Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Oddelek za fiziko

Seminar I_b – 1. letnik, II stopnja

Supersimetrija v nerelativistični kvantni mehaniki

Mentor:
Prof. Dr. Svjetlana Fajfer,

Avtor:
Jože Zobec, dipl. fiz. (UN)

Somentor:
Prof. Dr. Tomaž Prosen

Povzetek

Supersimetrija je področje, ki je nastalo za potrebe velike teorije poenotenja, vendar pa lahko najde rabo tudi drugod v fiziki. V tem seminarju bom pokazal kako supersimetrično matematično ogrodje uporabimo v šolskih kvantno-mehanskih problemih, v teoriji izospektralnih Hamiltonianov in v teoriji perturbacij.

Ljubljana, 23. september 2013

Kazalo

1 Uvod

Supersimetrija je področje, ki je nastalo v fiziki visokih energij, vendar pa ima zanimive aplikacije lahko tudi drugod. Omejil se bom na enodelčne probleme v nerelativistični kvnatni mehaniki.

To je simetrija, ki velja med fermionskimi in bozonskimi operatorji. Npr. kot točkovna simetrija C_2 slika '$-\psi$' v 'ψ', ne da bi se pri tem spremenila energija sistema, tako supersimetrija pomeni, da lahko bozonske operatorje zamenjamo s fermionskimi, ne da bi pri tem vplivali na fizikalne opazljivke.

V nerelativistični kvantni mehaniki supersimetrični opis problema predstavlja alternativno in marsikdaj enostavnejšo pot do rešitve. Omogoča konstrukcijo konsistentne teorije, s katero lahko konstruiramo izospektralne Hamiltoniane in nove integrabilne sisteme.

2 Osnove supersimetrije

S simetrijami problema lahko v veliko primerih pojasnimo dobljene fizikalne rešitve: energijska stanja molekul, sipanje na kristalih, ohranjene količine itd. Pravilno upoštevanje simetrij lahko poenostavi marsikateri problem, v nekaterih vejah fizike pa je uporaba teorije grup obvezna.

V grobem simetrije delimo na zunanje in notranje.

- Zunanje simetrije so tiste, ki niso vezane na specifičen problem: fizikalni zakoni so invariantni na translacije v prostoru (ohranitev gibalne količine), času (ohranitev energije) in rotacije (ohranitev vrtilne količine). To so simetrije makroskopskega sistema.

- Notranje simetrije so povezane z mikroskopsko sliko. Če pogledamo res od blizu in zamrznemo čas, lahko ugotovimo v katerem mikroskopskem stanju smo in preučimo njegove simetrije. Lahko ugotovimo kako so delci urejeni, kaj se zgodi ob enostavni zamenjavi dveh ali več delcev, ali če nad njimi izvedemo abstraktno rotacijo. Lahko Te simetrije nam vrnejo npr. ohranitev električnega naboja, fermionskega števila, itd.

Obstaja izrek, ki pravi, da z Liejevo algebro ni moč združiti notranjih in zunanjih simetrij. Fiziki so iskali razne alterntive, edina možna je supersimetrija, ki je Liejeva superalgebra.
Ko je bila ustvarjena vizija ti. velike teorije poenotnenja [1] so fiziki iskali poleg poenotenja sil, tudi enoten zapis za bozone in fermione, hkrati pa tudi združitev notranjih z zunanjimi simetrijami. Supersimetrija je otrok tega prizadevanja. Uvede namreč enoten zapis za obravnavo tako bozonov, kot fermionov.

Supersimetrija je od takrat naprej napredovala in prekoračila meje relativistične kvantne mehanike. Formalna obravnava supersimetrije kot matematičnega pripomočka, je razširila njeno uporabo na nerelativistično kvantno mehaniko

Tekom celotnega seminarja bomo imeli v mislih reševanje Schrödingerjeve enačbe,

[1] Ang. *Grand Unification Theory*, ali na kratko GUT.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}). \tag{1}$$

Zaradi enostavnosti pisave bomo razdalje in energijo merili v primeru $\hbar = m = 1$, kar ustreza preprosti brezdimenzijski transformaciji. Omejili se bomo na enodimenzionalne probleme, tj. Hamiltonian iz en. (1) prepišemo v

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x). \tag{2}$$

Naš potencial naj bo neničelen in navzdol omejen[2]. Potem lahko izmed vezanih stanj poiščemo lastne pare E_n, $\psi_n(x)$ Hamiltonovega operatorja H,

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) = i\partial_t\psi_n(x). \tag{3}$$

Za $E_0 = 0$ velja $H|\psi_0\rangle = 0$. Od tod dobimo pogoj za potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial_x^2\psi_0}{\psi_0}, \tag{4}$$

Naš Hamiltonian bi radi razcepili na produkt posplošenega kreacijskega in anihilacijskega operatorja, tj. $H = a^\dagger a$. Vidimo, da je (2) oblike $H \sim (A+B)(A-B)$, tako bomo definirali superpotencial $W(x)$, da bo

$$a = W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x, \tag{5}$$

$$a^\dagger = W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x. \tag{6}$$

Taka operatorja sta res drug drugemu hermitsko adjungirana, saj je operator ∂_x antihermitski (do totalnega odvoda natančno).

Tak $W(x)$ mora vrniti Schrödingerjevo enačbo (2), torej mora veljati

$$\begin{aligned} H\phi(x) = a^\dagger a\ \phi(x) &= \Big[W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x\Big]\Big[W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x\Big]\phi(x) \\ &= \Big[-\frac{1}{2}\partial_x^2 + W^2(x)\Big]\phi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\partial_x\big(W(x)\phi(x)\big) - W(x)\partial_x\phi(x)}_{(\partial_x W(x))\phi(x)}\Big] \\ &= \Big\{-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \underbrace{W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\partial_x W(x)\big]}_{V(x)}\Big\}\phi(x). \end{aligned} \tag{7}$$

To je prvotna Schrödingerjeva enačba (2) natanko tedaj, kadar $W(x)$ spoštuje sledeča izraza:

[2]Obstaja tak V_0, da $V(x) \geq V_0$, $\forall x$.

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial_x^2\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x) \tag{8}$$
$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial_x\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x \ln\psi_0(x), \tag{9}$$

kjer smo izraz (9) dobili z reševanjem Riccatijeve enačbe (8).

Tako smo dobili $H = a^\dagger a$, z lastnimi funkcijami $\psi_n(x)$ in E_n, ki jih poznamo od prej. Poglejmo, kaj se zgodi, če zamenjamo vrstni red operatorjev a in $a^\dagger$ – definirajmo $\tilde{H} = aa^\dagger$, z lastnimi funkcijami $\tilde{\psi}_n$. Dobimo par Hamiltonianov H in $\tilde{H}$,

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x) = a^\dagger a, \tag{10}$$
$$\tilde{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \tilde{V}(x) = aa^\dagger, \tag{11}$$

kjer sta $V(x)$ in $\tilde{V}(x)$ povezana prek

$$\begin{aligned} V(x) &= W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x), \\ \tilde{V}(x) &= W^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x). \end{aligned} \tag{12}$$

Enačbo (12) lahko dokažemo z istim postopkom kot v en. (7).

Pravimo, da je $\tilde{V}(x)$ supersimetrični partner potenciala $V(x)$. Lastne funkcije in energijski spekter $\tilde{H}$ lahko dobimo z reševanjem, ali pa ga uganemo:

$$\tilde{\psi}_n(x) = a\psi_n(x), \tag{13}$$

od koder vidimo da $\psi_0(x)$ ne obstaja, saj anihilacijski operator[3] iz vakuuma po definiciji naredi ničlo. Energijski spekter $\tilde{H}$ je enak tistemu iz H, s tem da nima osnovnega stanja E_0, kar lahko pokažemo kot

$$\begin{aligned} \tilde{H}\tilde{\psi}_n(x) &= aa^\dagger[a\psi_n(x)] = a(a^\dagger a)\psi_n(x) = \\ &= aE_n\psi_n = E_n(a\psi_n) = E_n\psi_n^{(2)}, \end{aligned} \tag{14}$$

zaradi česar lahko sklepamo

- energijski nivoji $\tilde{H}$ sovpadajo z nivoji iz H, vendar pa $\tilde{H}$ nima vezanega stanja pri E_0, zato se zanj štetje energij prične pri E_1,
- a in $a^\dagger$ ne moremo interpretirati, kot kreacijsko-anihilacijska operatorja, ampak kot operatorja „mešanja“, saj brez spremembe energije delec iz H preslikata v $\tilde{H}$.

[3]Operatorja a in $a^\dagger$ nista nujno operatorja višanja/nižanja, vendar se v tem konkretnem primeru zgodi ravno to, da $a\psi_0 = 0$.

Energija vakuuma E_0 je v mnogih primerih lahko arbitrarna in se je z ustrezno konstanto lahko znebimo:

$$H \to H' = H - E_0. \tag{15}$$

Takrat sta H in $\tilde{H}$ v supersimetriji, sicer pa pravimo, da je spontano zlomljena.

Tu je supersimetrija uporabljena zgolj kot matematični pripomoček, vendar pa se kljub temu poznajo ostanki formalizma iz fizike visokih energij, če definiramo supersimetrični hamiltonian $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} \equiv H \oplus \tilde{H} \equiv \begin{bmatrix} H & \\ & \tilde{H} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$Q^\dagger = \sigma^+ a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \sigma^- a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$Q^\dagger Q + Q Q^\dagger = \{Q, Q^\dagger\} = \mathbf{H}. \tag{18}$$

Operatorja Q in $Q^\dagger$ skupaj z generatorji grupe zunanjih simetrij tvorijo supersimetrično algebro. Od tod se, čeprav nismo več v relativističnem približku, še vedno pozna supersimetrijsko izročilo.

2.1 Mešanje bozonskih in fermionskih stanj

Čeprav v enodimenzionalnem nerelativističnem modelu enega delca nimamo dobrega opisa, ki bi ločil med bozoni in fermioni, lahko uporabimo supersimetrijsko izročilo in pokažemo kje je ideja supersimetrije v relativistični kvantni mehaniki.

V supersimetričnih teorijah bozonske in fermionske operatorje opišemo zgolj z eno samo družino operatorjev – to so Q in $Q^\dagger$, ki v relativističnem opisu ne ločijo med bozoni in fermioni. Operatorja a in $a^\dagger$ zadoščata kanoničnim komutacijskim relacijam za bozone, zato sklepamo da sta to bozonska operatorja

$$[a, a^\dagger] = (\partial_x W), \qquad [a, a] = 0. \tag{19}$$

V splošnem je $\partial_x W = 1$ le za harmonski oscilator, za višje člene pa je problem zaradi anharmonske sklopitve bolj kompliciran, vendar obstaja dokaz za splošen polinomski potencial, v katerem opis v Fockovem prostoru ni več tako enostaven, so pa a, $a^\dagger$ še vedno bozonski. Definirajmo operatorje c in $c^\dagger$, tako da

$$c = \sigma^+, \qquad c^\dagger = \sigma^-, \tag{20}$$

Pokažemo lahko, da operatorji c in $c^\dagger$ zadostijo enostavnim fermionskim kanoničnim antikomutacijskim relacijam

$$\{c, c^\dagger\} = 1, \quad \{c, c\} = 0, \quad n_F = \frac{1 - [c, c^\dagger]}{2}, \tag{21}$$

kjer je n_F fermionski operator štetja. Sevada je to le trik in v nerelativističnem opisu ne gre za prave fermione, ampak to močno spominja na Jordan-Wignerjevo transformacijo – spinski prostor ima namreč končno dimenzijo glede na vrednost celotnega spina, Fockov prostor za prave fermione pa je neskončno dimenzionalen. Se pravi, spinski operatorji zadošcajo kanoničnim anti-komutacijskim relacijem za fermione, vendar kljub temu niso fermioni. Kljub temu, lahko z njimi še vedno pokažemo globlji pomen operatorjev Q in $Q^\dagger$, ki ju lahko zapišemo kot

$$Q = c^\dagger a, \qquad Q^\dagger = a^\dagger c. \tag{22}$$

Sedaj vidimo, kako je pravzaprav treba interpretirati operatorje Q in $Q^\dagger$. Ker namreč velja

$$[Q, \mathbf{H}] = [Q^\dagger, \mathbf{H}] = 0, \tag{23}$$

vidimo, da Q in $Q^\dagger$ menjata bozonska in fermionska stanja, ne da bi pri tem spremenila energijo sistema. Čeprav imata Q in $Q^\dagger$ velik pomen v kvantni teoriji polja, sta na tem nivoju odveč – za celosten opis za naše potrebe zadoščata namreč že a in $a^\dagger$.

3 Zgled

V tem poglavju bomo predstavili uporabo superimetrije na dveh preprostih primerih: eksakten izračun na primeru neskončne potencialne jame in primer perturbativnega razvoja na primeru kvartičnega anharmonskega oscilatorja.

3.1 Neskončna potencialna jama

Obravnava neskončne potencialne jame je standardni začetniški potencial. Hkrati je nekako patološki – meja je namreč neskončno visoka, ostra in strma, vendar pa kljub temu obstaja supersimetrični partner. Potencial bomo omejil na $x \in [0, 1]$, lastne fukcije so

$$\psi_{n-1}(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x, \quad E_{n-1} = \frac{(n\pi)^2}{2} \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{24}$$

Osnovni lastni par je (ψ_0, E_0):

$$\psi_0(x) = \sqrt{2}\sin \pi x, \quad E_0 = \frac{\pi^2}{2} \neq 0. \tag{25}$$

Supersimetrija je v tem primeru zlomljena[4], zato moramo začetnemu Hamiltonianu odšteti energijo osnovnega stanja.

$$(H - E_0)\psi_0 = (E_0 - E_0)\psi_0 = 0 \cdot \psi_0 = 0. \tag{26}$$

Od tod lahko poiščemo superpotencial $W(x)$ iz en. (9)

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial_x \sin \pi x}{\sin \pi x} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cot \pi x. \tag{27}$$

S pomočjo en. (12) lahko poiščemo supersimetričnega partnerja neskončne potencialne jame

[4] Torej $E_0 \neq 0$.

$$\tilde{V}(x) = \frac{\pi^2}{2}\left(\cot^2 \pi x + \frac{1}{\sin^2 \pi x}\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 \pi x} - 1\right), \qquad x \in [0,1], \tag{28}$$

kar očitno ni več neskončna potencialna jama, za katero dobimo $V_1(x) = \pi^2/2$, ki pa se ravno prikladno odšteje s konstantno $E_0^{(1)}$ v enačbi (26). Potencial V_2 je poseben primer potenciala Rosen Morse I (tj. triginometrična izvedenka). Kar je posebej presenetljivo, je gladkost novega potenciala. Prejšnji je namreč bila strma in ostra pregrada, ta pa je gladek.

Za izračun valovnih funkcij $\tilde{\psi}_n(x)$ lahko uporabimo a in $a^\dagger$, ki znane funkcije ψ_n preslikata v $\tilde{\psi}_n$ in obratno. Uporabimo en. (14). Vemo, da $\tilde{H}$ nima stanja pri E_0, ampak da se vezana stanja prično z E_1.

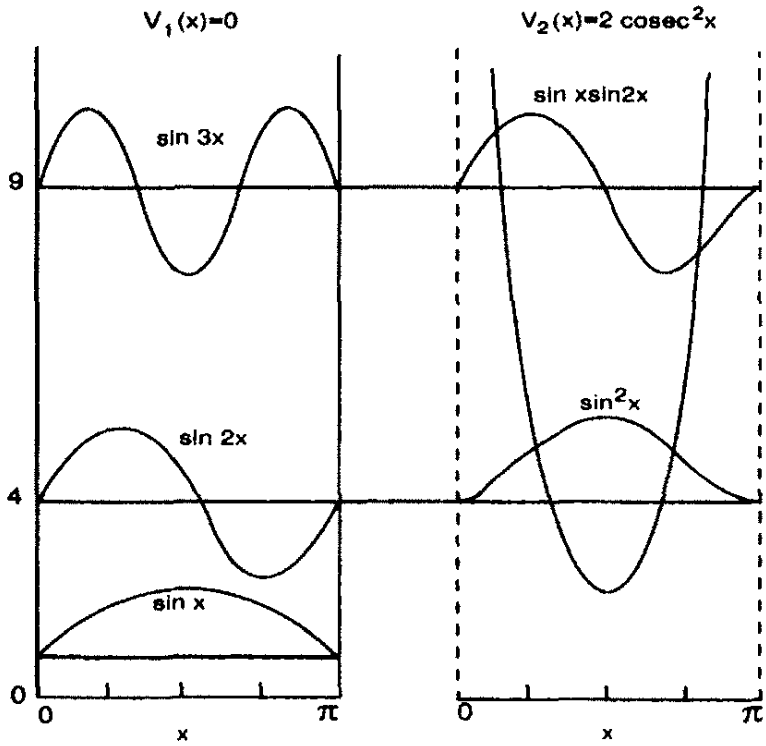
$$\tilde{\psi}_1(x) = a\psi_1 \propto -(\pi \cot \pi x - \partial_x)\sin 2\pi x \tag{29}$$

$$= \cos^2 \pi x - \cos 2\pi x = \sin^2 \pi x, \tag{30}$$

za $\tilde{\psi}_2$, tj. prvo vzbujeno stanje $\tilde{H}$, pa je

$$\tilde{\psi}_2(x) \propto \sin(\pi x)\sin(2\pi x), \tag{31}$$

Operatorja a in $a^\dagger$ seveda po pretvorbi pokvarita normalizacijo, zaradi česar smo pisali sorazmernostni znak. Čeprav ne moremo govoriti o bozonih in fermionih, imamo še vedno staro supersimetrijsko izročilo: operatorji a in $a^\dagger$ simetrične valovne funkcije preslikajo v anti-simetrične in obratno, kar se še posebno lepo vidi na sliki 1.



Slika 1: Lastna stanja operatorjev H in $\tilde{H}$. V_1 na sliki je V, V_2 pa je $\tilde{V}$. Vidimo, kadar je ψ_n soda funkcija, je $\tilde{\psi}_n$ liha in obratno.

3.2 Kvartični anharmonski oscilator

Tega primera ne znamo rešiti eksaktno. Rešiti znamo samo za harmonski oscilator, zato bomo uporabili tako imenovan δ-razvoj – perturbacijsko metodo, ki nam pomaga aproksimirati superpotencial, prek katerega lahko potem izračunamo energije vezanih stanj in lastne funkcije.

Pričnemo z dejstvom, da $V(x) = m\omega^2 x^2/2$ znamo rešiti, $V(x) = gx^4$ pa ne, zato harmonski oscilator analitično dopolnimo do kvartičnega z uvedbo parametra δ, s katerim bomo dosegli $V(x;\delta_1) \sim x^2$ in $V(x;\delta_2) \sim x^4$. To naredimo tako:

$$V(x;\delta) = M^{2+\delta} x^{2+2\delta} - C(\delta). \tag{32}$$

Parameter M je sklopitvena konstanta, ki se lahko prištuli v račun, tudi kadar imamo brezdimenzijske količine. Skalira se ustrezno s potencialom, da so enote pravilne. Konstanta $C(\delta)$ lahko pride notri, da odštejemo energijo osnovnega stanja. Tako definiran $V(x;\delta)$ nam vrne

$$V(x;0) = M^2 x^2 = \frac{m\omega^2}{2} x^2, \tag{33}$$

$$V(x;1) = M^3 x^4 = gx^4 \tag{34}$$

V prvem primeru je torej $M = \omega\sqrt{m/2}$, v drugem pa $M = \sqrt[3]{g}$. Potencial $V(x;\delta)$ je analitičen in zvezen za poljuben δ na pozitivnem delu realne osi, kar pa pomeni, da lahko $V(x;\delta)$ razvijemo v potenčno vrsto po potencah δ:

$$V(x;\delta) = M^2 x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \left\{ \frac{[\ln(Mx^2)]^k}{k!} - 2E_k \right\} \tag{35}$$

Hkrati ima tudi tak potencial za vsak pozitiven δ vezana stanja, torej mu lahko priredimo superpotencial. Velja

$$V(x;\delta) = W^2(x;\delta) - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x;\delta), \tag{36}$$

kjer lahko tudi $W(x;\delta)$ prav tako razvijemo v potenčno vrsto:

$$W(x;\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k W_{(k)}(x). \tag{37}$$

Enačbo (36) lahko na levi prepišemo z en. (35), na desni pa z en. (37). Imamo sistem enačb, razklopljen po potencah δ. Za δ^0 dobimo harmonski oscilator, za višji red pa dobimo že popravke k anharmonskem oscilatorju:

$$W_{(0)}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W_{(0)} = M^2 x^2 - 2E_0, \tag{38}$$

z rešitvami $W_{(0)} = Mx$ in $E_0 = M/2$, ki so res rešitve harmonskega oscilatorja. Naslednji red, tj. δ^1 nam da dodatno diferencialno enačbo:

$$\partial_x W_{(1)} - 2W_{(1)} W_{(0)} = -M^2 x^2 \ln(Mx^2) + 2E_1, \tag{39}$$

ki ima rešitev

$$W_{(1)} = -\mathrm{e}^{Mx^2} \int_0^x \mathrm{d}y\ \mathrm{e}^{-My^2} \big[M^2 y^2 \ln My^2 - 2E_1\big]. \tag{40}$$

4 Podobni Hamiltoniani

Supersimetrije je imenitno pomagalo pri iskanju splošnega rešljivega potenciala, saj nam omogoča, da iz znanih rešljivih potencialov konstruiramo nove. Odtod bomo malo spremenili oznake: $V \to V^{(1)}$ in $\tilde{V} \to V^{(2)}$.

Imejmo potencial $V^{(1)}(x; \underline{p}_1)$ in potencial $V^{(2)}(x; \underline{p}_2)$, kjer sta $\underline{p}_1$ in $\underline{p}_2$ urejena nabora parametrov v potencialih. Če sta $V^{(1)}$ in $V^{(2)}$ podobna, potem veljata sledeči identiteti:

$$V^{(2)}(x; \underline{p}_1) = V_1(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_1), \tag{41}$$

$$\underline{p}_2 = \underline{f}(\underline{p}_1). \tag{42}$$

Prek en. (42) dobimo družino potencialov, ki so podobni potencialu $V^{(1)}$. Nove parametre dobimo iz kompozituma funkcije $\underline{f}$

$$\begin{aligned} \underline{p}_2 &= \underline{f}(\underline{p}_1), \\ \underline{p}_3 &= \underline{f}(\underline{p}_2) = (\underline{f} \circ \underline{f})(\underline{p}_1), \\ &\vdots \\ \underline{p}_n &= (\underbrace{\underline{f} \circ \underline{f} \circ \ldots \circ \underline{f}}_{n-1})(\underline{p}_1), \end{aligned} \tag{43}$$

potenciali pa so potem

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x; \underline{p}_1) &= V^{(1)}(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_1), \\ V^{(3)}(x; \underline{p}_1) &= V^{(2)}(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_2) = V^{(1)}(x; \underline{p}_3) + R(\underline{p}_1) + R(\underline{p}_2), \\ &\vdots \\ V^{(n)}(x; \underline{p}_1) &= V^{(1)}(x; \underline{p}_n) + \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k), \end{aligned} \tag{44}$$

ki je spet očitno podoben $V^{(1)}(x)$. Sedaj dobimo družino podobnih Hamiltonianov,

$$H^{(n)} \equiv -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V^{(n)}(x; \underline{p}_1) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V^{(1)}(x; \underline{p}_n) + \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k). \tag{45}$$

Dobljeni Hamiltoniani imajo enak spekter, z izjemo vakuumov in prvih nekaj stanj. Energije osnovnih stanj so očitno

$$E_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k). \tag{46}$$

Ker so spektri od neke energije dalje enaki, sledi da energije vakuumov teh Hamiltonianov sovpadajo z energijami vzbujenih stanj Hamiltonianov z indeksom $m < n$. Seveda gremo lahko do konca nazaj, pridemo do $m = 1$ in $E_0^{(1)} = 0$ in tako dobimo celoten vezani spekter Hamiltoniana $H^{(1)}$:

$$E_n^{(1)}(\underline{p}_1) = \sum_{k=1}^{n} R(\underline{p}_k). \tag{47}$$

Seveda to pomeni, da $V^{(2)}$ (in posledično $\underline{p}_2$) ne sme biti arbitraren, ampak tak, da zadosti pogoju en. (47), sicer pademo lahko v poljubno vzbujeno stanje. Tak način iskanja spektra je dosti enostavnejši, vendar moramo za to poznati funkcijo $\underline{f}$.

4.1 Operatorji višanja

Operatorja a in $a^\dagger$ sta operatorja mešanja, vendar pa ju lahko posplošimo v prava opatorja višanja in nižanja iz harmonskega oscialtorja. Pokazali smo, kako z njimi mešamo bozone s fermioni, sedaj bom pokazal, kako jih je treba uporabiti, da z njimi dejansko lahko dvignemo oz. spustimo stanje.

Spet imejmo Hamiltonian $H^{(1)}$ z energijo osnovnega stanja $E_0^{(1)} = 0$ in valovno funkcijo $\psi_0^{(1)}(x; \underline{p}_1)$. Operatorje $a^\dagger$ bi morali dejansko ves čas pisati kot $a^\dagger(x; \underline{p})$, saj

$$a^\dagger \equiv a^\dagger(x; \underline{p}) \equiv W(x; \underline{p}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x,$$

Hamiltonianu $H^{(1)}$ pripada supersimetrični partner $H^{(2)}$, ki ima enak spekter, hkrati pa nima lastnega stanja pri vakuumski energiji $H^{(1)}$, zato lahko $H^{(2)}$ obravnavamo kot $H^{(1)}$ podoben Hamiltonian.

Višja vzbujena stanja moramo očitno dobiti kot

$$\psi_n^{(1)}(x; \underline{p}_1) \propto a^\dagger(x; \underline{p}_1)\ a^\dagger(x; \underline{p}_2)\ \ldots\ a^\dagger(x; \underline{p}_n)\ \psi_0^{(1)}(x; \underline{p}_{n+1}), \tag{48}$$

Odtod sledi pomembna posledica: supersimetrična partnerja $V^{(1)}$ in $V^{(2)}$ sta si podobna potenciala, kar pomeni, da je med njima lahko netrivialna podobnostna transformacija – konkretno si lahko spet za zgled vzamemo neskončno potencialno jamo in en. (28).

Ker je neprikladno računati poljubno visok $\underline{p}_k$ na zalogo, se po navadi raje uporabi kar

$$\psi_n^{(1)}(x; \underline{p}_1) = a^\dagger(x; \underline{p}_1)\ \psi_{n-1}^{(1)}(x; \underline{p}_2), \tag{49}$$

ki nam namiguje, da je za dviganje in spuščanje spet dejansko dovolj le poznavanje supersimetričnih partnerjev.
Tabela 1 prikazuje nekaj (super)potencialov in nabor prostih parametrov.

Tabela 1: Nekaj preprostih potencialov, ki pripadajo podobnim na translacije. Rosen-Morse I je res podoben neskončni potencialni jami – Rosen-Morse I, pri $\alpha = \pi$, $A = \pi$ in $B = 0$. Coulombov potencial se da transformirati v 3D harmonski oscilator. Rosen-Morse I ima pogoj $0 \leq \alpha x \leq \pi$, Eckart pa $B > A^2$. Potenciale $\tilde{V}(x)$ lahko dobimo iz $W(x)$.

Naziv	$W(x)$	$V(x)$
Rosen-Morse I	$-A\cot\alpha x - B/A$	$\frac{A(A-\alpha)}{\sin^2\alpha x} + 2B\cot\alpha x - A^2 + (B/A)^2$
Coulomb	$\frac{e^2}{2(\ell+1)} - \frac{(\ell+1)}{r}$	$-\frac{e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{e^4}{4(\ell+1)^2}$
1D harmonski oscilator	$\frac{1}{2}\omega x - b$	$\frac{1}{4}\omega^2\left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega}{2}$
3D harmonski oscilator	$\frac{1}{2}\omega r - \frac{\ell+1}{r}$	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (\ell + 3/2)\omega$
Eckart	$-A\coth\alpha r + B/A$	$A^2 + (B/A)^2 - 2B\coth\alpha r + \frac{A(A+\alpha)}{\sinh^2\alpha r}$

5 Izospektralni Hamiltoniani

Izospektralni Hamiltoniani v nerelativistični kvantni mehaniki so taki, ki imajo strogo enake energijske spektre vezanih stanj in enake transmisijske/refleksijske koeficiente sipalnih stanj. Edino, kar se med njimi razlikuje, so valovne funkcije in posledično nekateri momenti ($\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ ...).

Ideja je ta: superpotencial $W(x)$, ki povezuje $V^{(1)}$ in $V^{(2)}$ ni enoličen, zato lahko poiščemo družino superpotencialov $\tilde{W}$, ki povezujejo $\tilde{V}^{(1)}$ in $V^{(2)}$. Tako dobimo družino $\{\tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1)\}$, ki imajo vsi istega supersimetričnega partnerja $V^{(2)}$. Da se bomo ognili nanavadnim koeficientom bomo delali v enotah $\hbar = 2m = 1$, zaradi česar se bomo iznebili raznoraznih koeficientov $(\sqrt{2})^{\pm 1}$ (pozor, cele potence števila 2 ostanejo).

Hamiltoniani, oblike

$$H = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1), \tag{50}$$

so vsi izospektralni glede na parameter λ_1.

Recimo, da $W(x)$ ni enoličen. Potem poleg $W(x)$ obstaja še $\tilde{W}(x)$, ki prav tako ustreza en. (12). Najpreprostejša ideja bi bila potem

$$W(x) \to \tilde{W}(x) = W(x) + \phi(x), \tag{51}$$

kjer zahtevamo, da $\tilde{W}(x)$ prav tako uboga en. (8) za $V^{(2)}(x)$, ki se v teh enotah glasi

$$V^{(2)}(x) = W^2(x) + \partial_x W(x) = \tilde{W}^2(x) + \partial_x \tilde{W}(x), \tag{52}$$

od koder sledi

$$
\begin{aligned}
W^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W &= W^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W + 2W\phi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi + \phi^2, \\
2W(x)\phi(x) + \phi^2(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x), \\
\frac{2W(x)}{\phi(x)} + 1 &= -\frac{1}{\phi^2(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi(x), \qquad y(x) = 1/\phi(x), \\
2W(x)y(x) + 1 &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x). \qquad (53)
\end{aligned}
$$

Ko to enačbo rešimo, dobimo

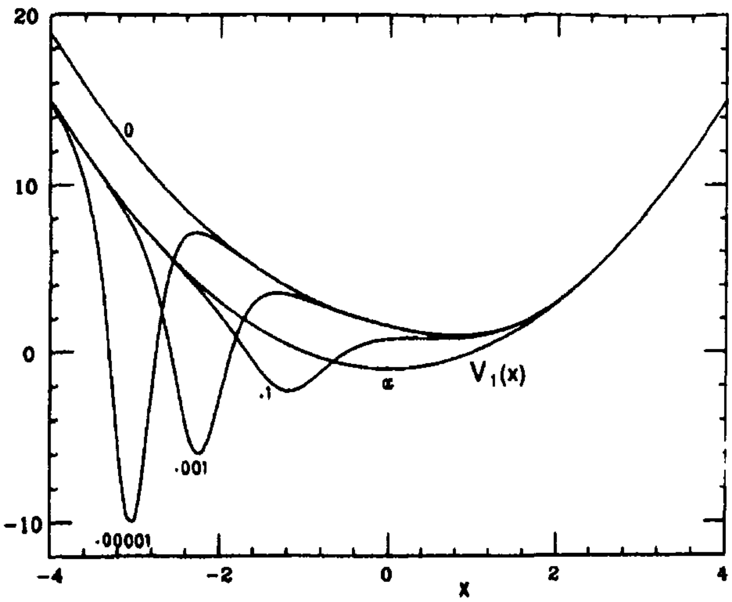
$$
\phi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left[\int_{-\infty}^{x} \psi_0^2(u)\mathrm{d}u + \lambda_1\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\big[\mathcal{I}_1(x) + \lambda_1\big], \qquad (54)
$$

kjer je $\psi_0(x)$ spet normirana funkcija izvornega potenciala $V^{(1)}(x)$.

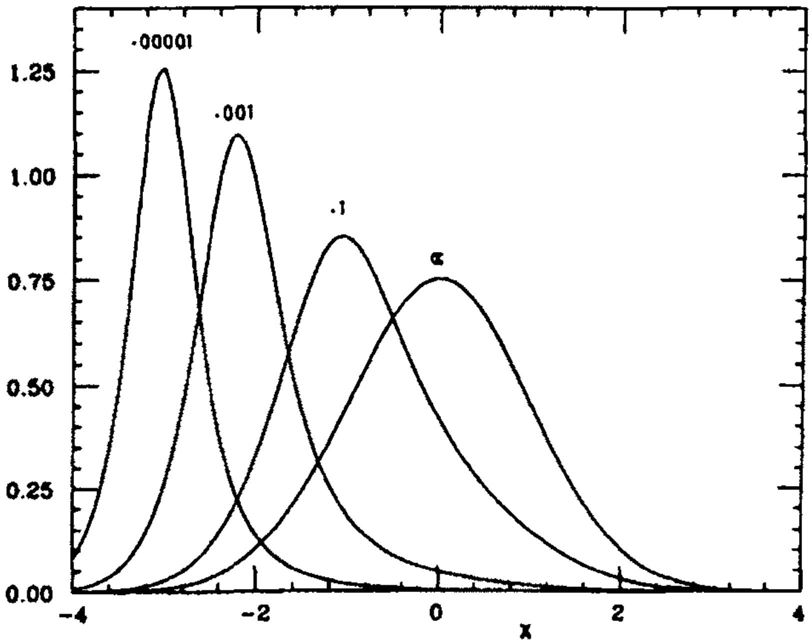
Družina potencialov $\tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1)$, ki ima partnerski potencial $V^{(2)}(x)$ je torej

$$
\tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1) = V^{(1)}(x) - 2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \ln\big[\mathcal{I}_1(x) + \lambda_1\big]. \qquad (55)
$$

Parameter λ_1 se je notri prištulil kot integralska konstanta in ne more biti čisto poljuben, ampak $\lambda_1 \notin [0,1]$, tj $\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash[-1,0]$ – v tistem režimu osnovno stanje $\psi_0(x;\lambda_1)$, potenciala $\tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1)$, ni moč normirati. Izvorni potencial $V^{(1)}(x)$ dobimo kot limito $\lambda_1 \to \pm\infty$. Sliki 2 in 3 kažeta primer za harmonski oscilator.



Slika 2: Potenciali $\tilde{V}^{(1)}$ za različne vrednosti λ_1. Izvorni $V^{(1)}$ je bil Harmonski oscilator, ki je tudi prikazan na grafu. Hamiltoniani s temi potenciali so popolnoma izospektralni.



Slika 3: Graf prikazuje osnovne valovne funkcije k grafu iz slike 2.

Sedaj smo dobili družine potencialov, ki vrnejo vsa stanja ista, razen osnovnega, ki je odvisen od parametra λ_1. Vendar gremo lahko korak dlje in isto naredimo za $V^{(2)}$, ki ga spremenimo v $\tilde{V}^{(2)}(x;\lambda_2)$, kar se potem pomeni $V^{(1)} \rightarrow \tilde{V}^{(1)}(x;\lambda_1,\lambda_2)$. To lahko posplošimo na vsa vezana stanja in dobimo $\tilde{V}^{(1)}(x;\underline{\lambda})$.

Taka družina potencialov, $\tilde{V}^{(1)}(x;\underline{\lambda})$, je popolnoma izospektralna, momente pa lahko nastavljamo poljubno prek $\underline{\lambda}$.

6 Zaključek

Napredek v supersimetriji nima uporabe zgolj v nerelativistični kvantni mehaniki, uporabo je zaenkrat našla tudi v teoriji trdne snovi in jedrski fiziki. Posebej se obravnava Diracovo enačbo, periodične potenciale in delce v elektromagnetnih poljih. Supersimetrija v relativistični kvantni mehaniki je stara 40 let, v zadnjih 20 letih počasi prodira v druge veje naravoslovja.

Uporaba supersimetrije izven konteksta visokih energij omogoča tudi lažjo preverljivost matematične konstrukcije teorij, ki so eksperimentalno težko dokazljive, v nizkoenergijskem režimu, ki je dostopnejši.

Kje povsod je supersimetrični opis smiseln je težko reči, verjetno bi lahko analogijo našli tudi v klasični fiziki. Morda bodo s pomočjo tega orodja prej nerešljivi oz. zahtevni problemi postali trivialni.

Literatura

[1] F. Cooper, A. Khare in U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, 2001.

[2] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific, 1990.

[3] J. F. Cariñena in A. Ramos, `arXiv:math-ph/0311029v1`, 2003.

[4] J. F. Cariñena in J. de Lucas, `arXiv:0908.2235v1 [math-ph]`, 2009.