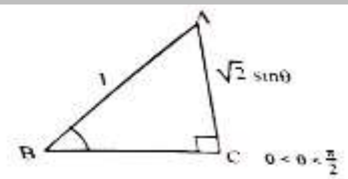
অধ্যায়-৭: বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ

১.নং প্রশ্নের সমাধানঃ

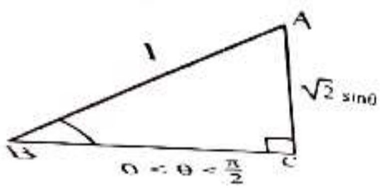


ক. $|BC| = ?$

খ. $\sin^{-1}|AC| + \sin^{-1}|BC| = \varphi$ হলে $\varphi = ?$

গ. সমাধান করঃ $\sin x+\cos x=\tan 2\varphi$

সমাধানঃ



(ক). এর সমাধান :

$BC=\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{1-2\sin^2\theta} = \sqrt{\cos 2\theta}$

$\therefore |BC| = \sqrt{\cos 2\theta}$

(খ). এর সমাধান :

$\sin^{-1} |AC| + \sin^{-1}|BC| = \varphi$

বা, $\sin^{-1}\left(\sqrt{2\sin}\right)+\sin^{-1}\sqrt{\cos 2\theta} = \varphi$

বা, $\sin^{-1}\{\sqrt{2\sin\theta}\sqrt{1-\cos 2\theta} + \sqrt{\cos 2\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}}\}=\varphi$

বা, $\sin^{-1}\{\sqrt{\cos 2\theta}\,.\sqrt{2\sin\theta} + \sqrt{\cos 2\theta}.\ \sqrt{\cos 2\theta}.\}=\varphi$

বা, $\sin^{-1}\{2\sin^2+\text{cis}2\theta\}=\varphi$

বা, $\sin^{-1}\{1-\cos 2\theta+\cos 2\theta\}=\varphi$

বা, $\sin^{-1}(1)=\varphi$ বা, $\varphi=\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) \therefore \varphi = \frac{\pi}{2}$

(গ). এর সমাধান :

'খ' থেকে পাই, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$\sin x+ \cos x=\tan 2\varphi$

বা, $\sin x+\text{cis}x=\tan\left(2.\frac{\pi}{2}\right)\left[\therefore \frac{\pi}{2}\right]$

বা, $\sin x+\cos x=\tan\pi$

বা, $\sin x+\cos x=0\,[\because \tan\pi = 0]$

বা, $\sin x=-\cos x$

বা, $\frac{\sin x}{\cos x} = -1$

বা, $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

বা, tanx=tan$\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore x = n\pi - \frac{\pi}{4}$ যেখানে n এর মান শূর্ন অথবা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা।

23. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$ একটি রাশি।

ক. রাশির প্রথম দুইটি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

খ. y=x হলে 'ক' থেকে প্রমাণ কর যে,

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$$

গ. প্রমাণ কর যে, উদ্দীপকটির মান $\tan^{-1}\frac{x+y+y-xyz}{1-xy-yz-zx}$

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি = $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

২.নং প্রশ্নের সমাধানঃ

a cosθ+b sinθ=c

ক. প্রদত্ত সমীকরণে a=b=c=1 লিখে সমাধান কর।

খ. প্রদত্ত সমীকরণে a=1, b=2 এবং c=1 হলে, সমাধান কর।

গ. প্রদত্ত সমীকরণে a ও b কে বিনিময় করে সমাধান কর।

(ক). এর সমাধান :

যখন a=b=c=1

cosθ+sinθ=1

বা, $\text{cis}^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1$

বা, 1+sin2θ=1 বা, sin 2θ

বা, 2θ=nπ বা, $\theta=\frac{n\pi}{2}$

(খ). এর সমাধান :

যখন a=1, b=2 এবং c=1 তখন cosθ+2sinθ=1

সমীকরণের উভয় পাশে $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ দ্বারা ভাগ করে।

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

বা, cosα cosθ+sinα sinθ=cosα

ধরি $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ও $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

বা, cos(θ-α)= cosα

বা, θ-α =2nπ $\pm\alpha$

বা, θ =2nπ $\pm\alpha+\alpha$ [যেখানে $n\in z=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$]

(গ). এর সমাধান :

প্রদত্ত সমীকরণে a ও b কে বিনিময় করে,

b cosθ+a sinθ=c.....(i)

সমীকরণের উভয় পাশে $\sqrt{B^2+a^2}$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+a^2}}\cos\theta+\frac{a}{\sqrt{b^2+a^2}}\sin\theta=\frac{c}{\sqrt{b^2+a^2}} \quad .....(ii)$$

ধরি $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\cos\beta=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ও

সুতরাং(ii) নং থেকে

$\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta=\cos\beta$

বা, $\cos(\theta-\alpha)=\cos\beta$

বা, $\theta-\alpha=2n\pi\pm\beta$

বা, $\theta=2n\pi\pm\beta+\alpha$ যেখানে $n\in z$ ও $\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

এবং $\beta=\cos^{-1}\left(\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

৩.নং প্রশ্নের সমাধানঃ

দেয়া আছে, $cox3x+\cos2x+\cos x=0$

ক) বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ও মুখ্য মান কী ?

খ) উপরোক্ত সমীকরণটির সাধারণ সমাধান কর।

গ) $\pi\leq\leq\pi$ ব্যবধিতে সমীকরণটির সমাধান কর।

(ক). এর সমাধান :

$\cos$ ফাংশনকে $\cos\theta=x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, $\cos^{-1}x=\theta$ অর্থাৎ $\cos\theta$ কে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হলে $\cos^{-1}x$ কে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হয়।

ধরি $\sin\theta=x$ বা, $\theta=\sin^{-1}x.$

θ কোণের ক্ষুদ্রতম সাংখ্যিক মানকে ধনাত্মক বা ঋনাত্মক যাই হোক না কেন, .. এর মুখ্যমান বলা হয়।

হোক না কেন $\sin^{-1}x.$ এর মুখ্যমান বলা হয়।

(খ). এর সমাধান :

দেওয়া আছে, $\cos x+\cos2x+\cos3x=0$

বা, $(\cos x+\cos3x)+\cos2x=0$

বা, $2\cos2x\cos x+\cos2x=0$

বা, $\cos2x(2\cos x+1)=0$

হয়, $\cos2x=0$ অথবা, $2\cos x+1=0$

বা, $2x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ বা, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$ বা, $\cos x=\cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore x=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, 2nr\pm\frac{2\pi}{3}, n$ এর মান শূন্য অথবা পূর্ণ সংখ্যা।

(গ). এর সমাধান :

'খ' তে প্রাপ্ত সমাধান $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, 2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

যখন, n এর মান শূন্য বা অন্য কোনো পূর্ণ সংখ্যা।

যখন, $n=0$ তখন, $x=\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

$n=1$ তখন, $x=\frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$n=-1$ তখন $\frac{\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{8\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে, $x=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}(Ans.)$

৪.নং প্রশ্নের সমাধানঃ

ক) $\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$ কোণটি চিহ্নিত করে একটি নমুনা ত্রিভুজ আঁক।

খ) $\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}+\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$ এর মান বের কর।

(ক). এর সমাধান :

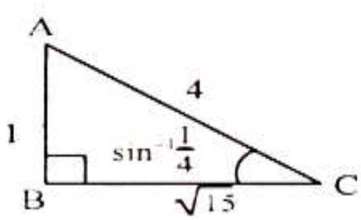
ধরি ABC ত্রিভুজের $\angle ACB=\sin^{-1}\frac{1}{4}$ হলে $AB=1$ একক এবং $AC=4$ একক।

$\therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}$

$=\sqrt{4^2-1^2}$

$=\sqrt{16-1}$

$=\sqrt{15}$



$\therefore BC=15$ একক

(খ). এর সমাধান :

$\sin^{-1}\frac{1}{2}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}} = \operatorname{cosec}^{-1}4$$

$$= \sec^{-1}\frac{4}{\sqrt{15}} = \cot^{-1}\sqrt{15}$$

‘ক’ হতে পাই, $\sin^{-1}\frac{1}{4} = \cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\therefore \cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(গ). এর সমাধান :

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \sin\left[\sin^{-1}\left\{\frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\right\}\right]$$

$$\left[\therefore \sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left\{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right\}\right]$$

$$= \sin\left[\sin^{-1}\left\{\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}}{4}\right\}\right]$$

$$= \sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$$

$$\therefore \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$$

প্র্যাকটিস অংশ: সৃজনশীল প্রশ্ন:

সৃজনশীল প্রশ্ন-১

দৃশ্যকল্প-১: $\tan^{-1}c + \tan^{-1}y$ একটি ত্রিকোণিমিতিক বিপরীত ফাংশন।

দৃশ্যকল্প-২: $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

ক. $\tan^{-1}(-1)$এর মুখ্য মান নির্ণয় কর।

খ. $x = \frac{1}{4}, y = \frac{2}{9}$হলে প্রমান কর যে, দৃশ্যকল্প-১ তথ্যটিরমান $\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$

গ. দৃশ্যকল্প-২ এর সমাধান নির্ণয় কর যখন $2\pi r < x < 2\pi$

সৃজনশীল প্রশ্ন-২

২। $m=\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

ক. $\left(\tan^{-1}\frac{5}{7}+\tan^{-1}\frac{5}{8}\right)$ কে ট্যানজেন্ট এর বিপরীত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্য প্রকাশ কর।

খ. $x=\frac{1}{2}ysm2A; y=\cot A$ এবং $z=\cot^3 A$ হলে m নির্ণয় কর।

গ. $m=\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $xy+yz+zx=1$

সৃজনশীল প্রশ্ন-৩

৩। $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}a=p$

ক, $\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}\right)$ কে সাইনের বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনে প্রকাশ কর।

খ. $x=-\cos\theta; y=\cos 3\theta$ এবং $z=0$ হলে নির্ণয় কর।

গ. $p=\pi$ হলে প্রমাণ কর যে, $x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$

সৃজনশীল প্রশ্ন-৪

৪। বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন $f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$

ক. $f\left(\sqrt{3}\right)$ নির্ণয় কর।

খ. দেখা ও যে, $f(x)=\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1+x^2}{2x}$

গ. $f(x)=\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ হলে x নির্ণয় কর।

সৃজনশীল প্রশ্ন-৫

৫। $\cos\theta-\cos 7\theta=P$ যখন একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন।

ক. $\cos 7\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে θ নির্ণয় কর।

খ. $P=\sin 4\theta$ হলে সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. লেখচিত্রেরে সাহায্য সমাধান করে θ নির্ণয় কর যখন $P=\sin\theta-\cos 7\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}$ যখন $-\pi<\theta<\pi$

সৃজনশীল প্রশ্ন-৬

৬। একটি বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন: $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y$

একটি ত্রিকোণমিকি সমীকরণ: $2\sin^2 x=3\cos x$

ক. দেখাও যে, $\cot\cos^{-1}\sin\tan^{-1}x=x$

খ. যদি ফাংশটির মান $\frac{\pi}{2}$ হয় তবে প্রমান করো যে, $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$

গ. $0<x<2\pi$ ব্যবধিতে সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় কর।

সৃজনশীল প্রশ্ন-৭

৭। $f(\theta)=\sqrt{3\sin\theta}-\cos\theta$

$g(\theta)=\cos\theta-\cos7\theta$

ক. দেখায় যে, $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cot^{-1}\frac{5}{3}=\tan^{-}\frac{27}{11}$

খ. $f(\theta)=2$ হলে $-2\pi<\theta<2\pi$ ব্যবধিতে θ এর মান নির্ণয় কর

গ. θ এর কোনমানের জন্য $g(\theta)$ এর মান $\sin4\theta$ এর সমান হবে।

সৃজনশীল প্রশ্ন-৮

৮। দৃশ্যকল্প-১ : $f(x)=\sin^{-1}x$

দৃশ্যকল্প-২ $cox+\cos2x+\cos3x=0$

ক. $f(x)+f(y)=\frac{\pi}{2}$ হলে দেখাও যে, $x^2+y^2=1$

খ. দৃশ্যকল্প-২: এর সমীকরণর সমাধান কর।

গ. দেখা ওযে, $\cos t\tan^{-1}\cot f(x)=x$

সৃজনশীল প্রশ্ন-৯

৯। দৃশ্যকল্প -১ $f(\theta)=\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}\theta$

দৃশ্যকল্প-২ $g(\theta)=\sqrt{2}\cos3\theta-\cos\theta-co5\theta$

ক. দেখা ও যে, $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}=tna^{-1}\sqrt{2}$

খ. হতে দেখা ও যে,

গ. $g(\theta)=0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

সৃজনশীল প্রশ্ন-১০

১০। $f(\theta)=\tan^{-1}\theta, g(\theta)=\cos^{-1}\theta$

ক,. দেখাও যে, $f(\sqrt{x})=\frac{1}{2}g\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

খ. দেখাও যে, $2f\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\theta}{2}\right)=g\left(\frac{b+a\cos\theta}{a+bcoas\theta}\right)$

গ. x এর কোন কোন মানের জন্য $f(x+2)+f(x-2)-f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ হবে?