

1. naloga – Metoda maksimalne entropije

Jože Zobec

1 Uvod

V tej nalogi se bomo posvetili prilagajanju modelske funkcije na frekvenčni spekter. Poznamo časovno odvisen odziv. Prek diskretne Fourierove transformacije dobimo frekvenčni spekter. Zaradi eksperimentalnih in numeričnih defektov je ta spekter zašumljen. Naš cilj je zmanjšati šum in ojačati signal. To storimo s prilagajanjem modelske funkcije na spekter. Prilagajanje ne poteka po metodi najmanjših kvadratov, je pa z njo intimno povezana. To je tako imenovana avtoregresijska metoda [1, str. 302].

Avtoregresijski model je rekurzijska zveza

$$x(t) = x_t = - \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

kjer je x_t časovno odvisen signal, ε_t pa šum. Koeficienti a_i so v splošnem lahko kompleksni. Koeficiente a_i lahko določimo na različne načine – enolično jih izračunamo glede na avtokorelacijsko ali kovariančno matriko z Levinson-Durbinovo metodo, lahko pa jih določimo tudi z maksimiziranjem entropije po Burgovi metodi [1].

Spekter dobimo prek karakterističnega polinoma avtoregresijskega modela, p_{AR} :

$$p_{AR}(w) = w^p + \sum_{i=1}^p a_i w^{p-i} = \prod_{i=1}^p (w - z_i), \quad (2)$$

kjer so z_i ničle tega polinoma, ki jih imenujemo tudi resonance avtoregresijskega modela. Spektralno gostoto dobimo kot

$$P(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{|p_{AR}(\exp(2\pi i \nu / N))|^2}, \quad \sigma_\varepsilon^2 = \text{konst.}, \quad (3)$$

izpeljava je v [1, str. 308-9]. Predpostavki sta, da je spekter stacionaren in da je ε_t beli šum z varianco σ_ε^2 . Ker predpostavimo, da je ε_t beli šum z maksimalno varianco se ta metoda imenuje metoda maksimalne entropije (ni ista metoda maksimalne entropije, s katero izračunamo koeficiente a_i). Vse „dobre“ resonance (torej tiste, ki nosijo informacijo), so znotraj enotske krožnice, resonance, ki pa predstavljajo šum, so zunaj enotske krožnice. Kadar imamo vse koeficiente znotraj enotske krožnice, pravimo da je naš model stabilen.

Burgov algoritem vrne koeficiente stabilnega modela, tj. so vse resonance znotraj enotskega kroga že po sami konstrukciji metode. V primeru, da je katera izmed resonanc večja od 1, jo popravimo $z_i \rightarrow \hat{z}_i = z_i / |z_i|$ [1, str. 305], pri čemer s tem ne spremenimo faze.

Glavna prednost avtoregresijskih modelov je ta, da za izračun spektra ne potrebujemo Fourierove transformacije, ki ima $\mathcal{O}(N \log N)$, ampak zadošča zgolj izračun avtokorelacijskih koeficientov, ki imajo zahtevnost $\mathcal{O}(p^2)$. Ker je $p \ll N$ se to izplača, saj povečini $p < 40$ popolnoma zadošča [1, str. 309]. Poleg tega s tem lahko poiščemo glavne resonance (ki nastopajo v konjugiranih parih) in zaradi rekurzijske narave koeficientov, tudi napovemo časovni potek, ki bo sledil. To naredimo kar po enačbi (1), tj.

$$x_{t+1} = - \sum_{i=1}^p a_i x_{t-i+1} \pm \sigma_\varepsilon, \quad (4)$$

kjer pa žal napake ne poznamo, lahko pa jo ocenimo z varianco od prej, tj. σ_ε^2 .

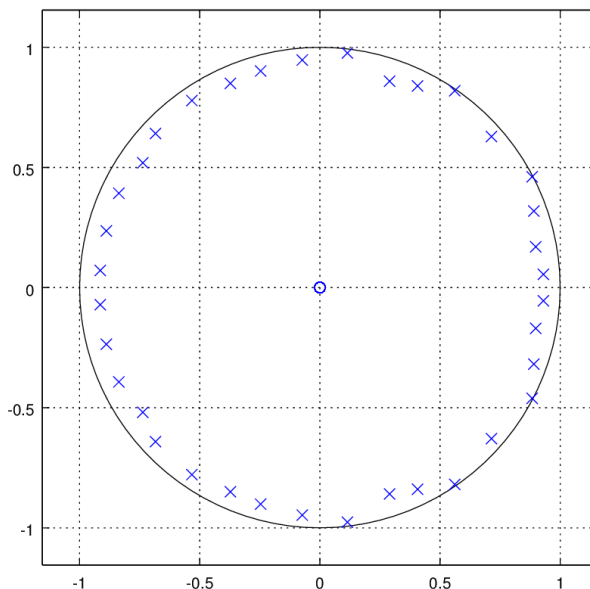
2 Rezultati

Za izračun a_i sem uporabil sem svobodno različico iz paketa `tssa`, ki spada v `Octave Forge`, natančneje funkcijo `lattice`.

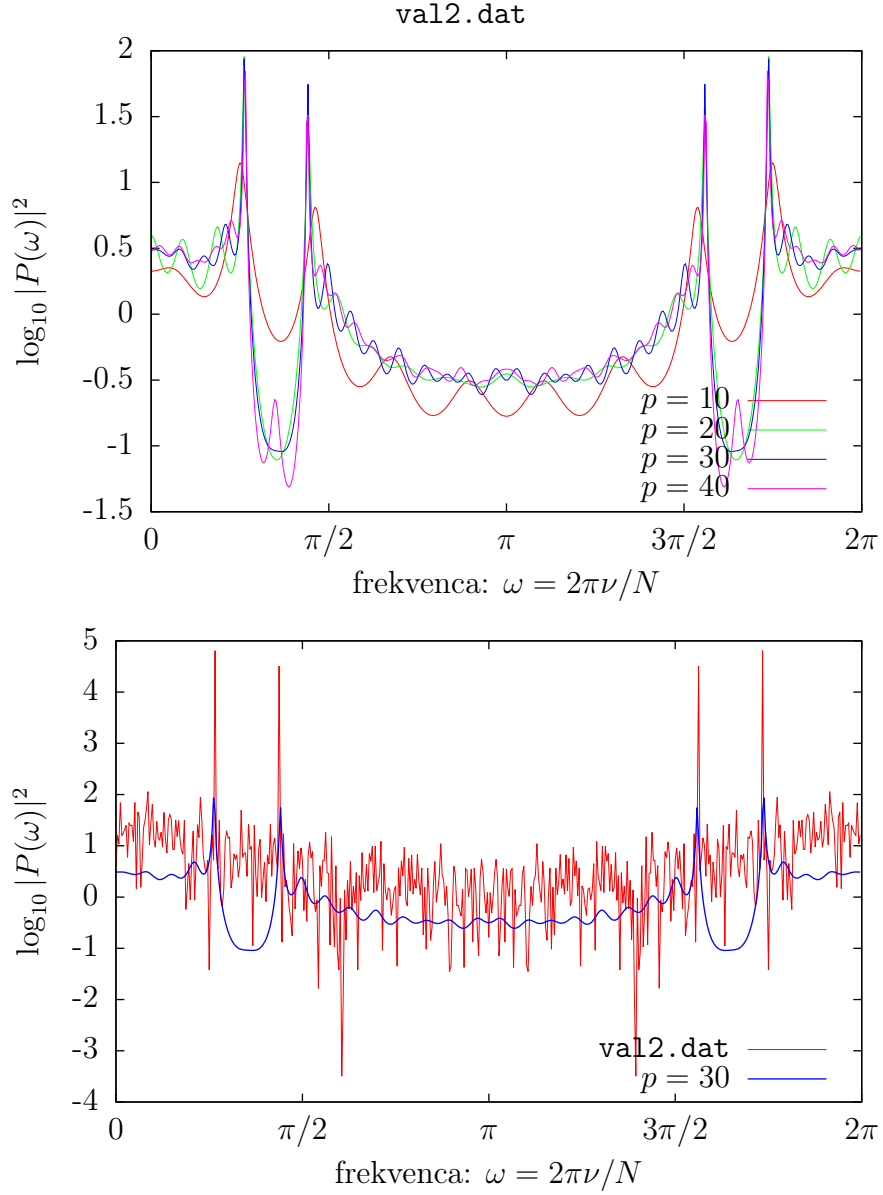
Izračunal sem tudi σ_ε^2 . To količino sem uporabil za Wienerjev filter in tudi za avtoregresijske spektre, kot je v en. (3).

Rezultati so na slikah 2, 3 in 4.

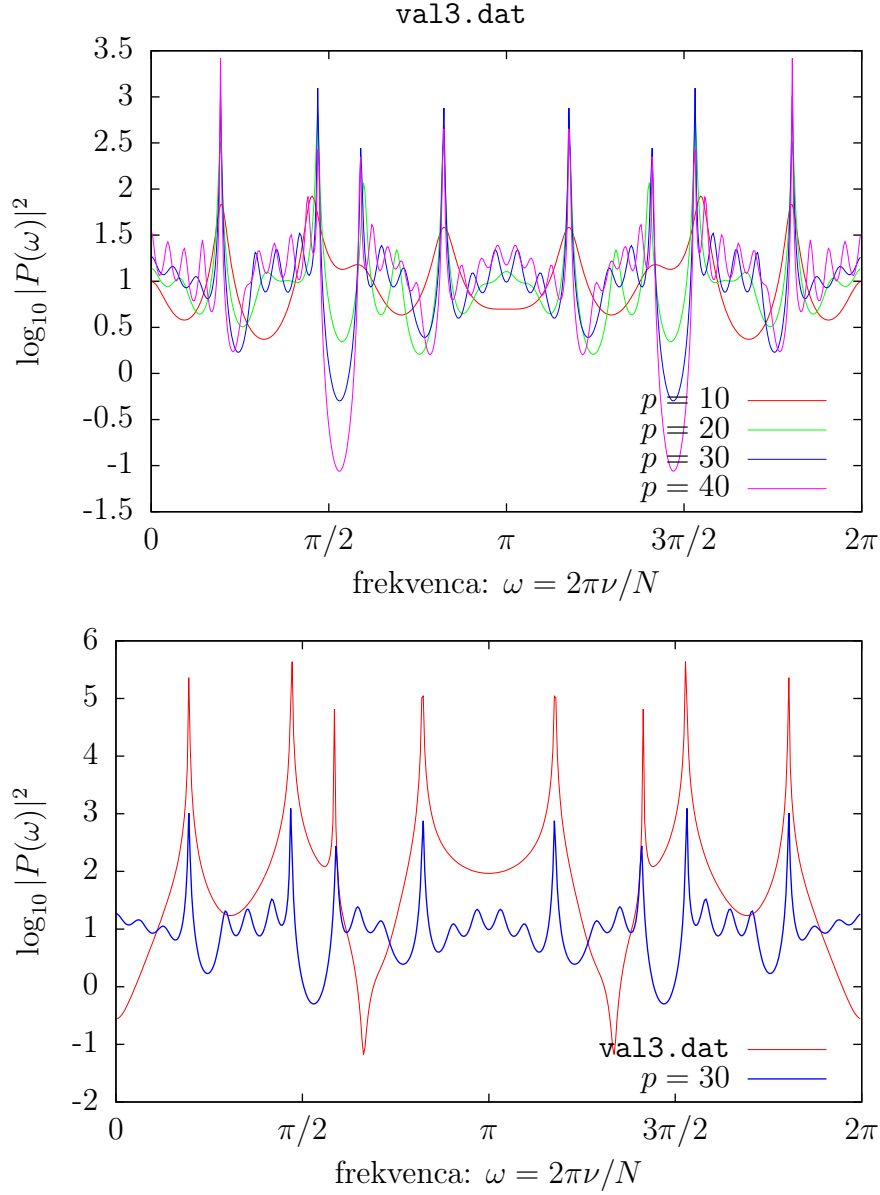
Preveril sem tudi, če so poli postavljeni znotraj enotskega kroga. Burgova metoda koeficiente a_i res določi tako, da so vse ničle z_i znotraj enotske krožnice. Primer za `co2.dat` je na sliki 1.



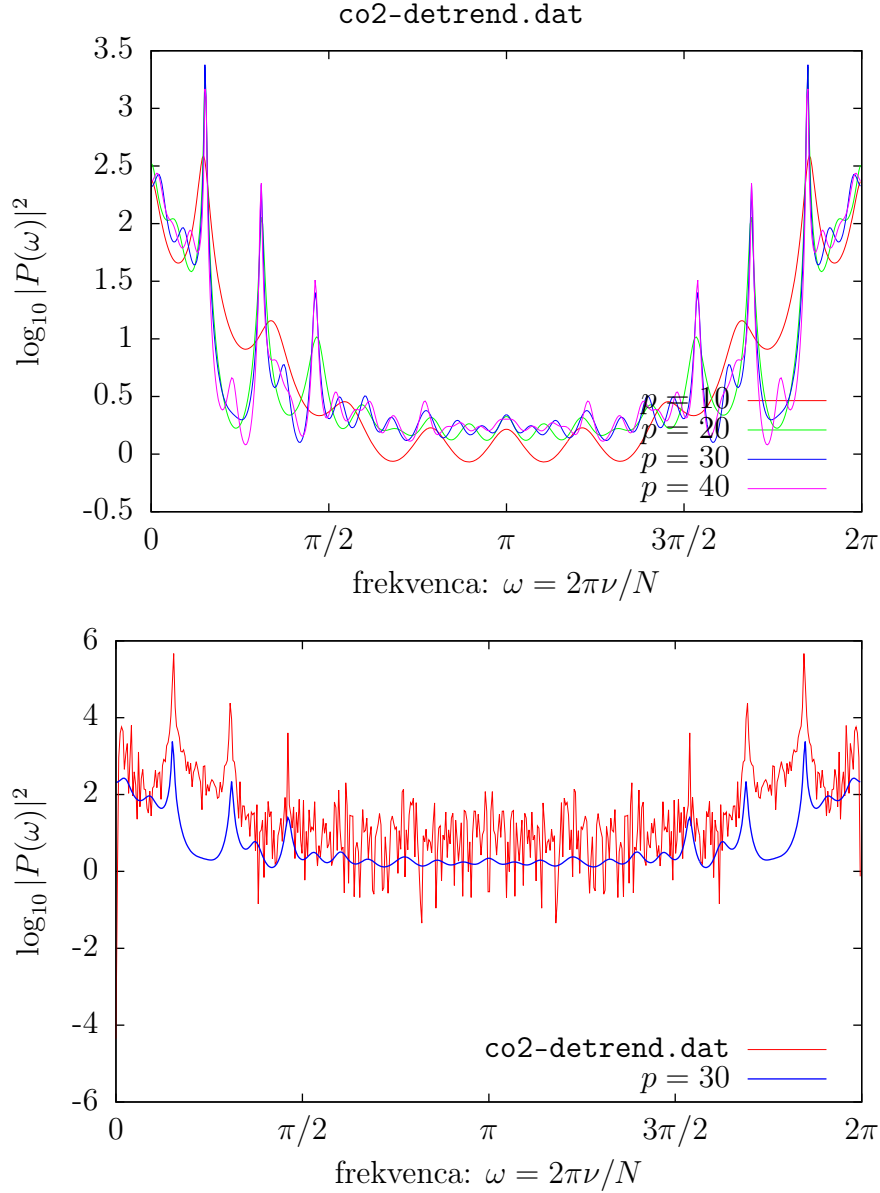
Slika 1: Ničle karakterističnega polinoma na kompleksni ravnini (tj. abscisa predstavlja realno komponento, ordinata pa imaginarno). Graf je narejen za primer $p = 36$, `co2-detrend.dat`. Iz argumenta tega kompleksnega števila lahko preberemo, kateri resonanci slike 4 ustreza. Poli, ki so najbližji enotski krožnici so naše resonance.



Slika 2: Vidimo, da je $p = 10$ premalo, saj resonanc ne doseže dovolj natančno, prav tako pa so tudi preveč razmazane. Na spodnji sliki vidimo, da je šum avtoregresijskega spektra bistveno manjši, vendar so zato tudi vrhovi resonanc na ta račun nižji. Pravi spekter je pomnožen z Wienerjevim filtrom.



Slika 3: V tem primeru je $p = 10$ boljši za opis šuma, vendar še vedno ne more dobro opisati vrhov. Po drugi strani $p = 30$ in $p = 40$ dobro opišeta vrhove, vendar dobimo defekte in nastane umeten šum. Ker so vrhovi pomembnejši od šuma, je smiselno dati prednost rezultatom, kjer $p \geq 20$. Pravi spekter je pomnožen z Wienerjevim filtrom.

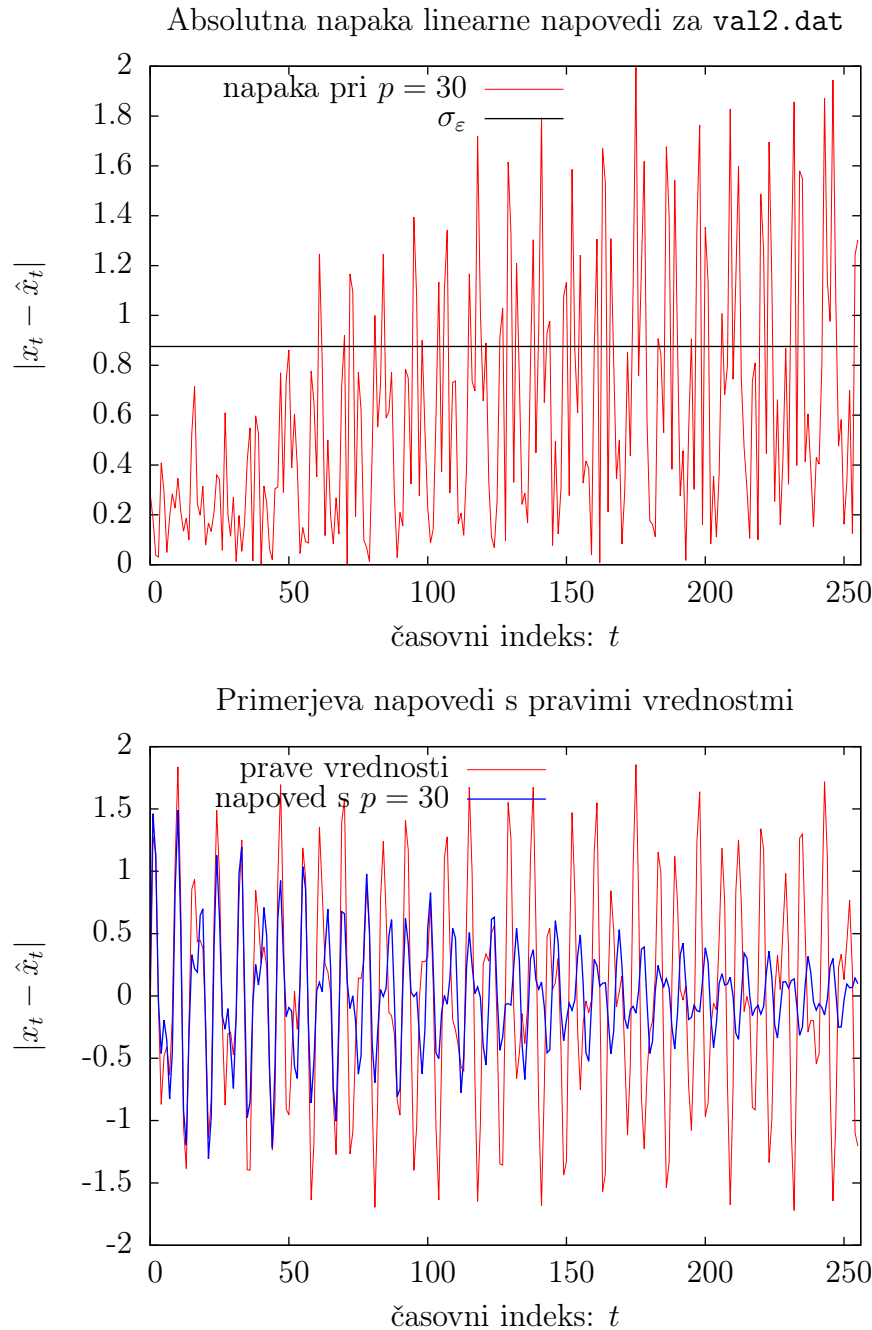


Slika 4: Za odstranitev trenda sem uporabljal različne polinome. Najbolje se je obnesel polinom petega reda. Kot vidimo, so rezultati za $p = 30$ solidni in primerljivi s sliko 2. Pravi spekter je pomnožen v Wienerjevem filtrom. Krožna rekvenca ω je enaka argumentu kompleksnega števila, pri katerem dobimo pol na sliki 1.

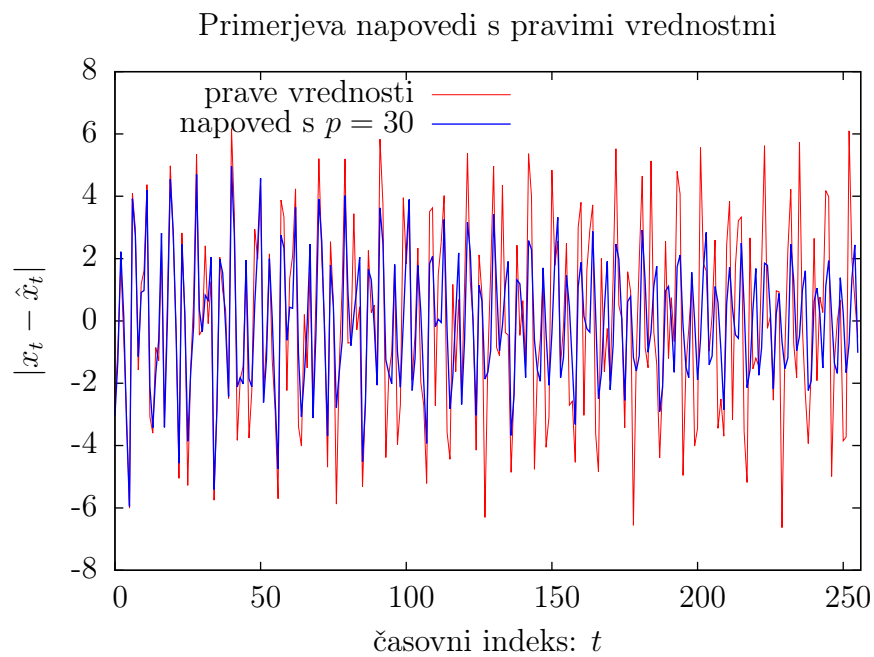
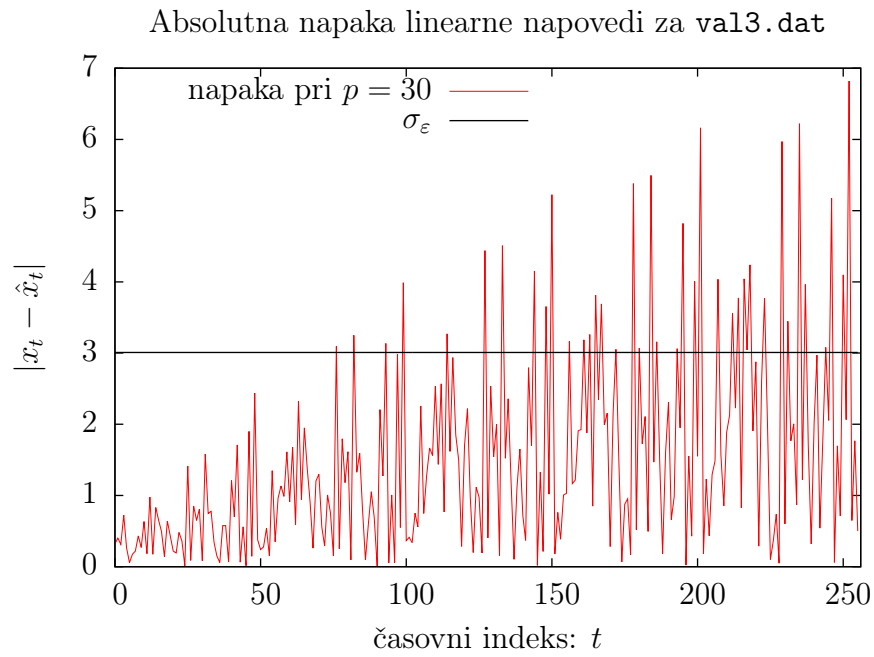
Sodeč po teh rezultatih je težko reči, kaj je bolje. Odvisno od situacije. Če želimo zgolj poiskati resonance je to verjetno najbolje narediti z avtoregresijo, če pa nas zanima spekter je za to verjetno bolje narediti z eksaktno Fourierjevo transformacijo. Prav tako, če bi radi manj zašumljene podatke je spet odvisno od situacije. Če je število resonanc majhno se splača avtoregresija, sicer pa Wienerjev filter.

2.1 Linearna napoved

Po enačbi (4) uporabimo prvo polovico signala za podatke, na podlagi katerih izračunamo avtoregresijske koeficiente, drugo polovico pa za kontrolo. Napako sem ocenil iz variance šuma, σ_ε^2 , katere oceno sem določil s pomočjo Burgove metode. Opazil sem, da vsem grafom amplitude pojenjajo. To je zato, ker za vse pole velja $|z_i| < 1$, tj. ni nobenega, ki bi bil $|z_i| = 1$.

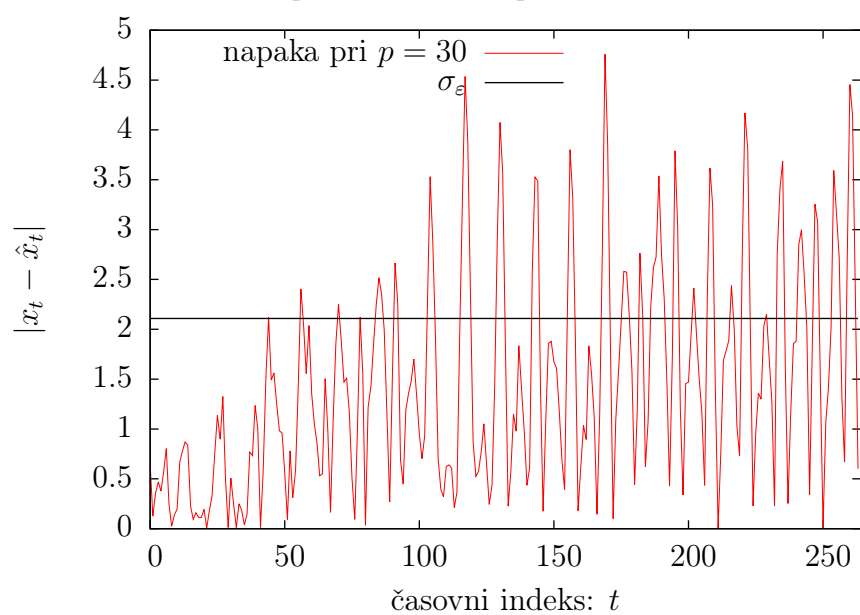


Slika 5: Na začetku so rezultati v fazi in znotraj pričakovane napake, vendar se že po kratkem času amplituda zmanjša in pademo iz faze. Znotraj napake ostanemo ves čas šele pri $p = 136$.

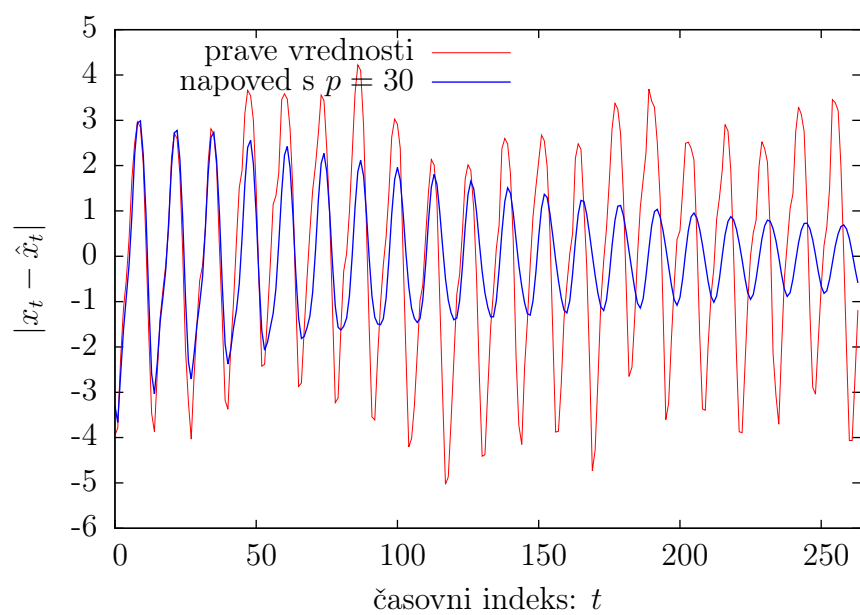


Slika 6: Tu je signal dlje časa znotran pričakovane napake. Tudi v fazi smo dlje. To je verjetno zato, ker spektralna gostota signala manj zašumljena.

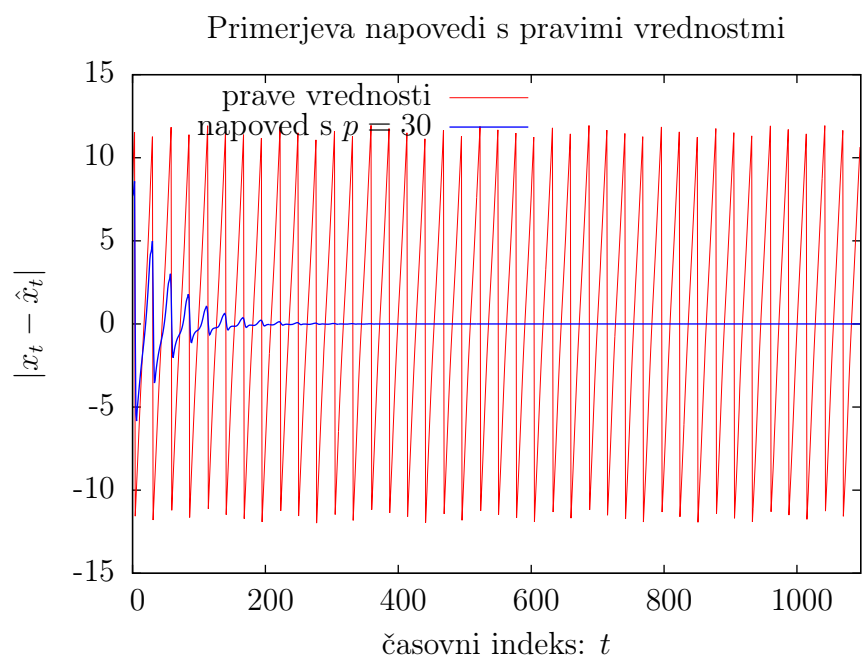
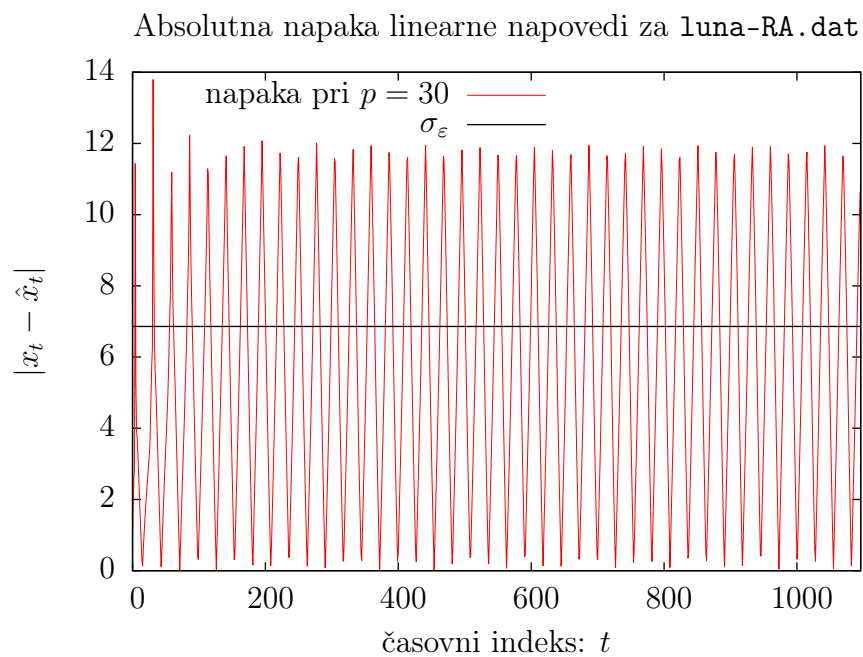
Absolutna napaka linearne napovedi za co2-detrend.dat



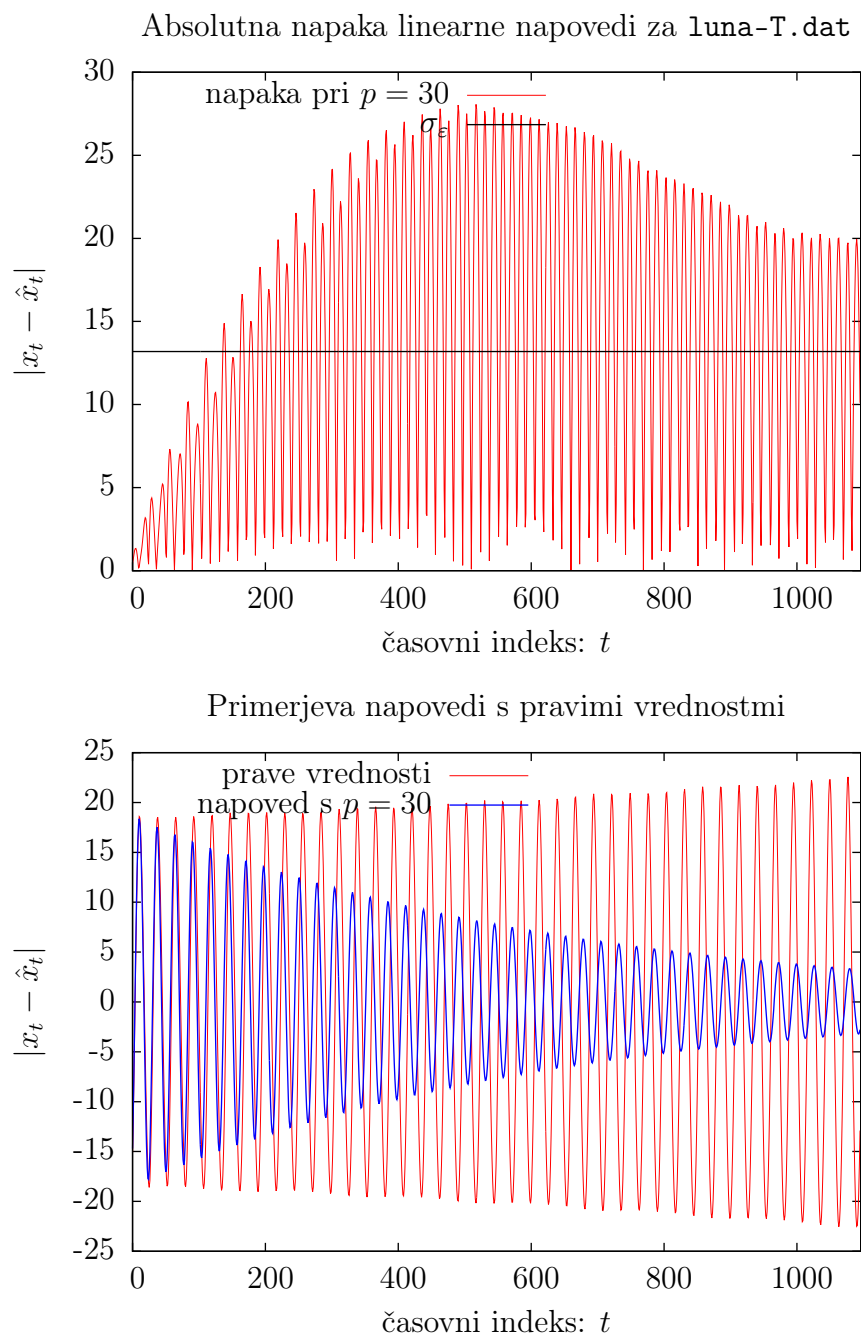
Primerjeva napovedi s pravimi vrednostmi



Slika 7: Tu napoved ostane najdlje, vendar amplituda kar hitro preneha slediti spremembam.

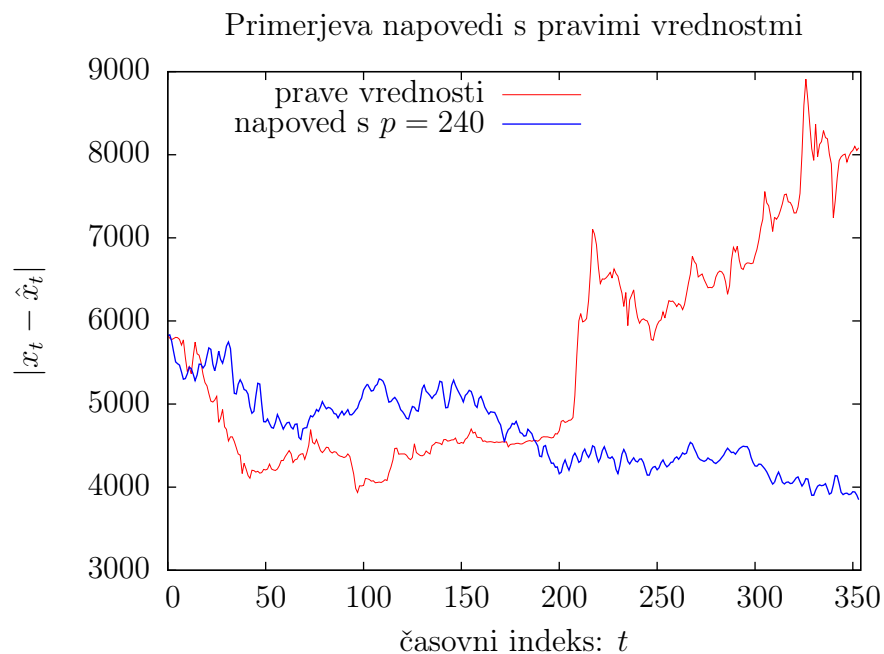
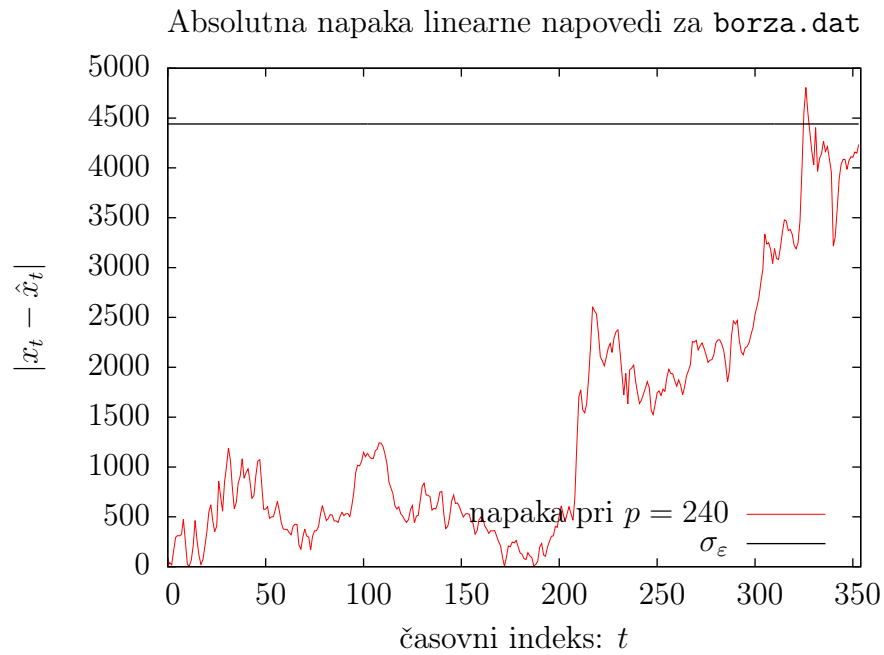


Slika 8: Da bi lahko pravilno izračunal koeficiente sem moral podatke centrirati, tako da sem odštel povprečje. Kljub temu ne dobimo dobrih rezultatov.



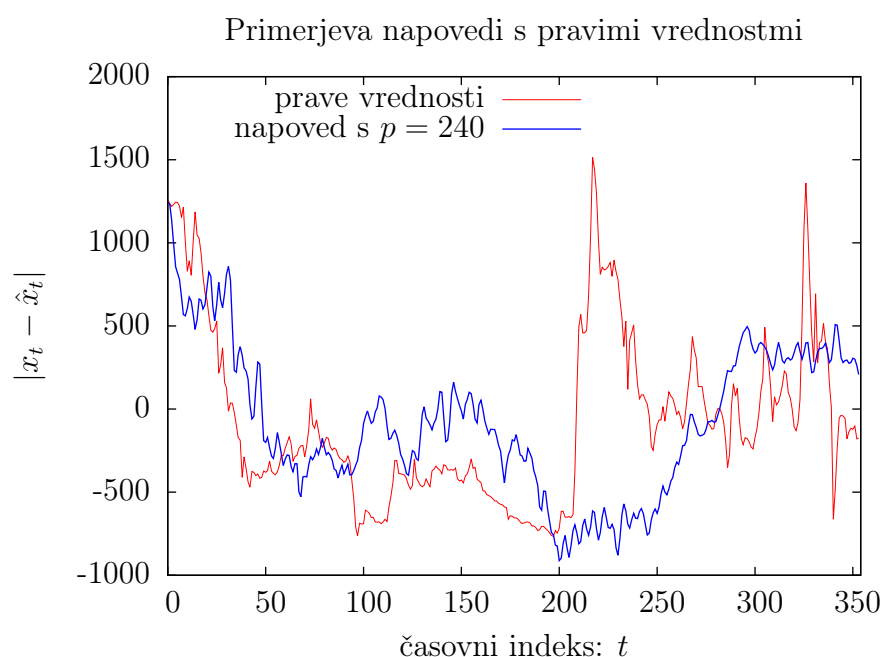
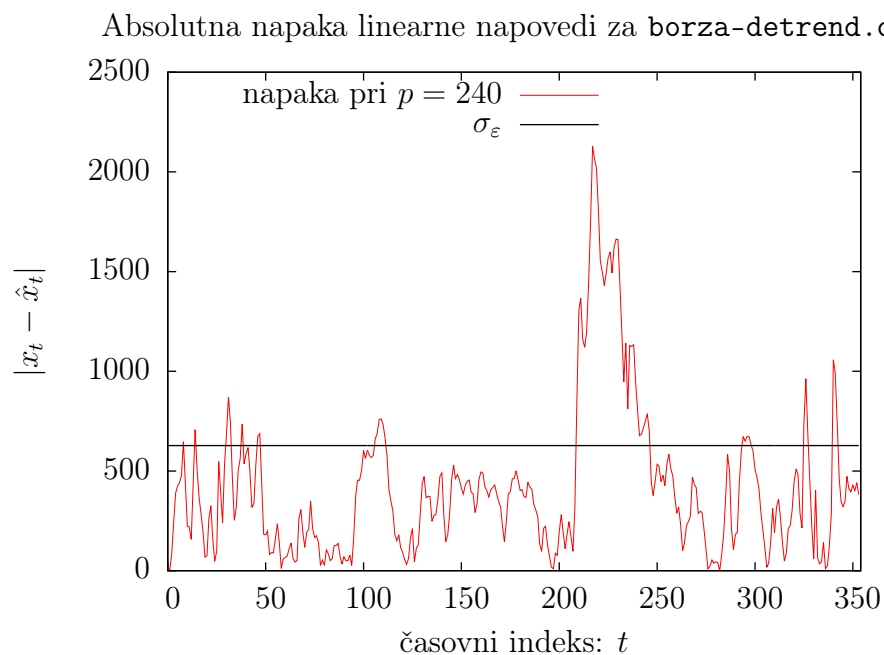
Slika 9: Relativno hitro pademo iz faze, amplituda pada dokaj hitro.

Za opazovanje borze je tudi „šum“ lahko zelo pomemben, zato sem vzel veliko polov, kot tudi kažeta sliki 10 in 11.



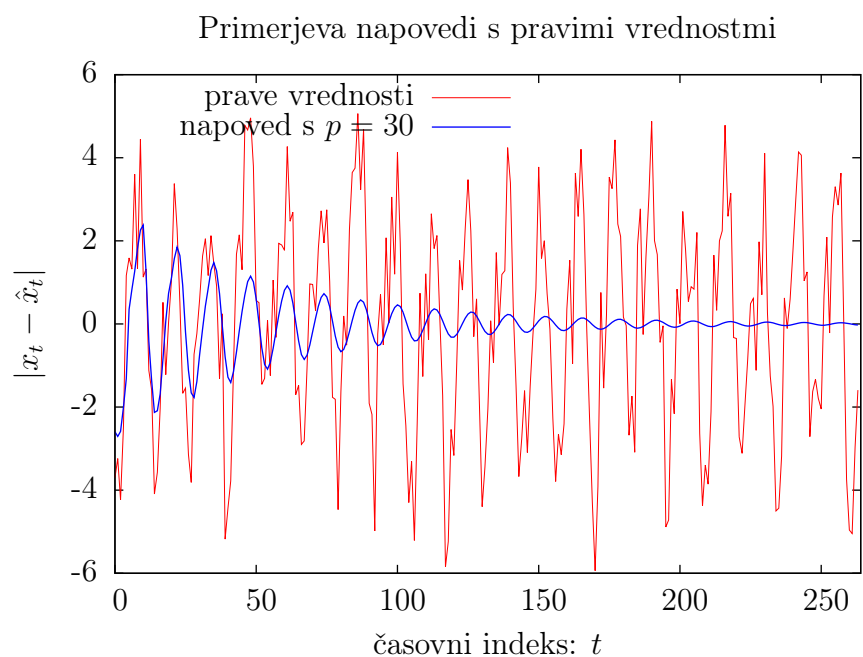
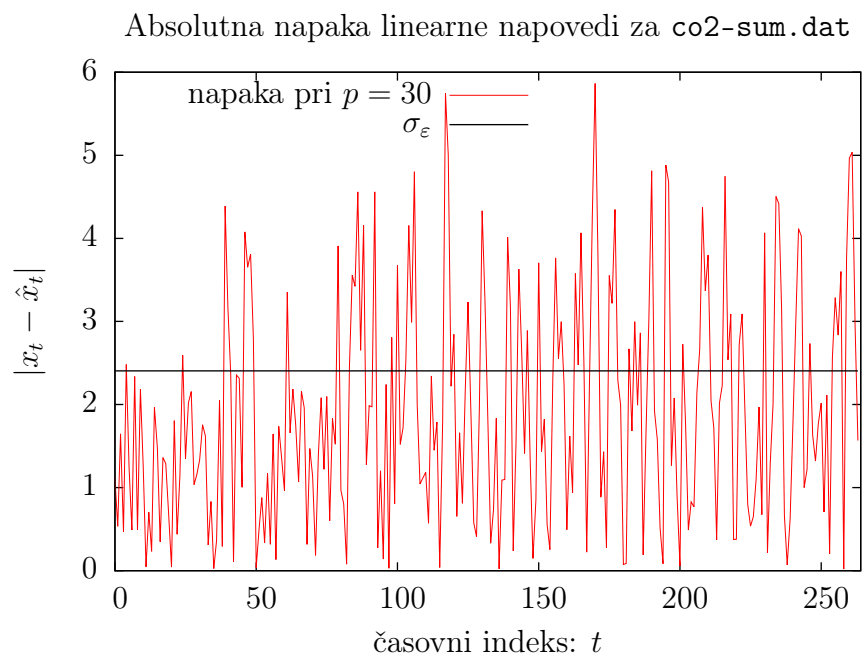
Slika 10: Napaka je ogromna, zato so tudi meritve videti točne, vendar naj vas graf ne zavede. Avtoregresija tu ni primerna, tudi trend ki ga napoveduje je zgrešen – borza je dosegla rast, avtoregresija pa kljub 240-tim koeficientom napoveduje padec.

Ker je na borzi avtoregresija tako slabo delovala, sem se odločil, da bom tudi tukaj skušal odstraniti trend – uporabil sem polinom tretje stopnje.

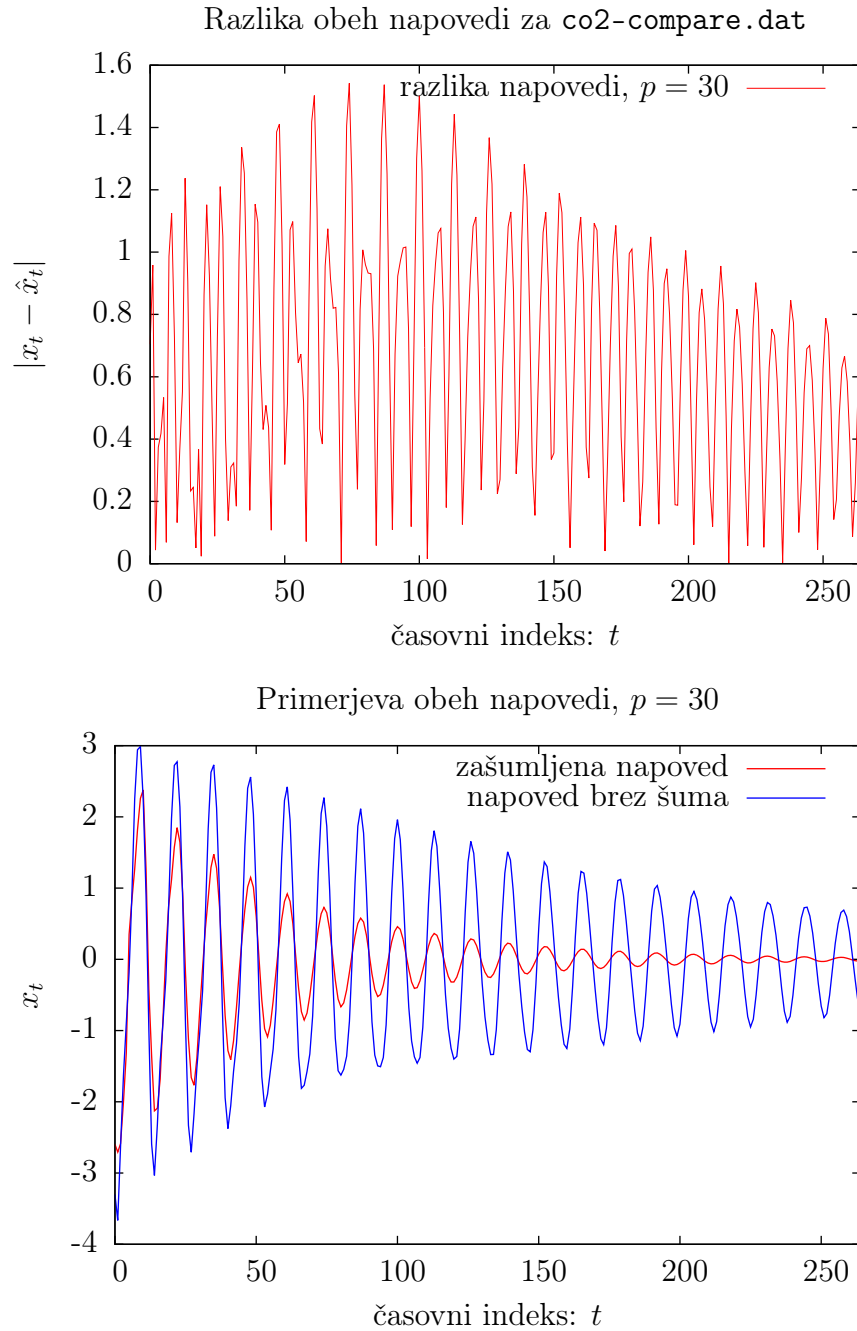


Slika 11: Napaka je tu bistveno manjša, vendar še vedno relativno velika. V svetu ekonomije so zelo pomembni nenadni skoki in avtoregresija jih žal ni pravilno opisala, kljub temu, da so rezultati boljši, kot tisti s slike 10.

Da bi preveril vpliv šuma na linearno napoved, sem na podake, ki so se najboljše ujemali, to je datoteko `co2-detrend.dat`, natrosil beli šum z varianco $\sigma_\varepsilon^2 = 2$.



Slika 12: Glede na sliko 7 tu amplituda pada veliko hitreje. Varianco šuma je algoritem kar dobro zadel.



Slika 13: Vidimo, da se napovedi razlikujeta samo po amplitudi. Fazi se ujemata do konca. To je zato, ker ima beli šum konstanten spekter, zaradi česar ne dodajamo novih polov, torej tak pristop dosti bolj „imun“ na razne tresljaje.

Literatura

- [1] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)