Modelska analiza I
2011/12
11. naloga – Izboljšani populacijski modeli

Model mali svet: pri preprostih populacijskih modelih smo obravnavali populacijo kot homogeno celoto, ki jo je mogoče opisati z eno samo funkcijo $N(t)$. Vključitev krajevne odvisnosti vodi do modelov s parcialnimi enačbami, katerih prototip je večinoma difuzijska enačba.

Za prenos neke lastnosti po populaciji (logistična enačba, model epidemije) pa je bolj kot sama krajevna porazdelitev populacije pomembna njena topologija, torej sistem povezav ali soseščin. Pomen povezav se najpreprosteje kaže v ugotovitvi, da je svet "majhen" – da je mogoče po verigi znancev doseči poljubno izbrano osebo s presenetljivo majhnim številom korakov. Watts in Strogatz[1] sta sestavila preprost model: v množici N elementov sta najprej uvedla same povezave kratkega dosega. Nato sta stohastično nadomeščala te bližnje vezi z vezmi med naključno izbranimi pari v populaciji – razumljivo, da so bile te nove povezave večinoma dolgega dosega. Z naraščajočo verjetnostjo za prevezavo prehajamo torej od pretežno lokalno urejenih sistemov v sisteme, ki so povezani slučajno. Pokaže se, da obvladujeta obnašanje sistema dve neodvisni lastnosti. *Povprečna razdalja* močno upade že pri majhnem številu povezav dolgega dosega. *Gručavost*, ki jo definiramo kot verjetnost povezav med trojčki (ali je sosed mojega soseda tudi moj sosed?), pa se zmanjša šele, ko dosežemo že skoraj stohastično prevezano množico.

1. Preveri omenjeno odvisnost. Na različno urejenih sistemih preskusi potek logistične enačbe (prenašanje vica).

Sekularni model človeške populacije: rast človeške populacije je v zadnjem času tako hitra, da je veljavnost standardnih (eksponentnih) modelov ocitno omejena le na kratka obdobja. S. P. Kapica[2] je, po starejših zgledih, razvil model, ki skuša zaobjeti večino človeške zgodovine. Iz teorije nelinearnih sistemov je mogoče povzeti, da mora biti model, ki opisuje vsoto množice lokalnih procesov, renormalizabilen ali sebi podoben. Tak model ne vsebuje notranjih parametrov, ki določajo merilo časa in populacije, torej mora biti potenčne vrste

$$N = C(T_1 - T)^{\alpha}.$$

Take modele so izdelali že v 60-tih letih in po prilagajanju podatkov dobili $N = 2 \cdot 10^{11}/(2025 - T)$. Model očitno predvideva katastrofo v bližnji prihodnosti. Kapica je pokazal, da se z majhnim popravkom k sebipodobnosti ta singularnost razreši in pripelje do modelov obvladljive populacije

$$\dot{n} = K \sin^2 \frac{n}{K} + \frac{1}{K},$$

kjer je $n = \frac{N}{K}$ brezdimenzijska velikost populacije, odvod pa je po brezdimenzijskem času $t = (T - T_0)/\tau$.

2. Z metodo najmanjših kvadratov določi najboljši model po Kapici in primerjaj z veljavnostjo eksponentnih modelov. Datoteka podatkov je `zgodovina.dat`.

3. Podobni renormalizabilni modeli se dajo izpeljati tudi za npr. velikost mest

$$U(R) = U_0 \frac{\ln U_0}{R + \ln U_0},$$

kjer je U število prebivalcev mesta in R njegov rang (katero po velikosti je). Bojda velja dobro za svetovna mesta, za lokalna (slovenska) pa le asimptotično. Preskusi! Podatke najdeš v datotekah `mestaSLO.dat` in `mestaZDA.dat`.

[1] G. B. Lubkin, Physics Today, september 1998, str. 17.
[2] S. P. Kapitza, Uspekhi Fizicheskikh Nauk 166 (1) (1996), str. 63-80.