

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



ODDELEK ZA FIZIKO

Seminar – 1. letnik fizike, druge bolonjske stopnje

Supersimetrija v klasični kvantni mehaniki

AVTOR:

Jože Zobec, dipl. fiz. (UN)

MENTOR:

Prof. Dr. Svjetlana Fajfer,
Prof. Dr. Tomaž Prosen

Povzetek

Supersimetrija ni več tako vroče področje, kot je bilo pred leti. To je predvsem zaradi meritev v fiziki delcev, ki zaenkrat nakazujejo, da je ni v našem energijskem dosegu. Vendar pa je supersimetrija širše področje, ki ni omejeno zgolj na fiziko delcev. V tem seminarju bom pokazal napredne računske prijeme v obravnavi klasičnih kvantno-mehanskih problemih.

Ljubljana, 20. maj 2013

Kazalo

1	Uvod	2
2	Ponovitev	2
2.1	Grupa	2
2.2	Algebra	2
3	Uvod v supersimetrijo	3
3.1	Mešanje bozonskih in fermionskih stanj	6
3.2	Zlom supersimetrije	6
4	Zgledi	7
4.1	Neskončna potencialna jama	7
5	Podobni Hamiltoniani	8
5.1	Operatorji dviganja	9
5.2	Klasifikacija podobnih potencialov	10
5.2.1	Rešitve povezane s translacijami	10
6	Izospektralni Hamiltoniani	11
6.1	Enoparametrične družine izospektralnih potencialov	11
6.2	Večparametrične družine izospektralnih potencialov	12
7	Supersimetrija v teoriji perturbacij	13
7.1	Variacijski pristop	13
7.2	δ -razvoj	14

1 Uvod

Supersimetrija je področje, ki ima razne zanimive posledice in aplikacije več kot le v fiziki delcev, kjer je verjetno ta hip najbolj aktualna.

V klasični¹ kvantni mehaniki je supersimetrija izjemno močno orodje v študiji izospektralnih in kvazi-izospektralnih Hamiltonianov in je prav tako močno povezana z integrabilnostjo v kvantni mehaniki.

Ideja je predvsem to, da bi naredili konsistentno teorijo, po kateri bi lahko v enem zamahu naenkrat izračunali cele družine hamiltonianov in iz obstoječih rešljivih naredili nove, ki so prav tako rešljivi.

Supersimetrični pristopi so relativno novi in s seboj prinašajo razne nadgradnje že znanim prijemom (npr. novi načini perturbacijske teorije).

2 Ponovitev

Iz predavanj Višje kvantne mehanike se spomnimo, da lahko polja kvantiziramo prek operatorjev polja, za kar pa nujno potrebujemo kreacijske, a^\dagger in anihilacijske a operatorje. Na kratko ponovimo nekaj pojmov, s katerimi se bomo srečevali tekom tega seminarja.

2.1 Grupa

Grupa je množica elementov z naslednjimi lastnostmi:

1. Med elementi obstaja asociativna operacija.
2. Množica je za to operacijo zaprta.
3. Izmed teh elementov je natanko eden tak, ki je za to operacijo enota.
4. V množici so zajeti tudi vsi inverzni elementi.

V kolikor ne veljajo vsi pogoji imamo enega izmed nižjih objektov, kot je na primer monoid (nimamo nujno vseh inverzov) ali polgrupa (nimamo nujno identitete).

Če je operacija komutativna, je ta grupa abelova in operacijo imenujemo seštevanje. Sicer pa je grupa neabelova in operacijo imenujemo množenje.

2.2 Algebra

Pogostokrat srečamo pojem ‘algebra’. Pa ponovimo, kaj je to.

Kolobar je množica elementov z naslednjimi lastnostmi:

1. Ta množica je abelova grupa z operacijo seštevanja.

¹tj. nerelativistični

2. Elementi so hkrati (pol)grupa za operacijo množenja.
3. Za kombinacijo operacij velja distributivnostna relacija.

Algebra je vektorski prostor nad kolobarjem.

Liejeve grupe imajo tudi svojo algebro – generatorji Liejevih grup nepenjajo vektorski prostor na mnogoterosti grupe². Da pokažemo, da zadoščajo pogojem iz algebre zadošča zapis komutacijskih relacij med generatorji, zato bomo na tem mestu definirali komutator, en. (1) in anti-komutator, en. (2):

$$[A, B] \equiv AB - BA, \quad (1)$$

$$\{A, B\} \equiv AB + BA. \quad (2)$$

Vpeljali bomo skupno notacijo, s katero bomo lahko „mešali“ med obema pojmom:

$$[A, B]_{\pm} = AB \pm BA. \quad (3)$$

Tudi končnim grupam lahko priredimo algebre – za nas relevantna je simetrična grupa S_n , ki jo imenujemo tudi permutacijska grupa.

Če to grupo razširimo z operacijo parnosti, ima ta nova grupa dve nerazcepni upodobitvi. Funkcije so lahko bodisi simetrične na permutacije, ali pa anti-simetrične. Baza za prvo upodobitev so bozonski, za drugo pa fermionski kreacijsko-anihilacijski operatorji.

Lastne vrednosti so ± 1 (parnost), hkrati pa grupa komutira s Hamiltonianom, kar pomeni, da je to dobra simetrija in da Hamiltonian lahko zapišemo tako, v bazi te upodobitve, oz. drugače: Hamiltonian lahko zapišemo s pomočjo fermionskih ali bozonskih kreacijsko-anihilacijskih operatorjev.

Tako od tu dobimo fermionsko in bozonsko algebro:

$$[a_i, a_j^{\dagger}]_{\pm} = \delta_{ij}, \quad (4)$$

$$[a_i, a_j]_{\pm} = 0, \quad (5)$$

kjer komutatorji ustrezajo bozonom, antikomutatorji pa fermionom.

3 Uvod v supersimetrijo

Pa si omočimo noge v vodi supersimetrije: obravnavajmo Schrödingerjevo enačbo, tj. Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + mV(\vec{x}). \quad (6)$$

Vpeljemo enote $\hbar = c_0 = \varepsilon_0 = 1$. Maso m bomo zaenkrat postavili na 1. Tako je brezdimenzijska Schrödingerjeva enačba

²Vsaka Liejeva grupa je hkrati mnogoterost

$$H = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\vec{x}), \quad (7)$$

kjer velja še $H = i\partial_t$. V eni dimenziji se (7) glasi

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x). \quad (8)$$

Predpostavimo, da je naš potencial neničelen in navzdol omejen. Velja

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) = i\partial_t\psi_n(x). \quad (9)$$

Za $E_0 = 0$ torej velja $H|\psi_0\rangle = 0$. Od tu dobimo pogoj za potencial

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 \psi_0}{\psi_0}, \quad (10)$$

kjer smo predpostavili, da so stanja $\psi_n(x)$ vezana stanja, tj. je $\psi_0(x)$ dobro določen, in to lahko storimo.

Naš Hamiltonian bi radi zapisali v obliko z operatorjem štetja, a^\dagger in a , se pravi $H = a^\dagger a$, zato moramo poiskati nek pameten razcep. Vidimo, da je (8) oblike $H \sim (A+B)(A-B)$, tako bomo definirali superpotencial $W(x)$, da bo

$$a = W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x, \quad (11)$$

$$a^\dagger = W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x. \quad (12)$$

Taka operatorja sta res drug drugemu hermitsko adjungirana, saj je operator ∂_x anti-hermitski (do totalnega odvoda natančno).

Vse lepo in prav, vendar, a tak $W(x)$ sploh obstaja? V fiziki na taka vprašanja ponavadi odgovorimo retrospektivno in to bomo storili tudi sedaj. Vse skupaj vstavimo v Hamiltonian in iz njega določimo vezi, katerim mora zadoščati.

Poglejmo, kaj naredi $a^\dagger a$ na neki funkciji $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} a^\dagger a \phi(x) &= \left[W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x \right] \left[W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x \right] \phi(x) \\ &= \left[-\frac{1}{2}\partial_x^2 + W^2(x) \right] \phi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left[\partial_x(W(x)\phi(x)) - W(x)\partial_x\phi(x) \right]}_{(\partial_x W(x))\phi(x)} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \underbrace{W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}[\partial_x W(x)]}_{V(x)} \right\} \phi(x), \end{aligned} \quad (13)$$

Se pravi, če je ta enačba Schrödingerjeva, potem mora $W(x)$ spoštovati sledeča izraza:

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 \psi_0(x)}{\psi_0(x)} = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x) \quad (14)$$

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial_x \psi_0(x)}{\psi_0(x)}, \quad (15)$$

kjer smo izraz (15) dobili z reševanjem Riccatijeve enačbe (14).

Tako smo dobili $H_1 = a^\dagger a$ in ima rešitve $\psi_n(x)$ in E_n , kot jih poznamo od prej.

Poglejmo, kaj se zgodi, če vrstni red obrnemo. Definirajmo še $H_2 = aa^\dagger$. Dobimo ga kot

$$H_1 = -\frac{1}{2} \partial_x^2 + V_1(x) = a^\dagger a, \quad (16)$$

$$H_2 = -\frac{1}{2} \partial_x^2 + V_2(x) = aa^\dagger, \quad (17)$$

kjer

$$\begin{aligned} V_1(x) &= W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x), \\ V_2(x) &= W^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Enačbo (18) lahko dokažemo z istim postopkom kot (13), le da na funkcijo $\phi(x)$ delujemo z operatorjem aa^\dagger .

H_1 ima lastne pare $\psi_n^{(1)}(x)$, $E_n^{(1)}$, H_2 pa $\psi_n^{(2)}(x)$, $E_n^{(2)}$.

Pravimo, da je $V_2(x)$ supersimetrični partner $V_1(x)$. Lastne funkcije in energijski spekter H_2 dobimo lahko z reševanjem, ali pa uganemo

$$\psi_n^{(2)}(x) = a\psi_n^{(1)}(x), \quad (19)$$

od koder vidimo da $\psi_0^{(2)}(x)$ ne obstaja, saj anihilacijski operator iz vakuuma naredi ničlo po definiciji. Energijski spekter H_2 je enak tistemu iz H_1 , s tem da nima osnovnega stanja E_0 , kar lahko pokažemo kot

$$\begin{aligned} H_2 \psi_n^{(2)}(x) &= aa^\dagger(a\psi_n^{(1)}(x)) = a(a^\dagger a)\psi_n^{(1)}(x) = \\ &= aE_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(a\psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}\psi_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (20)$$

se pravi

$$E_n^{(1)} \equiv E_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

Zaradi tega, spremenimo definicijo H_1 tako, da ne bo imel več osnovnega stanja

$$H_1 \rightarrow H'_1 = H_1 - E_0. \quad (22)$$

Funkcije hamiltoniana H_2 bi morali v dobiti spet z reševanjem

Hamiltoniana H_1 in H_2 bi radi združili v enega, tako da se prostora ne mešata. Zato definiramo

$$\mathbf{H} \equiv H_1 \oplus H_2 \equiv \begin{bmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Q^\dagger = \sigma^+ a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \sigma^- a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$Q^\dagger Q + Q Q^\dagger = \{Q, Q^\dagger\} = \mathbf{H}. \quad (25)$$

3.1 Mešanje bozonskih in fermionskih stanj

Kot se verjetno kar najbolj povdarja, obstaja v supersimetričnih teorijah nekakšna direktna linija, ki povezuje bozonske operatorje s fermionskimi. Pa pogledjmo, kaj to pravzaprav pomeni. Operatorja a in a^\dagger tvorita bozonsko algebro

$$[a, a^\dagger] = (\partial_x W), \quad [a, a] = 0. \quad (26)$$

V splošnem je $\partial_x W = 1$ le za harmonski oscilator, za višje člene pa je problem bolj kompliciran, zarade anharmonske sklopitve. Opis v Fockovem prostoru ni več tako enostaven, vendar mi verjemite na besedo, da so to še vedno bozonski operatorji.

Definirajmo operatorje c in c^\dagger , tako da

$$c = \sigma^+, \quad c^\dagger = \sigma^-, \quad (27)$$

Pokažemo lahko, da tile operatorji zadostijo enostavni fermionski algebri,

$$\{c, c^\dagger\} = 1, \quad \{c, c\} = 0, \quad (28)$$

torej lahko Q in Q^\dagger zapišemo kot

$$Q = c^\dagger a, \quad Q^\dagger = a^\dagger c. \quad (29)$$

Sedaj vidimo, kako je pravzaprav treba interpretirati operatorje Q in Q^\dagger . Ker namreč velja

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0, \quad (30)$$

tile operatorji mešajo bozonska in fermionska stanja ne da bi pri tem spremenili energijo stanja.

3.2 Zlom supersimetrije

Tak Hamiltonian ima degeneriran spekter, saj imata H_1 in H_2 iste lastne vrednosti. Kadar velja $E_0^{(1)} = 0$ pravimo, da je supersimetrija zlomljena, saj Hamiltoniana nista več degenerirana in takih operatorjev Q nimamo več. V teorijah polja to merimo s tako imenovanim Witten-ovim indeksom,

$$\Delta(\beta) = \text{Tr} [e^{-\beta H_1} - e^{-\beta H_2}]. \quad (31)$$

Za supersimetrične teorije je

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Delta(\beta) = 0, \quad (32)$$

za teorije z zlomljeno supersimetrijo pa

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \Delta(\beta) = 1, \quad (33)$$

saj osnovno stanje H_1 preživi.

4 Zgledi

Take stvari je vedno lažje razumeti na konkretnem zgledu, zato pokažimo, bolj kot zanimivost, kako lahko to teorijo uporabimo na starih znancih iz takih ali drugačnih kurzov kvantne mehanike.

4.1 Neskončna potencialna jama

Začetniški potencial, (vstavi sliko), omejen od 0 do 1. Lastne fukcije so kar

$$\psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \sin n\pi x, \quad E_n^{(1)} = \frac{(n\pi)^2}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

stanja za $n = 0$ ni, ker to stanje ustreza situaciji brez delca (verjetnost, da se delec nahaja v jami je natanko 0). Osnovni lastni par je torej za $n = 1$, vendar ga bolj kljub temu označil z indeksom 0.

$$\psi_0^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \sin \pi x, \quad \frac{2}{\pi^2} E_0^{(1)} = 1 \neq 0. \quad (35)$$

Supersimetrija je v tem primeru zlomljena, saj $E_0 \neq 0$, zato moramo začetni Hamiltonian translirati v energiji:

$$\underbrace{(H - E_0^{(1)})}_{H_1} \psi_0^{(1)} = (E_0^{(1)} - E_0^{(1)}) \psi_0^{(1)} = 0 \cdot \psi_0^{(1)} = 0. \quad (36)$$

Od tod lahko poiščemo superpotencial $W(x)$ in to kar po definiciji iz enačbe (15)

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial_x \sin \pi x}{\sin \pi x} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \cot \pi x. \quad (37)$$

Sedaj lahko poičemo supersimetričnega partnerja neskončne potencialne jame s pomočjo enačbe (18)

$$V_2(x) = \frac{\pi^2}{2} \left(\cot^2 \pi x + \frac{1}{\sin^2 \pi x} \right) = \pi^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \pi x} - \frac{1}{2} \right), \quad (38)$$

kar očitno ni več neskončna potencialna jama, za katero dobimo $V_1(x) = \pi^2/2$, ki pa se ravno prikladno odšteje s konstantno $E_0^{(1)}$ v enačbi (36). Potencial V_2 je poseben primer potenciala Rosen Morse I (tj. trigonometrična izvedenka).

Sedaj smo dobili oba Hamiltoniana,

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2}\partial_x^2, \\ H_2 &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 - V_2(x), \end{aligned} \quad (39)$$

od koder lahko že sklepamo, kako bo izgledal supersimetrični Hamiltonian \mathbf{H} .

Poglejmo še kako izgledajo valovne funkcije $\psi_n^{(2)}(x)$. Za to bomo seveda uporabili operatorje „višanja“ in „nižanja“, vendar bi morali za „brute force“ pristop izračunati ne preveč lepo diferencialno enačbo za H_2 .

Vendar lahko tudi tokrat uporabimo izraze iz prejšnjega poglavja in sicer (20). Vemo, da H_2 nima stanja pri $n = 1$, ampak da se štetje začne pri $n = 2$.

Da bomo dobili $\psi_0^{(2)}$ bomo uporabili identiteto

$$\psi_0^{(2)}(x) = a\psi_2^{(1)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pi \cot \pi x - \partial_x) \sin 2\pi x \quad (40)$$

$$= \frac{2\pi}{2\sqrt{2}}(\cos^2 \pi x - \cos 2\pi x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin^2 \pi x. \quad (41)$$

Operatorja a in a^\dagger ne služita več višanju in nižanju energije, ampak pretvorbi stanj med H_1 in H_2 .

Splošen izraz za $\psi_n^{(2)}$ je dolg in grd. Zapisal bom raje le še za $\psi_3^{(2)}$, za $n = 3$, se pravi prvo vzbujeno stanje H_2 :

$$\psi_3^{(2)}(x) \propto \sin(\pi x) \sin(2\pi x), \quad (42)$$

se pravi do normalizacijske konstante natančno. Operatorja a in a^\dagger seveda po pretvorbi pokvarita normalizacijo, tako da so rezultati narobe normirani.

5 Podobni Hamiltoniani

Prava moč supersimetrije se pokaže pri obravnavi rešljivih problemov. Izkaže se, da imamo končen nabor potencialov, za katere poznamo točne rešitve, med njimi pa lahko definiramo preproste transformacije, ki en potencial preoblikuje v drugega.

Najprej pokažimo kaj so podobni potenciali. Imejmo potencial $V_1(x; \underline{p}_1)$ in potencial $V_2(x; \underline{p}_2)$, kjer sta \underline{p}_1 in \underline{p}_2 urejena nabora parametrov v potencialih. Če sta V_1 in V_2 podobna, potem veljajo sledeči identiteti:

$$V_2(x; \underline{p}_1) = V_1(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_1), \quad (43)$$

$$\underline{p}_2 = \underline{f}(\underline{p}_1). \quad (44)$$

Prek en. (44) lahko definiramo celo družino potencialov, ki so podobni V_1 :

parametre dobimo prek kompozituma funkcije f ,

$$\begin{aligned} \underline{p}_2 &= \underline{f}(\underline{p}_1), \\ \underline{p}_3 &= \underline{f}(\underline{p}_2) = (\underline{f} \circ \underline{f})(\underline{p}_1), \\ &\dots \\ \underline{p}_n &= \underbrace{(\underline{f} \circ \underline{f} \circ \dots \circ \underline{f})}_{n-1}(\underline{p}_1), \end{aligned} \tag{45}$$

potenciali pa so potem

$$\begin{aligned} V_2(x; \underline{p}_1) &= V_1(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_1), \\ V_3(x; \underline{p}_1) &= V_2(x; \underline{p}_2) + R(\underline{p}_2) = V_1(x; \underline{p}_3) + R(\underline{p}_1) + R(\underline{p}_2), \\ &\dots \\ V_n(x; \underline{p}_1) &= V_1(x; \underline{p}_n) + \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k), \end{aligned} \tag{46}$$

ki je spet očitno podoben $V_1(x)$. Sedaj dobimo družino podobnih Hamiltonianov,

$$H_n = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V_n(x; \underline{p}_1) = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V_1(x; \underline{p}_n) + \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k). \tag{47}$$

Ti Hamiltoniani imajo degeneriran spekter, z izjemo vakuumov, ki so očitno

$$E_0^{(n)} = \sum_{k=1}^{n-1} R(\underline{p}_k). \tag{48}$$

Ker so spektri degenerirani, sledi da so vakuumske energije teh hamiltonianov sovpadajo z energijami vzbujenih stanj Hamiltonianov z indeksom $m < n$. Seveda gremo lahko do konca nazaj, pridemo do $m = 1$ in $E_0^{(1)} = 0$ in tako dobimo celoten vezani spekter Hamiltoniana H_1 :

$$E_n^{(1)}(\underline{p}_1) = \sum_{k=1}^n R(\underline{p}_k). \tag{49}$$

Seveda to pomeni, da V_2 (in posledično \underline{p}_2) ne sme biti arbitraren, ampak tak, da zadosti pogoju en. (49), sicer pademo lahko v poljubno vzbujeno stanje. Tak način iskanja spektra je dosti enostavnejši, vendar moramo za to poznati funkcijo \underline{f} .

5.1 Operatorji dviganja

V prejšnji sekciji sem na koncu zgleda povedal, da z naivnim pristopom z operatorjem dviganja ali spuščanje lahko le pretvarjamo med supersimetričnima potencialoma. Sedaj bom pokazal, kako jih je treba uporabiti, da z njimi dejansko lahko dvignemo oz. spustimo stanje.

Spet imejmo Hamiltonian H_1 , za katerega velja $E_0^{(1)} = 0$, ki ima valovno funkcijo $\psi_0^{(1)}(x; \underline{p}_1)$. Operatorje a^\dagger bi morali dejansko ves čas pisati kot $a^\dagger(x; \underline{p})$, saj

$$a^\dagger \equiv a^\dagger(x; \underline{p}) \equiv W(x; \underline{p}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x,$$

Hamiltonian H_1 ima supersimetričnega partnerja H_2 , ki ima degeneriran spekter. H_2 zato lahko obravnavamo ko podoben Hamiltonian, vemo, da se razlikuje ravno za vakuumsko stanje.

Višja vzbujena stanja moramo očitno dobiti kot

$$\psi_n^{(1)}(x; \underline{p}_1) \propto a^\dagger(x; \underline{p}_1) a^\dagger(x; \underline{p}_2) \dots a^\dagger(x; \underline{p}_n) \psi_0^{(1)}(x; \underline{p}_{n+1}), \quad (50)$$

Odtod sledi pomembna posledica: supersimetrična partnerja V_1 in V_2 sta si podobna potenciala, kar pomeni, da je med njima lahko netrivialna podobnostna transformacija – konkretno lahko spet za zgled vzamemo neskončno potencialno jamo in en. (38).

Ker je neprikladno računati poljubno visok \underline{p}_k na zalogo, se po navadi raje uporabi kar

$$\psi_n^{(1)}(x; \underline{p}_1) = a^\dagger(x; \underline{p}_1) \psi_{n-1}^{(1)}(x; \underline{p}_2), \quad (51)$$

ki nam sugerira, da je za dviganje in spuščanje dejansko dovolj poznavanje supersimetričnih partnerjev.

Sipalnih stanj se ne bom dotikal.

5.2 Klasifikacija podobnih potencialov

Posebej prikladno je, če znamo podobne potenciale, ki pripadjo podobnostnim transformacijam iste baže, pogrupirati, saj lahko prek tega z zamahom roke naenkrat rešimo vse probleme klasične kvantne mehanike, kar se jih da analitično rešiti.

Splošen problem je še nerešen, saj pravzaprav splošen rešljivi potencial še ni definiran. Je pa fizikom kljub temu uspelo zaenkrat pokazati, da obstajata dve pasmi podobnih potencialov:

- $\underline{p}' = \underline{p} + \underline{q}$ – potenciali, podobni na translacije parametrov,
- $\underline{p}' = q\underline{p}$ – potenciali, podobni na skaliranje parametrov.

Poleg teh imamo še primere, ko je \underline{f} nelinearna transformacija, takrat se lahko zgodi npr. $p'_k = q \cdot p_k^2$.

Potenciali, ki imajo lastnost podobnosti ne rabijo biti centralni.

5.2.1 Rešitve povezane s translacijami

Iz \underline{p}_1 lahko preidemo v \underline{p}_2 prek transformacije \underline{f} , ki je v tem primeru enostavna translacija:

$$\underline{p}_2 = \underline{f}(\underline{p}_1) = \underline{p}_1 + \underline{q}.$$

Kot sem napisal prej, je sta si supersimetrična partnerja „podobna“. Torej poleg vseh do sedaj zapisanih identitet, velja tudi pravilo

$$V_2(x; \underline{p}_1) - V_1(x; \underline{p}_1 + \underline{q}) = R(\underline{p}_1). \quad (52)$$

Oba sta povezana prek istega superpotenciala v en. (18), torej

$$\begin{aligned} W^2(x; \underline{p}_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x; \underline{p}_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x; \underline{p}_1 + \underline{q}) - W^2(x; \underline{p}_1 + \underline{q}) = \\ = R(\underline{p}_1) = L(\underline{p}_1) - L(\underline{p}_1 + \underline{q}) \end{aligned} \quad (53)$$

Tabela 1 prikazuje nekaj potencialov, ki pripadajo tej družini.

Tabela 1: Nekaj preprostih potencialov, ki pripadajo podobnim na translacije. Rosen-Morse I je res podoben neskončni potencialni jami – Rosen-Morse I, pri $\alpha = \pi$, $A = \pi$ in $B = 0$. Coulombov potencial se da transformirati v 3D harmonski oscilator.

Naziv	$W(x)$	$V(x)$	pogoj
Rosen-Morse I	$-A \cot \alpha x - B/A$	$\frac{A(A-\alpha)}{\sin^2 \alpha x} + 2B \cot \alpha x - A^2 + (B/A)^2$	$0 \leq \alpha x \leq \pi$
Coulomb	$\frac{e^2}{2(\ell+1)} - \frac{(\ell+1)}{r}$	$-\frac{e^2}{r} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{e^4}{4(\ell+1)^2}$	brez
1D harmonski oscilator	$\frac{1}{2}\omega x - b$	$\frac{1}{4}\omega^2 \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega}{2}$	brez
3D harmonski oscilator	$\frac{1}{2}\omega r - \frac{\ell+1}{r}$	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - (\ell + 3/2)\omega$	brez
Eckart	$-A \coth \alpha r + B/A$	$A^2 + (B/A)^2 - 2B \coth \alpha r + \frac{A(A+\alpha)}{\sinh^2 \alpha r}$	$B > A^2$

6 Izospektralni Hamiltoniani

Izospektralni Hamiltoniani v klasični kvantni mehaniki so taki, ki imajo strogo enake energijske spektre vezanih stanj in enake transmisijske/refleksijske koeficiente sipalnih stanj. Edino, kar se med njima razlikuje, so valovne funkcije posledično nekateri momenti ($\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle \dots$).

Izospektralne družine hamiltonianov so intimno povezane z multisolitonskimi rešitvami nelinearnih evolucijskih enačb.

6.1 Enoparametrične družine izospektralnih potencialov

Ideja je ta: superpotencial $W(x)$ ni enoličen, zato lahko poiščemo družino potencialov $\{\tilde{V}_1(x; \lambda_1)\}$, ki imajo vsi istega supersimetričnega partnerja. Da se bomo ognili nanašajočim koeficientom bomo delali v enotah $\hbar = 2m = 1$, zaradi česar se bomo iznebili raznoraznih koeficientov $(\sqrt{2})^{\pm 1}$ (pozor, cele potence 2 ostanejo). Hamiltoniani, oblike

$$H = \frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}_1(x; \lambda_1), \quad (54)$$

so vsi izospektralni glede na parameter λ_1 .

Recimo, da $W(x)$ ni enoličen. Potem poleg $W(x)$ obstaja še $\tilde{W}(x)$. Najpreprostejša ideja bi bila potem

$$W(x) \rightarrow \tilde{W}(x) = W(x) + \phi(x), \quad (55)$$

kjer zahtevamo, da $\tilde{W}(x)$ prav tako uboga en. (14) za $V_2(x)$, ki se v teh enotah glasi

$$V_2(x) = W^2(x) + \partial_x W(x) = \tilde{W}^2(x) + \partial_x \tilde{W}(x), \quad (56)$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} W^2 + \frac{d}{dx} W &= W^2 + \frac{d}{dx} W + 2W\phi + \frac{d}{dx} \phi + \phi^2, \\ 2W(x)\phi(x) + \phi^2(x) &= -\frac{d}{dx} \phi(x), \\ \frac{2W(x)}{\phi(x)} + 1 &= -\frac{1}{\phi^2(x)} \frac{d}{dx} \phi(x), \quad y(x) = 1/\phi(x), \\ 2W(x)y(x) + 1 &= -\frac{d}{dx} y(x). \end{aligned} \quad (57)$$

Ko to enačbo rešimo, dobimo

$$\phi(x) = \frac{d}{dx} \ln \left[\int_{-\infty}^x \psi_0^2(u) du + \lambda_1 \right] = \frac{d}{dx} \ln [\mathcal{I}_1(x) + \lambda_1], \quad (58)$$

kjer je $\psi_0(x)$ spet normirana funkcija izvirnega potenciala $V_1(x)$.

Družina potencialov $\tilde{V}_1(x; \lambda_1)$, ki ima partnerski potencial $V_2(x)$ je torej

$$\tilde{V}_1(x; \lambda_1) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln [\mathcal{I}_1(x) + \lambda_1]. \quad (59)$$

Parameter λ_1 se je notri prištel kot integralska konstanta in ne more biti čisto poljubna, ampak $\lambda_1 \notin [0, 1]$, tj. $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$ – v tistem režimu je osnovno stanje $\psi_0(x; \lambda_1)$ potenciala $\tilde{V}_1(x; \lambda_1)$ nenormalizabilno, ampak je sipalno stanje – torej nam kot pri supersimetričnih partnerjih manjka osnovno stanje, čeprav so vsa ostala stanja nespremenjena. Prvotni potencial $V_1(x)$ dobimo kot limito $\lambda_1 \rightarrow \pm\infty$.

6.2 Večparametrične družine izospektralnih potencialov

Isto lahko naredimo tudi na malo drugačen način. Partnerski potencial V_2 je v bistvu V_1 brez osnovnega stanja. Družina potencialov \tilde{V}_1 niso nič drugega, kot V_1 z modificiranim osnovnim stanjem.

Malo bom spremenil notacijo: ψ_1 je osnovno stanje V_1 in ima energijo E_1 , ψ_2 je osnovno stanje V_2 in ima energijo E_2 , ψ_n je osnovno stanje V_n z energijo E_n .

Na enoparametričnem primeru odrežemo osnovno stanje kot $V_2 = V_1 - 2\partial_x^2 \ln \psi_1$. Nato moramo V_2 dodati splošno stanje, ki bi ustrezalo energiji E_1 . To stanje je linearna kombinacija $1/\psi_1$ in \mathcal{I}_1/ψ_1 , torej je novo osnovno stanje

$$\Phi_1(x; \lambda_1) = \frac{\alpha \mathcal{I}_1 + \beta}{\psi_1} = \frac{\mathcal{I}_1 + \lambda_1}{\psi_1}. \quad (60)$$

Tu smo upoštevali, da α in β v resnici nista neodvisna parametra, saj imamo še pogoj, da je to novo stanje normalizirano – potem zadošča le en parameter – λ_1 . Ko to stanje vstavimo nazaj v V_2 dobimo

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(x; \lambda_1) &= V_2 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Phi_1(x; \lambda_1) = \\
&= V_1 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_1 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Phi_1 = \\
&= V_1 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_1 \Phi_1) = \\
&= V_1 - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\mathcal{I}_1 + \lambda_1).
\end{aligned} \tag{61}$$

Osnovno stanje takega potenciala je $\tilde{\psi}_1(x; \lambda_1) = 1/\Phi_1(x; \lambda_1)$ in v limiti $\lambda_1 \rightarrow \pm\infty$ vrne ψ_1 . Kot prej sledi, da mora biti $\lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Ta postopek lahko posplošimo na več parametrične primere: ne samo, da odštejemo ψ_1 in ga vrnemo s parametrom λ_1 , odštejemo še osnovno stanje V_2, V_3, \dots in na koncu dobimo $\tilde{V}_1(x; \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n) = \tilde{V}_1(x; \underline{\lambda})$, kjer imamo toliko λ_i , da parametriziramo vsa vezana stanja.

7 Supersimetrija v teoriji perturbacij

Supersimetrija omogoča dve novi perturbacijski metodi. Variacijska metoda je bolj intuitivna in tudi bistveno bolj natančna, ti. δ -razvoj pa spominja na razvoj po zankah iz kvantne teorije polja, saj uporablja podobne prijeme ki se uporabljajo pri regularizaciji interakcijskih členov.

7.1 Variacijski pristop

Potencial V_1 ima člene, ki jih je treba obravnavati perturbativno. Za metodo potrebujemo testno valovno funkcijo, ψ_v , ki aproksimira osnovno stanje. Pričakovana energija tega stanja bo naša aproksimacija prave osnovne energije. Upoštevamo en. (14).

$$V_1(x) - E_0 = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x W(x). \tag{62}$$

s katero izračunamo $W(x)$ do neke natančnosti. Z njim lahko prek en. (11) in (12) izračunamo operatorje dviganja, a^\dagger , in spuščanja, a , s katerima se lahko zavihtimo v vzbujena stanja.

Začetno aproksimacijo $W(x)$ in E_0 dobimo prek variacijske metode, s testno funkcijo, ki aproksimira osnovno stanje. Po navadi se jo aproksimira z Gaussovo krivuljo. Imejmo testno funkcijo $\psi_v(x; \eta)$, kjer parameter η določimo tako, da minimizira energijo – s tem dobimo aproksimacijo osnovnega stanja. Pričakovana energija take testne valovne funkcije je

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle_\eta &= \langle \psi_v | H | \psi_v \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_v(x; \eta) H \psi_v(x; \eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_v(x; \eta) \left[-\frac{1}{2} \partial_x^2 + V_1(x) \right] \psi_v(x; \eta) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_v(x; \eta) \partial_x^2 \psi_v(x; \eta) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_v(x; \eta) V_1(x) \psi_v(x; \eta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \psi_v(x; \eta) \right]^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \psi_v^2(x; \eta) V_1(x), \tag{63}
\end{aligned}$$

kjer smo v en. (63) predpostavili, da je naša testna funkcija integrabilna, analitična in da dovolj hitro pada, ko $x \rightarrow \pm\infty$ – ker je testna funkcija arbitrarna, lahko zadostimo vsem tem pogojem. Prav tako smo zgolj zaradi preprostosti pisave predpostavili, da potencial V_1 komutira z falovno funkcijo, vendar to ni pravi pogoj.

Parameter η določimo tako, da minimizira energijo $\langle E \rangle_\eta$, tj. zahtevamo

$$\left. \frac{\partial \langle E \rangle_\eta}{\partial \eta} \right|_{\eta=\xi} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \langle E \rangle_\eta}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=\xi} > 0. \tag{64}$$

Energijo zato odvajamo po parametru η ,

$$\partial_\eta \langle E \rangle_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(\partial_x \psi_v) \partial_\eta (\partial_x \psi_v) + 2 \psi_v (\partial_\eta \psi_v) V_1 \right]. \tag{65}$$

Sedaj, ko imamo približek za E_0 in ψ_0 lahko izračunamo $W(x)$ prek identitete (15), tj.

$$W(x; \xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \ln \psi_v(x; \xi), \tag{66}$$

s čimer dobimo par V_1' in V_2' , ki sta približka za V_1 in V_2 . Potenciala V_1' in V_2' bi radi takšna, da poznamo njuno točno rešitev.

Ta metoda ima zelo veliko pomankljivost – zelo dobro moramo uganiti ψ_v . Po navadi se uporablja več parametrov η_i , kjer potem zahtevamo

$$\left. \partial_{\eta_i} \langle E \rangle_\eta \right|_{\underline{\eta}=\underline{\xi}} = 0, \quad \forall \eta_i \tag{67}$$

in pozitivnost determinante Hessejeve matrike glede na n -terec parametrov η_i (pogoj za lokalni minimum).

7.2 δ -razvoj

Razvoj po potencah δ nekoliko spominja na razvoj po zankah iz kvantne teorije polja. Metodo bom predstavil na konkretnem primeru. Naj bo $V_1(x) = 2gx^4$ anharmonski oscilator. Potenca 4 je previsoka, rešiti znamo samo za x^2 , zato bomo V_1 definirali kot analitično nadaljevanje harmonskega oscilatorja

$$V_1 = 2gx^4 = M^{2+\delta}x^{2+2\delta} - C(\delta) = W^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W. \quad (68)$$

Parameter M se je notri prištulil tako kot pri dimenzijski regularizaciji iz kvantne teorije polja. Sicer je res, da delamo z brezdimenzijskimi količinami, vendar ta skalirni faktor ostaja. Parameter δ nam predstavlja „anharmonskost“ oscilatorja. Energijo osnovnega stanja, $C(\delta)$ odštejemo za faktorizacijo hamiltoniana z operatorji a in a^\dagger .

Pri $\delta = 0$ imamo $M = m$, pri kvartičnem anharmonskem oscilatorju, $\delta = 1$, pa je $M = (2g)^{1/3}$. Če sta V_1 in W analitična, potem za oba obstaja Taylorjev razvoj po potencah δ ,

$$V_1 = M^2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \frac{[\ln(Mx^2)]^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k E_k, \quad (69)$$

E_k je energija osnovnega stanja potenciala V_1 , ki je znan do reda δ^k natančno. Analogno aproksimiramo tudi superpotencial $W(x)$,

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k W_{(k)}(x). \quad (70)$$

Nadaljujemo tako, da na obeh straneh en. (14) upoštevamo en. (69) in (70), ki mora veljati v vseh redih razvoja – dobimo sistem diferencialnih enačb po redih δ^k .

V prvem redu dobimo harmonski oscilator

$$W_{(0)}^2 - \partial_x W_{(0)} = M^2x^2 - 2E_0, \quad (71)$$

ki ima rešitve $W_{(0)} = Mx$ in $E_0 = M/2$.