Горина Елизавета Сергеевна

212 группа

Отчет по курсу

«Введение в численные методы»

Задача 2.2

1. Постановка задачи

Найти приближенное значение интеграла методом трапеций, разбив интервал интегрирования на n равных частей, где n = 16, 32, 64.

Интеграл:

$$\int_a^b \frac{1}{(25x^2 + 1)\sqrt{x}} dx$$

Рассмотреть два отрезка интегрирования:

1. a = 1, b = 2
2. a = 0, b = 1

Сравнить результаты с аналитическим значением интеграла.

Подобрать более эффективный численный метод вычисления интеграла для второй задачи.

2. Метод трапеций вычисления интеграла

Рассмотрим интеграл:

$$\int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$ определена и непрерывна на [a, b].

Описание метода трапеций:

Отрезок [a, b] разбивается на n равных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где

- $x_i = a + i * h,\ 0 \leq i \leq n$ – узел.
- $h\ = \frac{(b-a)}{n}$ – весовой коэффициент.

Аппроксимирующая функция — кусочно-линейная функция $g(x)$:

$$g(x) = f(x_{i-1})\ +\ \frac{\left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)}{h}(x - x_{i-1}), x\,\epsilon\,[x_{i-1}, x_i], 0 \leq i \leq n$$

В граничных точках отрезка $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ функция $g(x)$ принимает те же значения, что и функция $f(x)$:

$$g(x_{i-1}) = f(x_{i-1})\ , g(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$$

Интеграл от $g(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x_{i-1})\ +\ \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h}\ (x -\ x_{i-1})\right)dx = \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1}))\ (*)$$

Интеграл от $g(x)$ по всему отрезку [a, b] является суммой интегралов (*):

$$T_n\ = \int\limits_a^b g(x)dx = \sum_{i\,=\,1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)dx\ =\ \frac{b\ -\ a}{h}\left(\frac{1}{2}f(a)\ +\ f(x_1)\ +\ f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\ +\ \frac{1}{2}f(b)\right)$$

Он дает приближенное значение интеграла I:

$$I\ =\ \int_a^b f(x)dx\ =\ T_n\ +\ \beta_n\ \ (**)$$

- В квадратурной формуле (**) узлами являются точки x_i.
- Все весовые коэффициенты, кроме двух, одинаковы и равны $h\ = \frac{(b-a)}{n}$, а весовые коэффициенты при $i = 0$ и $i = n$ имеют значения в два раза меньше.
- Для остаточного члена введено специальное обозначение: β_n.
- $\beta_n = \ -\frac{n \cdot h^3}{12}f''(\beta),\ \beta\epsilon(a, b).$

Применимость метод трапеций:

1. Функция должна быть определена и непрерывна на всем отрезке [a, b]. Пусть функция f(x) не определена в какой-либо точке $x_i \in [a,b]$. И так как эта точка не определена на выделенном отрезке, то и интеграл T_n не определен. Соответственно, метод трапеций будет не применим.

2. Функция должна быть дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [a, b] для нахождения остаточного члена.

3. Программная реализация метода трапеций

Метод реализован на языке С.

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define I 0.016832889701405 //(аналитически [1,2])
double f(double x)
{
    return 1/((25*x*x + 1)*sqrt(x));
}

double integral(int n, int a, int b)
{
    double h = (b - a)/(double)n;
    double s = 1/2*(f(a) + f(b));
    double x = a + h;

    for (int i = 1; i < n; i++)
  {
      s = s + f(x);
      x = x + h;
  }
    return s*h;
}

int main()
{
  double T16 = integral(16,1,2);
  double T32 = integral(32,1,2);
  double T64 = integral(64,1,2);

  printf("T16 = %lf\nT32 = %lf\nT64 = %lf\n", T16, T32, T64);
  printf("betta16 = %lf\nbetta32 = %lf\nbetta64 = %lf\n", I - T16, I - T32, I - T64);
}
```

- f(double x) – вычисляет значение данной функции в заданной точке.
- integral(int n, int a, int b) – вычисляет T_n для заданного разбиения, отрезка.

4. Анализ результатов и применимости метода трапеций

- При a = 1, b = 2

Данная функция определена, непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема на отрезке [1, 2], поэтому метод трапеций **применим**.

Интеграл, вычисленный аналитически: $I \approx 0.016832889701405$

Результаты метода трапеций, отрезок [1, 2]:

$\boldsymbol{n}$	**16**	**32**	**64**
$\boldsymbol{T_n}$	0.015440	0.016129	0.016479
$\boldsymbol{\beta_n}$	0.001393	0.000703	0.000353

- При a = 0, b = 1

Данная функция не определена в точке 0, следовательно нарушено условие применимости метода трапеций.

Выводы:

1. Метод трапеций неприменим к функциям, неопределенных в некоторой точке из отрезка.

2. При увеличении мелкости разбиения увеличивается точность вычисления T_n .

5. Метод Гаусса - Лежандра

Для более точного вычисления интеграла, а также вычисления интегралов на отрезках, где функция не определена можно использовать метод Гаусса-Лежандра. Он основан на использовании интерполяционного полинома Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$

Суть метода Гаусса-Лежандра заключается в выборе узлов интегрирования ξ_i и соответствующих им весов ω_i таким способом, чтобы достичь максимальной точности приближения определенного интеграла.

Применение метода Гаусса-Лежандра заключается в следующих шагах:

1. **Выбор числа узлов интегрирования**. Чем больше узлов используется, тем более точное приближение будет получено, но вычислительная сложность возрастет. Выберем 16, 32 и 64 узла.

2. **Нахождение узлов интегрирования** как корней полинома Лежандра:
Высшая производная полинома Лежандра находится затруднительно, поэтому воспользуемся рекуррентным соотношением:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x);\ P_0(x) = 1;\ P_1(x) = x$$

Найденные корни:

Для n = 16:

$$\xi_1 \approx 0.989401;\ \xi_2 \approx 0.944575;\ \xi_3 \approx 0.865631;\ \xi_4 \approx 0.755404;$$

$$\xi_5 \approx 0.617876;\ \xi_6 \approx 0.458017;\ \xi_7 \approx 0.281604;\ \xi_8 \approx 0.095013;$$

$$\xi_9 \approx -0.095013;\ \xi_{10} \approx -0.281604;\ \xi_{11} \approx -0.458017;\ \xi_{12} \approx -0.617876;$$

$$\xi_{13} \approx -0.755404;\ \xi_{14} \approx -0.865631;\ \xi_{15} \approx -0.944575;\ \xi_{16} \approx -0.989401;$$

Для n = 32:

$$\xi_1 \approx 0.997264;\ \xi_2 \approx 0.985612;\ \xi_3 \approx 0.964762;\ \xi_4 \approx 0.934906;$$

$$\xi_5 \approx 0.896321;\ \xi_6 \approx 0.849368;\ \xi_7 \approx 0.794484;\ \xi_8 \approx 0.732182;$$

$$\xi_9 \approx 0.663044;\ \xi_{10} \approx 0.587716;\ \xi_{11} \approx 0.506900;\ \xi_{12} \approx 0.421351;$$

$$\xi_{13} \approx 0.331869;\ \xi_{14} \approx 0.239287;\ \xi_{15} \approx 0.144472;\ \xi_{16} \approx 0.048308;$$

$$\xi_{17} \approx -0.048308;\ \xi_{18} \approx -0.144472;\ \xi_{19} \approx -0.239287;\ \xi_{20} \approx -0.331869;$$

$$\xi_{21} \approx -0.421351;\ \xi_{22} \approx -0.506900;\ \xi_{23} \approx -0.587716;\ \xi_{24} \approx -0.663044;$$

$$\xi_{25} \approx -0.732182;\ \xi_{26} \approx -0.794484;\ \xi_{27} \approx -0.849368;\ \xi_{28} \approx -0.896321;$$

$$\xi_{29} \approx -0.934906;\ \xi_{30} \approx -0.964762;\ \xi_{31} \approx -0.985612;\ \xi_{32} \approx -0.997264;$$

Для n = 64:

$$\xi_1 \approx 0.99930504;\ \xi_2 \approx 0.99634012;\ \xi_3 \approx 0.99101337;\ \xi_4 \approx 0.98333625;$$

$$\xi_5 \approx 0.97332683;\ \xi_6 \approx 0.96100880;\ \xi_7 \approx 0.94641137;\ \xi_8 \approx 0.92956917;$$

$$\xi_9 \approx 0.91052214;\ \xi_{10} \approx 0.88931545;\ \xi_{11} \approx 0.86599940;\ \xi_{12} \approx 0.84062930;$$

$$\xi_{13} \approx 0.81326532;\ \xi_{14} \approx 0.78397236;\ \xi_{15} \approx 0.75281991;\ \xi_{16} \approx 0.71988185;$$

$$\xi_{17} \approx 0.68523631;\ \xi_{18} \approx 0.64896547;\ \xi_{19} \approx 0.61115536;\ \xi_{20} \approx 0.57189565;$$

$$\xi_{21} \approx 0.53127946;\ \xi_{22} \approx 0.48940315;\ \xi_{23} \approx 0.44636602;\ \xi_{24} \approx 0.40227016;$$

$$\xi_{25} \approx 0.35722016;\ \xi_{26} \approx 0.31132287;\ \xi_{27} \approx 0.26468716;\ \xi_{28} \approx 0.21742364;$$

$$\xi_{29} \approx 0.16964442;\ \xi_{30} \approx 0.12146282;\ \xi_{31} \approx 0.07299312;\ \xi_{32} \approx 0.02435029;$$

$$\xi_{33} \approx -0.02435029;\ \xi_{34} \approx -0.07299312;\ \xi_{35} \approx -0.12146282;\ \xi_{36} \approx -0.16964442;$$

$$\xi_{37} \approx -0.21742364;\ \xi_{38} \approx -0.26468716;\ \xi_{39} \approx -0.31132287;\ \xi_{40} \approx -0.35722016;$$

$$\xi_{41} \approx -0.40227016;\ \xi_{42} \approx -0.44636602;\ \xi_{43} \approx -0.48940315;\ \xi_{44} \approx -0.53127946;$$

$$\xi_{45} \approx -0.57189565;\ \xi_{46} \approx -0.61115536;\ \xi_{47} \approx -0.64896547;\ \xi_{48} \approx -0.68523631;$$

$$\xi_{49} \approx -0.71988185;\ \xi_{50} \approx -0.75281991;\ \xi_{51} \approx -0.78397236;\ \xi_{52} \approx -0.81326532;$$

$$\xi_{53} \approx -0.84062930;\ \xi_{54} \approx -0.86599940;\ \xi_{55} \approx -0.88931545;\ \xi_{56} \approx -0.91052214;$$

$$\xi_{57} \approx -0.92956917;\ \xi_{58} \approx -0.94641137;\ \xi_{59} \approx -0.96100880;\ \xi_{60} \approx -0.97332683;$$

$$\xi_{61} \approx -0.98333625;\ \xi_{62} \approx -0.99101337;\ \xi_{63} \approx -0.99634012;\ \xi_{64} \approx -0.99930504;$$

3. **Вычисление соответствующих весов интегрирования** с использованием формулы из метода Гаусса:

$$\omega_i = \int_{-1}^{1} \frac{(x-\xi_1)\cdots(x-\xi_{i-1})(x-\xi_{i+1})\cdots(x-\xi_n)}{(\xi_i-\xi_1)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)}dx$$

где n – степень полинома Лежандра (количество узлов), i – номер весового коэффициента

Найденные весы:

Для n = 16:

$$\omega_1 \approx 0.027152;\ \omega_2 \approx 0.062254;\ \omega_3 \approx 0.095159;\ \omega_4 \approx 0.062254$$

$$\omega_5 \approx 0.149596;\ \omega_6 \approx 0.169157;\ \omega_7 \approx 0.182603;\ \omega_8 \approx 0.189451$$

$$\omega_9 \approx 0.189451;\ \omega_{10} \approx 0.182603;\ \omega_{11} \approx 0.169157;\ \omega_{12} \approx 0.149596$$

$$\omega_{13} \approx 0.124629;\ \omega_{14} \approx 0.095159;\ \omega_{15} \approx 0.062254;\ \omega_{16} \approx 0.027152$$

Для n = 32:

$$\omega_1 \approx 0.007019;\ \omega_2 \approx 0.016274;\ \omega_3 \approx 0.025392;\ \omega_4 \approx 0.034274$$

$$\omega_5 \approx 0.042836;\ \omega_6 \approx 0.050998;\ \omega_7 \approx 0.058684;\ \omega_8 \approx 0.065822$$

$$\omega_9 \approx 0.072346;\ \omega_{10} \approx 0.078194;\ \omega_{11} \approx 0.083312;\ \omega_{12} \approx 0.087652$$

$$\omega_{13} \approx 0.091174;\ \omega_{14} \approx 0.093844;\ \omega_{15} \approx 0.095639;\ \omega_{16} \approx 0.096540$$

$$\omega_{17} \approx 0.096540;\ \omega_{18} \approx 0.095639;\ \omega_{19} \approx 0.093844;\ \omega_{20} \approx 0.091174$$

$$\omega_{21} \approx 0.087652;\ \omega_{22} \approx 0.083312;\ \omega_{23} \approx 0.078194;\ \omega_{24} \approx 0.072346$$

$$\omega_{25} \approx 0.065822;\ \omega_{26} \approx 0.058684;\ \omega_{27} \approx 0.050998;\ \omega_{28} \approx 0.042836$$

$$\omega_{29} \approx 0.034274;\ \omega_{30} \approx 0.025392;\ \omega_{31} \approx 0.016274;\ \omega_{32} \approx 0.007019$$

Для n = 64:

$$\omega_1 \approx 0.00178328;\ \omega_2 \approx 0.00414703;\ \omega_3 \approx 0.00650446;\ \omega_4 \approx 0.00884676$$

$$\omega_5 \approx 0.01116814;\ \omega_6 \approx 0.01346305;\ \omega_7 \approx 0.01572603;\ \omega_8 \approx 0.01795172$$

$$\omega_9 \approx 0.02013482;\ \omega_{10} \approx 0.02227017;\ \omega_{11} \approx 0.02435270;\ \omega_{12} \approx 0.02637747$$

$$\omega_{13} \approx 0.02833967;\ \omega_{14} \approx 0.03023466;\ \omega_{15} \approx 0.03205793;\ \omega_{16} \approx 0.03380516$$

$$\omega_{17} \approx 0.03547221;\ \omega_{18} \approx 0.03705513;\ \omega_{19} \approx 0.03855015;\ \omega_{20} \approx 0.03995374$$

$\omega_{21} \approx 0.04126256$; $\omega_{22} \approx 0.04247352$; $\omega_{23} \approx 0.04358372$; $\omega_{24} \approx 0.04459056$

$\omega_{25} \approx 0.04549163$; $\omega_{26} \approx 0.04628480$; $\omega_{27} \approx 0.04696818$; $\omega_{28} \approx 0.04754017$

$\omega_{29} \approx 0.04799939$; $\omega_{30} \approx 0.04834476$; $\omega_{31} \approx 0.04857547$; $\omega_{32} \approx 0.04869096$

$\omega_{33} \approx 0.04869096$; $\omega_{34} \approx 0.04857547$; $\omega_{35} \approx 0.04834476$; $\omega_{36} \approx 0.04799939$

$\omega_{37} \approx 0.04754017$; $\omega_{38} \approx 0.04696818$; $\omega_{39} \approx 0.04628480$; $\omega_{40} \approx 0.04549163$

$\omega_{41} \approx 0.04459056$; $\omega_{42} \approx 0.04358372$; $\omega_{43} \approx 0.04247352$; $\omega_{44} \approx 0.04126256$

$\omega_{45} \approx 0.03995374$; $\omega_{46} \approx 0.03855015$; $\omega_{47} \approx 0.03705513$; $\omega_{48} \approx 0.03547221$

$\omega_{49} \approx 0.03380516$; $\omega_{50} \approx 0.03205793$; $\omega_{51} \approx 0.03023466$; $\omega_{52} \approx 0.02833967$

$\omega_{53} \approx 0.02637747$; $\omega_{54} \approx 0.02435270$; $\omega_{55} \approx 0.02227017$; $\omega_{56} \approx 0.02013482$

$\omega_{57} \approx 0.01795172$; $\omega_{58} \approx 0.01572603$; $\omega_{59} \approx 0.01346305$; $\omega_{60} \approx 0.01116814$

$\omega_{61} \approx 0.00884676$; $\omega_{62} \approx 0.00650446$; $\omega_{63} \approx 0.00414703$; $\omega_{64} \approx 0.00178328$

4. **Вычисление определенного интеграла**

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\xi_i) + \delta_n,$$

где n – количество узлов, δ_n – остаточный член.

Приведенный выше алгоритм подходит для отрезка [-1, 1], однако мы можем преобразовать любой интеграл с произвольным отрезком к отрезку [-1, 1]

Необходимо интеграл вида $\int_a^b f(x)dx$ (*) преобразовать в

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot t\right)dt$$

Данное выражение можно получить следующим образом:

1. Ввести замену переменной x:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cdot t\,;\; dx = \frac{b-a}{2}dt$$

2. Подставить в (*):

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t\right)\cdot\frac{b-a}{2}dt \;=\; \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot t\right)dt$$

Итоговая формула:

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cdot\xi_i\right) + \delta_n$$

6. Программная реализация метода Гаусса – Лежандра

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#define N 16
#define M 32
#define K 64
#define I01a 0.967237996890096 //(аналитически [0,1])
#define I12a 0.016832889701405 //(аналитически [1,2])

double f(double x)
{
    return 1/((25*x*x + 1)*sqrt(x));
}

double integral(int a, int b, int n,double *nodes, double *weights)
{
    double x, s = 0.0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        x = (double) (b + a)/2 + (double) (b - a)/2 *nodes[i];
        s += weights[i] * f(x);
    }
    return s*(double) (b - a)/2;
}

int main()
{
    double nodes_1[N] = {0.989401, 0.944575, 0.865631, 0.755404, 0.617876, 0.458017, 0.281604,
    0.095013, -0.095013, -0.281604, -0.458017, -0.617876, -0.755404, -0.865631, -0.944575, -0.989401}; // Узлы
    double weights_1[N] = {0.027152, 0.062254, 0.095159, 0.062254, 0.149596, 0.169157, 0.182603,
    0.189451, 0.189451, 0.182603, 0.169157, 0.149596, 0.124629, 0.095159, 0.062254, 0.027152}; // Веса
    double nodes_2[M] = {0.997264, 0.985612, 0.964762, 0.934906, 0.896321, 0.849368, 0.794484, 0.732182,
    0.663044, 0.587716, 0.506900, 0.421351, 0.331869, 0.239287, 0.144472, 0.048308, -0.048308, -0.144472,
    -0.239287, -0.331869, -0.421351, -0.506900, -0.587716, -0.663044, -0.732182, -0.794484, -0.849368, -0.896321,
    -0.934906, -0.964762, -0.985612, -0.997264};
    double weights_2[M] = {0.007019, 0.016274, 0.025392, 0.034274, 0.042836, 0.050998, 0.058684, 0.065822, 0.072346,
    0.078194, 0.083312, 0.087652, 0.091174, 0.093844, 0.095639, 0.096540, 0.096540, 0.095639, 0.093844, 0.091174, 0.087652,
    0.083312, 0.078194, 0.072346, 0.065822, 0.058684, 0.050998, 0.042836, 0.034274, 0.025392, 0.016274, 0.007019};
    double nodes_3[K] = {0.99930504, 0.99634012, 0.99101337, 0.98333625, 0.97332683, 0.96100880, 0.94641137, 0.92956917, 0.91052214,
    0.88931545, 0.86599940, 0.84062930, 0.81326532, 0.78397236, 0.75281991, 0.71988185, 0.68523631, 0.64896547, 0.61115536, 0.57189565,
    0.53127946, 0.48940315, 0.44636602, 0.40227016, 0.35722016, 0.31132287, 0.26468716, 0.21742364, 0.16964442, 0.12146282, 0.07299312,
    0.02435029, -0.02435029, -0.07299312, -0.12146282, -0.16964442, -0.21742364, -0.26468716, -0.31132287, -0.35722016, -0.40227016, -0.44636602,
    -0.48940315, -0.53127946, -0.57189565, -0.61115536, -0.64896547, -0.68523631, -0.71988185, -0.75281991, -0.78397236, -0.81326532, -0.84062930,
    -0.86599940, -0.88931545, -0.91052214, -0.92956917, -0.94641137, -0.96100880, -0.97332683, -0.98333625, -0.99101337, -0.99634012, -0.99930504};
    double weights_3[K] = {0.00178328, 0.00414703, 0.00650446, 0.00884676, 0.01116814, 0.01346305, 0.01572603, 0.01795172, 0.02013482, 0.02227017,
   0.02435270, 0.02637747, 0.02833967, 0.03023466, 0.03205793, 0.03380516, 0.03547221, 0.03705513, 0.03855015, 0.03995374, 0.04126256, 0.04247352,
   0.04358372, 0.04459056, 0.04549163, 0.04628480, 0.04696818, 0.04754017, 0.04799939, 0.04834476, 0.04857547, 0.04869096, 0.04869096, 0.04857547,
   0.04834476, 0.04799939, 0.04754017, 0.04696818, 0.04628480, 0.04549163, 0.04459056, 0.04358372, 0.04247352, 0.04126256, 0.03995374, 0.03855015,
   0.03705513, 0.03547221, 0.03380516, 0.03205793, 0.03023466, 0.02833967, 0.02637747, 0.02435270, 0.02227017, 0.02013482, 0.01795172, 0.01572603,
   0.01346305, 0.01116814, 0.00884676, 0.00650446, 0.00414703, 0.00178328};
   double T0_16, T1_16, T0_32, T1_32, T0_64, T1_64;
   T0_16 = integral(0,1,N,nodes_1,weights_1);
   T1_16 = integral(1,2,N,nodes_1,weights_1);
   T0_32 = integral(0,1,M,nodes_2,weights_2);
   T1_32 = integral(1,2,M,nodes_2,weights_2);
   T0_64 = integral(0,1,K,nodes_3,weights_3);
   T1_64 = integral(1,2,K,nodes_3,weights_3);
   printf("n = 16\nT01 = %lf\nT12 = %lf\n", T0_16, T1_16);
   printf("delta01 = %lf\ndelta12 = %lf\n\n", fabs(I01a - T0_16), fabs(I12a - T1_16));
   printf("n = 32\nT01 = %lf\nT12 = %lf\n", T0_32, T1_32);
   printf("delta01 = %lf\ndelta12 = %lf\n\n", fabs(I01a - T0_32), 1000000*fabs(I12a - T1_32));
   printf("n = 64\nT01 = %lf\nT12 = %lf\n", T0_64, T1_64);
   printf("delta01 = %lf\ndelta12 = %lf\n", fabs(I01a - T0_64), 1000000*fabs(I12a - T1_64));
   return 0;
}
```

- f(double x) – вычисляет значение данной функции в заданной точке.
- integral(int a, int b, double *nodes, double *weights) – метод Гаусса-Лежандра для вычисления интеграла.

7. Анализ результатов и применимости метода Гаусса-Лежандра

Интеграл, вычисленный аналитически на отрезке [0,1]:

$I \approx 0.967237996890096$

Интеграл, вычисленный аналитически на отрезке [1,2]:

$I \approx 0.016832889701405$

Функция определена во всех найденных узлах, значит метод применим на любом из двух отрезков.

n	**16**		**32**		**64**	
[a,b]	**[0,1]**	**[1,2]**	**[0,1]**	**[1,2]**	**[0,1]**	**[1,2]**
$\boldsymbol{T_n}$	0.912823	0.016578	0.940454	0.016833	0.953739	0.016833
$\boldsymbol{\delta_n}$	0.054415	0.000255	0.026784	$0.000659 \cdot 10^{-6}$	0.013499	$0.000036 \cdot 10^{-6}$

Выводы:

1. Метод Гаусса-Лежандра имеет преимущества в виде высокой точности приближения интеграла и применимости для широкого класса функций, в отличие от метода трапеций, который не позволяет вычислить определенный интеграл на отрезках, в которых функция не определена.
2. При увеличении числа узлов интегрирования метод Гаусса-Лежандра становится более точным, но также требует больше вычислительных ресурсов, так как приходится находить значения узлов и весов.

8. Вывод

Численные методы интегрирования позволяют довольно точно считать определенные интегралы без аналитического вычисления. В этом отчете показано, что метод трапеций прост в реализации и не требует дополнительных вычислений. Для использования метода Гаусса-Лежандра необходимо производить предварительные вычисления узлов и весов, что является затруднительным при их большом количестве. Но метод Гаусса-Лежандра точнее, чем метод трапеций, а также стало возможным вычислять определенный интеграл, когда функция не определена в некоторых точках отрезка.

9. Использование численного интегрирования в реальных задачах

- **Физика**: Численное интегрирование используется для моделирования и анализа физических процессов, таких как движение тел, электромагнитные поля, теплообмен. Расчет физических величин, таких как работа, энергия или потоки величин, может быть выполнен через численное интегрирование.
- **Картография и география**: при создании цифровых карт и анализе географических данных численное интегрирование используется для расчета площадей, обводок, геометрических параметров и других географических характеристик.
- **Инженерия**: Численное интегрирование применяется в инженерных расчетах, например, для определения массы, центра тяжести или инерционных моментов объектов, расчета электрических или механических характеристик.

10. Литература

1. Введение в численные методы, методическое пособие для 2 курса, Д.П. Костомаров

2. Вводные лекции по численным методам, Д.П. Костомаров, А.П. Фаворский