Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za fiziko
Fizika II. stopnja, Matematična fizika

Jože Zobec

Mase fermionov standardnega modela znotraj minimalne teorije poenotenja $SO(10)$ z dodatnimi težkimi generacijami fermionov

Magistrsko delo

MENTOR: prof. dr. Borut Bajc

Ljubljana, 2014

Izjava o avtorstvu in objavi elektronske oblike zaključnega dela:

Podpisani Jože Zobec, rojen 30. 10. 1989 v Ljubljani, izjavljam:

- da je magistrsko delo z naslovom *Mase fermionov standardnega modela znotraj minimalne teorije poenotenja $SO(10)$ z dodatnimi težkimi generacijami fermionov* rezultat mojega samostojnega dela pod mentorstvom prof. dr. Boruta Bajca,
- da je tiskani izvod dela identičen z elektronskim izvodom in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh Repozitorjia Univerze v Ljubljani.

Ljubljana, 2. oktober 2014 Jože Zobec

Povzetek

V tej magistrski nalogi predstavimo minimalen model znotraj teorije poenotenja $SO(10)$, ki da mase lahkim fermionom. To naredimo tako, da poleg treh generacij, ki so v 16-dimenzionalni upodobitvi, dodamo še dve novi težki generaciji fermionov, od katerih je ena v 16-dimenzionalni upodobitvi ena pa v dualni 16-dimenzionalni upodobitvi. Tako lahko sestavimo minimalen model, kjer zadošča da se lahki fermioni sklapljajo le s Higgsovim poljem v dualni 126-dimenzionalni upodobitviji. Neničelne vakuumske pričakovane vrednosti tega polja lahko izberemo tako, da damo mase vsem fermionom standardnega modela. Glavna motivacija je predvsem napoved mas nevtrinov, ki dobijo mase z gugalničnim mehanizmom tipa I in tipa II. Sprva bomo testirali model v približku dveh generacij, nato pa posplošili na tri.

Ključne besede: velika teorija poenotenja, $SO(10)$, gugalnični mehanizem, mase nevtrinov, mešalni koti nevtrinov, mešalni koti kvarkov.

Abstract

In this thesis we consider a minimal $SO(10)$ grand unified model, by which we give masses to the standard model fermions. The main premise of the model is that by adding to the standard model fermions in the three 16-dimentsional representations two new generations in 16-dimensional and dual 16-dimensional representation, we can now couple the light fermions with just one Higgs field in dual 126-representation. The main motivation of this work is predicting the neutrino masses, which are given through see-saw mechanism of type I and type II. At first we will test this model in two-generation approximation and then we will try to predict using all three generations.

Keywords: grand unification theory, $SO(10)$, see-saw mechanism, neutrino masses, neutrino mixing angles, quark mixing angles.

PACS: 12.10.Kt, 12.10.Dm, 12.15Ff, 14.60.Pq, 14.60.St

Kazalo

Poglavje 1

Uvod

Standardni model je ta hip najbolj precizna teorija v fiziki. Delce, za katere ta hip empirično verjamemo, da so nedeljivi, smiselno razvrsti in opiše njihove interakcije ter tako pojasni makroskopske pojave s pomočjo najosnovnejših pojavov, ki se dogajajo na zelo majhni skali.

Kljub dobrim in zelo lepin lastnostim standardnega modela, obstajajo eksperimentalne indikacije, da standardni model ni popoln. S teoretičnega vidika bi zelo težko pojasnili izmerjeno asimetrijo CP in pa nesorazmernost v vsebnosti snovi proti vsebnosti anti-snovi v našem vesolju. To bi lahko pojasnili z razpadom protona, ki ni dovoljen v standardnem modelu. Prav tako zahteva zahteva, da so nevtrini brezmasni, ni več podprta s strani eksperimentov, a standardni model jih ne more umestiti drugače. Še ena hiba standardnega modela je ta, da ne more pojasniti kvantizacije električnega naboja in ne more predvideti števila generacij fermionov.

Standardni model med fermionskimi polji opisuje tri fundamentalne interakcije in njihove nosilce, ki so bozoni. Te tri interakcije so močna, šibka in elektromagnetna. Ker so osnovni delci izjemno lahki, gravitacijo zanemarimo, ta bi sicer bila četrta fundamentalna interakcija. Kako naj torej pojasnimo npr. razpad protona? Lahko ugibamo o obstoju nove, še neodkrite interakcije, katere vloga postane bolj očitna pri višjih energijah. Poleg bozonov, ki so nosilci interakcij obstajajo tudi ti. Higgsovi bozoni, ki dajo maso prek Higgsovega mehanizma, na račun tega, da interakcijo zadušijo na nizkih energijskih skalah. Tako bi lahko dali nevtrinom mase in omogočili protonski razpad.

Tak način razmišljanja je odprl novo raziskovalno področje v teoriji osnovnih delcev, ki se imenuje teorija poenotenja[1], ki skuša iti korak dlje – namesto tega, da bi dodali le eno novo interakcijo, trdimo da v osnovi obstaja le ena sama, ki se zaradi prisotnosti Higgsovih polj prikazuje v treh oblikah. Tak pristop nam omogoča poenostavitev, saj poleg poenotenja znanih interakcij, poenotimo tudi fermionska polja. S seboj pa prinese tudi komplikacije, saj ima tipično več nosilcev interakcij – te uporabimo za teoretično pojasnilo eksperimentov, ki se jih ni dalo znotraj standardnega modela. S pravo teorijo poenotenja bi lahko pojasnili vse to, kar nam manjka.

Na žalost, pa je tako teorijo zelo težko preveriti. Poenotenje se predvidoma zgodi na energijski skali $\Lambda_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV [1]. Zaenkrat smo z eksperimenti šele pričeli z

[1] *ang.* Grand Unified Theory – GUT.

raziskovanjem področja od 100 GeV do 1000 GeV kar je zaenkrat inženirski podvig znanih prijemov. Obstaja realna možnost, da ne bomo nikdar mogli potrditi oz. ovreči teorije poenotenja.

Vendar, če bomo opazili protonski razpad, bomo zmožni prav tega. In ne le to – prek študije protonskega razpada bomo mogli tudi povedati katera interakcija je tista v visokih energijah, tj. s katero umeritveno grupo jo lahko opišemo. To je možno narediti z eksperimenti pri nizkih energijah, ki se odvijajo na Japonskem, v Super-Kamiokande. Odsotnost protonskega razpada pa žal teorije poenotenja ne more ovreči, saj so obstajajo tako teorije, ki ga vsebujejo, kot tudi, ki ga nimajo.

V teoriji poenotenja so glavni kandidati za umeritveno grupo poenotene interakcije predvsem $SU(5)$, $SO(10)$ in E_6. Prva teorija poenotenja je bila narejena ravno prek $SU(5)$, katera pa ima še vedno sterilne desnoročne nevtrine, ki bi jih potrebovali za maso. Pričakujemo, da tudi slednji sodelujejo v interakcijah. To lahko storimo z umeritveno grupo $SO(10)$, ki pa nam da pravo bogastvo. Poleg tega, da kvantizira električni naboj, je to tudi teorija „levo-desno“ simetričnega vesolja. Pri nizkih energijah imajo namreč ti. levoročni delci poseben status. Še vedno pa to ni teorija, ki bi napovedala število generacij – za to bi potrebovali vsaj $SU(9)$, ki ima za podgrupo $SU(3)_L \times SU(3)_C \times U(1)_X$, kot so to storili v [8].

Tudi mi bomo tekom tega dela uporabili model poenotenja prek $SO(10)$. Osredotočili se bomo predvsem na problem nevtrinskih mas in mešalne matrike v leptonskem sektorju, to je matrike Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS), ki je analogija mešalne matrike v kvarkovskem sektorju, Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM).

To delo je v grobem razdeljeno na tri dele. V prvem delu bomo na kratko povzeli standardni model, teorijo poenotenja $SO(10)$ in mehanizem, ki da nevtrinom mase. V drugem delu bomo predstavili teoretičen model, ki ga bomo preučili tekom tega dela. Tretji del bo namenjen diskusiji rezultatov. Delali bomo v enotah $\hbar = c = \varepsilon_0 = 1$.

Poglavje 2

Standardni model

Standardni model (SM) z zelo dobro preciznostjo opiše naše razumevanje sveta osnovnih delcev od nekaj 10 eV (pri nizkih energijah postane barvna interakcija neperturbativna), pa do nekaj 100 GeV, do koder smo zaenkrat eksperimentalno raziskali energijsko področje. To je model, ki uspe celotno znano snov opisati prek interakcij fermionskih in bozonskih polj.

2.1 Fermionska polja

Fermionska polja, tj. polja s pol-celim spinom, delimo na kvarke in leptone, prikazana pa so v tabeli 2.1.

Tabela 2.1 – Fermionska polja standardnega modela. Vidimo, kako so razvrščena v družine (generacije), zaradi česar so stolpci oštevilčeni, 'Q' pa predstavlja električni naboj, ki ga to polje nosi.

1.	2.	3.	Q
u	c	t	$+2/3$
d	s	b	$-1/3$

(a) kvarki

1.	2.	3.	Q
ν_e	ν_μ	ν_τ	0
e	μ	τ	-1

(b) leptoni

Leptone lahko dodatno delimo na električno nabite leptone (kot je na primer elektron) in na električno nevtralne leptone, katere imenujemo *nevtrini*, ki imajo v SM poseben status, saj so znotraj SM edino fermionsko polje, ki nima mase.

Kot posledica Lorentzovih transformacij imamo poleg teh polj tudi njim pripadajoče anti-delce, oz. polja s konjugiranim nabojem. Npr. fermionsko polje ψ bi s konjugacijo naboja postalo ψ^c,

$$\psi^c = \psi^T i\gamma_0\gamma_2 = \psi^T C^{-1}, \tag{2.1}$$

kjer je C operator konjugacije naboja. To pomeni, da imamo poleg fermionov tudi anti-fermione, ki se od njih razlikujejo le po predznaku električnega naboja. Prikazani so v tabeli 2.2.

Tabela 2.2 – Anti-fermionska polja SM, tj. fermioni s konjugiranim nabojem.

1.	2.	3.	Q
u^c	c^c	t^c	$-2/3$
d^c	s^c	b^c	$+1/3$

(a) anti-kvarki

1.	2.	3.	Q
ν_e^c	ν_μ^c	ν_τ^c	0
e^c	μ^c	τ^c	+1

(b) anti-leptoni

Nevtrini imajo tu spet poseben status, saj so električno nevtralni – lahko so sami sebi anti-delci, tj. $\nu = \nu^c$. To so ti. nevtrini Majorane. Kadar velja $\psi^c \neq \psi$ pa govorimo o Diracovih fermionih. Lahko zgradimo teorijo, kjer so fizikalni nevtrini sestavljeni iz obeh prispevkov, več o tem v nadaljevanju.

Kvarkovska (in anti-kvarkovska) polja nosijo poleg električnega naboje tudi ti. *barvni naboj*, ker interagirajo prek barvne interakcije. Nosijo lahko katerokoli izmed treh barv, rdečo – r, zeleno – g, ali pa modro – b. Anti-kvarki nosijo anti-barve, $\bar{r}$, $\bar{g}$ in $\bar{b}$. To pomeni da lahko kvarkovska polja dobimo v treh različnih variantah. Take barve so izbrane, ker so vsi fizikalni sestavljeni delci navzven brezbarvni, tj. *bele* barve.

Še ena stvar nas v SM spravlja v zagato. Delce lahko namreč razločimo po „ročnsti“. Dočim so nabiti fermioni lahko levo- in desnoročni, eksperimenti niso odkrili desnoročnega nevtrina, zaradi česar so nevtrini v SM izključno levoročni. Za anti-delce velja

$$\psi_L \xrightarrow{C} \psi_R^c, \quad \psi_R \xrightarrow{C} \psi_L^c, \tag{2.2}$$

torej levoročen fermion po konjugaciji naboja postane desnoročen anti-fermion in obratno. Taka kiralna stanja dobimo z operatorjem ročnosti,:

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5), \quad P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5). \tag{2.3}$$

To sta projekcijska operatorja z lastnostmi $P_{L,R}^2 = 1$ in $P_L P_R = 0$, saj $\gamma_5^2 = 1$ in $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$. Matrika γ_5 je ena izmed matrik γ iz Lorentzove grupe. Od tod dobimo identiteto

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0, \Rightarrow \bar{\psi}_L = (\psi_L)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger P_L \gamma_0 = \bar{\psi} P_R, \tag{2.4}$$

torej je $\bar{\psi}_L$ v resnici desnoročen. To pomeni, da

$$\bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi}_R \psi_R = 0, \tag{2.5}$$

zaradi česar ne moremo eksplicitno zapisati masnih členov takih polj, ampak so lahko le brezmasna [2]. Taka polja imenujemo Weylova. Fermioni v SM so tipično sestavljeni iz obeh komponent, tj.

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \tag{2.6}$$

Tu je ψ Diracovo polje, zapisano z Weylovimi. Lagrangian za prosto Diracovo polje z maso m lahko v tem primeru z Weylovimi polji zapišemo kot

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_R \partial\!\!\!/ \psi_R + i\bar{\psi}_L \partial\!\!\!/ \psi_L - m(\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R). \tag{2.7}$$

Nevtrini so v SM le levoročni $\nu = \nu_L$ in nimajo desnoročnega prispevka – zaradi tega morajo biti brezmasni. Ker imajo dobro definirano ročnost so to Weylova polja.

Ob upoštevanju barve imamo v SM skupaj 24 različnih fermionskih polj, ki jih moramo nekako urediti in klasificirati, pri čemer lahko ν_R v princupu obstaja, vendar ne interagira z ostalimi polji (kar pojasni zakaj ni bil eksperimentalno potrjen).

2.2 Bozoni in umeritvene interakcije

Bozonska polja nosijo celoštevilski spin. SM ima dva tipa bozonov – umertivene in Higgsove. Umeritveni bozoni so nosilci osnovnih interakcij. V nizkih energijah je dovolj če vzamemo le elektromagnetno in pa barvno, za celosten opis pa moramo namesto elektromagnetne vzeti *elektro-šibko*. Interakcije lahko opišemo s pomočjo ti. umeritvene grupe. To je Lieva grupa, ki je veljavna globalno. Primer invariance na tako grupo je v sliki 2.1.

$$\psi \to \exp(\alpha_i T_i)\psi = \psi$$

(a) lokalna simetrija

$$\psi \to \exp\big(\alpha_i(x) T_i\big)\psi = \psi$$

(b) globalna simetrija

Slika 2.1 – Razlika med globalno in lokalno simetrijo. Koeficienti α_i so v globalni simetriji lahko zvezne funkcije koordinat prostora Minkowskega (tj. prostor-časa).

Umeritvena grupa standardnega modela je produktna grupa posameznih interakcij:

- barvna interakcija – imamo tri osnovne barve, vzamemo $SU(3)_C$,
- elektromagnetna – en nosilec naboja, vzamemo $U(1)_Q$,
- levoročna šibka interakcija – $SU(2)_L$.

Kot je bilo že omenjeno, $U(1)_Q$ ni zadostna pri visokih energijah, ampak moramo vzeti elektrošibko, to je $SU(2)_L \times U(1)_Y$, kjer Y imenujemo *hipernaboj*. Šibka interakcija ima dodaten indeks 'L', s čimer smo želeli povdariti, da se sklaplja le z levoročnimi delci! Zaradi tega je masne člene napisati zelo težko na nivoju SM. Umeritvena grupa SM, označena z $\mathcal{G}_{\text{SM}}$ je tako

$$\mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(2)_L \times SU(3)_C \times U(1)_Y. \tag{2.8}$$

Nosilci takih umeritvenih interakcij so umeritveni bozoni. Njihovo število je enako dimenziji grupe. V $SU(3)_C$ jih imamo 8 in jih imenujemo *gluoni*. To so $G_{\mu,j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. V $SU(2)_L \times U(1)_Y$ vzamemo njihove linearne kombinacije, da dobimo foton iz $U(1)_Q$, A_μ in pa ti. šibke bozone W_μ, $W_\mu^\dagger$ in Z_μ. Ker imajo ta polja po en Lorentzov indeks, μ, jih pravimo vektorska polja in nosijo spin 1. Z izjemo šibkih bozonov so umeritveni bozoni brezmasni.

Množico fermionskih polj lahko razvrstimo v multiplete $\mathcal{G}_{\text{SM}}$. Ti so multipleti so kvarkovski multiplet, Q, ki se obnaša kot dublet nad $SU(2)_L$, triplet nad $SU(3)_C$ in ima hipernaboj $Y = 1/3$, kar označimo

$$Q = (\mathbf{2}, \mathbf{3})_{(1/3)} = \begin{pmatrix} u_r & u_g & u_b \\ d_r & d_g & d_b \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

leptonski multiplet, L,

$$L = (\mathbf{2}, \mathbf{1})_{(-1)} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

anti-kvarkovska tripleta u^c in d^c,

$$u^c = (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{3}})_{(-4/3)} = \begin{pmatrix} u^c_{\bar{r}} & u^c_{\bar{g}} & u^c_{\bar{b}} \end{pmatrix}, \quad d^c = (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{3}})_{(2/3)} = \begin{pmatrix} d^c_{\bar{r}} & d^c_{\bar{g}} & d^c_{\bar{b}} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

pozitron

$$e^c = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(2)} \tag{2.12}$$

in pa anti-nevtrino, ki je singlet nad $\mathcal{G}_{\text{SM}}$,

$$\nu_e^c = (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0)} \tag{2.13}$$

in ga ponavadi ne pišemo, saj to da je singlet nad $\mathcal{G}_{\text{SM}}$ pomeni, da ne interagira prek umeritvenih interakcij. Ker je $\nu = \nu_L$, pomeni $\nu^c = \nu_R$ po prispevku Majorane. Taka razvrstitev fermionov je torej ustrezna, saj pravilno uvrstimo tudi morebitni desnoročni nevtrino.

Tri generacije fermionskih polj pomeni v vsaki generaciji 5 (z desnoročnim nevtrinom 6) različnih multipletov.

Tako žal ne moremo eksplicitno zapisati masnih členov naših nabitih fermionskih polj, saj $m\bar{\psi}_L\psi_R = 0$, tj. $m = 0$. Prav tako masivni šibki bozoni napravijo $SU(2)_L$ nerenormalizabilno. Iz zagate nas rešijo Higgsovi bozoni. To je kompleksen dublet nad $SU(2)_L$,

$$\phi = (\mathbf{2}, \mathbf{1})_{(1)} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

ki zaradi neničelne vakuumske pričakovane vrednosti[1] (vev) spontano zlomi elektrošibko umeritveno simetrijo in dá maso vsem prisotnim poljim prek interakcij Yukawe, ki so členi v Lagrangianu, ki predstavljajo interakcijo med fermioni in skalarnim poljem (tj. skalarno polje ima spin 0),

$$\mathcal{L}_Y \sim y\bar{\psi}\psi\phi, \tag{2.15}$$

kjer y imenujemo *sklopitvena konstanta Yukawe.*

Pozvetek polj SM. Umeritvene bozone SM lahko potem na kratko povzamemo z umeritveno grupo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, preostale delce pa z multipleti Q_g, L_g, u^c_g, d^c_g, e^c_g in ν^c_g in ϕ, kjer g pomeni generacijo.

[1]Ang. *vacuum expectation value* – od tod okrajšava *vev.*

Poglavje 3

Umeritvena grupa $SO(10)$

Grupa $SO(10)$ je posebna ortogonalna Lieva grupa, ki spada v isto kategorijo kot grupe $SO(2N)$ [1], [7], [6]. Ker imajo take grupe veliko skupnih lastnosti si poglejmo najprej splošneje kako je z Lievimi grupami in $SO(2N)$.

3.1 Grupe $SO(2N)$

Elementi posebne ortogonalne grupe so matrike z dvema osnovnima lastnostima [7],

$$O^T O = \mathbb{1}, \quad \det O = 1, \quad \forall O \in SO(2N). \tag{3.1}$$

Te lastnosti imajo tudi operatorji vrtenja, zato jim pravimo tudi rotacijske matrike [7]. Število v oklepaju, $2N$, je celo in nam pove da matrike delujejo na $2N$ dimenzionalnem vektorskem prostoru. Včasih zapišemo še bolj specifično $SO(2N, \mathbb{R})$ ali pa $SO(2N, \mathbb{C})$, da povdarimo nad katerim obsegom je vektorski prostor, ki ga imamo v mislih.

Lastnost Lievih grup je ta, da vsak element dobimo z eksponenciacijo elementov, ki ležijo na zvezni mnogoterosti [7]. Kot posledica sledi, da imajo Lieve grupe neštevno neskončno elementov. Mnogoterost imenujemo algebra grupe. Na mnogoterosti lahko izberemo glavne smeri in tako določimo njeno dimenzijo. To dimenzijo imenujemo tudi dimenzija grupe, ki je za splošne grupe $SO(N)$ enaka [1], [7],

$$\dim SO(N) = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{3.2}$$

To pomeni, da lahko izberemo $N(N-1)/2$ grupnih elementov za matrično bazo algebre in z njimi popišemo tako celo mnogoterost, kot tudi celotno grupo. Bazne matrike imenujemo *generatorji*. Diagonalne operatorje[1] tvorijo ti. *Cartanovo podalgebro*, ki ima to lepo lastnost, da je njena dimenzija enaka dobrim „kvantnim“ številom, tj. količinam, ki so konstantne glede na delovanje grupe. Dimenzijo Cartanove podalgebre imenujemo *rang* grupe. V primeru $SO(2N)$ velja [7]

$$\operatorname{rang} SO(2N) = N. \tag{3.3}$$

[1]Stroga definicija pravi, da niso nujno diagonalni, zadošča da med seboj komutirajo, kar se lahko zgodi v nespretno izbranih bazah.

3.1.1 Splošne lastnosti Lievih grup

Tukaj so navedena dejstva, ki veljajo za vse Lieve grupe, kljub temu, da je za bolj specifične primere bila vzeta grupa, ki je relevantna za to nalogo, tj. $SO(2N)$.

Eksponenciacija iz algebre v grupo je izomorfizem, torej je vsaka grupa enolično določena z mnogoterostjo, ki ji pripada. Matematična konvencija je, da algebro grupe označimo z malimi gotskimi črkami, tj. algebro grupe $SO(2N)$ označimo z $\mathfrak{so}_{2N}$. Da lahko razločimo med različnimi mnogoterostmi, izračunamo *strukturne konstante* grupe, ki jih dobimo s komutatorji med generatorji grupe [7],

$$[T_i, T_j] = -i f_{ijk} T_k, \tag{3.4}$$

kjer so T_i, T_j in T_k generatorji grupe, f_{ijk} strukturne konstante, $[\bullet, \bullet]$ pa je komutator[2],

$$[A, B] = AB - BA, \quad A, B \in \mathfrak{so}_{2N}. \tag{3.5}$$

Strukturne konstante, definirane v enačbi (3.4) nam poda zahtevo, da so generatorji vedno hermitski, tj. $T_j = T_j^\dagger$. Če bi pozabili $-i$ bi imali pogoj, da so generatorji anti-hermitski. Strukturne konstante različnih grup se razlikujejo.

Kot smo povedali prej, lahko vse grupne elemente dobimo z eksponenciacijo elementov iz algebre. Če imamo $A \in SO(2N, \mathbb{F})$, kjer je $\mathbb{F}$ obseg števil, se potem lahko zapiše kot

$$A = \exp i\alpha_k T_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{F} \ \forall \ k. \tag{3.6}$$

Ker smo imeli '$-i$' v enačbi (3.4) imamo tukaj v eksponentu 'i', sicer ga ne bi potrebovali.

Če najdemo $N(N-1)/2$ matrik, ki nam dajo iste strukturne konstante, kot jih zahteva grupa $SO(N)$, potem tvorijo algebro $\mathfrak{so}_N$. Vendar pa ni nujno da so te matrike dimenzije $N \times N$ – lahko so manjše ali večje. Še vedno tvorijo isto grupo, vendar pa pravimo, da pripadajo drugi *upodobitvi*. Dimenzija upodobitve je enaka rangu matrik.

Lahko se zgodi, da vse matrike vsebujejo blok na istem mestu, ki se jih lahko obravnava kot neodvisne matrike in skupaj spet tvorijo isto algebro. Potem pravimo, da je originalna upodobitev *razcepna* (*reducibilna*). Bloke prepišemo ven kot matrike in spet skušamo upodobitev razcepiti na manjše *podupodobitve*. Postopek lahko ponavljamo, dokler se ne da več poiskati blokov, ki bi tudi tvorili algebro, ampak moramo za to vzeti cele matrike. Takim upodobitvam pravimo *nerazcepne* (*ireducibilne*).

Vse grupe imajo ti. *trivialno* upodobitev dimenzije 1, ki je nerazcepna. Prva netrivialna nerazcepna upodobitev je fundamentalna, ki ima isto dimenzijo, kot številka v oklepaju, tj. $SU(N)$ in $SO(N)$ imata fundamentalni upodobitvi dimenzije N, vendar pa imata različno število generatorjev in različne strukturne konstante, čeprav nekateri generatorji lahko nastopajo tako v prvi, kot v drugi grupi.

Ponavadi imamo v vsaki dimenziji kvečjemu eno nerazcepno upodobitev, zato se v fiziki polja upodobitev označi kar z dimenzijo [11]. Da ne bomo mešali z navadnimi števili jih bomo tekom te naloge označevali v mastnem tisku, tj.

[2]Komutator je le, kadar imamo znotraj oklepaja elemente algebre. Med elementi grupe je to Liev oklepaj, $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$, $A, B \in SO(2N)$.

- trivialna upodobitev – $\mathbf{1}$,
- fundamentalna upodobitev – $\mathbf{N}$,
- neka druga upodobitev – $\mathbf{V}$,
- upodobitev, ki ima prav tako dimenzijo V, vendar ni $\mathbf{V}$, se označi s črtico: $\mathbf{V}'$.

Pogosto zamenjujemo med elementi vektorskega prostora upodobitve in med vektorskim prostorom, ki mu upodobitev pripada. Tako je lahko $\mathbf{V}$ vektorski prostor upodobitve, ali pa njegov element. Vseeno je razvidno iz konteksta o čem govorimo in ne pride do zmešnjav.

Vektorski prostor $\mathbf{V}$ ima lahko dualni vektorski prostor $\overline{\mathbf{V}}$, katerega elementi so iz *dualne* upodobitve. Nekatere upodobitve so lahko sebi-dualne, tako da $\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}}$. En tak primer je trivialna upodobitev.

Vsako razcepno upodobitev lahko dobimo iz nerazcepnih. Na voljo imamo dva načina [7]:

- Direktna vsota vektorskih prostorv: $\mathbf{V} \oplus \mathbf{W}$,
- Direkten produkt vektorskih prostorov: $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$.

Vendar pa je zapis s prouktom odveč, saj kot posledica Schurove leme sledi, da ob naboru neraczepnih upodobitev $\mathbf{R}_i$ lahko zapišemo vsako razcepno upodobitev kot [7]

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{W} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} n_i \mathbf{R}_i, \tag{3.7}$$

kjer n_i pove pogostost upodobitve $\mathbf{R}_i$, tj. kolikokrat nastopa v direktni vsoti. Ker imamo opravka z Lievimi grupami, imamo na voljo števno neskončno nerazcepnih upodobitev[3]. Vendar pa za matrike končne dimenzije potrebujemo le končno mnogo členov v direktni vsoti, saj mora veljati da se dimenziji izraza na desni in na levi ujemata.

Imejmo matriko $\mathbf{V}$, ki je v upodobitvi neke Lieve grupe. Potem ji lahko priredimo (anti-)fundamentalni ikdeks, s katerim označimo njene elemente. V primeru fundamentalne in dualne fundamentalne updobitve

$$\mathbf{N}_i,\ \overline{\mathbf{N}}^j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{3.8}$$

kot vidimo, smo v anti-fundamentalnem primeru uporabili zgornji indeks. Indeksov je lahko tudi več, npr.

$$\mathbf{V}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_\ell}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_\ell \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{3.9}$$

tako, da ima neka upodobitev hkrati fundamentalne in anti-fundamentalne indekse. Seveda so med določenimi elementi dodatna pravila, npr. matrika mora biti v dani upodobitve popolnoma anti-simetrična, (anti-)sebi-dualna itd. tako da dimenzija upodobitev ni zgolj $N^{k+\ell}$.

[3]Število nerazcepnih upodobitev je sorazmerno s številom elementov grupe.

V tem smislu so tudi multipleti SM v enačbah (2.9-2.14) zapisani v taisti notaciji, tj. h katerim nerazcepnim upodobitvam grupe $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ pripadajo. Tam je le ta razlika, da gre za produktno grupo, zato je prva številka upodobitev nad $SU(2)_L$, druga upodobitev nad $SU(3)_C$, tretja pa nerazcepna upodobitev $U(1)_Y$. Lieva grupa $U(1)$ ima to lastnost, da ima le en generator, elementi ležijo na enotski krožnici in vsak element je v svoji upodobitvi. Vse nerazcepne upodobitve so eno-dimenzionalne. Elementi se ločijo le po „naboju“, ki ga v produktnih upodobitvah pišemo v podpisanem oklepaju brez mastnega tiska.

3.1.2 Upodobitve grup $SO(2N)$

Grupe $SO(2N)$ imajo dva tipa upodobitev:

- spinorske,
- tenzorske.

Tenzorske opremljamo samo s fundamentalnimi indeksi[4], spinorske pa so čista analogija nam znane Lorentzove grupe $SO(3,1) \sim SU(2) \times SU(2)$ iz posebne relativnosti. To pomeni, da lahko poiščemo $SO(2N)$ analogijo matrik γ_μ, ki zadoščajo Cliffordovi algebri, definiramo oprator ročnosti, analogijo operatorja konjugacije naboja itd. Spinorske upodobitve $SO(2N)$ so zapisane v bazi $SU(N)$ [1].

Da bi sestavili spinorsko upodobitev $SO(2N)$ potrebujemo množicio N operatorjev, χ_i in njihove hermitsko konjugirane različice, $\chi_i^\dagger$, ki zadostijo fermionski algebri [1]

$$\begin{aligned} \{\chi_i, \chi_j^\dagger\} &= \delta_{ij}, \\ \{\chi_i, \chi_j\} &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tu smo z $\{\bullet, \bullet\}$ označili anti-komutator. Z oklepajem $[\bullet, \bullet]$ bomo označili komutator. S temi $2N$ operatorji lahko sestavimo generatorje grupe $U(N)$

$$T^i_j = \chi_i^\dagger \chi_j. \tag{3.11}$$

Ki zadostijo komutacijskim lastnostim algebre:

$$[T^i_j, T^k_\ell] = \delta^k_j T^i_\ell - \delta^i_\ell T^k_j. \tag{3.12}$$

Z operatorji χ_j in $\chi_j^\dagger$ lahko zgradimo tudi analogijo matrik γ_μ nad $SO(2N)$, če nam le uspe najti matrike ki zadostijo Cliffordovi algebri [9]:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu}, \\ \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 &= \gamma^\dagger \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nad $SO(2N)$ so to matrike [1]

$$\Gamma_{2j} = \chi_j + \chi_j^\dagger, \quad \Gamma_{2j-1} = -i(\chi_j - \chi_j^\dagger), \quad j \in \{1, 2, \ldots, N\}, \tag{3.14}$$

[4] V $SO(N)$ ni razlike med spodnjimi in zgornjimi indeksi. Notacija izvira iz teorije funktorjev, ne iz dualnosti upodobitev.

relacija ki je pogoj za Cliffordovo algebro pa je [1]

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{3.15}$$

S pomočjo matrik Γ_j lahko dobimo generatorje $SO(2N)$, kjer je ista definicija, kot v spinorski upodobitvi Lorentzove grupe [1], [9], [2],

$$\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \longrightarrow \Sigma_{jk} = \frac{1}{2i}[\Gamma_j, \Gamma_k]. \tag{3.16}$$

Spinorska upodobitev grupe $SO(2N)$ je 2^N-dimenzionalna. Iz matrik Γ_i bi radi po vzoru Lorentzove grupe dobili še Kazimirjev operator, γ_5,

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{3.17}$$

V $SO(2N)$ je ta defiran kot [1]

$$\Gamma_{\text{PET}} = i^N \Gamma_1 \Gamma_2 \dots \Gamma_{2N}. \tag{3.18}$$

Če je to res dobra definicija (tj. operator je res Kazimirjev) moramo preveriti, če komutira z vsemi generatorji grupe. Potem moramo izraz (3.18) prepiati s pomočjo izvornih operatorjev χ_i kot

$$\Gamma_{\text{PET}} = [\chi_1, \chi_1^\dagger][\chi_2, \chi_2^\dagger] \dots [\chi_N, \chi_N^\dagger], \tag{3.19}$$

od koder lahko upoštevamo, da χ_j in $\chi_j^\dagger$, tvorijo fermionsko algebro in definiramo operator štetja

$$n_j = \chi_j^\dagger \chi_j, \quad [\chi_j^\dagger, \chi_j] = 1 - 2n_j, \tag{3.20}$$

kar nam vrne

$$\Gamma_{\text{PET}} = \prod_{j-1}^{N} (1 - 2n_j). \tag{3.21}$$

Fermionski operator štetja ima lastnost

$$1 - 2n_j = (-1)^{n_j},$$

s čimer si lahko pomagamo do končne identitete [1]

$$\Gamma_{\text{PET}} = (-1)^n, \quad n = \sum_{j=1}^{N} n_j. \tag{3.22}$$

Sedaj je postalo očitno, da Γ_{PET} komutira z generatorji, Σ_{ij}, torej je ta analogija ustrezna. S pomočjo Kazimirjevega operatorja Γ_{PET} lahko definiramo operator abstraktne ročnosti nad $SO(2N)$

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \quad \Longrightarrow \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma_{\text{PET}}). \tag{3.23}$$

3.2 Upodobitve $SO(10)$

Grupa $SO(10)$ ima dimenzijo 45 in je ranga 5. Spinorksa upodobitev ima dimenzijo 2^5, tj. **32**. Slednja je razcepna, kar lahko pokažemo s pomočjo operatorja „ročnosti“,

$$\frac{1}{2}(1+\Gamma_{\mathrm{PET}})\mathbf{32} = \mathbf{16}, \quad \frac{1}{2}(1-\Gamma_{\mathrm{PET}})\mathbf{32} = \overline{\mathbf{16}}. \tag{3.24}$$

Izkaže se, da sta upodobitvi **16** in $\overline{\mathbf{16}}$ nerazcepni, tj.

$$\mathbf{32} = \mathbf{16} \oplus \overline{\mathbf{16}}. \tag{3.25}$$

Ker ju dobimo kot projekciji z operatorjem „ročnosti“, ju imenujemo kiralni upodobitvi. Če je **32** analogija Diracovih spinorjev, potem sta **16** in $\overline{\mathbf{16}}$ analogiji Weylovih polj.

Prvih nekaj nerazcepnih upodobitev $SO(10)$ je navedenih v tabeli 3.1. Prikazan je tudi razcep posamezne upodobitve nad Pati-Salamovo podgrupo, $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}}$, katerega pomen bo bolj jasen v nadaljevanju.

Tabela 3.1 – Prvih nekaj nerazcepnih upodobitev $SO(10)$ in njihove dekompozicije znotraj Pati-Salamove (PS) grupe [11]. Kot v multipletih iz SM prva številka pomeni upodobitev glede na prvo grupo, druga gelede na druo itd.

upodobitev	razcep nad $SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C$
1	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})$
10	$(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6})$
16	$(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$
45	$(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})$
54	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{20'})$
120	$(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})$
126	$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})$
144	$(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{20}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{20}})$

Kiralna upodobitev **16** je zelo pomembna v poenotenju prek $SO(10)$, saj je edina možna upodobitev, ki lahko s svojimi kvantnimi števili vključuje fermione SM [1], [6]. Hkrati je tudi dimenzija ravno pravšnja, tako da lahko 5 upodobitev $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ na generacijo nadomestimo s **16** iz $SO(10)$, s čimer smo poenotili fermionska polja[5] znotraj generacije,

$$\mathbf{16} = (Q, u^c, d^c, L, \nu^c, e^c). \tag{3.26}$$

Kot vidimo ima ta upodobitev tudi ν^c, ki je singlet nad $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. To pomeni, da nam ni treba desnoročnega nevtrina dodajati posebej, ampak je že sam po sebi vključen teorijo $SO(10)$, zaradi česar je $SO(10)$ lahko teorija masivnih nevtrinov [1] [5].

[5]Ker nastopajo v isti upodobitvi grupe.

3.3 Invariante umeritvene grupe $SO(10)$

Ko Lagrangianu priredimo umeritveno simetrijo $SO(10)$, pomeni, da je le-ta invarianten na rotacije iz $SO(10)$, poleg seveda tega, da je invarianten na Lorentzove transformacije. Fermionske mase v Lagrangianu bodo izvirali iz Yukawovih členov tipa [1]

$$\mathcal{L}_Y \sim y\psi^c\psi\phi = y\psi^T C^{-1}\psi\phi, \tag{3.27}$$

kjer je ψ v kiralni upodobitvi (tj. $\mathbf{16}$ ali pa $\overline{\mathbf{16}}$), ϕ pa je v eni izmed tenzorskih upodobitev in ga lahko opremimo s fundamentalnimi indeksi. Operator $C^{-1} = C$ je operator konjugacije naboja, v Yukawovem členu je zato, da ohranimo Lorentzovo invarianco.

Invarianto iz take tenzorske upodobitve dobimo zelo enostavno – vse tenzorje med seboj zmnožimo in seštejemo po vseh indeksih [5], [10], [1], kot npr.

$$\phi_{i_1 i_2 \ldots i_k} M_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 j_2 \ldots j_\ell} N_{j_1 j_2 \ldots j_\ell}. \tag{3.28}$$

Iz zapisa je očitno, da niso nujno enakih dimenzij, je pa pomembno, da na koncu ne ostane več prostih indeksov.

Poglejmo še kako je z invariantami spinorske upodobitve. Matrika C je skalar nad grupo $SO(10)$, zato jo bomo na kratko pozabili iz en. (3.27). Ker je $SO(10)$ grupa ortogonalnih transformacij, bomo ugibali, da je invarianta nad $SO(10)$ kar $\psi^T\psi$. To bomo preverili s pomočjo transformacij grupe $\exp(i\alpha_{jk}\Sigma_{jk}) \in SO(10)$:

$$\begin{aligned}
\psi &\to \psi' = \mathrm{e}^{i\alpha_{jk}\Sigma_{jk}}\psi \approx \psi + i\alpha_{jk}\Sigma_{jk}\psi, \\
\psi^\dagger &\to (\psi^\dagger)' \approx \psi - i\alpha_{jk}(\Sigma_{jk}\psi)^\dagger = \psi - i\alpha_{jk}\ \psi^\dagger\Sigma_{jk}, \\
\psi^T &\to (\psi^T)' \approx \psi + i\alpha_{jk}\ \psi^T\Sigma_{jk}^T,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

kar v prvem redu pomeni

$$\psi^T\psi \to \psi^T\psi + \underbrace{i\alpha_{jk}\psi^T\Sigma_{jk}^T\psi + i\alpha_{jk}\psi^T\Sigma_{jk}\psi}_{\neq 0} + \mathcal{O}(\alpha_{jk}^2) \neq \psi^T\psi, \tag{3.30}$$

se pravi $\psi^T\psi$ ni invarianta nad $SO(10)$, saj $\Sigma_{jk}^T \neq -\Sigma_{jk}$.

3.3.1 Operator konjugacije naboja nad $SO(10)$

Da se rešimo iz zagate v en. (3.30) bomo v člen $\psi^T\psi$ dodali matriko B, tako bomo imeli invarianto nad $SO(10)$

$$\psi^T B\psi \to \psi^T B\psi. \tag{3.31}$$

Transformacija $SO(10)$ se potem v prvem redu glasi

$$\psi^T B\psi \to (\psi^T B)'\psi' = \psi^T B\psi + \underbrace{i\alpha_{jk}\psi^T B\Sigma_{jk}\psi + \delta(\psi^T B)\psi}_{=0} + \mathcal{O}(\alpha_{jk}^2) = \psi^T B\psi, \tag{3.32}$$

od koder dobimo pogoj

$$\delta(\psi^T B) = -i\alpha_{jk}\psi^T B\Sigma_{jk}, \tag{3.33}$$

hkrati pa vemo, da se $\psi^T B$ transformira kot

$$\psi^T B \to (\psi^T B)' = (\psi^T)' B \approx \psi^T B + \underbrace{i\alpha_{jk}\psi^T \Sigma_{jk}^T B}_{\delta(\psi^T B)} . \tag{3.34}$$

Če združimo enačbi (3.33) in (3.34) dobimo

$$i\alpha_{jk}\psi^T \Sigma_{jk}^T B = -i\alpha_{jk}\psi^T B \Sigma_{jk}, \tag{3.35}$$

kar se poenostavi v

$$B^{-1}\Sigma_{jk}^T B = -\Sigma_{jk}. \tag{3.36}$$

Isti pogoj pa mora veljati za operator konugacije naboja iz Lorentzove grupe [9],

$$C^{-1}\Sigma_{\mu\nu}^T C = -\Sigma_{\mu\nu}, \tag{3.37}$$

ki je definiran kot

$$C = i\gamma_0\gamma_2, \quad C^{-1} = C^\dagger = C, \quad C^T = -C \tag{3.38}$$

Opazimo, da je B analogija operatorja konjugacije naboja Lorentzove grupe [1]. Od tod kar uganemo rešitev enačbe (3.36) [1],

$$B = i\Gamma_1\Gamma_3 \ldots \Gamma_9 = i \prod_{j \text{ lih}} \Gamma_j. \tag{3.39}$$

3.3.2 Bilinearne kombinacije v $SO(10)$

S pomočjo matrike B lahko napravimo, po zgledu Lorentzove grupe za Diracove spinorje, bilinearne forme umeritvene grupe $SO(10)$ za spinorje ψ. Te so prikazane v tabeli 3.2.

Tabela 3.2 – Tu so prikazane možne bilinearne forme, ki jih dobimo s spinorske upodobitve $SO(10)$. Tu smo izpustili Γ_{PET}, ki bi služil zgolj kot projektor, s katerim bi **32** razbili na **16** in $\overline{\mathbf{16}}$, vendar bomo tako ali tako uporabljali zgolj ti dve upodobitvi.

transformacijsko pravilo	forma nad $SO(10)$
skalar	$\psi^T B C^{-1}\psi$
vektor	$\psi^T B C^{-1}\Gamma_j\psi$
tenzor	$\psi^T B C^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\psi$

Če hočemo s polja $\phi_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ napraviti invarianto ga moramo pomnožiti s tenzorjem, ki ima prav toliko indeksov. Seveda bomo izbrali tenzorsko upodobitev, ki jo dobimo iz bilinearnih form. Potem je dobra invarianta nad $SO(10)$ npr. Yukawow člen, ki bi se zapisal kot

$$\mathcal{L}_Y \sim y\, \psi^T B C^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\psi\ \phi_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \tag{3.40}$$

saj je produkt dveh tenzorjev, pri čemer se vsi indeksi seštejejo. Iz pogoja, da je ψ v spinorski upodobitvi ugotovimo, da je $\psi = \mathbf{16}$ ali pa $\psi = \overline{\mathbf{16}}$. Potem so tile tenzorji v sledečih upodobitvah:

$$\begin{aligned}
\mathbf{16}^T BC^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\mathbf{16} &\in \mathbf{16}\otimes\mathbf{16},\\
\mathbf{16}^T BC^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\overline{\mathbf{16}} &\in \mathbf{16}\otimes\overline{\mathbf{16}},\\
\overline{\mathbf{16}}^T BC^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\overline{\mathbf{16}} &\in \overline{\mathbf{16}}\otimes\overline{\mathbf{16}},
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Od tod lahko ugotovimo, katere tenzorje lahko sestavimo, saj lahko te produktne upodobitve razcepimo in dobimo

$$\begin{aligned}
\mathbf{16}\otimes\mathbf{16} &= \mathbf{10}\oplus\mathbf{120}\oplus\overline{\mathbf{126}},\\
\mathbf{16}\otimes\overline{\mathbf{16}} &= \mathbf{1}\oplus\mathbf{45}\oplus\mathbf{210},\\
\overline{\mathbf{16}}\otimes\overline{\mathbf{16}} &= \mathbf{10}\oplus\mathbf{120}\oplus\mathbf{126}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Fundamentalna upodobitev $\mathbf{10}$ ima en indkes, $\mathbf{120}$ ima tri in $\mathbf{126}$ oz. $\overline{\mathbf{126}}$ imata 5. Singlet $\mathbf{1}$ je brez indeksov, $\mathbf{45}$ ima dva in $\mathbf{210}$ jih ima štiri. Vse te upodobitve so popolnoma anti-simetrične. Iz spinorjev lahko sestavimo tenzorje, ki pripadajo sledečim nerazcepnim upodobitvam,

$$\begin{aligned}
\mathbf{16}^T BC^{-1}\Gamma_i\mathbf{16} &\in \mathbf{10},\\
\overline{\mathbf{16}}^T BC^{-1}\Gamma_i\Gamma_j\mathbf{16} &\in \mathbf{45},\\
\mathbf{16}^T BC^{-1}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\mathbf{16} &\in \mathbf{120},\\
\overline{\mathbf{16}}^T BC^{-1}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_\ell\mathbf{16} &\in \mathbf{210},\\
\mathbf{16}^T BC^{-1}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_\ell\Gamma_m\mathbf{16} &\in \overline{\mathbf{126}}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

kjer se $\overline{\mathbf{16}}^T BC^{-1}\mathbf{16}$ lahko dodatno sklopi s singletom $SO(10)$, kar lahko preberemo iz (3.42). Skalarno polje ϕ, s katerim bomo sklopili fermionska polja morajo imeti isto število indeksov[6], tj. morajo biti v isti upodobitvi – dober člen v Lagrangianu[7] bi se torej glasil npr.

$$\mathcal{L}_Y \sim \mathbf{16}^T BC^{-1}(Y_{120}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\mathbf{16}\ \mathbf{120}_{ijk} + Y_{\overline{126}}\Gamma_i\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_\ell\Gamma_m\mathbf{16}\ \overline{\mathbf{126}}_{ijk\ell m}), \tag{3.44}$$

kar pa je mučno brati.

3.4 Okrajšan zapis v teorijah poenotenja

Ker vemo koliko indeksov morajo imeti posamezne tenzorske upodobitve in se prav tako zavademo, da je člen BC^{-1} vedno prisoten, se v teoriji poenotenja vse to

[6]V splošnem morajo biti v upodobitvi, katere podupodobitev je vsaj ena izmed navedenih v direktni vsoti enačb (3.42).

[7]Dober, ker je invarianten na Lorentzovo grupo in umeritveno grupo $SO(10)$.

ponavadi kar spušča zavoljo čistejše notacije. Kar preostane, so le polja in njihove upodobitve, tj.

$$y\psi^T BC^{-1}\Gamma_{j_1}\Gamma_{j_2}\ldots\Gamma_{j_k}\psi\ \phi_{j_1j_2\ldots j_k} \to y\psi^c\phi\psi. \tag{3.45}$$

Tak zapis bi izraz (3.44) poenostavil v

$$\mathcal{L}_Y \sim \mathbf{16}^c(Y_{120}\mathbf{120} + Y_{\overline{126}}\overline{\mathbf{126}})\mathbf{16}, \tag{3.46}$$

to pa je veliko preglednejše.

Ob uporabi seveda ne smemo pozabiti na vse matrike Γ_i in indekse v ozadju, saj nam ravno ti povedo, katere kombinacije polj so možne, niso pa bistvene za nadaljno obravnavo mas v Yukawovih členih. Zaradi preglednosti se bomo v nadaljevanju držali takšnega zapisa.

Poglavje 4

Nevtrinske mase in gugalnični mehanizem

Sedaj, ko smo malo bolj seznanjeni s formalizmom teorije grup in raznih form, se bomo lotili mas nevtrinov. Kot smo že omenili, so električno nabiti fermioni rešitve Diracove enačbe [3], [9], [2],

$$i\partial\!\!\!/\psi - m\psi = 0. \tag{4.1}$$

kar lahko zapišemo z Lagrangianom [9], [2], [3]

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{4.2}$$

njihov masni člen v Lagrangianu je oblike $m\psi^\dagger\gamma_0\psi = m\bar{\psi}\psi$. Vendar pa imamo lahko še en tip delcev. Matrike γ_μ lahko nastavimo tako, da še vedno zadostijo Cliffordovi algebri in ostalim lastnostim Lorentzove grupe, vendar pa nam dajo vedno le kompleksne rešitve ψ. Tako dobimo enačbo Majorane

$$i\partial\!\!\!/\psi - m\psi^c = 0, \quad \psi^c \equiv i\gamma_0\gamma_2\psi^* = C\psi^*. \tag{4.3}$$

Pogosto dodamo zahtevo $\psi^c = \psi$. Takemu delcu pravimo polje Majorane in je sam sebi anti-delec. Masni člen takega spinorja je oblike

$$m\psi^\dagger\psi = m\psi^T C\psi, \tag{4.4}$$

torej na levi in na desni nastopa isto polje. V primeru, da nevtrini niso Weylova polja, ampak Majoranova, dobimo poleg levoročnega nevtrina tudi desnoročni nevtrino, saj

$$\nu = \nu_L, \quad \nu^c = (\nu_L)^c = \nu_R, \tag{4.5}$$

prvi pripada leptonskemu dubletu, $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1)}$, drugi pa je singlet nad $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. Da taki objekti res niso več Weylova polja, je očitno, saj je tak nevtrino kombinacija ν_L in ν_R. Ob tej predpostavki so nevtrini tako Diracova kot Majoranova polja hkrati in imajo lahko oba masna prispevka. Kadar smo Diracovim poljim s pomočjo Weylovih dali maso, nismo imeli ločenega zapisa za mase levoročnih in desnoročnih polj, pač pa je bila masa posledica mešanja le-teh, kot v enačbi (2.7). Vendar pa za polja Majorane ni tako – levoročni delci imajo lahko različno maso od desnoročnih. Vse masne člene nevtrinov bi lahko (shematsko) zapisali kot [13], [10], [4]

$$\mathcal{L}_N \sim m_{\nu_D}\nu^c\nu + m_{\nu_R}\nu^c\nu^c + m_{\nu_L}\nu\nu, \tag{4.6}$$

torej bi levoročni in desnoročni nevtrini lahko imeli različne mase. Tu je m_{ν_D} Diracov masni člen, m_{ν_R} pripada desnoročnemu nevtrinu Majorane, m_{ν_L} pa se sklaplja z levoročnim nevtrinom Majorane. Mase dobimo prek skalarnih bozonov, tako kot prej.

Z dodatkom desnoročnega nevtrina rešimo poleg nevtrinskih mas še problem kvantizacije električnega naboja, ki se ga teoretično ne da pojasniti drugače [1] (v principu bi to lahko storili le še s z dodajanjem magnetnih monopolov, kot je to storil Dirac).

4.1 Gugalnični mehanizem tipa I

Sam SM ima nevtrine le v leptonskem dubletu, L, ν^c pa nima, saj je singlet, ki ne interagira prek $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. Najpreprosteje je, da ga dodamo in zapišemo člene Yukawe za ν^c, s čimer bomo po spontanem zlomu simetrije dali mase. Ti se glasijo [13], [10], [4]

$$\mathcal{L}_N = (Y_{\nu_D})_{ij}\nu_i^c L_j \Phi_1 + \frac{1}{2}(Y_{\nu_R})_{ij}\nu_i^c\nu_j^c\Phi_2 + \text{h.k.} \tag{4.7}$$

Polji Φ_1 in Φ_2 dobita ob zlomu $SU(2)_L \times U(1)_Y$ neničelno vakuumsko pričakovano vrednost, ki nam da masne matrike. Ugotoviti moramo, katerim upodobitvam $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ pripadata, da bodo interakcijski členi neničelni in invariantni na $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\in \nu^c \otimes L = (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)} \otimes (\mathbf{1},\mathbf{2})_{(-1)} = (\mathbf{1},\mathbf{2})_{(1)},\\ \Phi_2 &\in \nu^c \otimes \nu^c = (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)} \otimes (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)} = (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Vidimo, da je $\Phi_1 = \phi$, tj. Higgsov dublet, ki da mase vsem ostalim fermionom in dobi vev $\langle\phi\rangle = v$, polje Φ_2 pa je singlet, torej lahko eksplicitno zapišemo masno matriko $Y_{\nu_R} = M_{\nu_R}$ (dati singletu vev je ekvivalentno eksplicitno zapisati masni člen). Enačbo (4.7) lahko potem prepišemo v

$$\mathcal{L}_N = \underbrace{v(Y_{\nu_D})_{ij}}_{(M_{\nu_D})_{ij}}\nu_i^c L_j + (M_{\nu_R})_{ij}\nu_i^c\nu_j^c + \text{h.k} = \begin{pmatrix}\nu & \nu^c\end{pmatrix}_i \underbrace{\begin{pmatrix}0 & (M_{\nu_D}^T)_{ij}\\ (M_{\nu_D})_{ij} & (M_{\nu_R})_{ij}\end{pmatrix}}_{M_N} \begin{pmatrix}\nu\\ \nu^c\end{pmatrix}_j + \text{h.k.} \tag{4.9}$$

Interakcijske člene e_j in ν_i^c smo izpustili. Kombinirana nevtrinska masna matrika bi se torej zapisala kot [13]

$$M_N = \begin{pmatrix}0_{3\times3} & M_{\nu_D}^T\\ M_{\nu_D} & M_{\nu_R},\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

ima pa dimenzijo 6×6, saj prispevek Majorane doseže to, da so mase desnoročnih nevtrinov različne od mas levoročnih. Celotna nevtrinska masna matrika mora za tri generacije imeti 6 različnih nevtrinskih mas. Matrika, ki se lahko bločno zapiše takole ima lastnosti ti. *gugalnične matrike*, kot gugalnice za dva. Za nas sta zanimiva sta predvsem dva režima [13]:

- $M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D}$ – prevlada člen Majorane,
- $M_{\nu_R} \ll M_{\nu_D}$ – prevlada Diracovih mas.

Tu matriki primerjamo po neskončni normi, tj. največji lastni vrednosti.

Režim $M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D}$. Mase desnoročnih nevtrinov so ogromne $m_{\nu^c} \approx M_{\nu_R}$, mase levoročnih nevtrinov pa so izjemno majhne. Diracovi členi predstavljajo mešanje, ki je prav tako zelo majhno. Mase levoročnih nevtrinov v tem primeru dobimo tako, da si predstavljamo, da je M_N le matrika 2×2 nato pa bi z diagonalizacijo dobili lastne vrednosti [10]

$$M_N \sim M_{\nu_R}\left[1 \pm \sqrt{1 - M_{\nu_D}^T M_{\nu_R}^{-2} M_{\nu_D}}\right] = M_{\nu^c} + M_\nu, \tag{4.11}$$

kjer so M_{ν^c} mase desnoročnih nevtrinov in M_ν mase levoročnih nevtrinov. Ob upoštevanju limite lahko zgornji izraz razvijemo in ugotovimo [13]

$$\begin{aligned} M_{\nu^c} &\approx M_{\nu_R}, \\ M_\nu &\approx -M_{\nu_D}^T M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Če je $M_{\nu^c} \propto M_{\nu_R}$, potem je $M_\nu \propto M_{\nu_R}^{-1}$, zaradi česar tak mehanizem imenujemo gugalnični, saj težke mase desnoročnih nevtrinov prevagajo levoročne, tako da „obvsisijo v zraku“. Tak režim v teorijah poenotenja ni težko doseči [13].

Režim $M_{\nu_D} \gg M_{\nu_R}$. Levoročni nevtrini imajo tu predvsem Diracovo maso, tj. $M_\nu \approx M_{\nu_D}$, za katero vemo eksperimentalno, da je izjemno majhna. Masa desnoročnih nevtrinov je kar $M_{\nu^c} \approx M_{\nu_R}$, ki pa mora biti še manjša. To lahko dosežemo le z zahtevo, da je leptonsko število ohranjeno. Taka zahteva se ne porodi sama po sebi iz modela poenotenja, prav tako pa tudi eksperimentalno vemo, da je mešanje v leptonskem sektorju vse prej kot dušeno [15] (ohranitev leptonskega števila ni dobra simetrija) zaradi česar se zdi ta režim v neskladju z naravo [13].

4.2 Gugalnični mehanizem s tipom I in tipom II

Gugalnični mehanizem tipa I je minimalen, vendar pa v bistvu ni razloga, zakaj tudi levoročni nevtrino ne bi smel imeti prispevka Majoranove mase. Prispevek mase levoročnega nevtrina se imenuje gugalnični mehanizem tipa II. Oba tipa lahko med seboj kombiniramo in v enačbo (4.7) s skalarnim singletom Φ_2, ki da desnoročnim nevtrinom maso, dodamo novo skalarno polje Δ, ki se sklaplja z leptonskim dubletom, [4], [13]

$$\mathcal{L}_\nu = (Y_{\nu_D})_{ij} \nu_i^c L_j \phi + \frac{1}{2}(Y_{\nu_R})_{ij} \nu_i^c \nu_j^c \Phi_2 + \frac{1}{2}(Y_{\nu_L})_{ij} L_i L_j \Delta + \text{h.k.} \tag{4.13}$$

Skalarno polje Δ mora biti singlet nad $SU(3)$, saj je L_i singlet nad $SU(3)$, nad $SU(2)_L$ pa je lahko bodisi singlet, bodisi triplet, saj sta $L_{i,j}$ dubleta nad $SU(2)_L$ in tako

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}. \tag{4.14}$$

Singlet ne prinese nobene novosti, pač pa se splača vzeti triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{3})_{(2)}$, katerega vev dá neničelno maso M_{ν_L}. Nevtrinska masna matrika, ki bi jo dobili po zlomu $SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_Q$, bi se tako zapisala kot [13], [10]

$$M_N = \begin{pmatrix} M_{\nu_L} & M_{\nu_D}^T \\ M_{\nu_D} & M_{\nu_R} \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

Taka matrika ima prispevke gugalničnega mehanizama tipa I in tipa II. Po vzoru tipa I imamo na voljo različne režime, vendar vemo, da bo fizikalno najbolj sprejemljiv tak, ki bo $M_{\nu_L} \ll M_{\nu_D} \ll M_{\nu_R}$, saj bo imel izjemno lahke levoročne nevtrine, izjemno težke desnoročne nevtrine, med katerimi pa bo zelo malo mešanja. Masni matriki levoročnih in desnoročnih nevtrinov, sta v tem režimu v prvem redu razvoja [10]

$$\begin{aligned} M_{\nu^c} &\approx M_{\nu_R}, \\ M_\nu &\approx M_{\nu_L} - M_{\nu_D}^T M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Mase desnoročnih nevtrinov nas ne zanimajo, saj so singleti nad $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ in mase dobijo na skali reda $\Lambda_{\mathrm{GUT}} \sim 10^{16}$ GeV, mnogo pred zlomom $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. Mase levoročnih nevtrinov pa so mase nevtrinov, ki jih poznamo in jih lahko tudi izmerimo. Tak model je možen znotraj teorij poenotenja, med drugim tudi $SO(10)$.

Naj omenimo, da poleg teh dveh tipov obstaja še gugalnični mehanizem tipa III [4], [13], pri čemer namesto skalarnega tripleta $(\mathbf{1}, \mathbf{3})_{(2)}$ uporabimo fermionski triplet $(\mathbf{1}, \mathbf{3})_{(0)}$. Taki modeli so redki [13] in niso relevantni za naš problem.

Poglavje 5

Opis modela

V tem modelu bomo predpostavili, da so vsi parametri, kot tudi eksperimentalni rezultati (npr. koti CKM) realni, saj neničelni imaginarni del (iz CKM) nima bistvenega prispevka k masam.

Iz enačb (3.26) se spomnimo, da za celoten opis fermionskih polj v eni generaciji zadošča upodobitev **16**. V našem primeru bomo raziskali model, kjer celotnem fermionskem multipletu dodamo še dve novi generaciji – $\mathbf{16}_4$ in $\overline{\mathbf{16}}$. Celoten fermionski multiplet se potem lahko zapiše kot

$$\Psi = \mathbf{16}_1 \oplus \mathbf{16}_2 \oplus \mathbf{16}_3 \oplus \mathbf{16}_4 \oplus \overline{\mathbf{16}}^c, \tag{5.1}$$

Masni člen v Lagraniganu bo oblike $\Psi^c M \Psi$, torej potrebujemo masno matriko. Kot je bilo navedeno v prejšnjem poglavju, bomo slednjo sestavili z vev skalarnih polj, ki so v eni izmed tenzorskih upodobitev $SO(10)$, tj.

$$\mathcal{L}_Y \sim \Psi^c \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} \Psi + \text{h.k.} \tag{5.2}$$

Ker hočemo minimalen model se bomo omejili na nerazcepne upodobitve, kar nam da možna na voljo polja navedena v en. (3.43). Za minimalno teorijo zadoščajo polja $\overline{\mathbf{126}}$, $\mathbf{126}$, $\mathbf{1}$ in $\mathbf{45}$. Člene Yukawe lahko sedaj zapišemo v matrični obliki kot

$$\mathcal{L}_Y = \Psi^c \Phi \Psi + \text{h.k.} = \begin{pmatrix} \mathbf{16}_a{}^c & \overline{\mathbf{16}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{ab}\overline{\mathbf{126}} & m_a \mathbf{1} + \eta_a \mathbf{45} \\ m_b \mathbf{1} + \eta_b \mathbf{45} & y\mathbf{126} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{16}_b \\ \overline{\mathbf{16}}^c \end{pmatrix} + \text{h.k.} \tag{5.3}$$

Indeksa $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ tečeta po generacijah. Polje $\overline{\mathbf{16}}^c$ nima indeksa, saj je se ne ponavlja v različnih generacijah.

Na kratko pojasnimo izbiro naših polj:

- Minimalnemu modelu takega tipa zadošča že eno polje, ki pripada $\mathbf{16} \otimes \mathbf{16}$. Izberemo lahko npr. **10**, kot je demonstrirano v [14]. Tak model bi bil res minimalen, vendar nevtrinom ne more dati mase, saj ne more dobiti vev v pravi smeri. Zaradi tega smo izbrali $\overline{\mathbf{126}}$, ki je najmanjša upodobitev, ki to lahko stori.
- V delu $\overline{\mathbf{16}} \otimes \overline{\mathbf{16}}$ moramo izbrati **126**, ker je lahko takemu skalarnemu polju damo vev v smeri, ki da mase vsem fermionom iz $\overline{\mathbf{16}}$, tudi nevtrinom.

- Mešalni del mora imeti vsaj dve različni polji, da lahko damo prave mase. Izberemo najmanjši dve, tj. **1** in **45**. To je analogno modelu, uporabljenem v [10], kjer imamo le $\mathbf{16}_{1,2,3}$, brez $\overline{\mathbf{16}}$ in $\mathbf{16}_4$. Tam sta bili uporabljeni skalarni polji **10** in $\overline{\mathbf{126}}$.

Člene matrike (5.3) lahko skupaj zmnožimo, kar nam da člene Yukawe

$$\mathcal{L}_Y = \mathbf{16}_a{}^c\, \mathcal{Y}_{ab}\overline{\mathbf{126}}\ \mathbf{16}_b + \overline{\mathbf{16}}(m_a\mathbf{1} + \eta_a\mathbf{45})\mathbf{16}_a + \overline{\mathbf{16}}\ y\mathbf{126}\ \overline{\mathbf{16}}^c + \text{h.k.}$$

Kar nam preostane je to, da tem poljem dodelimo vev-e v smereh, ki dajo mase vsem znanim poljem iz SM.

5.1 Skalarna polja po spontanem zlomu simetrije

Kot opombo si zapomnimo, da skalarna polja iz členov Yukawe niso nujno vsa polja, ki jih potrebujemo, da spontano zlomimo $SO(10)$ do $\mathcal{G}_{\text{SM}}$. Ta zlom lahko dosežemo na različne načine in v več različnih fazah. V tej nalogi se ne bomo obremenjevali s tem vprašanjem, ampak se bomo osredotočili le na to, kako s temi polji lahko damo maso fermionskim poljem.

Upodobitve, ki so bile nerazcepne znotraj grupe z veliko simetrijami, so tipično razcepne znotraj podgrupe, ki ima manj simetrije. Zelo koristna podgrupa, prek katere si bomo zamislili da naš zlom poteka, je Pati-Salamova podgrupa, $\mathcal{G}_{\text{PS}} = SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C$. Razcep upodobitev $SO(10)$ na upodobitve iz $\mathcal{G}_{\text{PS}}$ so dobro znane, prav tako pa lahko od tam na hitro izračunamo razcep le-teh na upodobitve $\mathcal{G}_{\text{SM}}$. Zlom bi potekal kot $SO(10) \to \mathcal{G}_{\text{PS}} \to \mathcal{G}_{\text{LR}} \to \mathcal{G}_{\text{SM}}$, oziroma bolj specifično

$$\begin{gathered} SO(10) \\ \downarrow \\ SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C \\ \downarrow \\ SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(3)_C \times U(1)_{B-L} \\ \downarrow \\ SU(2)_L \times SU(3)_C \times U(1)_Y. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Če želimo vedeti, kako se ena izmed upodobitev $\mathcal{G}_{\text{PS}}$ razcepi znotraj $\mathcal{G}_{\text{SM}}$ je dovolj, da pogledamo kako se multipleti iz $SU(4)_C$ razcepijo nad $SU(3)_C \times U(1)_{B-L} < SU(4)_C$ (pogledamo npr. v [11, pg. 93]), od tam naprej pa lahko hitro izračunamo Y prek

$$\frac{Y}{2} = T_R^3 + \frac{B-L}{2}. \tag{5.5}$$

Tu $B-L$ pomeni „barionsko število minus leptonsko število“. V teoriji poenotenja B in L nista več nujno ohranjeni količini. Njuna (približna) ohranitev sledi iz upoštevanja drugih simetrij v limiti nizkih energij – pravimo da sta naključni simetriji in obstajajo modeli, ki kršijo to simetrijo. Dobra simetrija v nizkih energijah je $B-L$. Vredno jo je omeniti, ker lahko zaradi slednje opremimo teorijo z renormalizabilnimi interakcijskimi členi protonskega razpada in pojasnimo bariogenezo.

Skalarnemu polju **1** dati vev je isto, kot če **1** ne pišemo več, vev pa postane sklopitvena konstanta Yukawe. To je trivialno.

Ostalih polj ne bomo mogli tako enostavno opremiti z vev-i: vedeti moramo, kako se naša polja razcepijo znotraj $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}}$. To pomeni, da si za kratek čas predstavljamo, da npr. **45** ni več iz $SO(10)$ ampak iz $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}}$ in jo zapišemo s pomočjo nerazcepnih upodobitev iz $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}} < SO(10)$.

Pričnimo s fermionskimi polji prve generecije (ostale so popolnoma analogne)

$$\mathbf{16}_1 = (\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}}) = \begin{pmatrix} u_r & u_g & u_b & \nu_e \\ d_r & d_g & d_b & e \end{pmatrix}_L \oplus \begin{pmatrix} u^c_{\bar{r}} & u^c_{\bar{g}} & u^c_{\bar{b}} & \nu^c_e \\ d^c_{\bar{r}} & d^c_{\bar{g}} & d^c_{\bar{b}} & e^c \end{pmatrix}_R, \tag{5.6}$$

kjer podpisana L in R pomenita dubleta nad $SU(2)_L$ in dubleta nad $SU(2)_R$. To pomeni, da po zlomu $SO(10) \to \mathcal{G}_{\mathrm{PS}}$ upodobitev **16** postane (navadna) vsota dveh polj, tj. $\mathbf{16} \to (\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4}) + (\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$.

Multiplet $(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4})$ je dublet nad $SU(2)_L$, zato ima prva vrsta levi šibki izospin „gor“, in druga vrsta šibki izospin „dol“. Ta multiplet ne nosi desnega šibkega izospina. Hkrati je to kvadruplet nad $SU(4)_C$ in vidimo da prve tri barve ustrezajo barvam iz $SU(3)_C$, kot četrta barva pa nastopajo leptoni.

V primeru $(\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$ je podobno, le da imamo dublet nad $SU(2)_R$ in anti-kvadruplet nad $SU(4)_C$, zaradi česar smo polja podpisali z anti-barvo.

Spinorska anti-upodobitev, $\overline{\mathbf{16}}$, se nad $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}}$ razcepi zelo podobno,

$$\overline{\mathbf{16}} = (\mathbf{2},\mathbf{1},\overline{\mathbf{4}}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{4}) = \begin{pmatrix} \bar{u}_{\bar{r}} & \bar{u}_{\bar{g}} & \bar{u}_{\bar{b}} & \bar{\nu} \\ \bar{d}_{\bar{r}} & \bar{d}_{\bar{g}} & \bar{d}_{\bar{b}} & \bar{e} \end{pmatrix}_L \oplus \begin{pmatrix} \bar{u}^c_r & \bar{u}^c_g & \bar{u}^c_b & \bar{\nu}^c \\ \bar{d}^c_r & \bar{d}^c_g & \bar{d}^c_b & \bar{e}^c \end{pmatrix}_R. \tag{5.7}$$

5.1.1 Razcep polja 45

Nad $SO(10)$ je upodobitev **45** nerazcepna. Nad $\mathcal{G}_{\mathrm{PS}} < SO(10)$ temu ni več tako in **45** lahko razcepimo na direktno vsoto matrik

$$\mathbf{45} = (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15}). \tag{5.8}$$

Te matrike imenujemo „smeri“ v katerih polje dobi neničelno vev. To se lahko zgodi v katerikoli izmed teh smeri. Te vev-e bomo označili kot

$$\begin{aligned} \langle(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1})\rangle &= v, & \langle(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})\rangle &= v_1, \\ \langle(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6})\rangle &= v', & \langle(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})\rangle &= v_2. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Polje **45** predstavlja mešanje med $\mathbf{16}_a$ in $\overline{\mathbf{16}}$, ki pa je zelo težko polje. Zaradi tega pričakujemo, da se mešanje zgodi na skali poenotenja, kar pa je pred zlomom elektrošibke umeritvene grupe, torej vev-i ne smejo zlomiti $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. Zaradi tega lahko izberemo le smeri, ki vsebujejo singlete $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$.

- $(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1})$ je triplet nad $SU(2)_L$ – ne more biti singlet nad $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ in očitno $\Longrightarrow v = 0$

- $(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})$ je singlet nad $SU(2)_L$ in $SU(4)_C$ – to je singlet tudi nad $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$ in seveda $\Longrightarrow v_1 \neq 0$,

- $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6})$ in $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})$ nista očitni in ju moramo razcepiti do umeritvene grupe SM.

Upodobitev $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6})$ razcepimo v dveh fazah iz en. (5.4) kot

$$\begin{gathered}(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{6})\\ \downarrow\\ (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{3})_{(2/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(-2/3)}\\ \downarrow\\ (\mathbf{2},\mathbf{3})_{(5/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{3})_{(-1/3)}+(\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(1/3)}+(\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(-5/3)}\end{gathered} \tag{5.10}$$

in kot vidimo, nima singletov nad umeritveno grupo SM, torej $v'=0$. Upodobitev $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})$ razcepimo na enak način po en. (5.4) in dobimo

$$\begin{gathered}(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})\\ \downarrow\\ (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)}+(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{3})_{(-4/3)}+(\mathbf{1},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}})_{(4/3)}+(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{8})_{(0)}\\ \downarrow\\ (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)}+(\mathbf{1},\mathbf{3})_{(-4/3)}+(\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}})_{(4/3)}+(\mathbf{1},\mathbf{8})_{(0)}\end{gathered} \tag{5.11}$$

in takoj opazimo singlet $\mathcal{G}_{\mathrm{SM}}$. To pomeni $v_2 \neq 0$. Neničelne vev polja $\mathbf{45}$ so torej le v_1 in v_2. Sedaj moramo poznati Clebsch-Gordanove koeficiente, da vemo kako utežiti posamezno polje po spontanem zlomu simetrije. Da se izognemo vsemu računanju lahko s trikom pogledamo, kako ti matriki $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})$ in $(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})$ pravzaprav izgledata in kaj predstavljata:

$$(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})=T_R^3=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix},\quad (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{15})=T_C^{15}=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3\end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

Matrika T_R^3 je tretja komponenta desnega šibkega izospina („gor“/„dol“) in T_C^{15} je petnajsti generator $SU(4)_C$, ki meri $B-L$. To pomeni da $(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})$ ne deluje na singlete $SU(2)_R$, torej na polja anti-delcev , $(\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$, iz en. (5.6):

- zgornja vrsta ima izospin „gor“, zato je pomnožena z $+v_1$,
- spodnja vrsta ima izospin „dol“, zato je pomnožena z $-v_1$,
- polja v $(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4})$ so singleti nad $SU(2)_R$, zato ne dobijo prispevka v_1.

Vsa polja iz en. (5.6) čutijo $SU(4)_C$, zato bodo vsa imela prispevek v_2:

- prve tri barve iz $(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4})$ so pomnožene $+v_2$,
- zadnjo barvo (leptone) $(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{4})$ pomnožimo z $-3v_2$,
- prvi trije stolpci v $(\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$ z označeni z anti-barvami – pomnožijo se z $-v_2$,
- zadnja anti-barva v $(\mathbf{1},\mathbf{2},\overline{\mathbf{4}})$ so anti-leptoni, katere obtežimo s $+3v_2$,

Členi v Lagrangianu, ki se sklapljajo s $\mathbf{45}$ so po spontanem zlomu simetrije

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y\big|_{\mathbf{45}} &= \overline{\mathbf{16}}\;\eta_a\mathbf{45}\;\mathbf{16}_a+\text{h.k.}\\ &=\bar{Q}\;\eta_a(-v_2)Q_a+\bar{u}^c\eta_a(v_1+v_2)u_a^c+\bar{d}^c\eta_a(-v_1+v_2)d_a^c\\ &\quad+\bar{L}\;\eta_a(3v_2)L_a+\bar{\nu}^c\eta_a(v_1-3v_2)\nu_a^c+\bar{e}^c\eta_a(-v_1-3v_2)e_a^c\\ &\quad+\text{h.k.}\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.1.2 Razcep polj $\overline{\mathbf{126}}$ in 126

Kot prej, moramo tudi sedaj pogledati katere smeri imamo na razpolago, potem pa izbrati izmed njimi take, ki ne zlomijo preveč simetrije. V [11] lahko preberemo

$$\begin{aligned}\mathbf{126} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15}),\\ \overline{\mathbf{126}} &= (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6}) \oplus (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{10}}) \oplus (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})\end{aligned} \tag{5.14}$$

Kot vemo iz SM fermionska polja dobijo maso s spontanim zlomom elektrošibke simetrije. Zaradi tega lahko v tem primeru izberemo neničelne vev-e v smereh, ki zlomijo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, ne pa tudi $SU(3)_C$.

Nevtrinom bomo dali mase prek gugalničnega mehanizma, opisanega v prejšnjem poglavju. Diracove mase nevtrinov bomo dobili iz Higgsovega polja $(\mathbf{1},\mathbf{2})_{(1)}$, levoročni nevtrini ν_a in $\bar{\nu}^c$ se lahko sklopijo s poljem $(\mathbf{1},\mathbf{3})_{(2)}$, desnoročni ν_a^c in $\bar{\nu}$ pa s singletom. Za polji **126** in $\overline{\mathbf{126}}$ so torej dovoljene vev v takih smereh, ki se po zlomu $SO(10)$ na $\mathcal{G}_{\text{SM}}$ razcepijo na te upodobitve.

Najprej raziščimo kako z vev v smeri $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6})$. Ta se razcepi v vsoto polj, ki na moč spominja na razcep (5.10)

$$(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{6}) \to (\mathbf{1},\mathbf{3})_{(2/3)} + (\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}})_{(-2/3)}, \tag{5.15}$$

zaradi česar je ne moremo uporabiti niti za Diracove, niti za Majoranove mase. Vev v tej smeri torej ostane enaka nič.

Sedaj si poglejmo, kako je s smermi $(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{10})_{\overline{\mathbf{126}}}$ in $(\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}})_{\mathbf{126}}$. Za to potrebujemo razcep **10** in $\overline{\mathbf{10}}$, ko $SU(4)_C \to SU(3)_C \times U(1)_{B-L}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{10} &\to \mathbf{1}_{(2)} + \mathbf{3}_{(2/3)} + \mathbf{6}_{(-2/3)},\\ \overline{\mathbf{10}} &\to \mathbf{1}_{(2)} + \overline{\mathbf{3}}_{(-2/3)} + \overline{\mathbf{6}}_{(2/3)}.\end{aligned} \tag{5.16}$$

To pomeni, da s spontanim zlomom $SO(10)$ v $\mathcal{G}_{\text{SM}}$ po stopnjah (5.4) dobimo

$$\begin{array}{cc} (\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}}) & (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{10}) \\ \downarrow & \downarrow \\ (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{3}})_{(-2/3)} + (\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{6}})_{(2/3)} & (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{3})_{(2/3)} + (\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{6})_{(-2/3)} \\ \downarrow & \downarrow \\ (\mathbf{3},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{3},\overline{\mathbf{3}})_{(-2/3)} + (\mathbf{3},\overline{\mathbf{6}})_{(2/3)} & (\mathbf{3},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{3},\mathbf{3})_{(2/3)} + (\mathbf{3},\mathbf{6})_{(-2/3)} \end{array} \tag{5.17}$$

od katerih imata obe polji skalarni prenašalec gugalničnega mehanizma tipa II, ki se sklaplja z levoročnim nevtrinom Majorane. Rekli bomo $\langle(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{10})_{\overline{\mathbf{126}}}\rangle = v_L$ in $\langle(\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}})_{\mathbf{126}}\rangle = \bar{v}_L$.

Raziščimo še, kako je s smermi tripleta $SU(2)_R$:

$$\begin{array}{c} (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{10}) \\ \downarrow \\ (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{3})_{(2/3)} + (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{6})_{(-2/3)} \\ \downarrow \\ (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(0)} + (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(2)} + (\mathbf{1},\mathbf{1})_{(4)} \\ +(\mathbf{1},\mathbf{3})_{(-4/3)} + (\mathbf{1},\mathbf{3})_{(2/3)} + (\mathbf{1},\mathbf{3})_{(8/3)} \\ +(\mathbf{1},\mathbf{6})_{(-8/3)} + (\mathbf{1},\mathbf{6})_{(-2/3)} + (\mathbf{1},\mathbf{6})_{(4/3)} \end{array} \tag{5.18}$$

Tu smo našli singlet nad $\mathcal{G}_{\text{SM}}$, ki je skalarno polje, s katerim se sklaplja desnoročni nevtrino Majorane, ν_a^c. Če polje $\overline{\mathbf{126}}$ dobi vev v tej smeri, bomo s tem dali prispevek gugalničnega mehanizma tipa I. Razcep upodobitve $(\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{10}})$ je podoben, s to razliko, da moramo zamenjati znak hipernaboja in nekatere upodobitve $SU(3)_C$ postanejo dualne, analogno kot v (5.17). Tako dobimo prispevke za desnoročne nevtrine ν_a^c in $\bar{\nu}$. Te vev bomo imenovali $\langle(\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{10}})_{\overline{\mathbf{126}}}\rangle = v_R$ in $\langle(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{10})_{\mathbf{126}}\rangle = \bar{v}_R$.

Končno se lotimo smeri $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})$, v kateri lahko dobita vev tako $\overline{\mathbf{126}}$ kot $\mathbf{126}$,

$$\begin{gathered}(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})\\ \downarrow\\ (\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{1})_{(0)}+(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{3})_{(-4/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(4/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{8})_{(0)}\\ \downarrow\\ (\mathbf{2},\mathbf{1})_{(1)}+(\mathbf{2},\mathbf{1})_{(-1)}+(\mathbf{2},\mathbf{3})_{(-1/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{3})_{(-7/3)}\\ +(\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(1/3)}+(\mathbf{2},\overline{\mathbf{3}})_{(7/3)}+(\mathbf{2},\mathbf{8})_{(-1)}+(\mathbf{2},\mathbf{8})_{(1)}\end{gathered} \tag{5.19}$$

V polju $(\mathbf{2},\mathbf{1})_{(1)}$ prepoznamo Higgsov doublet iz SM, za katerega že vemo, da je ključnega pomena v SM in da vsa polja opremi z Diracovimi masami – v tej smeri dobimo neničeno vev. Vendar pa se $\overline{\mathbf{16}}$ ne sklaplja s Higgsovim poljem iz SM – $\mathbf{126}$ ima v tej smeri drugo vev.

$$\begin{array}{lllll}\mathbf{126}: & \langle(\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{10})\rangle = \bar{v}_R, & \langle(\mathbf{3},\mathbf{1},\overline{\mathbf{10}})\rangle = \bar{v}_L, & \langle(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})_u\rangle = \bar{v}_u, & \langle(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})_d\rangle = \bar{v}_d,\\ \overline{\mathbf{126}}: & \langle(\mathbf{1},\mathbf{3},\overline{\mathbf{10}})\rangle = v_R, & \langle(\mathbf{3},\mathbf{1},\mathbf{10})\rangle = v_L, & \langle(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})_u\rangle = v_u, & \langle(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})_d\rangle = v_d.\end{array} \tag{5.20}$$

Opazimo, da bi-dublet[1] $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{15})$ dobi dve vev – to je zato, ker je dublet nad $SU(2)_L$, zaradi česar mu lahko dodelimo eno vev za gornje fermione in drugo vev za spodnje fermione.

Členi Yukawe, skopljeni s $\overline{\mathbf{126}}$ se zato zapišejo kot

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y\big|_{\overline{\mathbf{126}}} &= \mathbf{16}_a{}^c\ \mathcal{Y}_{ab}\overline{\mathbf{126}}\ \mathbf{16}_b\\ &= \begin{pmatrix} u_a^c & d_a^c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_u\mathcal{Y}_{ab} & \\ & v_d\mathcal{Y}_{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_b\\ d_b\end{pmatrix}\\ &+ \begin{pmatrix} \nu_a^c & e_a^c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3v_u\mathcal{Y}_{ab} & \\ & -3v_d\mathcal{Y}_{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_b\\ e_b\end{pmatrix}\\ &+ \nu_a^c\frac{v_R\mathcal{Y}_{ab}}{2}\nu_b^c + \nu_a\frac{v_L\mathcal{Y}_{ab}}{2}\nu_b + \text{h.k.},\end{aligned} \tag{5.21}$$

poslednja člena prispevka Majorane. Faktor 1/2 je tam iz definicije (4.13). Zaradi tega ni le Diracovo polje, amapak tudi Majoranino polje. Nevtrinska masna matrika bo morala upoštevati oba prispevka. Členi, sklopljeni z $\mathbf{126}$ so podobni.

5.2 Končni zapis masnih matrik

Če člene iz en. (5.13) in en. (5.21) malo premešamo in jih razvrstimo v nekoliko drugačno obliko, dobimo masno matriko za vsako družino polj – za gornje kvarke,

[1] Ker je dublet nad $SU(2)_L$ in nad $SU(2)_R$

spodnje kvarke, za spodnje leptone (to so nabiti leptoni) in za gornje leptone (nevtrini)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y = & \begin{pmatrix} u_a^c & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_u \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a (v_1 + v_2) \\ m_b - \eta_b v_2 & \bar{v}_u y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ \bar{u}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} d_a^c & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a (v_2 - v_1) \\ m_b - \eta_b v_2 & \bar{v}_d y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_b \\ \bar{d}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} e_a^c & \bar{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 v_d \mathcal{Y}_{ab} & m_a - \eta_a (-v_1 - 3 v_2) \\ m_b + 3 \eta_b v_2 & -3 \bar{v}_d y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_b \\ \bar{e}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 v_u \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a (v_1 - 3 v_2) \\ m_b + 3 \eta_b v_2 & -3 \bar{v}_u y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_R \mathcal{Y}_{ab} & \\ & y \bar{v}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b^c \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a & \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \mathcal{Y}_{ab} & \\ & y \bar{v}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \text{h.k.}
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Zadnje tri matrike so za nevtrine – prva je Diracov prispevek, drugi dve pa sta masni matriki Majorane – ena za levoročne nevtrine in ena za desnoročne.

Hočemo, da bi naše matrike že same po sebi prepovedano mešanje zadnjih dveh težkih družin z lahkimi in da bi se lahke mešale le med saboj. Mešanje lahko zatremo z induciranimi rotacijami fermionskih polj [12],

$$
\psi \to \psi' = \mathcal{U}^{-1} \psi, \tag{5.23}
$$

tako spremenimo tudi masno matriko

$$
\psi_1^T M \psi_2 \to \psi_1'^T \underbrace{(\mathcal{U}_1^T M \mathcal{U}_2)}_{M'} \psi_2', \tag{5.24}
$$

pri čemer nismo spremenili obnašanja fermionskih polj. Rotacijske matrike $\mathcal{U}$ bomo izbrali ortogonalne[2] s takimi bloki, da bodo zatrle mešanje lahkih s težkimi družinami. Shematsko bomo dosegli

$$
M = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & \circ & \diamond & \blacklozenge \\ \hline \circ & \circ & \circ & \diamond & \blacklozenge \\ \hline \circ & \circ & \circ & \diamond & \blacklozenge \\ \hline \diamond & \diamond & \diamond & \bullet & \bullet \\ \hline \blacklozenge & \blacklozenge & \blacklozenge & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \circ & \circ & \circ & \cdot & \\ \hline \circ & \circ & \circ & \cdot & \\ \hline \circ & \circ & \circ & \cdot & \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet \\ \hline & & & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} = M'. \tag{5.25}
$$

Masna matrika je tako v skoraj bločno-diagonalni obliki, ostne mešanje lahkih družin s $\mathbf{16}_4$, ki pa je sorazmerno z $\Lambda_{\mathrm{GUT}}^{-1}$ in je zanemarljivo. Masne člene lahko sedaj

[2] Delamo v približku, ko so vsi parametri realni.

prepišemo v

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y = & \begin{pmatrix} u_a^c & \bar{u} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{u^c}^T \begin{pmatrix} v_u \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a(v_1 + v_2) \\ m_b - \eta_b v_2 & \bar{v}_u y \end{pmatrix} \mathcal{U}_Q \begin{pmatrix} u_b \\ \bar{u}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} d_a^c & \bar{d} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{d^c}^T \begin{pmatrix} v_d \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a(v_2 - v_1) \\ m_b - \eta_b v_2 & \bar{v}_d y \end{pmatrix} \mathcal{U}_Q \begin{pmatrix} d_b \\ \bar{d}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} e_a^c & \bar{e} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{e^c}^T \begin{pmatrix} -3v_d \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a(-v_1 - 3v_2) \\ m_b + 3\eta_b v_2 & -3\bar{v}_d y \end{pmatrix} \mathcal{U}_L \begin{pmatrix} e_b \\ \bar{e}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{\nu^c}^T \begin{pmatrix} -3v_u \mathcal{Y}_{ab} & m_a + \eta_a(v_1 - 3v_2) \\ m_b + 3\eta_b v_2 & -3\bar{v}_u y \end{pmatrix} \mathcal{U}_L \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \mathcal{U}_{\nu^c}^T \begin{pmatrix} v_R \mathcal{Y}_{ab} & \\ & y\bar{v}_L \end{pmatrix} \mathcal{U}_{\nu^c} \begin{pmatrix} \nu_b^c \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a & \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \mathcal{U}_L^T \begin{pmatrix} v_L \mathcal{Y}_{ab} & \\ & y\bar{v}_R \end{pmatrix} \mathcal{U}_L \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \text{h.k.}
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Matrike $\mathcal{U}$ se bločno zapišejo kot,

$$
\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & a \\ b^T & c \end{pmatrix}, \tag{5.27}
$$

kjer sta a in b 4-vektorja, c pa je skalar. Izbrani so tako, da se $\overline{\mathbf{16}}$ meša le s $\mathbf{16}_4$. Matrike U ostanejo ortogonalne, z njimi zadušimo mešanje lahkih družin s $\mathbf{16}_4$.

Ne zanima nas parametrizacija težkih generacij prek a, b in c, zato bomo le redefinirali matrične elemente po delovanju posameznih blokov

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y = & \begin{pmatrix} u_a^c & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_u (U_{u^c}^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_Q)_{fb} & M_{u^c}\delta_{a4} \\ M_Q \delta_{b4} & \bar{v}_u y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b \\ \bar{u}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} d_a^c & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_d (U_{d^c}^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_Q)_{fb} & M_{d^c}\delta_{a4} \\ M_Q \delta_{b4} & \bar{v}_d y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_b \\ \bar{d}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} e_a^c & \bar{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3v_d (U_{e^c}^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_L)_{fb} & M_{e^c}\delta_{a4} \\ M_L \delta_{b4} & -3\bar{v}_d y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_b \\ \bar{e}^c \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3v_u (U_{\nu^c}^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_L)_{fb} & M_{\nu^c}\delta_{a4} \\ M_L \delta_{b4} & -3\bar{v}_u y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a^c & \bar{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_R (U_{\nu^c}^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_{\nu^c})_{fb} & \\ & y\bar{v}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b^c \\ \bar{\nu} \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_a & \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L (U_L^T)_{ae} \mathcal{Y}_{ef} (U_L)_{fb} & \\ & y\bar{v}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_b \\ \bar{\nu}^c \end{pmatrix} \\
& + \text{h.k.}
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

Matrike U imajo v tem primeru posebno obliko [12]:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \Lambda & \lambda x \\ -x^T\Lambda & \lambda, \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \mathbb{1} - \frac{xx^T}{\lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})}, \\ \lambda &= \frac{1}{\sqrt{1+x^Tx}} \end{aligned} \tag{5.29}$$

kjer je x tri-vektor, dobljen iz mešalnega bloka $\overline{\mathbf{16}} \otimes \mathbf{16}$ – prve tri komponente prepišemo in vse skupaj delimo s četrto,

$$x = \frac{1}{d_4}\left(d_1, d_2, d_3\right)^T, \tag{5.30}$$

torej se s tem ne izgubi informacija o m_a in η_a:

$$\begin{aligned} (x_Q)_i &= \frac{m_i - v_2\eta_i}{m_4 - v_2\eta_4}, & (x_L)_i &= \frac{m_i + 3v_2\eta_i}{m_4 + 3v_2\eta_4}, \\ (x_{u^c})_i &= \frac{m_i + \eta_i(v_1+v_2)}{m_4 + \eta_4(v_1+v_2)}, & (x_{\nu^c})_i &= \frac{m_i + \eta_i(v_1-3v_2)}{m_4 + \eta_4(v_1-3v_2)}, \\ (x_{d^c})_i &= \frac{m_i + \eta_i(v_2-v_1)}{m_4 + \eta_4(v_2-v_1)}, & (x_{e^c})_i &= \frac{m_i + \eta_i(-v_1-3v_2)}{m_4 + \eta_4(-v_1-3v_2)}, \end{aligned} \tag{5.31}$$

indeks i teče od 1 do 3. Matrike Λ so očitno simetrične, zato lahko izpustimo transponiranje. Za vsako masno matriko se blok prvih štirih družin lahko zapiše kot $U_g^T\mathcal{Y}U_h$, kjer sta $g, h \in \mathcal{I} = \{Q, L, u^c, d^c, e^c, \nu^c\}$.

Matrika $\mathcal{Y}$ je v splošnem hermitska, v našem realnem primeru pa simetrična matrika. Vendar še nismo izbrali baze v kateri bomo delali in izberemo si lahko ravno tako, kjer je diagonalna $\mathcal{Y} = \mathrm{diag}(Y, y_4)$. Blok Y predstavlja lahke generacije in je $Y = \mathrm{diag}(y_1, y_2, y_3)$. Potem lahko blok prvih štirih generacij zapišemo z

$$\begin{aligned} U_g^T\mathcal{Y}U_h &= \begin{pmatrix} \Lambda_g & -\Lambda_g x_g \\ \lambda_g x_g^T & \lambda_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & \\ & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_h & \lambda_h x_h \\ -x_h^T\Lambda_h & \lambda_h \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda_g(Y + y_4 x_g x_h^T)\Lambda_h & \lambda_h\Lambda_g(Yx_h - y_4 x_g) \\ (x_g^T Y - y_4 x_h^T)\lambda_g\Lambda_h & \lambda_g\lambda_h(x_g^T Y x_h + y_4) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ker so $\lambda_{g,h}$ majhe (zadušita jih veliki Yukawovi sklopitvi $1/\eta_4$ and $1/m_4$, ki sta na skali poenotenja) lahko blok lahkih generacij obravnavamo kot da je neodvisen od težkih. Končno nam tako preostanejo masne matriki znanih delcev. Masne matrike nabitih fermionov

$$\begin{aligned} M_U &= v_u\Lambda_{u^c}(Y + x_{u^c}x_Q^T)\Lambda_Q, \\ M_D &= v_d\Lambda_{d^c}(Y + x_{d^c}x_Q^T)\Lambda_Q, \\ M_E &= -3v_d\Lambda_{e^c}(Y + x_{e^c}x_L^T)\Lambda_L, \end{aligned} \tag{5.33}$$

Diracova masna matrika nevtrinov,

$$M_{\nu_D} = -3v_u\Lambda_{\nu^c}(Y + x_{\nu^c}x_L^T)\Lambda_L \tag{5.34}$$

in pa dve masni mansni matriki Majorane za nevtrine

$$\begin{aligned} M_{\nu_R} &= v_R \Lambda_{\nu^c}(Y + x_{\nu^c} x_{\nu^c}) \Lambda_{\nu^c}, \\ M_{\nu_L} &= v_L \Lambda_L (Y + x_L x_L^T) \Lambda_L, \end{aligned} \tag{5.35}$$

ki supaj ob predpostavki $M_{\nu_L} \ll M_{\nu_D} \ll M_{\nu_R}$ dajo aproksimacijo za mase levoročnih nevtrinov

$$M_\nu = M_{\nu_L} - M_{\nu_D}^T M_{\nu_R}^{-1} M_{\nu_D}. \tag{5.36}$$

Vsaka izmed masnih matrik se lahko diagonalizira prek dveh ortogonalnih matrik – R in L, ki vsebujeta leve in desne lastne vektorje

$$M = R(M^d)L^T. \tag{5.37}$$

Mešalni matriki v kvarkovskem, V_{CKM} in leptonskem sektorju, V_{PMNS}, sta definirani kot

$$V_{\mathrm{CKM}} = L_U^T L_D, \quad V_{\mathrm{PMNS}} = L_\nu^T L_E. \tag{5.38}$$

Prav tako lahko sedaj enačbe (5.31) poenostavimo ob uporabi zamenjave

$$z_i = \eta_i/\eta_4, \quad w_i = m_i/m_4 - \eta_i/\eta_4, \quad u_{1,2} = v_{1,2}\frac{\eta_4}{m_4}. \tag{5.39}$$

Sedaj lahko vsak vektor x_g zapišemo kot

$$x_g = z + \alpha_g w,$$

kjer sta z in w konstantna brezdimenzijska vektorja, spreminjajo pa se le skalarji α_g, kjer $g \in \mathcal{I}$. Ti skalarji so

$$\begin{aligned} \alpha_L^{-1} &= 1 + 3u_2, & \alpha_Q^{-1} &= 1 - u_2, \\ \alpha_{e^c}^{-1} &= 1 - 3u_2 - u_1, & \alpha_{\nu^c}^{-1} &= 1 - 3u_2 + u_1, \\ \alpha_{d^c}^{-1} &= 1 + u_2 - u_1, & \alpha_{u^c}^{-1} &= 1 + u_2 + u_1. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Po premisleku ugotovimo, da pravzaprav y_4 ne potrebujemo, saj lahko redefiniramo $Y \to y_4^{-1} Y$ in $y_4 v_{u,d,R,L} \to v_{u,d,R,L}$.

Naš model ima sedaj 15 prostih parametrov:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad u_{1,2}, \quad v_{u,d}, \quad v_{L,R}. \tag{5.41}$$

Po drugi strani poznamo 3 mase gornjih kvarkov, 3 se spodnjih kvarkov, 3 mase nabitih leptonov, polno matriko CKM, razlike kvadratov mas v nevtrinskem sektorju in realni del matrike PMNS. Opomba k nevtrinskim masam – razliko kvadratov mas v zadnjih dveh nevtrinskih generacijah poznamo le do predznaka natančno

$$\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2, \quad |\Delta m_{23}^2| = |m_2^2 - m_3^2|, \tag{5.42}$$

kjer so $m_{1,2,3} = m_{\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau}$ lastne vrednosti masne matrike nevtrinov. Prav tako vemo, da so mase nevtrinov navzgor omejene $m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu} + m_{\nu_\tau} < 0.23$ eV pri 95% stopnji gotovosti [15].

5.3 Eksperimentalne vrednosti

Kot eksperimentalne vrednosti bomo vzeli teoretične napovedi mas za SM in MSSM na skali poenotenja, ki so prikazane v tabeli 5.1, povzeti iz [17]

Tabela 5.1 – Tabela teoretičnih napovedi mas kot posledica drsečih sklopitvenih konstant po renormalizaciji. Teoretične napovedi so izračunane na skali $\Lambda_{\text{GUT}} = 2 \times 10^{16}$ GeV.

masa	napoved SM [MeV]	napoved MSSM [MeV]
m_u	0.4565	0.3961
m_c	$0.2225 \cdot 10^3$	$0.1930 \cdot 10^3$
m_t	$70.5188 \cdot 10^3$	$71.0883 \cdot 10^3$
m_d	1.0773	0.9316
m_s	20.4323	17.6702
m_b	$0.9321 \cdot 10^3$	$0.9898 \cdot 10^3$
m_e	0.4413	0.3585
m_μ	93.116	75.639
m_τ	$1.1609 \cdot 10^3$	$1.3146 \cdot 10^3$

Matrika CKM je v našem primeru realna, z vrednostmi

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.974274 & 0.225341 & 0.00351001 \\ -0.225292 & 0.97342 & 0.0411997 \\ 0.00586726 & -0.0409306 & 0.999145 \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

Povzeta je po absolutnih vrednostih matričnih elementov iz [16], nato pa je bila ortogonalizirana z Gram-Schmidtovim postopkom, tako da je res $V_{\text{CKM}} \in SO(3)$.

Spreminjanje mase nevtrinov z višanjem energije lahko zanemarimo, tako kot spreminjanje (vseh) mešalnih kotov. Prav tako imajo to posebnost, da niso nujno razvrščenu hierarhično po generacijah, saj imamo dve opciji:

$$m_1 < m_2 < m_3 \quad \text{in} \quad m_3 < m_1 < m_2. \tag{5.44}$$

Zaradi tega se vpelje količino Δm^2, katere predznak pove, kateri režim imamo. Definirana je kot

$$\Delta m^2 \equiv m_3^2 - \frac{m_2^2 + m_1^2}{2} = \begin{cases} \Delta m_{31}^2 - \Delta m_{21}^2/2, & \Delta m^2 > 0 \quad \text{oz.} \quad m_1 < m_2 < m_3 \\ \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2/2, & \Delta m^2 < 0 \quad \text{oz.} \quad m_3 < m_1 < m_2 \end{cases} \tag{5.45}$$

Nevtrinske parametre vzamemo iz [15, str. 49, tabela 14.7], ki so povzeti v tabeli 5.2

Tabela 5.2 – Tabela eksperimentalno znanih nevtrinskih parametrov iz [15] – mase in mešalni koti. Parametri so izbrani tako, da so koti θ_{12}, θ_{13} in θ_{23} vsi v prvem kvadrantu.

parameter	vrednost znotraj $\pm 1\sigma$
Δm^2_{21} [(eV)^2]	$7.54 \cdot 10^{-5}$
$\lvert\Delta m^2\rvert$ [(eV)^2]	$2.43 \cdot 10^{-3}$
$\sin^2\theta_{12}$	0.308
$\sin^2\theta_{23}$, $\Delta m^2 > 0$	0.437
$\sin^2\theta_{23}$, $\Delta m^2 < 0$	0.455
$\sin^2\theta_{13}$, $\Delta m^2 > 0$	0.0234
$\sin^2\theta_{13}$, $\Delta m^2 < 0$	0.0240

Poglavje 6

Napovedi v približku dveh generacij

Preden bomo poskusili prilegati proste parametre na naše znane vrednosti poskusimo rešiti problem v približku dveh generacij. Če model ne bo deloval z dvema, nimamo veliko možnosti, da bo deloval s tremi, kar bi pomenilo, da ga je treba spremeniti.

Diagonalizacija nesimetrične matrike nad realnim obsegom (5.37) je ekvivalentna razcepu na singularne vrednosti (SVD). Ta proces pa je računsko zahteven, poleg tega pa nam da preveč informacij, saj po en. (5.38) za mešalne kote zadoščajo že desni lastni vektorji. K sreči se lahko diagonlaziciji ognemo s tem, da proste parametre prilagajamo matričnim invariantam, kot sta npr. sled in determinanta, ki sta računsko nezahtevni operaciji.

V približku dveh generacij se bomo osredotočili na drugo in tretjo generacijo, tj. μ in τ. Naš model ima v tem primeru sledeče proste parametre,

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u_{1,2}, \quad v_{u,d}, \quad v_{L,R}, \tag{6.1}$$

ki jih je skupno 12. Preštejmo še koliko znanih količin moramo povzeti z modelom:

- 6 dobro znanih mas električno nabitih leptonov,
- 1 kot iz matrike CKM: $V_{cb} = \sin\theta_{cb}$,
- 1 kot iz matrike PMNS: $\sin\theta_{23}$,
- 1 do predznaka natančna razlika kvadratov nevtrinskih mas: $|\Delta m^2_{23}|$,

kar je skupno 9 količin. V splošnem imamo tako neskončno mnogo kompleksnih rešitev, vendar pa realne rešitve kljub temu mogoče sploh ne obstajajo, kot npr.

$$a^2 + b^2 + 2 = 0,$$

nima realnih rešitev za a in b. V vsakem primeru nam bosta dve družini fermionov služili bolj kot potrdilo koncepta in se z njimi ne bomo preveč ubadali, zato bomo pogledali le, če nam uspe najti eno realno rešitev.

Sedaj moramo poiskati nabor invariant za matrike $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Matrične invariante so definirane kot koeficienti v karakterističnem polinomu, $p_M(\lambda)$, in so zato intimno povezane z lastnimi vrednostmi. Za splošno matriko $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se karakteristični polinom glasi

$$p_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} M + \lambda^0 \det M. \tag{6.2}$$

Iz identitete $p_M(M) = 0$ sledi

$$\det M = \frac{1}{2}\big[(\operatorname{tr} M)^2 - \operatorname{tr} M^2\big], \tag{6.3}$$

pa tudi podobna identiteta za inverz matrike

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}(\operatorname{tr} M \mathbb{1} - M). \tag{6.4}$$

Slednja nam da lahko tudi sled inverza

$$\operatorname{tr} M^{-1} = \frac{\operatorname{tr} M}{\det M}. \tag{6.5}$$

V dveh dimenzijah imamo torej le sled, $\operatorname{tr} M$, in pa determinanto, $\det M$. Da se bomo znebili levih lastnih vektorjev bomo računali invariante matrik $M^T M = L(M^d)^2 L^T$. V sektorju nabitih leptonov imamo 7 invariant,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \operatorname{tr} M_U^T M_U = m_c^2 + m_t^2,\\
\mathcal{I}_2 &= \operatorname{tr} M_D^T M_D = m_s^2 + m_b^2,\\
\mathcal{I}_3 &= \operatorname{tr} M_U^T M_U M_D^T M_D = m_c^2 m_s^2 + m_b^2 m_t^2 - (m_b^2 - m_s^2)(m_t^2 - m_c^2)V_{cb}^2,\\
\mathcal{I}_4 &= \det M_U^T M_U = (\det M_U)^2 = (m_c m_t)^2,\\
\mathcal{I}_5 &= \det M_D^T M_D = (\det M_D)^2 = (m_s m_b)^2,\\
\mathcal{I}_6 &= \operatorname{tr} M_E^T M_E = m_\mu^2 + m_\tau^2,\\
\mathcal{I}_7 &= \det M_E^T M_E = (\det M_E)^2 = (m_\mu m_\tau)^2.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

O nevtrinih nimamo vseh informacij – poznamo mešalne kote, nimamo pa cele masne matrike, zaradi česar moramo biti bolj prebrisani. Invariante, ki jih bomo poskusili so

$$\mathcal{I}_8 = \sqrt{(\operatorname{tr} M_\nu^T M_\nu)^2 - 4 \det M_N^T M_N} = |\Delta m_{23}^2|, \tag{6.7}$$

$$\mathcal{I}_9 = \big| \operatorname{tr} V_{\mathrm{PMNS}} M_\nu^T M_\nu V_{\mathrm{PMNS}}^T M_E^T M_E - \operatorname{tr} M_\nu^T M_\nu M_E^T M_E \big| = (m_\tau^2 - m_\mu^2)|\Delta m_{32}^2| V_{23}^2, \tag{6.8}$$

katere numerično poznamo. S temi invariantami se lahko v celoti izognemo diagonalizaciji tudi v leptonskem sektorju.

Naše parametre bomo prirejali prek minimizacije funkcije χ^2, ki jo bomo definirali kot

$$\chi^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{(\mathcal{I}_i - \hat{\mathcal{I}}_i)^2}{\sigma_i^2}, \tag{6.9}$$

kjer so $\hat{\mathcal{I}}_i$ eksperimentalno določene količine. Za napako, σ_i, bomo vzeli 1% znanih količin, tj. $\sigma_i = 0.01\hat{\mathcal{I}}_i$.

Minimizacija χ^2 s programom MATHEMATICA nam da eno rešitev s $\chi^2 \sim 10^{-30}$, ki jo prikazuje tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Tukaj vidimo rezultate prilagajanja na dveh generacijah. Kot bi pričakovali imamo režim $|v_R| \gg |v_{u,d}| \gg |v_L|$, ki nam da $M_{\nu_R} \gg M_{\nu_D} \gg M_{\nu_L}$.

y_1	-351.76440162488884396
y_2	24.609542260619788699
z_1	-7.0128976341891129161
z_2	$35.164797383521348111 5$
w_1	$-7.1446670038124449558 5$
w_2	$8.0184979902987372446 1$
u_1	$0.8059437633010454813 2$
u_2	$-0.4087704534848290843 8$
v_u	$-219.3842748220142351 44$
v_d	$37.944837474876216414 0$
v_L	$1.67773399615309770 \cdot 10^{-9}$
v_R	$-3.0056348344321065531 \cdot 10^{13}$

Ta rešitev pravilno povzame vse eksperimentalne količine in napove masi nevtrinov v primeru brez supersimetrije

$$
\begin{aligned}
m_{\nu_\mu} &\approx 0.049 \text{ eV}, \\
m_{\nu_\tau} &\approx 0.0038 \text{ eV}.
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

Kot vidimo gre za primer, ko $m_{\nu_\tau} < m_{\nu_\mu}$, torej nimamo standardne hierarhije, kot jo imamo v ostalih generacijah.

Poglavje 7

Tri generacije

Ker smo dobili rešitev v približku dveh generacij, bomo poskusili ta model uporabiti na vseh treh. Spet se bomo ognili diagonalizaciji in naš model prilagajali na invariante. Za vsako matriko $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ imamo tri invariante, ki jih tako kot prej preberemo iz karakterističnega polinoma, $p_M(\lambda)$

$$p_M(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \operatorname{tr} M - \lambda\frac{1}{2}\big[(\operatorname{tr} M)^2 - \operatorname{tr} M^2\big] + \lambda^0 \det M, \tag{7.1}$$

od koder vidimo, da je nabor invariant

$$\begin{aligned} I_1(M) &= \operatorname{tr} M, \\ I_2(M) &= \frac{1}{2}\big[(\operatorname{tr} M)^2 - \operatorname{tr} M^2\big] \\ I_3(M) &= \det M. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Iz identitete $p_M(M) = 0$ lahko določimo nekaj identitet za poenostavitev računanja, npr. kako se determinanta zapiše s sledmi,

$$\det M = \frac{1}{6}\big[(\operatorname{tr} M)^3 - 3 \operatorname{tr} M \operatorname{tr} M^2 + 2 \operatorname{tr} M^3\big], \tag{7.3}$$

inverz matrike M,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\big[M^2 - M \operatorname{tr} M + \mathbb{1} I_2(M)\big]. \tag{7.4}$$

in pa sled inverza,

$$\operatorname{tr} M^{-1} = \frac{I_2(M)}{I_3(M)}. \tag{7.5}$$

Preden dokončno zapišemo invariante za prilagajanje bomo še definirali dve matriki, ki se bosta pogosto pojavljali,

$$U \equiv M_U^T M_U, \quad D \equiv M_D^T M_D. \tag{7.6}$$

Invariante, ki jih bomo uporabili za parametrizacijo nabitih leptonov so

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \operatorname{tr} U, \\
\mathcal{I}_2 &= I_2\ U, \\
\mathcal{I}_3 &= \det U, \\
\mathcal{I}_4 &= \operatorname{tr} D, \\
\mathcal{I}_5 &= I_2\ D, \\
\mathcal{I}_6 &= \det D, \\
\mathcal{I}_7 &= \operatorname{tr} U \operatorname{tr} D - \operatorname{tr} UD, \\
\mathcal{I}_8 &= I_2(U) I_2(D) - I_2(UD), \\
\mathcal{I}_9 &= \operatorname{tr}(UD^{-1}), \\
\mathcal{I}_{10} &= \operatorname{tr} M_E^T M_E, \\
\mathcal{I}_{11} &= I_2\ M_E^T M_E, \\
\mathcal{I}_{12} &= \det M_E^T M_E.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Da bomo določili mešalne kote iz matrike CKM smo izbrali tri invariante $\mathcal{I}_{7,8,9}$, ki v vodilnih členih zadoščajo za popoln opis matrike CKM, ki parametrizirana s tremi koti kot v kompleksnem, le da kompleksno fazo postavimo na nič [16], [15],[10],

$$
V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \tag{7.8}
$$

Potem dobimo aproksimacije za naše invariante v prvem redu, kjer upoštevamo $c_{13}^2 \approx 1$, saj $s_{13}^2 \sim 10^{-6}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_7 &\sim m_t^2 m_b^2 (1 - c_{12}^2 c_{13}^2) \propto s_{12}^2, \\
\mathcal{I}_8 &\sim (m_c^2 m_t^2)(m_s^2 m_b^2)(1 - c_{23}^2 c_{13}^2) \propto s_{23}^2, \\
\mathcal{I}_9 &\sim \frac{m_t^2}{m_d^2} s_{13}^2 \propto s_{13}^2
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

S temi invariantami imamo največjo občutljivost za vse tri neodvisne parametre in pričakujemo dobro ujemanje.

Literatura

[1] R.N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry: The Frontiers of Quark-Lepton Physics*, (Springer-Verlag, New York, 2003).

[2] Q. Ho-Kim in Xuan-Yem Pham, *Elementary Particles and Their Interactions: Concepts and Phenomena*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998).

[3] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, 1996, Cambridge).

[4] B. Bajc, „ν PHYSICS AND GUTs“, datum ogleda je 1. 7. 2014, `http://www-f1.ijs.si/ bajc/nugut.pdf`.

[5] B. Bajc, „Grand Unification and Proton Decay“, datum ogleda je 1. 7. 2014, `http://www-f1.ijs.si/ bajc/gutproton.pdf`

[6] A.D. Özer, *$SO(10)$ - Grand Unification and Fermion Masses*, doktorsko delo, Fakultät für Physik, der Ludwig-Maximilians-Universität München, München, (2005).

[7] M.R. Sepanski, *Compact Lie Groups*, (Springer Science+Business Media, LLC, 2007).

[8] P. Byakti, D. Emmanuel-Costa, A. Mazumdar in P.B. Pal, *Number of fermion generations from a novel Grand Unified model* `arXiv:1308.4305v1 [hep-ph]`, (2013).

[9] P.B. Pal, *Dirac, Majorana and Weyl fermions*, `arXiv:1006.1718v2 [hep-ph]`, (2010).

[10] Miha Nemevšek, *Napovedi minimalne teorija poenotenja $SO(10)$ za mase lahkih fermionov*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana, (2004).

[11] R. Slansky, *Group Theory for Unified Model Building*, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981).

[12] B. Bajc, "Minimal SUSY SU(5) with extra vectorlike matter", AIP Conf.Proc., **1534**, 223 (2012), doi: 10.1063/1.4807360

[13] A. Strumia in F. Vissani, *Neutrino masses and mixings and ...*, `arXiv:hep-ph/0606054v3`, (2010).

[14] K.S. Babu in S.M. Barr, *Realistic Quark and Lepton Masses through $SO(10)$ Symmetry*, arXiv:hep-ph/9512389v1 (1995).

[15] K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), *Neutrino mass, mixing and oscillations*, Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014).

[16] K.A. Olive *et al.* (Particle Data Group), *The Cabobbo-Kobayashi-Maskawa quark-mixing matrix*, Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014).

[17] K. Bora, *Updated values of running quark and lepton masses at GUT scale in SM, 2HDM and MSSM*, arXiv:1206.5909v1 [hep-ph] (2012).