

Zaključna naloga

Jože Zobec

1 Naloga

Razišči dvo-frekvenčni brcani rotator s časovno odvisno (brezdimenzijsko) hamiltonko

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{k\delta(t-m) + k'\delta(t-m\tau-\theta)\} \cos \phi. \quad (1)$$

- Zanimiva je predvsem dinamika za inkomenzurabilno razmerje brcanih frekvenc (t.j. τ iracionalen, npr. $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$).
- Oglej si pojemanje korelacij, difuzijsko konstanto $\langle(p_t - p_0)^2\rangle/(2t)$, $t \rightarrow \infty$, ter Ljapunov eksponent v odvisnosti od konstant k , k' in nekaj tipičnih vrednosti razmerja frekvenc τ .
- Ali ima fazni zamik θ kak vpliv?
- Ali obstaja kaka zanimiva predstavitev dinamike v faznem prostoru (pozor: koncept običajne stroboskopske preslikave tu odpove)?

2 Razmislek

2.1 Tipična izbira parametrov

Hamiltonian (1) ima časovno periodičen potencial. To s sabo prinese nekatere lepe lastnosti pri določanju parametrov. Velja, da lahko brez zgube splošnosti delamo zgolj s $\tau \geq 0$ in $\theta \in [0, \tau]$. Prav tako lahko začetni čas (čas merjenja) postavimo na $t_0 = 0$ pri čemer lahko hamiltonian (1) prepišemo v

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) \sum_{m=0}^{\infty} [k\delta(t-m) + k'\delta(t-m\tau-\theta)]. \quad (2)$$

V primeru $\tau = 1$ in $\theta = 0$ imamo eno-frekvečni brcan rotator z jakostjo $K = k + k'$. Z njim lahko preverimo, če se rezultati ujemajo s pričakovanimi. Zanimivo bi bilo tudi preveriti kaj se zgodi, ko $\tau = 2$. Mogoče imamo efektivni $K_{\text{ef}} = (k + k')/2$ (tj. mogoče to ustreza eno-frekvečnemu brcanemu rotatorju s $K = K_{\text{ef}}$). Na koncu pa tudi preveriti kako je za $\tau = \sqrt{2} - 1$ in pa $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Ob tem je smiselno preveriti vse rezultate za različne θ , npr. za štiri različne ekvidistančne izbire θ znotraj $[0, \tau]$ (ob tem pa preveriti predvsem, ali to vpliva na korelacije).

2.2 Izračun dinamike

Očitno bomo morali delati z diskretnimi časi. Radi bi nekaj takega, kot je bila prejšnja stroboskopska preslikava. Opremimo z indeksi j zaporedne sunke, tj. tik ob nekem sunku j imamo vektor $(x_j, p_j)^T$. Čas bomo diskretizirali tako, da bomo vedno gledali dogodke tik pred sunki in $\Delta_j \equiv t_{j+1} - t_j$. S K_j bomo označili jakost j -tega sunka, tj. $K_j \in \{k, k', k+k'\}$, odvisno od situacije. Potem se je gibalna količina do tik pred sunkom $j+1$ (ob času t_{j+1}) spremenila za

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{p}(t) dt &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt K_j \sin x_j \delta(t - (t_j + \varepsilon)) \\ &= K_j \sin x_j \underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta(t - (t_j + \varepsilon))}_{=1}, \end{aligned}$$

saj nas nosi sunek, ki se je zgodil tik za časom t_j (zaradi tega smo v Diracovo δ -funkcijo dodali še majhen popravek $\varepsilon > 0$ k času sunka). Nova gibalna količina je potem

$$p_{j+1} = p_j + K_j \sin x_j,$$

Do kraja tik pred novim sunkom pa smo pripravili že z „novo“ gibalno količino, tj. gibalno količino po trku, ki se je zgodil tik za časom t_j , to je p_{j+1} :

$$x_{j+1} = x_j + \Delta_j p_{j+1} \pmod{2\pi}.$$

Naša nova „stroboskopska preslikava“ je potem

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= p_j + K_j \sin x_j, \\ x_{j+1} &= x_j + \Delta_j p_{j+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{3}$$

ki tudi močno spominja na stroboskopsko preslikavo iz skripte. Ta je dobra ne le za dvo-frekvenčni brcan rotator, ampak za poljubno število frekvenc. Vse kar nam preostane je to, da poiščemo Δ_j (časovne intervale med zaporednimi sunki) in njim pripadajoče K_j , torej s katero „nogo“ brcnemo naš rotator, oboje pa lahko izračunamo vnaprej. Enačba (3) bo naša osnovna enačba za modeliranje.

3 Rezultati

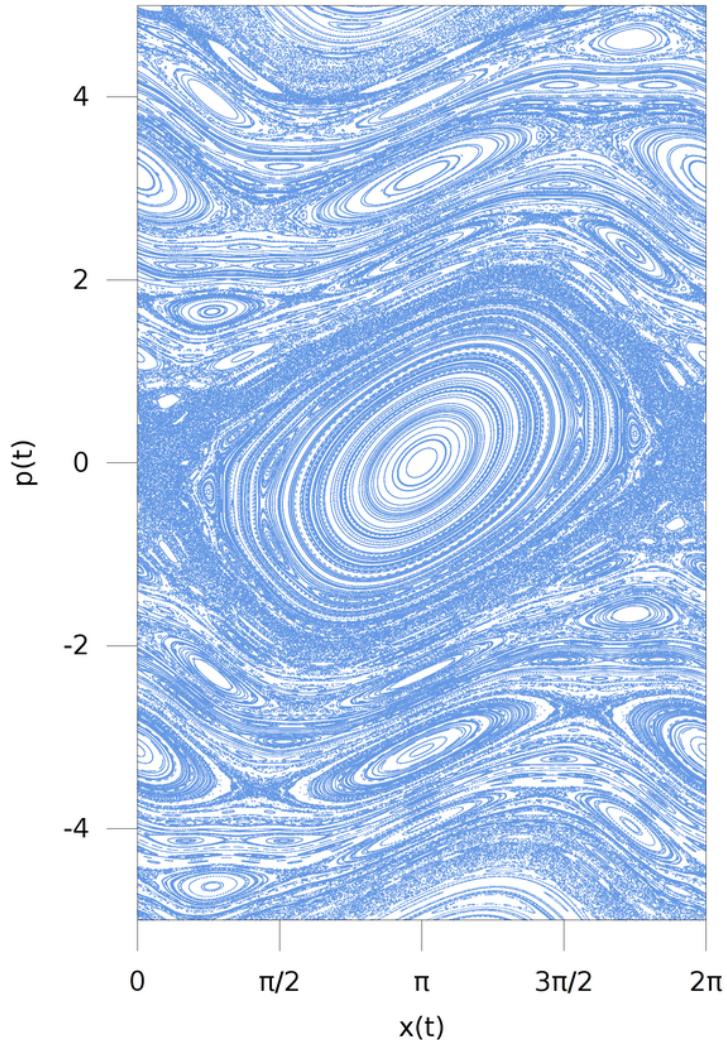
3.1 Fazni portreti

Dobro je, da si najprej ogledamo obnašanje v faznih portretov in mogoče že iz slik lahko razberemo kakšen empirični zakon. To bomo naredili s postopkom:

- Določimo τ, θ in t_{\max} .
- Med 0 in t_{\max} poiščemo vse Δ_j in K_j .
- Po enačbi (3) izračunamo vse x_j in p_j .

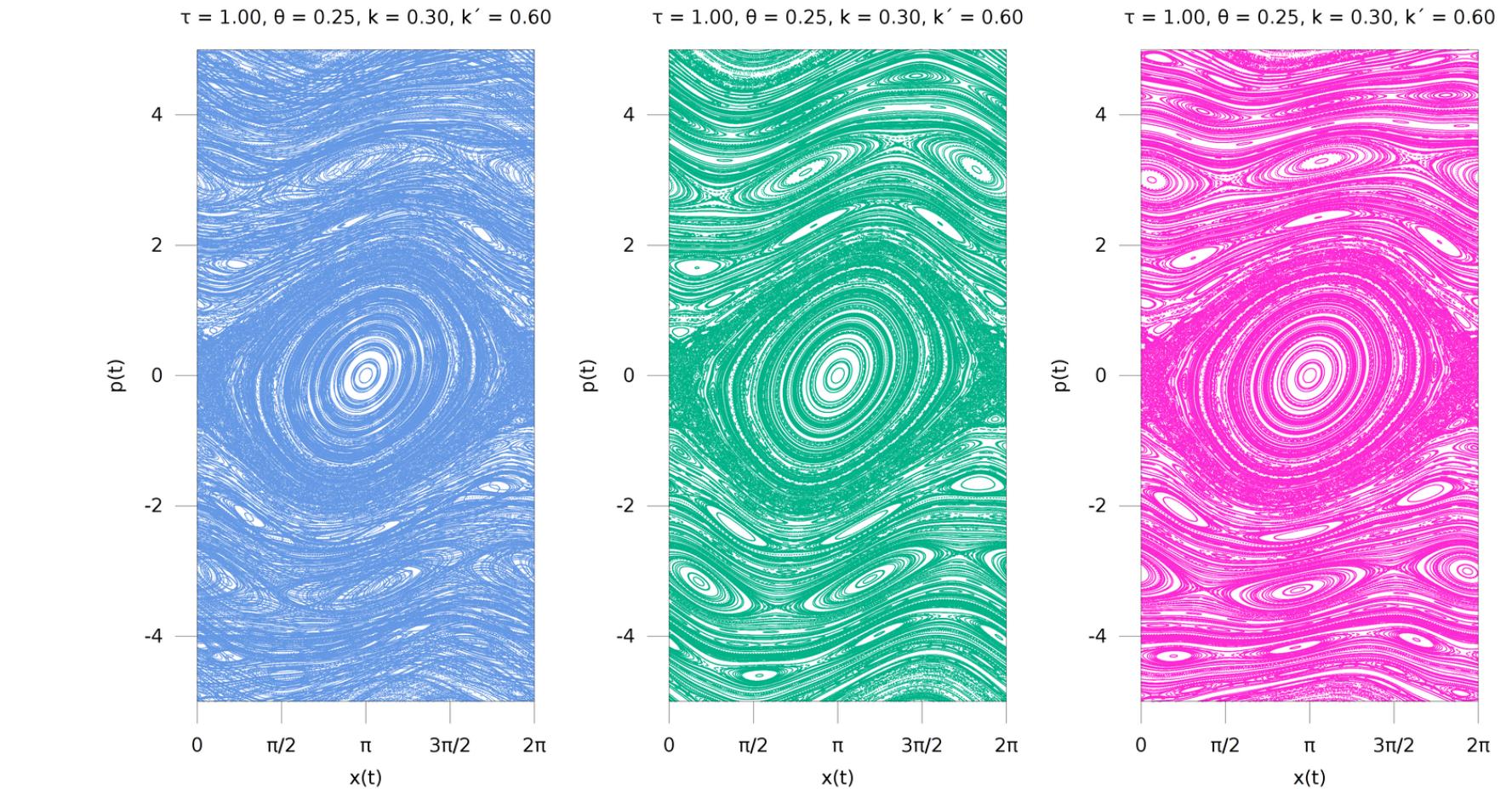
Vse grafe sem računal s $t_{\max} = 1000$ in z izbiro $G = 1000$ različnih začetnih pogojev. Za $\tau = 1$ in $k = 0.3$ ter $k' = 0.6$ dobimo res eno-frekvenčni oscilator z jakostjo branja $K = k + k'$, kot vidimo na sliki (1).

$$\tau = 1.00, \theta = 0.00, k = 0.30, k' = 0.60$$

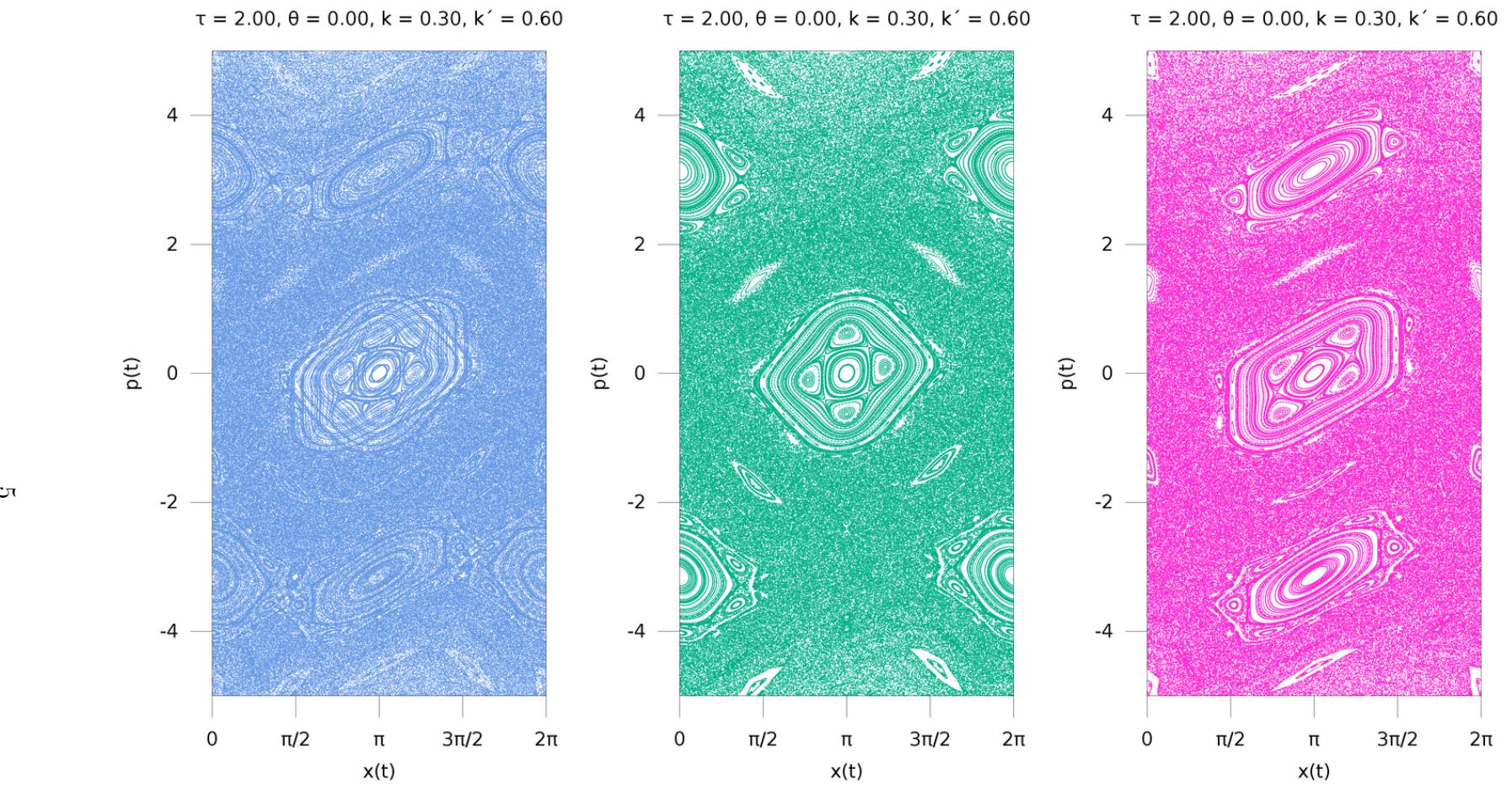


Slika 1: Res, ta fazni portret ustreza eno-frekvenčnemu brcanemu rotatorju z jakostjo branja $K = 0.9$. Izbira parametrov je v naslovu slike.

Zanimivo bi bilo izmeriti vpliv θ na fazni portret: pustimo vse parametre nespremenjene, spremenimo pa $\theta = 0.25$, kot kaže slika 2. Vidimo, da graf postane superpozicija dveh enakih fazno zamaknjениh grafov. Vsak izmed teh grafov ustreza eno-frekvenčnemu brcanemu rotatorju, vendar bi bil ustrezni $K < k + k'$. Podobne rezultate dobimo za $\tau = 2$ in $\theta = 0$, le da dobimo $K > k + k'$ (slika 3), saj je stopnja nereda posameznega grafa v tem primeru višja (vsaj sodeč glede na sliko 1).



Slika 2: Kombiniran graf, je na skrajni levi, desno od njega pa sta grafa ločena – zeleni ustreza sunkom $K_i = k$, magenta pa sunkom $K_i \in \{k', k + k'\}$. Kombiniran graf je nekoliko kaotičen, vendar pa imata ločena grafa manjšo stopnjo nereda.



Slika 3: Spet nam je uspelo graf razcepiti na dva enaka, a fazno zamaknjega.

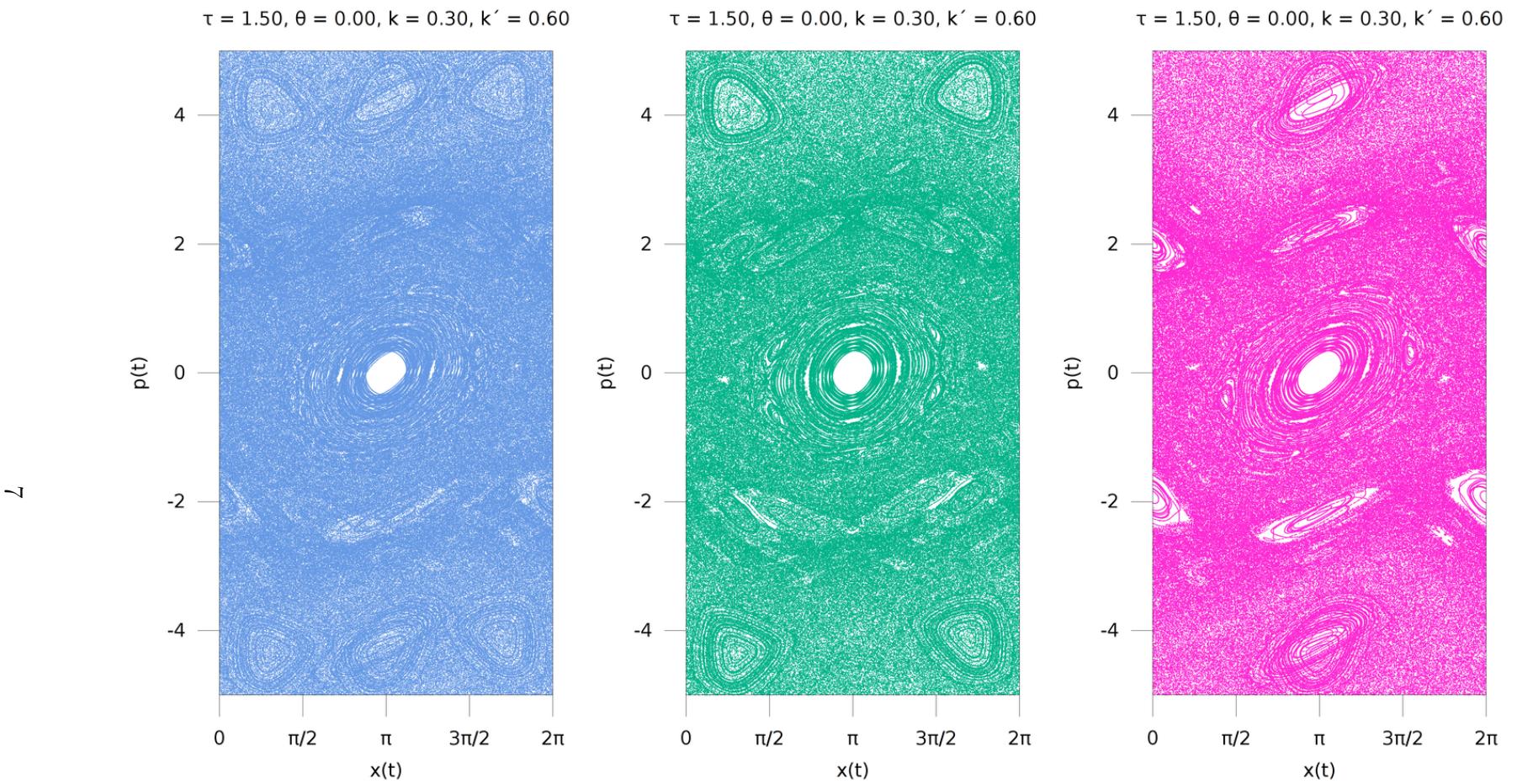
Ta razcep nam pove, da zgolj posplošitev stroboskopske preslikave ne zadošča. Te fazne portrete sem razločil od predpostavki, da graf vedno razpade na dva grafa: eden ustreza sunku prve noge z jakostjo k , drugi pa sunku druge noge z jakostjo k' (ali pa $k+k'$). Za razmerja vrekvenc, kjer obstaja tak $n \in \mathbb{Z}$, da $n\tau \in \mathbb{N}$ dobimo torej skupni graf, ki je superpozicija več grafov. Naivno bi pričakovali, da za $\tau = 1.5$ dobimo superpozicijo treh grafov, tisti, ki ustrezano k , k' in $k+k'$. Vendar temu ni tako. Dobimo superpozicijo štirih grafov (slika 4). Intuitivno je to zato, ker je treba opazovati „periodo“ brc, ki je na tabeli 1.

Tabela 1: Primer tabele periode brc za primer $\tau = 1.5$, $\theta = 0$.

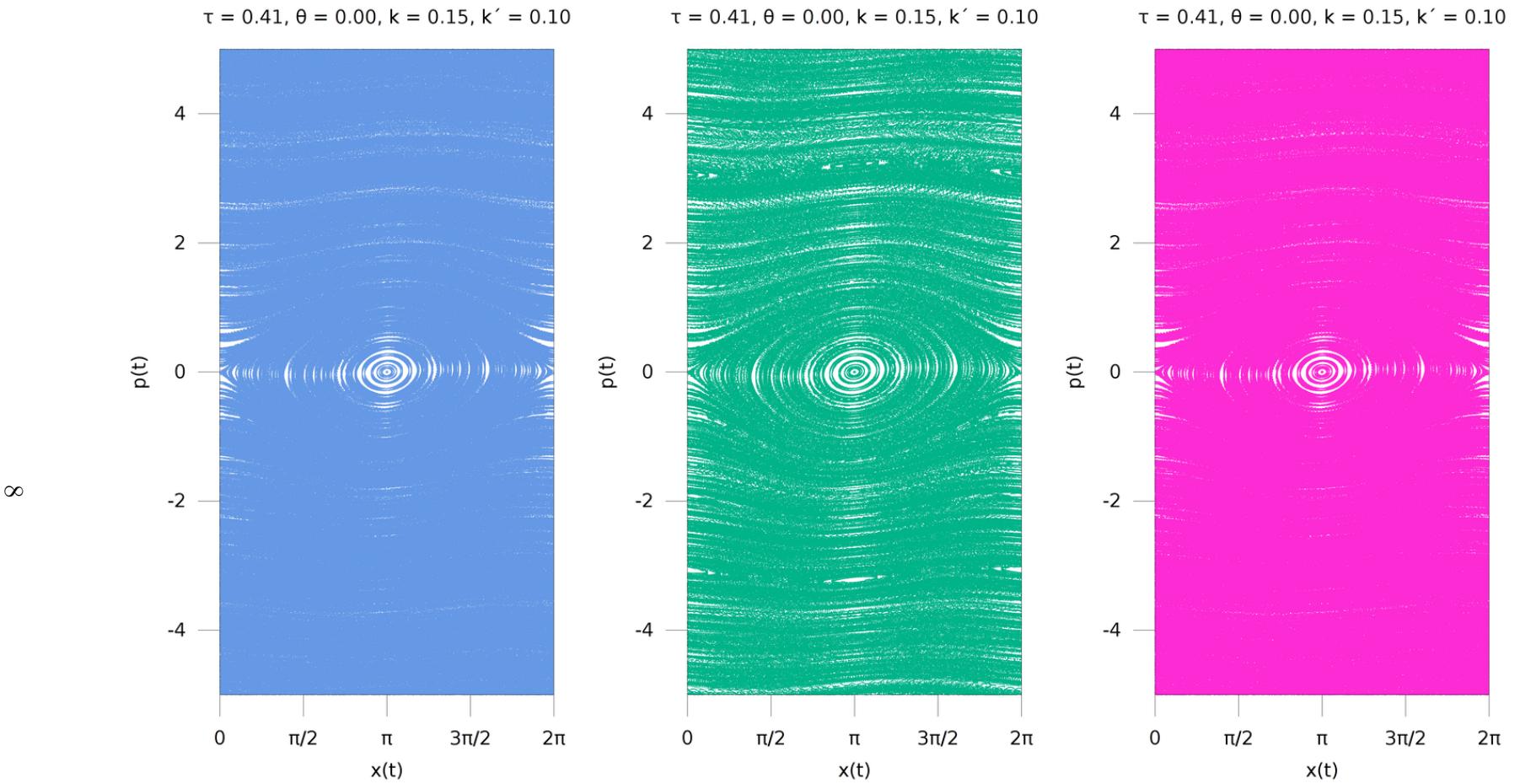
t_i	K_i
0	$k+k'$
1	k
1.5	k'
2	k
3	$k+k'$
\vdots	\vdots

Znotraj ene periode (tj. od $t = 0$ do tik pred $t = 3$) brcnemo štirikrat, zaradi česar vidimo na sliki 4, da nam razcep na $K_i = k$ in $K_i \in \{k', k+k'\}$ ni zadosten, saj je vsak izmed razcepljenih grafov sestavljen iz dveh, tj. je razlika tudi po tem, kdaj udarimo in ne le s kakšnim sunkom.

Za grafe z inkomenzurabilnim razmerjem frekvenc (tj. tak $n \in \mathbb{Z} \ni n\tau \in \mathbb{N}$ ne obstaja) nimamo cele periode, pač pa imamo nekakšno kvazi-periodično obnašanje. Naredil sem primer $\tau = \sqrt{2} - 1$ za različne k , k' in prišel do sklepa, da je kljub temu, da je obnašanje v ozadju videti urejeno, še vedno preveč kaotično za vse možne izbire k , k' (primer je na sliki 5, kjer sem izbral zelo pohlevne parametre, vendar zelo hitro zapolnimo cel prostor z izjemo orbit na sredini grafa).

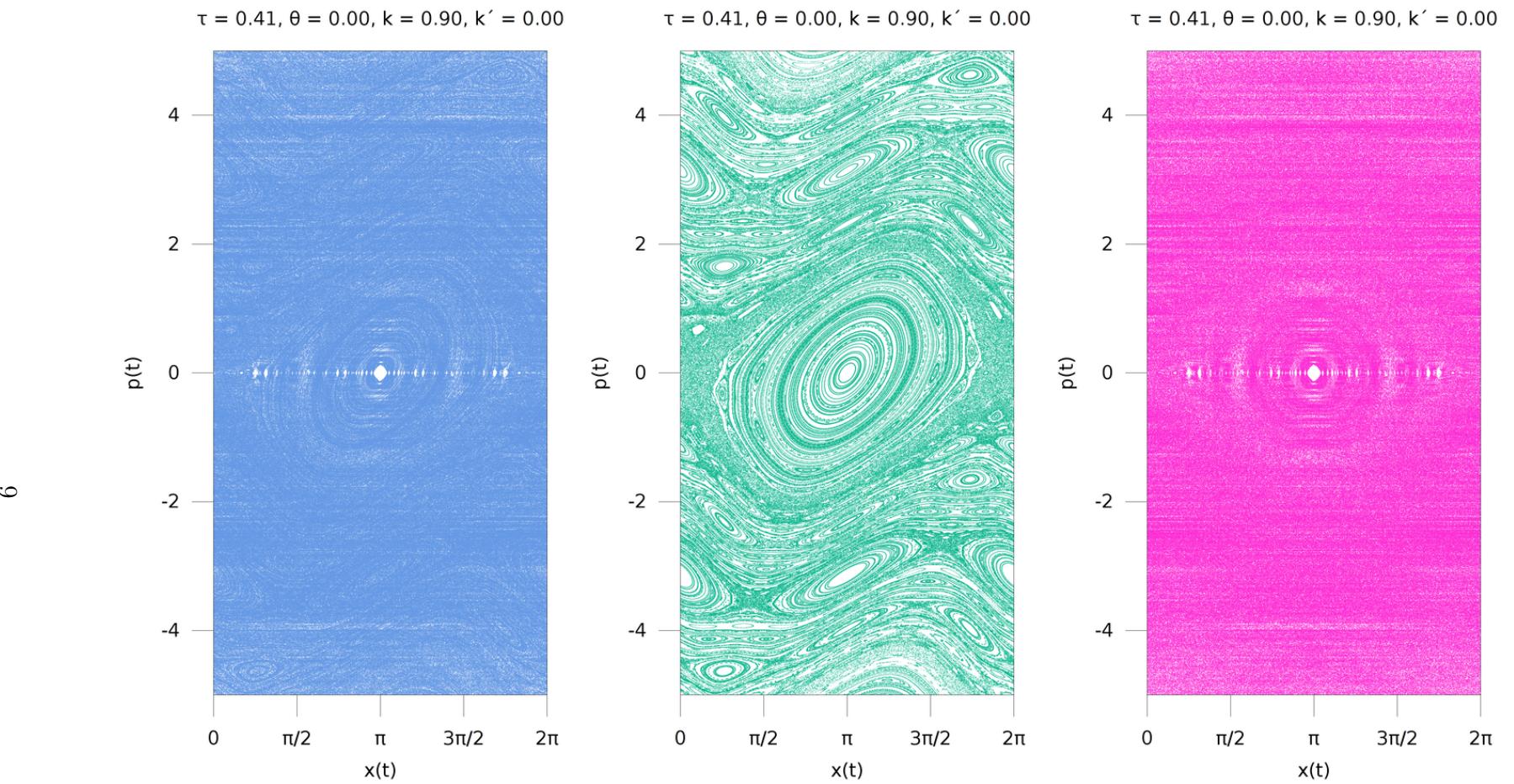


Slika 4: Zeleni graf vsebuje vse sunke tipa k , magenta pa spet $K_i \in \{k', k' + k\}$. Po tabeli 1 vidimo, zakaj ta razcep ni zadosten – niso vsi sunki z istim k enakovredni – pomembno je predvsem *kda* se zgodijo.

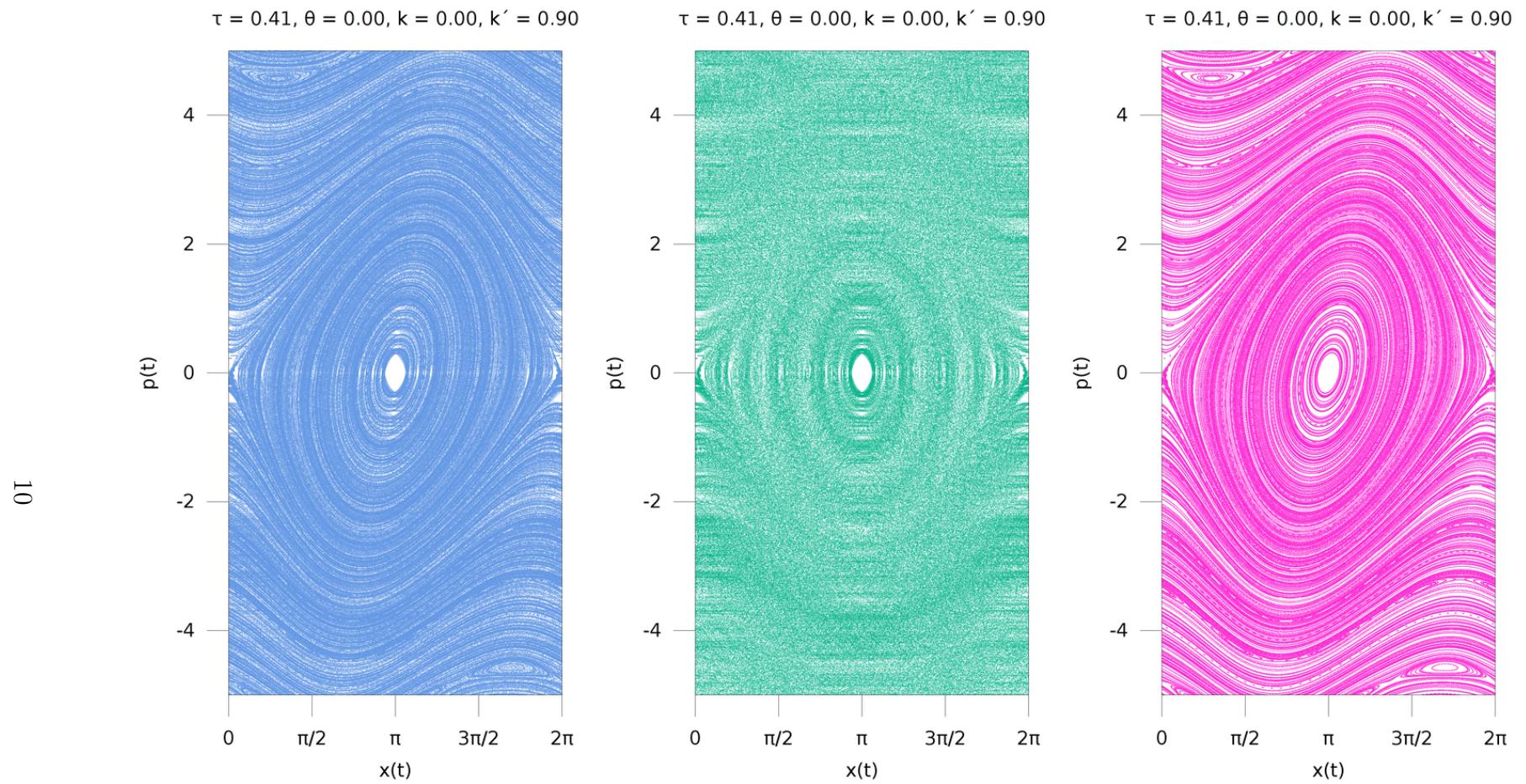


Slika 5: Tukaj je $\tau = \sqrt{2} - 1$. Vidimo, da so že brce majnih jakosti premočne. Čeprav vidimo nek red v ozadju, ga žal ne moremo izluščiti.

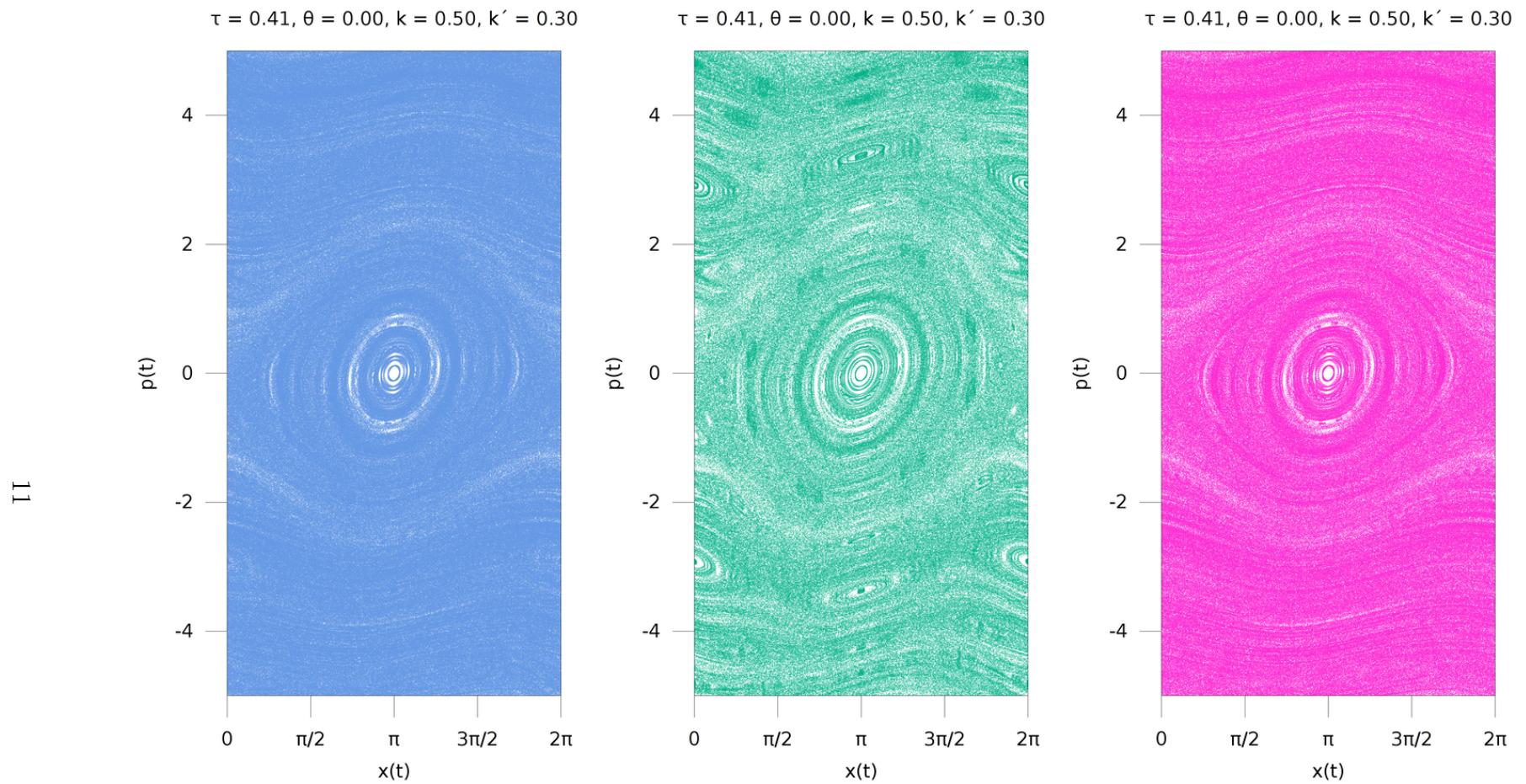
Za zelo majhne k' bi moral zeleni graf biti manj zašumljen. To predpostavko potrdijo grafi slike 6. Grafa lahko separiramo, odfiltriramo šum in dobimo natanko sliko 1.



Slika 6: $\tau = \sqrt{2} - 1$, $k' = 10^{-6}$, $k = 0.9$. Vidimo, da v tem primeru magenta graf predstavlja nekakšen šum. Skupni graf je še vedno močno zašumljen. Zeleni graf je enak grafu slike 1.

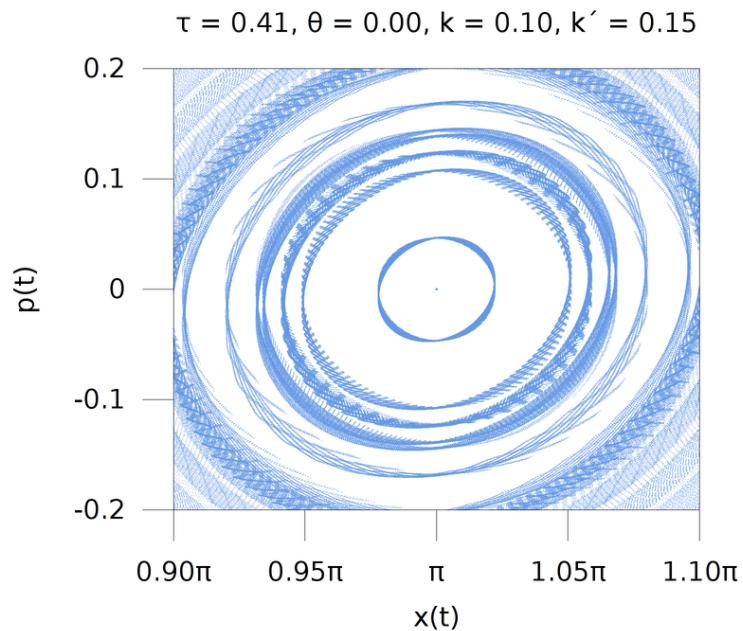


Slika 7: $\tau = \sqrt{2} - 1$, $k = 10^{-6}$, $k' = 0.9$, tj. neke vrste dualni graf sliki 6. Zamenjamo k in k' , in red se prestavi iz zelenega v magenta graf. Vendar pa grafa, ki predstavljata red nista enaka, zaradi tega, ker bi morali ustrezno popraviti tudi τ .

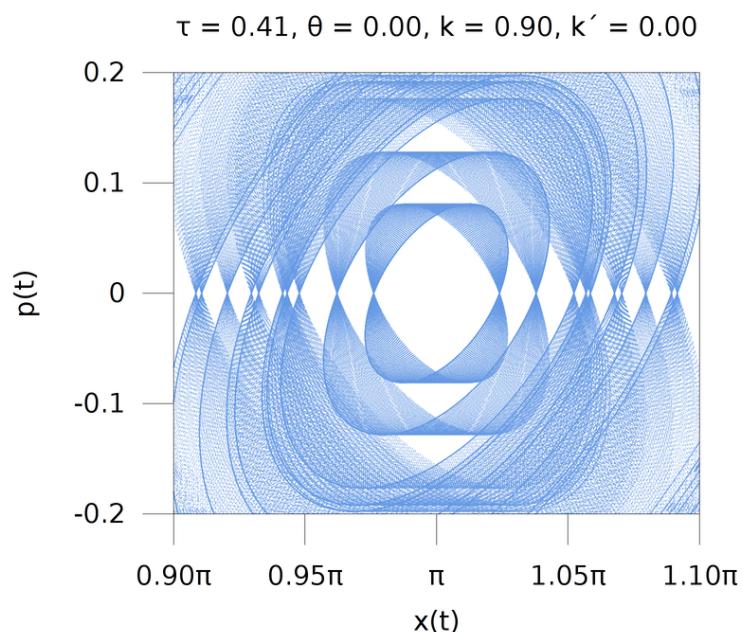


Slika 8: $\tau = \sqrt{2} - 1$. Vidimo, da se vpliv k' kaže kot šum na zeleni graf, ki ga v tem primeru spet nismo mogli odfiltrirati (magenta graf).

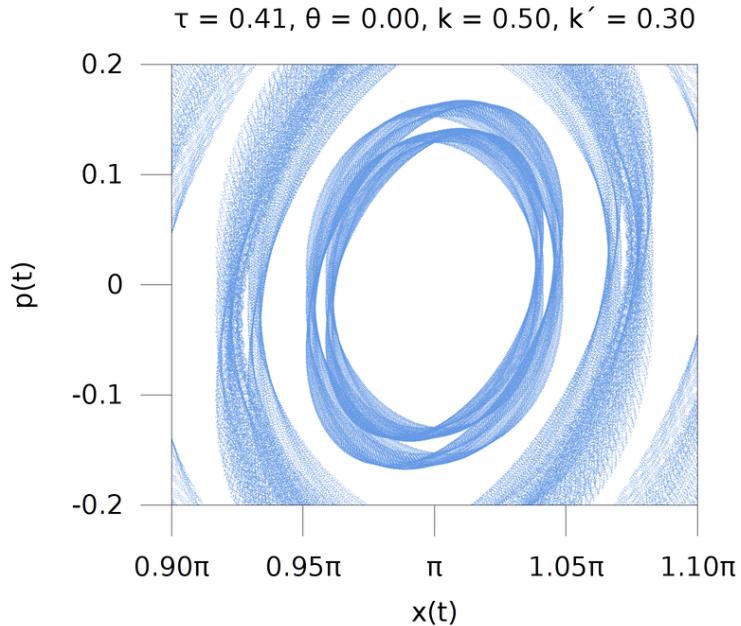
Grafi z iracionalnim τ imajo v sredini otoček stabilnosti – tako je vsaj videti iz slik 5 in 6. Poglejmo si jih od blizu na slikah 9 in 10.



Slika 9: Center slike 5, za $\tau = \sqrt{2} - 1$ in $G = 20$, tj. 20 različnih začetnih pogojev.



Slika 10: Center slike 6. Graf je podoben tistemu na sliki 9.



Slika 11: Center slike 8. $G = 10$. Graf je na moč podoben tistemu, ki je na sliki 9.

Videti je, kot da se orbite „vrtijo“ v neki dodatni dimenziji in da vzbujanje s k' in frekvenco τ poskrbi za to, da je relaksacijski čas izjemno dolg. Pobližan center slike 7 manjka, ker je podoben tistemu iz slike 10.

3.2 Korelacie

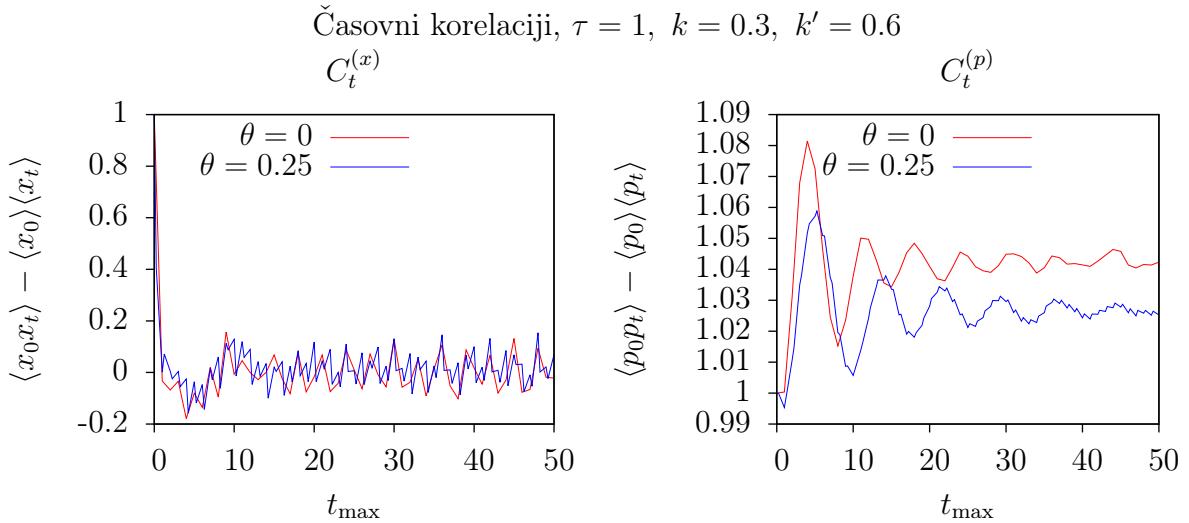
Pod korelacije sem razumel predvsem difuzijsko konstanto, tj.

$$D \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} D_t, \quad D_t \equiv \frac{1}{2t} \left[\frac{1}{G} \sum_{k=1}^G (p_0^{(k)} - p_t^{(k)})^2 \right], \quad (4)$$

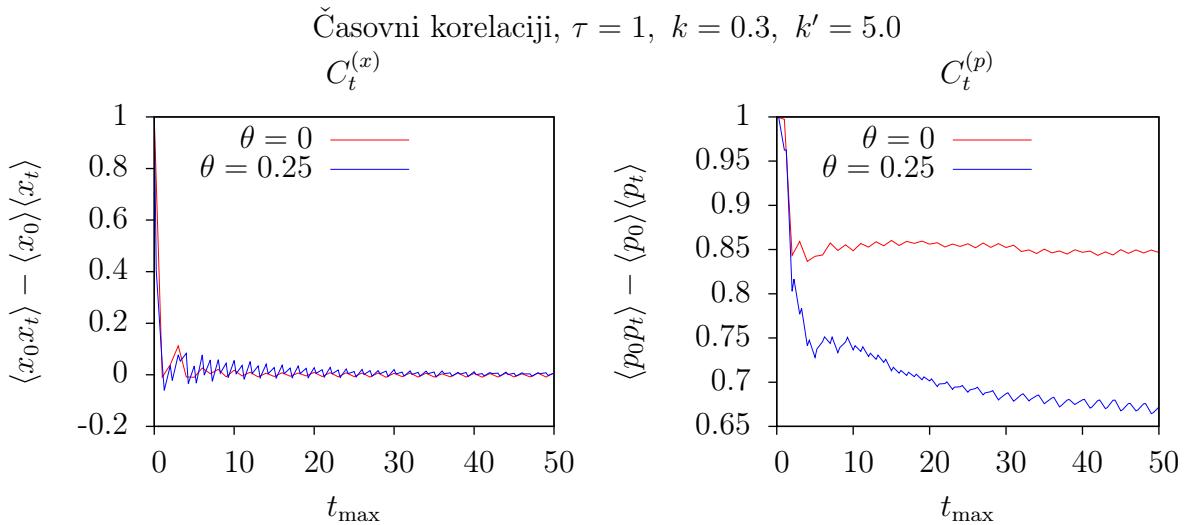
in pa korelacie

$$C_t^{(p)} \equiv \langle p_0 p_t \rangle - \langle p_0 \rangle \langle p_t \rangle, \quad C_t^{(x)} \equiv \langle x_0 x_t \rangle - \langle x_0 \rangle \langle x_t \rangle, \quad (5)$$

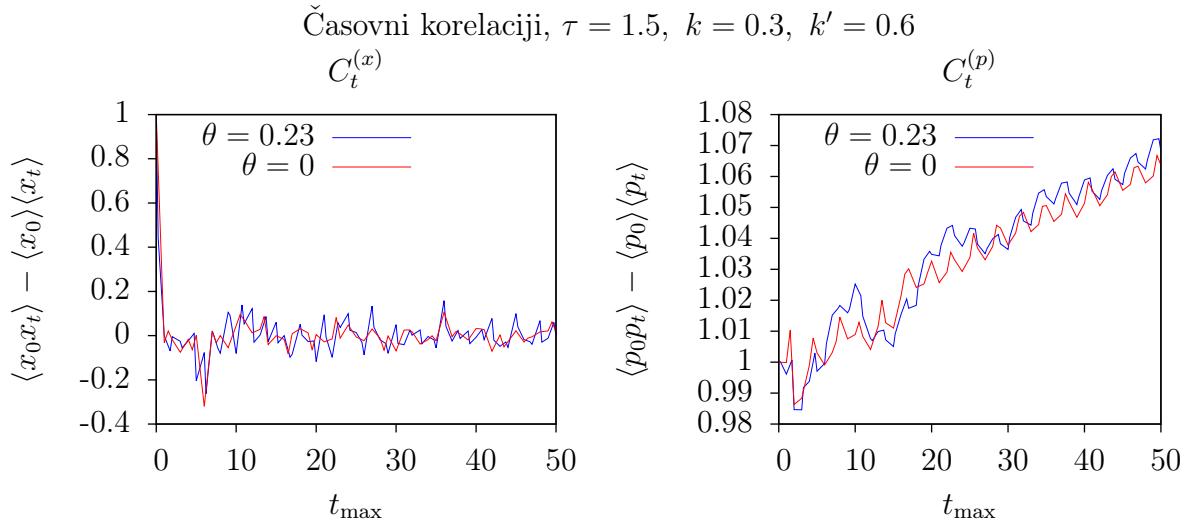
torej bomo ‘ $\langle \bullet \rangle$ ’ razumeli kot povprečenje po različnih tirnicah, označenih s k , ki se ločijo po začetnih pogojih. Korelacie je treba verjetno še normirati na začetno vrednost, tj $C_0 = 1$. Rezultate vidimo na grafih spodaj. Da bi odpravil vplive statističnega šuma, sem vzel zelo velik G . Ugotovil sem, da se rezultati ne spremenijo če je $G = 0.5 \cdot 10^6$ ali pa $G = 10^6$, zato sem delal kar z $G = 5 \cdot 10^6$. To sem preveril za vse izmed spodnjih grafov.



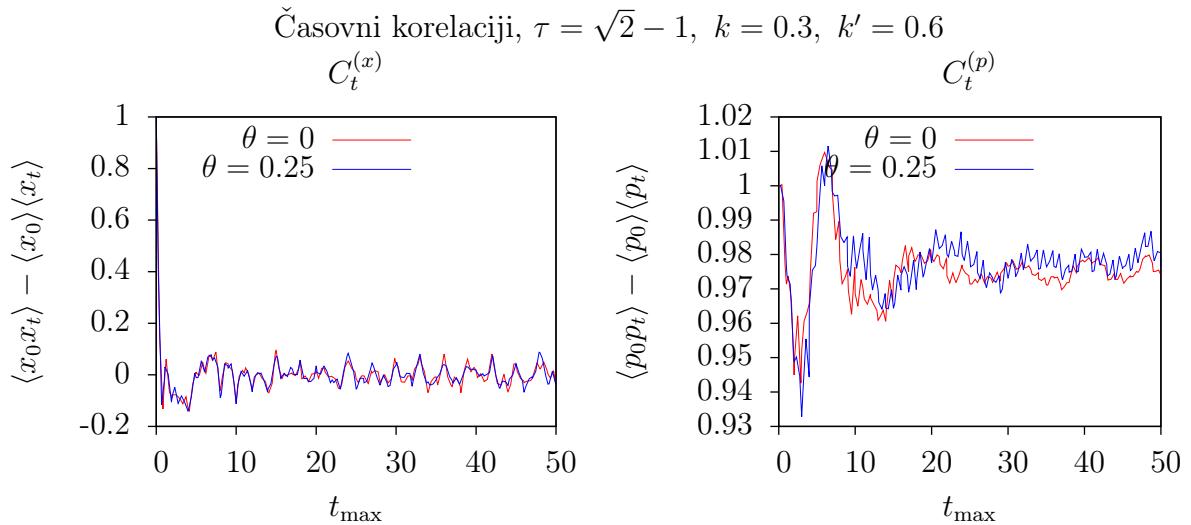
Slika 12: Tu primerjamo korelacijske funkcije na grafih s slik 1 in 2. Vidimo, da sprememba θ na $C_t^{(x)}$ praktično ne vpliva, spremeni pa se $C_t^{(p)}$.



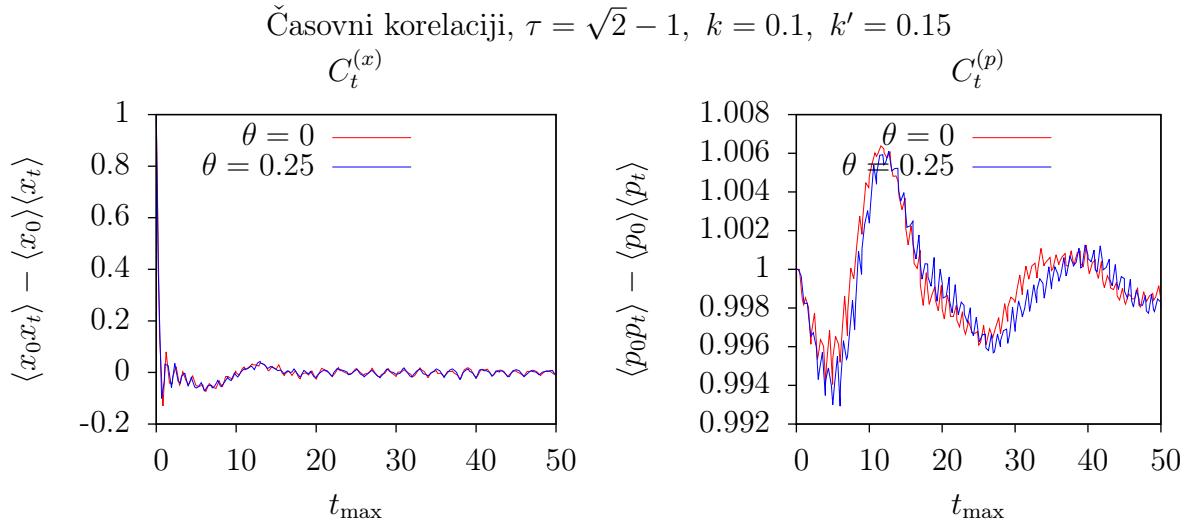
Slika 13: Za primer si poglejmo še bolj kaotičen režim in vpliv θ v tem primeru na korelacijske funkcije. Glede sliko 12 korelacijski faktor $C_t^{(x)}$ manj opletajo okoli ničle. Vidimo, da zaradi kaotičnosti sistema korelacijski faktor $C_t^{(p)}$ hitro padajo, $\theta \neq 0$ to upadanje pospeši.



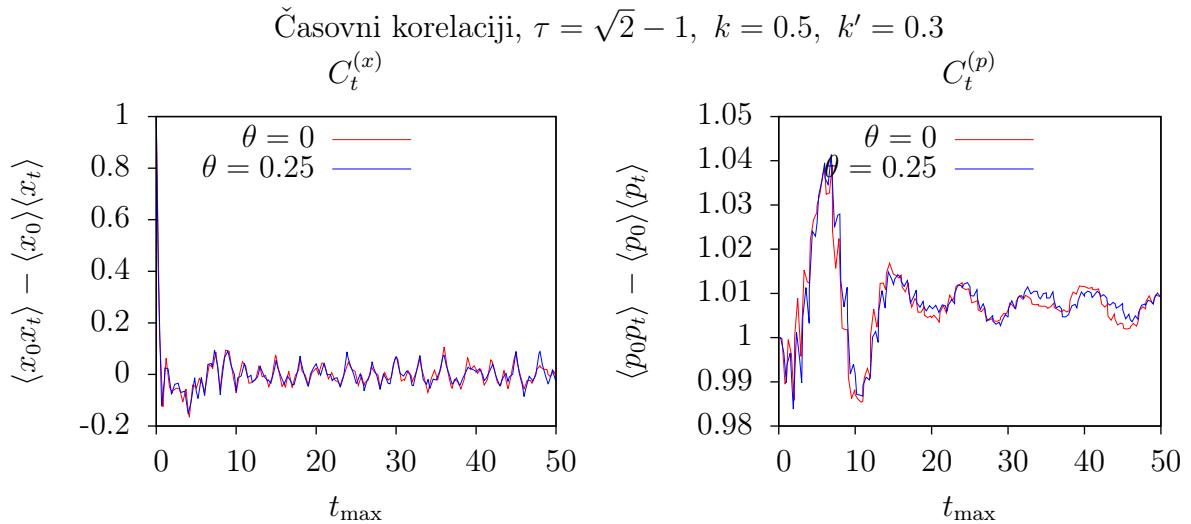
Slika 14: Ta graf tudi ob velikem G ostaja skrivnost. Morda je $G \sim 10^6$ še vedno premalo, saj takega naraščajočega trenda ne znam pojasniti.



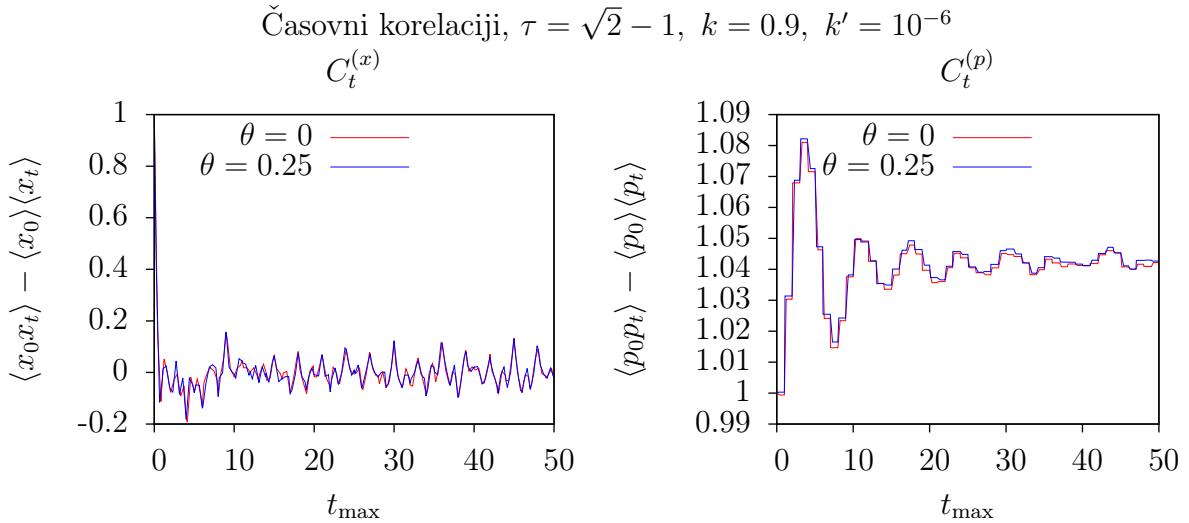
Slika 15: V tem primeru je $\tau = \sqrt{2} - 1$ vendar graf ni bistveno drugačen od tistega s slike 12. Vidimo le, da je vpliv θ v grafu $C^{(p)}$ v tem primeru zadušen, vendar vseeno prinese fazno razliko, ki pa je praktično ne vidimo. Verjetno θ nima vpliva kadar je τ iracionalen.



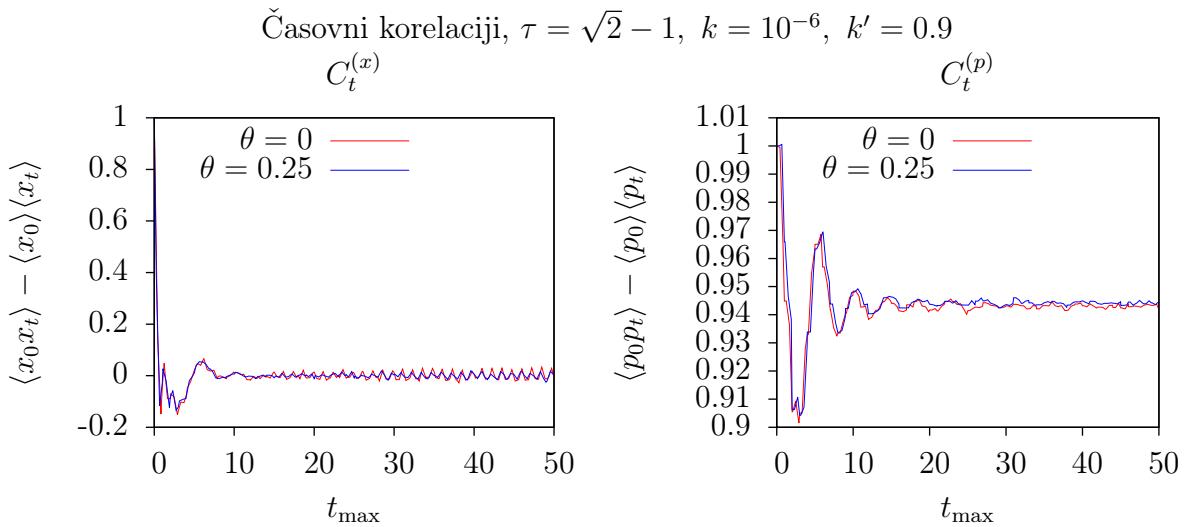
Slika 16: Na sliki so korelacijsi ki se nanašajo na fazni portret 5. Zaradi majhnih k in k' se gibalna količina ne izniha tako hitro. Vpliv $\theta \neq 0$ je zanemarljiv. Zanimiv se mi zdi minimum v pri $t \sim 5$ za $C_t^{(x)}$, ki je sicer prisoten v vseh grafih, vendar tu bolj čist.



Slika 17: Na sliki so korelacijsi ki se nanašajo na fazni portret 8. V tem primeru sta k in k' večja, zato se tudi $C_t^{(p)}$ prej izniha.



Slika 18: Na sliki so korelacijsi ki se nanašajo na fazni portret 6.
Ta graf se izninha še prej.



Slika 19: Na sliki so korelacijsi ki se nanašajo na fazni portret 7. Ta graf je zelo lep za $C_t^{(p)}$, vendar $C_t^{(x)}$ vzbuja skrb zaradi naraščanja amplitudne z večanjem t .

Grafi na slikah 16, 17, 18 in 19 potrjujejo domnevo, ki smo jo dobili na sliki 15, da θ nima vpliva na korelacijsi, v primeru ko je τ iracionalno število.

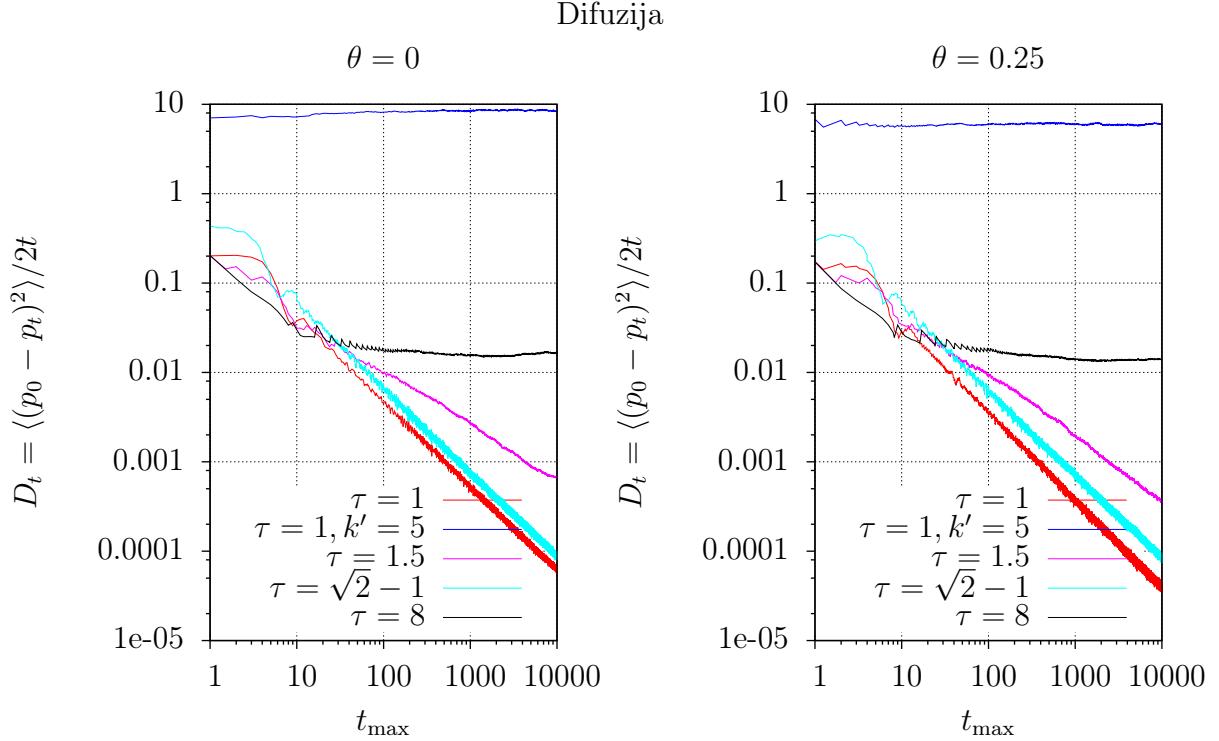
3.2.1 Difuzijska konstanta

Rezultati numeričnega poskusa so na sliki 20. Grafi so vsi prikazani s $k = 0.3$ in $k' = 0.6$, razen če piše v legendi drugače. Vidimo, da je $D = 0$ za $k = 0.3$, $k' = 0.6$ dokler ne presežemo neke kritične meje.

S poskušanjem sem ugotovil, da se to zgodi ko $\tau = \tau_{\text{crit.}} \sim 6$. Tudi če povečujemo $\tau \rightarrow \infty$ se rezultati (tj. D) ne spremenijo bistveno. Edini način, da D močno povečamo,

je prek k in k' , kot se tudi vidi na sliki 20.

Prav tako sem s poskušanjem ugotovil, da so grafi najbolj zamaknjeni, ko $\theta \sim 0.25$, zaradi česar sta grafa na sliki 20 prikazana pri $\theta = 0$ in $\theta = 0.25$.



Slika 20: Vidimo, da fazni zamik θ malo vpliva tudi na difuzijsko konstanto. Ta je praktično ves čas $D = 0$, razen v primeru ko imamo kaotičen sistem (tj. primer $k' = 5$). Vidimo, da je dovolj tudi, če je $\tau > \tau_{\text{crit.}}$. V tem primeru se to nanaša na $\tau = 8$, tu je $D \neq 0$.

3.3 Ljapunov eksponent

Ljapunov eksponent določimo prek

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} t_i \lambda_i, \quad (6)$$

kjer je t_i čas ob katerem reskaliramo razdaljo med tirnicama, ki sta bili tik pred reskalacijo oddaljeni za $\delta_0 \varepsilon^{\lambda_i}$. Vendar pa nimamo na voljo neskočno dosti časa, zaradi tega bomo λ izračunali s pomočjo prilagajanja premice na točke našega numeričnega poskusa s pomočjo linearne regresije:

$$t\lambda + C = \sum_{i=1}^{t_i \leq t} t_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (7)$$

od koder je očitno, da je λ smerni koeficient premice. Kot pravi literatura, je izračun λ močno odvisen od časa pri katerem reskaliramo. Lahko reskaliramo vsakič, ko $\delta_0 e^{\lambda_i} =$

$\delta_{t_i} > \pi$, ali pa ob enakih časovnih intervalih. Spet, kot pravi literatura, to je mračna umetnost.

Linearna regresija nam da sledeče rezultate:

$$\lambda = \frac{nb - ga}{nh - g^2}, \quad (8)$$

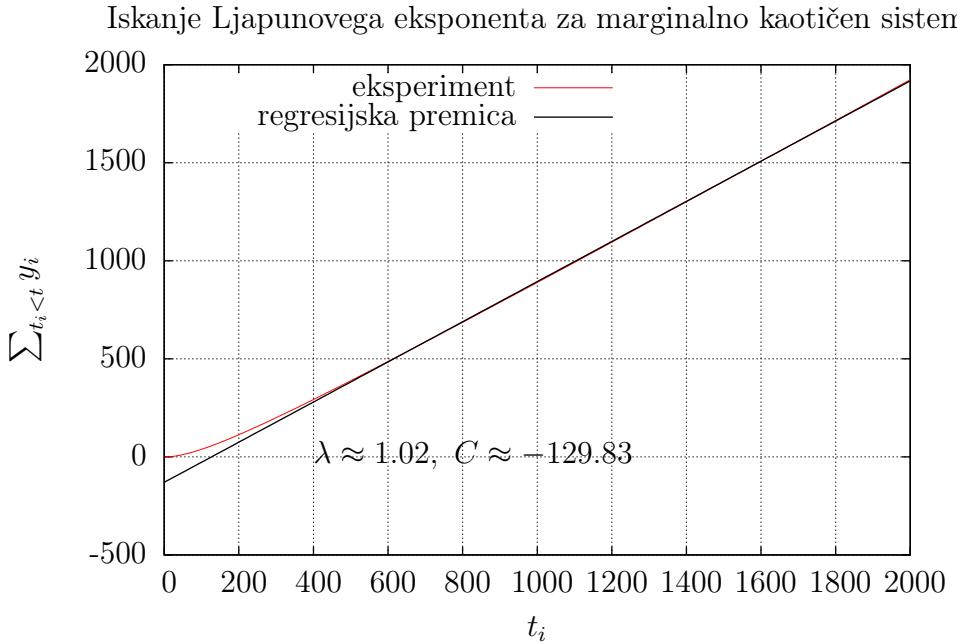
$$C = \frac{ha - gb}{nh - g^2}, \quad (9)$$

kjer so g , h , a in b definirani kot

$$g = \sum_{i=1}^n t_i, \quad h = \sum_{i=1}^n t_i^2, \quad a = \sum_{i=1}^n y_i, \quad b = \sum_{i=1}^n t_i y_i. \quad (10)$$

Ugotovil sem, da je orbito dobro reskalirati vsakič, ko preteče t_r , ki je nekje med 3 in 6, odvisno od k in k' . Ker je rezultat zelo občutljiv tudi na izbiro začetnih pogojev, sem delal z aritmetično sredino večih tirnic (10^4 je dovolj).

Delovanje preverimo tako, da uporabimo znan rezultat za eno-frekvenčen brcan rotator – ta je marginalno kaotičen za $K \approx 0.971635$, (tj. Ljapunov eksponent mora biti v tem primeru $\lambda = 1$). Slika 21 potrdi našo izbiro postopka za izračun Ljapunovega eksponenta.



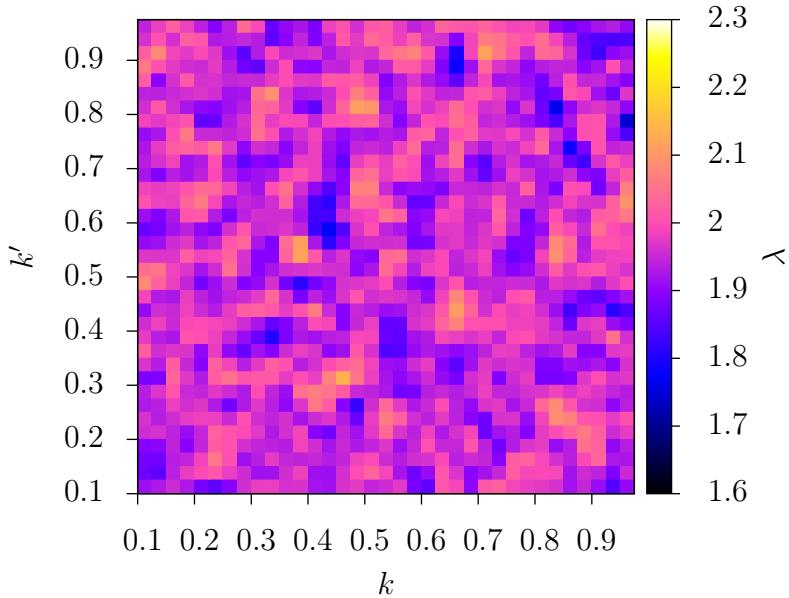
Slika 21: Marginalno kaotičen eno-frekvenčni brcan rotator ($\tau = 1$, $\theta = 0$, $k = 0.3$, $k' = 0.671635$). Napaka Ljapunovega eksponenta v tem primeru je znotraj 5%, kar zadošča za smiseln izračun na širšem območju.

Iz tabele 2 razberemo, da so Ljapunovi eksponenti močno odvisni od t_r , vendar imamo to srečo, da je za inkomenzurabilne vrednosti $\tau < 1$ vedno dober $t_r = 1$, in da je vpliv θ v tem primeru ničen (je zadušen znotraj 5% napake).

Tabela 2: Ljapunovi eksponenti za nekatere fazne portrete v poročilu. Navajal bom samo τ in θ , ostali parametri (k in k') razvidni iz komentarja pod posameznimi faznimi portreti (slike 3, 4 in 5). Vidimo, da so grafi, prešli kritično mejo. Separabilni grafi so kljub temu močno v kaotičnem režimu, sploh pa graf na sliki 5 za $\tau = \sqrt{2} - 1$, kljub temu, da je bil v ozadju videti dosti pohlevan. Ostale vrednosti so bile izračunane (tj. vrstice pod $\tau = \sqrt{2} - 1$) so bile izračunane za $k = 0.3$ in $k' = 0.6$.

τ	θ	t_r	λ
2	0	4	1.26
1.5	0	3	1.44
$\sqrt{2} - 1$	0	1	1.77
$\sqrt{2} - 1$	0.25	1	1.79
1	0.25	1	3.67
1	0.25	1.25	0.64
6	0	3	0.61
6	0	6	1.14

Funkcija $\lambda(k, k'; \tau = \sqrt{2} - 1, t_r = 1)$ je na sliki 22. Vidimo, da je sistem v bistvu cel čas močno kaotičen.



Slika 22: Vrednost ljapunovega eksponenta je ves čas $\lambda > 1.5$, kar pomeni, da z izbiro parametrov ne dosežemo niti marginalne stabilnosti orbit. Ker je računalnik to računal dlje časa, sem G zmanjšal iz 10^4 na 2000.

4 Zaključek:

Enačba (3) in slike 1, 2, 3, 4, 5 prikazujejo fazne portrete, tj. se da dinamiko posplošiti in predstaviti. Slika 2 dodatno prikazuje, da $\theta \neq 0$ lahko privede do novih, (ne)pričakovanih situacij – θ ima vpliv, kar potrujejo korelacijski grafi na slikah 12, 13, 14 in opazovanje D_t na sliki 20, vendar pa ne vpliva v primeru, ko je so razmerja frekvenc τ inkomenzurabilna, tj. τ iracionalen, kar se vidi na grafih 15, 16, 17, 18 in 19. Če je $D_t \propto t^{-\alpha}$, potem s τ spremojamo α . Na ljapunov eksponent θ nima opazljivega vpliva. Za inkomenzurabilne vrednosti τ je sistem vedno kaotičen, kar lahko vidimo na sliki 22.