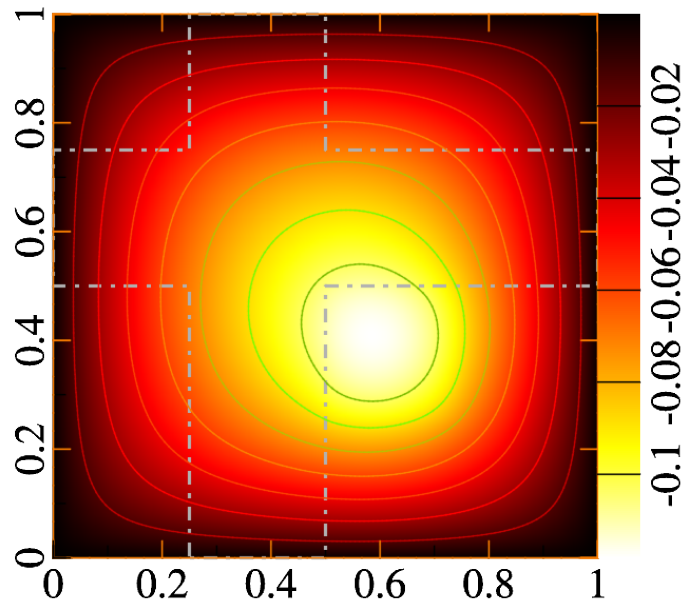
Slika 7: 1D FFT za opno, katere „križ” tehta pol toliko, kot preostali del.

## Poves, $\Delta m = 3$



Slika 8: 2D FFT za opno, katere „križ” tehta trikrat toliko, kot preostanek.

# Poves, $\Delta m = 3$



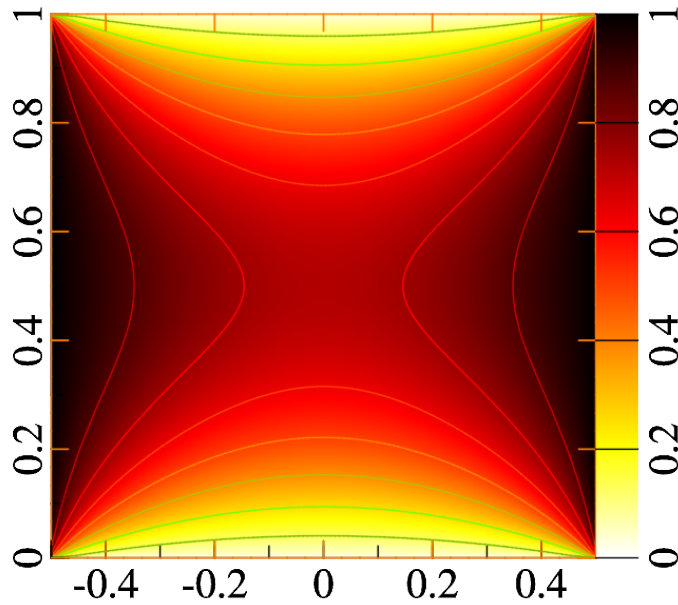
Slika 9: 1D FFT primerjava za prejšnjo sliko (tj. sliko 8).

Ni velike rezlike – seveda, na enem, oz. dveh decimalnih mestih, bosta barvna grafa za človeško oko nerazločljiva, kljub temu, da sem jih dodatno opremil z izohipsami.

## 2.1 Cilinder

Kot sem povedal v uvodu, imamo za cilinder na voljo le 1D FFT. Rezultat je na sliki 10.

# Profil valja

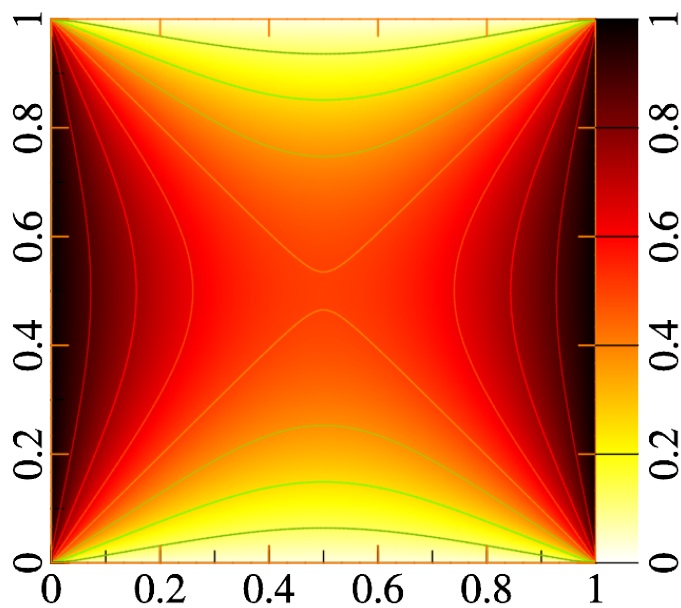


*Slika 10:* 1D FFT temperaturni profil cilindra.

Za primerjavo si poglejmo, kaj bi se zgodilo, če bi „valj“ razvili po sinusih – dobili temperaturni profil dolge palice s kvadratnim profilom. Na slikah 11 in 12 vidimo kako velika je razlika glede na valj (tj. sliko 10).

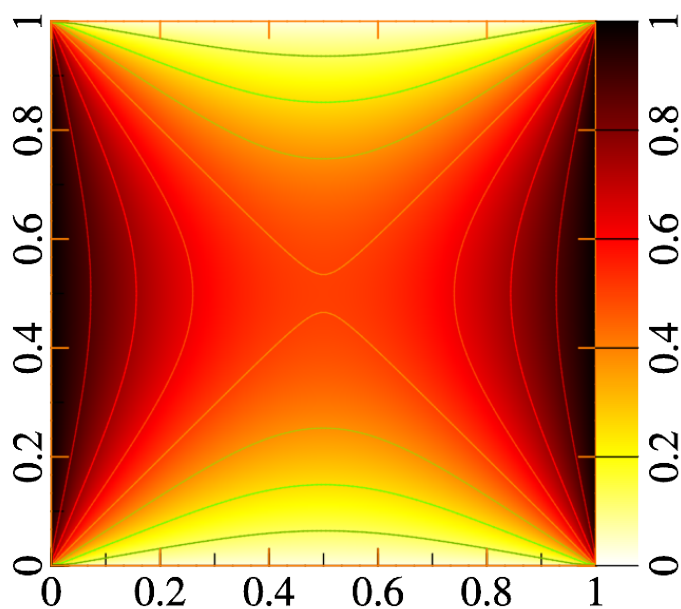


# Dolga palica



*Slika 11:* 1D FFT temperaturni profil dolge palice s kvadratnim profilom.

# Dolga palica



*Slika 12:* 2D FFT temperaturni profil dolge palice s kvadratnim profilom.

## Literatura

- [1] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 2007
- [2] R. Podgornik, *Mehanika kontinuumov*, 2007, <http://www-f1.ijs.si/~rudi/lectures/mk-1.9.pdf>