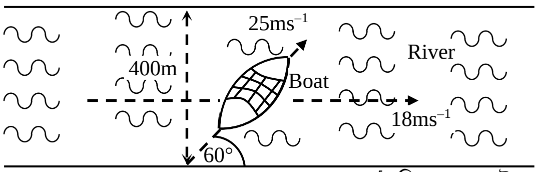
অধ্যায়-২: ভেক্টর

প্রশ্ন ▶১



[কুমিল-া ক্যাডেট কলেজ]

ক. আয়ত এক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. লনরোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ কেন? ২

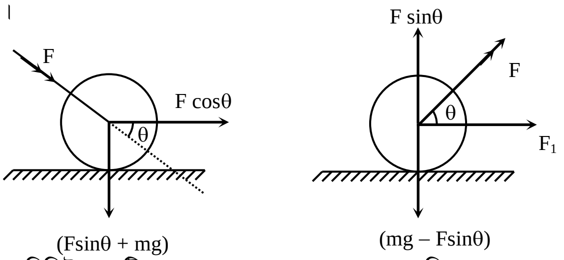
গ. নৌকাটি অপর প্রান্তে নদীর তীর বরাবর কত দূরে গিয়ে পৌঁছাবে? ৩

ঘ. যদি নৌকাটি নদীর প্রস্থ বরাবর রওনা হয় তাহলে নদীটি পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, উদ্দীপকে উলে-খিত অবস্থায় নদীটি পার হতে প্রয়োজনীয় সময় অপেক্ষা বেশি না কম? গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ লন রোলার ঠেলার সময় এর আপত ওজন বৃদ্ধি পায় কিন্তু টানার সময় আপাত ওজন হ্রাস পায়। এজন্য লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।



m ভর বিশিষ্ট একটি লন রোলার কে F বলে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ঠেলার ক্ষেত্রে নিচের দিকে লব্ধি বল হয় (F sinθ + mg), যা লন রোলারের নিজস্ব মনে হ।

গ এখানে,

নৌকার বেগ, $u = 25\ ms^{-1}$

স্রোতের বেগ, $v = 18\ ms^{-1}$

স্রোতের দিকের সাথে নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 60°$

নদীর প্রস্থ, $d = 400m$

নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ,

$= u \sin\theta + v \sin 0°$

$= u \sin \theta$

∴ নদীটি পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{u \sin\theta}$

$= 18.475\ s$

আবার, স্রোতের দিক বরাবর বেগের উপাংশ $= u \cos\theta + v \cos 0°$

$= u \cos\theta + v$

∴ নৌকাটি অপর প্রান্তে নদীর তীর বরাবর x দূরত্বে গিয়ে পৌঁছালে,

$= (25\ ms^{-1} \times \cos 60° + 18\ ms^{-1}) \times 18.475s$

$= 563.49\ m$ **(Ans.)**

এখানে, নৌকার বেগ, $u = 25\ ms^{-1}$

উদ্দীপকে উলে-খিত অবস্থায় নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = 18.475$ sec

নদীর প্রস্থ $d = 400m$

এখন, নৌকাটি যদি নদীর প্রস্থ বরাবর রওনা হয় তাহলে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় t' হলে,

$t' = \frac{d}{u \sin\theta}$

$= \frac{400m}{25\ ms^{-1} \times \sin 90°}$ [$\theta = 90°$]

$= 16$ sec

এখানে, $t > t'$

অতএব, নৌকাটি যদি নদীর প্রস্থ বরাবর রওনা হয় তাহলে নদীটি পার হতে প্রয়োজনীয় সময় উদ্দীপকে উলি-খিত অবস্থায় নদীটি পার হতে প্রয়োজনীয় সময় অপেক্ষা কম।

প্রশ্ন ▶২ আশফাক ও নোহা দুই ভাই বোন। বাড়ী থেকে তারা স্ব স্ব স্কুলে গেল। তাদের সরণ ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{r}_1 = (2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ মিটার এবং $\vec{r}_2 = (-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$ মিটার। *[ঢাকা কলেজ, ঢাকা]*

ক. বিপ্রতীপ ভেক্টর কী? ১

খ. কার্ল এর তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. দু'জনের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের মধ্যকার সরাসরি দূরত্ব কত হবে? ৩

ঘ. নোহা তার স্কুলে যাওয়ার সময় আশফাকের স্কুলের দিক কত দূরত্ব যাবে চিত্রের সাহায্যে বিশে-ষণ কর। ৪

২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপরীত রাশি হলে এদেরকে পরস্পরের বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

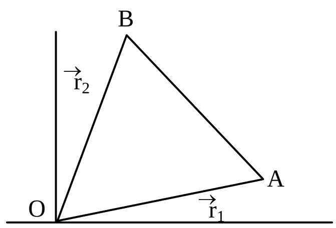
খ কার্লের তাৎপর্য নিম্নরূপ :

i. কোনো ভেক্টরের কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

ii. কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়।

অর্থাৎ, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল হয়।

গ



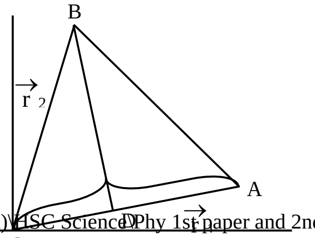
ধরি, $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1 = (2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ m

তাহলে দুইজনের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের মধ্যকার দূরত্ব

$= AB = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k} + 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}|$ m

$= |4\hat{i} + \hat{k}|$m $= \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ m **(Ans.)**

ঘ এখানে, বের করতে হবে, নোহা তার স্কুলে যাওয়ার সময় আশফাকের স্কুলের দিকে কত দূরত্ব যাবে। অর্থাৎ $\vec{r}_1$ এর দিকে $\vec{r}_2$ এর লম্ব অভিক্ষেপ OD নির্ণয় করতে হবে।



$\vec{r}_1$ ও $\vec{r}_2$ এর মধ্যকার কোণ θ হলে

$\vec{r}_2$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $OD = r_2 \cos\theta$

দেওয়া আছে,

$\therefore \vec{r}_1 . \vec{r}_2 = -4 + 1 + 12 = 9$

আমরা জানি,

$$\vec{r}_1 . \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| |\vec{r}_2| \cos\theta$$

$$\therefore \quad OD = \frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ Ans.}$$

অতএব, হো তার স্কুলে যাওয়ার সময় আশফাকের স্কুলের দিকে $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ m পরিমাণ দূরত্ব যাবে।

প্রশ্ন ▶৩ যদি $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়। *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. টর্কের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. দেয়া উদ্দীপকে $\vec{A}$ সলিনয়ডাল হবে কী? ২

গ. উদ্দীপক হতে গণনা কর x-অক্ষ এবং $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ –এর অন্তর্বর্তী কোণ কত? ৩

ঘ. উদ্দীপক হতে দেখাও যে $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ একই তলে অবস্থান করে। ৪

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো দৃঢ় বস্তুর ওপর বল প্রযুক্ত হলে বস্তুটির মধ্যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু বা বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরবার যে প্রবণতা সৃষ্টি হয় তাকেই টর্ক বলে।

খ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স, $\vec{\nabla} . \vec{A} = \left(\hat{i}\frac{d}{dx} + \hat{j}\frac{d}{dy} + \hat{k}\frac{d}{dz}\right) . (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$$= \frac{d}{dx}(2) + \frac{d}{dy}(1) + \frac{d}{dz}(-1) = 0$$

$\therefore$ প্রদত্ত উদ্দীপকে $\vec{A}$ সলিনয়ডাল।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ ভেক্টরটি X অক্ষের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\frac{\vec{R}.\hat{i}}{|\vec{R}|\,|\hat{i}|} = \cos^{-1}\frac{6}{\sqrt{6^2 + (-4)^2 + 8^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{6}{10.77} = 56.14° \textbf{ (Ans.)}$$

ঘ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখানে, $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(-10 + 12) - \hat{j}(15 - 4) + \hat{k}(-9 + 2)$$

$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$\therefore \vec{A}$ ভেক্টরটি $\vec{B} \times \vec{C}$ এর লম্বদিকে অবস্থান করে।

কিন্তু $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের উভয়েই $\vec{B} \times \vec{C}$ এর ওপর লম্ব।

সুতরাং $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ একই তলে অবস্থান করে।

প্রশ্ন ▶৪ নাজরী সাইকেলে চড়ে কালিপুর বাজার মোড় হতে বদরপুর কলেজে আসছে হঠাৎ 6m/sec বেগে বৃষ্টি পড়া শুরু হলো। নাজরী বৃষ্টির হাত হতে রক্ষা পাবার জন্য 45° কোণে ছাতা ধরে সাইকেল চালাচ্ছে। *[মতিঝিল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর-ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে নাজরীর সাইকেলের বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কলেজে দ্রুত পৌছানোর জন্য নাজরী দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টির হাত রক্ষা পাওয়ার জন্য ছাতা ধরায় কোন পরিবর্তন আনতে হবে কী? উত্তরের স্বপক্ষে গাণিতিক যুক্তি দাও। ৪

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ আমরা জানি, কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি সর্বদাই নির্দিষ্ট অবস্থানে থাকে এবং প্রান্তবিন্দু যদি পরিবর্তন হতে পারে তবে একে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

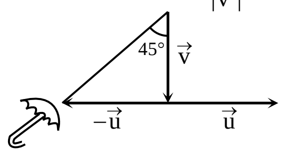
দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক ভেক্টর স্থানাংক ব্যবস্থায়, যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের পাদবিন্দু সর্বদাই মূলবিন্দুতে অবস্থিত। তাই অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর।

গ দেওয়া আছে, বৃষ্টি পতনের বেগ, $v = 6ms^{-1}$

ছাতা ধরার কোণ, $\theta = 45°$

বের করতে হবে, সাইকেলের বেগ, $u = ?$

পাশে দেখানো চিত্র হতে পাই, $\tan 45° = \frac{|-\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{u}{v}$



$\therefore u = v \times \tan 45° = v \times 1 = 6\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

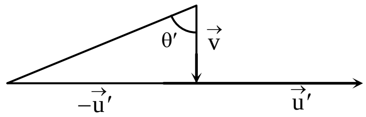
ঘ পরিবর্তিত অবস্থায়, সাইকেলের বেগ, $u' = 2u = 2 \times 6\ ms^{-1} = 12ms^{-1}$

বৃষ্টি পতনের বেগ, $v = 6ms^{-1}$

এক্ষেত্রে ছাতা ধরার কোণ θ' হলে,

$$\tan\theta' = \frac{|-\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{u'}{v} = \frac{12ms^{-1}}{6ms^{-1}} = 2$$

$\therefore \theta' = \tan^{-1} 2 = 63.43°$



সুতরাং, কলেজে দ্রুত পৌছানোর জন্য নাজরী দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টির হাত থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য উলম্বের সাথে 63.43° কোণে ছাতা ধরতে হবে। এক্ষেত্রে, ছাতা ধরার কোণের পরিবর্তন $= \theta' - \theta = 63.43° - 45° = 18.43°$

প্রশ্ন ▶৫ সাঁতার প্রতিযোগিতায় একজন সাঁতারু 1 km প্রস্থ বিশিষ্ট নদী সোজাসুজি পার হচ্ছেন। নদীতে স্রোতের বেগ 6 km/h. এবং সাঁতারুর বেগ 8km/h (নদী সোজাসুজি পার হয়ে কমপক্ষে 7 min এ তীরে পৌছাতে হবে।) *[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. সংরক্ষণশীল বল কাকে বলে? ১

খ. প্রযুক্ত বল নয়, প্রত্যয়নী বলের কারণে সরল ছন্দিত স্পন্দনের উদ্ভব হয়– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. স্রোতের বেগ ও সাঁতারুর বেগের মধ্যবর্তী কোণ কত? ৩

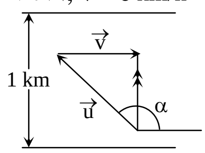
ঘ. উদ্দীপকের উলে-খিত সময়ের মধ্যে সাঁতারু তীরে পৌছাতে পারবে কিনা– গাণিতিকভাবে যুক্তি দাও। ৪

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো কণা একটি পূর্ণচক্র সম্পন্ন করে তার আদি অবস্থানে ফিরে আসলে কণাটির ওপর যে বল দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হয়, সেই বলকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

খ ধরি, কোনো স্প্রিং-এর মুক্ত প্রান্তে একটি ভর যুক্ত আছে। স্প্রিংটিকে সম্প্রসারিত বা সংকুচিত করে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি সরল ছন্দিত স্পন্দন গতিসম্পন্ন হয়। স্প্রিংটি যখন সাম্যাবস্থান হতে সরণ লাভ করে, তখন সাম্যাবস্থানের দিকে ত্বরণ ক্রিয়া করে, ফলে স্প্রিংটি বিস্তারের সর্বোচ্চ প্রান্তে গিয়ে পুনরায় সাম্যাবস্থানে ফিরে আসতে বাধ্য হয়। এসময় ঐ বস্তুটি গতিজড়তা অর্জন করে, ফলে সাম্যাবস্থানে না থেমে বিপরীত দিকের বিস্তারের প্রান্তের দিকে যেতে থাকে, এতে সাম্যাবস্থান থেকে সরণ লাভ করায় সাম্যাবস্থানের দিকে পুনরায় ত্বরণ ক্রিয়া করে। এ চক্রের পুনরাবৃত্তি ঘটতে থাকে।
লক্ষ্য করি, বাহ্যিক বল কেবল একবারই প্রয়োগ করা হয়েছিল। সুতরাং প্রযুক্ত বল নয়, প্রত্যয়নী বলের কারণে সরল ছন্দিত স্পন্দনের উদ্ভব হয়।

গ দেওয়া আছে, সাঁতারুর বেগ, $u = 8$ km//h
স্রোতের বেগ, $v = 6$ km/h



বের করতে হবে, স্রোতের বেগ ও সাঁতারুর বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = ?$

উপরের চিত্র হতে, $\sin(\alpha - 90°) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{6 \text{ km/h}}{8 \text{ km/h}} = \frac{3}{4}$

বা, $\alpha - 90° = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 48.6°$

$\therefore \alpha = 90° + 48.6° = 138.6°$ **(Ans.)**

ঘ সাঁতারুর লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
$= \sqrt{8^2 + 6^2 + 2\times8\times6\cos 138.6°}$ km/h
$= 5.29$ km/h
যেহেতু নদীর প্রশস্ততা, $d = 1$ km
$\therefore$ নদী পার হতে সময় লাগবে, $t = \frac{d}{w} = \frac{1 \text{ km}}{5.29 \text{ km/h}}$
$= 0.189$ h

সুতরাং, উদ্দীপকের উলে-খিত সময়ের মধ্যে সাঁতারু তীরে পৌছাতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶৬ $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$
[খিলগাঁও গার্লস স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. কার্ল কী? ১
খ. ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা কর। ২
গ. a এর মান কত হলে $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে? ৩
ঘ. m এর মান কত হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর ত্রয় একই সমতলের উপর অবস্থিত হবে বিশে-ষণ কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোসাইনের গুণফলের সমান। ভেক্টর রাশি দুটির মাঝে (.) চিহ্ন দিয়ে স্কেলার গুণফল প্রকাশ করা হয় এবং পড়তে হয় "প্রথম রাশি ডট দ্বিতীয় রাশি"।
সুতরাং, দুটি ভেক্টর রাশির যে গুণনের ফলে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল বলে।

গ $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হতে হলে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স শূন্য হতে হবে।

প্রথমে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করি।

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\{(x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(ay - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + 4z)$$
$$= 1 + 0 + a - 0 + 0 + 4$$
$$= a + 5$$

$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে $a + 5 = 0$
$\therefore a = -5$

$\therefore$ a এর মান -5 হলে $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে।

ঘ এখানে, $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর ত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হতে হলে

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হতে হবে।

সুতরাং, প্রথমে $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ রাশিমালাটি নির্ণয় করি।

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k})$$
$$= 2m - 11 + 7 = 2m - 4$$

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ বসিয়ে পাই, $2m - 4 = 0$
বা, $m = 2$

$\therefore$ m এর মান 2 হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টরত্রয় একই সমতলে অবস্থিত হবে।

প্রশ্ন ▶৭ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি স্থির বস্তু A (2, 3, 1) অবস্থান থেকে 3s এ B (5, 2, –1) অবস্থানে এবং 10 s এ C (10, 5, 3) অবস্থানে আসে। *[রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]*

ক. পরিমাপে পরম ত্রুটি কী? ১
খ. আধুনিক ধারণা অনুযায়ী স্থান, কাল ও ভর ব্যাখ্যা কর। ২
গ. প্রথম 3s এ কণাটির সরণ ভেক্টর বের কর। ৩
ঘ. A থেকে B বিন্দুতে এবং B থেকে C বিন্দুতে ত্বরণের মান সমান কি না যাচাই কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো একটি রাশির প্রকৃত মান ও পরিমাপকৃত মানের পার্থক্যকে পরম ত্রুটি বলে।

খ আধুনিক ধারণা অনুযায়ী, স্থান, কাল ও ভর কোনোটিই পরম রাশি নয়। এ রাশিগুলোর মান পর্যবেক্ষক এবং পর্যবেক্ষিত বস্তুর মধ্যকার আপেক্ষিক বেগের ওপর নির্ভর করে। এ আপেক্ষিক বেগ আলোর বেগের সাথে তুলনীয় হলে বেগের দিক বরাবর স্থান সংকুচিত হয়ে যায়, কাল দীর্ঘায়িত হয় এবং ভর বেড়ে যায়।

গ দেওয়া আছে, $t = 0$s মুহূর্তে অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$t = 3$ sec মুহূর্তে অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_2} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ প্রথম 3 sec- এ কণাটির সরণ ভেক্টর, $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

$$= (5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$ **(Ans.)**

ঘ A হতে B বিন্দুতে গমনের ক্ষেত্রে, আদি বেগ, $u = 0\ ms^{-1}$

সরণের মান, $|\Delta \vec{r}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3.74$ m

এ সময়কালে ত্বরণ a হলে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$ [$\because u = 0$]

$\therefore a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 3.74\ m}{(3\ sec)^2} = 0.83\ ms^{-2}$

B বিন্দুতে বেগ $v = u + at = 0 + 0.83\ ms^{-2} \times 3\ sec = 2.49\ ms^{-1}$

B হতে C বিন্দুতে গমনের ক্ষেত্রে, আদিবেগ, $u = 2.49\ ms^{-1}$

সরণ, $\Delta \vec{r} = \vec{r_3} - \vec{r_2} = (10\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) - (5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

সরণের মান, $s = |\Delta \vec{r}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 7.07$ m

এ সময়কালে (t = 3 sec হতে t = 10 sec) ত্বরণ a′ হলে,

$s = ut + \frac{1}{2}a't^2$ বা, $\frac{1}{2}a't^2 = s - ut$

$\therefore\ a' = \frac{2(s - ut)}{t^2} = \frac{2\{7.07\ m - 2.49\ ms^{-1} \times 7\ sec\}}{(7\ sec)^2}$

$= -0.423\ ms^{-2}$

সুতরাং A থেকে B বিন্দুতে এবং B থেকে C বিন্দুতে ত্বরণের মান সমান নয়।

প্রশ্ন ▶৮ আমরা জানি, ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ এবং অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$।

[সেন্ট জোসেফ হায়ার সেকেন্ডারী স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. সরণ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ডাইভারজেন্স এর তাৎপর্য লেখ। ২

গ. $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. প্রমাণ কর অবস্থান ভেক্টরের কার্ল অঘূর্ণনশীল হবে। ৪

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর অবস্থানের পরিবর্তন যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে সরণ ভেক্টর বলে।

খ ডাইভারজেন্স এর তাৎপর্য হলো:

i. ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে।

ii. ডাইভারজেন্স শূন্য হলে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল বলে।

গ দেওয়া আছে, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ অর্থাৎ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{r^2}\cdot\hat{r}$$

$\hat{r}$ হলো r বরাবর একক ভেক্টর। **(Ans.)**

ঘ অবস্থান ভেক্টরের কার্ল = $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(x)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x)\right\}$$

$$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(0 - 0)$$

$$= 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$$

প্রদত্ত অবস্থান ভেক্টরের কার্ল শূন্য হওয়ায় ইহা স্পষ্টতঃ যে, উক্ত অবস্থান ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶৯ দুটি ভেক্টর $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$।

[শহীদ বীর উত্তম লে: আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

ক. ভেক্টরের ডাইভারজেন্স কি? ১

খ. ভেক্টর যোজনের ত্রিভুজ সূত্রটি লেখ ও ব্যাখ্যা কর। ২

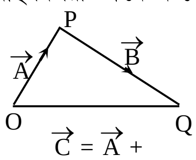
গ. $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর জন্য একটি সমীকরণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর যে, $P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0$, যখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব এবং $\frac{P_x}{Q_x} = \frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_z}{Q_z}$, যখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে সমান্ড্রাল হয়। ৪

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর ক্যালকুলাসে ডাইভারজেন্স একটি ভেক্টর অপারেটর, অর্থাৎ এটি একটি ভেক্টরের ওপর ক্রিয়া করে। ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার এবং এটি কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের সোর্স বা সিংকের মান নির্দেশ করে।

খ ভেক্টর যোজনের ত্রিভুজ সূত্রটি হলো— যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু একইক্রমে দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে মানে ও দিকে নির্দেশ করে তবে তৃতীয় বাহু বিপরীতক্রমে ঐ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করবে।



$\vec{C} = \vec{A} +$

PQO ত্রিভুজের দুটি বাহু OP ও PQ দ্বারা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির মান ও দিক একই ক্রমে নির্দেশ করে। তাহলে $\vec{OQ}$ দ্বারা $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি প্রকাশ পায়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$

এবং $\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$

$$\therefore \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} P_y & P_z \\ Q_y & Q_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} P_x & P_z \\ Q_x & Q_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix}$$

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

ঘ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের ওপর লম্ব হলে, $\vec{P}.\vec{Q} = 0$

বা, $(P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}).(Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}) = 0$

বা, $P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্ড়্রাল হলে, $\vec{P} \times \vec{Q} = PQ \sin \alpha\, \hat{n}$

$= PQ \sin 0°\hat{n} = \vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ .... (i)

'গ' অংশ হতে পাই,

$\vec{P} \times \vec{Q} = (P_yQ_z - P_zQ_y)\hat{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\hat{j} + (P_xQ_y - P_yZ_x)\hat{k}$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই, $P_yQ_z - P_zQ_y = 0$

বা, $P_yQ_z = P_zQ_y$

বা, $\frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_z}{Q_z}$ .... (iii)

এবং $P_zQ_x - P_xQ_z = 0$

(iii) ও (iv) হতে পাই, $\frac{P_x}{Q_x} = \frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_z}{Q_z}$

সুতরাং গাণিতিক বিশে-ষণে দেখা যায় যে, $P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = 0$ যখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের ওপর লম্ব এবং $\frac{P_x}{Q_x} = \frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_z}{Q_z}$, যখন ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সাথে সমান্ড়্রাল।

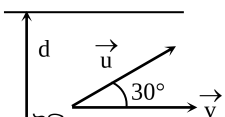
প্রশ্ন ▶১০ 1.5 km চওড়া একটি নদীতে 2 kmh^{-1} বেগে সরলরেখা বরাবর স্রোত প্রবাহিত হচ্ছে। নদীতে স্রোত না থাকলে একজন সাতার‍ সর্বোচ্চ 3kmh^{-1} বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার উদ্দেশ্যে রওনা হয়ে সে দেখল স্রোতের সাথে 30° কোণে 3 kmh^{-1} বেগে সাঁতার কাটছে। এতে সে গন্ড়ব্য থেকে বেশ কিছুটা দূরে গিয়ে পৌছল। *[বীরশ্রেষ্ঠ মুন্সী আব্দুর রউফ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]*

ক. লব্ধি ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা কীভাবে তিনটি ভেক্টরকে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে? ২

গ. সাতার‍র অপর পাড়ে পৌছতে কত সময় লাগবে? ৩

ঘ. সাতার‍র পক্ষে তার গন্ড়ব্যে পৌছা সম্ভব কিনা গাণিতিক যুক্তিসহ বিশে-ষণ কর। ৪

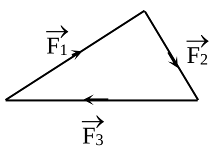


১০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো বিন্দুবস্তুর ওপর সমজাতীয় দুটি ভেক্টর যুগপৎ ক্রিয়া করলে বস্তুটির ওপর আলাদা ভেক্টর দুটির কোনোটির প্রভাবই দৃশ্যমান না হয়ে তৃতীয় আরেকটি ভেক্টরের প্রভাব বিদ্যমান রয়েছে বলে অনুমিত হয়। তৃতীয় ভেক্টরটি প্রথম দুটি ভেক্টরের যোগফলের সমান। একে লব্ধি ভেক্টর বলে।

খ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, যদি কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু একই ক্রমে দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে নির্দেশ করে তবে তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ঐ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করবে। সুতরাং কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একইক্রমে তিনটি ভেক্টরকে মানে ও দিকে প্রকাশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে, যা নিচের চিত্রে দেখানো হলো :

$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$



গ দেওয়া আছে,

নদীর প্রস্থ, d = 1.5 km = 1500m

সাতার‍র বেগ, u = 3 kmh^{-1}

স্রোতের বেগ, v = 2 kmh^{-1}

নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশসমূহের যোগফল তথা লব্ধি বেগের উপাংশসমূহের উপাংশ $= u \cos (90° - 30°) + v \cos 90°$

$= u \sin 30° + v \times 0$

$= 3\text{ kmh}^{-1} \times \frac{1}{2} + 0 = 1.5\text{ kmh}^{-1}$

$\therefore$ সাতার‍র অপর পাড়ে পৌঁছাতে সময় লাগবে, $t = \frac{d}{1.5\text{ kmh}^{-1}}$

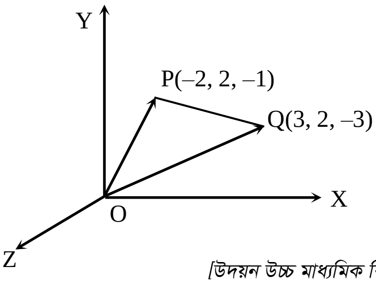
$= \frac{1.5\text{ km}}{1.5\text{ kmh}^{-1}}$

$= 1$ hr

ঘ সাতার‍র গন্ড়ব্য হলো নদীর ঠিক ওপারের বিন্দু। ঐ গন্ড়ব্যে যেতে হলে নদীর স্রোতের দিক বরাবর লব্ধিবেগের কোনো উপাংশ থাকতে পারবে না। কিন্তু উদ্দীপকের ক্ষেত্রে নদীর স্রোতের দিক বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ $= u \cos 30° + v \cos 0° = 3\text{ kmh}^{-1} \times 0.866 + 2\text{ kmh}^{-1} = 4.598\text{ kmh}^{-1} \neq 0$

সুতরাং সাতার‍র পক্ষে তার গন্ড়ব্যে পৌছা সম্ভব নয়, বরং নদীর ওপারে পৌছানো পর্যন্ড় স্রোতের দিক বরাবর তার অতিক্রান্ড় দূরত্ব $= 4.598\text{ kmh}^{-1} \times 1\text{ hr} = 4.598$ km, অর্থাৎ সাতার‍ তার গন্ড়ব্য হতে 4.598 km দূরে পৌঁছাবেন।

প্রশ্ন ▶১১



[উদয়ন উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. সমরেখ ভেক্টর কী? ১

খ. সমত্বরণের ক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্র ব্যাখ্যা কর। ২

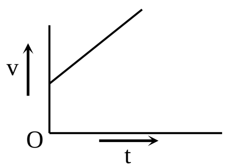
গ. PQ ভেক্টরের YZ তলের উপাংশের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. PQ ভেক্টরটির X, Y, Z অক্ষের সাথের কৌণিক ব্যবধান বিশে-ষণ কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টরের ক্রিয়ারেখা যদি একই দিকে হয় তবে তাদের সমরেখ ভেক্টর বলে।

খ ছক কাগজে x অক্ষ বরাবর সময় ও y অক্ষ বরাবর বেগের মান বসিয়ে সমত্বরণের ক্ষেত্রে বেগ বনাম সময় লেখচিত্র পাওয়া যায় যা y = mx + c আকৃতির।



লেখচিত্রের যে কোন বিন্দুতে ঢাল সমত্বরণের মান নির্দেশ করে। যদি বস্তুটি স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা শুর‍ করে তবে c = 0 হয় লেখচিত্রটি y = mx আকৃতির বা মূলবিন্দু গামী সরলরেখা হয়।

গ এখানে,

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

মূলবিন্দুর সাপেক্ষে Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OQ} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ YZ তলে ভেক্টরটি $= -2\hat{k}$

$\therefore$ ভেক্টরটির YZ তলে উপাংশের মান $= \sqrt{(-2)^2} = 2$

ঘ (গ) নং থেকে পাই, $\overrightarrow{PQ} = 5\hat{i} - 2\hat{k}$

$\therefore PQ = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ x অক্ষের সাথে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের উৎপন্ন কোণ, $\cos\theta_x = \left(\frac{A_x}{A}\right)$

$$\therefore \theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

y অক্ষের সাথে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের উৎপন্ন কোণ $\cos\theta_y = \frac{0}{\sqrt{29}}$

$$\therefore \theta_y = \cos^{-1}(0) = 90°$$

এবং Z অক্ষের সাথে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের উৎপন্ন কোণ, $\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১২ তানজিনদের বাড়ির সামনে 1 km প্রশস্ত্রে একটি নদী প্রবাহিত। বাড়ির সোজাসুজি অপর পাড়ে তাদের কলেজ। একদিন সকালে সে ক্লাস শুর‍ু হওয়ার ঠিক 3 মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে 12 kmh^{-1} বেগের একটি নৌকায় কলেজের উদ্দেশ্যে রওনা দিল। *[ঢাকা ইমপিরিয়াল কলেজ, ঢাকা]*

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না– ব্যাখ্যা কর। ২

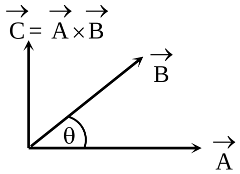
গ. নদীতে স্রোতের বেগ কত? ৩

ঘ. তানজিন কী যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে– গাণিতিক বিশে-ষণ পূর্বক মতামত দাও। ৪

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসংগ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ



এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ এর মান হলো AB sinθ এবং দিক হলো এমন যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ একটি ডানহাতি ব্যবস্থা তৈরি করে। তবে $\vec{B} \times \vec{A} = \vec{D}$ এর মান হলো BA sinθ যার দিক হচ্ছে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ লম্ব বরাবর ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{B}$ থেকে $\vec{A}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যে দিকে অগ্রসর হয়।

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে $\vec{D}$ ও $\vec{C}$ এর মান সমান হলেও দিক বিপরীত অর্থাৎ,

$\vec{C} = -\vec{D}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

সুতরাং, ভেক্টরগুণ বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ এখানে, নৌকার বেগ, $u = 12\ km\ h^{-1}$

স্রোতের বেগের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = 120°$

বের করতে হবে, স্রোতের বেগ, v = ?

আমরা জানি, $\tan 90° = \frac{u \sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{u \sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\therefore v + u\cos\alpha = 0$

বা, $v = -u\cos\alpha$

$= -(12\ km\ h^{-1}) \times \cos 120°$

$= 6\ km\ h^{-1}$ (Ans.)

ঘ এখানে, নৌকার বেগ, $u = 12\ km\ h^{-1}$

নদীর প্রস্থ, d = 1 km

স্রোতের বেগের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = 120°$

তাহলে, নদী পার হতে প্রয়োজনীর সময় t হলে,

$d = u\sin\alpha\ t$

বা, $t = \frac{d}{u \sin\alpha}$

$= \frac{1\ km}{(12\ km\ h^{-1}) \times \sin 120°} = 0.096hr = 5.774\ min$

যেহেতু তানজিন ক্লাস শুর‍ু হওয়ার ঠিক 3 min পূর্বে রওনা দিয়েছিল এবং নদী পার হতে 5.774 min লাগে সেহেতু তানজিন যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶১৩ $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{V} = (x + 3y)\,\hat{i} + (ay - 2z)\,\hat{j} + (x + 4z)\,\hat{k}$ *[গুলশান ডিগ্রি কলেজ, ঢাকা]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. ভেক্টর রাশির ডট গুণন ব্যাখ্যা কর। ২

গ. `a' এর মান কত হলে, $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে? ৩

ঘ. ‘m' এর মান কত হরে, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ভেক্টর একই তলের উপর অবস্থিত হবে, বিশে-ষণ কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ দুটি ভেক্টর রাশির যে গুণনে স্কেলার রাশি পাওয়া যায় বা, ভেক্টরদ্বয়ের মান ও তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের cosine এর গুণফলকে ডট গুণন বলে।

ব্যাখ্যা ঃ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta = AB\cos\theta$ (যখন $0 \le \theta \le \pi$)

কিন্তু B cos θ হচ্ছে $\vec{B}$ এর দিকে $\vec{A}$ এর উপাংশ বা $\vec{B}$ এর ওপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ আবার A cos θ ও হচ্ছে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ। সুতরাং স্কেলার বা ডট গুণন বলতে যে কোন একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝি।

গ $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে যদি $\vec{\Delta}.\vec{V} = 0$ হয়।

$\vec{V} = (x + 3y)\,\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\,\hat{k}$

$\vec{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$\therefore \vec{\Delta}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}\}$

বা, $a = -5$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ একই তলে অবস্থিত হলে, $\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$

বা, $\begin{bmatrix} m & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = 0$

বা, $m(-10 + 12) - 1(15 - 4) + (-1)(-9 + 2) = 0$

বা, $2m = 4$

বা, $m = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৪ নাসা তাদের গ্লোবাল পজিশনিং সিস্টেম (G P S) স্যাটেলাইটের মাধ্যমে পৃথিবীতে (1, 2, 2) অবস্থানে একটি স্থির বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করল। কিছুক্ষণ পর বস্তুটি গতিশীল হওয়া শুরু করল এবং গতি শুরু করার 5th এবং 17th সেকেন্ডে একে (4, 4, 2) এবং (11, 8, 6) অবস্থানে পাওয়া গেল। *[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]*

ক. ঋণাত্মক ভেক্টর কী? ১

খ. নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে রশির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির ফলে নৌকার বেগের তারতম্য ব্যাখ্যা কর। ২

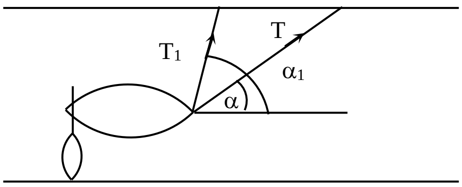
গ. গতির শুরুর 5 sec পর উদ্দীপকের বস্তুটির সরণের উপাংশগুলি চিহ্নিত কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে উল্লিখিত বস্তুটি শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত একই মানের ত্বরণে গতিশীল ছিল কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যাচাই কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরকে ঋণাত্মক ভেক্টর বলে।

খ নদীর দৈর্ঘ্য বরাবর টানের উপাংশ = $T\cos\alpha$ নির্দিষ্ট মানের টানের (T) জন্য α এর মান যত কম হবে নৌকাটি তত দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। α-এর মান বেশি হবে যদি রশির দৈর্ঘ্য কম হয়। সুতরাং নৌকার গুণ টানার ক্ষেত্রে রশির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির ফলে নৌকার বেগ বেশি হবে।



গ দেওয়া আছে, আদি অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

5 sec অন্তে অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_2} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

বের করতে হবে, 5 sec অন্তে সরণের উপাংশগুলি অর্থাৎ, $r_x = ?$, $r_y = ?$

$r_z = ?$

সুতরাং নির্ণেয় উপাংশগুলি, $r_x = 3$, $r_y = 2$, $r_z = 0$ **(Ans.)**

ঘ প্রথম 5 sec এ সরণের মান, $s = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3.606$ m

প্রথম 17 sec-এ সরণ, $\Delta\vec{r} = \vec{r_3} - \vec{r_1}$

$$= 11 \quad + 8\hat{j} + 6\hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

এ সরণের মান, $s' = \sqrt{10^2 + 6^2 + 4^2} = 12.33$ m

প্রথম 5 sec-এ ত্বরণের মান a হলে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$ [∵ u = 0]

$$\therefore a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 3.606\text{m}}{(5\text{ sec})^2} = 0.2885\text{ ms}^{-2}$$

প্রথম থেকে শুরু করে 17th sec পর্যন্ত একই ত্বরণ থাকলে এই সময়কালে সরণ হওয়ার কথা, $s'' = ut + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$

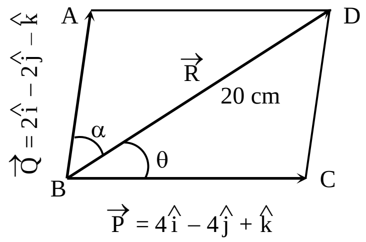
$$= \frac{1}{2} \times 0.2885 \times 17^2$$

$$= 41.7\text{ m}$$

কিন্তু প্রথম 17 sec-এর প্রাপ্ত সরণ মাত্র 12.33 m

সুতরাং উদ্দীপকে উল্লিখিত বস্তুটি শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত একই মানের ত্বরণে গতিশীল ছিল না।

প্রশ্ন ▶১৫



ABCD সামান্তরিকের BC এবং BA বাহু বরাবর যথাক্রমে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি ক্রিয়াশীল। *[বগুড়া ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, বগুড়া]*

ক. ভার্নিয়ার ধ্রুবক কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে উল্লিখিত ভেক্টর দুটির লব্ধি $\vec{R} = 2\hat{i} + m\hat{j} - 3\hat{k}$ এর সহিত লম্ব হলে m এর মান কত হবে নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক স্লাইড ক্যালিপার্সের ক্ষেত্রে ভার্নিয়ার স্কেলের একভাগ মূল স্কেলের ক্ষুদ্রতম একভাগের চেয়ে যতটুকু ছোট, তাকে ভার্নিয়ার ধ্রুবক বলে।

খ P ও Q দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধির মান

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$; R এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos\alpha$ = সর্বোচ্চ = 1 হয়, তাহলে $R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ.1} = \sqrt{(P + Q)^2}$

$$= P + Q$$

সুতরাং দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চমান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফলের সমান।

গ দেওয়া আছে, $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ বের করতে হবে, ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ?

এখানে, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 6\hat{i} + 6\hat{j}$$

যেহেতু $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় সামান্তরিকের সন্নিহিত দুটি বাহু প্রকাশ করে।

$\therefore$ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{6^2 + 6^2}$

$= 6\sqrt{2}$ বর্গ একক **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপকে উলে-খিত ভেক্টর দুটির লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

$= 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k} + 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} = 6\hat{i} - 6\hat{j}$

আবার, প্রদত্ত উপাত্তমতে, $\vec{R}' = 2\hat{i} + m\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{R}'$ ও $\vec{R}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে, $\vec{R}.\vec{R}' = 0$

বা, $6 \times 2 + (-6) \times m + 0 \times (-3) = 0$

বা, $12 - 6m = 0$

বা, $6m = 12$

$\therefore$ $m = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶১৬ দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর স্কেলার গুণফল 9 এবং ভেক্টর গুণফলের মান $3\sqrt{3}$ *[রংপুর সরকারি কলেজ, রংপুর]*

ক. অবস্থান ভেক্টর কী? ১

খ. কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কাজ হয়না কেন? ব্যাখ্যা দাও। ২

গ. উদ্দীপকে উলে-খিত ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? ৩

ঘ. উদ্দীপকের তথ্য হতে ভেক্টরদ্বয়ের মান পাওয়া সম্ভব কিনা যাচাই কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ কোনো বস্তু যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন এর ওপর কেন্দ্রমুখী বল প্রযুক্ত হয়। প্রতিটি ক্ষুদ্র মুহূর্তে বস্তুটির যে ক্ষুদ্র সরণ ($d\vec{s}$) হয় ঐ সরণ এবং কেন্দ্রমুখী বলের ($\vec{F_c}$) মধ্যকার কোণ, $\theta = 90°$ ফলে প্রতিটি ক্ষুদ্রাতি ক্ষুদ্র সরণে কৃতকাজ, $dw = \vec{F_c}.\,d\vec{s} = F_c ds \cos 90° = 0$ একারণেই বস্তুটি যতই ঘুরতে থাকুক না কেন, কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কোনো কাজ হয় না।

গ মনে করি, ভেক্টরদ্বয়ের মান P ও Q এবং এদের মধ্যকার কোণ θ তাহলে, এদের স্কেলার গুণফল $= PQ\cos\theta = 9$ .... (i)

এবং ভেক্টর গুণফল $= PQ\sin\theta = 3\sqrt{3}$ .... (ii)

(ii) ÷ (i) হতে, $\dfrac{PQ\sin\theta}{PQ\cos\theta} = \dfrac{3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

ঘ (গ) হতে, $(i)^2 + (ii)^2$ করে পাওয়া যায়, $P^2Q^2\cos^2\theta + P^2Q^2\sin^2\theta = 9^2 + (3\sqrt{3})^2 = 81 + 27 = 108$

বা, $P^2Q^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 108$

বা, $P^2Q^2 \times 1 = 108$

$\therefore PQ = \sqrt{108} = 10.39$

ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ 30°এবং এদের মানের গুণফল 10.39 এক্ষেত্রে, P ও Q এর বহুসংখ্যক মান পাওয়া সম্ভব।

যেমন, P = 1 হলে, $Q = \dfrac{10.39}{1} = 10.39$

P = 2 হলে, $Q = \dfrac{10.39}{2} = 5.195$

এভাবে (P, Q) ক্রমজোড়ের মান হিসেবে বহুসংখ্যক, বস্তুত অসীমসংখ্যক ক্রমজোড় পাওয়া সম্ভব।

সুতরাং উদ্দীপকের তথ্য হতে ভেক্টরদ্বয়ের মান পাওয়া সম্ভবপর নয়।

প্রশ্ন ▶১৭ দুটি ভেক্টর, $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

[পলী- উন্নয়ন একাডেমী ল্যাব: স্কুল এন্ড কলেজ, বগুড়া]

ক. প্রাস কি? ১

খ. শব্দের তীব্রতা লেভেল ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয় ভেক্টরগুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে কিনা-গাণিতিক বিশে-ষণের মাধ্যমে আলোচনা কর। ৪

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক অনুভূমিকের সাথে 90° ভিন্ন অপর কোনো কোণে কোনো বস্তুকে নিক্ষেপ করা হলে এটি যদি অভিকর্ষের প্রভাবে মুক্তভাবে চলতে পারে তবে বস্তুটিকে প্রাস বলে।

খ কোনো শব্দের তীব্রতা ও প্রমাণ তীব্রতার অনুপাতের লগারিদমকে ঐ শব্দের তীব্রতা লেভেল বলে। কোনো শব্দের তীব্রতা I এবং প্রমাণ তীব্রতা I_0 হলে ঐ শব্দের তীব্রতা লেভেল, $\beta = \log\dfrac{I}{I_0}$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায়, $I = 10\,I_0$ হলে,

তীব্রতা লেভেল, $\beta = \log\dfrac{10I_0}{I_0} = \log 10 = 1$ একক হয়।

তীব্রতা লেভেলের এই একককে বেল (B) বলা হয়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

বের করতে হবে, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \cos{-1}\dfrac{3\times1 + 2\times2 + 1\times(-3)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}$

$= \cos^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = 73.4°$ **(Ans.)**

ঘ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

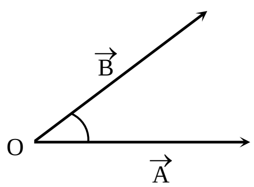
$= 8\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k}$

$= -(-8\hat{i} + 10\hat{j} + 4\hat{k}) = -\vec{A} \times \vec{B}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

সুতরাং উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয় ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

প্রশ্ন ▶১৮



চিত্রে $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = 15\hat{i} - m\hat{j} - 9\hat{k}$ পরস্পর α কোণে ক্রিয়াশীল। *[সরকারি মহিলা কলেজ, পাবনা]*

ক. ডাইভারজেন্স কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর দুটির লব্ধি যে সূত্রের সাহায্যে বের করা যায় তা বিবৃত কর। ২

গ. m এর মান কত হলে উদ্দীপকের ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে, তা গাণিতিকভাবে দেখাও। ৩

ঘ. m এর মান কত হলে উদ্দীপকের ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্ড়রাল হবে বলে তুমি মনে কর তা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরক্ষেত্র $\vec{V}(x, y, z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ যদি একটি অন্ড়রীকরণযোগ্য রাশি হয় তাহলে $\vec{\Delta}.\vec{V}$ কে $\vec{V}$ এর ডাইভারজেন্স বলে।

খ চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধি সামান্ড়রিক সূত্রের সাহায্যে বের করা যায়। সূত্রটি হল : "যদি সামান্ড়রিক কোন কৌণিক বিন্দুতে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহুদ্বারা একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা হয় তবে, ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্ড়রিকের কর্ণ এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।"

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$$\vec{B} = 15\hat{i} - m\hat{j} - 9\hat{k}$$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফল শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $\vec{A}.\vec{B} = 0$

বা, $(5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}).(15\hat{i} - m\hat{j} - 9\hat{k}) = 0$

বা, $75 - 2m + 27 = 0$

বা, $2m = 102$

$\therefore\ m = 51$

সুতরাং m এর মান 51 হলে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

ঘ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$$\vec{B} = 15\hat{i} - m\hat{j} - 9\hat{k}$$

আমরা জানি, দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্ড়রাল হলে এদের ক্রস গুণফল শূন্য হয়।

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 15 & -m & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-18 - 3m) - \hat{j}(-45 + 45) + \hat{k}(-5m - 30)$$

$$= \hat{i}(-18 - 3m) + \hat{k}(-5m - 30)$$

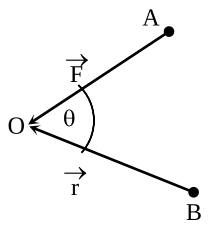
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্ড়রাল হলে, $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

বা, $3m = -18$

$\therefore m = -6$

অর্থাৎ m এর মান –6 হলে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্ড়রাল হবে।

প্রশ্ন ▶১৯



B বিন্দুর সাপেক্ষে O বিন্দুতে অবস্থিত কোন বস্তুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m এবং জড়তার ভ্রামক $3kgm^2$; বস্তুটির উপর AO বরাবর $\vec{F} = (\hat{i} + 5\hat{j})$ N বল প্রয়োগ করায় এটি একটি কৌণিক ত্বরণ প্রাপ্ত হয়। *[সরকারি পাইওনিয়ার মহিলা কলেজ, খুলনা]*

ক. অনুনাদ কাকে বলে? ১

খ. আপেক্ষিক আর্দ্রতা বেশি হলে অস্বস্ড়ি বৃদ্ধি পায় কেন? ২

গ. উদ্দীপক অনুসারে θ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কৌণিক ত্বরণের মান নির্ণয় করে এটি সৃষ্টির কারণ গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন বস্তুর নিজস্ব কম্পাঙ্ক আর তার ওপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্ড়ার সহকারে কম্পিত হতে থাকে, এই ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

খ আপেক্ষিক আর্দ্রতা বেশি হওয়া বলতে বোঝায় বাতাসে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বেশি থাকা। জলীয় বাষ্পের চেয়ে শরীরের তাপমাত্রা কম হওয়ায় ঘামের সৃষ্টি হয়। ঘাম হলে শরীরে অস্বস্ড়িবোধ লাগে। আপেক্ষিক আর্দ্রতা যত বেশি জলীয় বাষ্পের পরিমাণ তত বেশি এবং ঘামের শুকানোর পরিমান তত কম এবং অস্বস্ড়িবোধ ও বেশি লাগে।

গ এখানে, অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$

বল, $\vec{F} = (\hat{i} + 5\hat{j})$ N

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{r}.\vec{F} = rF\cos\theta$

$$\text{বা, } \cos\theta = \frac{\vec{r}.\vec{F}}{rF}$$

$$= \frac{(2\hat{i} - 3\hat{j}).(\hat{i} + 5\hat{j})}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}\sqrt{1^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{2 - 15}{\sqrt{13}\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-13}{\sqrt{13}\sqrt{2 \times 13}}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135° \textbf{ (Ans.)}$$

ঘ এখানে, $\vec{r} = (2\hat{i} - 3\hat{j})$ m

$\vec{F} = (\hat{i} + 5\hat{j})$ N

$\vec{\tau} = ?$

$\alpha = ?$

জড়তার ভ্রামক, $I = 3\ kgm^{-2}$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \times 0 - \hat{j} \times 0 + \hat{k}(10 + 3) = 13\hat{k}$$

আবার, $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

বা, $13\hat{k} = 3\vec{\alpha}$

$\therefore \vec{\alpha} = \dfrac{13\hat{k}}{3}\ ms^{-2}$

এখানে বল F, B বিন্দু থেকে দূরে O বিন্দুতে 135° কোণে ক্রিয়া করায় B বিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক পাওয়া যাবে যা বস্তুটিকে ঘুরতে সাহায্য করবে ফলে কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হবে।

প্রশ্ন ▶২০ রূপসা নদীতে স্রোত $3kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত হচ্ছে। তন্ময় মাঝি স্রোতের সাথে 30° কোণ করে $4kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালাচ্ছে। নদীটি 2km চওড়া। *[খুলনা পাবলিক কলেজ, খুলনা]*

ক. সংনম্যতা কাকে বলে? ১

খ. গড়বেগ থেকে কিভাবে তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞা দেওয়া যায়। ২

গ. নদীটি সোজাসুজি পার হতে তন্ময়ের কত সময় লাগবে? ৩

ঘ. তন্ময় যদি নৌকাটি স্রোতের সমান্তরালে চালনা করে তবে নদী পার হতে পারবে কিনা গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক আয়তন গুণাঙ্কের বিপরীত রাশিকে সংনম্যতা বলে। অর্থাৎ আয়তন বিকৃতি ও আয়তন পীড়নের অনুপাতকে সংনম্যতা বলে।

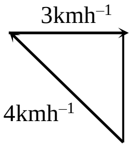
খ গড়বেগের সংজ্ঞানুসারে, $\vec{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\text{সরণের পার্থক্য}}{\text{সময় ব্যবধান}}$

কিন্তু তাৎক্ষণিক বেগ, $v = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt}$

সুতরাং সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড়বেগের সীমান্তিক মানকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

গ দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ, $v = 3\ kmh^{-1}$

নৌকার প্রকৃত বেগ, $u = 4\ kmh^{-1}$



নদীটি সোজাসুজি পার হতে হলে নৌকার লব্ধিবেগ হবে $= \sqrt{u^2 - v^2}$

$= \sqrt{4^2 - 3^2}\ kmhr^{-1} = 2.646\ kmh^{-1}$

যেহেতু নদীটি 2 km চওড়া, সুতরাং নদীটি সোজাসুজি পার হতে তন্ময়ের নৌকাটির সময় লাগবে $= \dfrac{2km}{2.646\ kmh^{-1}} = 45$ min 21 sec **(Ans.)**

ঘ এখানে, নৌকার বেগ,$u = 4kmh^{-1}$ তন্ময় যদি নৌকাটি স্রোতের সমান্তরালে চালনা করে, তবে নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ 0

নদী পার হতে নদীর প্রস্থ বরাবর উপাংশ সহায়তা করে। যেহেতু এক্ষেত্রে নদীর প্রস্থ বরাবর উপাংশ শূন্য। তাই তন্ময় যদি নৌকাটি স্রোতের সমান্তরালে চালনা করে, তবে নদী পার হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶২১ $\vec{A} = 2\hat{j} + 5\hat{i}$ ও $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ একটি সামন্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে। *[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, জাহানাবাদ, খুলনা]*

ক. $\dfrac{dy}{dx}$ এর অর্থ কি? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের মধ্যে তফাৎ কী? ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধির বিপ্রতীপ ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. ক্ষেত্রফল একটি ভেক্টর রাশি– উদ্দীপকের আলোকে এর যৌক্তিকতা মূল্যায়ন কর। ৪

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\dfrac{dy}{dx}$ এর অর্থ হলো x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরক সহগ।

খ অবস্থান ভেক্টর ও ব্যাসার্ধ ভেক্টরের মধ্যে তফাৎ হলো, চলন গতির (সরল ও বক্র) ক্ষেত্রে অবস্থান ভেক্টর বিবেচনা করা হয়, ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বিবেচনা করা হয়।

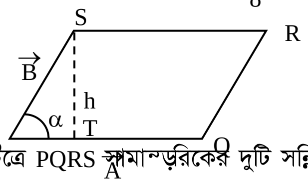
গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{j} + 5\hat{i}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$

ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $= \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{j} + 5\hat{i} + 3\hat{i} - 2\hat{j} = 8\hat{i}$

আমরা জানি, দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধির বিপ্রতীপ ভেক্টর $= \dfrac{1}{8}\hat{i}$

ঘ



মনে করি, চিত্রে PQRS সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু PQ ও PS যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা মানে ও দিকে প্রকাশ করা হয়।

S হতে PQ -এর ওপর ST = h লম্ব টানি।

তাহলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

$= PQ \times h$

$= PQ \times SP \times \sin\theta$

প্রশ্ন ▶২২

[সরকারি সুন্দরবন আদর্শ কলেজ, খুলনা]

ক. কার্ল কী? ১

খ. দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুনন ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে– গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ দুটি ভেক্টরের মান ও তাদের মধ্যবর্তী ক্ষুদ্রতর কোণের cosine এর গুণফলকে স্কেলার গুণফল বলে। এক্ষেত্রে গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দু'টি ভেক্টর রাশির মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, সংজ্ঞানুসারে স্কেলার গুণফল।

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta = AB\cos\theta$ (যখন $0 \le \theta \le \pi$)

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\{3 \times (-1) - (-1) \times 2\} - \hat{j}\{(-2) \times (-1)$

$- (-1) \times (-3)\} + \hat{k}\{(-2) \times 2 - 3 \times (-3)\}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{1 + 1 + 25}$

$= \sqrt{27}$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore |\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$\therefore |\vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

এখন, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α

মনে করি, এদের লব্ধি $\vec{R}$, $\vec{A}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore \tan\theta = \dfrac{B \sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$

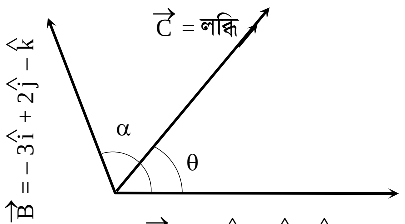
কিন্তু, $|\vec{A}| = |\vec{B}|$

$\therefore \tan\theta = \tan {}^{\alpha}/_{2}$

$\therefore \theta = {}^{\alpha}/_{2}$

$\therefore$ লব্ধি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α কে সমদ্বিখন্ডিত করে

প্রশ্ন ▶২৩



[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল এন্ড কলেজ, খুলনা]

ক. ডাইভারজেন্স কী? ১

খ. অনুকল্পও তত্ত্ব বলতে কী বুঝ? ২

গ. $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের সাথে $\vec{A}$ ও $\vec{C}$ এর মধ্যবর্তী কোণের সম্পর্ক গাণিতিক ভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন একটি ভেক্টর $\vec{V}$ যদি অন্তর্রীকরণ যোগ হয় তবে $\vec{V}$ এবং $\vec{V}$এর ডট গুণন কে $(\vec{\nabla}.\vec{V})$ ডাইভারজেন্স div $\vec{V}$ বলা হয়।

খ অনুকল্প : অনুকল্প হলো এমন ব্যাখ্যা বা সূত্র বা তত্ত্ব যা এখনো সঠিক বলে প্রমাণিত হয়নি। কোনো কিছু সম্পর্কে অনুসন্ধানের যে অনুমিত সিদ্ধান্ত নেয়া হয় তাকে অনুকল্প বলে।
তত্ত্ব ঃ প্রকল্প ও প্রচলিত প্রাকৃতিক নিয়মের সমন্বয়ে গৃহীত বৈজ্ঞানিক সিদ্ধান্তকে তত্ত্ব বলে।

গ এখানে, $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$

ঘ দেয়া আছে, $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore A = |\vec{A}|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$\therefore B = |\vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

অর্থাৎ A = B .... (i)

আবার, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং $\vec{A}$ ও লব্ধি $\vec{C}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore \tan\theta = \dfrac{A \sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$

$= \dfrac{A \sin\alpha}{A + A\cos\alpha}$ [(i) হতে]

বা, $\tan\theta = \tan {}^{\alpha}/_{2}$

$\therefore \theta = {}^{\alpha}/_{2}$

অর্থাৎ লব্ধি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

প্রশ্ন ▶২৪ $\vec{V} = (6x^2y - z^3x)\,\hat{i} + 2x^3\,\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]

ক. স্বীকার্য কী? ১

খ. দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফল অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না কেন? ২

গ. ভেক্টর ক্ষেত্রটির ডাইভারজেন্স কত? ৩

ঘ. ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল কী– না গাণিতিক যুক্তি দাও। ৪

২৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব একটি সার্বিক বিবৃতির মাধ্যমে স্বীকার করে নিলে তাকে স্বীকার্য বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর হলে, এদের লব্ধি,

$|\vec{R}| = R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$ যেখানে α ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ।

লব্ধি R এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

আমরা জানি, $\cos\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান 1

$\therefore R_{max} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.1}$

$= \sqrt{(A + B)^2}$

$\therefore R_{max} = A + B$

এখন, যেহেতু $\cos\alpha$ এর মান 1 এর থেকে বেশি হওয়া সম্ভব নয়। তাই R এর সর্বোচ্চ মান ও (A + B) এর চেয়ে বেশি হওয়া সম্ভব নয়।

গ এখানে, $\vec{V} = (6x^2y - z^3x)\,\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2k$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

এখন, ক্ষেত্রটির ডাইভারজেন্স $= \vec{\nabla}.\vec{V}$

$= \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\{(6x^2y - z^3x)\,\hat{i} + 2x^3\,\hat{j} - 3xz^2\,\hat{k}\}$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(6x^2y - z^3x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^3) + \dfrac{\partial}{\partial z}(xz^2)$

$= 12xy - z^3 + 0 + 2xz$

$= 12xy + 2xz - z^3$ **(Ans.)**

ঘ আমরা জানি, ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল হবে যদি ভেক্টর ক্ষেত্রটির কার্ল শূন্য হয়।

এখানে, $\vec{V} = (6x^2y - z^3x)\,\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

এবং $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$\therefore$ Curl $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6x^2y - z^3x) & 2x^3 & -3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y - z^3x)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3x)\right\}$$

$$= \hat{i}\,(0-0) - \hat{j}\,(-3z^2 + 3z^2x) + \hat{k}\,(6x^2 - 6x^2)$$

$$= -\hat{j}\,(3z^2x - 3z^2)$$

□ curl $\vec{V} \neq 0$

$\therefore$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল নয়।

প্রশ্ন ▶২৫ দুইজন ব্যক্তি যথাক্রমে 20N ও 25N বল প্রয়োগ করতে পারে। তারা একত্রে যথাক্রমে 60° ও 50° কোণে গুণ টেনে একটি নৌকাকে স্রোতের বিপরীতে নিয়ে যাচ্ছে।

[ডা: আব্দুর রাজ্জাক মিউনিসিপ্যাল কলেজ, যশোর]

ক. তাৎক্ষণিক ত্বরণ কী? ১

খ. সকল তত্ত্বই অনুকল্প কিন্তু অনুকল্পই তত্ত্ব নয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের ব্যক্তিদ্বয় 45 kg ভরের কোন স্থির বস্তুতে পরস্পর 45° কোণে একই সাথে বল প্রয়োগ করলে 5 সেকেন্ড সময়ে বস্তুটি কত দূর অতিক্রম করবে? ৩

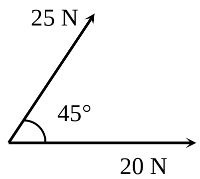
ঘ. হঠাৎ প্রথম ব্যক্তির গুণ ছিড়ে গেলে দ্বিতীয় ব্যক্তি কী ব্যবস্থা গ্রহণ করলে নৌকার গতি ঠিক রাখতে পারবে তা বিশে-ষণ কর। ৪

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক তাৎক্ষণিক ত্বরণ ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

খ বিজ্ঞানীরা কোন বিষয়ে গবেষণা করার পূর্বে অনুমান নির্ভর যে ব্যাখ্যা প্রদান করে থাকেন তাই অনুকল্প। অন্যদিকে গবেষণা নির্ভর ফলাফলের ভিত্তিক্তে যে স্বীকার্য প্রদান করে তাই তত্ত্ব। অনুকল্প সঠিক বা ভুল হতে পারে কিন্তু তত্ত্ব গবেষণা নির্ভর সঠিক তথ্য বলে তা নির্ভুল। অতএব, সকল তত্ত্বই অনুকল্প কিন্তু সকল অনুকল্প তত্ত্ব নয়।

গ



20N এবং 25N এর লব্ধি $R = \sqrt{20^2 + 25^2 + 2\times20\times25\cos 45°}$
$= 41.61$ N

সুতরাং ত্বরণ a হলে, $a = \frac{41.61\text{N}}{45\text{ kg}} = 0.92\text{ ms}^{-2}$

সুতরাং 5 সেকেন্ড পর অতিক্রান্ড় দূরত্ব s হলে, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$= 0 + \frac{1}{2} \times 0.92 \times 5^2$

$s = 23.12$ m **(Ans.)**

ঘ স্রোতের বিপরীতে ব্যক্তিদ্বয়ের বেগের উপাংশের সমষ্টি = 20 cos 60° + 25 cos 50° = 26.06 N

ধরি, প্রথম ব্যক্তির গুণ ছিড়ে গেলে দ্বিতীয় ব্যক্তি F বলে আদি কোণে টানলে নৌকার গতি ঠিক থাকবে।

সুতরাং, F cos 50° = 26.06

বা, $F = \frac{26.06}{\cos 50°} = 40.54$ N

40.54 N বলে 50° কোণে টানতে হবে।

অর্থাৎ ২য় ব্যক্তিকে

প্রশ্ন ▶২৬ একজন মাঝি 6 kmh^{-1} বেগে নৌকা চালাতে পারেন। 3 kmh^{-1} বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে তার যাওয়া প্রয়োজন।

[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টর রাশির সামান্ড্রিকের সূত্রটি ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকে উলে-খিত মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হবে নির্ণয় কর। ৩

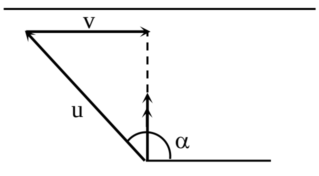
ঘ. উদ্দীপকের মাঝি যদি সোজা নৌকা চালান তাহলে তিনি কেন বিপরীত বিন্দুতে যেতে পারবেন না? যুক্তি দিয়ে বোঝাও। তিনি সোজা নৌকা চালালে কোন দিকে কত বেগে যাবেন? ৪

২৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ সমজাতীয় দুটি ভেক্টর রাশি যোগের সামান্ড্রিক সূত্রটি হলো— যদি একটি সামান্ড্রিকের কোনো কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোনো কণার ওপর এককালীন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা যায়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অংকিত সামান্ড্রিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

গ



দেওয়া আছে, নৌকার বেগ, u = 6 kmh^{-1}
স্রোতের বেগ, v = 3 kmh^{-1}

মনে করি, নদীর এপার থেকে ওপারে ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে, নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে α (>90°) কোণে চালাতে হবে।

তাহলে, $\sin(\alpha - 90°) = \frac{v}{u} = \frac{3\text{kmh}^{-1}}{6\text{ kmh}^{-1}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 90° + 30° = 120°$

সুতরাং উদ্দীপকে উলে-খিত মাঝিকে স্রোতের দিকের সাথে 120° কোণে নৌকা চালাতে হবে।

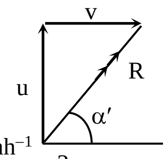
ঘ ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে স্রোতের দিক বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ শূন্য হতে হবে। উদ্দীপকে প্রদত্ত মানসমূহের জন্য স্রোতের দিকের সাথে $\alpha = 120°$ হলে স্রোতের দিক বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ = v cos 0° + u cos 120°

$= 3\text{ kmh}^{-1} \times 1 + 6\text{ kmh}^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

কিন্তু নদীর প্রস্থ বরাবর সোজাসুজি নৌকা চালালে স্রোতের দিক বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ শূন্য হয় না। সেক্ষেত্রে উক্ত উপাংশের মান = v cos 0° + u cos 90° = 3 kmh^{-1} × + 6 kmh^{-1} × 0 = 3 kmh^{-1} ≠ 0

তাই নদী পার হতে t পরিমাণ সময় লাগলে স্রোত বরাবর বা নদীর পাড় বরাবর নৌকাটি তখন $3\ kmh^{-1} \times t$ পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করবে। এতে নৌকাটি ঠিক বিপরীত বিন্দুতে না পৌঁছে বরং পাড় বরাবর বেশ কিছুটা দূরত্ব অতিক্রম করে ওপারে কোনো এক বিন্দুতে পৌছাবে।

তিনি সোজা নৌকা চালালে লব্ধি বেগের মান,



$$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90^\circ}$$
$$= \sqrt{(6\ kmh^{-1})^2 + (3\ kmh^{-1})^2 + 0}$$
$$= 6.71\ kmh^{-1}$$

লব্ধিবেগ স্রোতের দিকের সাথে $\tan\alpha' = \frac{u}{v} = \frac{6\ kmh^{-1}}{3\ kmh^{-1}} = 2$

$\therefore \alpha' = \tan^{-1}(2) = 63.4^\circ$

সুতরাং তিনি সোজা নৌকা চালালে স্রোতের দিকের সাথে 63.4° কোণে $6.71\ kmh^{-1}$ বেগে যাবেন।

প্রশ্ন ▶২৭ সুমন ও পাপন দুই ভাই শপিং মল থেকে বের হয়ে দেখে $4\ ms^{-1}$ বেগে খাড়াভাবে বৃষ্টি পড়ছে। সুমন ছাতা খুলে 3 m/s বেগে বাসার দিকে দৌড়তে শুরু করলো এবং 10 মিনিট পর বাসায় পৌছাল। সে দেখল তার প্যান্ট ও জামা সম্পূর্ণ ভিজে গেছে। কিছুক্ষণ পর পাপন ও একই গতিতে দৌড়ে এসে বাসায় পৌছাল। দেখা গেল পাপনের জামা কাপড় সম্পূর্ণ শুষ্ক আছে।

[বাংলাদেশ মহিলা সমিতি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয় ও কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. লব্ধ একক কি? ১

খ. যন্ত্রের পিছট ত্রুটি বলতে কি বুঝ? ২

গ. শপিং মল থেকে বাসার দূরত্ব কত? ৩

ঘ. সুমনের পোশাক ভেজা ও পাপনের পোশাক না ভেজার কারণ বিশ্লেষণ কর। ৪

২৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে একক একাধিক মৌলিক এককের সমন্বয়ে গঠিত তাকে লব্ধ একক বলে। অর্থাৎ লব্ধ রাশির একককে লব্ধ একক বলে।

খ নাট-স্ক্রু নীতির ওপর ভিত্তি করে যে সকল যন্ত্র তৈরি যেসব যন্ত্রে এ ত্রুটি পরিলক্ষিত হয়। নতুন যন্ত্রের তুলনায় পুরাতন যন্ত্রে এ ত্রুটি বেশি দেখা যায়। কারণ অনেকদিন ব্যবহারের ফলে নাটের গর্ত বড় হয়ে যেতে পারে বা স্ক্রু ক্ষয় হয়ে আলগা হয়ে যায়; ফলে স্ক্রুকে উভয় দিকে ঘুরালে সমান সরণ হয় না। এ ধরনের ত্রুটিকে পিছট ত্রুটি বলে। পাঠ নেওয়ার সময় স্ক্রুকে একই দিকে ঘুরালে এ ত্রুটি দূর হয়।

গ দেওয়া আছে, সুমনের গতিবেগ, $v = 3\ ms^{-1}$

সময়কাল, $t = 10\ min = 10 \times 60\ sec = 600\ sec$

বের করতে হবে, শপিং মল থেকে বাসার দূরত্ব, d = ?

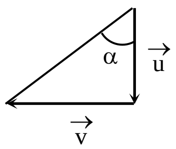
আমরা জানি, $d = vt = 3\ ms^{-1} \times 600\ sec = 1800\ m$

ঘ কোনো ব্যক্তি $3\ ms^{-1}$ বেগে দৌড়ালে তার চারপাশের সবকিছুর মধ্যে এমনকি বৃষ্টির ফোঁটার মধ্যেও পেছন দিকে $3\ ms^{-1}$ মানের একটি বেগ লক্ষ্য করবেন। ধরি, এই আপেক্ষিক বেগ, $v = 3\ ms^{-1}$

তদুপরি, বৃষ্টির ফোঁটার প্রকৃত (উল-ম্ব) বেগ, $u = 4\ ms^{-1}$ তাহলে সুমন বা পাপনের সাপেক্ষে বৃষ্টির ফোঁটার লব্ধিবেগ হলো $\vec{u}$ এবং $\vec{v}$ এর লব্ধিবেগ।

উক্ত লব্ধিবেগ, উল-ম্বের সাথে α কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$ অর্থাৎ, $$\alpha = \tan^{-1}\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \tan^{-1}\left(\frac{3\ ms^{-1}}{4\ ms^{-1}}\right) = 36.9^\circ$$



সুতরাং বৃষ্টিতে ভেজার হাত হতে রেহাই পেতে চাইলে ছাতাকে উল-ম্বের সাথে 36.9° কোণে ধরতে হবে। পাপন এ কাজটিই করেছিল, তাই সে বৃষ্টিতে ভেজে নি। কিন্তু সুমন এরূপে ছাতা ধরে নি বরং সে মাথার ওপর খাড়াভাবে ছাতা ধরে দৌড়েছে, তাই বৃষ্টির ঝাপটা তীর্যকভাবে এসে তাকে ভিজিয়ে দিয়েছে।

প্রশ্ন ▶২৮ স্বপন সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য ফেরিতে করে 15 km/h বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। স্রোতের বেগ 10 km/h^{-1} *[সরকারি হাজী মুহাম্মদ মুহসীন কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. অন্তরীকরণ কাকে বলে? ১

খ. অপারেটর কাকে বলে? এর ব্যবহার কি? ২

গ. লব্ধির সর্বোচ্চ মান, সর্বনিম্ন মানের কতগুণ হবে? ৩

ঘ. ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে প্রক্রিয়ায় কোনো একটি রাশির পরিবর্তনের হার নির্দিষ্ট একটি চলকের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয় তাকে অন্তরীকরণ বলে।

খ যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে। সুতরাং অপারেটরের ব্যবহার হলো—

১. একটি গাণিতিক রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তর।

২. কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া।

গ দেওয়া আছে, ফেরির বেগ, $u = 15\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগ, $v = 10\ kmh^{-1}$

সুতরাং লব্ধিবেগের সর্বোচ্চ মান $= u + v = 15 + 10 = 25\ kmh^{-1}$

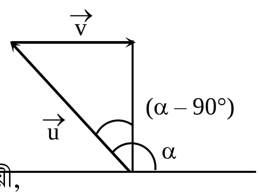
এবং সর্বনিম্ন মান $= u - v = 15 - 10 = 5\ kmh^{-1}$

এখানে, $$\frac{\text{লব্ধিবেগের সর্বোচ্চ মান}}{\text{লব্ধিবেগের সর্বনিম্ন মান}} = \frac{25\ kmh^{-1}}{5\ kmh^{-1}} = 5 \text{ গুণ (Ans.)}$$

ঘ নদীর প্রস্থ বরাবর সোজাসুজি রওয়ানা হলে স্রোতের ধাক্কায় স্রোতের দিক বরাবর (নদীর তীর বরাবর) কিছুটা দূরত্ব অতিক্রম করবে। তখন অপর পাড়ে পৌঁছানো সম্ভব হবে না।

তাই সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে গেলেই ফেরিটি ঠিক অপরপাড়ে পৌছতে পারবে।

মনে করি, এক্ষেত্রে স্রোতের দিকের সাথে α (>90°) কোণে ফেরিটি রওয়ানা দিবে। ফলে লব্ধিবেগের দিক হবে নদীর প্রস্থ বরাবর।



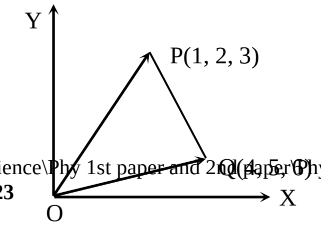
তাহলে চিত্রানুযায়ী,

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{10\ kmh^{-1}}{15\ kmh^{-1}} = \frac{2}{3}$$

বা, $-\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$

সুতরাং গাণিতিক বিশ্লেষণে দেখা যাচ্ছে, (নদীর প্রস্থ বরাবর সোজাসুজি নয় বরং) স্রোতের দিকের সাথে 131.8° কোণে রওনা দিলেই ফেরিটি সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌঁছতে পারবে।

প্রশ্ন ▶২৯



$\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ অবস্থান ভেক্টর হলে নিম্নে প্রশ্নের উত্তর দাও :

[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. অবস্থান ভেক্টর কি? ১

খ. ভেক্টরের ক্রস গুণনের তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\overrightarrow{PQ}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নিরূপন কর। ৩

ঘ. ΔOPQ-এর ক্ষেত্রফল নিরূপণ সম্ভব কী? গাণিতিক ভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ দুটি ভেক্টরের ক্রসগুণন তৃতীয় আরেকটি ভেক্টর হয়। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ সমজাতীয় বা অসমজাতীয় ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন হলো $= \vec{P}\times\vec{Q}$; $\vec{P}, \vec{Q}$ যে তলে অবস্থান করে তার লম্বদিকে $\vec{P}\times\vec{Q}$ এর অভিমুখ। ব্যাসার্ধ $\vec{P}, \vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের ভেক্টর গুণফল শূন্য। ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং বলের ভেক্টর গুণফল হলো টর্ক; কৌণিক বেগ ভেক্টর এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল হলো রৈখিক বেগ ভেক্টর। ভেক্টর গুণফলের মান রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকের মান এবং এদের মধ্যকার কোণের সাইনের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\vec{P}\times\vec{Q}$ $= PQ\sin\alpha\,\hat{\eta}$

গ দেওয়া আছে, P (1, 2, 3) এবং Q (4, 5, 6)

$\therefore \overrightarrow{PQ} = (4-1)\hat{i} + (5-2)\hat{j} + (6-3)\hat{k} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}$ এর সমান্তরালে একক ভেক্টর - $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \dfrac{3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{3^2+3^2+3^2}}$

$$= \frac{3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\text{(Ans.)}$$

ঘ ΔOPQ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{PQ}|$

এখানে, $\overrightarrow{PQ} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{9+36+9} = \frac{1}{2}\sqrt{6\times 9}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{6} \text{ বর্গ একক।}$$

সুতরাং ΔOPQ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব।

প্রশ্ন ▶৩০ হাসান কলেজ থেকে এসে ভেক্টর নিয়ে তার পড়ার টেবিলে বসে পড়ছিল। তার রুমে দুটি সিলিং ফ্যান ঘুরছিল। সে চিন্তা করতে লাগলো ভেক্টরের সাহায্যে ফ্যান দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কিভাবে নির্ণয় করা যায়? সে জেনে নিল ফ্যান দুটির স্থানাংক যথাক্রমে (2, 3, 4) এবং (4, 5, 6) *[সরকারি হাজী মুহাম্মদ মহসীন কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. অপারেটর কাকে বলে? ১

খ. বৈদ্যুতিক সিলিং ফ্যানের বাতাস কেন নিচের দিকে অনুভূত হয়? ২

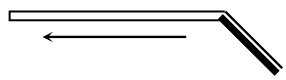
গ. উদ্দীপকটি অনুসারে ফ্যান দুটি মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. হাসান ফ্যানদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে উদ্দীপক অনুসারে সক্ষম হবে কিনা– গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

৩০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

খ বৈদ্যুতিক সিলিং ফ্যানে তিনটি বা চারটি পাখা থাকে। প্রতিটি পাখার একটি অংশ সামান্য ভাঁজ করা থাকে। (চিত্রের মতো)। ফ্যানটি এমনভাবে ঘুরে যাতে নিচের দিকে কোনাকুনি ভাঁজ করা অংশটি সম্মুখ দিকে অগ্রসর হওয়ার সময় বাতাসকে সজোরে নিচের দিকে ধাক্কা দেয়। একারণে বৈদ্যুতিক সিলিং ফ্যানের বাতাস নিচের দিকে অনুভূত হয়।



গ দেওয়া আছে, প্রথম ফ্যানের অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

দ্বিতীয় ফ্যানের অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r_2} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

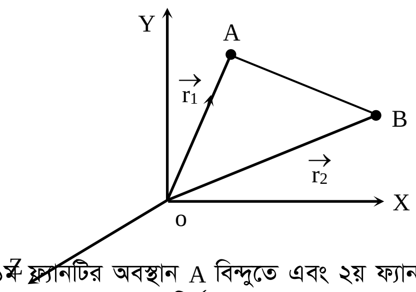
বের করতে হবে, এদের মধ্যকার কোণ, $\alpha = ?$

আমরা জানি, $\vec{r_1}.\vec{r_2} = r_1r_2\cos\alpha$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{\vec{r_1}.\vec{r_2}}{r_1r_2} = \frac{2\times4+3\times5+4\times6}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{4^2+5^2+6^2}} = 0.9946$$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}(0.9946) = 5.95°$ (Ans.)

ঘ



ধরি, ১ম ফ্যানটির অবস্থান A বিন্দুতে এবং ২য় ফ্যানটির অবস্থান B বিন্দুতে তাহলে AB দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত স্থানাংক ব্যবস্থামতে, $\overrightarrow{OA} = \vec{r_1}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{r_2}$

বলের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\vec{r_1} + \overrightarrow{AB} = \vec{r_2}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore AB = \sqrt{2^2+2^2+2^2} = \sqrt{3\times2^2} = 2\sqrt{3}$ একক

সুতরাং হাসান ফ্যানদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে সক্ষম হবে, যার মান $2\sqrt{3}$ একক।

প্রশ্ন ▶৩১ $\varphi = 3x^3y^2z^4$ এবং $\vec{B} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

[চট্টগ্রাম বিজ্ঞান কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ভেক্টর বিভাজন কী? ১

খ. একটি লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ"– ব্যাখ্যা কর। ২

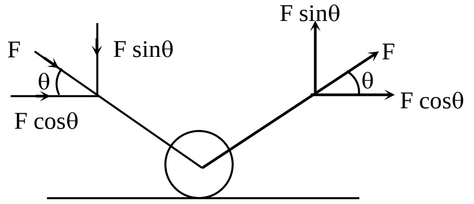
গ. উদ্দীপক অনুযায়ী div grad φ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. (–2, 3, 2) বিন্দুতে curl $\vec{B}$ এর মান গাণিতিক বিশে-ষণের মাধ্যমে হিসাব কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টর রাশিকে একাধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টর বিভাজন বলে।

খ



লন রোলার ঠেলার সময় প্রযুক্ত বলের উলম্ব উপাংশ লম্ব বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে রোলারটির লব্ধি ওজন বেড়ে যায়। অপরদিকে লন রোলার টানার সময় প্রযুক্ত বলের উলম্ব উপাংশ উপরের লম্ব বরাবর উপরের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে এর লব্ধি ওজন কমে যায়। এজন্য লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ হয়।

গ দেওয়া আছে, $\varphi = 3x^3y^2z^4$

$\therefore$ grad $\varphi = \hat{i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$

বা, grad $\varphi = \hat{i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(3x^3y^2z^4) + \hat{j}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(3x^3y^2z^4) + \hat{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(3x^3y^2z^4)$

বা, grad $\varphi = 9x^2y^2z^4\,\hat{i} + 6x^3yz^4\,\hat{j} + 12\,x^3y^2z^3\,\hat{k}$

আবার, div(grad φ) $= \dfrac{\partial}{\partial x}(9x^2y^2z^4) + \dfrac{\partial}{\partial y}(6x^3yz^4) + \dfrac{\partial}{\partial z}(12x^3y^2z^3)$

$\therefore$ div (grad φ) $= 18xy^2z^4 + 6x^3z^4 + 36x^3y^2z^2$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, $\vec{B} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

$\therefore$ $\vec{B}$ এর কার্ল $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \left\{\dfrac{\partial}{\partial y}(2yz) - \dfrac{\partial}{\partial z}(-2xz)\right\}\hat{i} +$

$\therefore$ (–2, 3, 2) বিন্দুতে $\vec{B}$ এর কার্ল $= \{2\times(-2) + 2\times 2\}\hat{i} + \{(-2)\times 2 - (-2)^2\}\hat{k}$

$= (-4+4)\hat{i} + (-4-4)\,\hat{k} = -8\hat{k}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩২ একটি উড়োজাহাজ 200 km পশ্চিমে যাওয়ার পর পশ্চিম দিকের সাথে 60° কোণে উত্তরে 150 km গেল। *[কুমিল-া সরকারি কলেজ, কুমিল-া]*

ক. ডাইভারজেন্স কাকে বলে? ১

খ. $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ হলে, $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল, ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকে বর্ণিত শর্তানুযায়ী উড়োজাহাজটির লব্ধি সরণ কত?৩

ঘ. যদি উড়োজাহাজটি পশ্চিম দিকের সাথে 60° কোণে উত্তরে না যেয়ে সোজাসুজি দক্ষিণে 150 km চলে আসে তখন লব্ধি সরণের কিরূপ পরিবর্তন হবে, বিশে-ষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ড় দাও। ৪

৩২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে স্কেলার রাশির মাধ্যমে কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের যেকোনো অবস্থানে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (অন্ড়/বহি) সম্পর্কে জানা যায়, তাকে ডাইভারজেন্স বলে।

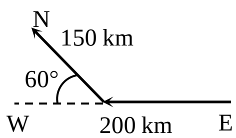
খ $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{0}$ এর অর্থ হলো, ভেক্টর $\vec{A}$ এর কার্ল শূন্য। যেহেতু কোনো ভেক্টরের কার্ল ঐ ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে। সুতরাং যে কোনো ভেক্টর $\vec{A}$ এর কার্ল শূন্য হওয়ার মানে হলো, ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

গ এখানে,

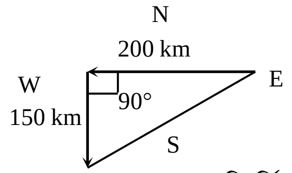
প্রথম সরণের মান, $s_1 = 200$ km

দ্বিতীয় সরণের মান, $s_2 = 150$ km

$= 304.1$ km



ঘ



এক্ষেত্রে, মূল সরণদ্বয়ের মান অপরিবর্তিত

অর্থাৎ $S_1 = 200$ km, $S_2 = 150$ km

কিন্তু $\vec{s_1}$ ও $\vec{s_2}$ এর মধ্যকার কোণ, $\theta' = 90°$

$\therefore$ লব্ধি সরণ, $s' = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + 2s_1 s_1\cos\theta'}$

$= \sqrt{(200)^2 + (150)^2 + 2\times 200\times 150\cos 90°}$ km

$= 250$ m

$\therefore$ লব্ধি সরণের পরিবর্তন $= s - s'$

$= 304.1$ km $- 250$ km

$= 54.1$ km (হ্রাস)

প্রশ্ন ▶৩৩ একটি বাস, একটি জীপ এবং একটি ট্রাক রাস্ড়া দিয়ে চলছে। এদের বেগ যথাক্রমে $\vec{v_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{v_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{v_3} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ কোনো এক মুহূর্তে তিনটির মধ্যে সংঘর্ষ ঘটলো। *[কুমিল-া সরকারি মহিলা কলেজ, কুমিল-া]*

ক. অনুকল্প কী? ১

খ. তোমার পড়ার ঘরে একটি প্রজাপতি ছুটাছুটি করছে। প্রজাপতির অবস্থান ব্যাখ্যা করতে কোন স্থানাংক ব্যবস্থা প্রযোজ্য হবে। যুক্তি প্রদর্শন কর। ২

গ. ট্রাকের বেগের কার্ল (Curl) নির্ণয় কর। ৩

ঘ. সংঘর্ষের মুহূর্তে গাড়ি তিনটি একই তলে গতিশীল ছিল– গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর। ৪

৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক অনুকল্প হল এমন ব্যাখ্যা বা সূত্র যা এখনো সঠিক বলে প্রমাণিত হয়নি। অন্য কথায়, কোন কিছু সম্পর্কে অনুসন্ধানের যে অনুমিত বা সিদ্ধান্ড় নেওয়া হয় তাকে অনুকল্প বলে।

খ পাড়ার ঘরে প্রজাপতি ছুটাছুটি করলে এর বেগ ত্রিমাত্রিক হয় কারণ এটি ডানে-বামে, উপরে নিচে যেকোন দিকে যেতে পারে। তাই প্রজাপতির অবস্থান ব্যাখ্যা করার জন্য ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্কের ব্যবস্থার প্রয়োজন হবে। অর্থাৎ প্রজাপতির অবস্থান P বিন্দুতে হলে এটি নির্দেশ করে P(x, y, z)

গ দেওয়া আছে, ট্রাকের বেগ $\vec{v_3} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

ট্রাকের বেগের কার্ল = ?

আমরা জানি, কার্ল $= \vec{\nabla}\times\vec{V_3}$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial y}(5) - \frac{\partial}{\partial z}(-3)\right\}\hat{i} - \left\{\frac{\partial}{\partial z}(1) - \frac{\partial}{\partial x}(5)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3) - \frac{\partial}{\partial y}(1)\right\}$$

$= 0 - 0 + 0 = 0$

$\therefore$ ট্রাকের বেগের কার্ল 0। **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, বাসের বেগ $\vec{v_1} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

জীপের বেগ $\vec{v_2} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

ট্রাকের বেগ $\vec{v_3} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

আবার, $(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) . \vec{v_3} = (2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}). (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$
$= 2 + 33 - 35$
$= 0$

□ $(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) . \vec{v_3} = 0$

$\therefore$ $(\vec{v_1} \times \vec{v_2})$ ও $\vec{v_3}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

আবার, $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ ভেক্টরদ্বয় $(\vec{v_1} \times \vec{v_2})$ এর সাথে সমকোণে ক্রিয়াশীল।

$\therefore$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ ও $\vec{v_3}$ একই তলে অবস্থিত।
সুতরাং গাড়ি তিনটি একই তলে গতিশীল।

প্রশ্ন ▶৩৪ $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N এবং $\vec{F_2} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 0.5\hat{k})$ N এর দুটি সমান্তরাল বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে। 1s পর বলদ্বয়ের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায়। পরবর্তী 1s এ বস্তুটি সমবেগে চলতে থাকে। *[সরকারি সৈয়দ হাতেম আলী কলেজ, বরিশাল]*

ক. স্প্রিং ধ্রুবক কাকে বলে? ১
খ. অবস্থান ভেক্টর একটি স্বাধীন ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকের তথ্য থেকে m এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ বনাম সময় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব কি-না? ৪

৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন স্প্রিং এর মুক্ত প্রান্তের একক সরণ ঘটালে স্প্রিংটি সরণের বিপরীত দিকে যে বল প্রয়োগ করে তাকে ঐ স্প্রিং এর স্প্রিং ধ্রুবক বলে।

খ মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।
যেহেতু অবস্থান ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে নির্দেশ করা হয়, অন্য কোন ভেক্টরের উপর নির্ভরশীল নয়, তাই অবস্থান ভেক্টর একটি স্বাধীন ভেক্টর।

গ দেওয়া আছে, $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N

$\vec{F_2} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 0.5)$ N

$$\vec{F_1} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -m & 1 \\ 2 & -2 & 0.5 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}\,(-0.5m + 2) - \hat{j}\,(2 - 2) + \hat{k}\,(-8 + 2m)$

$= \hat{i}\,(-0.5\,m + 2) + \hat{k}\,(-8 + 2m)$

যেহেতু $\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সমান্তরাল।

$\therefore$ F_1 ও F_2 এর ক্রস গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\vec{F_1} \times \vec{F_2} = 0$

বা, $\hat{i}\,(-0.5\,m + 2) + \hat{k}\,(-8 + 2m) = 0$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই. $-0.5m + 2 = 0$
বা, $0.5\,m = 2$
$\therefore$ $m = 4$
সুতরাং, m এর মান 4. **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N

$= (4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$ N

$\therefore$ $|\vec{F_1}| = (\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2})$ N

বা, $F_2 = 2.87$ N

□ $\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ পরস্পর সমান্তরাল।
তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 0°$

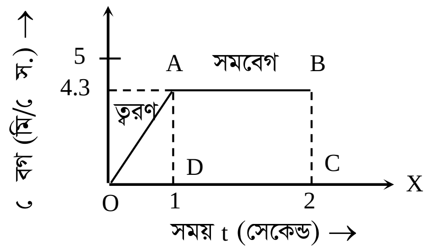
$\vec{F_1}$ ও $\vec{F_1}$ এর লব্ধি $F = F_1 + F_2$
$= (5.74 + 2.87)$ N
$= 8.61$ N

F লব্ধি বলটি m = 2kg স্তরের বস্তুর উপর $t_1 = 1$ sec ক্রিয়া করে। ফলে বস্তুটি প্রথম 1 sec ত্বরণে যায়। পরবর্তী 1 sec বস্তুটি সমবেগে যায়।
মনে করি, বস্তুটির ত্বরণ a এবং প্রথম 1 sec পার বেগ v।
এখানে, আদিবেগ $u = 0$ ms^{-1}
সময় $t_1 = 1$ sec
ভর $m = 2$ kg
শেষ বেগ = v ms^{-1}
প্রযুক্ত বল $F = 8.61$ N

প্রথম ক্ষেত্রে, $F = ma$

বা, $8.61 = 2\left(\frac{v - u}{t_1}\right)$

$\therefore$ $v = 4.31$ ms^{-1}



উপরের লেখচিত্রে, বস্তুটি প্রথম OA অংশ ত্বরণে এবং পরবর্তী AB অংশ সমবেগে অতিক্রম করে।
সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণে অতিক্রান্ত দূরত্ব ΔOAD এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং সমবেগে অতিক্রান্ত দূরত্ব ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

$\therefore$ 2 sec এ বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s = Δ ক্ষেত্র OAD + □ ক্ষেত্র ABCD

বা, $s = \left(\frac{1}{2} \times OD \times AD\right) + (AD \times DC)$

বা, $s = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 4.31\right) + (4.31 \times 1)$

$\therefore$ $s = 6.465$ m

প্রশ্ন ▶৩৫ কলিম উদ্দিন কুমার নদীর তালতলা ঘাটের মাঝি। আধুনিক বিজ্ঞানের ছোঁয়ায় সে ইঞ্জিনচালিত নৌকা চালায়। বর্ষা মৌসুমে নদীর পানি বেড়ে যাওয়ায় স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার হয়। কলিম উদ্দিন নৌকার বেগ ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার। *[মদনমোহন কলেজ, সিলেট]*

ক. কৃত্রিম উপগ্রহ কী? ১
খ. মাটির পাত্রে পানি ঠান্ডা থাকে কেন? ব্যাখ্যা কর। ২
গ. নৌকা নদীর আড়াআড়ি চালালে লব্ধি বেগ ও দিক নির্ণয় কর। ৩
ঘ. নৌকা নদীর আড়াআড়ি পার হতে হলে নৌকাকে কোন দিকে চালাতে হবে নির্ণয় কর। ৪

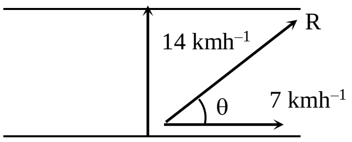
৩৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সকল মহাশূন্যযান নির্দিষ্ট কক্ষপথে থেকে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করে, তাদেরকে কৃত্রিম উপগ্রহ বলে।

খ মাটির পাত্রের ক্ষুদ্র ছিদ্রগুলো কৈশিক নলের মতো কাজ করে, ফলে পাত্র থেকে পানি পাত্রের গায়ে ওঠে আসে এবং বাষ্পীভূত হয়। এই

বাষ্পীভবনের জন্য প্রয়োজনীয় তাপ পাত্রের পানি থেকেই আসে, ফলে পানি ঠান্ডা থাকে।

গ



ধরি, লব্ধি বেগ R এবং তা স্রোতের সাথে θ কোণে যায়।

সুতরাং $R^2 = 7^2 + 14^2 + 2.7.14 \cos 90°$

বা, $R^2 = 245$

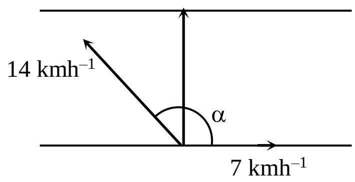
$\therefore R = 15.65 \text{ ms}^{-1}$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{14 \sin 90°}{7 + 14\cos 90} = \dfrac{14}{7} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(^1/_2) = 26.56°$

সুতরাং, নৌকা স্রোতের সাথে 26.56° কোণে 15.65 ms^{-1} বেগে যাবে।

ঘ



ধরি, নৌকা নদীর আড়াআড়ি পাড় হতে হলে স্রোতের সাথে α কোণে রওনা দিতে হবে।

লব্ধি যেহেতু স্রোতের সাথে 90° কোণ করে।

সুতরাং, $\tan 90° = \dfrac{14 \sin\alpha}{7 + 14\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{14\sin\alpha}{7 + 14\cos\alpha}$

$\therefore \quad 7 + 14\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{7}{14}$

বা, $\cos\alpha - 1/2$

বা, $\alpha = \cos^{-1}(^{-1}/_2)$

$\therefore \quad \alpha = 120°$

সুতরাং স্রোতের সাথে 120° কোণে রওনা দিতে হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৬ সিলেট সরকারি মহিলা কলেজের সামনের রাস্তাটি দিয়ে একজন লোক 5 kmh^{-1} বেগে দক্ষিণ দিক থেকে উত্তর দিকে এবং অন্যজন উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে একই বেগে হেঁটে যাচ্ছেন। হঠাৎ দক্ষিণ দিক থেকে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 30 kmh^{-1} বেগে ঝড়ো বৃষ্টি নামল। *[সিলেট সরকারি মহিলা কলেজে, সিলেট]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{k}$ কোন ধরণের ভেক্টর? ব্যাখ্যা কর। ২

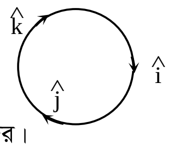
গ. ১ম ব্যক্তির উপর বৃষ্টি কত লব্ধি বেগে এসে পড়ছে? ৩

ঘ. বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে কোন ব্যক্তিকে বেশি আনত কোণে ছাতা ধরতে হবে? গাণিতিক বিশে-ষণের সাহায্যে মতামত দাও। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ আমরা জানি, $(\hat{i} \times \hat{j}) = \hat{k}$



আবার, $\hat{k} \times \hat{k} = 1.1. \sin 0° = 0$

$\therefore (\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{k} = 0$ অর্থাৎ এটি একটি শূন্য ভেক্টর।

গ এখানে,লোকের বেগ, $u = 5 \text{ kmh}^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $v = 30 \text{ kmh}^{-1}$

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 60°$

লব্ধি বেগ, W = ?

আমরা জানি, $W = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta}$

$= \sqrt{5^2 + 30^2 + 2.5.30.\cos 60°}$

$= 32.8 \text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ ১ম ব্যক্তির উপর বৃষ্টি 32.8 ms^{-1} লব্ধি বেগে এসে পড়ছে।

ঘ প্রথম ব্যক্তির জন্য,

ব্যক্তির বেগ, $P_1 = 5 \text{ kmh}^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $Q_1 = 30 \text{ kmh}^{-1}$

উৎপন্ন কোণ $\alpha_1 = 60°$

ছাতার আনত কোণ, θ_1 = ?

$\tan\theta_1 = \dfrac{Q_1 \sin\alpha}{P_1 + Q_1\cos\alpha}$

বা, $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\dfrac{Q_1\sin\alpha}{P_1 + Q_1\cos\alpha}\right)$

$= \tan^{-1}\dfrac{(30 \text{ kmh}^{-1})\sin 60°}{(5 \text{ kmh}^{-1}) + (30 \text{ kmh}^{-1})\cos 60°}$

$= 52.41°$

ব্যক্তির বেগ, $P_2 = 5 \text{ kmh}^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $Q_2 = 30 \text{ kmh}^{-1}$

উৎপন্ন কোণ, $\alpha_2 = (90 - 60) = 30°$

ছাতার আনত কোণ, θ_2 = ?

দ্বিতীয় ব্যক্তির জন্য,

$\tan\theta_2 = \dfrac{Q_2\sin\alpha}{P_2 + Q_2\cos\alpha_2}$

বা, $\theta_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{Q_2\sin\alpha_2}{P_2 + Q_2\cos\alpha_2}\right)$

$\therefore$ প্রথম ব্যক্তিকে বেশি কোণে ছাতা আনত করতে হবে।

প্রশ্ন ▶৩৭ $\vec{A} = x^2zi - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$

[ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, শহীদ মাহবুব সেনানিবাস, দিনাজপুর]

ক. নাল ভেক্টর কী? ১

খ. ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য লিখ। ২

গ. (1, – 1, 1) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল কি-না? তোমার মতামতের সপক্ষে যুক্তি দাও। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য, তাকে নাল ভেক্টর বলে।

খ ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্যঃ (i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা, div. $\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) ডাইভারজেন্সের মান ধনাত্মক হলে তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়, ঘনত্বের হ্রাস ঘটে। এর মান ঋণাত্মক হলে আয়তনের সংকোচন ঘটে, ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

গ প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$

এবং প্রদত্ত বিন্দু (1, – 1, 1)

$\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স $= \vec{\nabla}.\vec{A}$

$= \left(\hat{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right).(x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k})$

$= \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$

$= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$

$\therefore$ (1, – 1, 1) বিন্দুতে ডাইভারজেন্স

$= 2 \times 1 \times 1 - 6(-1)^2(1)^2 + 1 \times (-1)^2$

$= 2 - 6 + 1 = -4$

ঘ উদ্দীপকে বর্ণিত ভেক্টরটির কার্ল,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & -2y^3z^2 & xy^2z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y^3z^2)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2y^3z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2z)\right\}$$

$= \hat{i}\,(2xyz + 4y^3z) - \hat{j}\,(y^2z - x^2) + \hat{k}\,(0 - 0)$

$\therefore$ (1, –1, 1) বিন্দুতে কার্ল $= \hat{i}\,\{2.1.(-1).1 + 4(-1)^3.1\} - \hat{j}\,\{(-1)^2.1 - 1^2\}$

$= \hat{i}\,(-2 - 4) - \hat{j}\,(1 - 1)$

$= -6\hat{i} \neq 0$

সুতরাং (উদ্দীপকের ভেক্টরটির কার্ল অশূন্য হওয়ায়) এটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶৩৮ রাফির বাসার পাশেই একটি তিন রাস্তার মোড়। একদিন বিকেল বেলা সে ছাদে দাঁড়িয়ে ছিল। হঠাৎ সে দেখতে পেল NOAH, TOYOTA এবং LAND CRUISER এ তিনটি গাড়ি মোড় নেওয়ার সময় বিকট শব্দে সংঘর্ষে লিপ্ত হয়। সে দেখলো তিনটি গাড়িই একত্রে একযোগে কিছু দূরে গিয়ে থেমে গেল।

গাড়ি তিনটির বেগ ছিল যথাক্রমে–

$\vec{N} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ m/s

$\vec{T} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$ m/s

$\vec{L} = (-3\hat{j} + \hat{i} + 5\hat{k})$ m/s

[মজিদা খাতুন সরকারি মহিলা কলেজ, লালমনিরহাট]

ক. আপেক্ষিক বেগ কী? ১

খ. ভেক্টর রাশির পরিবর্তন কয় প্রকারে হতে পারে এবং কি কি? ২

গ. প্রমাণ কর যে, $\vec{N}$, $\vec{T}$ এবং $\vec{L}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে ক্রিয়াশীল? ৩

ঘ. সংঘর্ষের পরে প্রাপ্ত লব্ধি বেগ নিয়ে গাড়ি তিনটি কী কোন এক রাস্তা বরাবর গতিশীল থাকতে পারবে। গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি বস্তুর সাপেক্ষে অপর একটি বস্তুর বেগকে ২য় বস্তুর আপেক্ষিক বেগ বলে।

খ ভেক্টর রাশির পরিবর্তন তিন প্রকারে হতে পারে :

i. শুধু মানের পরিবর্তনে

ii. শুধু দিকের পরিবর্তনে

iii. ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ের পরিবর্তনে।

গ দেওয়া আছে, $\vec{N} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\ ms^{-1}$

$\vec{T} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})\ ms^{-1}$

ভেক্টর তিনটি একই সমতলে ক্রিয়াশীল হবে যদি $\vec{N}.(\vec{T} \times \vec{L}) = \vec{0}$ হয়।

এখানে, $\vec{T} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

$\vec{N}$, $\vec{T}$ এবং $\vec{L}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে ক্রিয়াশীল।

ঘ সংঘর্ষের পর প্রাপ্ত লব্ধি বেগ $= \vec{N} + \vec{T} + \vec{L}$

$= (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\ ms^{-1} + (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})\ ms^{-1} + (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})\ ms^{-1}$

$= (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})\ ms^{-1}$

$= 6\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k})\ ms^{-1}$

$= 2(3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})\ ms^{-1} = 2\vec{T}$

সুতরাং, সংঘর্ষের পরে প্রাপ্ত লব্ধি বেগ নিয়ে গাড়ি তিনটি কোনো একটি রাস্তা বরাবর গতিশীল থাকতে পারবে –Toyota গাড়িটি সংঘর্ষের পূর্বে যে রাস্তাটি দিয়ে যাচ্ছিল, সে রাস্তাটি বরাবর।

প্রশ্ন ▶৩৯ একটি পাহাড়ি নদীতে স্রোতের বেগ 6 kmh^{-1} এবং একটি 15 kmh^{-1} বেগে গতিশীল স্পিডবোট ঐ নদীতে যাত্রী পাড়াপারে ব্যবহৃত হয়। *[সরকারি শহীদ বুলবুল কলেজ, পাবনা]*

ক. কেপলারের দ্বিতীয় সূত্রটি লিখ? ১

খ. "$x = A \sin(\omega t + \delta)$ সরল ছন্দিত স্পন্দনের অন্তরক সমীকরণের একটি সমাধান।" ব্যাখ্যা কর। ২

গ. আড়াআড়ি নদী পাড়ি দিতে চাইলে স্পিডবোটটিকে কোন দিকে চালাতে হবে? ৩

ঘ. নদীটি 2.5 km প্রশস্ত হলে সোজা অপর পারে কোন বিন্দুতে যেতে স্পিডবোটটির কত মিনিট সময় লাগবে? গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন গ্রহ ও সূর্যের সংযোজক সরলরেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

খ $x = A \sin(\omega t + \delta)$। সমীকরণটিকে সময় t এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \delta)$

আবার, $\frac{d^2x}{dt} + \omega^2 x = 0$, সরল ছন্দিত স্পন্দনের সমীকরণ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এ (i) হতে প্রাপ্ত মান বসিয়ে পাই,

$-\omega^2x + \omega^2x = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

সুতরাং, $x = A \sin(\omega t + \delta)$ সরল ছন্দিত স্পন্দনের অন্তরক সমীকরণের সমাধান।

গ মনে করি আড়াআড়ি নদী পাড়ি দিতে চাইলে স্পিডবোটটিকে স্রোতের দিকের সাথে θ কোণে চলতে হবে।

এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 6\ kmh^{-1}$

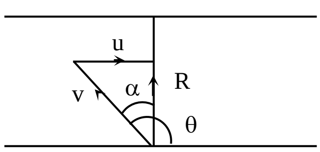
স্পিডবোডের বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$

$\therefore$ লব্ধি বেগ, $R = \sqrt{v^2 - u^2}$

$\therefore$ $R = 13.75\ kmh^{-1}$

আবার, $\sin\alpha = \frac{u}{v}$

বা, $\sin\alpha = \frac{6}{15}$



$\therefore \quad \alpha = 23.58$
$\therefore \quad \theta = 90° + \alpha$
স্রোতের সাথে 113.58° কোণে। **(Ans.)**

ঘ স্পিড বোডের সোজাসুজি প্রস্থ বরাবর লব্ধি বেগ, $R = 13.75\ kmh^{-1}$
নদীর প্রস্থ, $s = 2.5\ km$
$\therefore$ সোজা অপর পাড়ে যাবার প্রয়োজনীয় সময়, $t = \dfrac{s}{R}$
বা, $t = \dfrac{2.5}{13.75}$ hr
$\therefore t = 10.914$ min **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪০ অর্ণব অমিতের বাড়ীর পাশ দিয়ে বয়ে চলা নদীতে কোন একদিন স্রোতের বেগ ছিল $4ms^{-1}$। সেদিন উল-ম্ব রেখা বরাবর $12ms^{-1}$ বেগে বৃষ্টি পড়ছিল। নদীটি সোজা পাড়ি দেয়ার প্রতিযোগিতায় ইঞ্জিন চালিত নৌকা নিয়ে অর্ণব স্রোতের দিকের সাথে 122° কোণে ও $7ms^{-1}$ বেগে এবং অমিত স্রোতের দিকের সাথে 120° কোণে ও $8ms^{-1}$ বেগে যাত্রা করে। *[দিনাজপুর সরকারি কলেজ, দিনাজপুর]*

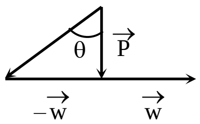
ক. ঘাত বল কী? ১
খ. সার্কাসে শূন্যে ডিগবাজি দেয়ার সময় খেলোয়াড় হাত-পা গুটিয়ে রাখে কেন? ২
গ. নৌকা লব্ধি বেগে চললে অর্ণবের নৌকায় কত কোণে বৃষ্টি পড়ছিল? ৩
ঘ. উদ্দীপকে উলি-খিত প্রতিযোগিতায় কে বিজয়ী হয়েছিল- গাণিতিক বিশে-ষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

৪০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক বৃহৎমানের যে বল অতি অল্প সময় ধরে ক্রিয়া করে তাকে ঘাত বল বলে।

খ হঠাৎ করে হাত-পা গুটিয়ে ফেললে দেহের জড়তার ভ্রামক কমে যায়। তখন কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র ($I_1\omega_1 = I_2\omega_2$) অনুসারে দেহের ঘূর্ণনের কৌণিক বেগ বেড়ে যায়। এতে সময়মত সঠিক স্থানে দেহকে নামিয়ে আনা সম্ভব হয় এবং কোনোরূপ দুর্ঘটনা ঘটে না।

গ দেওয়া আছে,
অর্ণবের নৌকার প্রকৃত বেগ, $u = 7ms^{-1}$
স্রোতের বেগ, $v = 4ms^{-1}$



$\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যকার কোণ, $\alpha = 122°$
অর্ণবের নৌকার লব্ধি বেগ,
$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha} = \sqrt{7^2 + 4^2 + 2 \times 7 \times 4\cos 122°}\ ms^{-1}$
$= 5.94\ ms^{-1}$
বৃষ্টির বেগ, $p = 12\ ms^{-1}$
$\therefore$ বৃষ্টি উল-ম্বের সাথে θ কোণে অর্ণবের ওপর পতিত হলে,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|\vec{w}|}{|\vec{p}|} = \tan^{-1}\frac{5.94\ ms^{-1}}{12\ ms^{-1}} = 26.34°$$

ঘ নদীর প্রস্থ বরাবর যার লব্ধি বেগের উপাংশ বেশি হবে, যে স্বল্পতম সময়ে নদী পার হতে পারবে এবং বিজয়ী হবে।

নদীর প্রস্থ বরাবর অর্ণবের লব্ধি বেগের উপাংশ $= u\cos(122° - 90°) + v\cos 90°$
$= 7ms^{-1} \times \cos 32° + 0 = 5.94\ ms^{-1}$
= নৌকার লব্ধি বেগ ('গ' অংশ হতে পাই)
$= 8ms^{-1} \times \cos 30° + 0 = 6.93\ ms^{-1}$
লক্ষ্য করি, অমিতের লব্ধি বেগে, $w' = \sqrt{u'^2 + v^2 + 2u'v\cos 120°} = ms^{-1} = 6.93\ ms^{-1}$
= নদীর প্রস্থ বরাবর অমিতের লব্ধি বেগের উপাংশ
সুতরাং উভয়ের লব্ধি বেগই নদীর প্রস্থ বরাবর, যা স্রোতের দিকের সাথে সমকোণে। এক্ষেত্রে অমিতের লব্ধি বেগ বেশি হওয়ায় ($6.93\ ms^{-1} > 5.93\ ms^{-1}$) উদ্দীপকে উলি-খিত প্রতিযোগিতায় অমিত বিজয়ী হবে।

প্রশ্ন ▶৪১ p একটি স্কেলার অপেক্ষক যেখানে $p = 3xy^2z + 4xyz + 2yz^2$ এবং $\vec{v}$ একটি ভেক্টর অপেক্ষক যেখানে $\vec{v} = x^2y\hat{i} + 2xz\hat{j} - 2yz\hat{k}$ *[আমর্ড পুলিশ ব্যাটেলিয়ন পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, বগুড়া]*

ক. বিপরীত ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. দুটি ভেক্টর কখন পরস্পর সমান্ড়্রাল হয়? ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকে $\vec{v}$ এর কার্ল নির্ণয় কর। ৩
ঘ. উদ্দীপকের আলোকে বিশে-ষণ করে দেখানো সম্ভব কিনা- যেখানে একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে এবং একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার রূপান্ড়র কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক নির্দিষ্ট দিক বরাবর কোনো ভেক্টরকে ধনাত্মক ধরলে তার বিপরীত দিকে সমমানের সমজাতীয় ভেক্টরকে বিপরীত ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে এদের ভেক্টর গুণফল $AB\sin\theta\,\hat{\eta}$।
$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্ড়্রাল হলে, $\theta = 0°$
সেক্ষেত্রে, $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta n = \vec{0}$
সুতরাং দুটি ভেক্টরের ক্রস বা ভেক্টর গুণফল শূন্য হলে এরা সমান্ড়্রাল হয়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{v} = x^2y\hat{i} + 2xz\hat{j} - 2yz\hat{k}$

$$\vec{v} \text{ এর কার্ল} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & 2xz & -2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(2xz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$$

$= \hat{i}(-2z - 2x) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(2z - x^2)$
$= -2\hat{i}(x + z) + \hat{k}(2z - x^2)$
ইহাই নির্ণেয় কার্ল। **(Ans.)**

ঘ একটি স্কেলার ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্রে রূপান্ড়র সম্ভব, যদি এর গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় করা হয়। নিচে p স্কেলার ক্ষেত্রটির গ্রেডিয়েন্ট নির্ণয় করা হলো।

$$\vec{\nabla}p = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(3xy^2z + 4xyz + 2yz^2)$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z + 4xyz + 2yz^2) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z + 4xyz + 2yz^2) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z + 4xyz + 2yz^2)$$

$= \hat{i}(3y^2z + 4yz + 0) + \hat{j}(6xyz + 4xz + 2z^2) + \hat{k}(3xy^2 + 4xy + 4yz)$ যা একটি ভেক্টর ক্ষেত্র।
আবার, একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্ড়র সম্ভব, যদি এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করা হয়। নিচে $\vec{v}$ ভেক্টরটির ডাইভারজেন্স নির্ণয় করা হলো।

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x^2y\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 2yz\,\hat{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2yz)$$

$= 2xy + 0 - 2y = 2xy - 2y$, যা একটি স্কেলার ক্ষেত্র।

প্রশ্ন ▶৪২ নদীতে $10\ kmhr^{-1}$ বেগে স্রোত বইছে। মিস প্যাগোডি $20\ kmhr^{-1}$ বেগে স্রোতের সাথে $60°$ কোণে নৌকা চালিয়ে 2 km প্রস্থ নদী পাড়ি দিলেন। *[ফেনী সরকারি কলেজ, ফেনী]*

ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টরের পাদ বিন্দুর অবস্থান কোথায়? ১

খ. বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান বস্তুর কাজের পরিমাণ গাণিতিক ভাবে নির্ণয় কর। ২

গ. উদ্দীপকের নদী পাড়ি দিতে মিস্ প্যাগোডির কত সময় লেগেছে? ৩

ঘ. মিস্ প্যাগোডির নৌকায় অতিক্রান্ত পথ কি নদীর প্রস্থের সমান? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও। ৪

৪২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ব্যাসার্ধ ভেক্টরের পাদ বিন্দুর অবস্থান দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাংক কাঠামোর মূল বিন্দুতে।

খ বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে যখন একটি বস্তু ঘুরতে থাকে তখন এর ওপর ধ্রুবমানের কেন্দ্রমুখী বল ($\vec{F_c}$) ক্রিয়া করে। প্রতিটি ক্ষুদ্র মুহূর্তে বস্তুটি যে ক্ষুদ্র সরণ ($d\vec{s}$) লাভ করে, তার দিকে $\vec{F_c}$ এর লম্বদিকে। সুতরাং প্রতিটি ক্ষুদ্র মুহূর্তে কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ, $dw = \vec{F_c}.d\vec{s} = F_c ds \cos 90° = 0$, অতএব বস্তুটি পূর্ণঘূর্ণন সম্পন্ন করুক না কেন, কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ সর্বদাই শূন্য।

গ দেওয়া আছে, নদীর প্রস্থ, $d = 2\ km = 200\ m$

নৌকার প্রকৃত বেগ, $u = 20\ kmhr^{-1} = 5.56\ ms^{-1}$

স্রোতের বেগ, $v = 10\ kmhr^{-1} = 2.78\ ms^{-1}$

নদীর প্রস্থ বরাবর, নৌকার প্রকৃত বেগের উপাংশ + স্রোতের বেগের উপাংশ

$= u \cos (90° - 60°) + v \cos 90°$

$= 5.56\ ms^{-1} \times \cos 30° + 0$

$= 4.815\ ms^{-1}$

∴ উদ্দীপকের নদী পাড়ি দিতে মিস্ প্যাগোডির সময় লাগে,

$$t = \frac{d}{4.815 ms^{-1}} = \frac{2000\ m}{4.815\ ms^{-1}} = 415.4\ sec\ \textbf{(Ans.)}$$

ঘ মিস্ প্যাগোডির নৌকার লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}$

$= \sqrt{5.56^2 + 2.78^2 + 2 \times 5.56 \times 2.78 \times \cos 60°}\ ms^{-1}$

$= 7.355\ ms^{-1}$

সুতরাং নদী পারাপারকালে নৌকা কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব (বা সরণ),

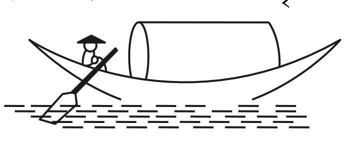
$s = 7.355\ ms^{-1} \times t = 7.355\ ms^{-1} \times 415.4\ sec$

$= 3055.27\ m >> 2000\ m$ (নদীর প্রস্থ)

অতএব, মিস্ প্যাগোডির নৌকায় অতিক্রান্ত পথ নদীর প্রস্থের সমান নয়। বরং নদীর প্রস্থ অপেক্ষা অনেক বেশি।

প্রশ্ন ▶৪৩

নৌকার বেগ = 4 km/h বৃষ্টির বেগ = 2 km/h



স্রেতোর বেগ = 2 km/h →

স্রোতের বিপরীতে নৌকা চালানো হচ্ছে। হঠাৎ বৃষ্টি আসায় মাঝি ছাতা ধরলেন। নদীর এপার থেকে ঠিক ওপারে পৌছার জন্য মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে নৌকা চালাতে লাগলেন। *[সুনামগঞ্জ সরকারি কলেজ, সুনামগঞ্জ]*

ক. আয়ত একক ভেক্টর কি? ১

খ. সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে না– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. সোজাসুজি নদী পার হওয়ার জন্য মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হবে? ৩

ঘ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য মাঝি কীভাবে ছাতা ধরেছিলেন – ব্যাখ্যা কর। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্টেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

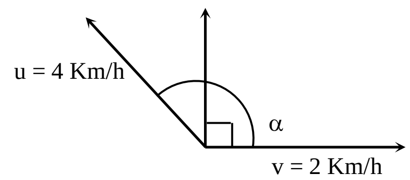
খ সমদ্রুতিতে কোন বস্তু সরলপথে চলমান থাকলে এর ত্বরণ থাকে না।

আমরা জানি, ত্বরণ একটি ভেক্টর রাশি যা বেগের মান বা দিক বা উভয়েরই পরিবর্তনের ফলে সৃষ্টি হয়। সমদ্রুতিতে কোন বস্তু যদি সরল পথে চলমান থাকে তবে বেগের মান বা দিক কোনটিরও পরিবর্তন হয় না। ফলে কোন ত্বরণ থাকে না।

গ এখানে, নৌকার বেগ, $u = 4\ km/h$

স্রোতের বেগ, $v = 2\ km/h$

নৌকার দিক, $\alpha = ?$



সোজাসুজি নদী পার হওয়ার জন্য নৌকার লব্ধি বেগ স্রোতের সাথে $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore\ \tan 90° = \dfrac{u \sin \alpha}{v + u \cos \alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{u \sin \alpha}{v + \cos \alpha}$

বা, $\cos \alpha = -\dfrac{v}{u}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{2\ km/h}{4\ km/h}\right)$

$\therefore\ \alpha = 120°$

অর্থাৎ সুজাসুজি পার হওয়ার জন্য মাঝিকে স্রোতের দিকের সাথে $120°$ কোণে নৌকা চালাতে হবে।

ঘ এখানে, নৌকার বেগ, $u = 4\ km/h$

স্রোতের বেগ, $v = 2\ km/h$

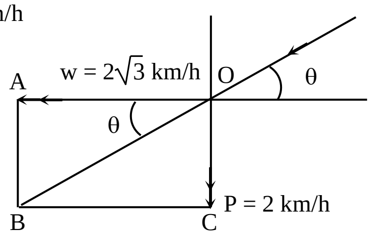
স্রোতের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = 120°$

বৃষ্টির বেগ, $P = 2\ km/h$

∴ নৌকার লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}$

$= \sqrt{(4\ km/h)^2 + (2\ km/h)^2 + 2 \times 4\ km/h \times 2\ km/h \times \cos 120°}$

$= 2\sqrt{3}\ \ km/h$



ধরি, মাঝিকে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

এখানে, OA = নৌকার লব্ধি বেগ, $w = 2\sqrt{3}\ km/h$

$OC = AB =$ বৃদ্ধির বেগ, $P = 2$ km/h

তাহলে, $\tan\theta = \frac{AB}{OA} = \frac{2 \text{ km/h}}{2\sqrt{3} \text{ km/h}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \theta = 30°$

অর্থাৎ মাঝিকে অনুভূমিকের সাথে 30° বা উলম্বের সাথে 60° কোণ ছাতা ধরতে হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪৪ ঊর্মি, সালমা ও সাবিনা রবিবার "ষ্টার সান ডে" উপলক্ষ্যে কলেজ বন্ধ থাকায় দুপুর বারটার সময় টিভিতে ঘোষণা শুনে তাদের চোখ ছানাবড়া হয়ে গেল। টিভি পর্দায় দেখে 200 kmh^{-1} বেগে যশোরের ওপর দিয়ে ঝড় দানব বয়ে যাবে। এর পরই বিদ্যু চলে গেল। বাইরে লক্ষ করে তারা দেখল প্রচণ্ড ঝড় শুরু হয়ে গেছে। সাথে বিদ্যুৎ চমকাচ্ছে এবং প্রচণ্ড বজ্রপাতের ধ্বনি শুনতে পাচ্ছে। চারদিকে অন্ধকার হয়ে গেছে। ঘণ্টা চারেক এভাবে বৃষ্টি হল। বৃষ্টি শেষ হলে দরজা খুলে দেখে তাদের ঘরের সামনের নারকেল গাছটা উত্তর দিকের সাথে প্রায় 45° কোণ করে পশ্চিম দিকে ভেঙ্গে পড়ে আছে।

[কেশবপুর কলেজ, কেশবপুর, যশোর]

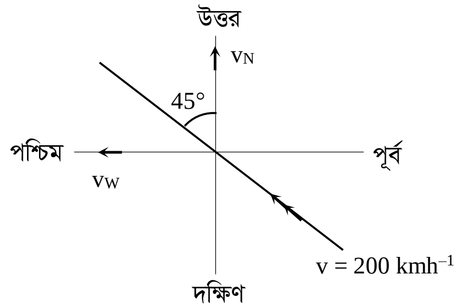
ক. তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? ১
খ. স্প্রিং ধ্রুবক কোন কোন রাশির ওপর নির্ভরশীল? ২
গ. ঝড়ের উত্তর মুখী ও পশ্চিম মুখী উপাংশের মান বের কর। ৩
ঘ. উদ্দীপকে বর্ণিত ঝড়ের বেগকে কী তুমি সর্বোচ্চ লব্ধি বেগ বলে মনে কর? তবে সর্বোচ্চ লব্ধি বেগ নির্ণয়ের রাশিমালা প্রতিপাদন করে তোমার উত্তরের সত্যতা প্রমাণ কর। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

খ যেহেতু, স্প্রিং ধ্রুবক, $k = \frac{F}{x}$ তাই, স্প্রিং ধ্রুবক প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং সংকোচন বা প্রসারণের ব্যস্তানুপাতিক। তাহলে, স্প্রিং ধ্রুবক প্রযুক্ত বল ও স্প্রিংয়ের সংকোচন বা প্রসারণের উপর নির্ভরশীল।

গ

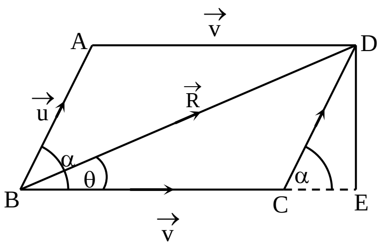


দেওয়া আছে, ঝড়ের বেগ, $v = 200\ kmh^{-1}$
ঝড়ের উত্তরমুখী উপাংশ, $v_N = ?$
ঝড়ের পশ্চিম মুখী উপাংশ, $v_w = ?$

এখন, $v_N = v\cos 45°$
$= 200\ kmh^{-1} \times \cos 45°$

$= 141.42\ kmh^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ



মনে করি, $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ দুটি ভেক্টর পরস্পরের সাথে α কোণে ক্রিয়ারত।

$\vec{u}$ ও $\vec{v}$ কে ABCD সামান্তরিকের AB ও BC সন্নিহিত বাহুদ্বয় দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে। অতএব, ABCD সামান্তরিকের কর্ণ BD ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি R প্রকাশ করবে। D হতে BC এর বর্ধিতাংশের উপর DE লম্ব টানি।

এখন, ΔBDE এ,

$BD^2 = BE^2 + DE^2$

$BD^2 = (BC + CE)^2 + DE^2$ .... (i)

এখন, ΔCDE এ, $\cos\alpha = \frac{CE}{CD}$

$\therefore CE = CD\cos\alpha = u\cos\alpha$

আবার, $\sin\alpha = \frac{DE}{CD}$ $\therefore DE = CD\sin\alpha$

$\therefore$ (i) নং এ মান বসিয়ে পাই, $[BD = R; BC = v]$ CD =

$R^2 = (v + u\cos\alpha)^2 + (u\sin\alpha)^2$

$= v^2 + 2uv\cos\alpha + u^2\cos^2\alpha + u^2\sin^2\alpha$

বা, $R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$

অতএব, লব্ধি ভেক্টরের মান ভেক্টরদ্বয়ের মান ও এদের মধ্যবর্তী কোণের ওপর নির্ভরশীল।

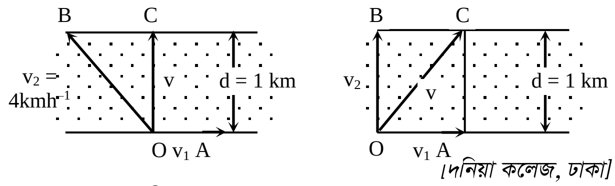
যদি $\alpha = 0°$ হয় তখন,

$R = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv}$

$= u + v$ যা লব্ধির সর্বোচ্চ মান।

অতএব, আমরা বলতে পারি দুটি ভেক্টরের লব্ধি সর্বোচ্চ তখনই হবে যখন এদের মধ্যবর্তী কোণ 0° হবে। কিন্তু (গ)নং হতে আমরা পাই ঝড়ের উত্তর ও পশ্চিমমুখী উপাংশের লব্ধি হল ঝড়ের বেগ। অর্থাৎ উপাংশ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90° অতএব, নিঃসন্দেহে প্রদত্ত উদ্দীপকে ঝড়ের বেগ সর্বোচ্চ নয়।

প্রশ্ন ▶৪৫ চিত্রে $OA = v_1 =$ স্রোতের বেগ, $OB = v_2 =$ নৌকার বেগ, $OC =$ লব্ধি বেগ এবং $d = 1$ km



[দনিয়া কলেজ, ঢাকা]

ক. সংরক্ষণশীল বলের সংজ্ঞা দাও। ১
খ. একটি তারকে দৈর্ঘ্য বরাবর সংকুচিত বা প্রসারিত করতে হলে কাজ করতে হয় কেন? ২
গ. স্রোতের বেগ 3kmh^{-1} হলে প্রথম চিত্রটি হতে লব্ধিবেগ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. তাড়াতাড়ি নদী পার হতে তুমি কোন চিত্রটি অনুসরণ করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে বলের ক্রিয়ায় কোন বস্তুকে এক বিন্দু থেকে অপর কোন বিন্দুতে নিয়ে যেতে ঐ বল কর্তৃক কৃতকাজ শুধু বিন্দুদ্বয়ের অবস্থানের উপর নির্ভর করে, পথের উপর নির্ভর করে না তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

খ কোন বস্তুকে বিকৃত করা হলে এই বিকৃতি প্রতিরোধ করার জন্য স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের জন্য বস্তুর ভেতর একটি প্রতিরোধ বলের উদ্ভব হয়। এই বল বস্তুকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়ে নিতে চায়। এ জন্যই একটি তারকে দৈর্ঘ্য বরাবর সংকুচিত বা প্রসারিত করতে হলে কাজ করতে হয় কেননা এক্ষেত্রে তারের বিকৃতি প্রতিরোধকারী বলের বিরুদ্ধে বাহ্যিক বল প্রয়োগ করতে হয়।

গ উদ্দীপকের তথ্যানুসারে, স্রোতের বেগ, $v_1 = 3\text{kmh}^{-1}$

নৌকার বেগ, $v_2 = 4\text{kmh}^{-1}$

উদ্দীপকের ১ম চিত্রে v_1 এবং v_2 এর মধ্যকার কোন α হলে,

$$\tan 90° = \frac{v_2 \sin\alpha}{v_1 + v_2\cos\alpha}$$

বা, $v_1 + v_2 \cos\alpha = 0$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{v_1}{v_2}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = 138.6°$$

এবং লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2 + 2\times 3\times 4\times\left(-\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{7} = 2.645\ \text{kmh}^{-1}$$

ঘ

নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোত ও নৌকার বেগের উপাংশের যোগফল =

$v_1 \cos 90° + v_2 \cos(138.6° - 90°)$

$= 4\cos 48.6°$

$= 2.645\ \text{km h}^{-1}$

সুতরাং নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t_1 = \dfrac{1\text{ km}}{2.645\text{ kmh}^{-1}} = 0.378$ h

$= 22.68$ min

আবার, দ্বিতীয় চিত্র অনুসারে, নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোত ও নৌকার বেগের উপাংশের যোগফল $= v_1\cos 90° + v_2\cos 0° = 4\ \text{kmh}^{-1}$

সুতরাং নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$$t_2 = \frac{\text{নদীর প্রস্থ}}{\text{নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ}}$$

$$= \frac{1\text{ km}}{4\text{ kmh}^{-1}} = 0.25\text{ h} = 15\text{ min}$$

যেহেতু, $t_2 < t_1$ সেহেতু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নদী পার হতে কম সময় লাগবে।

প্রশ্ন ▶৪৬ $\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$

[আব্দুল কাদির মোল-া সিটি কলেজ, নরসিংদী]

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী? ১

খ. ভেক্টর ক্ষেত্র হতে কীভাবে স্কেলার ক্ষেত্র পাওয়া যায়? ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর পরস্পরের উপর লম্ব অভিক্ষেপ কত হবে? কখন ভেক্টর দুটির লম্ব অভিক্ষেপ সমান হবে? ৪

৪৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ যদি কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স তথা ডেল (∇) অপারেটরের সাথে ভেক্টর ক্ষেত্রটির স্কেলার গুণফল বের করা হয়, তবে একটি স্কেলার ক্ষেত্র পাওয়া যায়।

তাই কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সই হল ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের স্কেলার ক্ষেত্র।

গ এখানে, $\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$

মনে করি, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ

এখন, $A = |\vec{A}| = \sqrt{(10)^2 + (8)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{100 + 64 + 64} = 2\sqrt{57}$

এবং $B = |\vec{B}| = \sqrt{(5)^2 + (6)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{25 + 36 + 25} = \sqrt{86}$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{58}{(2\sqrt{57})\times(\sqrt{86})} = 0.4142$

বা, $\theta = \cos^{-1}(0.4142) = 65.53°$ **(Ans.)**

ঘ দেয়া আছে, $\vec{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

$\vec{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$

ধরি, মধ্যবর্তী কোণ, $= \theta$

এখন, $A = |\vec{A}| = \sqrt{(10)^2 + (8)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{57}$

$B = |\vec{B}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{86}$

এখন, $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ,

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \frac{(10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}).(5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k})}{2\sqrt{57}}$$

$$= \frac{50 + 48 - 40}{2\sqrt{57}} = \frac{58}{2\sqrt{57}} = 3.84 \textbf{ (Ans.)}$$

আবার, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} =$

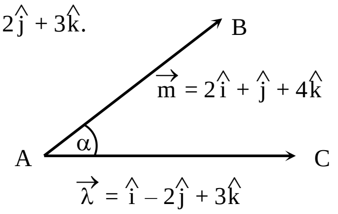
$$\frac{(10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}).(5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{86}} = \frac{50 + 48 - 40}{\sqrt{86}} = 6.25$$

ভেক্টর দু'টি লম্ব অভিক্ষেপ সমান হলে।

বা, $\dfrac{1}{B} = \dfrac{1}{A}$ $\therefore A = B$

অর্থাৎ, ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলে লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় সমান হবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৪৭ A বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে নাবিলা এবং জাহিন যাত্রা আরম্ভ করল এবং কিছু সময় পর তারা যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে পৌছল। মূলবিন্দু থেকে নাবিলার সরণ $\vec{m} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ এবং জাহিনের সরণ $= \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$.



[গাইবান্ধা সরকারি মহিলা কলেজ]

ক. ভেক্টর গুণ কি? ১

খ. ২ টি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক ব্যাখ্যা কর। ২

গ. B ও C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

ঘ. জাহিন নাবিলার পথ বরাবর কি পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করল নির্ণয় কর। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি অসমজাতীয় ভেক্টরের স্কেলার বা ভেক্টর গুণনে যখন তৃতীয় আরেকটি রাশি পাওয়া যায় তখন তাকে ভেক্টর গুণন বলে।

খ দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম অনুসারে ব্যাখ্যা করা যায়। এ নিয়ম অনুসারে, ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের ওপর লম্বভাবে একটি ডানহাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে ভেক্টর গুণফলের দিক।

গ দেওয়া আছে, $\vec{AB} = \vec{m} = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{\lambda} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ বের করতে হবে, B ও C বিন্দুর দূরত্ব, $BC = |\overrightarrow{BC}| = ?$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

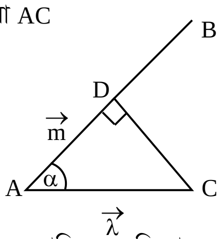
$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$

$= -\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ B ও C বিন্দুর দূরত, $BC = |\overrightarrow{BC}|$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$ **(Ans)**

ঘ নাবিলার পথে হলো AB
জাহিনের পথ হলো AC



নাবিলার পথ বরাবর জাহিনের অতিক্রান্ড় দূরত্ব = AD = AB বরাবর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ

$= \frac{2 \times 1 + 1 \times (-2) + 4 \times 3}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{21}} = 2.62$ একক

সুতরাং জাহিন নাবিলার পথ বরাবর 2.62 একক দূরত্ব অতিক্রম করলো।

প্রশ্ন ▶৪৮ অনিন্দ্য একাদশ শ্রেণিতে পড়ে। সে গ্রামের বাড়িতে গেল বেড়াতে। সেখানে গিয়ে দেখে তাদের একটি জমির আকৃতি অদ্ভুত রকমের বলে তার বাড়ির লোকজন সেটার পরিমাণ নির্ণয় করতে গিয়ে হিমশিম খাচ্ছে। সে দেখল জমিটির আকৃতি হুবহু সামন্ড্রিক আকৃতির। সে আরো দেখল জমিটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 25m এবং এটি পূর্ব-পশ্চিমে বিস্ড়ৃত। এর সন্নিহিত বাহুটির 20 m দৈর্ঘ্যের এবং এটি পূর্ব ও উত্তর দিকের ঠিক মাঝ বরাবর পূর্ব থেকে কোণাকুনি উত্তর-পশ্চিম দিকে বিস্ড়ৃত। পূর্ব দিককে $\hat{i}$ ও উত্তর দিককে $\hat{j}$ আয়ত একক ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অনিন্দ্য তার পাঠ্য পদার্থবিজ্ঞান বইয়ের সূত্র ব্যবহার করে জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে দিল।

[বেপজা পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে? ১
খ. কী কী শর্তে বল দ্বারা কোনো কাজ হয় না? ২
গ. উদ্দীপকে বর্ণিত পূর্ব থেকে উত্তরে বিস্ড়ৃত জমির বাহুটিকে উপাংশ পদ্ধতিতে ভেক্টর রূপে প্রকাশ কর। ৩
ঘ. অনিন্দ্য কীভাবে জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করল তা গাণিতিক বিশে-ষণের মাধ্যমে নিরূপণ কর। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো কিছু বা অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর রৈখিক ভরবেগের ভ্রামককে এর কৌণিক ভরবেগ বলে।

খ কৃতকাজ, $W = Fs \cos \theta$
সুতরাং বল প্রয়োগ করা সত্ত্বেও কাজ হবে না, যদি–
(i) বস্তুর সরণ শূন্য হয়।
(ii) বলের লম্বদিকে বস্তুর সরণ ঘটে।

গ

পূর্ব দিকে কে $\hat{i}$ এবং উত্তর দিককে $\hat{j}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।
তাহলে 20 m দৈর্ঘ্যের বাহুটির X অক্ষ বরাবর উপাংশ = (20m) cos 45°$(-\hat{i}) = (-14.14\text{ m})\hat{i}$

এবং Y অক্ষ বরাবর উপাংশ = (20 m) sin 45° $(\hat{j}) = (14.14\text{ m})\hat{j}$

তাহলে নির্ণেয় ভেক্টররূপে প্রকাশ $= (-14.14\text{ m})\hat{i} + (14.14\text{ m})\hat{j}$

$= 14.14\text{ m}\,(\hat{j} - \hat{i})$ **(Ans.)**

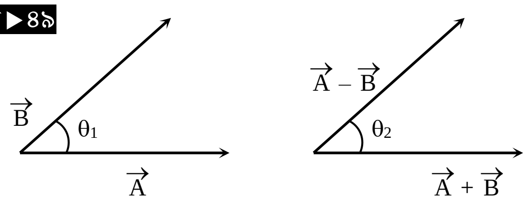
ঘ পূর্ব-পশ্চিম বরাবর বিস্ড়ৃত বাহুটিকে $(25\text{m})\hat{i}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। সামান্ড্রিকের ক্ষেত্রফল = সন্নিহিত বাহুদ্বয়কে ভেক্টর বিবেচনা করে প্রাপ্ত ক্রস গুণফলের মান।

উক্ত ক্রস গুণফল $= (25\text{ m})\hat{i} \times 14.14\text{ m}\,(\hat{j} - \hat{i})$

$= 353.5\hat{k}\text{ m}^2$

সুতরাং ঐ জমির ক্ষেত্রফল $= 353.5\hat{k}\text{ m}^2$

প্রশ্ন ▶৪৯



$\overrightarrow{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

[জালালাবাদ কলেজ, সিলেট]

ক. নাল ভেক্টর কী? ১
খ. স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন বলতে কি বুঝায়? ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান কত হবে? ৩
ঘ. উদ্দীপকের θ_1 এবং θ_2 সমান হবে কিনা– তা গাণিতিকভাবে দেখাও। ৪

৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বা নাল ভেক্টর বলে।

খ দুটি ভেক্টরকে গুণ করে যদি গুণফল একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তবে সেই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে।
দুটি ভেক্টর রাশিকে গুণ করে যদি গুণফল একটি ভেক্টর রাশি পাওয়া যায় তাহলে ভেক্টরের সেই গুণনকে ভেক্টর গুণন বলে।

গ দেওয়া আছে, $\overrightarrow{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\theta_1 = ?$

$\therefore\ |\overrightarrow{A}| = A = \sqrt{1^2\,(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|\overrightarrow{B}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7$

এখন, $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B} = AB \cos \theta_1$

বা, $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = \sqrt{3} \times 7 \times \cos \theta_1$

বা, $2 + 3 + 6 = 7\sqrt{3} \cos \theta_1$

বা, $\cos \theta_1 = \frac{11}{7\sqrt{3}}$

$\therefore\ \theta_1 = 24.87°$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, $\overrightarrow{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$

বা, $(3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}).(-\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) = \sqrt{74} \times \sqrt{30} \times \cos \theta_2$

বা, $-3 - 8 - 35 = \sqrt{2220} \cos \theta_2$

$\therefore\ \theta_2 = 167.5°$

আবার, $\theta_1 = 24.87°$ (গ হতে)

সুতরাং, θ_1 ও θ_2 সমান নয়।

প্রশ্ন ▶৫০ জিনিয়াদের বাড়ির সামনে নবগঙ্গা নদী যেটি স্রোতস্বীনী এবং যার প্রস্থ 1 km। বাড়ির ঠিক সোজাসুজি নদীর অপর পাড়ে কে.সি. কলেজ। তার কলেজের ক্লাস শুরু হয় সকাল ৯ টায়। কোন একদিন সকালে সে ক্লাস করার উদ্দেশ্যে বাড়ি থেকে ৮টা ৫০ মিনিটে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে $10\ kmh^{-1}$ বেগের একটি নৌকায় করে রওনা দেয়। *[সরকারি কে.সি. কলেজ, ঝিনাইদহ]*

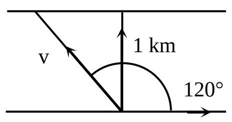
ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চবিন্দুতে ভরবেগ কিরূপ– ব্যাখ্যা কর। ২
গ. ঐ দিন নবগঙ্গায় স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. জিনিয়া কি যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পেরেছিল– গাণিতিক বিশে-ষণের মাধ্যমে মতামত দাও। ৪

৫০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে প্রকাশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, ভরবেগ = m × v। অর্থাৎ ভরবেগ ভর ও বেগ উভয়ের ওপর নির্ভরশীল। প্রাসের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগের উলম্ব উপাংশ v_y এর মান শূন্যে বলে সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ সর্বনিম্ন। এজন্যই প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে ভরবেগ সর্বনিম্ন।

গ



দেওয়া আছে, নৌকার বেগ $v = 10\ kmh^{-1}$
মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 120°$
স্রোতের বেগ $u = ?$
আনুভূমিক বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,
$u + v\cos\alpha = 0$
$\therefore u = 5kmh^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, নদীর প্রস্থ, $d = 1\ km = 1000\ m$
নৌকার বেগ, $v = 10\ kmh^{-1} = 2.78ms^{-1}$
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$
(গ) নং হতে, স্রোতের বেগ, $4 = 5\ kmh^{-1} = 1.39ms^{-1}$
সোজাসুজি নদী পাড় হতে সময় $t = ?$
নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= v\cos 30° + u\cos 90°$
$= v\cos 30°$
আমরা জানি, সোজাসুজি নদী পার হতে সময় $t = \dfrac{d}{v\cos 30°}$
$= \dfrac{1000}{2.78 \times \cos 30°}$
$= 415.36\ s = 6.9\ min$
যেহেতু, তার ক্লাস শুরু হয় 9 টায় এবং সে যাত্রা শুরু কর 8.50 এ; অতএব তার গন্তব্যে পৌছাতে হবে 10 min এর মধ্যে। কিন্তু নদী পাড় হতে তার সময় লাগে 6.9 min অতএব, জিনিয়া ক্লাসে উপস্থিত হতে পেরেছিল।

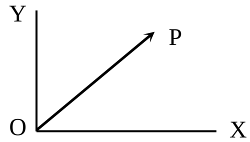
প্রশ্ন ▶৫১ দিয়া ও সেতু কলেজে যাবার পথে $6ms^{-1}$ বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। তারা দুজনই ছাতা নিয়ে $3ms^{-1}$ ও $4ms^{-1}$ বেগে বৃষ্টিতে না ভিজে কলেজে পৌছাল। *[গাংনী ডিগ্রী কলেজ, মেহেরপুর]*

ক. সামান্তরিক সুত্রটি বিবৃত কর। ১
খ. অবস্থান ভেক্টর বলতে কি বুঝ? ব্যাখ্যা কর। ২
গ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে সেতু কত ডিগ্রি কোণে ছাতা ধরেছিল? ৩
ঘ. কে বেশি কোণে ছাতা ধরে ছিল ও কেন? ব্যাখ্যা কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যদি একটি সামান্তরিকের কোন কৌণিক বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোন কণার উপর এককালীন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা হয়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

খ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।



চিত্রে, O হচ্ছে প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দু এবং P যে কোন একটি বিন্দু। $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করে।
$\therefore \overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

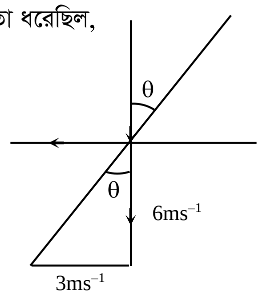
গ মনে করি, বৃষ্টির লব্ধি বেগ উলম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, $\tan\theta = \dfrac{u}{v}$ [চিত্র হতে]
বা, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{4}{6}$
$= 33.7°$ **(Ans.)**

এখানে,
বৃষ্টির বেগ, $v = 6ms^{-1}$
সেতুর বেগ, $u = 4ms^{-1}$

$\therefore$ বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে সেতু 33.7° কোণে ছাতা ধরেছিল।

ঘ (গ) নং থেকে পাই, সেতু 33.7° কোণে ছাতা ধরেছিল।
$\therefore$ চিত্র থেকে দিয়া যে কোণে ছাতা ধরেছিল,
$\tan\theta = \dfrac{3}{6}$
বা, $\theta = \tan^{-1}(1/2) = 26.57°$



$\therefore$ দিয়া 26.57° কোণে ছাতা ধরেছিল। সেতু বেশি কোণে ছাতা ধরেছিল। কারণ সেতুর বেগ বেশী ছিল যাতে সে বৃষ্টির হাত থেকে রক্ষা পেতে পারে।

প্রশ্ন ▶৫২ $\vec{A} = x^2 z\hat{i} - 2y^3\hat{j} + xy^2 z\hat{k}$
[সরকারি পি.সি. কলেজ, বাগেরহাট]

ক. ভেক্টর বিশে-ষণ কাকে বলে? ১
খ. ভেক্টর রাশির ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে– ব্যাখ্যা কর। ২
গ. (1, –1, 1) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল কিনা? তোমার মতামতের স্বপক্ষে যুক্তি দাও। ৪

৫২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে একাধিক ভেক্টরে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর বিশে-ষণ বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে।
ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণ থেকে পাই, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$
$\vec{B}.\vec{A} = BA\cos\theta$

কিন্তু A ও B যথাক্রমে ভেক্টর রাশি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মান অর্থাৎ A ও B স্কেলার রাশি।

∴ স্কেলার রাশির গুণন থেকে পাই,

$AB\cos\theta = BA\cos\theta$

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ এটিই বিনিময় সূত্র।

অর্থাৎ, দুইটি ভেক্টর রাশির ডট গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

গ এখানে, $\vec{A} = x^2 z\,\hat{i} - 2y^3z^2\,\hat{j} + xy^2z\,\hat{k}$

এখন, (1, –1, 1) বিন্দুতে তথা $x = 1, y = -1$ এবং $z = 1$ এ

ঘ এখানে, $\vec{A} = x^2z\,\hat{i} - 2y^3z^2\,\hat{j} + xy^2\,z\,\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$\therefore \text{Curl } A = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$= \hat{i}\,(2xyz + 4y^3z) - \hat{j}\,(y^2z - x^2) + \hat{k}\,(-0 - 0)$

$= \hat{i}\,(2xyz + 4y^3z) - \hat{j}\,(y^2z - x^2)$

$\therefore \text{Curl } A \neq 0$

∴ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶৫৩ 3 km প্রস্থ একটি নদীর স্রোতের বেগ 2kmh^{-1}। স্রোতহীন নদীতে লাবিবা 4kmh^{-1} বেগে সাতার কাটতে পারে। *[নড়াইল সরকারি ভিক্টোরিয়া কলেজ, নড়াইল]*

ক. ডাইভারজেন্স কী? ১

খ. 'স্ক্রুকে একই দিকে ঘুরিয়ে পাঠ নিলে পিছট ত্র"টি হতে রেহাই পাওয়া সম্ভব'– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. স্রোত থাকা অবস্থায় স্রোতের সাথে 30° কোণে 3 kmh^{-1} বেগে সাতার কেটে নদীর অপর তীরে পৌঁছাতে লাবিব'র কত সময় লাগবে? ৩

ঘ. 'বেগের মান পরিবর্তন না করে লাবিবাকে কোন দিকে সাতার কাটলে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌঁছানো সম্ভব'– গাণিতিক বিশে-ষণ কর। ৪

<u>৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর</u>

ক ডেল (∇) অপারেটরের সাথে $\vec{v}$ এর স্কেলার গুণফলকে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে।

খ যে সকল যন্ত্র স্ক্রু, নাট ইত্যাদি নীতির ওপর ভিত্তি করে তৈরি সে সকল যন্ত্র একটু পুরানো হলেই পিছট ত্র"টি দেখা যায়। স্ক্রুকে একেকবার একেক দিকে ঘুরিয়ে যন্ত্র ব্যবহার করলে পিছট ত্র"টি বেড়ে যায়, কারণ এক্ষেত্রে নাটের গর্ত বড় হয়ে যেতে পারে বা স্ক্রু ক্ষয় হয়ে আলগা হয়ে যেতে পারে। এজন্য পাঠ নেয়ার সময় স্ক্রুকে একই দিকে ঘুরিয়ে পাঠ নিলে এই ত্র"টির হাত থেকে রক্ষা পাওয়া যায়।

গ দেওয়া আছে,

নদীর প্রস্থ, d = 3 km

স্রোতের বেগ, $u = 2\text{ kmh}^{-1}$

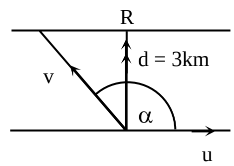
নদী পাড় হতে প্রয়োজনীয় সময় t = ?

এখন, নদীর প্রস্থ বরাবর লাবিবার বেগের উপাংশ হচ্ছে $v\sin\alpha$ যা তাকে এ পাড় হতে অন্য পাড়ে নদী পাড় করতে ক্রিয়া করে।

অতএব, $d = v\sin\alpha\, t$ [$x = vt$ সমবেগে ক্ষেত্রে]

$\therefore t = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{3}{3\sin 30^\circ} = 2\text{h} = 120\text{ min}$ **(Ans.)**

ঘ



দেয়া আছে, নদীর স্রোতের বেগ $u = 2\text{ kmh}^{-1}$

লাবিবার বেগ $v = 4\text{ kmh}^{-1}$

নদীর প্রস্থ d = 3 km

মনে করি, সোজাসুজি ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে পৌছাতে তাকে স্রোতের সাথে α কোণে সাঁতার দিতে হবে।

এখন, নদীর স্রোত বরাবর উপাংশ নিয়ে পাই,

$u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = R\cos 90^\circ$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-u}{v}\right)$ $\therefore \alpha = 120^\circ$ **(Ans.)**

$A = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $B = 10\hat{i} + P\hat{j} - 15\hat{k}$ পরস্পর সমান্ড়রাল দুটি ভেক্টর। *[আকিজ কলেজিয়েট স্কুল, নাভারণ, যশোর]*

ক. ভেক্টর যোগের সামান্ড়রিক সূত্র কাকে বলে? ১

খ. ডাইভারজেন্স ও কার্লের মধ্যে পার্থক্য আলোচনা কর। ২

গ. P এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি কি কখন লম্ব হতে পারবে? গাণিতিক বিশে-ষণ করে দেখাও। ৪

<u>৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর</u>

ক কোনো সামান্ড়রিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোনো কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে। তাহলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্ড়রিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

খ ডাইভারজেন্স ও কার্লের মধ্যে পার্থক্য নিরূপ :

i. ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোন বিন্দু অভিমুখী বা বিন্দু থেকে অপসারিত হচ্ছে তা নির্দেশ করে।
অপরদিকে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারপাশে একটি রেখা সমাকলনের মান একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তাকে উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল বলে।

ii. কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স অবশ্যই স্কেলার ক্ষেত্র। অপরদিকে, কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল অবশ্যই ভেক্টর ক্ষেত্র।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{B} = 10\hat{i} + P\hat{j} - 15\hat{k}$

ভেক্টর দু'টি সমান্ড়রাল।

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, α = 0°

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = (AB\sin\alpha)\,\hat{\eta} = (AB\sin 0^\circ)\,\hat{\eta} = 0$.............(i)

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 10 & P & -15 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\,\{(-1)\times(-15) - (-3)\times P\} - \hat{j}\,\{2\times(-15) - (-3)\times 10\}$

$+ \hat{k}\,\{2\times P - (-1)\times 10\}$

বা, $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}\,(15 + 3P) - \hat{j}\,(-30 + 30) + \hat{k}\,(2P + 10)$

বা, $\hat{i}\,(15 + 3P) - 0 + \hat{k}\,(2P + 10) = \vec{A} \times \vec{B}$

বা, $\hat{i}\,(15 + 3P) + \hat{k}\,(2P + 10) = 0$ [(i) হতে]

কিন্তু কোন ভেক্টর শূন্যে হলে তার উপাংশগুলোও পৃথক পৃথক ভাবে শূন্য হয়।

$\hat{i}\,(15 + 3P) = 0$

$\therefore \quad P = -5$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$

$$\vec{B} = 10\hat{i} + P\hat{j} - 15\hat{k}$$

মনে করি, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

ভেক্টরদ্বয় লম্ব হলে $\alpha = 90°$ হবে।

$\therefore \quad \vec{A} . \vec{B} = AB \cos \alpha = AB \cos 90° = 0$

বা, $20 + 45 = P$

$\therefore \quad P = 65$ **(Ans.)**

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় লম্ব হবে যদি $P = 65$ হয়।

প্রশ্ন ▶৫৫ নিচের চিত্রে যথাক্রমে 200 N, 220 N এবং 250 N বলে গুণ টানছে।

[গুরুদয়াল সরকারি কলেজ, কিশোরগঞ্জ]

ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের ভূমিকা আছে কি? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নৌকার গতির দিকে লব্ধি বলের পরিমাণ বর্ণনা সহ ব্যাখ্যা কর? ৩

ঘ. প্রযুক্ত মোট বলের কত শতাংশ কার্যকর হচ্ছে গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যেকোনো দিকে এমন একটি ভেক্টর রয়েছে যার মান এক, একে ঐ দিক বরাবর একক ভেক্টর বলে।

খ পাখির উড্ডয়নে ভেক্টর বিভাজনের কোনো ভূমিকা নেই, তবে ভেক্টর যোজনের ভূমিকা রয়েছে। পাখি তার প্রতিটি ডানা দিয়ে বাতাসের ওপর তীর্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। তবে পাখিটি তীর্যকভাবে নয়, বরং সম্মুখদিকে এগিয়ে যায়। এর কারণ হলো বাতাসও প্রতিটি ডানার ওপর তীর্যকভাবে (বিপরীত দিকে) প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। এ প্রতিক্রিয়া বলদ্বয়ের লব্ধির দিকে পাখিটি এগিয়ে যায়। এটি ভেক্টর যোজনের উদাহরণ।

গ প্রযুক্ত বলত্রয় $F_1 = 200N, F_2 = 220N, F_3 = 250$ N

বলত্রয় নৌকার দিকের সাথে কোণ উৎপন্ন করে,

$\theta_1 = 30°; \theta_2 = 45°; \theta_3 = 60°$

$\therefore$ নৌকার গতির দিকে লব্ধি বলের পরিমাণ

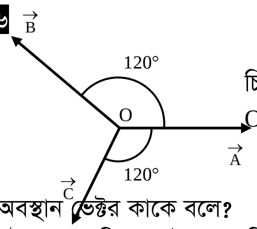
$$= F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 + F_3\cos\theta_3$$
$$= 200N \times \cos30° + 220N \times \cos45° + 250N \times \cos60°$$
$$= 453.8 \text{ N } \textbf{(Ans.)}$$

ঘ প্রযুক্ত বল তিনটির পাটিগাণিতিক (Arithmatic) বলসমূহের অকার্যকর অংশের পাটিগাণিতিক যোগফল

$= 670N - 453.8N = 216.2N$

$\therefore$ প্রযুক্ত মোট বলের যে পরিমাণ অকার্যকর হচ্ছে তার শতকরা পরিমাণ $= \frac{216.2N}{670N} \times 100\% = 32.3\% = 32.3$ শতাংশ

প্রশ্ন ▶৫৬



চিত্রের ভেক্টর তিনটি একই তলে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল।

[কক্সবাজার সরকারি কলেজ]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. দুই এর অধিক ভেক্টরের লব্ধি সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় কি? তোমার উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান সমান হলে এ দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান নির্ণয় কর। ৩

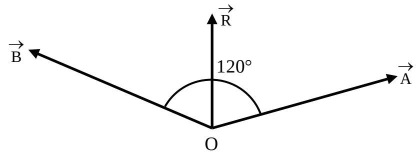
ঘ. যদি ভেক্টর তিনটির মান পরস্পর সমান হয়, তবে এদের লব্ধি ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট কোনো দিক থাকবে এর মিথ্যা প্রমাণ কর।৪

৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ কোন বিন্দুতে দুটি ভেক্টরের বেশি ভেক্টর ক্রিয়াশীল হলে দুটি ভেক্টরের লব্ধির সাথে তৃতীয়টির লব্ধি সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। আবার তিনটি ভেক্টরের লব্ধির সাথে চতুর্থ ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় করা যায়। এভাবে যে কোন সংখ্যক ভেক্টর রাশির লব্ধি নির্ণয় করা সম্ভব তবে তা সময়সাপেক্ষ। সাধারণত দুই এর বেশি ভেক্টরের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি ভেক্টরকে পরস্পর লম্ব উপাংশে বিভক্ত করে পরে লব্ধি নির্ণয় করা হয়।

গ মনেকরি, ভেক্টরের মান P, ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে লব্ধি হবে,



লব্ধির মান, $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 120°}$

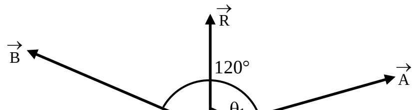
$$= \sqrt{P^2 + P^2 + 2.P.P \cos 120°}$$
$$= \sqrt{2P^2 + 2P^2.\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{2P^2 - P^2}$$
$$= \sqrt{P^2}$$
$$= P$$

অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের মান সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির মান $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের সমান হবে।

ঘ মনেকরি,

$\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টরের মান P

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি, $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করলে,



$$\tan\theta_1 = \frac{P \sin 120°}{P + P \cos 120°}$$

বা, $\tan\theta_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} P}{\frac{1}{2} . P}$

বা, $\tan\theta_1 = \sqrt{3}$

বা, $\theta_1 = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$$= 60°$$

আবার, $R_1 = \sqrt{P^2 + P^2 + 2.P.P \cos 120°}$

$$= \sqrt{2P^2 - P^2}$$
$$= P$$

$\therefore$ লব্ধি ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট কোন দিক থাকবে না।

প্রশ্ন ▶৫৭ $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

[গাজীপুর সিটি কলেজ]

ক. অবস্থান ভেক্টর কী? ১
খ. ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলেনা ব্যাখ্যা কর। ২
গ. $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ কত হবে? ৩
ঘ. ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কিনা গাণিতিক বিশে-ষণের মাধ্যমে মতামত দাও। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ মনেকরি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ θ হলে, $\vec{A} \times \vec{B} = \eta\, AB \sin\theta$

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = AB \sin\theta \quad = -AB \sin\theta\, \hat{n}$

অর্থাৎ ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

এবং, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

বের করতে হবে, এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$

আমরা জানি, $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $\theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$

$$= \cos^{-1}\frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}}$$

$= 29.21°$ **(Ans.)**

ঘ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কিনা জানতে হলে যে কোনো দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের সাথে অপর ভেক্টরের ডটগুণফল করতে হবে, যদি ডটগুণফলের মান শূন্য হয় তাহলে ভেক্টরত্রয় সমতলীয় এবং যদি শূন্য না হয় তাহলে সমতলীয় হবে না।

দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

এবং, $\vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

এখন $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C} = (-2\hat{i} - 4\hat{j}).(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= -2 - 8$

$= -10$

সুতরাং, ভেক্টর তিনটি সমতলীয় নয়।

প্রশ্ন ▶৫৮ একটি নদীতে স্রোতের বেগ 7kmh^{-1} এবং মাঝির বেগ 14kmh^{-1}। *[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]*

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১
খ. সুষম দ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে কোন বস্তু আবর্তন করলে এর ত্বরণ থাকে কেন? ২
গ. নৌকা নদীর আড়াআড়ি চালালে লব্ধিবেগের মান কত গাণিতিক ভাবে বিশ্লেষণ কর। ৩
ঘ. নৌকায় নদী খাড়াখাড়ি ভাবে পার হতে হলে মাঝিকে কী ব্যবস্থা গ্রহণ করতে হবে তার একটি গাণিতিক বিশে-ষণ কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্বক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, বেগের পরিবর্তন ঘটে শুধু এর মান বা দিক বা উভয়ের পরিবর্তনের দ্বারা। সুতরাং কোনো বস্তুর বেগের মানের (দ্রুতি) পরিবর্তন না ঘটলেও এর দিকের পরিবর্তন ঘটলে বেগের পরিবর্তন ঘটে। সুষম দ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে আবর্তনরত বস্তুর বেগের মানের পরিবর্তন না ঘটলেও দিকের পরিবর্তন ঘটে। বেগের পরিবর্তন ($\Delta\vec{v}$) অশূন্য হলে ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে, $\left(\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right)$ ত্বরণের অশূন্য মান থাকে। তাই সুষম দ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তু আবর্তন করলে এর ত্বরণ থাকে।

গ দেওয়া আছে, নৌকার বেগ, $u = 14\text{ kmh}^{-1}$

স্রোতের বেগ, $v = 7\text{kmh}^{-1}$

নৌকাটি নদীর আড়াআড়ি চালালে $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যকার কোণ, $\theta = 90°$। বের করতে হবে, লব্ধিবেগ, $w = ?$

আমরা জানি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90°}$

$= \sqrt{14^2 + 7^2 + 2 \times 14 \times 7\cos 90°}$

$= 15.65\text{ kmh}^{-1}$ **Ans.**

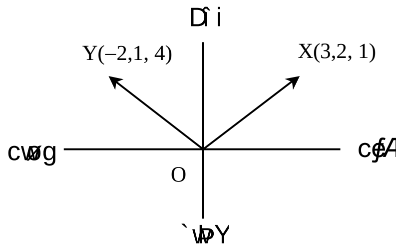
ঘ নৌকায় নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে স্রোতের দিকের সাথে $\alpha(> 90°)$ কোণে নৌকাটি চালাতে হবে।

এক্ষেত্রে লব্ধিবেগ $\vec{w}$ এর দিক হবে নদীর প্রস্থ বরাবর।

$$\therefore \sin(\alpha - 90°) = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{7\text{kmh}^{-1}}{14\text{kmh}^{-1}} = \frac{1}{2}$$

সুতরাং নৌকায় নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে মাঝিকে স্রোতের দিকের সাথে $120°$ কোণে নৌকা চালাতে হবে।

প্রশ্ন ▶৫৯ উদ্দীপকে X ও Y বিন্দুদ্বয় দুটি অবস্থান নির্দেশ করে। O হচ্ছে মূল বিন্দু।



[প্রেসিডেন্ট প্রফেসর ড. ইয়াজউদ্দিন আহম্মেদ রেসিডেন্সিয়াল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, মুন্সিগঞ্জ]

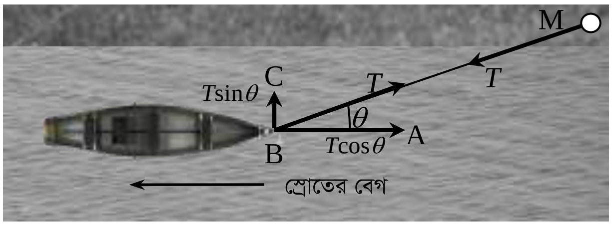
ক. ভেক্টর বিভাজন কী? ১
খ. গুণটানার ফলে নৌকা সামনের দিকে কিভাবে এগিয়ে চলে- ব্যাখ্যা কর। ২
গ. OX ও OY ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. OX ও OY ভেক্টরদ্বয়কে সামান্তরিকের দুটি কর্ণ বিবেচনা করে উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর বিভাজন হলো একটি নির্দিষ্ট ভেক্টরকে বিভিন্ন দিকে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক ভেক্টরে এমনভাবে বিশি-ষ্টকরণ যাতে উপাংশ ভেক্টরগুলোর যোগলব্ধি মূল ভেক্টরের সমান হয়।

খ নৌকার গুণ টানা বলতে বুঝায় নদীর পাড় হতে দড়ির সাহায্যে নৌকাকে সামনে টেনে নিয়ে যাওয়া। পাড় হতে গুণ টানা হলে টান

বলের অনুভূমিক উপাংশ বা সামনের দিকের উপাংশ নৌকাকে সামনের দিকে নিয়ে যায়।



চিত্র- গুনটানা নৌকা

ধরা যাক, পাড় হতে নৌকার B বিন্দুতে দড়ি বেধে BM বরাবর T বল দ্বারা নৌকাকে টানা হচ্ছে। এই গুণটানা বল T এর অনুভূমিক উপাংশ Tcosθ সামানের দিকে এবং উল-ম্ব উপাংশ Tsinθ তীরের দিকে কাজ করে। এখন Tcosθ নৌকাকে সামনে নিয়ে যায় এবং Tsinθ নৌকাকে পাড়ের দিকে নিয়ে যেতে চায়। এ কারণে মাঝি নদীর স্রোতকে ব্যবহার করে বৈঠার সাহায্যে Tsinθ এর বিপরীত দিকে বল প্রয়োগ করে একে প্রশমিত করলে Tcosθ বেশি কার্যকর হয় এবং নৌকা সামনের দিকে যায়।

গ প্রশ্নমতে, $\overrightarrow{OX} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OY} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$

বের করতে হবে, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ এর মধ্যকার কোণ, $\alpha = ?$

আমরা জানি, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = OX.OY.\cos\alpha$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}0 = 90°$ **(Ans.)**

ঘ 'গ' অংশ হতে পাই, $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α = 90°

OX এর দৈর্ঘ্য = $\sqrt{3^2 + 2^2 + 1}$

$\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ হলো সামান্ড্তরিকের দুটি কর্ণ

$\therefore$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}\right| = \frac{1}{2}$ OX. OY. sinα

$= \frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{21}\sin 90° = 8.573$ বর্গ একক।

প্রশ্ন ▶৬০ $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রকে নির্দেশ করে এবং $\vec{r}$ অবস্থান ভেক্টরকে নির্দেশ করে।

[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল ও কলেজ, ঢাকা]

ক. ভেক্টর বিভাজন কাকে বলে? ১

খ. $\vec{\nabla}.\vec{r}$ এর মান বের কর। ২

গ. (1, –1, 1) বিন্দুতে $\vec{F}$ এর ডাইভারজেন্স বের কর। ৩

ঘ. বল ক্ষেত্রটির প্রকৃতি ভাবে বিশ্লেষণ কর।। ৪

৬০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার পদ্ধতিকে ভেক্টরের বিভাজন বলে।

খ $\vec{r}$ অবস্থান ভেক্টরকে নির্দেশ করে। সুতরাং, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

গ প্রদত্ত ক্ষেত্র ভেক্টর, $\vec{F} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$ এবং প্রদত্ত বিন্দু (1, –1, 1)

$\vec{F}$ এর ডাইভারজেন্স,

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left\{(6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}\right\}$$

$\therefore$ (1, –1, 1) বিন্দুতে ডাইভারজেন্স = 12.1.(–1) – 6.1.1

$= -12 - 6 = -18$ **(Ans.)**

ঘ প্রদত্ত বল ক্ষেত্রটির কার্ল,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x^2y - z^3 & 2x^3 & -3xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y - z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3)\right\}$$

সুতরাং বল ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶৬১ একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে প্রকাশ করার সমীকরণ হলো $\vec{P} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$ এবং ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর হলো $\vec{\nabla}$ ।

[শহীদ সৈয়দ নজরুল ইসলাম কলেজ, ময়মনসিংহ]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. একক ভেক্টরের দিক এবং মান কীভাবে পাওয়া যায়? ২

গ. (3, 3, – 2) বিন্দুতে div $\vec{P}$ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. প্রাপ্ত এবং সম্ভাব্য প্রয়োজনীয় গাণিতিক বিশে-ষণ হতে "ভেক্টর ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল কিন্তু সলিনয়ডাল নয়"— যাচাই কর। ৪

৬১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ মান শূন্য নয় এরূপ কোন ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে একক ভেক্টর পাওয়া যায় এবং দিক হয় উক্ত ভেক্টরের দিকে। $\vec{A}$ একটি ভেক্টর হলে এবং $|\vec{A}| \neq 0$, $\vec{A}$ এর দিক বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

গ এখানে, $\vec{P} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

div $\vec{P} = (\vec{\nabla}.\vec{P})$

$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).$

$= 108 + 36 = 144$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{P} = (6x^2y - z^3)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

'গ' অংশ হতে পাই, div $\vec{P} = 12xy - 6xz$

$\therefore$ div $\vec{P} \neq 0$

$\therefore$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল নয়।

আবার,

Curl $\vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P}$

$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3)\right\}$

$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(-3z^2 - 0 + 3z^2) + \hat{k}(6x^2 - 6x^2 + 0)$

$= 0.\hat{i} - 0.\hat{j} + 0.\hat{k}$

$= 0$

আবার, Curl $\vec{P}$ = 0 হওয়ায় ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।
সুতরাং, ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল কিন্তু সলিনয়ডাল নয়।

প্রশ্ন ▶৬২ চিত্রে প্রবাহমান নদীটির প্রশস্ড়তা 1.5 km এবং স্রোতের বেগ 4 kmh^{-1}। একজন মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌঁছালেন। নৌকার বেগ 3kmh^{-1}।

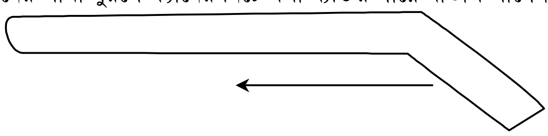
[পিরোজপুর সরকারি মহিলা কলেজ]

ক. তাৎক্ষণিক ত্বরণ কাকে বলে? ১
খ. বৈদ্যুতিক ফ্যানের পাখা ঘুরলে ফ্যানের নীচে বসা ব্যক্তির গায়ে বাতাস লাগে কেন? ২
গ. AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ড় দূরত্ব আলোচনা কর। ৩
ঘ. AD বরাবর নৌকা চালিয়ে মাঝি কি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন? গাণিতিক বিশে-ষণ পূর্বক তোমার মতামত দাও। ৪

৬২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

খ নিচে বৈদ্যুতিক ফ্যানের যেকোনো একটি পাখার প্রস্থচ্ছেদ দেখানো হয়েছে। ফ্যান যখন ঘুরে তখন পাখাটি তীর চিহ্নিত পথে অগ্রসর হয়। তখন পাখা সংলগ্ন বাতাসের গায়ে এটি ধাক্কা প্রদান করে। ঐ বাতাস তখন সজোরে নিচে নেমে আসতে বাধ্য হয়। এ কারণে, বৈদ্যুতিক ফ্যানের পাখা ঘুরলে ফ্যানের নিচে বসা ব্যক্তির গায়ে বাতাস লাগে।



গ দেওয়া আছে,
নৌকার বেগ, $u = 3\ kmh^{-1}$
এবং স্রোতের বেগ, $v = 4kmh^{-1}$

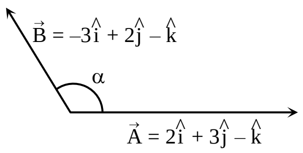
AB বরাবর বা নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকা চালালে $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যকার কোণ, $\alpha = 90°$
বের করতে হবে, লব্ধি বেগ, w = ?
আমরা জানি, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos 90°}\ kmh^{-1} = 5\ kmh^{-1}$
এভাবে নদীপার হতে t পরিমাণ সময় লাগলে, AB = 1.5 km = ut
এবং AC = wt
$\therefore$ AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ড় দূরত্ব = 2.5 km **(Ans.)**

ঘ নৌকার বেগ (3kmh^{-1}) যেহেতু স্রোতের বেগ (4kmh^{-1}) অপেক্ষা কম, তাই যেকোনো দিকে নৌকা চালিয়েই সোজাসুজি ওপারে যাওয়া মাঝির পক্ষে সম্ভব হবে না। এ সংক্রান্ড় গাণিতিক বিশে-ষণ নিম্নরূপ:

AD বরাবর নৌকা চালালে, $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যকার কোণ,

$\alpha = 180° - 30° = 150°$ লব্ধিবেগ, $\vec{v}$ এর দিকের সাথে θ কোণ
সুতরাং, AD বরাবর নৌকা চালালে স্রোতের দিকের সাথে 46.94° কোণে নৌকাটি অগ্রসর হবে, ফলে তা আড়াআড়িভাবে নদী পার হতে পারবে না, ফলে মাঝি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন না।

প্রশ্ন ▶৬৩



[ইবনে তাইমিয়া স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিল-া]

ক. অপারেটর কী? ১
খ. ডাইভারজেন্সের ভৌত তাৎপর্য লিখ? ২
গ. $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোন α কে সমদ্বিখন্ডিত করে–গাণিতিকভাবে প্রমাণ কর। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক ক্রিয়া একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্ড়রিত করে তাকে অপারেটর বলে।

খ ডাইভারজেন্স ভৌত তাৎপর্য:
i. ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার রাশি যা দ্বারা একক আয়তনে কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা বিন্দু থেকে অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে।
ii. কোনো ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে উক্ত ভেক্টরকে সলিনয়ডাল বলে।

গ দেওয়া আছে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3 + 2)\hat{i} - (-2 - 3)\hat{j} + (4 + 9)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 13\hat{k}$$ **(Ans.)**

ঘ মনে করি, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি R; $\vec{A}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।
দেওয়া আছে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

আবার, $|\vec{B}| = \sqrt{9 + 4 + 1}$ $\therefore$ বা, $B = \sqrt{14}$
আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{14}\sin\alpha}{\sqrt{14} + \sqrt{14}\cos\alpha}$

বা, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{14}\sin\alpha}{\sqrt{14}(1 + \cos\alpha)}$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

$\therefore \theta = \dfrac{\alpha}{2}$

সুতরাং, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোন α কে সমদ্বিখন্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶৬৪ নদীতীরবর্তী একটি স্টেশন হতে সকাল 7.30 মিনিটে ঢাকাগামী ট্রেন ছাড়বে। নদীর অপর পাড়ে খেয়াঘাট হতে এক লোক সকাল 7 ঘটিকায় স্রোতের সাথে 30° কোণে ঘণ্টায় 3km বেগে যাত্রা করে স্টেশনে পৌঁছল। উলে-খ্য নদীর প্রস্থ 0.5 km এবং নদীতে স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 1 km. *[স্কলার্সহোম, সিলেট]*

ক. কাজ-শক্তি উপপাদ্যটি লিখ। ১
খ. কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ শূন্য হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকে বর্ণিত খেয়াঘাট হতে স্টেশনের দূরত্ব হিসাব কর। ৩
ঘ. লোকটি কি যথাসময়ে ঢাকাগামী ট্রেনটি ধরতে পেরেছিল? উদ্দীপকের আলোকে গাণিতিকভাবে বিশে-ষণ কর। ৪

৬৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কাজ শক্তি উপপাদ্য : “কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃতকাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান।”

খ আমরা জানি,

কাজ, $W = F S \cos\theta$

F = প্রযুক্ত বল

S = বস্তুর সরণ

θ = F ও S এর মধ্যবর্তী কোণ।

কোন বস্তু যখন বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান থাকে তখন কেন্দ্রমুখী বল F ও সরণ S এর মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হয়।

এজন্য, কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ শূন্য হয়।

গ এখানে, স্রোতের বেগ, $u = 1 km/h$

লোকের বেগ, $v = 3km/h$

নদীর প্রস্থ, $S = 0.5$ km

এখানে, লোকের বেগের $v \sin\theta$ উপাংশটি নদী পার হতে কাজ করে।

এখানে, কার্যকরী বেগ $v' = v\sin30 = \left(3 \times \frac{1}{2}\right)$ km/h

$= 1.5$ km/h

$\therefore$ S দূরত্ব অতিক্রমে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{S}{v'} = \frac{0.5}{1.5}\ h = \frac{1}{3} h$

আবার, অনুভূমিক বরাবর কার্যকরী বেগ, $v'' = v \cos 30 + 1$

$= (1 + 3 \cos 30)$ km/h

$= 3.6$ km/h

$\therefore$ খেয়াঘাট হতে স্টেশনের দূরত্ব, $S'' = \sqrt{S^2 + S'^2}$

বা, $S'' = \sqrt{(0.50^2 + (1.2)^2)}$ km

$\therefore S'' = 1.3$ km **(Ans.)**

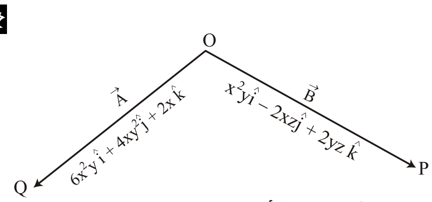
ঘ লোকটির যাত্রার পর হতে ট্রেন ছাড়া পর্যন্ড় অবশিষ্ট সময় $t = 30$ min $= 0.5$ h

লোকটির অপর পাড়ে পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় সময় $t' = \frac{1}{3}$ h [গ হতে]

□ $t' < t$

সুতরাং, লোকটি ট্রেনটি ধরতে পেরেছিল।

প্রশ্ন ▶৬৫



[সামসুল হক খান স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. নাল ভেক্টর কী? ১

খ. ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কি? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের $\vec{B}$ টি ঘূর্ণনশীল কিনা ব্যাখ্যা কর। ৪

৬৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং প্রান্ড়বিন্দু একই অবস্থানে ফলে ভেক্টরটির মান শূন্য এবং এর দিক সুনির্দিষ্ট নয়, তাকে নাল ভেক্টর বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের ধারণকারী তলের লম্বদিকে একক ভেক্টর $\vec{n}$ এবং ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ θ হলে, ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণনের ক্ষেত্রে, $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\vec{n}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A} = AB \sin\theta\,(-\vec{n}) = -AB \sin\theta\vec{n}$

অর্থাৎ $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক যেদিকে, $\vec{B} \times \vec{A}$ এর দিক তা বিপরীত দিকে।

$\therefore \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ বা, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

সুতরাং, ভেক্টরের ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 6x^2y\,\hat{i} + 4x\,y^2\,\hat{j} + 2x\,\hat{k}$

$\therefore \vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স $= \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$$= \left(\hat{i}\frac{d}{dx} + \hat{j}\frac{d}{dy} + \hat{k}\frac{d}{dz}\right)\cdot\left(6\,x^2y\hat{i} + 4\,x\,y^2\,\hat{j} + 2x\,\hat{k}\right)$$

$= 20xy$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপকের $\vec{B}$ ভেক্টরটি হলো,

$\vec{B} = x^2y\,\hat{i} - 2x\,z\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$

$$\text{এর কার্ল} = \vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{d}{dy}(2yz) - \frac{d}{dz}(-2xz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{d}{dx}(2yz) - \frac{d}{dz}(x^2y)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{d}{dx}(-2xz) - \frac{d}{dy}(x^2y)\right\}$$

$= \hat{i}\,(2z + 2x) - \hat{j}\,(0 - 0) + \hat{k}\,(-2z - x^2)$

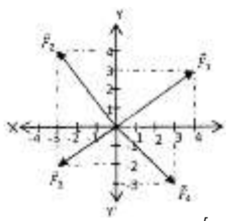
$= 2\,(x + z)\,\hat{i} - \hat{k}\,\,(2z + x^2)$

উদ্দীপকের $\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল হতে হলে এর কার্ল অশূন্য হতে হবে। তবে $\vec{B}$-এর কার্লে x, z রাশিগুলো থাকায় এটা স্পষ্ট যে, ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থার সকল বিন্দুতে এটি ঘূর্ণনশীল হবে না।

যে সকল বিন্দুর জন্য $x = 0$ এবং $z = 0$, ঐ সকল বিন্দুতে এর কার্ল শূন্য, তাই ঐ সকল বিন্দুতে $\vec{B}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল। $(x = 0, z = 0)$ দ্বারা মূলত একটি সরলরেখা বুঝায় (Y অক্ষ)। সুতরাং Y অক্ষের উপরস্থ সকল বিন্দুতে $\vec{B}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

এছাড়া Y অক্ষের সমান্ড়রাল যে রেখাটির ওপরস্থ যেকোনো বিন্দুর x স্থানাংক 2 এবং z স্থানাঙ্ক -2, সেটির ওপরস্থ সকল বিন্দুতেও $\vec{B}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল (কারণ $x = 2, z = -2$ হলে $x + z = 0$ এবং $2z + x^2 = 0$)। এগুলো বাদে ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় অন্য যেকোনো বিন্দুতে $\vec{B}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶৬৬ নিচের চিত্রে দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় চারটি বলের মান ও দিক নির্দেশিত হল।



[অগ্রণী স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. আয়ত একক ভেক্টর কী? ১

খ. একটি বাক্সকে রশির সাহায্যে টেনে নেওয়ার ক্ষেত্রে রশির দৈর্ঘ্য বেশি হলে টানতে সুবিধা হয় কেন? ২

গ. $\vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ বলের লব্ধির মান নির্ণয় কর। ৩

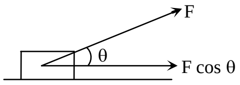
ঘ. $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ ও $\vec{F_4}$ বলগুলোর লব্ধির মান নির্ণয় করে ধনাত্মক X অক্ষের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। ৪

৬৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থায় X, Y ও Z অক্ষ বরাবর ক্রিয়ারত একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ মনে করি, কোনো বাক্সকে মেঝের ওপর দিয়ে টেনে নিয়ে যাওয়ার ক্ষেত্রে এর ওপর রশি দ্বারা F মানের বল প্রয়োগ করা হচ্ছে এবং এই বল

অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে বাক্সটি টেনে নিয়ে যাওয়ার ক্ষেত্রে কার্যকর বল = প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta$।



লক্ষ্য করি যে, নির্দিষ্ট মানের F এর জন্য $F\cos\theta$ বেশি হবে যদি $\cos\theta$ এর মান বেশি হয় বা θ এর মান কম হয়, এটি সম্ভব যদি রশির দৈর্ঘ্য বেশি হয়। একারণেই, একটি বাক্সকে রশির সাহায্যে টেনে নেওয়ার ক্ষেত্রে রশির দৈর্ঘ্য বেশি হলে টানতে সুবিধা হয়।

গ মনে করি, X ও Y অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$

উদ্দীপকে মতে, $\vec{F_1} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{F_2} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$

$\therefore$ লব্ধির মান $= |\vec{F}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = 5\sqrt{2}$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক মতে, $\vec{F_1} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{F_2} = -3\hat{i} + 4\hat{j}$,

$\vec{F_3} = -3\hat{i} - 2\hat{j}$, $\vec{F_4} = 3\hat{i} - 3\hat{j}$

$\therefore$ $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ ও $\vec{F_4}$ বলগুলোর লব্ধি,

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{i} - 3\hat{j}$

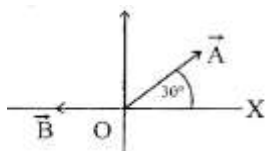
$= \hat{i} + 2\hat{j} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$

$\therefore$ লব্ধির মান $= |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

ধনাত্মক X অক্ষের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণ

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.4°$$

প্রশ্ন ▶৬৭ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ চিত্রানুসারে O বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। $|\vec{A}| = 15$ ও $|\vec{B}| = 6$। ভেক্টরদ্বয়ের যোজন ও বিয়োজনের ফলে লব্ধি ভেক্টর হয় যথাক্রমে $(\vec{A} + \vec{B})$ ও $(\vec{A} - \vec{B})$.



[সফিউদ্দিন সরকার একাডেমী এন্ড কলেজ, গাজীপুর]

ক. সামান্তরিকের সূত্রটি লিখ। ১
খ. কার্লের তাৎপর্য ব্যাখ্যা কর। ২
গ. উদ্দীপকের তথ্য হতে A_x ও B_y এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. লব্ধি ভেক্টরদ্বয় ধনাত্মক X-অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করতে পারে না। গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সত্যতা নিরূপন কর। ৪

৬৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো কণার উপর একই সময় ক্রিয়াশীল দুটি সমজাতীয় ভেক্টরকে যদি কোনো বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায়, তবে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি এদের লব্ধি নির্দেশ করবে।

খ যদি কোন স্থানের একটি এলাকায় প্রতিটি বিন্দুতে $\vec{v}(x, y, z) = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z$ একটি অন্তরীকরণযোগ্য রাশি হয় তাহলে $\vec{v}$ এর কার্ল $= \vec{\nabla} \times \vec{v}$

কোন ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ঐ ভেক্টরের ক্ষেত্রে একই ক্ষেত্রফলের উপর সর্বোচ্চ রেখা যোগজের সমান। কোনো ভেক্টরের কার্ল থেকে জানা যায় ক্ষেত্রটি ঘূর্ণনশীল না অঘূর্ণনশীল। যদি কোন ভেক্টরের কার্লের মান শূন্য হয় তবে এটি অঘূর্ণনশীল হবে।

গ দেওয়া আছে, $|\vec{A}| = 15$, $|\vec{B}| = 6$

x অক্ষের সাথে $\vec{A}$ ভেক্টরটি $\theta_1 = 30°$ কোণ উৎপন্ন করে

$\therefore B_y = |\vec{B}|\cos\theta_2 = 6 \times \cos 90° = 0$

$\therefore A_x = 13$ এবং $B_y = 0$ (Ans.)

ঘ উদ্দীপকের চিত্রানুসারে, $\vec{A} = |\vec{A}|\cos30°\hat{i} + |\vec{A}|\sin30°\hat{j}$

$= 15\cos30°\hat{i} + 15\sin30°\hat{j}$

$= 13\hat{i} + 7.5\hat{j}$

এবং $\vec{B} = |\vec{B}|\cos180°\hat{i} + |\vec{B}|\sin180°\hat{j}$

$= 6 \times (-1)\hat{i} + 6 \times 0\hat{j}$

$= -6\hat{i}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = 13\hat{i} + 7.5\hat{j} - 6\hat{i} = 7\hat{i} + 7.5\hat{j}$

$(\vec{A} + \vec{B})$ ভেক্টরটি X অক্ষের সাথে কোণ উৎপন্ন করে $\tan^{-1}\frac{7.5}{7}$

$= 46.97°$

$\approx 47°$

$\vec{A} - \vec{B} = 13\hat{i} + 7.5\hat{j} + 6\hat{i} = 19\hat{i} + 7.5\hat{j}$

$\therefore (\vec{A} - \vec{B})$ ভেক্টরটি X অক্ষের সাথে কোণ উৎপন্ন করে $= \tan^{-1}\frac{7.5}{19}$

$= 21.54°$

যেহেতু $47° \neq 21.54°$

সুতরাং লব্ধি ভেক্টরদ্বয় X অক্ষের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করতে পারে না।

প্রশ্ন ▶৬৮ দুটি সমান্তরাল ভেক্টর হলো $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $= \vec{B}$ $15\hat{i} + m\hat{j} + 9\hat{k}$ *[মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাংগাইল]*

ক. অবস্থান ভেক্টর কী? ১
খ. $\left(-\frac{\vec{A}}{A}\right)$ দ্বারা কী নির্দেশিত হয়? ২
গ. m এর মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় কি কখনো পরস্পর লম্ব হতে পারে? এ সম্পর্কিত গাণিতিক বিশ্লেষণ কর। ৪

৬৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ $\frac{\vec{A}}{A}$ দ্বারা $\vec{A}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর বুঝায়। কারণ কোনো ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়। তাহলে $\left(-\frac{\vec{A}}{A}\right)$ দ্বারা $\vec{A}$ ভেক্টরের বিপরীত দিকে একটি একক ভেক্টর বুঝায়।

গ প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + m\hat{j} + 9\hat{k}$

যেহেতু ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল, তাহলে $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 15 & m & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 9 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 9 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & m \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(18 - 3m) - \hat{j}(45 - 45) + \hat{k}(5m - 30)$

$\therefore \hat{i}(18 - 3m) + \hat{k}(5m - 30) = \vec{0}$

এখন সমীকরণটির উভয়পক্ষ হতে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$18 - 3m = 0$ এবং $5m - 30 = 0$

বা, $3m = 18$ বা, $5m = 30$

বা, $m = 6$ বা, $m = 6$

$\therefore$ m = 6 **(Ans.)**

ঘ প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হতে পারে। সেক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয়ের ডট বা স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ হতে হবে।

এখন, $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$

বা, $5 \times 15 + 2m + 3 \times 9 = 0$

বা, $75 + 2m + 27 = 0$

বা, $2m = -75 - 27$

$\therefore m = -\frac{102}{2} = -51$

সুতরাং m এর মান – 51 হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হওয়া সম্ভব।

প্রশ্ন ▶৬৯

সাফা বিজ্ঞান মেলায় যাচ্ছিল হাঁটার সময় সে ভূমিতে তির্যকভাবে বল প্রয়োগ করে। ভূমিও তির্যকভাবে বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে, ফলে সে সামনের দিকে চলতে পারে। সে লক্ষ্য করল যে, কোণের মান কমালে সামনের দিকে তার গতি বেড়ে যায়। সাফার ভর 40 kg.

[মাইলস্টোন কলেজ, ঢাকা]

ক. কার্ল কী? ১

খ. দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত কী? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. হাঁটার সময় সাফার আপাত ওজন নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কোণের মান অর্ধেক করলে সাফার ত্বরণের কীরূপ পরিবর্তন ঘটবে? উদ্দীপকের আলোকে গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

৬৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনশীলতা নির্দেশ করে।

খ মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ক্রস গুনন শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হয়।

ব্যাখ্যা: ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর এবং মধ্যবর্তী কোণ = θ

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$

বা, $AB\sin\theta\,\hat{n} = \vec{0}$

বা, $\sin\theta = 0$ [$\therefore$ A, B ও $\hat{\eta} \neq 0$]

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ এবং $\sin 180°$

বা, $\theta = 0°$ এবং $180°$

$\therefore$ মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

গ এখানে, সাফার ভর, m = 40 kg
প্রতিক্রিয়া বল, F = 10N
মধ্যবর্তী কোণ, θ = 30°
এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

সাফার প্রকৃত ওজন W = mg

$\therefore$ প্রতিক্রিয়া বলের উলম্ব উপাংশ = $F\sin\theta = 10\sin 30°$

$\therefore$ সাফার আপাত ওজন = $W - F\sin\theta = mg - 10\sin 30°$
$= 40 \times 9.8 - 10\sin 30°$
= 387 N **Ans.**

ঘ

প্রথম ক্ষেত্রে, প্রতিক্রিয়া বলের আনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta_1$	এখানে, ১ম ক্ষেত্রে, $\theta_1 = 30°$ ২য় ক্ষেত্রে, $\theta_2 = 15°$
$= 10\cos 30°$ $= 8.66N$ $\therefore ma = 8.66$ $\therefore a = 0.2165\ ms^{-2}$	সাফার ভর, m = 40 kg

২য় ক্ষেত্রে,

প্রতিক্রিয়া বলের আনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta_2 = 10\cos 15° = 9.65925$

$\therefore ma' = 9.65925$

$\therefore$ ত্বরণ বৃদ্ধি পায় = $(0.2414 - 0.2165) = 0.02498 ms^{-2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৭০ একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 m প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পাড় হতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করতে পারে। *[বিসিআইসি কলেজ, ঢাকা]*

ক. লম্ব উপাংশ কাকে বলে? ১

খ. সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের বেগ শূন্য হয় কি? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীর স্রোতের বেগ কত? ৩

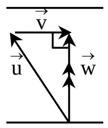
ঘ. লোকটি স্রোতের সাথে 60° কোণে সাঁতার কাটলে অপর পাড়ের কোথায় পৌঁছাবে? ৪

৭০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টর রাশিকে যদি এমনভাবে দুটি উপাংশে বিভক্ত করা হয় যে, উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণে থাকে, তবে তাদেরকে লম্ব উপাংশ বলে।

খ সর্বাধিক উচ্চতায় প্রাসের বেগ ন্যূনতম হয়, তবে শূন্য হয় না। আমরা জানি, প্রাসের তাৎক্ষণিক বেগের দুটি উপাংশ থাকে- অনুভূমিক উপাংশ ও উল-ম্ব উপাংশ। অনুভূমিক বরাবর অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশ শূন্য হওয়ায় প্রাসের বেগের অনুভূমিক উপাংশের পরিবর্তন ঘটে না। কিন্তু উল-ম্বের উপাংশের ক্রমাগত পরিবর্তন ঘটে। যে কোনো মুহূর্তে তাৎক্ষণিক বেগের মান, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$। সর্বোচ্চ উচ্চতায় $v_y = 0$ হয়, তাহলে ঐ অবস্থানে $v = \sqrt{v_x^2 + 0^2} = v_x$, যা প্রাসের বেগের সর্বনিু মান।

গ প্রশ্নমতে, সাতার"র বেগ, $u = \frac{100m}{4min} = \frac{100m}{4 \times 60sec}$
$= 0.4167\ ms^{-1}$ নদীতে স্রোত থাকা অবস্থায় সোজাসুজি পার হওয়ার ক্ষেত্রে, লব্ধি বেগ, $w = \frac{100m}{5min} = \frac{100m}{5 \times 60\ sec} = 0.333ms^{-1}$

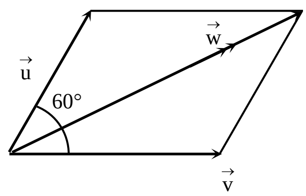


বের করতে হবে, নদীর স্রোতের বেগ, v = ? চিত্রে দেখানো ত্রিভুজটি সমকোণী হওয়ায়, $u^2 = v^2 + w^2$

বা, $v^2 = u^2 - w^2$

$\therefore v = \sqrt{u^2 - w^2} = \sqrt{(0.4167ms^{-1})^2 - (0.333\ ms^{-1})^2}$
$= 0.2505\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ



লোকটি স্রোতের দিকের সাথে α = 60° কোণে সাঁতার কাটলে নদীর স্রোত বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ = $v\cos 0° + u\cos 60°$

$= 0.2505\ ms^{-1} \times 1 + 0.4167ms^{-1} \times \frac{1}{2} = 0.45885\ ms^{-1}$ এবং নদীর প্রস্থ বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ $= v \sin 0° + u \sin 60°$

$= 0 + 0.4167\ ms^{-1} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.3609\ ms^{-1}$

এক্ষেত্রে নদী পার হতে সময় লাগবে,

$t = \frac{\text{নদীর প্রশস্ত তা,ফ}}{\text{নদীর প্রস্থ বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ}} = \frac{100m}{0.3609\ ms^{-1}} = 277.09\ sec$

এই সময়কালে স্রোত বরাবর বা পাড় বরাবর লোকটি কর্তৃক অতিক্রান্ড় দূরত্ব, $x =$ স্রোত বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ $\times\ t$

$= 0.45885\ ms^{-1} \times 277.09\ sec = 127.1m$

সুতরাং লোকটি স্রোতের সাথে $60°$ কোণে সাতার কাটলে অপর পাড় হতে $127.1m$ দূরত্বে পৌঁছাবে।

প্রশ্ন ▶ ৭১ একটি নদীতে স্রোতের বেগ $8\ m/s$। $10\ m/s$ বেগে একটি নৌকা চলছে। নৌকাটি নদীটিকে সোজাসুজি পাড়ি দিল। নদীটির প্রস্থ $200\ m$। *[এম.সি কলেজ, সিলেট]*

ক. সলিনয়েডাল কাকে বলে? ১

খ. ব্যবকলনীয় অপারেটর এবং ভেক্টর অপারেটর কি একই? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. সোজাসুজি নদীটিকে পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? ৩

ঘ. নৌকাটি যদি স্রোতের সাথে $140°$ কোণে চালনা করা হয়। তাহলে নৌকাটি সোজাসুজি পার হতে পারবে কিনা উদ্দীপকের আলোকে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

৭১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যদি কোনো ভেক্টরের ডাইভারজেন্স শূন্য হয়, তবে তাকে সলিনয়েডাল বলে।

খ ব্যবকলনীয় অপারেটর ও ভেক্টর অপারেটর একই। তবে ব্যবকলনীয় অপারেটর এর ক্ষেত্রে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর প্রয়োজনীয়তা নেই। কিন্তু ভেক্টর অপারেটর এ অবশ্যই $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ থাকবে।

যেমন, ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla} = \hat{i}\ \frac{d}{dx} + \hat{j}\ \frac{d}{dy} + \hat{k}\ \frac{d}{dz}$

এখানে, $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ এবং $\frac{d}{dz}$ প্রত্যেকেই ব্যবকলনীয় অপারেটর।

অতএব, ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর তিনটি ব্যবকলনীয় অপারেটর নিলে একটি ভেক্টর অপারেটর গঠিত হয়।

গ দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ, $u = 8m/s$

নৌকার বেগ, $v = 10m/s$

নদীর প্রস্থ, $d = 200m$

নদী পাড়ি দিতে সময়, $t = ?$

নৌকাটি নদীটিকে সোজাসুজি পাড়ি দেয় বলে, নৌকার লব্ধি বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90°$

$\therefore$ নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

এখন $\vec{u}$ বরাবর লব্ধি ভেক্টর $\vec{w}$ এর উপাংশ

$w\cos 90° = u\cos 0° + v\cos\alpha$

বা, $0 = u + v\cos\alpha$

$\therefore$ নৌকার লব্ধি বেগ w হলে,

$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha}$

$= \sqrt{8^2 + 10^2 + 2 \times 8 \times 10 \cos 143.13°}$

$= 6ms^{-1}$

আবার, নদীর প্রস্থ = লব্ধি বেগ $\times$ সময়

বা, $d = w \times t$

$\therefore t = \frac{d}{w} = \frac{200}{6} = 33.33s.$

$\therefore$ সোজাসুজি নদীটি পাড়ি দিতে $33.33s$ সময় লাগবে।

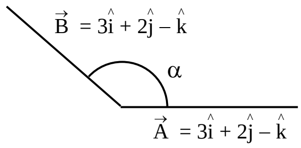
ঘ দেওয়া আছে, স্রোতের সাথে নৌকার বেগের কোণ, $\alpha = 140°$

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v \cos\alpha}$

বা, $\tan\theta = \frac{10 \sin 140°}{8 + 10 \cos 140°}$

অতএব, নৌকাটি স্রোতের সাথে $140°$ কোণে চালনা করা হলে নৌকাটি সোজাসুজি নদী পাড় হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶ ৭২



[বি এ এফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ভেক্টরের ডট গুণন কী? ১

খ. দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তড়াল হওয়ার শর্ত কী? ২

গ. $\overline{A} \times \overline{B}$ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. দেখাও যে ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৭২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টরের যে গুণনের ফলে একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরের ডট গুণন বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তড়াল হলে এদের মধ্যকার কোণ $\theta = 0°$ অথবা $180°$

সেক্ষেত্রে, এদের ক্রস গুণফল $= \vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta\ \hat{n}$

$= AB \sin 0°\hat{n}$ অথবা $AB \sin 180°\hat{n} = \vec{0}$

সুতরাং, দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তড়াল হওয়ার শর্ত হলো, এদের ক্রস বা ভেক্টর গুণফল শূন্য হতে হবে।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

বের করতে হবে, $\vec{A} \times \vec{B} = ?$

আমরা জানি, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\ (-3 + 2) - \hat{j}\ (-2 + 3) + \hat{k}\ (4 - 9)$

$= -\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক মতে, $\vec{A}$ ভেক্টরের মান,

$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

এবং $\vec{B}$ ভেক্টরের মান, $B = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$

তদুপরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ $= \alpha$

সুতরাং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি, $\vec{A}$ -এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A + B\cos\alpha}$

$= \frac{\sqrt{14} \sin\alpha}{\sqrt{14} + \sqrt{14} \cos\alpha}$

$$= \frac{\sqrt{14}\sin\alpha}{\sqrt{14}(1+\cos\alpha)}$$

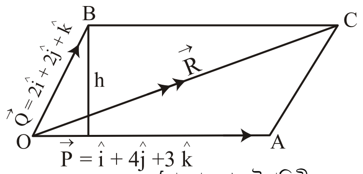
$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে $\frac{\alpha}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে; সুতরাং লব্ধি এবং $\vec{B}$ ভেক্টরের মধ্যকার কোণ $= \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

অর্থাৎ, উক্ত লব্ধি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয় ভেক্টরের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। অতএব, উদ্দীপকে প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি তাদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

প্রশ্ন ▶ ৭৩



[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল এন্ড কলেজ, খুলনা]

ক. ডাইভারজেন্স কী? ১

খ. $\hat{j} \times \hat{j}$ কেন নাল ভেক্টর- ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের সামান্তরিকের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব কীনা গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৩

ঘ. 'ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য যে কোন একটি ভেক্টরের মানের দ্বিগুণ'-উদ্দীপকের তথ্যমতে উক্তিটি ব্যাখ্যা কর। ৪

৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র, যা দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহি/অন্ড) জানা যায়।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে সাধারণ তলে অবস্থিত, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক তার লম্ব দিকে। $\hat{j}, \hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থান করায় এবং একই দিক নির্দেশ করায় এদের ধারণকারী সাধারণ তল খুঁজে পাওয়া সম্ভব নয় এবং $\hat{j} \times \hat{j}$ এর মান শূন্য তাই লম্ব ভেক্টরের দিকও নির্দেশ করা সম্ভব নয়। সুতরাং $\hat{j} \times \hat{j}$ দ্বারা এমন একটি ভেক্টর নির্দেশিত হয় যার কোনো নির্দিষ্ট মান নেই এবং দিক নেই, এরূপ ভেক্টর কেবল একটিই আছে, সেটি হলো নাল ভেক্টর। একারণেই $\hat{j} \times \hat{j}$ দ্বারা নাল ভেক্টর বুঝায়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{P} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{Q} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যকার কোণ α হলে,

$\vec{P} \times \vec{Q} = PQ\sin\alpha\,\hat{n}$ বা, $|\vec{P} \times \vec{Q}| = PQ\sin\alpha$

$\therefore h = Q\sin\alpha = \frac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{P}$

এবং $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore h = \frac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{P} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

সুতরাং উদ্দীপকের সামান্তরিকের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব।

ঘ মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ সমজাতীয় ভেক্টরদ্বয় পরস্পর α কোণে ক্রিয়ারত। এদের লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

P, Q ধ্রুবমানের হওয়ায় R = সর্বোচ্চ $= R_{max}$ হবে যদি $\cos\alpha = 1$ বা, $\alpha = 0°$ হয়।

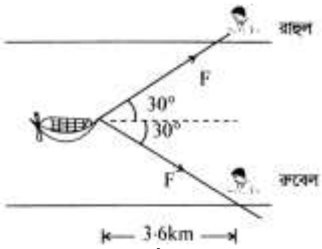
$\therefore R_{max} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos0°} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P + Q$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমানের পার্থক্য

$= (P + Q) - (P - Q) = 2Q$

সুতরাং উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্য যেকোনো একটি ভেক্টরের (Q) মানের দ্বিগুণ।

প্রশ্ন ▶ ৭৪ নিচের চিত্রে রাহুল ও রুবেল দু'জন মাঝি স্থির পানিতে 500kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দু'তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে $\vec{F}$ বলে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6km পথ অতিক্রম করে। রাহুল রুবেলকে বলে "সমান টানে এ দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছা সম্ভব।" [নৌকার তল ও পানির ঘর্ষণ বল উপেক্ষনীয়]



[মোহাম্মদপুর মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. ভেক্টর অপারেটর কী? ১

খ. কোনো প্রাসের সর্বোচ্চ উচ্চতায় উলম্ব বরাবর বেগ শূন্য কেন? ২

গ. উদ্দীপকে $\vec{F}$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে রাহুলের বক্তব্য সঠিক কিনা-গাণিতিক বিশ্লেষণ কর মতামত দাও। ৪

৭৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি ভেক্টর রাশিকে অন্য একটি ভেক্টর বা স্কেলার রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল ভেক্টর রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে ভেক্টর অপারেটর বলে।

খ কোনো প্রাসের ওপর একটি মাত্র ত্বরণ ক্রিয়াশীল থাকে, সেটি উলম্ব বরাবর নিচের দিকে — অভিকর্ষজ ত্বরণ। অনুভূমিক বরাবর অভিকর্ষজ ত্বরণের উপাংশ শূন্য। তাই প্রাসের অনুভূমিক বেগ পরিবর্তিত হয় না, কেবল উলম্ব বেগ পরিবর্তিত হয়। বিচরণকালের অর্ধেক সময়কাল পর্যন্ত প্রাসের উলম্ব গতিবেগ ক্রমশ হ্রাস পায়, সর্বোচ্চ উচ্চতায় উলম্ব গতিবেগ শূন্য মানে উপনীত হতে বাধ্য হয় এবং অতঃপর নিচের দিকে ক্রিয়ারত উলম্ব বেগের মান ক্রমশ বৃদ্ধি পায়। উলম্ব উপরের দিকে বেগকে ধনাত্মক ধরলে নিচের দিকে ক্রিয়ারত বেগ ঋণাত্মক। যেহেতু উলম্ব বেগ সুষম হারে পরিবর্তিত হয়, তাই ধনাত্মক বেগ ও ঋণাত্মক বেগের সংযোগস্থলে এক মুহূর্তের জন্য বেগ শূন্য মানে উপনীত হতে বাধ্য হয়, সেটি হলো সর্বোচ্চ উচ্চতার অবস্থানে।

গ এখানে, নৌকার আদিবেগ, $v_o = 0\ ms^{-1}$

সময়কাল, $t = 5\ min = 5 \times 60\ sec = 300\ sec$

সরণ, $S = 3.6km = 3600m$

নৌকার ভর, $m = 500\ kg$

F মানের বলদ্বয়ের মধ্যকার কোণ, $\theta = 30° + 30° = 60°$

বের করতে হবে, $F = ?$

নৌকার ত্বরণ a হলে, $S = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0.t + \frac{1}{2}at^2$

$\therefore a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 3600m}{(300\ sec)^2} = 0.08ms^{-2}$

$\therefore$ লব্ধি বল, $R = ma = 500\ kg \times 0.08ms^{-2} = 40N$

আমরা জানি, $R^2 = F^2 + F^2 + 2F.F\cos\theta$

বা, $(40N)^2 = 2F^2 + 2F^2\cos60°$ বা, $2F^2(1 + \cos 60°) = 1600\ N^2$

$\therefore F^2 = \frac{1600N^2}{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 533.33N^2$

$\therefore F = \quad = 23.1N$ **(Ans.)**

ঘ সমান টানে (F = 23.1N) উক্ত দূরত্ব (3.6km) 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছা সম্ভব। সেক্ষেত্রে রশিদ্বয়ের দৈর্ঘ্য বাড়াতে হবে যাতে প্রযুক্ত টানদ্বয়ের মধ্যকার কোণ 60° অপেক্ষা কম হয়।

ধরি, এবার $\theta = 55°$

তাহলে F = 23.1N এর জন্য লব্ধি বল, $R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F.F\cos\theta}$

$= \sqrt{2F^2(1 + \cos\theta)} = F\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$

এক্ষেত্রে S = 3600m দূরত্ব অতিক্রমে t পরিমাণে সময় লাগলে, $S = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0.t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$

বা, $t^2 = \frac{2s}{a}$

$\therefore t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3600\ m}{0.082ms^{-2}}}$

$= 296.3\ sec = 4\ min\ 56.3\ sec < 5\ min$

সুতরাং, সমান টানে উক্ত দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছে সম্ভব। অর্থাৎ, উদ্দীপকে রাহুলের বক্তব্য সঠিক।

প্রশ্ন ▶ ৭৫ সাবিহা একদিন শপিংমলে বাজার করার সময় ট্রলি গাড়ি ব্যবহার করল। সে ট্রলি গাড়ির হেন্ডেলটিতে উল-ম্বের সাথে 30° কোণে 10N বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে ঠেলতে থাকে। এই দেখে দোকানদার বলল, আপনি গাড়ির হেন্ডেল ধরে টানেন, তাহলে কম বল লাগবে।

[ইস্পাহানী বালিকা বিদ্যালয় ও মহাবিদ্যালয়]

ক. লব্ধি ভেক্টর কী? ১
খ. অভিকর্ষজ বল অসংরক্ষণশীল বল নয়-ব্যাখ্যা কর। ২
গ. ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত? ৩
ঘ. দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে সামনে টানতে বলল কেন— যুক্তিসহ গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

৭৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো বস্তুকণার ওপর যুগপৎ একাধিক সমজাতীয় ভেক্টর ক্রিয়া করলে ঐ ভেক্টরগুলোর ভেক্টর যোগফলকে এদের লব্ধি বলে।

খ অভিকর্ষ বলের ক্ষেত্রে (field) কোনো বস্তুকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় আদি অবস্থায় আনা হলে অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃতকাজ শূন্য। তদুপরি, অভিকর্ষ বল দ্বারা কৃতকাজ বাস্তব গতিপথের ওপর নির্ভর করে না। কেবল আদি ও চুড়ান্ত অবস্থানের ওপর নির্ভর করে। অভিকর্ষ বলের ক্ষেত্র শক্তির অপচয়মূলক প্রভাব হতে মুক্ত। এ সকল বৈশিষ্ট্য মূলত সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য। একারণে অভিকর্ষজ বল অসংরক্ষণশীল বল নয়।

গ দেওয়া আছে, প্রযুক্ত বল, F = 10N

উল-ম্বের সাথে কোণ = 30°

$\therefore$ অনুভূমিকের সাথে কোণ $\theta = 90° - 30° = 60°$

বের করতে হবে, ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল = প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ, $F_H = ?$

আমরা জানি, $F_H = F\cos\theta = 10N \times \cos 60° = 5N$

$\therefore$ ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বলের মান 5N.

ঘ দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে সামনে থেকে টানতে বললেন। কারণ রাস্তা দিয়ে ট্রলি গাড়ি ঠেলার থেকে টানা সহজ তবে সাবিহা যখন উল-ম্বের সাথে 30° কোণে ঠেলছিলেন তখন ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল = 5N (গ হতে প্রাপ্ত)

আবার, বলের উল-ম্ব উপাংশ = Fcos30° (নিচের দিকে

অর্থাৎ ট্রলির আপাত ওজন বেড়ে হয়,

$W + F\cos30° = W + 8.66N$

এ কারণে ট্রলিকে ভারী মনে হয় এবং এর ওজনের চেয়ে 8.66N বেশী মনে হয় এবং অনেক বল অপচয় হয়।

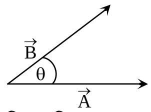
আবার, সাবিহা যদি ট্রলিটিকে উল-ম্বের সাথে 30° কোণে টানে তাহলে বলটির অনুভূমিক উপাংশ = Fsin30° (সামনের দিকে)

এবং উল-ম্ব উপাংশ = Fcos30° (উপরের দিকে)

অর্থাৎ ট্রলির আপাত ওজন কমে যায় এবং হালকা মনে হয় এবং এর মান = W – 8.66 N

এ কারণে ট্রলিটিকে টানতে কষ্ট কম হয় এবং বলের অপচয় কম হয়। অর্থাৎ ঘর্ষণ পূর্বের তুলনায় অনেক কমে যায়। এ কারণে দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে টানতে বললেন।

প্রশ্ন ▶ ৭৬ চিত্রে দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$, θ কোণে অবস্থান করছে।



[দি বাড্স রেসিডেনসিয়াল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, মৌলভীবাজার]

ক. বীট কি? ১
খ. চলমান অবস্থায় গাড়ির চাকার চাপ বৃদ্ধি পায় কেন? ২
গ. দেখাও যে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব। ৩
ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় দ্বারা সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে— গাণিতিকভাবে প্রয়োজনীয় সমীকরণ প্রতিষ্ঠা করে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

৭৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একই ধরনের এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কের দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরি পাতনের ফলে শব্দের তীব্রতার যে পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধি হয় তাকে বীট বলে।

খ চলমান অবস্থায় গাড়ির গতিশক্তির অতি সামান্য অংশ তাপশক্তিরূপে চাকার ভেতরের বাতাসে প্রবেশ করে, এছাড়া চাকা ও রাস্তার মাঝে ঘর্ষণে উৎপন্ন তাপের কিয়দংশ চাকার ভেতরে প্রবেশ করে। এতে চাকার ভেতরের বায়ুর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়, কিন্তু চাকার গঠনের দৃঢ়তার জন্য উক্ত বায়ু আয়তনে বাড়তে পারে না। তাই রেনোর সূত্র বা চাপের সূত্রানুসারে (ধ্রুব আয়তনে) গ্যাসের চাপ, পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক হারে বাড়তে থাকে। একারণেই চলমান অবস্থায় গাড়ির চাকার চাপ বৃদ্ধি পায়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ এরা পরস্পর θ কোণে ক্রিয়া করছে।

এখানে, $\vec{A}.\vec{B} = 9 \times 4 + 1 \times (-6) + (-6) \times 5 = 36 - 6 - 30 = 0$

কিন্তু $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore AB\cos\theta = 0$

বা, $\cos\theta = 0$ [$\because AB \neq 0$]

$\therefore \theta = \cos^{-1} 0 = 90°$

সুতরাং, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব

ঘ ওপরোক্ত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা প্রকাশিত হয়েছে। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। সামান্তরিকটি PQRS এবং কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O। কর্ণদ্বয়ের মধ্যকার কোণ, $\theta = 90°$ জ্যামিতিক পদ্ধতির সাহায্যে দেখানো সম্ভব যে, Δ- ক্ষেত্র POQ = Δ – ক্ষেত্র QOR = Δ – ক্ষেত্র SOR = Δ– ক্ষেত্র POS এখন, Δ- ক্ষেত্র QOR $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2} \times OQ \times OR$

$= \frac{1}{2} \frac{|\vec{A}|}{2} \times \frac{|\vec{B}|}{2} \times \sin 90° = \frac{1}{8} |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin\theta$

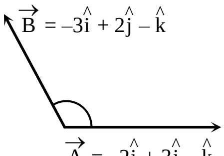
$= \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}|$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $4 \times$ Δ- ক্ষেত্র Q O R

$= 4 \times \frac{1}{8} |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

সুতরাং, উদ্দীপকের $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় প্রকাশ করলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ক্রমগুণফলের মানের অর্ধেকই উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল প্রকাশ করবে। অর্থাৎ প্রদত্ত উক্তিটি সত্য।

প্রশ্ন ▶ ৭৭



[বি. এ. এফ শাহীন কলেজ, শমসেরনগর, যশোর]

ক. আয়ত একক ভেক্টর কি? ১

খ. একটি দোলক ঘড়ি গ্রীষ্মকালে ধীরে চলে কেন ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি এদের মধ্যবর্তী কোনটি সমদ্বিখন্ডিত করে কিনা যাচাই কর। ৪

৭৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থার তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ তাদের আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ দোলক ঘড়ি ধাতব উপাদানে (যেমন, ইস্পাত) তৈরি হয়। তাই গরমকালে বর্ধিত তাপমাত্রার দরুণ দোলক ঘড়ির শ্যাফট বা দন্ডের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাওয়ায় এর কার্যকর দৈর্ঘ্যও বৃদ্ধি পায়। তখন সরল দোলকের $T \propto \sqrt{L}$ সূত্রানুসারে এর দোলনকাল ও বৃদ্ধি পায়, ফলে নির্দিষ্ট পরিমাণ সময়ে দোলক ঘড়ি পূর্বের তুলনায় কম সংখ্যক দোলন দেয়। একারণে গ্রীষ্মকালে দোলক ঘড়ি ধীরে চলে বলে প্রতীয়মান হয়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

$$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

বের করতে হবে, $|\vec{A} \times \vec{B}| = ?$

আমরা জানি,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-3+2) - \hat{j}(2-3) + \hat{k}(-4+9) = -\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{27}$ একক (Ans.)

ঘ ভেক্টর $\vec{A}$ এর মান, $A = |\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

ভেক্টর $\vec{B}$ এর মান, $B = |\vec{B}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

ধরি, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α এবং এদের লব্ধি, $\vec{A}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, $\tan\theta = \frac{B \sin\alpha}{A + B\cos\alpha} = \frac{\sqrt{14}\sin\alpha}{\sqrt{14} + \sqrt{14}\cos\alpha}$

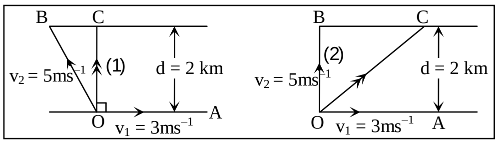
$$= \frac{\sqrt{14}\sin\alpha}{\sqrt{14}(1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$\therefore \theta = \frac{\alpha}{2}$

সুতরাং উদ্দীপকের ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি এদের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

প্রশ্ন ▶ ৭৮



চিত্রে $OA = v_1$ = স্রোতের বেগ, $OB = v_2$ = নৌকার বেগ, $OC = v$ = লব্ধির বেগ এবং d = নদীর প্রস্থ 2km.

[আল-আমিন একাডেমী স্কুল এন্ড কলেজ, চাঁদপুর]

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ-ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ১ম চিত্র হতে লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. কোন চিত্রের নদী পার হতে কম সময় লাগবে, গাণিতিক যুক্তি দাও। ৪

৭৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ একটি লন-রোলারকে ঠেলার সময় হাতের সাহায্যে লন-রোলারের হাতলে বল প্রয়োগ করা হয়। এই বল অনুভূমিক ও উলম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়। অনুভূমিক উপাংশটি ভূমির সমান্তরালে সামনের দিকে ক্রিয়া করে রোলারটিকে সামনের দিকে এগিয়ে নেবে। কিন্তু উলম্ব উপাংশটি খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করায় রোলারটির ওজন বেড়ে যায় ফলে রোলাটির উপর ঘর্ষণ বলও বৃদ্ধি পায়। কাজেই এটি চলার পথে বেশি বাধাপ্রাপ্ত হয়। কিন্তু টানার সময় উলম্ব উপাংশটি খাড়া উপরের দিকে ক্রিয়া করায় রোলারটি কিছুটা হাল্কা হয় ফলে ঘর্ষণ বলও কম হয়। এর ফলে অনুভূমিক উপাংশটি রোলারটিকে সহজে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। সুতরাং বলা চলে লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।

গ দেওয়া আছে, স্রোতের বেগ, $v_1 = 3ms^{-1}$

নৌকার বেগ, $v_2 = 5ms^{-1}$

চিত্র হতে পাই, লব্ধি বেগ v ও স্রোতের বেগ v_1 এর মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90°$.

v_1 ও v_2 এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, v_1 বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ,

$v\cos 90° = v_1\cos 0° + v_2\cos\alpha$

$0 = v_1 + v_2\cos$

বা, $\cos\alpha = \frac{v_1}{v_2} = -\frac{3}{5}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 126.87°$

আমরা জানি, লব্ধি বেগ, $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha)}$

$= \sqrt{3^2 + 5^2 + 2 \times 3 \times 5 \cos 126.87}$

$= 4\ ms^{-1}$

ঘ দেওয়া আছে,

নদীর প্রস্থ, d = 2km = 2000m

'গ' অংশ হতে পাই

১ম চিত্রে, লব্ধি বেগ, $v = 4ms^{-1}$

মনে করি, ১ম চিত্র অনুযায়ী নদী পার হতে t ও ২য় চিত্র অনুযায়ী নদী পার হতে t′ সময় লাগে।

$\therefore$ ১ম চিত্রে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{v}$

বা, $t = \frac{2000}{4}$

$\therefore t = 500s.$

২য় চিত্র হতে পাই।

v_1 ও v_2 এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha' = 90°$

$\therefore$ দ্বিতীয় চিত্রে লব্ধি বেগ v′ হলে,

$v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 \times v_2 \cos\alpha'}$

বা, $v' = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \cos 90°}$

বা, $v' = \sqrt{34}$

$\therefore\ v' = 5.83ms^{-1}$

$\therefore$ ২য় চিত্রে নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময়,

$t' = \frac{d}{v'} = \frac{2000}{5.83} = 343.05\ s$

অতএব ২য় চিত্রে নদী পার হতে কম সময় লাগবে।

অধ্যায়টির গুরুত্বপূর্ণ জ্ঞান ও অনুধাবনমূলক প্রশ্নোত্তর

(নির্বাচনি পরীক্ষার প্রশ্ন বিশে-ষণে প্রাপ্ত)

►ক নং প্রশ্ন (জ্ঞানমূলক)

প্রশ্ন-১. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে?

উত্তর: প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন-২. অধীন চলক কাকে বলে?

উত্তর: দুটি পরস্পর নির্ভরশীল চলক যার একটি পরিবর্তিত হলে অপরটিও পরিবর্তিত হয় এদের মধ্যে যে চলকটিকে ইচ্ছানুযায়ী পরিবর্তিন করা যায় না; অপর চলকের পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয় তাকে অধীন চলক বলে।

প্রশ্ন-৩. সরণ ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও।

উত্তর: রৈখিক বা সরল পথে কোনো বিন্দুর দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে।

প্রশ্ন-৪. ভেক্টর উপাংশ কাকে বলে?

উত্তর: বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশ বা উপাংশ বলে।

প্রশ্ন-৫. ক্যালকুলাস কী?

উত্তর: বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র।

প্রশ্ন-৬. স্কেলার ক্ষেত্র কাকে বলে?

উত্তর: ক্ষেত্রের সাথে সংশি-ষ্ট রাশিগুলো যদি স্কেলার হয় তবে ঐ ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।

প্রশ্ন-৭. ভেক্টর ক্ষেত্র কাকে বলে?

উত্তর: ক্ষেত্রের সাথে সংশি-ষ্ট রাশিগুলো যদি ভেক্টর হয় তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

প্রশ্ন-৮. কার্ল এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর: অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

►খ নং প্রশ্ন (অনুধাবনমূলক)

প্রশ্ন-১. দুটি অসমান বলে লব্ধি শূন্য হতে পারে না – ব্যাখ্যা কর।

উত্তর: দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না।

ব্যাখ্যা : $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি যদি α কোণে নত থাকে, তবে এদের লব্ধির মান হবে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ যখন $\alpha = 180°$ তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ লব্ধি ভেক্টরের ন্যূনতম মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q$। দেখা যাচ্ছে, কেবল এবং কেবল যদি P = Q হয় তবে R এর মান শূন্য হবে। অন্যথায় লব্ধির ন্যূনতম একটি মান থাকবে। সুতরাং দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনোই শূন্য হতে পারে না।

প্রশ্ন-২. দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত কী?

উত্তর: ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হলে,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90° = 0\ [\because \cos 90° = 0]$

অতএব, মান শূন্য নয় এমন দুটি ভেক্টরের ডট গুণফল শূন্য হলে এরা পরস্পর লম্ব হবে।

প্রশ্ন-৩. পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার লেখ।

উত্তর: বেগ, ত্বরণ, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করা হয়। ক্ষেত্রফল, আয়তন, ভরকেন্দ্র, কাজ এবং চাপ ইত্যাদি হিসাবের জন্য ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। স্থান, কাল এবং গতির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জনের জন্যও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়।

প্রশ্ন-৪. অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ কে ব্যবকলন করে কিভাবে ত্বরণ পাওয়া যায়।

উত্তর: এখানে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

আমরা জানি, অতিক্ষুদ্র সময়ে r-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলা হয়। সুতরাং

বেগ, $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

প্রশ্ন-৫. গ্রাডিয়েন্টের তাৎপর্য গুলো উলে-খ করো।

উত্তর: গ্রাডিয়েন্টের তাৎপর্যগুলো নিম্নে দেওয়া হলো:

i. স্কেলার রাশির গ্রাডিয়েন্ট একটি ভেক্টর রাশি।

ii. উক্ত ভেক্টর রাশির মান ঐ স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধি হারের সমান।

iii. স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের উপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো সেদিকের উপরেও নির্ভর করে।

প্রশ্ন-৬. ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্মগুলো লেখ।

উত্তর: ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্মগুলো হলো:

i. ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে এই দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\ \vec{V}$ বা div $\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

ii. মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

iii. মান ঋণাত্মক হলে আয়তনের সংকোচন ঘটে, ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।