1 Uvod

Supersimetrija je področje, ki ima razne zanimive posledice in aplikacije več kot le v fiziki delcev, kjer je verjetno ta hip najbolj aktualna. Prvič je bila obravnavana v kontekstu

Supersimetrija je v bistvu študija degeneriranih Hamiltonianov, tj. Hamiltonianov, ki so različni, imajo pa kljub temu isti spekter.

Posebej nazorno se supersimetrijo pokaže v problemih iz klasične kvantne mehanike, tj. nerelativistične kvantne mehanike.

2 Ponovitev

Iz predavanj Višje kvantne mehanike se spomnimo, da lahko polja kvantiziramo prek operatorjev polja, za kar pa nujno potrebujemo kreacijske, $a^\dagger$ in anihilacijske a operatorje. Na kratko ponovimo nekaj pojmov, s katerimi se bomo srečevali tekom tega seminarja.

2.1 Grupa

Grupa je množica elementov z naslednjimi lastnostmi:

1. Med elementi obstaja asociativna operacija.
2. Množica je za to operacijo zaprta.
3. Izmed teh elementov je natanko eden tak, ki je za to operacijo enota.
4. V množici so zajeti tudi vsi inverzni elementi.

V kolikor ne veljajo vsi pogoji imamo enega izmed nižjih objektov, kot je na primer monoid (nimamo nujno vseh inverzov) ali polgrupa (nimamo nujno udentitete).

Če je operacija komutativna, je ta grupa abelova in operacijo imenujemo seštevanje. Sicer pa je grupa neabelova in operacijo imenujemo množenje.

2.2 Algebra

Pogostokrat srečamo pojem 'algebra'. Pa ponovimo, kaj je to.

Kolobar je množica elementov z naslednjimi lastnostmi:

1. Ta množica je abelova grupa z operacijo seštevanja.
2. Elementi so hkrati (pol)grupa za operacijo množenja.
3. Za kombinacijo operacij velja distributivnostna relacija.

Algebra je vektorski prostor nad kolobarjem.

Liejeve grupe imajo tudi svojo algebro – generatorji Liejevih grup nepenjajo vektorski prostor na mnogoterosti grupe[1]. Da pokažemo, da zadoščajo pogojem iz algebre zadošča zapis komutacijskih relacij med generatorji, zato bomo na tem mestu definirali komutator, en. (1) in anti-komutator, en. (2):

$$[A, B] \equiv AB - BA, \tag{1}$$
$$\{A, B\} \equiv AB + BA. \tag{2}$$

Vpeljali bomo skupno notacijo, s katero bomo lahko „mešali“ med obema pojmoma:

$$[A, B]_\pm = AB \pm BA. \tag{3}$$

Tudi končnim grupam lahko priredimo algebre – za nas relevantna je simetrična grupa S_n, ki jo imenujemo tudi permutacijska grupa.

Če to grupo razširimo z operacijo parnosti, ima ta nova grupa dve nerazcepni upodobitvi. Funkcije so lahko bodisi simetrične na permutacije, ali pa anti-simetrične. Baza za prvo upodobitev so bozonski, za drugo pa fermionski kreacijsko-anihilacijski operatorji.

Lastne vrednosti so ± 1 (parnost), hkrati pa grupa komutira s Hamiltonianom, kar pomeni, da je to dobra simetrija in da Hamiltonian lahko zapišemo tako, v bazi te upodobitve, oz. drugače: Hamiltonian lahko zapišemo s pomočjo fermionskih ali bozonskih kreacijsko-anihilaijckih operatorjev.

Tako od tu dobimo fermionsko in bozonsko algebro:

$$[a_i, a_j^\dagger]_\pm = \delta_{ij}, \tag{4}$$
$$[a_i, a_j]_\pm = 0, \tag{5}$$

kjer komutatorji ustrezajo bozonom, antikomutatorji pa fermionom.

3 Uvod v supersimetrijo

Pa si omočimo noge v vodi supersimetrije: obravnavajmo Schrödingerjevo enačbo, tj. Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + mV(\vec{x}). \tag{6}$$

Vpeljemo enote $\hbar = c_0 = \varepsilon_0 = 1$. Maso m bomo zaenkrat postavili na 1. Tako je brezdimenzijska Schrödingerjeva enačba

$$H = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(\vec{x}), \tag{7}$$

kjer velja še $H = i\partial_t$. V eni dimenziji se (7) glasi

[1]Vsaka Liejeva grupa je hkrati mnogoterost

$$H = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V(x). \tag{8}$$

Predpostavimo, da je naš potencial neničelen in navzdol omejen.
Velja

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) = i\partial_t\psi_n(x). \tag{9}$$

Za $E_0 = 0$ torej velja $H|\psi_0\rangle = 0$. Od tu dobimo pogoj za potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial_x^2\psi_0}{\psi_0}, \tag{10}$$

kjer smo predpostavili, da so stanja $\psi_n(x)$ vezana stanja, tj. je $\psi_0(x)$ dobro določen, in to lahko storimo.

Naš Hamiltonian bi radi zapisali v obliko z operatorjem štetja, $a^\dagger$ in a, se pravi $H = a^\dagger a$, zato moramo poiskati nek pameten razcep. Vidimo, da je (8) oblike $H \sim (A+B)(A-B)$, tako bomo definirali superpotencial $W(x)$, da bo

$$a = W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x, \tag{11}$$

$$a^\dagger = W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x. \tag{12}$$

Taka operatorja sta res drug drugemu hermitsko adjungirana, saj je operator ∂_x antihermitski (do totalnega odvoda natančno).

Vse lepo in prav, vendar, a tak $W(x)$ sploh obstaja? V fiziki na taka vprašanja ponavadi odgovorimo retrospektivno in to bomo storili tudi sedaj. Vse skupaj vstavimo v Hamiltonian in iz njega določimo vezi, katerim mora zadoščati.

Poglejmo, kaj naredi $a^\dagger a$ na neki funkciji $\phi(x)$:

$$\begin{aligned}
a^\dagger a\ \phi(x) &= \Big[W(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x\Big]\Big[W(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x\Big]\phi(x) \\
&= \Big[-\frac{1}{2}\partial_x^2 + W^2(x)\Big]\phi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\partial_x\big(W(x)\phi(x)\big) - W(x)\partial_x\phi(x)}_{(\partial_x W(x))\phi(x)}\Big] \\
&= \Big\{-\frac{1}{2}\partial_x^2 + \underbrace{W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\big[\partial_x W(x)\big]}_{V(x)}\Big\}\phi(x),
\end{aligned} \tag{13}$$

Se pravi, če je ta enačba Schrödingerjeva, potem mora $W(x)$ spoštovati sledeča izraza:

$$V(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial_x^2\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x) \tag{14}$$

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial_x\psi_0(x)}{\psi_0(x)}, \tag{15}$$

kjer smo izraz (15) dobili z reševanjem Riccatijeve enačbe (14).

Tako smo dobili $H_1 = a^\dagger a$ in ima rešitve $\psi_n(x)$ in E_n, kot jih poznamo od prej.

Poglejmo, kaj se zgodi, če vrstni red obrnemo. Definirajmo še $H_2 = aa^\dagger$. Dobimo ga kot

$$H_1 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V_1(x) = a^\dagger a, \tag{16}$$

$$H_2 = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + V_2(x) = aa^\dagger, \tag{17}$$

kjer

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x), \tag{18}$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x W(x). \tag{19}$$

Enačbo (19) lahko dokažemo z istim postopkom kot (13), le da na funkcijo $\phi(x)$ delujemo z operatorjem $aa^\dagger$.

H_1 ima lastne pare $\psi_n^{(1)}(x)$, $E_n^{(1)}$, H_2 pa $\psi_n^{(2)}(x)$, $E_n^{(2)}$.

Pravimo, da je $V_2(x)$ supersimetrični partner $V_1(x)$. Lastne funkcije in energijski spekter H_2 dobimo lahko z reševanjem, ali pa uganemo

$$\psi_n^{(2)}(x) = a\psi_n^{(1)}(x), \tag{20}$$

od koder vidimo da $\psi_0^{(2)}(x)$ ne obstaja, saj anihilacijski operator iz vakuuma naredi ničlo po definiciji. Energijski spekter H_2 je enak tistemu iz H_1, s tem da nima osnovnega stanja E_0, kar lahko pokažemo kot

$$\begin{aligned} H_2\psi_n^{(2)}(x) &= aa^\dagger(a\psi_n^{(1)}(x)) = a(a^\dagger a)\psi_n^{(1)}(x) = \\ &= aE_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(a\psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}\psi_n^{(2)}, \end{aligned} \tag{21}$$

se pravi

$$E_n^{(1)} \equiv E_n^{(2)}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{22}$$

Zaradi tega, spremenimo definicijo H_1 tako, da ne bo imel več osnovnega stanja

$$H_1 \to H_1' = H_1 - E_0. \tag{23}$$

Funkcije hamiltoniana H_2 bi morali v dobiti spet z reševanjem

Hamiltoniana H_1 in H_2 bi radi združili v enega, tako da se prostora ne mešata. Zato definiramo

$$\mathbf{H} \equiv H_1 \oplus H_2 \equiv \begin{bmatrix} H_1 & \\ & H_2 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$Q^\dagger = \sigma^+ a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & a^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \sigma^- a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$Q^\dagger Q + QQ^\dagger = \{Q, Q^\dagger\} = \mathbf{H}. \tag{26}$$

3.1 Mešanje bozonskih in fermionskih stanj

Kot se verjetno kar najbolj povdarja, obstaja v supersimetričnih teorijah nekakšna direktna linija, ki povezuje bozonske operatorje s fermionskimi. Pa poglejmo, kaj to pravzaprav pomeni. Operatorja a in $a^\dagger$ tvorita boznonsko algebro

$$[a, a^\dagger] = (\partial_x W), \qquad [a, a] = 0. \tag{27}$$

V splošnem je $\partial_x W = 1$ le za harmonski oscilator, za višje člene pa je problem bolj kompliciran, zarade anharmonske sklopitve. Opis v Fockovem prostoru ni več tako enostaven, vendar mi verjemite na besedo, da so to še vedno bozonski operatorji.

Definirajmo operatorje c in $c^\dagger$, tako da

$$c = \sigma^+, \qquad c^\dagger = \sigma^-, \tag{28}$$

Pokažemo lahko, da tile operatorji zadostijo enostavni fermionski algebri,

$$\{c, c^\dagger\} = 1, \qquad \{c, c\} = 0, \tag{29}$$

torej lahko Q in $Q^\dagger$ zapišemo kot

$$Q = c^\dagger a, \qquad Q^\dagger = a^\dagger c. \tag{30}$$

Sedaj vidimo, kako je pravzaprav treba interpretirati operatorje Q in $Q^\dagger$. Ker namreč velja

$$[Q, H] = [Q^\dagger, H] = 0, \tag{31}$$

tile operatorji mešajo bozonska in fermionska stanje ne da bi pri tem spremenili energijo stanja.

3.2 Zlom supersimetrije

Tak Hamiltonian ima degeneriran spekter, saj imata H_1 in H_2 iste lastne vrednosti. Kadar velja $E_0^{(1)} = 0$ pravimo, da je supersimetrija zlomljena, saj Hamiltoniana nista več degenerirana in takih operatorjev Q nimamo več. V teorijah polja to merimo s tako imenovanim Witten-ovim indeksom,

$$\Delta(\beta) = \mathrm{Tr}\left[\mathrm{e}^{-\beta H_1} - \mathrm{e}^{-\beta H_2}\right]. \tag{32}$$

Za supersimetrične teorije je

$$\lim_{\beta \to 0} \Delta(\beta) = 0, \tag{33}$$

za teorije z zlomljeno supersimetrijo pa

$$\lim_{\beta \to 0} \Delta(\beta) = 1, \tag{34}$$

saj osnovno stanje H_1 preživi.

4 Zgledi

Take stvari je vedno lažje razumeti na konkretnem zgledu, zato pokažimo, bolj kot zanimivost, kako lahko to teorijo uporabimo na starih znancih iz takih ali drugačnih kurzov kvantne mehanike.

4.1 Neskončna potencialna jama

Začetniški potencial, (vstavi sliko), omejen od 0 do 1. Lastne fukcije so kar

$$\psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sin n\pi x, \quad E_n^{(1)} = \frac{(n\pi)^2}{2} \quad n = 1, 2, \dots \tag{35}$$

stanja za $n = 0$ ni, ker to stanje ustreza situaciji brez delca (verjetnost, da se delec nahaja v jami je natanko 0). Osnovni lastni par je torej za $n = 1$, vendar ga bolj kljub temu označil z indeksom 0.

$$\psi_0^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x, \quad \frac{2}{\pi^2}E_0^{(1)} = 1 \neq 0. \tag{36}$$

Supersimetrija je v tem primeru zlomljena, saj $E_0 \neq 0$, zato moramo začetni Hamiltonian translirati v energiji:

$$(\underbrace{H - E_0^{(1)}}_{H_1})\psi_0^{(1)} = (E_0^{(1)} - E_0^{(1)})\psi_0^{(1)} = 0 \cdot \psi_0^{(1)} = 0. \tag{37}$$

Od tod lahko poiščemo superpotencial $W(x)$ in to kar po definiciji iz enačbe (15)

$$W(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial_x \sin \pi x}{\sin \pi x} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cot \pi x. \tag{38}$$

Sedaj lahko poičemo supersimetričnega partnerja neskončne potencialne jame s pomočjo enačbe (19)

$$V_2(x) = \frac{\pi^2}{2}\left(\cot^2 \pi x + \frac{1}{\sin^2 \pi x}\right) = \pi^2\left(\frac{1}{\sin^2 \pi x} - \frac{1}{2}\right), \tag{39}$$

kar očitno ni več neskončna potencialna jama, za katero dobimo $V_1(x) = \pi^2/2$, ki pa se ravno prikladno odšteje s konstantno $E_0^{(1)}$ v enačbi (37).

Sedaj smo dobili oba Hamiltoniana,

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{2}\partial_x^2, \\ H_2 &= -\frac{1}{2}\partial_x^2 - V_2(x), \end{aligned} \tag{40}$$

od koder lahko že sklepamo, kako bo izgledal supersimetrični Hamiltonian $\mathbf{H}$.

Poglejmo še kako izgledajo valovne funkcije $\psi_n^{(2)}(x)$. Za to bomo seveda uporabili operatorje „višanja“ in „nižanja“, vendar bi morali za „brute force“ pristop izračunati ne preveč lepo diferencialno enačbo za H_2.

Vendar lahko tudi tokrat uporabimo izraze iz prejšnjega poglavja in sicer (21). Vemo, da H_2 nima stanja pri $n = 1$, ampak da se štetje začne pri $n = 2$.

Da bomo dobili $\psi_0^{(2)}$ bomo uporabili identiteto

$$\psi_0^{(2)}(x) = a\psi_2^{(1)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\pi \cot \pi x - \partial_x) \sin 2\pi x \tag{41}$$

$$= \frac{2\pi}{2\sqrt{2}}(\cos^2 \pi x - \cos 2\pi x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin^2 \pi x. \tag{42}$$

Operatorja a in $a^\dagger$ ne služita več višanju in nižanju energije, ampak pretvorbi stanj med H_1 in H_2.

Splošen izraz za $\psi_n^{(2)}$ je dolg in grd. Zapisal bom raje le še za $\psi_3^{(2)}$, za $n = 3$, se pravi prvo vzbujeno stanje H_2:

$$\psi_3^{(2)}(x) \propto \sin(\pi x) \sin(2\pi x), \tag{43}$$

se pravi do normalizacijske konstante natančno.