

Zaključna naloga

Jože Zobec

1 Naloga

Razišči dvo-frekvenčni brcani rotator s časovno odvisno (brezdimenzijsko) hamiltonko

$$H(t) = \frac{p^2}{2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{k\delta(t-m) + k'\delta(t-m\tau-\theta)\} \cos \phi. \quad (1)$$

- Zanimiva je predvsem dinamika za inkomenzurabilno razmerje brcanih frekvenc (t.j. τ iracionalen, npr. $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$).
- Oglej si pojemanje korelacij, difuzijsko konstanto $\langle(p_t - p_0)^2\rangle/(2t)$, $t \rightarrow \infty$, ter Ljapunov eksponent v odvisnosti od konstant k , k' in nekaj tipičnih vrednosti razmerja frekvenc τ .
- Ali ima fazni zamik θ kak vpliv?
- Ali obstaja kaka zanimiva predstavitev dinamike v faznem prostoru (pozor: koncept običajne stroboskopske preslikave tu odpove)?

2 Razmislek

2.1 Tipična izbira parametrov

Hamiltonian (1) ima časovno periodičen potencial. To s sabo prinese nekatere lepe lastnosti pri določanju parametrov. Velja, da lahko brez zgube splošnosti delamo zgolj s $\tau \geq 0$ in $\theta \in [0, \tau]$. Prav tako lahko začetni čas (čas merjenja) postavimo na $t_0 = 0$ pri čemer lahko hamiltonian (1) prepišemo v

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + \cos(x) \sum_{m=0}^{\infty} [k\delta(t-m) + k'\delta(t-m\tau-\theta)]. \quad (2)$$

V primeru $\tau = 1$ in $\theta = 0$ imamo eno-frekvečni brcan rotator z jakostjo $K = k + k'$. Z njim lahko preverimo, če se rezultati ujemajo s pričakovanimi. Zanimivo bi bilo tudi preveriti kaj se zgodi, ko $\tau = 2$. Mogoče imamo efektivni $K_{\text{ef}} = (k + k')/2$ (tj. mogoče to ustreza eno-frekvečnemu brcanemu rotatorju s $K = K_{\text{ef}}$). Na koncu pa tudi preveriti kako je za $\tau = \sqrt{2} - 1$ in pa $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Ob tem je smiselno preveriti vse rezultate za različne θ , npr. za štiri različne ekvidistančne izbire θ znotraj $[0, \tau]$ (ob tem pa preveriti predvsem, ali to vpliva na korelacije).

2.2 Izračun dinamike

Očitno bomo morali delati z diskretnimi časi. Radi bi nekaj takega, kot je bila prejšnja stroboskopska preslikava. Opremimo z indeksi j zaporedne sunke, tj. tik ob nekem sunku j imamo vektor $(x_j, p_j)^T$. Čas bomo diskretizirali tako, da bomo vedno gledali dogodke tik pred sunki in $\Delta_j \equiv t_{j+1} - t_j$. S K_j bomo označili jakost j -tega sunka, tj. $K_j \in \{k, k', k+k'\}$, odvisno od situacije. Potem se je gibalna količina do tik pred sunkom $j+1$ (ob času t_{j+1}) spremenila za

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \dot{p}(t) dt &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt K_j \sin x_j \delta(t - (t_j + \varepsilon)) \\ &= K_j \sin x_j \underbrace{\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta(t - (t_j + \varepsilon))}_{=1}, \end{aligned}$$

saj nas nosi sunek, ki se je zgodil tik za časom t_j (zaradi tega smo v Diracovo δ -funkcijo dodali še majhen popravek $\varepsilon > 0$ k času sunka). Nova gibalna količina je potem

$$p_{j+1} = p_j + K_j \sin x_j,$$

Do kraja tik pred novim sunkom pa smo pripravili že z „novo“ gibalno količino, tj. gibalno količino po trku, ki se je zgodil tik za časom t_j , to je p_{j+1} :

$$x_{j+1} = x_j + \Delta_j p_{j+1} \pmod{2\pi}.$$

Naša nova „stroboskopska preslikava“ je potem

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= p_j + K_j \sin x_j, \\ x_{j+1} &= x_j + \Delta_j p_{j+1} \pmod{2\pi}. \end{aligned} \tag{3}$$

ki tudi močno spominja na stroboskopsko preslikavo iz skripte. Ta je dobra ne le za dvo-frekvenčni brcan rotator, ampak za poljubno število frekvenc. Vse kar nam preostane je to, da poiščemo Δ_j (časovne intervale med zaporednimi sunki) in njim pripadajoče K_j , torej s katero „nogo“ brcnemo naš rotator, oboje pa lahko izračunamo vnaprej. Enačba (3) bo naša osnovna enačba za modeliranje.

3 Rezultati

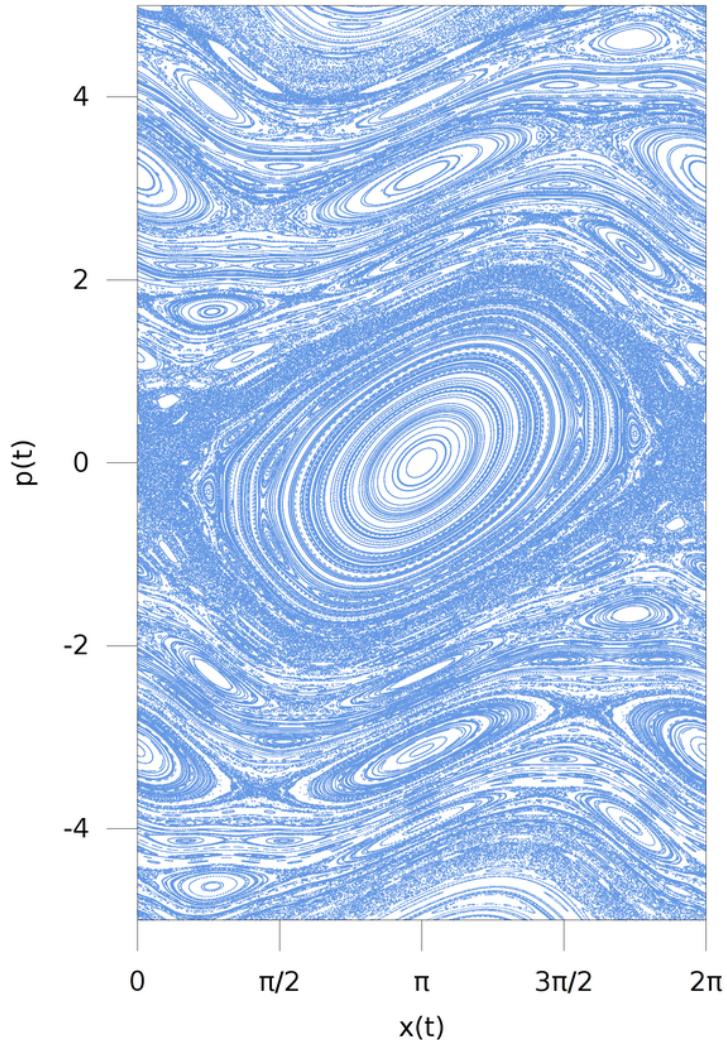
3.1 Fazni portreti

Dobro je, da si najprej ogledamo obnašanje v faznih portretov in mogoče že iz slik lahko razberemo kakšen empirični zakon. To bomo naredili s postopkom:

- Določimo τ, θ in t_{\max} .
- Med 0 in t_{\max} poiščemo vse Δ_j in K_j .
- Po enačbi (3) izračunamo vse x_j in p_j .

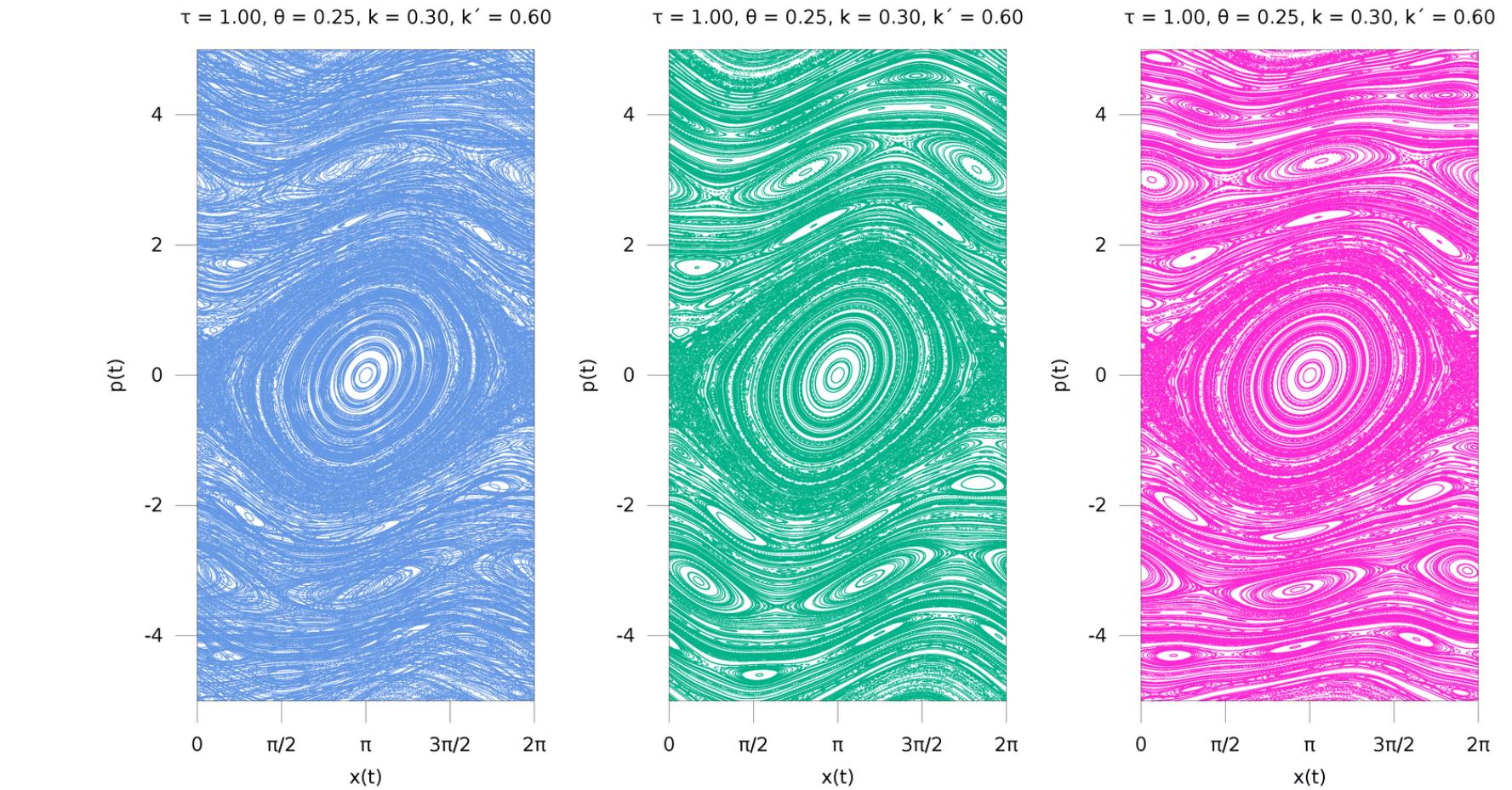
Vse grafe sem računal s $t_{\max} = 1000$ in z izbiro $G = 1000$ različnih začetnih pogojev. Za $\tau = 1$ in $k = 0.3$ ter $k' = 0.6$ dobimo res eno-frekvenčni oscilator z jakostjo branja $K = k + k'$, kot vidimo na sliki (1).

$$\tau = 1.00, \theta = 0.00, k = 0.30, k' = 0.60$$

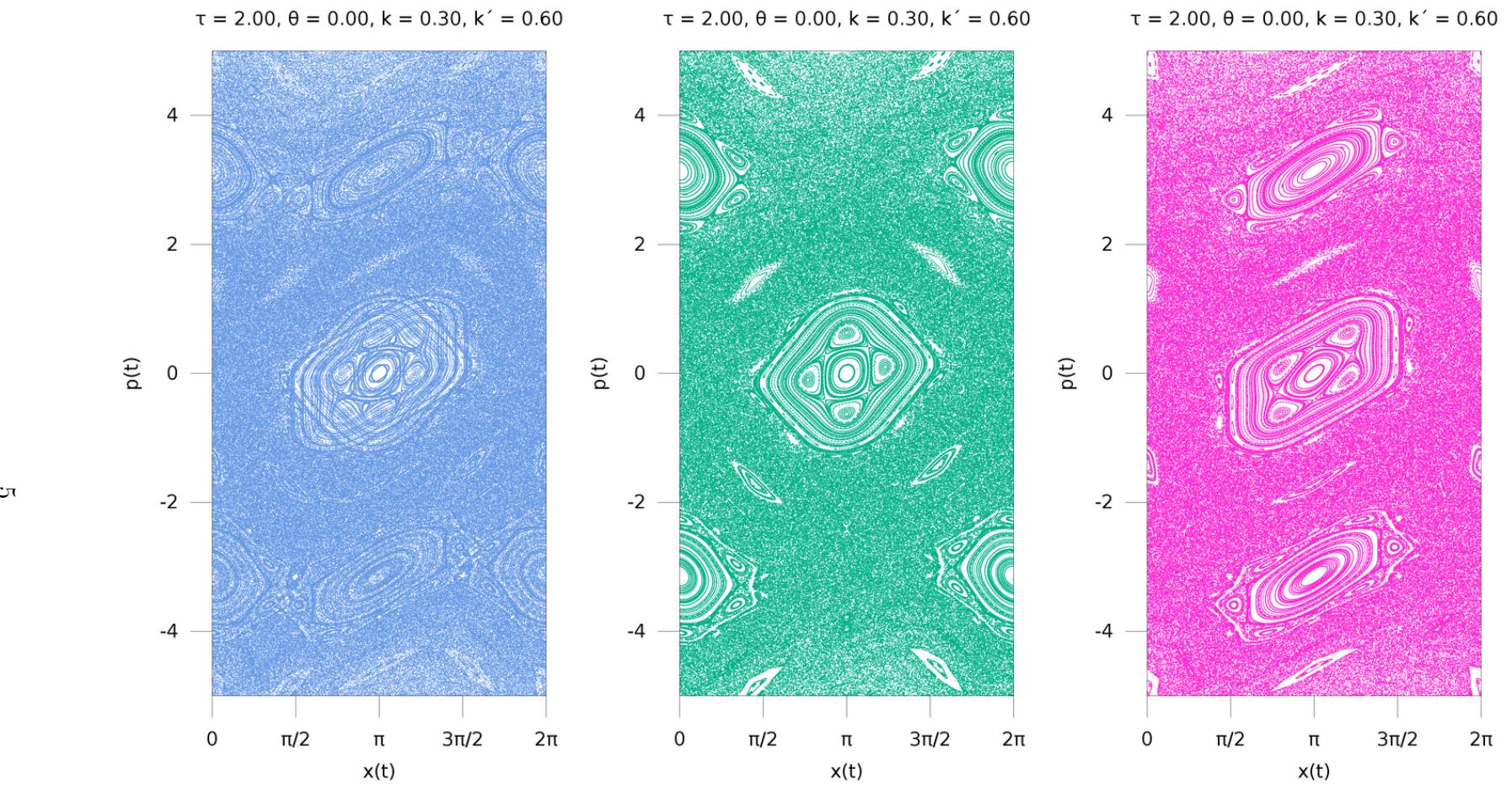


Slika 1: Res, ta fazni portret ustreza eno-frekvenčnemu brcanemu rotatorju z jakostjo branja $K = 0.9$. Izbira parametrov je v naslovu slike.

Zanimivo bi bilo izmeriti vpliv θ na fazni portret: pustimo vse parametre nespremenjene, spremenimo pa $\theta = 0.25$, kot kaže slika 2. Vidimo, da graf postane superpozicija dveh enakih fazno zamaknjениh grafov. Vsak izmed teh grafov ustreza eno-frekvenčnemu brcanemu rotatorju, vendar bi bil ustrezni $K < k + k'$. Podobne rezultate dobimo za $\tau = 2$ in $\theta = 0$, le da dobimo $K > k + k'$ (slika 3), saj je stopnja nereda posameznega grafa v tem primeru višja (vsaj sodeč glede na sliko 1).



Slika 2: Kombiniran graf, je na skrajni levi, desno od njega pa sta grafa ločena – zeleni ustreza sunkom $K_i = k$, magenta pa sunkom $K_i \in \{k', k + k'\}$. Kombiniran graf je nekoliko kaotičen, vendar pa imata ločena grafa manjšo stopnjo nereda.



Slika 3: Spet nam je uspelo graf razcepiti na dva enaka, a fazno zamaknjega.

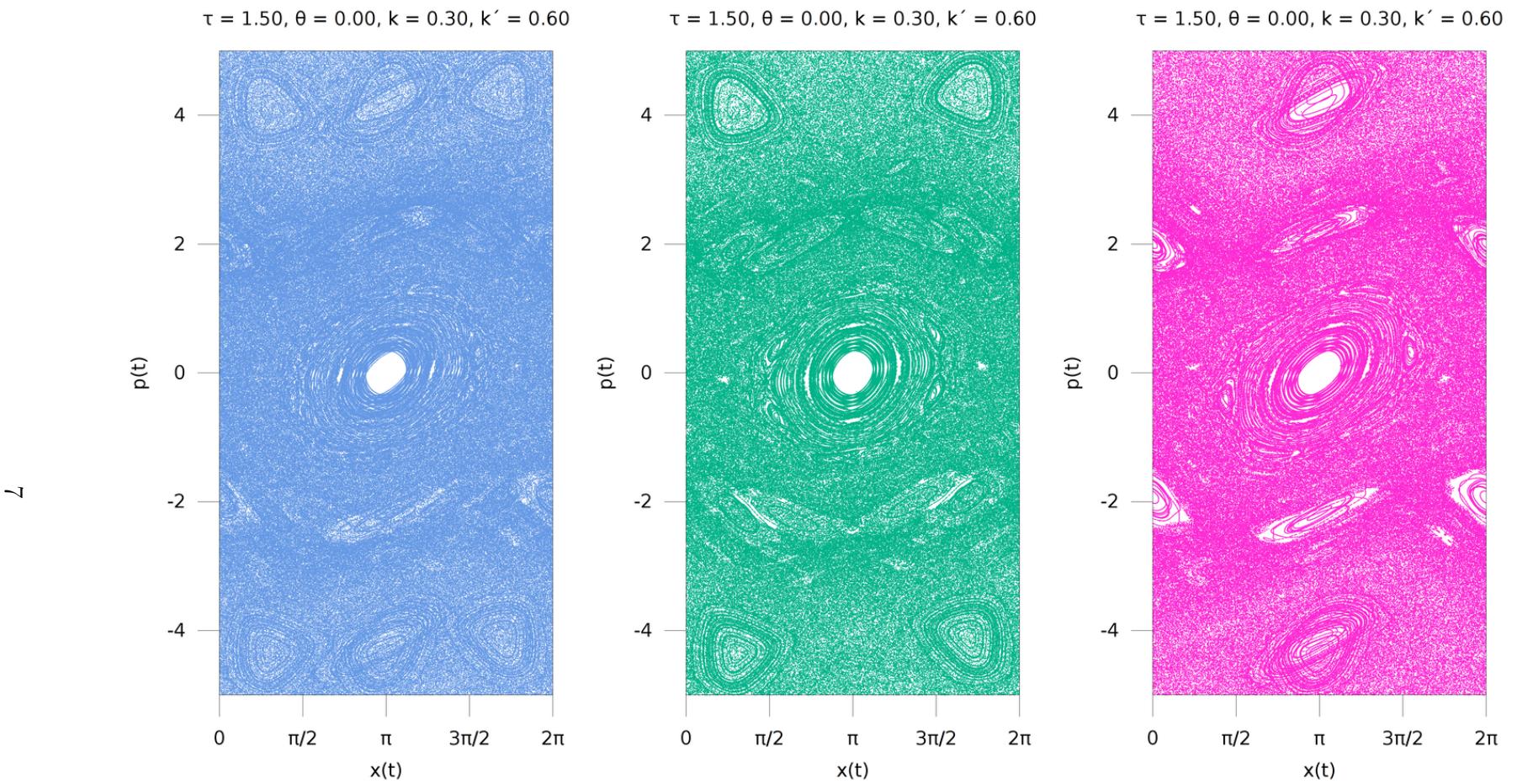
Ta razcep nam pove, da zgolj posplošitev stroboskopske preslikave ne zadošča. Te fazne portrete sem razločil od predpostavki, da graf vedno razpade na dva grafa: eden ustreza sunku prve noge z jakostjo k , drugi pa sunku druge noge z jakostjo k' (ali pa $k+k'$). Za razmerja vrekvenc, kjer obstaja tak $n \in \mathbb{Z}$, da $n\tau \in \mathbb{N}$ dobimo torej skupni graf, ki je superpozicija več grafov. Naivno bi pričakovali, da za $\tau = 1.5$ dobimo superpozicijo treh grafov, tisti, ki ustrezano k , k' in $k+k'$. Vendar temu ni tako. Dobimo superpozicijo štirih grafov (slika 4). Intuitivno je to zato, ker je treba opazovati „periodo“ brc, ki je na tabeli 1.

Tabela 1: Primer tabele periode brc za primer $\tau = 1.5$, $\theta = 0$.

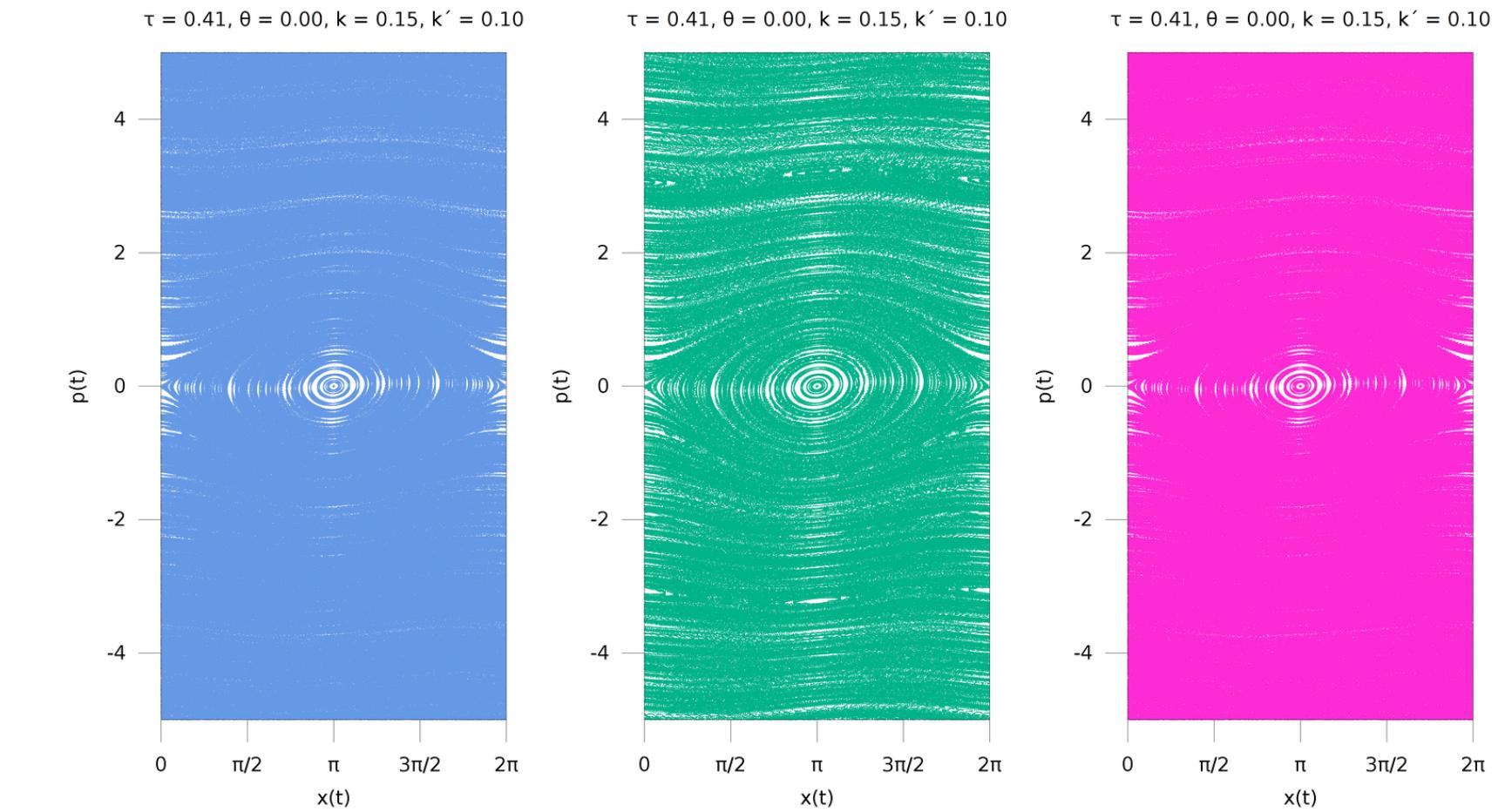
t_i	K_i
0	$k+k'$
1	k
1.5	k'
2	k
3	$k+k'$
\vdots	\vdots

Znotraj ene periode (tj. od $t = 0$ do tik pred $t = 3$) brcnemo štirikrat, zaradi česar vidimo na sliki 4, da nam razcep na $K_i = k$ in $K_i \in \{k', k+k'\}$ ni zadosten, saj je vsak izmed razcepljenih grafov sestavljen iz dveh, tj. je razlika tudi po tem, kdaj udarimo in ne le s kakšnim sunkom.

Za grafe z inkomenzurabilnim razmerjem frekvenc (tj. tak $n \in \mathbb{Z} \ni n\tau \in \mathbb{N}$ ne obstaja) nimamo cele periode, pač pa imamo nekakšno kvazi-periodično obnašanje. Naredil sem primer $\tau = \sqrt{2} - 1$ za različne k , k' in prišel do sklepa, da je kljub temu, da je obnašanje v ozadju videti urejeno, še vedno preveč kaotično za vse možne izbire k , k' (primer je na sliki 5, kjer sem izbral zelo pohlevne parametre, vendar zelo hitro zapolnimo cel prostor z izjemo orbit na sredini grafa).



Slika 4: Zeleni graf vsebuje vse sunke tipa k , magenta pa spet $K_i \in \{k', k' + k\}$. Po tabeli 1 vidimo, zakaj ta razcep ni zadosten – niso vsi sunki z istim k enakovredni – pomembno je predvsem *kda* se zgodijo.



Slika 5: Tukaj je $\tau = \sqrt{2} - 1$. Vidimo, da so že brce majnih jakosti premočne. Čeprav vidimo nek red v ozadju, ga žal ne moremo izluščiti.

3.2 Korelacijske funkcije

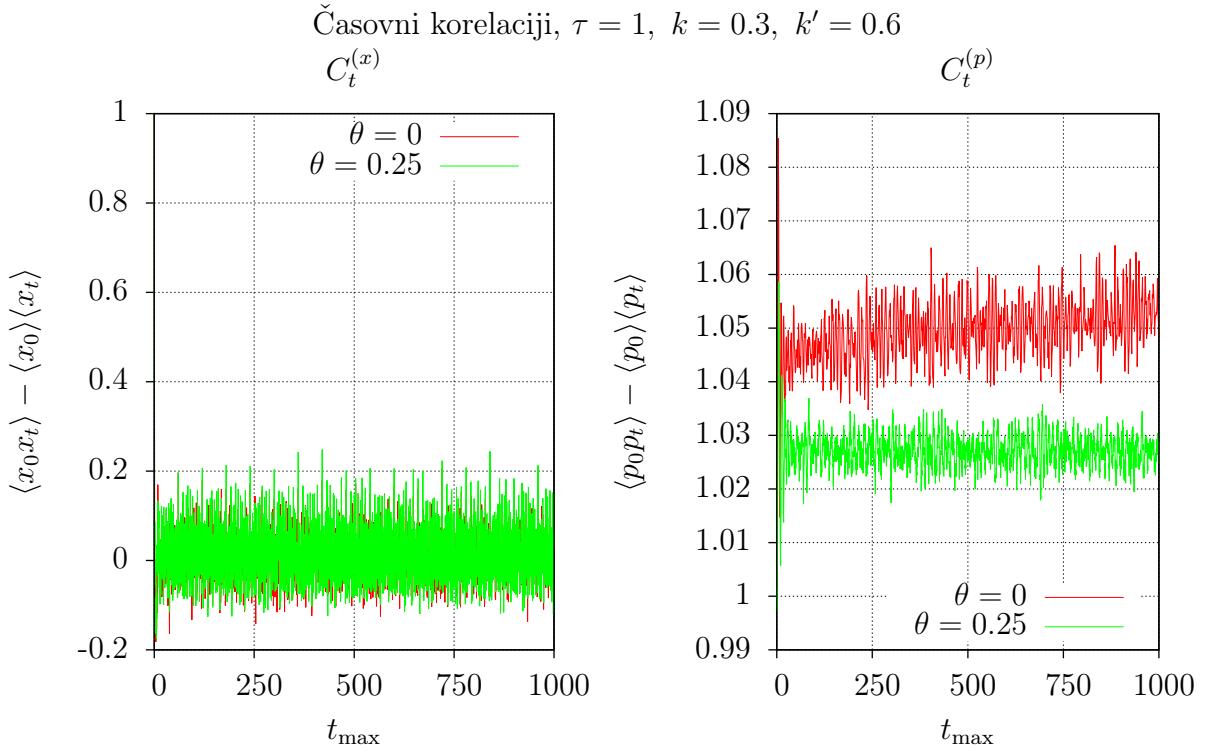
Pod korelacije sem razumel predvsem difuzijsko konstanto, tj.

$$D \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} D_t, \quad D_t \equiv \frac{1}{2t} \left[\frac{1}{G} \sum_{k=1}^G (p_0^{(k)} - p_t^{(k)})^2 \right], \quad (4)$$

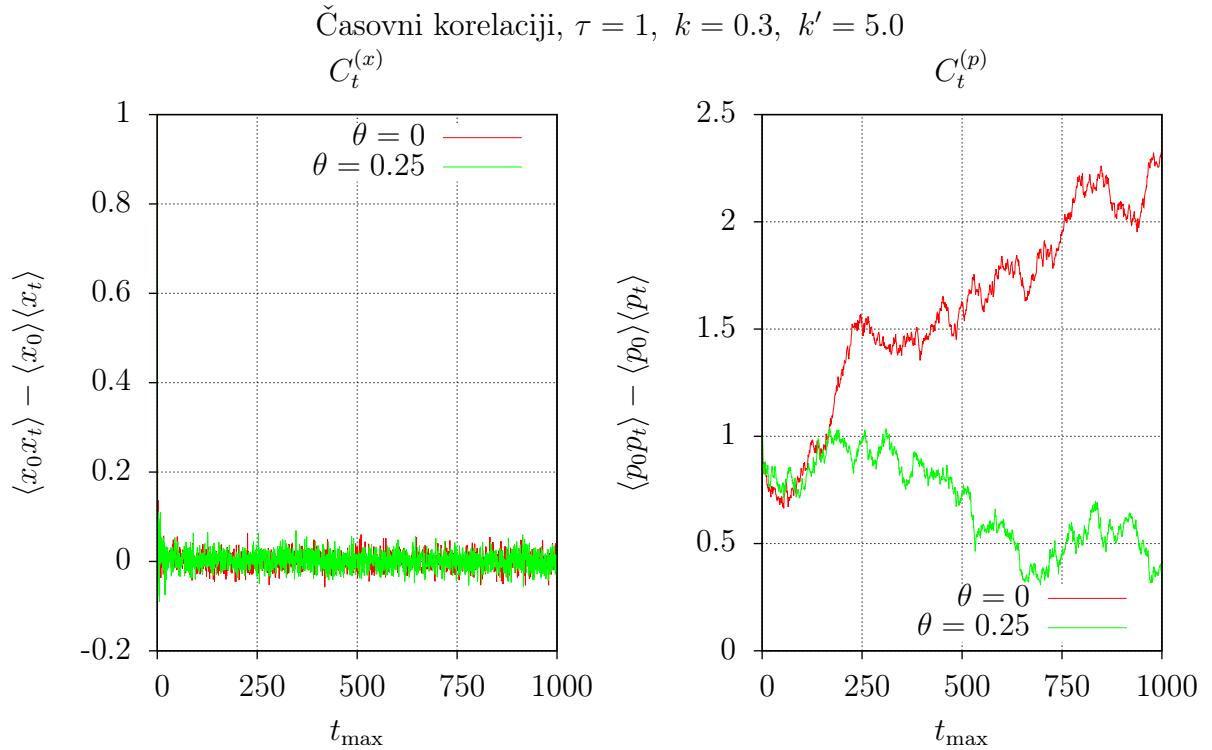
in pa korelacijske funkcije

$$C_t^{(p)} \equiv \langle p_0 p_t \rangle - \langle p_0 \rangle \langle p_t \rangle, \quad C_t^{(x)} \equiv \langle x_0 x_t \rangle - \langle x_0 \rangle \langle x_t \rangle, \quad (5)$$

torej bomo ‘ $\langle \bullet \rangle$ ’ razumeli kot povprečenje po različnih tirnicah, označenih s k , ki se ločijo po začetnih pogojih. Korelacijske funkcije je treba verjetno še normirati na začetno vrednost, tj $C_0 = 1$. Rezultate vidimo na grafih spodaj. Stevila v legendi so τ , θ , k in k' v istem vrstnem redu.

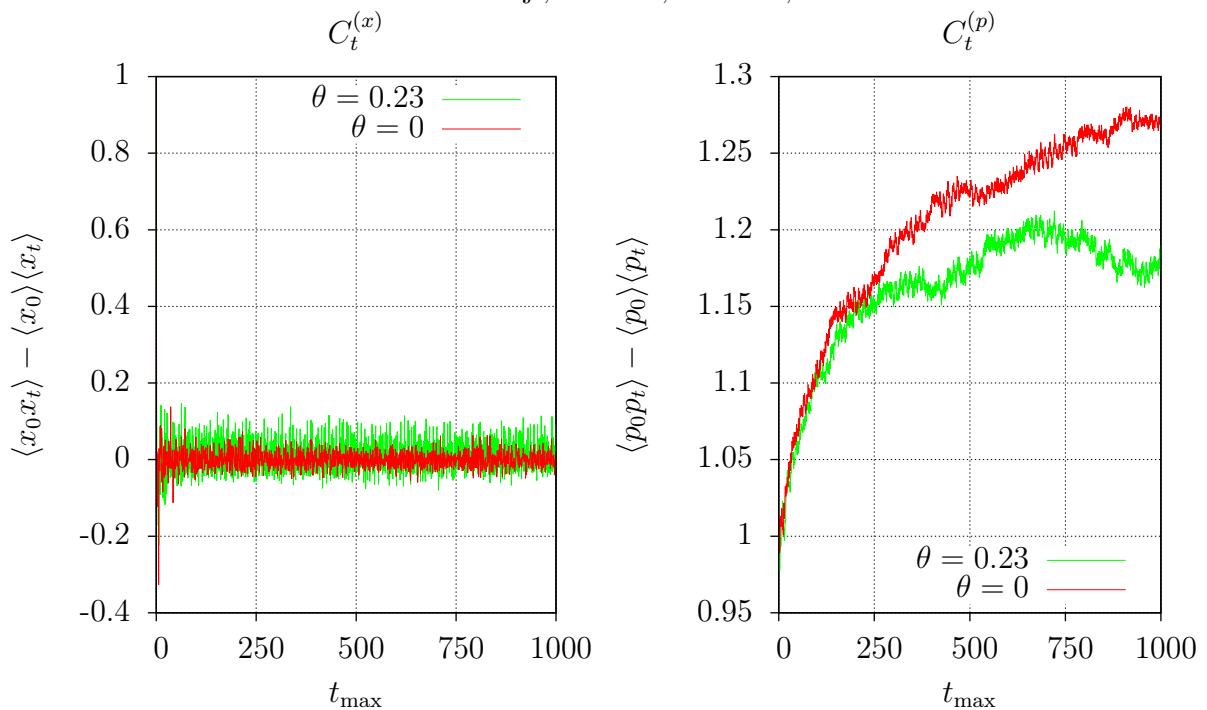


Slika 6: Tu primerjamo korelacijske funkcije na grafih s slik 1 in 2. Vidimo, da sprememba θ na $C_t^{(x)}$ ne vpliva, spremeni pa se $C_t^{(p)}$ in to za aditivno konstanto.

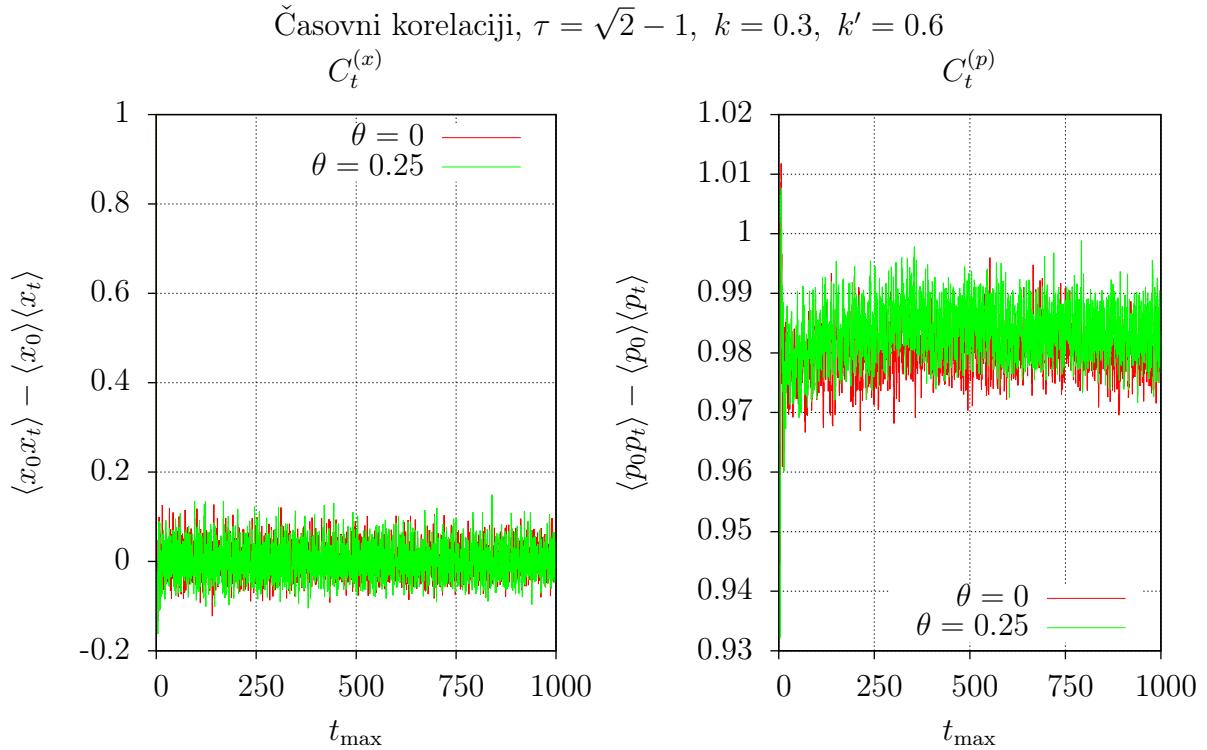


Slika 7: Za primer si poglejmo še bolj kaotičen režim in vpliv θ v tem primeru na korelacije. Glede sliko 6 korelacije $C_t^{(x)}$ manj opletajo okoli ničle. Spremembe v $C_t^{(p)}$ ne znam pojasniti, videti je, da definicija ni dobra za velike k , k' .

Časovni korelacijsi, $\tau = 1.5$, $k = 0.3$, $k' = 0.6$



Slika 8: Tako v $C_t^{(x)}$, kot tudi v $C_t^{(p)}$ je videti, da smo naleteli na vmesni režim med sliko 6 in 7. Videti je, da ima θ pravi vpliv na $C_t^{(p)}$. Vidimo, da θ razprši korelacijo $C_t^{(x)}$ in opletanje okrog ničle se poveča.



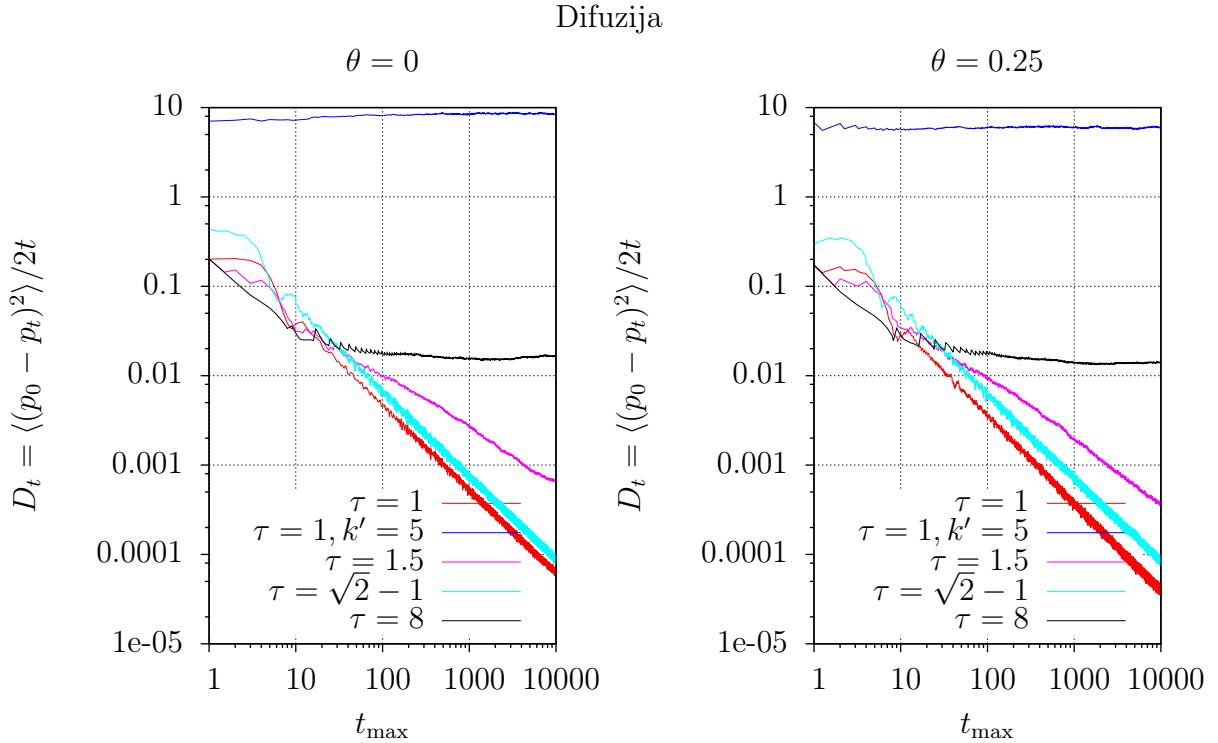
Slika 9: V tem primeru je $\tau = \sqrt{2} - 1$ vendar graf ni bistveno drugačen od tistega s slike 6. Vidimo le, da je vpliv θ v grafu $C^{(p)}$ v tem primeru zadušen.

3.2.1 Difuzijska konstanta

Rezultati numeričnega poskusa so na sliki 10. Grafi so vsi prikazani s $k = 0.3$ in $k' = 0.6$, razen če piše v legendi drugače. Vidimo, da je $D = 0$ za $k = 0.3$, $k' = 0.6$ dokler ne presežemo neke kritične meje.

S poskušanjem sem ugotovil, da se to zgodi ko $\tau = \tau_{\text{crit.}} \sim 6$. Tudi če povečujemo $\tau \rightarrow \infty$ se rezultati (tj. D) ne spremenijo bistveno. Edini način, da D močno povečamo, je prek k in k' , kot se tudi vidi na sliki 10.

Prav tako sem s poskušanjem ugotovil, da so grafi najbolj zamaknjeni, ko $\theta \sim 0.25$, zaradi česar sta grafa na sliki 10 prikazana pri $\theta = 0$ in $\theta = 0.25$.



Slika 10: Vidimo, da fazni zamik θ malo vpliva tudi na difuzijsko konstanto. Ta je praktično ves čas $D = 0$, razen v primeru ko imamo kaotičen sistem (tj. primer $k' = 5$). Vidimo, da je dovolj tudi, če je $\tau > \tau_{\text{crit.}}$. V tem primeru se to nanaša na $\tau = 8$, tu je $D \neq 0$.

3.3 Ljapunov eksponent

Ljapunov eksponent določimo prek

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} t_i \lambda_i, \quad (6)$$

kjer je t_i čas ob katerem reskaliramo razdaljo med tirnicama, ki sta bili tik pred reskalacijo oddaljeni za $\delta_0 \varepsilon^{\lambda_i}$. Vendar pa nimamo na voljo neskočno dosti časa, zaradi tega bomo λ izračunali s pomočjo prilagajanja premice na točke našega numeričnega poskusa s pomočjo linearne regresije:

$$t\lambda + C = \sum_{i=1}^{t_i \leq t} t_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (7)$$

od koder je očitno, da je λ smerni koeficient premice. Kot pravi literatura, je izračun λ močno odvisen od časa pri katerem reskaliramo. Lahko reskaliramo vsakič, ko $\delta_0 e^{\lambda_i} = \delta_{t_i} > \pi$, ali pa ob enakih časovnih intervalih. Spet, kot pravi literatura, to je mračna umetnost.

Linearna regresija nam da sledeče rezultate:

$$\lambda = \frac{nb - ga}{nh - g^2}, \quad (8)$$

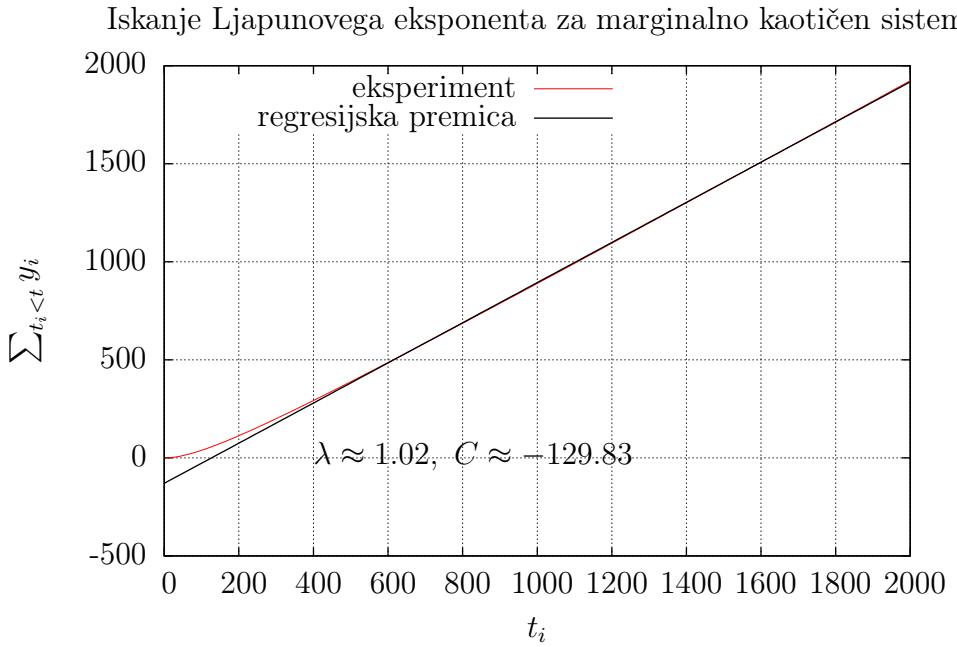
$$C = \frac{ha - gb}{nh - g^2}, \quad (9)$$

kjer so g , h , a in b definirani kot

$$g = \sum_{i=1}^n t_i, \quad h = \sum_{i=1}^n t_i^2, \quad a = \sum_{i=1}^n y_i, \quad b = \sum_{i=1}^n t_i y_i. \quad (10)$$

Ugotovil sem, da je orbito dobro reskalirati vsakič, ko preteče t_r , ki je nekje med 3 in 6, odvisno od k in k' . Ker je rezultat zelo občutljiv tudi na izbiro začetnih pogojev, sem delal z aritmetično sredino večih tirnic (10^4 je dovolj).

Delovanje preverimo tako, da uporabimo znan rezultat za eno-frekvenčen brcan rotator – ta je marginalno kaotičen za $K \approx 0.971635$, (tj. Ljapunov eksponent mora biti v tem primeru $\lambda = 1$). Slika 11 potrdi našo izbiro postopka za izračun Ljapunovega eksponenta.



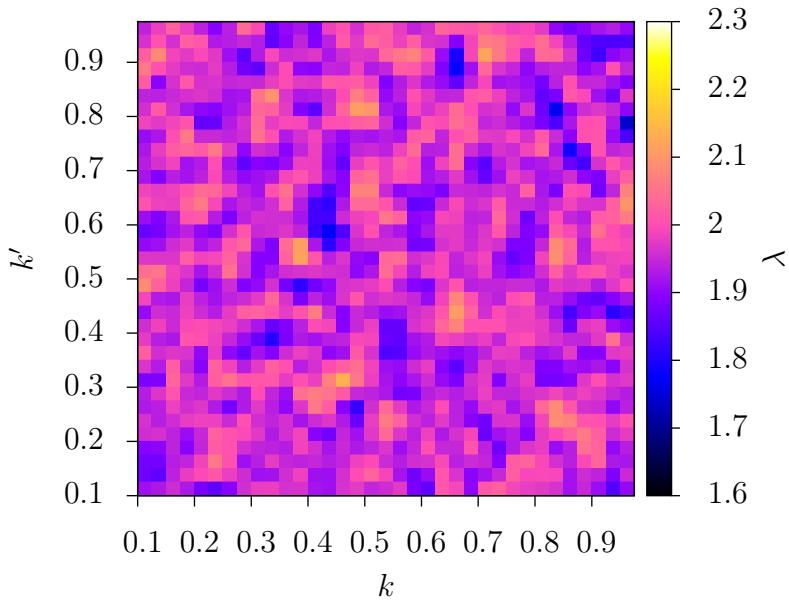
Slika 11: Marginalno kaotičen eno-frekvenčni brcan rotator ($\tau = 1$, $\theta = 0$, $k = 0.3$, $k' = 0.671635$). Napaka Ljapunovega eksponenta v tem primeru je znotraj 5%, kar zadošča za smiseln izračun na širšem območju.

Iz tabele 2 razberemo, da so Ljapunovi eksponenti močno odvisni od t_r , vendar imamo to srečo, da je za inkomenzurabilne vrednosti $\tau < 1$ vedno dober $t_r = 1$, in da je vpliv θ v tem primeru ničen (je zadušen znotraj 5% napake).

Tabela 2: Ljapunovi eksponenti za nekatere fazne portrete v poročilu. Navajal bom samo τ in θ , ostali parametri (k in k') razvidni iz komentarja pod posameznimi faznimi portreti (slike 3, 4 in 5). Vidimo, da so grafi, prešli kritično mejo. Separabilni grafi so kljub temu močno v kaotičnem režimu, sploh pa graf na sliki 5 za $\tau = \sqrt{2} - 1$, kljub temu, da je bil v ozadju videti dosti pohlevan. Ostale vrednosti so bile izračunane (tj. vrstice pod $\tau = \sqrt{2} - 1$) so bile izračunane za $k = 0.3$ in $k' = 0.6$.

τ	θ	t_r	λ
2	0	4	1.26
1.5	0	3	1.44
$\sqrt{2} - 1$	0	1	1.77
$\sqrt{2} - 1$	0.25	1	1.79
1	0.25	1	3.67
1	0.25	1.25	0.64
6	0	3	0.61
6	0	6	1.14

Funkcija $\lambda(k, k'; \tau = \sqrt{2} - 1, t_r = 1)$ je na sliki 12. Vidimo, da je sistem v bistvu cel čas močno kaotičen.



Slika 12: Vrednost ljapunovega eksponenta je ves čas $\lambda > 1.5$, kar pomeni, da z izbiro parametrov ne dosežemo niti marginalne stabilnosti orbit. Ker je računalnik to računal dlje časa, sem G zmanjšal iz 10^4 na 2000.

4 Zaključek:

Enačba (3) in slike 1, 2, 3, 4, 5 prikazujejo fazne portrete, tj. se da dinamiko posplošiti in predstaviti. Slika 2 dodatno prikazuje, da $\theta \neq 0$ lahko privede do novih, (ne)pričakovanih situacij – θ ima vpliv, kar potrujejo korelacijski grafi na slikah 6, 7, 8 in 9 ter opazovanje D_t na sliki 10. Če je $D_t \propto t^{-\alpha}$, potem s τ spremojmo α . Na ljudunov eksponent θ nima opazljivega vpliva. Za inkomenenzurabilne vrednosti τ je sistem vedno kaotičen, kar lahko vidimo na sliki 12.