

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



ODDELEK ZA FIZIKO

Modelska analiza, zaključna naloga

Orbite planeta v dvozvezdnem sistemu

AVTOR:

Jože Zobec, dipl. fiz. (UN)

MENTOR:

Dr. Simon Čopar,

SOMENTOR:

Prof. Dr. Alojzij F. Kodre

Navodilo

Razišči prostor krožnih orbit planeta okrog dvojne zvezde v približku zanemarljive mase planeta. Koliko parametrov ima model?

Ljubljana, 8. maj 2014

1 Razmislek

V približku zanemarljive mase planeta, je vsa dinamika ki jo potrebujemo vezana na gibanje planeta v časovno odvisnem zunanem potencialu (ki ga ustvarjata zvezdi) $V_{\odot}(\mathbf{r}, t)$. Hamiltonian celotnega sistema je

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{|\mathbf{p}_k|^2}{m_k} - \frac{\kappa}{4\pi} \sum_{k,\ell} \frac{m_k m_{\ell}}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{\ell}|}, \quad (1)$$

vektorje smo označili z mastnim tiskom.

1.1 Prosti parametri

Da preverimo število prostih parametrov moramo hamiltonko (1) pretvoriti v brezdimenzijsko obliko. Naj bo m_3 masa planeta, m_1 in m_2 pa naj bosta masi zvezde. Definirajmo brezdimenzijski masi

$$M_1 \equiv \frac{m_1}{m_3}, \quad M_2 \equiv \frac{m_2}{m_3}. \quad (2)$$

Nekaj svobode imamo še za to, kako bomo merili dolžine. Smiselno je, da bi merili v enotah oddaljenosti zvezd na začetku, tj. $\rho_0 = |\mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0)|$. Da bomo lahko naredili polno brezdimenzijsko transformacijo potrebujemo še skalo za čas. Merili ga bomo v enotah τ , ki je

$$\frac{1}{\tau^2} \equiv \frac{\kappa m_3}{4\pi \rho_0^3}.$$

Hamiltonian se potem glasi

$$H = \frac{\rho_0^2}{2m_3\tau^2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 \tau^2 / \rho_0^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \tau^2 / \rho_0^2 \right) - \frac{\kappa m_3^2}{4\pi \rho_0} \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|/\rho_0} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|/\rho_0} \right),$$

kjer lahko konstanto $\kappa m_3^2 / 4\pi \rho_0$ izrazimo s τ in dobimo $m_3 \rho_0^2 / \tau^2$. Sedaj uvedemo brezdimenzijske impulze in brezdimenzijske dolžine

$$\frac{\mathbf{p}}{m_3 \rho_0 / \tau} \mapsto \mathbf{p}, \quad \frac{\mathbf{r}}{\rho_0} \mapsto \mathbf{r}, \quad (3)$$

kar hamiltonian poenostavi v

$$H = \frac{m_3 \rho_0^2}{2\tau^2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \frac{m_3 \rho_0^2}{\tau^2} \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right).$$

Kar nam še preostane je, da uvedemo brezdimenzijsko transformacijo in energijo merimo v enotah $m_3 \rho_0^2 / \tau^2$, tj.

$$\frac{\tau^2}{\rho_0^2 m_3} H \mapsto H$$

in dobimo brezdimenzijski hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M_1} |\mathbf{p}_1|^2 + \frac{1}{M_2} |\mathbf{p}_2|^2 + |\mathbf{p}_3|^2 \right) - \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right). \quad (4)$$

Prosti parametri modela so M_1 , M_2 in pa začetni pogoji, ki jih je $2 \cdot 3d$, kjer je d število prostorskih dimenzij, ki so nam na voljo. Če se držimo vezi, da je oddaljenost med zvezdama na začetku 1, imamo en začetni pogoj manj¹.

Ta hamiltonian je čisto splošen za gibanje treh (ne nujno nebesnih) točkastih teles pod vplivom sile gravitacije. Da bodo zvezde res zvezde, si bomo za zgled vzeli res težak planet, Jupiter, ki je še vedno tisoč-krat lažji od našega Sonca. Kot smiselna se zato zdi omejitev $M_{1,2} \geq 1000$. Prav tako je smiselno, da so razdalje med zvezdama na začetku res 1.

1.2 Približek zanemarljive mase planeta

Hamiltonian (4) do sedaj eksaktno ohranja energijo. Vendar vidimo, da bo člen v potencialu, ki je sorazmeren z $M_1 M_2$ bistveno večji od členov, ki so sorazmerni zgolj z $M_{1,2}$ (mogoče za faktor 1000), saj sta M_1 in M_2 vsaj reda velikosti $\mathcal{O}(10^3)$. To pomeni, da planet ne bo bistveno vplival na spremembo gibalne količine zvezde,

$$d\mathbf{p}_{1,2} = \dot{\mathbf{p}}_{1,2} dt = \{\mathbf{p}_{1,2}, V\} dt \approx \left\{ \mathbf{p}_{1,2}, -\frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\} dt \quad (5)$$

Prav tako se zvezdi glede na planet premikata zelo počasi – efekt planeta bi bil viden šele po zelo dolgem času (po mnogih planetarnih obhodih), saj je sprememba $\mathbf{r}_{1,2}$ utežena z $1/M_{1,2}$. Sprememba koordinat je

$$d\mathbf{r}_{1,2} = \dot{\mathbf{r}}_{1,2} dt = \{\mathbf{r}_{1,2}, T\} dt = \left\{ \mathbf{r}_{1,2}, \frac{1}{2M_{1,2}} |\mathbf{p}_{1,2}|^2 \right\} dt. \quad (6)$$

Ker smo pri spremembi gibalne količine naredili napako, ki je bila reda $\mathcal{O}(10^3)$, je ta napaka sedaj samo $\mathcal{O}(10^{-6})$, torej smo vpliv planeta upravičeno zanemarili.

1.2.1 Orbiti zvezd

Orbiti zvezd, $\mathbf{r}_1(t)$ in $\mathbf{r}_2(t)$, v približku zanemarljive mase planeta, lahko izračunamo analitično brez uporabe numeričnih orodij. Iz Poissonovih oklepajev dobimo sledeče gibalne enačbe:

$$\dot{\mathbf{r}}_{1,2}(t) = \frac{\mathbf{p}_{1,2}(t)}{M_{1,2}} \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{1,2}(t) = \nabla_{1,2} \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \pm \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (8)$$

Da bomo to enačbo lahko rešili, uvedemo spremenljivki

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c &= M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{r}_* &= M_1 \mathbf{r}_1 - M_2 \mathbf{r}_2, \end{aligned}$$

¹Enačba (4) velja tudi če je ρ_0 karkoli drugega.

kjer je \mathbf{r}_c sorazmeren s težiščem dvozvezdnega sistema, $\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_c/(M_1 + M_2)$. Vektorja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 lahko zapišemo kot linearni kombinaciji \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* ,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2M_1}(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_*) \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2M_2}(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_*).\end{aligned}$$

Vektorjema \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* ustrežata gibalni količini \mathbf{p}_c in \mathbf{p}_* . Dobimo ju iz gibalnih enačb za \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* :

$$\dot{\mathbf{r}}_c = M_1\dot{\mathbf{r}}_1 + M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = M_1\frac{\mathbf{p}_1}{M_1} + M_2\frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_c, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = M_1\dot{\mathbf{r}}_1 - M_2\dot{\mathbf{r}}_2 = M_1\frac{\mathbf{p}_1}{M_1} - M_2\frac{\mathbf{p}_2}{M_2} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_*, \quad (10)$$

kjer vidimo, da mora biti \mathbf{p}_c konstanta gibanja, če je izpeljava pravilna. Impulza \mathbf{p}_1 in \mathbf{p}_2 lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c + \mathbf{p}_*), \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_*).\end{aligned} \quad (11)$$

To lahko vstavimo v enačbi (8), vendar moramo za to vedeti še kako se zapiše $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ z \mathbf{r}_c in \mathbf{r}_* . V težiščnem sistemu $\mathbf{r}_c = 0$ velja

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_*/2\mu.$$

Gibalne enačbe za impulza zvezd lahko sedaj prepišemo v

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_1 &= (\dot{\mathbf{p}}_c + \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3}(-\mathbf{r}_*/2\mu) = -\frac{4\mu^2M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*, \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= (\dot{\mathbf{p}}_c - \dot{\mathbf{p}}_*)/2 = \frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*/2\mu|^3}\mathbf{r}_*/2\mu = \frac{4\mu^2M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*,\end{aligned}$$

kjer je $\hat{\mathbf{r}}_* \equiv \mathbf{r}_*/|\mathbf{r}_*|$ enotski vektor v smeri \mathbf{r}_* . Če ti dve enačbi seštejemo, nemudoma dobimo $\dot{\mathbf{p}}_c = 0$, kar smo tudi pričakovali. Nadaljujemo z razliko prejšnjih enačb, po katerih dobimo $\dot{\mathbf{p}}_*$,

$$\dot{\mathbf{p}}_* = -8\mu^2\frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2} \hat{\mathbf{r}}_*.$$

Brez izgube splošnosti lahko izhodišče sistema postavimo v težišče ob času $t = 0$, tj. $\mathbf{r}_c(t = 0) = 0$. Lahko si izberemo tudi pravi težiščni sistem, tj. $\dot{\mathbf{r}}_c = 0$, kar pomeni tudi $\mathbf{p}_c = 0$. Za opis gibanja \mathbf{r}_1 in \mathbf{r}_2 sedaj zadošča le \mathbf{r}_* , katerega Newtonov zakon je

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = -8\mu^2\frac{M_1M_2}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_* = -\frac{\alpha}{|\mathbf{r}_*|^2}\hat{\mathbf{r}}_*, \quad (12)$$

Ta problem je dvo-dimenzionalen (ker je potencial centralen), zaradi simetrije problema se nam ponujajo polarne koordinate $\mathbf{r}_*(t) = \mathbf{r}_*(\rho(t), \varphi(t))$. Pričeli bomo s prehodom v polarne koordinate:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\rho \sin \varphi \mathbf{e}_x + \rho \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (13)$$

Potem lahko naš krajevni vektor prepišemo v

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_* &= \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ &= \rho \mathbf{e}_\rho,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_* = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi,\tag{15}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_* = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + \left(\ddot{\varphi} + 2 \frac{\dot{\rho} \dot{\varphi}}{\rho} \right) \mathbf{e}_\varphi.\tag{16}$$

Baza v tem primeru ni normirana ($|\mathbf{e}_\varphi| \neq 1$), vendar $|\mathbf{r}_*| = \rho$. Zaradi tega dobimo in $\hat{\mathbf{r}}_* = \mathbf{r}_*/\rho = \mathbf{e}_\rho$. S procesom „reverse engineering“ enačbe (12) lahko zapišemo Lagrangeian

$$L = \frac{1}{2} |\dot{\mathbf{r}}_*|^2 + \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 \rho^2) + \frac{\alpha}{\rho}.$$

Tu φ ne nastopa eksplicitno, kar pomeni $\dot{p}_\varphi = 0$ oz. ohranitev vrtilne količine:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right)}_{=p_\varphi} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0, \quad p_\varphi = \dot{\varphi} \rho^2,\tag{17}$$

kar pomeni $\dot{\varphi} = p_\varphi / \rho^2$. Opomba: $\mathbf{p}_* = p_\rho \mathbf{e}_\rho + p_\varphi \mathbf{e}_\varphi$. Gibalni zakoni za ρ so

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho - \left(-\frac{\alpha}{\rho^2} \right) &= 0, \\ \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho + \frac{\alpha}{\rho^2} &= 0.\end{aligned}\tag{18}$$

Enačbo (17) uporabimo za da se znebimo φ ,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{p_\varphi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi},\tag{19}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{p_\varphi^2}{\rho^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).\tag{20}$$

Zmenili se bomo $\partial \bullet / \partial \varphi = \bullet'$, da bo manj pisanja. Ko to vstavimo v enačbo (18) dobimo

$$\frac{p_\varphi^2}{\rho^4} \left(\rho'' - \frac{2}{\rho} (\rho')^2 - \rho \right) + \frac{\alpha}{\rho^2} = 0.\tag{21}$$

Uvedemo novo spremenljivko $\rho = 1/u$,

$$\begin{aligned}\rho' &= -\frac{1}{u^2} u' \\ \rho'' &= 2 \frac{1}{u^3} (u')^2 - \frac{1}{u^2} u''.\end{aligned}\tag{22}$$

Sedaj to vstavimo v enačbo (21), kar nam da izraz

$$p_\varphi^2 u^4 \left[2 \frac{u'^2}{u^3} - \frac{u''}{u^2} - 2 \frac{u'^2}{u^3} - \frac{1}{u} \right] + \alpha u^2 = 0,$$

ki pa se pokrajša v

$$u'' + u - \frac{\alpha}{p_\varphi^2} = 0. \quad (23)$$

Rešitev te enačbe je seveda elipsa,

$$\rho(\varphi(t)) = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi(t))}, \quad (24)$$

Parameter ε je ekscentričnost orbite, ki so zaključene (vezano gibanje) samo za $0 \leq \varepsilon < 1$. Seveda se bomo omejili samo na take. Kot $\varphi(t)$ je rešitev enačbe

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2. \quad (25)$$

Enačbo (25) lahko rešimo z integralom

$$\int_0^\varphi \frac{d\tilde{\varphi}}{(1 + \varepsilon \cos \tilde{\varphi})^2} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} t. \quad (26)$$

Ta integral je k sreči analitičen in tabeliran v matematičnem priročniku [1]. Za $0 \leq \varepsilon < 1$ je rešitev

$$\begin{aligned} t \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} &= \left[\frac{\varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left(\frac{(1 - \varepsilon) \tan \varphi/2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] \\ &= F(\varphi; \varepsilon). \end{aligned} \quad (27)$$

Končno lahko sedaj zapišemo $\varphi = F^{-1}(t\alpha^2/p_\varphi^3; \varepsilon)$. To moramo računati numerično, imamo pa to smolo, da je ta funkcija zaradi $\tan \varphi/2$ v funkciji $\arctan(x)$ smiselna samo za $\varphi \in [-\pi, \pi)$, sicer pa močno oscilira. Pravilna je kadar $t \in [-T/2, T/2)$, kjer je T čas enega obhoda. Tako bomo čas pri računanju te enačbe z modulom omejili na ta interval. Vendar pa je ta časovni interval grd – raje bomo vzeli $t \in [0, T)$, tako da bomo rezultatu prišteli $\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3}$. Zaradi osebne preference bi tudi φ radi merili tako, da $\varphi \in [0, 2\pi)$, zato bomo v enačbi (27) krivuljo predstavili v desno za fazo π , torej $\varphi \mapsto \varphi - \pi$. Tako smo se znebili nezveznosti pri π . Sedaj lahko izračunamo čas obhoda (oz. periodo). Veljati mora torej

$$t = \frac{p_\varphi^3}{\alpha^2} \left[\frac{\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi))} + \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \left(\frac{(1 - \varepsilon) \tan \frac{\varphi - \pi}{2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \right] + \frac{T}{2} \quad (28)$$

Obhodni čas določimo tako, da $t(\varphi = 0) = 0$, oz. $t(\varphi = 2\pi) = T$. To pomeni

$$\frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \underbrace{\arctan(-\infty)}_{-\pi/2} = -\frac{T\alpha^2}{2p_\varphi^3},$$

od koder pa z lahkoto pokažemo

$$T = \frac{2\pi p_\varphi^3}{\alpha^2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}. \quad (29)$$

1.2.2 Začetni pogoji

Da bomo res imeli vezana stanja, mora biti ekscentričnost orbite $\varepsilon \in [0, 1)$. Ta je definirana kot

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{\alpha^2}},$$

od koder lahko slepamo, da mora biti

$$-\frac{\alpha^2}{2p_\varphi^2} \leq E < 0.$$

E je energija sistema, ki jo lahko izračunamo iz začetnih pogojev zvezd:

$$E = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_\varphi^2/\rho^2) - \frac{\alpha}{\rho} \quad (30)$$

Ker je razdalja med zvezdama na začetku 1, je $\rho = 2\mu$ in $\mathbf{r}_*(t=0) = 2\mu\mathbf{e}_x$, torej mora veljati

$$\rho(\varphi=0) = 2\mu = \frac{p_\varphi^2/\alpha}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \Big|_{\varphi=0}. \quad (31)$$

To lahko prepakiramo v identiteto

$$p_\varphi = \sqrt{2\mu\alpha(1 - \varepsilon)}. \quad (32)$$

s katero lahko povsod eliminiramo p_φ :

$$\rho(\varphi) = \frac{2\mu(1 - \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)} \quad (33)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{M_1 + M_2}} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^{3/2} \quad (34)$$

Sedaj smo dvozvezden sistem v celoti rešili, prosta parametra sta le M_1 in M_2 , začetni pogoj pa je odvisen le od ekscentričnosti orbite, ε .

1.2.3 Računanje orbit zvezd

Na vsakem časovnem koraku bomo morali rešiti enačbo (28), ki je k sreči monotona. Paziti moramo, da ne pademo ven iz tega intervala. Ničle lahko učinkovito računamo z analitičnim odvodom – ponujajo se nam Newtonova, Halleyeva in Baileyeva metoda. Za slednji potrebujemo še drugi odvod. Ker velja $\partial t / \partial \varphi = (\partial \varphi / \partial t)^{-1}$ lahko zapišemo

$$\frac{\alpha^2 t'}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2} \quad (35)$$

$$\frac{\alpha^2 t''}{p_\varphi^3} = \frac{\alpha^2}{p_\varphi^3} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{2\varepsilon \sin(\varphi - \pi)}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^3} \quad (36)$$

Na koncu smo uporabili kar Newtonovo metodo, preciznost je 10^{-12} .

1.2.4 Dinamika planeta

Sedaj smo izračunali vse, kar potrebujemo za izračun „zunanjega“ potenciala v kateraga vržemo naš planet. Hamiltonka se glasi

$$H_3 = \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) + V_\odot(\mathbf{r}_3, t), \quad (37)$$

kjer je potencial $V_\odot = V_\odot(\mathbf{r}, t)$ enak

$$V_\odot(\mathbf{r}, t) \equiv - \left[\frac{M_1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2M_1}\mathbf{r}_*(t)|} + \frac{M_2}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2M_2}\mathbf{r}_*(t)|} \right]. \quad (38)$$

Kljub temu, da čas eksplicitno nastopa v hamiltonki, se Poissonov oklepaj pri tem ne spremeni. Uvedli smo še polarne koordinate planeta:

$$\mathbf{r}_3 = \zeta \cos \psi \mathbf{e}_x + \zeta \sin \psi \mathbf{e}_y = \zeta \mathbf{e}_\zeta.$$

Gibalne zakone dobimo iz Poissonovih oklepajev $\{\bullet, T_3\}$ in $\{\bullet, V_\odot\}$:

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\zeta} = p_\zeta, & \{\zeta, V_\odot\} &= 0, \\ \{\psi, T_3\} &= \frac{\partial T_3}{\partial p_\psi} = p_\psi/\zeta^2, & \{\psi, V_\odot\} &= 0, \\ \{p_\zeta, T_3\} &= -\frac{\partial T_3}{\partial \zeta} = p_\psi^2/\zeta^3, & \{p_\zeta, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta}, \\ \{p_\psi, T_3\} &= 0, & \{p_\psi, V_\odot\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (39)$$

Potencial V_\odot se v polarnih koordinatah zapiše kot

$$V_\odot = -\frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|} - \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|}, \quad (40)$$

$$|\mathbf{r}_{31}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_1^2}\rho^2 - \frac{1}{M_1}\rho\zeta \cos(\psi - \varphi), \quad (41)$$

$$|\mathbf{r}_{32}|^2 = \zeta^2 + \frac{1}{4M_2^2}\rho^2 + \frac{1}{M_2}\rho\zeta \cos(\psi - \varphi). \quad (42)$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta} &= (-1) \cdot \left[+\frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \left(2\zeta - \frac{\rho}{M_1} \cos(\varphi - \psi) \right) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \left(2\zeta + \frac{\rho}{M_2} \cos(\varphi - \psi) \right) \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \cos(\varphi - \psi) - \zeta \left(\frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} + \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi} &= (-1) \cdot \left[-\frac{1}{2} \frac{M_1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} \frac{\rho\zeta}{M_1} \sin(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} \frac{M_2}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \frac{\rho\zeta}{M_2} \sin(\varphi - \psi) \right] \\ &= \frac{\rho\zeta}{2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}_{31}|^3} - \frac{1}{|\mathbf{r}_{32}|^3} \right) \sin(\varphi - \psi) \end{aligned} \quad (44)$$

1.3 Približek povprečnega polja

Za $M_1 = 2000$ in $M_2 = 1000$ dobimo $p_\varphi \sim 10^4$. Ocenimo maksimalno dovoljeno energijo planeta kot

$$E_3 = \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) - (M_1 + M_2)/\zeta \quad (45)$$

Energija mora biti negativna za vezan sistem, tj. $T_3 < V_\odot$. Za začetne pogoje si brez izgube splošnosti izberemo $p_\zeta = 0$, od koder dobimo oceno za $p_\psi(t = 0)$.

$$p_\psi^2 < 2\zeta^2(M_1 + M_2)/\zeta = 2(M_1 + M_2)\zeta$$

oziroma malce drugače

$$-\sqrt{2(M_1 + M_2)\zeta} \lesssim p_\psi \lesssim \sqrt{2(M_1 + M_2)\zeta}. \quad (46)$$

Oddaljenost planeta od dvozvezdja ne sme biti prevelika, tj. $\zeta \sim 10^2$, skupna masa zvezd pa je reda $M \sim 10^3$. Odtod dobimo oceno za maksimalno dovoljeno vrtilno količino $p_\psi^{\max} \sim 10^{5/2} \approx 300$. Vidimo, da je $p_\psi^{\max} \sim 10^2 \ll p_\varphi \sim 10^4$. To pomeni, da bo planet gotovo spreminjajoče se polje čutil kot časovno povprečno polje, torej lahko časovno odvisnost izintegriramo. Označimo $\langle \bullet \rangle_t$ za operator časovnega povprečja. Časovno povprečno polje bomo definirali kot

$$\langle V_\odot(\mathbf{r}) \rangle_t \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt V_\odot(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{-1} V_\odot(\mathbf{r}, \varphi(t)), \quad (47)$$

saj je v eni periodi vsa informacija, ki jo potrebujemo. S pomočjo enačb (34) in (35) lahko enačbo (47) prepišemo v

$$\langle V_\odot(\mathbf{r}) \rangle_t = (1 - \varepsilon)^{3/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{V_\odot(\mathbf{r}, \varphi)}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2}. \quad (48)$$

Tekom tega poročila smo izračunali vse, kar potrebujemo, da ta integral eksplicitno zapišemo, vendar pa je grd. Tudi če analitična rešitev obstaja, je nepraktična za uporabo (program `Mathematica`, ga ni uspel izračunati po dveh celih urah), zato bi ga morali računati kar numerično. Tudi v Poissonovih oklepajih ga lahko še vedno uporabimo:

$$\{A, \langle V_\odot \rangle_t\} = \frac{(1 - \varepsilon)^{3/2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \pi)]^2} \{A, V_\odot(\mathbf{r}, \varphi)\}, \quad (49)$$

kjer je A neka kanonična spremenljivka.

1.3.1 Krožne orbite zvezd

Kljub temu pa obstaja relativno lepa analitična rešitev za krožne orbite zvezdnega sistema ($\varepsilon = 0$). Če je planet daleč proč od zvezd, ekscentričnost zvezdnih orbit nima nobenega vpliva, tako da je ta približek v našem primeru upravičen, za $\zeta \gtrsim 10$. Takrat vzamemo limito $\varepsilon \rightarrow 0$ za naše količine:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho(\varphi) = 2\mu = \text{konst.} \quad (50)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_\odot \quad (51)$$

Za izračun $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\odot}$ potrebujemo limiti $|\mathbf{r}_{31}|^2$ in $|\mathbf{r}_{32}|^2$ iz enačb (41) in (42):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\mathbf{r}_{31}|^2 &= \zeta^2 + \frac{\mu^2}{M_1^2} - 2\frac{\mu}{M_1}\zeta \cos(\varphi - \psi) \\ &= \left(\zeta - \frac{\mu}{M_1}\right)^2 + 4\frac{\mu}{M_1}\zeta \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\mathbf{r}_{32}|^2 &= \zeta^2 + \frac{\mu^2}{M_2^2} + 2\frac{\mu}{M_2}\zeta \cos(\varphi - \psi) \\ &= \left(\zeta + \frac{\mu}{M_2}\right)^2 - 4\frac{\mu}{M_2}\zeta \sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Integral (51) lahko sedaj s pomočjo integrala ki je spet tabeliran v priročniku [1]

$$\frac{1}{a_k} \int_0^\theta \frac{dx}{\sqrt{1 \mp b_k \sin^2 c_k x}} = \frac{1}{a_k c_k} F(c_k \theta; \pm b_k), \quad |b_k| < 1 \quad (54)$$

kjer je $F(x; k)$ nepopolni eliptični integral prve vrste. Če privzamemo

$$\begin{aligned} x &= \varphi - \psi, & c_{1,2} &= 1/2, \\ a_1 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_1), & a_2 &= 2\pi(\zeta + \mu/M_2), \\ b_1 &= 4\frac{\mu\zeta/M_1}{(\zeta - \mu/M_1)^2}, & b_2 &= 4\frac{\mu\zeta/M_2}{(\zeta + \mu/M_2)^2}, \end{aligned} \quad (55)$$

potem lahko integral (51) s pomočjo enačbe (54) rešimo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= -\frac{2M_1}{a_1} \left[F(\psi/2; -b_1) + F(\pi - \psi/2; -b_1) \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[F(\psi/2; b_2) + F(\pi - \psi/2; b_2) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

pri tem dobimo še pogoj $\zeta \neq \pm\mu/M_1$ oz. $\zeta \neq \pm\mu/M_2$, ki pride iz $|b_k| < 1$ in iz tega, da je deljenje z nič tabu. Ta pogoj je avtomatično izpolnjen za $\zeta \gg 1$, saj je $\mu/M_{1,2} \sim 1$.

Gibalne enačbe: Sam eliptični integral je transcendentna funkcija. Za gibalne enačbe potrebujemo še odvode

$$\{p_\psi, \langle V_{\odot} \rangle_t\} = -\frac{\partial}{\partial \psi} \langle V_{\odot} \rangle_t, \quad \{p_\zeta, \langle V_{\odot} \rangle_t\} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \langle V_{\odot} \rangle_t. \quad (57)$$

Da rešimo ti dve enačbi pa potrebujemo odvode eliptičnih integralov. Velja

$$\frac{\partial F(x; k)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 x}}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial F(x; k)}{\partial k} = \frac{\sin 2x}{4(k-1)\sqrt{1 - k \sin^2 x}} - \frac{1}{2k} \left[F(x; k) + \frac{1}{k-1} E(x; k) \right], \quad (59)$$

$$\frac{\partial F(x; -k)}{\partial k} = \frac{\sin 2x}{4(k+1)\sqrt{1 + k \sin^2 x}} - \frac{1}{2k} \left[F(x; -k) - \frac{1}{k+1} E(x; -k) \right], \quad (60)$$

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial \zeta} = 2\pi, \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{1,2}}{\partial \zeta} &= \frac{4 \frac{\mu}{M_{1,2}} (\zeta \mp \mu/M_{1,2})^2 - 4\zeta \frac{\mu}{M_{1,2}} \cdot 2(\zeta \mp \mu/M_{1,2})}{(\zeta \mp \mu/M_{1,2})^4} \\ &= b_{1,2} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{2}{\zeta \mp \mu/M_{1,2}} \right) \\ &= b_{1,2} (1/\zeta - 4\pi/a_{1,2}), \end{aligned} \quad (62)$$

kjer je $E(x; k)$ nepopoln eliptični integral druge vrste. Odvode potem lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= - \frac{2M_1}{a_1} \left[\frac{\partial F(\psi/2; -b_1)}{\partial \psi/2} \frac{\partial \psi/2}{\partial \psi} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; -b_1)}{\partial (\pi - \psi/2)} \frac{\partial (\pi - \psi/2)}{\partial \psi} \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[\frac{\partial F(\psi/2; b_2)}{\partial \psi/2} \frac{\partial \psi/2}{\partial \psi} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; b_2)}{\partial (\pi - \psi/2)} \frac{\partial (\pi - \psi/2)}{\partial \psi} \right] \\ &= + \frac{M_1}{a_1} \frac{\partial F(x; -b_1)}{\partial x} \Big|_{x=\psi/2}^{x=\pi-\psi/2} + \frac{M_2}{a_2} \frac{\partial F(x; b_2)}{\partial x} \Big|_{x=\psi/2}^{x=\pi-\psi/2} \\ &= - \frac{2M_1/a_1}{\sqrt{1 + b_1 \sin^2(\psi/2)}} - \frac{2M_2/a_2}{\sqrt{1 - b_2 \sin^2(\psi/2)}}, \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= + \frac{2M_1}{a_1^2} \frac{\partial a_1}{\partial \zeta} \left[F(\psi/2; -b_1) + F(\pi - \psi/2; -b_1) \right] \\ &\quad + \frac{2M_2}{a_2^2} \frac{\partial a_2}{\partial \zeta} \left[F(\psi/2; b_2) + F(\pi - \psi/2; b_2) \right] \\ &\quad - \frac{2M_1}{a_1} \left[\frac{\partial F(\psi/2; -b_1)}{\partial b_1} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; -b_1)}{\partial b_1} \right] \frac{\partial b_1}{\partial \zeta} \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[\frac{\partial F(\psi/2; b_2)}{\partial b_2} + \frac{\partial F(\pi - \psi/2; b_2)}{\partial b_2} \right] \frac{\partial b_2}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (64)$$

Vidimo, da kljub približku krožnih zvezdnih orbit, končne rešitve niso trivialne.

Popravek: Časovno povprečen potencial (56) ima eno hibo. Vsa informacija o tem, kje se zvezde nahajajo (v povprečju) je podana z ničlami $a_{1,2}$. Vidimo, da ima a_1 ničlo za $\zeta > 0$, vendar pa ima a_2 ničlo za $\zeta < 0$, kar pa ni prav. Po tistem, ko izintegriramo kot φ , so eliptični integrali na celotnem našem definicijskem končni.

K sreči je \mathbf{r}_3 (in posledično tudi $|\mathbf{r}_{32}|$ in $V_\odot(\mathbf{r}, t)$) invarianten² na transformacijo

$$(\zeta, \psi) \mapsto (-\zeta, \psi - \pi).$$

Pri tem vektor \mathbf{r} še vedno kaže v isto točko, vendar pa dobimo pravilno divergenco za drugo zvezdo. To pomeni, da moramo popraviti enačbo (53)

$$|\mathbf{r}_{32}|^2 = \left(\zeta - \frac{\mu}{M_2}\right)^2 + 4\frac{\mu}{M_2} \sin^2 \frac{\varphi - \psi + \pi}{2} \quad (65)$$

in temu primerno spremeniti enačbe (55):

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi - \psi, & x_2 &= \varphi - \psi + \pi, \\ a_1 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_1), & a_2 &= 2\pi(\zeta - \mu/M_2), \\ b_1 &= 4\frac{\mu\zeta/M_1}{(\zeta - \mu/M_1)^2}, & b_2 &= 4\frac{\mu\zeta/M_2}{(\zeta - \mu/M_2)^2}, \end{aligned} \quad (66)$$

$c_{1,2}$ pa je še vedno enak $c_{1,2} = c = 1/2$. Od tod dobimo popravljen potencial

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t &= -\frac{2M_1}{a_1} \left[F\left(\frac{\psi}{2}; -b_1\right) + F\left(\frac{2\pi - \psi}{2}; -b_1\right) \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \left[F\left(\frac{\psi - \pi}{2}; -b_2\right) + F\left(\frac{3\pi - \psi}{2}; -b_2\right) \right], \end{aligned} \quad (67)$$

ki je pravilno definiran na $\zeta > 0$ in $\psi \in [0, 2\pi)$. Izraz (67) pa lahko močno poenostavimo tako, da se eliptičnih integralov in kotne odvisnosti od φ v celoti iznebimo. V [2] je namreč omenjena sledeča identiteta:

$$F(\phi; m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m - m_0)^k F(\phi; m_0)}{k!}. \quad (68)$$

Z vso pravico lahko razvijamo okrog $m_0 = 0$, kjer velja $F(\phi; 0) = \phi$, kar sledi kar iz definicije integrala. Torej velja

$$F(\phi; m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi \frac{m^k}{k!} \quad (69)$$

Ko to vstavimo v enačbo (67), dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_\odot \rangle_t &= -\frac{2M_1}{a_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\psi}{2} \left(\frac{(-b_1)^k}{k!} - \frac{(-b_1)^k}{k!} \right) + \pi \frac{(-b_1)^k}{k!} \right] \\ &\quad - \frac{2M_2}{a_2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\psi}{2} \left(\frac{(-b_2)^k}{k!} - \frac{(-b_2)^k}{k!} \right) + \frac{3\pi - \pi}{2} \frac{(-b_2)^k}{k!} \right] \\ &= -\frac{2\pi M_1}{a_1} e^{-b_1} - \frac{2\pi M_2}{a_2} e^{-b_2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Vidimo, da se lahko v limiti $\varepsilon \rightarrow 0$ v celoti znebimo odvisnosti od ψ , torej imamo radialen potencial.

²Povprečni potencial $\langle V_\odot \rangle_t$ pa nima te simetrije, ker jo integriranje zlomi, zaradi česar ga moramo znova izračunati.

Razvoj za $\zeta \gg 1$: Za velike ζ velja, da je $b_{1,2} \ll 1$, kar je tudi glavni razlog, da smo izbrali razvoj (69). V primeru $\zeta \gg 1$ vidimo

$$b_{1,2} = 4 \frac{\mu \zeta / M_{1,2}}{\zeta^2 (1 - \frac{\mu}{M_{1,2} \zeta})} = 4 \frac{z_{1,2}}{(1 - z_{1,2})^2}, \quad z_{1,2} = \frac{\mu}{\zeta M_{1,2}}. \quad (71)$$

Analogno vidimo, da je potemtakem

$$\frac{2\pi}{a_{1,2}} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - z_{1,2}} = \frac{M_{1,2}}{\mu} \frac{z_{1,2}}{1 - z_{1,2}}. \quad (72)$$

Potencial lahko zapišemo kot

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t = -\frac{M_1^2}{\mu} \frac{z_1}{1 - z_1} \exp \frac{-4z_1}{(1 - z_1)^2} + \text{členi z } z_2 \quad (73)$$

Za razvoj majhnih $z_{1,2}$ bomo uporabili vrste, definirane v [1]:

$$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 + \dots \quad (74)$$

$$(1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad (75)$$

Zmenimo se, da bomo vse razvijali do tretjega reda, tj. napaka bo $\mathcal{O}(z^4)$. Najprej razvijmo eksponent:

$$\begin{aligned} \exp \frac{-4z}{(1 - z)^2} &= 1 - \frac{4z}{(1 - z)^2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-4z}{(1 - z)^2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{-4z}{(1 - z)^2} \right)^3 + \text{višji členi} \\ &= 1 - 4z - 8z^2 - 12z^3 + 8z^2 + 32z^3 - \frac{32}{3} z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= 1 - 4z - \frac{100}{3} z^3 + \mathcal{O}(z^4). \end{aligned} \quad (76)$$

Predfaktor eksponenta lahko razvijemo v

$$\frac{z}{1 - z} = z + z^2 + z^3 + \mathcal{O}(z^4). \quad (77)$$

Produkt je potem enak

$$\begin{aligned} \frac{z}{1 - z} \exp \frac{-4z}{(1 - z)^2} &= (z + z^2 + z^3 + \dots)(1 - 4z - 100z^3/3 + \dots) \\ &= z - 4z^2 + z^2 + z^3 + \mathcal{O}(z^4) \\ &= z - 3z^2 + z^3 + \mathcal{O}(z^4). \end{aligned} \quad (78)$$

Za majhne $z_{1,2}$ potencial razvijemo in dobimo asimptotski razvoj potenciala

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle V_{\odot} \rangle_t &= -\frac{M_1^2}{\mu} (z_1 - 3z_1^2 + z_1^3 + \mathcal{O}(z_1^4)) - \frac{M_2^2}{\mu} (z_2 - 3z_2^2 + z_2^3 + \mathcal{O}(z_2^4)) \\ &= -\left(\frac{M_1}{\zeta} - 3\frac{\mu}{\zeta^2} + \frac{\mu^2/M_1}{\zeta^3} + \mathcal{O}(\zeta^{-4}) \right) - \left(\frac{M_2}{\zeta} - 3\frac{\mu}{\zeta^2} + \frac{\mu^2/M_2}{\zeta^3} + \mathcal{O}(\zeta^{-4}) \right) \\ &= -\frac{M_1 + M_2}{\zeta} + 6\frac{\mu}{\zeta^2} - 2\frac{\mu^2}{\zeta^3} + \mathcal{O}(\zeta^{-4}). \end{aligned} \quad (79)$$

Prvi člen v razvoju (79) predstavlja kar primer, ko dve zvezdi nadomestimo z eno, kar je v limiti za velike ζ pričakovano obnašanje. Druga dva člena zgolj popravita obnašanje okrog divergence ($\zeta \rightarrow 0$), saj sta premajha da bi obrnila predznak potenciala, tj. $\langle V_{\odot} \rangle_t < 0 \forall \zeta$.

1.4 Numerični izračun

Ker imamo na planet vpliv zunanjega časovno odvisnega potenciala energija planeta ne bo konstantna. Vendar pa tudi za tretja časovno odvisnih hamiltonk uporabimo simplektične integratorje, saj pojem simplektičnosti ni omejen na ohranitev energije³, ampak na ohranjanje hamiltonske forme [3] (tj. Poissonovega oklepaja), ki se ne spremeni tudi če čas eksplicitno nastopa v Hamiltonianu. Prednost simplektičnih integratorjev je ta, da nam dajo stabilnejše orbite, poleg tega pa jih je enostavneje naprogramirati

Za konstrukcijo simplektičnega integratorja potrebujemo $H(t) = A(t) + B(t)$, kjer $\{A(t), B(t)\} \neq 0$. Vektor integracijskih spremenljivk je $\mathbf{x} = (\zeta, \psi, p_\zeta, p_\psi)^T$. Za integracijo bomo uporabili simetrizirane sheme drugega reda⁴, S_2 , četrtega reda, S_4 in osmega reda, S_8 :

$$S_2(c, \delta t) \equiv \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}) \exp(c \delta t \{\bullet, B\}) \exp(c \frac{\delta t}{2} \{\bullet, A\}),$$

shema četrtega reda S_4 je

$$S_4(\delta t) = S_2(x_0, \delta t) S_2(x_1, \delta t) S_2(x_0, \delta t), \quad x_0 = \frac{1}{2 - 2^{1/3}}, \quad x_1 = -\frac{2^{1/3}}{2 - 2^{1/3}}, \quad (80)$$

za shemo osmega reda, S_8 , pa bomo vzeli koeficiente w_1 , rešitev 'A' iz članka [4] s čimer aproksimiramo Liouvillov propagator. Integracija zatorej izgleda tako:

$$\mathbf{x}(t + \delta t) = S_m(\delta t) \mathbf{x}(t) + \mathcal{O}(\delta t^{m+1}).$$

Opomba:

$$\exp(c \delta t \{\bullet, A\}) x = x + c \delta t \{x, A\}.$$

Izbrati si moramo taka $A(t)$ in $B(t)$, ki delujeta na disjunktna hilbertova prostora. Ker smo v polarnih koordinatah, zato ne bomo mogli vzeti kar T_3 in V_\odot , ampak bomo morali vzeti efektivni potencial V_{ef} in radialno kinetično energijo T_ζ :

$$T_\zeta = \frac{1}{2} p_\zeta^2, \quad V_{\text{ef}} = \frac{1}{2} \frac{p_\psi^2}{\zeta^2} + V_\odot. \quad (81)$$

Potrebujemo še vrednosti vse možnih Poissonovih oklepajev. Na srečo si lahko pomagamo s tistimi, ki smo jih naračunali v enačbah (39):

$$\begin{aligned} \{\zeta, T_\zeta\} &= p_\zeta, & \{\zeta, V_{\text{ef}}\} &= 0, \\ \{\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{\psi, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi / \zeta^2, \\ \{p_\zeta, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\zeta, V_{\text{ef}}\} &= p_\psi^2 / \zeta^3 - \frac{\partial V_\odot}{\partial \zeta}, \\ \{p_\psi, T_\zeta\} &= 0, & \{p_\psi, V_{\text{ef}}\} &= -\frac{\partial V_\odot}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (82)$$

Vidimo, da je tak razcep hamiltonke H_3 res ustrezen. Sedaj smo lahko gotovi, da bo „drift“ orbite posledica $\partial H_3 / \partial t \neq 0$ in ne posledica slabega integratorja.

³V tem primeru se zelo natančno računa $\partial H / \partial t$.

⁴Napaka za red m je reda $\mathcal{O}(\delta t^{m+1})$.

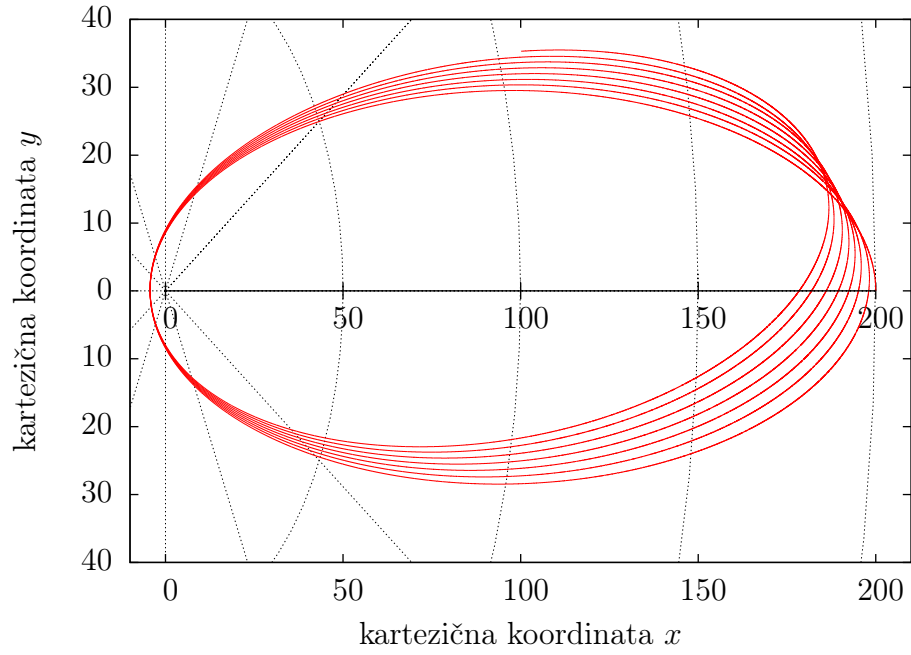
Vseeno pa obstaja možnost, da se bo po dolgem času planet močno približal eni izmed zvezd, zaradi česar bo planet vrglo osončja po ti. „slingshot“ efektu. Da se to ne zgodi prekmalu, moramo imeti še dodatno zagotovilo stabilnosti orbit – adaptiven korak. Če smo preblizu zvezde, ima najmanjša napaka v kotu/radiju daljnosežne posledice na evolucijo. Pri izbiri adaptivnega koraka koramo biti pozorni, da med drobljenjem koraka na manjše ne smemo zadeti ob frekvenco, ki je lastna dvozvezdju [5]. Zato bomo na začetku vzeli časovni korak, ki je v iracionalnem razmerju z obhodnim časom zvezde, korake pa bomo drobili po Rombergovem zaporedju (potence števila 2). Za primerjavo sem za integrator preizkusil še Runge-Kutta reda 4, ki pa se ni obnesel najboljše.

2 Rezultati

Nalogo sem reševal s programskim jezikom C, da bi dosegel čim višjo preciznost za čim krajši čas računanja sem preizkušal prej omenjene integratorje. Kot sem že povedal prej, se Runge-Kutta reda 4 vede precej slabo, zato sem se posvetil le simplektičnim integratorjem. Drugi red ni bil zadosten, orbita planeta ni bila dovolj stabilna. Integratorski shemi S_8 in S_4 sta bili dokaj primerljivi, vendar je v bližini zvezde shema S_8 dajala bolj gladke tirnice, zato sem pristal kar na S_8 , ki je najnatančnejša, vendar tudi najpočasnejša.

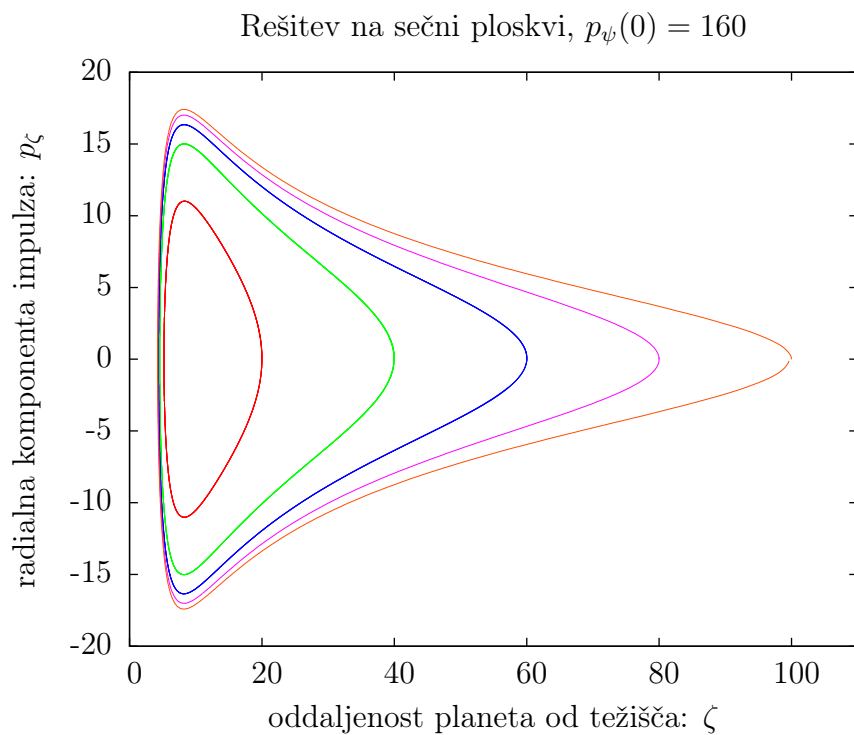
Za sečno ploskev bi lahko vzeli primer, ko $\varphi = \psi$, kar pomeni, da so vsa tri telesa kolinearna. Na žalost se zvezdi okrog težišča vrtita tako hitro (vsaj 100-krat hitreje), da bi bilo točk preveč za eno periodo.

Rešitve so nekakšne elipse, ki se vrtijo okrog težišča zvezd (beri: pentlje), kar prikazuje graf 1.

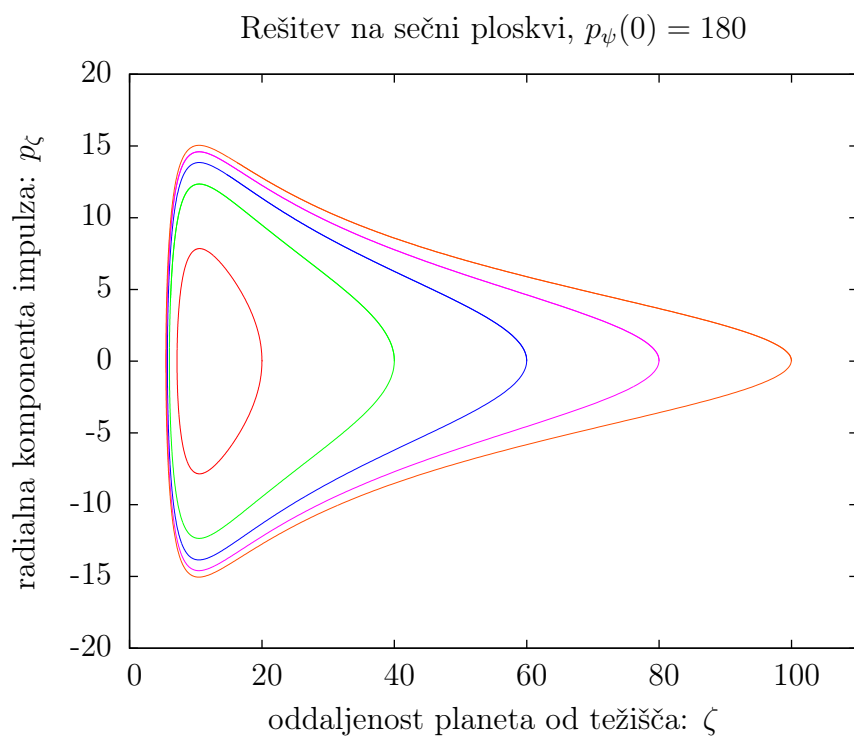


Slika 1 – Orbite planeta okrog dvozvezdja so pentlje. Zaradi večje nazornosti graf ne prikazuje celotne periode ampak samo prvih nekaj zavojev. Ta graf je bil narejen za primer $M_1 = 2000$, $M_2 = 1000$, $\varepsilon = 0.4$ in $p_\psi = 160$.

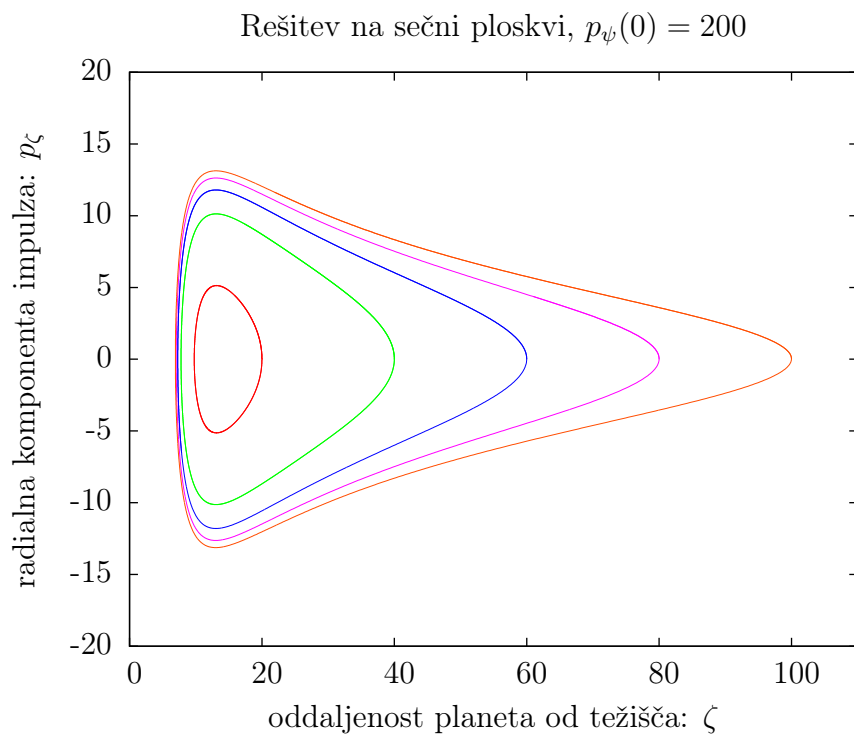
Grafi 2, 3, 4 in 5 prikazujejo sečne ploskve stabilnih orbit v takem sistemu. Sečna ploskev je $\psi = 0$ in $\varepsilon = 0.4$, $M_1 = 2000$ in $M_2 = 1000$. Pri tem je p_ψ konstanten (na sečni ploskvi), zaradi česar imamo tu samo dve neodvisni spremenljivki: ζ in p_ζ .



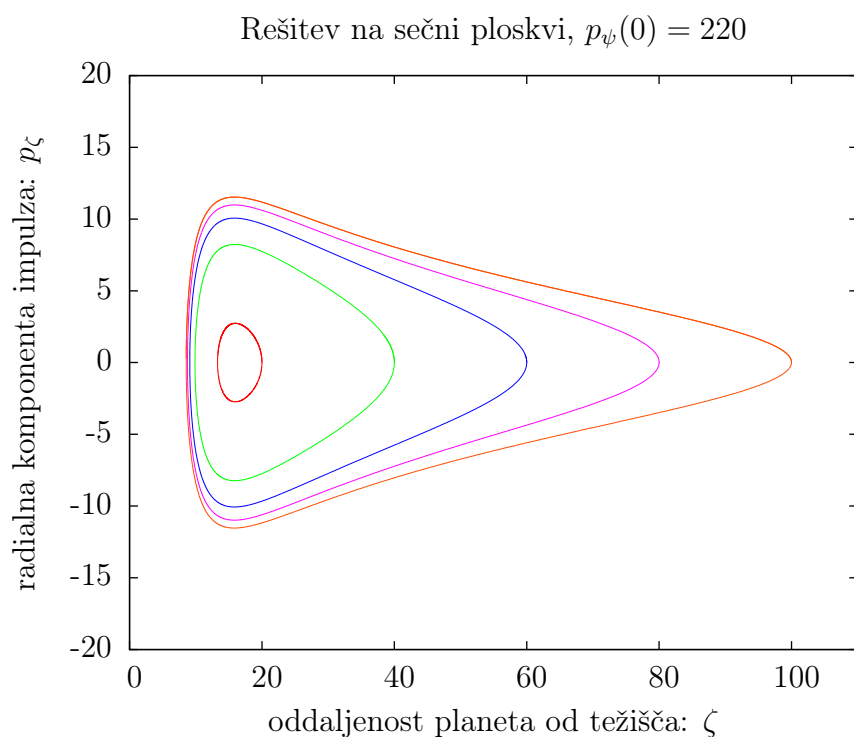
Slika 2 – Zaradi zaokrožitvenih napak se zadnji graf ne sklene, vendar je ostalo v redu.



Slika 3 – Graf je sklenjen in ne tako stisnjen proti težišču zvezd.



Slika 4 – Graf je tu še bolj sploščen.



Slika 5 – Graf je tu še bolj sproščen.

Grafi 2, 3, 4 in 5 napovedujejo, da bomo za stabilne orbite dobili podobne diagrame,

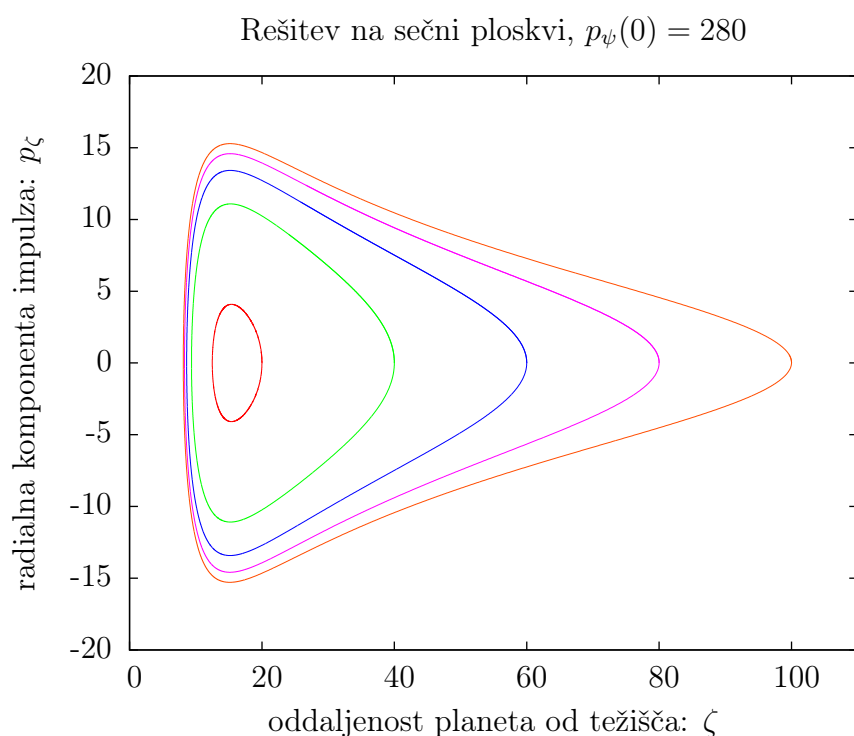
ne glede nato, s kakšnim ζ oz. p_ζ pričnemo. Tudi če je p_ζ na začetku nič, bomo zaradi precesije enkrat prišli v točko, kjer bo $p_\zeta = 0$.

Nekje znotraj grafa je zastojna točka, okrog katere se vse ostale trajektorije vrtijo. V tem primeru nimamo precesije.

Predpostavljamo, da imamo tudi prepovedano območje: če smo preblizu zvezd nas bodo slednje izvrgele iz osončja. Prav tako ne moremo biti predaleč ali imeti prevelikih hitrosti, ker potem namesto potencialne prevlada kinetična energija in planet sam od sebe uide.

2.1 Stabilne orbite

Poglejmo si, kako se fazni portret spremeni, če spremenimo maso zvezd. Graf 6 prikazuje situacijo, ko $\varepsilon = 0.4$, $M_1 = 4000$, $M_2 = 1000$.



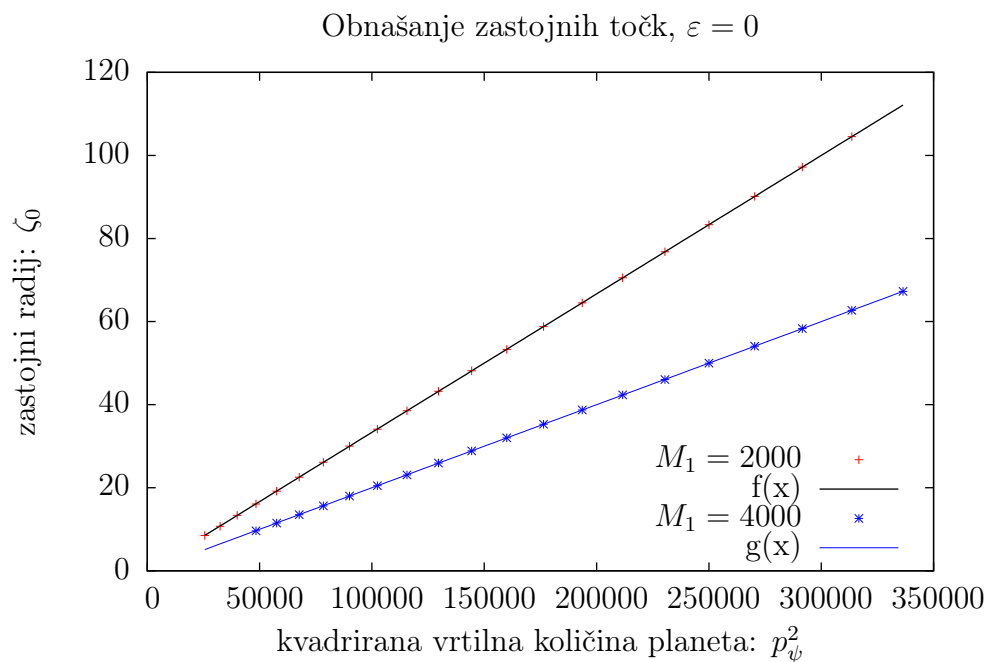
Slika 6 – Graf močno spominja na prejšnje grafe. Kljub temu, da smo spremenili razmerje mas, so ti grafi na te spremembe skoraj neobčutljivi. Pozna se le ta vpliv, da je skupna masa zvezd večja, zaradi česar potrebujemo višjo vrtilno količino, da planet ne pade notri. Zato je $p_\psi = 280$.

Da bi imeli čim boljši opis teh faznih diagramov si pogledjmo pod drobnogled zastoje točke in orbite planeta, kadar je na zastojni točki.

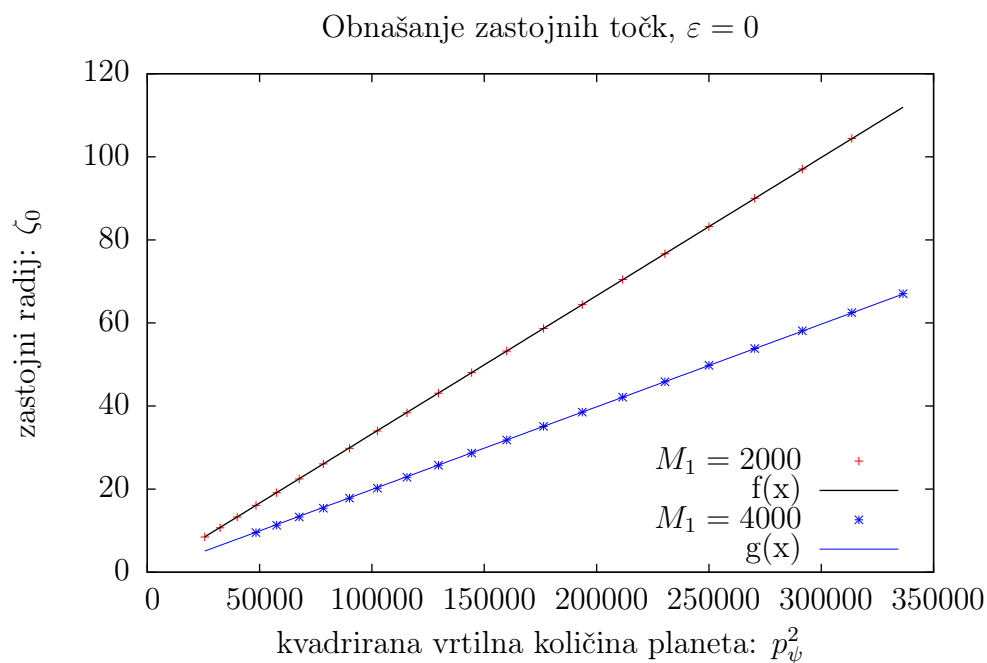
2.1.1 Zastojne točke

Z ζ_0 označimo zastojo točko (radij). Graf 7 prikazuje zastoj za $M_2 = 1000$ in $\varepsilon = 0.4$ pri različnih M_1 . Graf 8 prikazuje isto, le za $\varepsilon = 0$.

Iskal sem jih z bisekcijo, tako da sem iskal ničlo p_ζ po enem obhodu planeta.



Slika 7 – Vidimo, da imamo odvisnost $\zeta_0 \propto p_\psi^2$, smerni koeficient pa je občutljiv na maso.



Slika 8 – Vidimo, da imamo odvisnost $\zeta_0 \propto p_\psi^2$, smerni koeficient pa je občutljiv na maso. Občutljivost na ε je praktično zanemarljiva.

Vidimo, da je graf neobčutljiv na ε . Modelsko krivuljo sem ugotovil s pomočjo pri-

lagajanlja potenčne funkcije, kjer sem hitro ugotovil $\zeta_0 \propto p_\psi^2$. Modelsko krivuljo sem parametriziral kot

$$kp_\psi^2 = \zeta_0. \quad (83)$$

Vrednosti k po prilagajanju so tabelirane v tabeli 1

Tabela 1 – Vrednosti k in δ_k (relativna napaka k) za prilagajanje različnih grafov. Rezultati so res praktično neodvisni od ε .

	k	δ_k
$M_1 = 2000, \varepsilon = 0.4$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-4}$
$M_1 = 2000, \varepsilon = 0$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$
$M_1 = 4000, \varepsilon = 0.4$	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
$M_1 = 4000, \varepsilon = 0$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$

Izkaže se, da je v obeh primerih $k \approx \frac{1}{M_1 + M_2}$. Kako bi lahko tako obnašanje pojasnili? Napišimo nov hamiltonian za planet, kjer bomo vzeli limito $\zeta \gg 1$, tj. obe zvezdi nadomestimo z eno zvezdo, ki ima maso $M_1 + M_2$. Tj.

$$H_3 \approx \frac{1}{2}(p_\zeta^2 + p_\psi^2/\zeta^2) - \frac{M_1 + M_2}{\zeta}. \quad (84)$$

Ugibamo, da je zastojni radij ravno tisti radij, kjer ima energija minimum. Zato moramo H_3 odvajati po ζ :

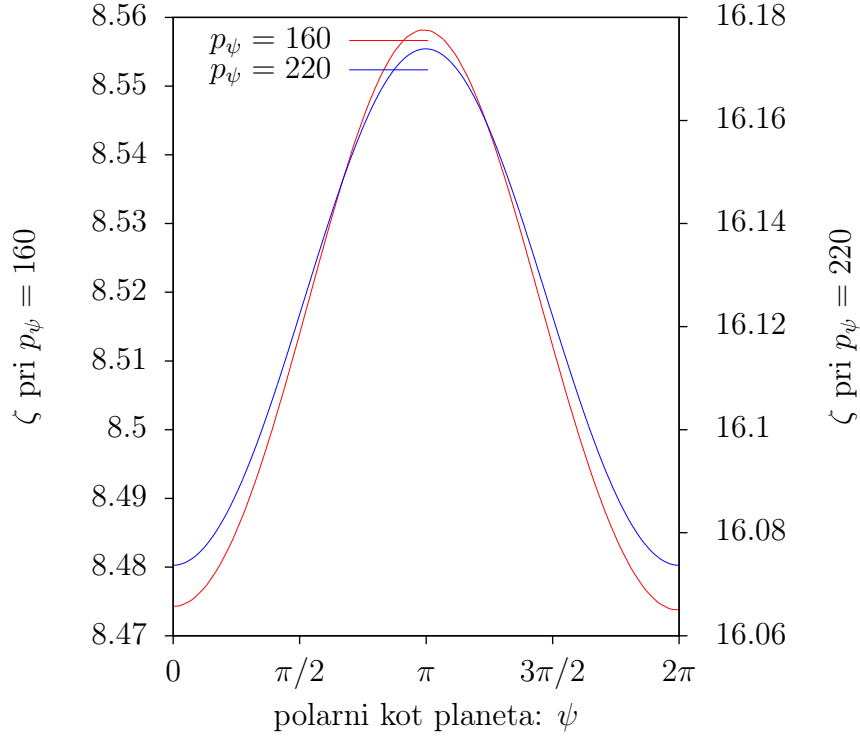
$$\frac{\partial H_3}{\partial \zeta} \approx -\frac{p_\psi^2}{\zeta^3} + \frac{M_1 + M_2}{\zeta^2}. \quad (85)$$

Pri $\zeta = \zeta_0$ ima odvod ekstrem, tj.

$$\begin{aligned} \frac{p_\psi^2}{\zeta_0^3} &\approx \frac{M_1 + M_2}{\zeta_0^2}, \\ p_\psi^2 &\approx (M_1 + M_2)\zeta_0, \\ \frac{p_\psi^2}{M_1 + M_2} &\approx \zeta_0. \end{aligned} \quad (86)$$

To pa tudi pomeni, da morajo biti tirnice planeta v zastojni točki krožnice (oz. skoraj krožnice, glej sliko 9) in da v celotni stabilni regiji ε lahko mirne volje postavimo na 0, s čimer dodatno utemeljimo približek krožnih orbit v približku povprečnega polja.

Če bi hoteli eksaktno rešitev bi morali namesto $(M_1 + M_2)/\zeta$ vzeti potencial V_\odot , vendar pa dobimo transcendentno enačbo, ki ni rešljiva analitično. Lahko bi vzeli nekaj členov asimptotskega razvoja (79) in dobili natančnejšo rešitev, vendar za nazornost ustreza že prvi red.



Slika 9 – Vidimo, da sta orbiti v zastojni točki v obeh primerih skoraj krožnici. Če bi močno približali, bi videli, da v resnici to nista elipsi, zaradi efekta binarne zvezde.

Po izpeljavi zakona za ζ_0 ugotovimo, kako je treba interpretirati dogajanje na sečni ploskvi: osnovno stanje je najbolj preprosto in je na zastojni točki. Stanje z višjo energijo je od zastojne točke bolj oddaljeno, zato se tirnice različnih stanj na sečni ploskvi ne sekajo.

2.1.2 Maksimalen radialni impulz

Opazimo, da tirnice za $\zeta \neq 0$ na sečni ploskvi polagoma dobivajo višji in višji radialni impulz. Pri $\zeta \approx \zeta_0$ je p_ζ maksimalen. Da bomo bolj razumeli obliko območja vezanih orbit, naredimo oceno mejnega impulza p_ζ .

Vzeli bomo $\zeta = \zeta_0$, p_ζ^{\max} pa tak, da bo $H_3 = 0$, tj.

$$p_\zeta^{\max} \approx \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{\zeta_0}} = \pm \frac{M_1 + M_2}{p_\psi} \quad (87)$$

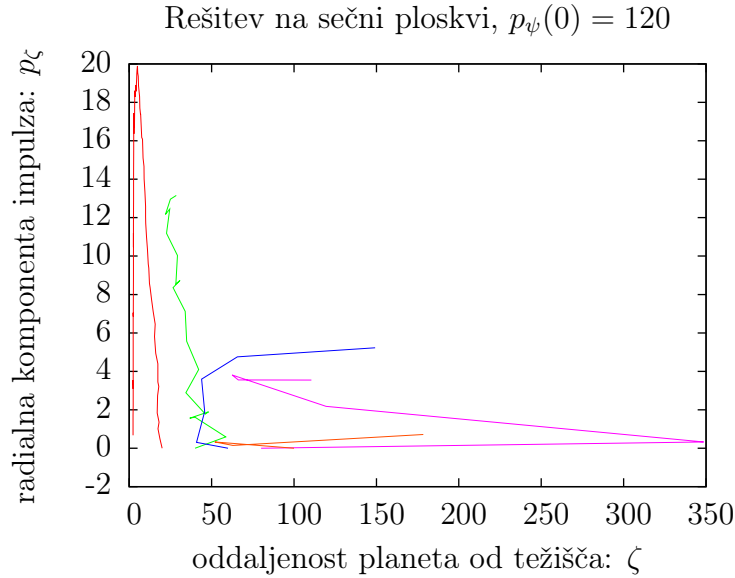
Sedaj lahko ocenimo, kolikšen del dovoljenega prostora prikazujejo slike 2, 3, 4, 5 in 6. Tabela 2 priča, da je to praktično cel fazni prostor vezanih orbit.

Tabela 2 – Supremum p_ζ , za stabilne (vezane) orbite planeta.

$p_\psi(0)$	$M_1 + M_2$	$ p_\zeta^{\max} $
160	$3 \cdot 10^3$	18.75
180	$3 \cdot 10^3$	16.67
200	$3 \cdot 10^3$	15.00
220	$3 \cdot 10^3$	13.64
280	$5 \cdot 10^3$	17.86

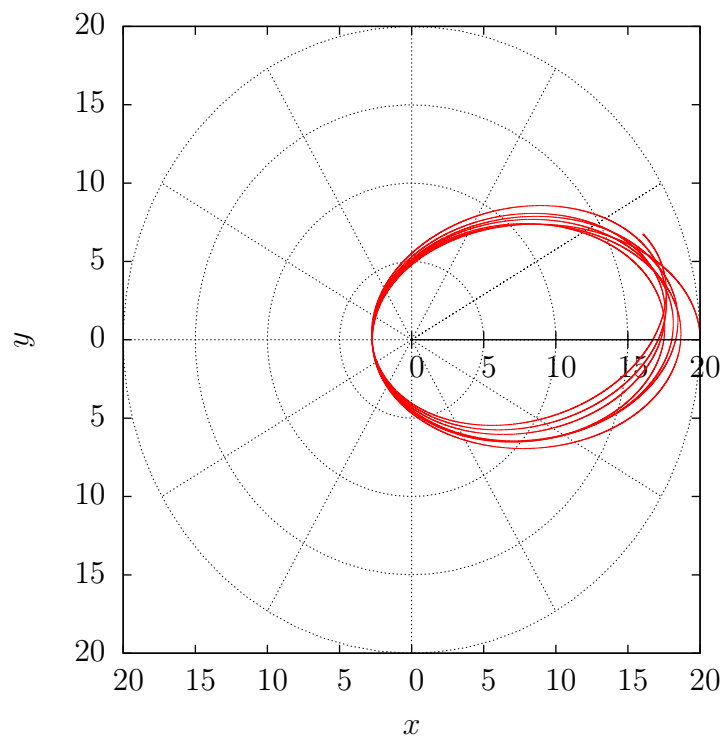
2.2 Nestabilne orbite

S pridevnikom nestabilne bi rad označil orbite, ki so preblizu tešiča zvezd, zaradi česar lahko planet ena izmed zvezd izstreli iz osončja. Planet se zvezdama preveč približa tudi, če ima premajhno vrtilno količino. To vidimo na sliki 10. Radij ζ opleta, pripadajoči impulz pa se povečuje, dokler kinetična energije ne preseže potencialne in dvozvezdje planet izvrže.

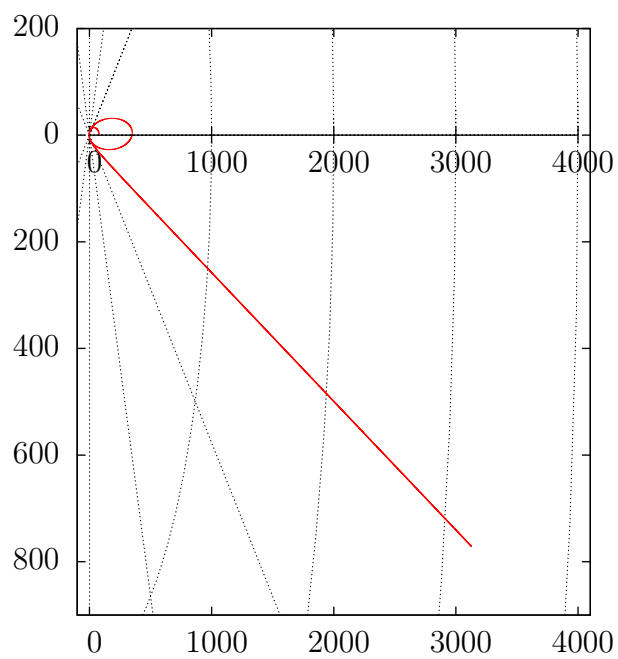


Slika 10 – Vidimo, da se planetu zlagoma povečuje radialni impulz, dokler ga ne izvrže. Radij močno opleta.

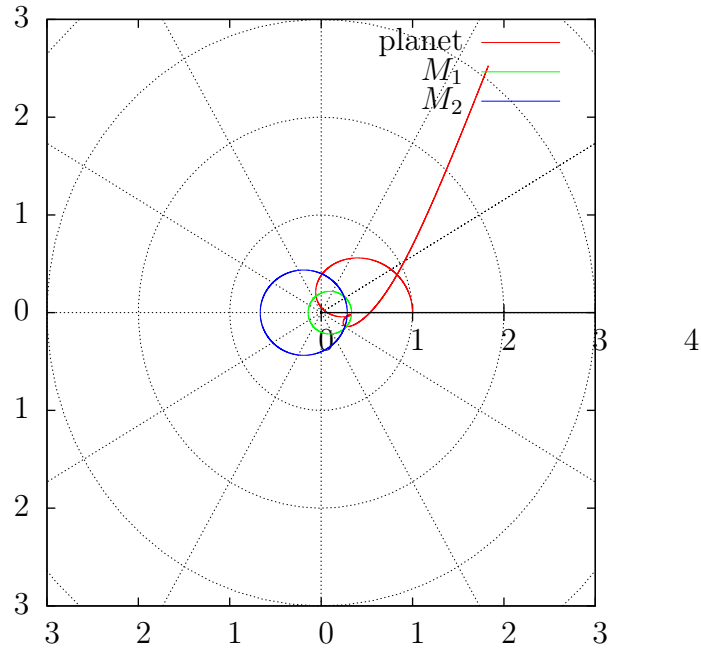
V tem režimu prikaz s sečnimi ploskvami ni več primeren, zato bomo risali kar cele orbite. Ta režim nastopi za $M_1 = 2000$ in $M_2 = 1000$ pri $p_\psi \lesssim 140$, ne glede na to s kakšnim ζ pričnemo. Vse orbite so nestabilne in planet po nekaj obhodih frene iz osončja po „slingshot“ efektu, saj zvezdi v približku zanemarljive mase planeta predstavljata „rezervoar“ z neskončno energije, kar vidimo na sliki 12. Graf 11 izvrže po kar nekaj obhodih, ki jih nisem narisal. Pokazati hočem predvsem to, da dinamika orbite ni tako lepa in „deterministična“ kot npr. orbita na sliki 1.



Slika 11 – Ta orbita je bila na grafu 10 najbolj dolgoživa. Kot vidimo, vplivi zvezd orbito „ponaključijo“, tj. ji dodajo nek na videz stohastičen šum.



Slika 12 – Tirnica planeta je bila napravljena pri $p_\psi(0) = 120$, $\zeta(0) = 80$. Planet tukaj že po enem obhodu izvrže iz osončja.



Slika 13 – To je še primer orbite, pri kateri je planet preblizu težišča. Tudi vrtilna količina je premajhna, saj $p_\psi(0) = 50$, vendar kljub temu pridobi zadosti energije, da zapusti osončje.

Literatura

- [1] J. N. Bronštejn in K. A. Semendjejev, *Matematični priročnik*, Tehniška založba Slovenije v Ljubljani, deseti ponatis, (1988)
- [2] <https://www.wolframalpha.com>
- [3] S. Širca in M. Horvat, *Računske metode za fizike*, DMFA Založništvo, (2010)
- [4] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Lett. A, Vol. 150, no. 5,6,7, str. 262, (1990)
- [5] A. S. Richardson and J. M. Finn, *Symplectic integrators with adaptive time steps*, arXiv:1108.0322v1 [physics.comp-ph], (2011)