

১. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল -2 এবং রেখাটি (4, -5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধানঃ

আমরা জানি,

m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

প্রদত্ত প্রশ্নে দেওয়া আছে,

$$m = -2 \text{ ও } (x_1, y_1) = (4, -5)$$

$$\therefore y - (-5) = -2(x - 4) \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } y + 5 = -2x + 8$$

$$\text{বা, } y = -2x + 8 - 5$$

$$\text{বা, } y = -2x + 3 \text{ [ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ]}$$

২. A(3, -3) ও B(4, -2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। সরলরেখাটির ঢাল কত?

সমাধানঃ

আমরা জানি,

সরলরেখার ঢাল, m

$$= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$[\text{এখানে, } (x_1, y_1) = (3, -3); (x_2, y_2) = (4, -2)]$$

$$= \frac{-3 - (-2)}{3 - 4}$$

$$= -1 / -1$$

$$= 1$$

আবার,

m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

অর্থাৎ, $y - (-3) = 1(x - 3)$ [A(3, -3 বিন্দুর প্রেক্ষিতে]

বা, $y + 3 = x - 3$

বা, $y = x - 3 - 3$

বা, $y = x - 6$

∴ A(3, -3) ও B(4, -2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ: $y = x - 6$ এবং ঢাল $m = 1$.

৩. দেখাও যে, A(0, -3), B(4, -2) এবং C(16, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ। [এটা হলো অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি এর ৩ নং প্রশ্ন, নিচে বিস্তারিত দেয়া আছে।]

সমাধানঃ

আমরা জানি,

m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

∴ m ঢালবিশিষ্ট A(0, -3) ও B(4, -2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$-3 - (-2) = m(0 - 4)$$

বা, $-3 + 2 = -4m$

বা, $-1 = -4m$

বা, $m = \frac{1}{4}$

আবার,

m ঢালবিশিষ্ট B(4, -2) এবং C(16, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$-2 - 1 = m(4 - 16)$$

বা, $-3 = m(-12)$

বা, $m = \frac{-3}{-12}$

বা, $m = \frac{1}{4}$

অর্থাৎ, A(0, -3) ও B(4, -2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল এবং B(4, -2) ও C(16, 1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল একই।

∴ A(0, -3), B(4, -2) এবং C(16, 1) বিন্দু তিনটি সমরেখ [দেখানো হলো]।

৪. A(1, -1), B(t, 2) এবং C(t², t + 3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

∴ m ঢালবিশিষ্ট A(1, -1) ও B(t, 2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$-1 - 2 = m(1 - t)$$

$$\text{বা, } -3 = m(1 - t)$$

$$\text{বা, } m = -3/(1 - t) \dots\dots\dots(i)$$

আবার,

m ঢালবিশিষ্ট B(t, 2) এবং C(t², t+3) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণঃ

$$2 - (t + 3) = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } 2 - t - 3 = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } -t - 1 = m(t - t^2)$$

$$\text{বা, } m = (-t - 1)/(t - t^2) \dots\dots\dots(ii)$$

এখন, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি সমরেখ; অতএব প্রত্যেক জোড় বিন্দুর সরলরেখার ঢাল এর মান সমান হবে।

∴ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$-3/(1 - t) = (-t - 1)/(t - t^2)$$

$$\text{বা, } -3(t - t^2) = (1 - t)(-t - 1)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -(1 - t)(1 + t)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -(1 - t^2)$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 = -1 + t^2$$

$$\text{বা, } -3t + 3t^2 + 1 - t^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 2t - t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t(t - 1) - 1(t - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2t - 1)(t - 1) = 0$$

$$\text{বা, } 2t - 1 = 0 \text{ অথবা, } t - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t = 1 \quad \text{বা, } t = 1$$

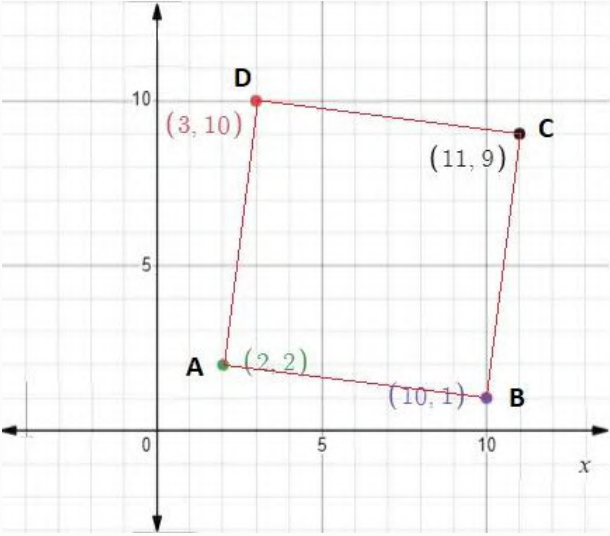
$$\text{বা, } t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = (1, \frac{1}{2})$$

৫. A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9) এবং D(3, 10) এই বিন্দুগুলো লেখচিত্রে বসাও এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকো। এই রেখাগুলো দ্বারা কী ধরনের ক্ষেত্র তৈরি হয়েছে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধানঃ

লেখচিত্রে x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9) এবং D(3, 10) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকি।



এই রেখাগুলো দ্বারা একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়েছে।

যুক্তিঃ

দুইটি বিন্দুর স্থানাংকের ভিত্তিতে,

$$\begin{aligned} &AB \\ &= \sqrt{\{(10-2)^2 + (1-2)^2\}} \\ &= \sqrt{\{(8)^2 + (-1)^2\}} \\ &= \sqrt{(64+1)} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &BC \\ &= \sqrt{\{(11-10)^2 + (9-1)^2\}} \\ &= \sqrt{\{(1)^2 + (8)^2\}} \\ &= \sqrt{(1+64)} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

CD

$$= \sqrt{\{(3-11)^2 + (10-9)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(-8)^2 + (1)^2\}}$$

$$= \sqrt{(64+1)}$$

$$= \sqrt{65}$$

AD

$$= \sqrt{\{(2-3)^2 + (2-10)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(-1)^2 + (-8)^2\}}$$

$$= \sqrt{(1+64)}$$

$$= \sqrt{65}$$

অর্থাৎ, $AB = BC = CD = AD$

একইভাবে,

AC

$$= \sqrt{\{(11-2)^2 + (9-2)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(9)^2 + (7)^2\}}$$

$$= \sqrt{(81+49)}$$

$$= \sqrt{130}$$

BD

$$= \sqrt{\{(3-10)^2 + (10-1)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(-7)^2 + (9)^2\}}$$

$$= \sqrt{(49+81)}$$

$$= \sqrt{130}$$

অর্থাৎ, ABCD এর কর্ণদ্বয় (AC ও BD) পরস্পর সমান।

∴ AB, BC, CD, AD রেখাগুলো দ্বারা একটি বর্গক্ষেত্র তৈরি হয়েছে।

৬. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(-2, 1), B(10, 6) এবং C(a, -6). যদি $AB = BC$ হয়, তবে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো। a এর প্রতিটি মানের জন্য গঠিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(-2, 1), B(10, 6) এবং C(a, -6).

দুইটি বিন্দুর স্থানাংকের ভিত্তিতে পাই,

AB

$$= \sqrt{\{(10+2)^2+(6-1)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(12)^2+(5)^2\}}$$

$$= \sqrt{(144+25)}$$

$$= \sqrt{169}$$

$$= 13$$

এবং,

BC

$$= \sqrt{\{(a-10)^2+(-6-6)^2\}}$$

$$= \sqrt{\{(a-10)^2+(-12)^2\}}$$

$$\sqrt{\{(a-10)^2+144\}}$$

প্রশ্ন অনুসারে,

$$AB = BC$$

$$\text{বা, } 13 = \sqrt{\{(a-10)^2+144\}}$$

$$\text{বা, } 169 = (a-10)^2+144 \text{ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (a-10)^2 = 169-144$$

$$\text{বা, } (a-10)^2 = 25$$

$$\text{বা, } a^2-20a+10^2-25=0$$

$$\text{বা, } a^2-20a+100-25=0$$

$$\text{বা, } a^2-15a-5a+75=0$$

$$\text{বা, } a(a-15)-5(a-15)=0$$

$$\text{বা, } (a-5)(a-15)=0$$

$$\text{বা, } a-5 = 0 \text{ অথবা, } a-15=0$$

$$\text{বা, } a=5 \quad \text{বা, } a = 15$$

$$\therefore a = (5, 15)$$

এখন,

$a=5$ হলে, তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(5, -6)$;

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-2(6+6)+10(-6-1)+5(1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 \times 12 + 10(-7) + 5(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-24 - 70 - 25]$$

$$= \frac{1}{2} \times (-119)$$

$$= -59.5$$

কিন্তু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না।

∴ a=5 হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল 59.5 বর্গ একক।

আবার,

a=15 হলে, তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(-2, 1), B(10, 6) এবং C(15, -6);

∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-2(6+6)+10(-6-1)+15(1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 \times 12 + 10(-7) + 15(-5)]$$

$$= \frac{1}{2}[-24 - 70 - 75]$$

$$= \frac{1}{2} \times (-169)$$

$$= -84.5$$

কিন্তু ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হয় না।

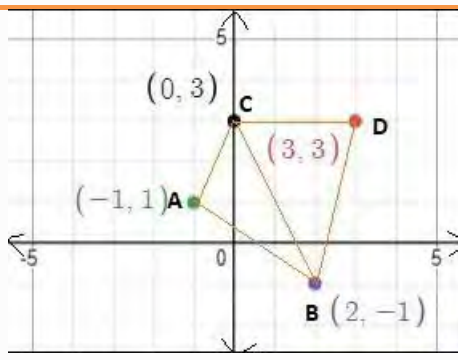
∴ a=15 হলে, ΔABC এর ক্ষেত্রফল 84.5 বর্গ একক।

৭. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(-1, 1), B(2, -1), C(0, 3) ও D(3, 3)। বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক A(-1, 1), B(2, -1), C(0, 3) ও D(3, 3)। বিন্দুগুলোকে গ্রাফ কাগজে বসালে নিম্নোক্ত চতুর্ভুজ ABDC পাই।



∴ ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[-1(-1-3)+2(3-1)+0(1+1)]$$

$$= \frac{1}{2}[-1 \times (-4)+2(2)+0(2)]$$

$$= \frac{1}{2}[4+4+0]$$

$$= \frac{1}{2} \times (8)$$

$$= 4 \text{ বর্গ একক।}$$

এবং,

ΔBDC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] \text{ [সূত্রানুসারে]}$$

$$= \frac{1}{2}[2(3-3)+3(3+1)+0(-1-3)]$$

$$= \frac{1}{2}[2 \times 0+3(4)+0(-4)]$$

$$= \frac{1}{2}[0+12+0]$$

$$= \frac{1}{2} \times (12)$$

$$= 6 \text{ বর্গ একক।}$$

∴ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} + \Delta BDC \text{ এর ক্ষেত্রফল}$$

$$= (4+6) \text{ বর্গ একক}$$

$$= 10 \text{ বর্গ একক।}$$