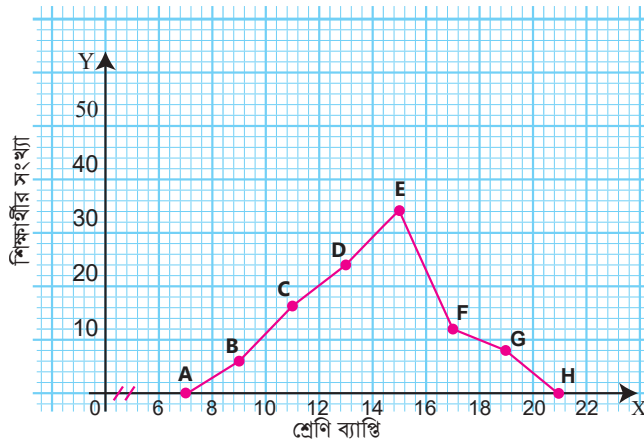


# তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ
- তথ্য ও উপাত্ত উপস্থাপন
- গণসংখ্যা বহুভুজ
- অজিভ রেখা
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ



## তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই

আগের শ্রেণিতে আমরা তথ্য ও উপাত্ত সম্বন্ধে মৌলিক ধারণা লাভ করেছি এবং বিস্তারিত জেনেছি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা তথ্যের উৎসের ধরন, সঠিক উৎস নির্বাচনের প্রক্রিয়াসহ তথ্য বিশ্লেষণ ও উপস্থাপনের বিভিন্ন উপায় সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব। যাতে কোনো সমস্যা সমাধানে আমরা কার্যকরী সিদ্ধান্ত নিতে পারি। আমাদের দৈনন্দিন জীবনেও বিভিন্ন কাজে সিদ্ধান্ত নেয়ার ক্ষেত্রে যখন তথ্য সংগ্রহ করি তখন তথ্যের উৎসের উপর কতটুকু নির্ভর করা যায় তা শনাক্ত করা প্রয়োজন। এই গণিত বইয়ের প্রথম অভিজ্ঞতার মধ্য দিয়ে তোমরা জেনেছ যে সঠিক/কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ করা জরুরি। এই অভিজ্ঞতাটি এমনভাবে সাজানো হয়েছে যেন একটি দলগত প্রকল্পে সক্রিয় অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা নিজেরা বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ তথ্য সংগ্রহ করে যুক্তিভিত্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করবে। তোমরা জেনে থাকবে যে পরিসংখ্যান (Statistics) হলো জ্ঞান-বিজ্ঞানের ঐ শাখা যা তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করে কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে আমাদের সাহায্য করে। আমরা আশা করি এই অভিজ্ঞতাটিতে সক্রিয় অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা পরিসংখ্যানের এই গুরুত্বপূর্ণ দক্ষতাগুলো আয়ত্ত করবে।

### দলগত প্রকল্প

এসো প্রকল্পের কাজটি শুরু করা যাক। এই কাজের জন্য প্রথমেই তোমরা দলে ভাগ হয়ে যাবে। এরপর তথ্য সংগ্রহের জন্য নিচের তালিকা থেকে যে কোনো একটি বিষয়বস্তু নির্বাচন করবে।

বিষয়বস্তু :

- ১। বিদ্যালয়ের ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির চিত্র।
- ২। শ্রেণি ও বয়স অনুযায়ী আমাদের স্বাস্থ্যের বর্তমান হালচাল।
- ৩। আমাদের পরিবারে কর্মক্ষম লোকসংখ্যার বর্তমান চালচিত্র।
- ৪। আমাদের বাগানে গাছপালার স্বাভাবিক বৃদ্ধির খুঁটিনাটি।

তোমরা খেয়াল করে দেখবে যে এই তালিকার প্রতিটি বিষয়বস্তু সম্পর্কে তথ্যগুলো যদি সঠিকভাবে জানা যায় তাহলে ঐ বিষয়বস্তু সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নেয়া সহজ হয়। যেমন— আমরা যদি কোনো বিদ্যালয়ের শিক্ষা ব্যবস্থার উন্নয়ন সম্পর্কে কোনো সিদ্ধান্ত নিতে চাই, তাহলে শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির হার আমাদের জানতে হবে। এসো তাহলে কাজটি সবাই মিলে করি।

**উপাত্ত সংগ্রহের নির্দেশনা :** তোমাদের সুবিধার জন্য নিচে ছয়টি নমুনা দলের নাম লিখে উপাত্ত সংগ্রহের কাজটি উল্লেখ করা হলো। দলের মধ্যে পরিকল্পনা করে উপাত্তগুলো সংগ্রহ ও সংরক্ষণ করবে। এই কাজটির জন্য সময় ও নির্দেশনা শিক্ষক তোমাদের জানিয়ে দিবেন।

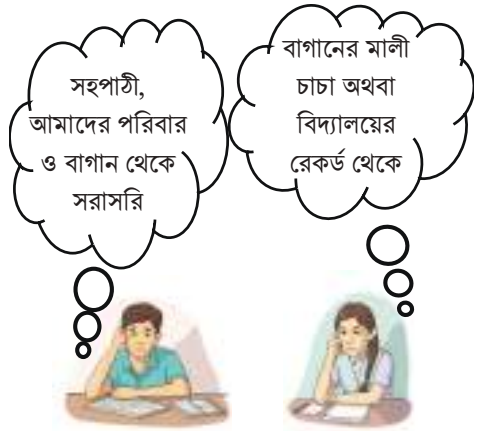
- শাপলা — ষষ্ঠ শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি
- পলাশ — সপ্তম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি

- টগর – অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি
- গোলাপ – অষ্টম শ্রেণির সকলের উচ্চতা (সেন্টিমিটারে) ও ওজন (কেজিতে) মাপি এবং রেকর্ড সংরক্ষণ করি
- শিউলি – অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর পরিবারের লোকসংখ্যা ও বয়সের উপাত্ত সংগ্রহ করি
- ডালিয়া – বাগানের গাছগুলোর উচ্চতা (সেমি বা মিটারে) ও পাতার দৈর্ঘ্য (মিলিমিটারে) মাপি এবং রেকর্ড সংরক্ষণ করি

উপাত্ত সংগ্রহের জন্য শিক্ষক যে সময় এবং নির্দেশনা দিয়েছেন তা অনুসরণ করে প্রথমে দলে বসে পরিকল্পনা করবে এবং নিজেদের মধ্যে কাজ ভাগ করে নিবে। তোমাদের দলের তথ্য সংগ্রহের ক্ষেত্রে তুমি যে বিষয়গুলো খেয়াল করেছ তা লিখে রাখো এবং দলের অন্যদের সঙ্গে আলোচনা করো। দলের পরিকল্পনা অন্যদের সামনে উপস্থাপনের সময় অন্যদের মতামত খাতায় লিখে রাখো এবং প্রয়োজনে পরিকল্পনা পরিমার্জন করো।

এবার দলগতভাবে যে তথ্যগুলো তোমরা সংগ্রহ করেছ তার উপর ভিত্তি করে নিচের ছকটি দলের একজনের খাতায় তৈরি করে পূরণ করো। ছকটি পূরণের ক্ষেত্রে দলের সকলের মতামত নাও এবং প্রয়োজনে শিক্ষকের সাহায্য গ্রহণ করো।

তথ্য সংগ্রহের বিষয়	তথ্য সংগ্রহের জন্য সম্ভাব্য উৎসের নাম	উৎসের ধরন	কোন উৎসটি সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য মনে করেছ? কেন?



### তথ্য/উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ করতে হবে কেন?

তথ্য/উপাত্ত সংগ্রহ করার পরবর্তী কাজ হলো তথ্য প্রক্রিয়াকরণ। কিন্তু তথ্য সংগ্রহ করার পরেই আমরা তথ্য প্রক্রিয়ার কাজ শুরু করতে পারি না। কারণ সংগৃহীত তথ্যকে সাজিয়ে না নিলে সঠিকভাবে তথ্য প্রক্রিয়াকরণ করা সম্ভব হয় না। তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণের কাজ করেছিলে।



**দলগত কাজ:** প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তগুলো সারগিভুক্ত করে বিন্যস্ত করো।

## উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ (Organizing the Data)

আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত আর অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো বেশিরভাগ সময় অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি কোনো সিদ্ধান্তে যাওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা ইতোমধ্যে আমরা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে—

- প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়
- তারপর উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান দিয়ে ভাগ করে শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়
- উপাত্তের সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ কোনো না কোনো শ্রেণিতে পড়বেই। তাই শ্রেণির বিপরীতে সাংখ্যিক মানের জন্য ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নির্ণয় করতে হয়
- যে শ্রেণিতে যতগুলো ট্যালি চিহ্ন পড়বে তত হবে ঐ শ্রেণির গণসংখ্যা, যা ট্যালি চিহ্নের বিপরীতে গণসংখ্যা কলামে লিখতে হয়

মনে করো, তোমাদের বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়েছে। নিচের বক্সে দেওয়া অবিন্যস্ত উপাত্ত উপরের এই ধাপগুলো অনুসরণ করে বিন্যস্ত করা হয়েছে। তোমাদের দলের সংগৃহীত উপাত্তগুলো বিন্যস্ত/শ্রেণিবদ্ধ করার সময় এই ধাপগুলো অনুসরণ করলে কাজটি সহজ হবে।

চলো উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করি :

নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ নিম্নরূপ:

18, 14, 8, 16, 9, 15, 13, 14, 15, 9, 17, 8, 15, 8, 10, 10, 11, 14, 16, 11, 10, 11, 18, 10, 11, 10, 12, 12, 13, 18, 12, 13, 12, 10, 12, 13, 12, 13, 11, 12, 13, 14, 11, 14, 15, 14, 15, 14, 14, 10, 14, 15, 14, 19, 15, 14, 17, 15, 14, 13, 15, 14, 16, 15, 15, 14, 15, 12, 17, 10, 16, 15, 12, 17, 15, 14, 10, 16, 9, 17, 13, 12, 16, 13, 11, 16, 12, 18, 13, 19, 15, 15, 19, 13, 12, 12, 14, 19, 14, 15

এখানে উপাত্তের সর্বোচ্চ সংখ্যা 19 এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা 8

$$\therefore \text{পরিসর} = (19 - 8) + 1 = 12;$$

তোমরা তো জানো,

$$\text{শ্রেণিসংখ্যা} = \frac{\text{পরিসর}}{\text{শ্রেণিব্যবধান}} \quad (\text{পূর্ণসংখ্যায় প্রকাশিত})$$

ছক-১০.১		
শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
8 - 10		6
10 - 12		16
.....	.....	.....
.....	.....	.....
	মোট	

আমরা যদি শ্রেণি ব্যবধান 2 ধরে নিই,

$$\text{তাহলে শ্রেণিসংখ্যা হবে} = \frac{12}{2} = 6$$

এবার চলো নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে শ্রেণি অনুযায়ী বিন্যস্ত করে ছক ১০.১ এর মতো তৈরি করি। দুইটি করে দেওয়া হলো। বাকি শ্রেণিগুলো তৈরি করে মাথা খাটিয়ে পূরণ করো।

#### দলগত কাজের আত্মপ্রতিফলন

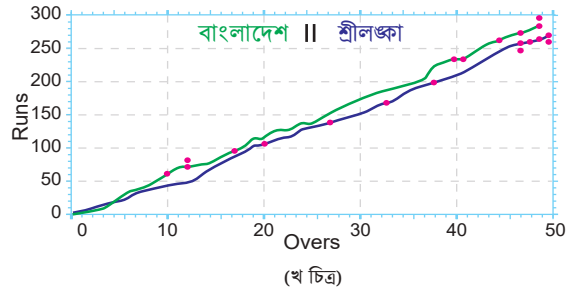
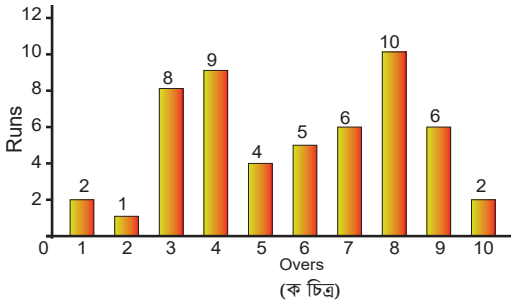
দলগত কাজটির জন্য এ পর্যন্ত যে কাজগুলো করেছে পাশে তার একটি তালিকা দেয়া আছে। কাজগুলোকে ক্রমানুসারে সাজাও। কোন কাজটি করতে তোমরা সবচেয়ে বেশি চ্যালেঞ্জ মোকাবিলা করেছে তা দলের মধ্যে আলোচনা করে লেখো।

উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ → উপাত্ত সংগ্রহ → উপাত্ত বিন্যস্তকরণ → উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই → পরিসর নির্ধারণ → উৎস নির্বাচন → শ্রেণি ব্যবধান নির্ণয়

### উপাত্তের উপস্থাপন (Presentation of Data)

দলগত কাজটির এ পর্যায়ে তোমরা সংগৃহীত উপাত্তগুলোকে এমনভাবে উপস্থাপন করবে যাতে করে অন্য দলের সামনে তোমাদের কাজটি প্রদর্শন করার সময় তোমাদের সংগৃহীত উপাত্তের অর্থ তারা খুব সহজে বুঝতে পারে। বিভিন্নভাবে উপাত্ত উপস্থাপন করা যায়।

চিত্র : ১০.১ এর দুইটি চিত্র লক্ষ্য করো।



চিত্র: ১০.১

আমরা টেলিভিশন, ম্যাগাজিন, দৈনিক পত্রিকা, বিজ্ঞাপনে অনেকবার এই ধরনের ছবি দেখেছি, তাই না? তোমরা তো জানো, একটি ছবি হাজার শব্দের সমান। হাজার শব্দের প্রতিবেদনে যে কথাটি ফুটিয়ে তোলা যায় না, অনেক সময় একটি ছবিই সেই ভাবনাটি সম্পূর্ণরূপে ফুটিয়ে তোলে। উপরের ছবি দুটিতেও অনেকগুলো তথ্য-উপাত্ত রয়েছে। ছবি দুটিতে কী কী তথ্য-উপাত্ত রয়েছে সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।



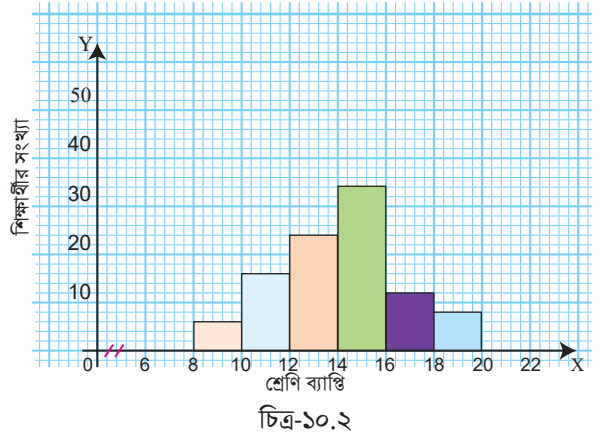
আমরা জেনেছি, সংগৃহীত উপাত্তগুলোকে সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্পর্কে জানা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝতে, বোঝাতে যেমন সহজ হয় তেমনি আরও চিত্তাকর্ষক হয়। এজন্য অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত একটি পদ্ধতি। আগের শ্রেণিগুলোতে স্তম্ভলেখ (bar graph), রেখাচিত্র (line graph), আয়তলেখ (histogram) ও পাইচিত্র (pie chart) সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকা যায় তা দেখানো হয়েছে। এবার গণসংখ্যা বহুভুজ (frequency polygon) ও অজিত রেখা (cumulative frequency curve) কীভাবে আঁকা হবে তা নিয়ে চলো আমরা আলোচনা করি।

এবার আমরা ছক-১০.২ ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করার চেষ্টা করব।

ছক-১০.২						
উপস্থিতির শ্রেণি ব্যাপ্তি	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	6	16	24	34	12	8

প্রথমে  $x$  অক্ষ (অনুভূমিক রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 2 একক নিয়ে সারণির শ্রেণি সীমাগুলোর মানগুলোকে কোনো ফাঁক না রেখে পরপর বসাই। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 8 থেকে শুরু করা হয়েছে, তাই  $x$  অক্ষে বা অনুভূমিক রেখায় পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে (-/-) ছেদ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন  $y$  অক্ষ (উল্লম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 10 একক এবং গণসংখ্যা নিয়ে পাশের ছবির মতো কতকগুলো পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো (চিত্র-১০.২)। যেখানে আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ সারণির শ্রেণি ব্যবধান এবং দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির গণসংখ্যার সমান। এভাবে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তকে লৈখিক উপস্থাপন করে আমরা আয়তলেখ (Histogram) তৈরি করে থাকি।



আয়তলেখের  
ব্যবহার ??



### একক কাজ

নিজের ভাষায় তোমার সহপাঠীকে ব্যাখ্যা করো-আয়তলেখ কী? আমরা কোন ধরনের উপাত্তের জন্য আয়তলেখ ব্যবহার করি?

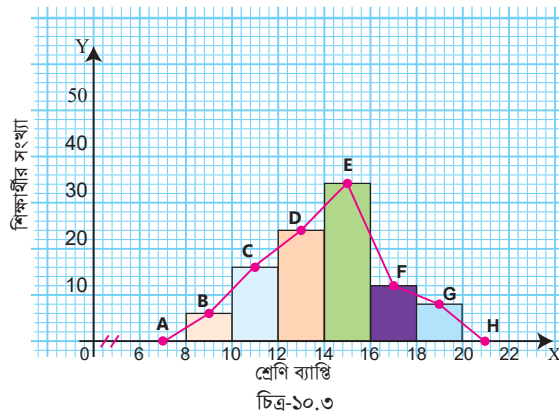
**দলগত কাজ:** প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করো। -

## আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon) অঙ্কন

ছক- ১০.৩		
শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
8 - 10	9	6
10 - 12	11	16
12 - 14	13	24
14 - 16	15	34
16 - 18	17	12
18 - 20	19	8

ছক-১০.৩ থেকে নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির উপাত্ত আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো প্রথমে নির্ণয় করো।

এবার আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো B, C, D, E, F ও G দিয়ে চিহ্নিত করো। এক্ষেত্রে প্রতিটি বিন্দুর ভূজ হবে শ্রেণির মধ্যবিন্দু এবং কোটি হবে আয়তসমূহের উচ্চতা। তাহলে, B, C, D,



E, F ও G বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে (9, 6), (11, 16), (13, 24), (15, 34), (17, 12) এবং (19, 8)। এখন বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করো। এতে কি বহুভুজটি অঙ্কন সম্পূর্ণ হবে? বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য  $x$  অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক আগের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু A(7, 0) এবং শেষ শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক পরের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু H(21, 0) চিহ্নিত করো। এবার B বিন্দুর সঙ্গে A এবং G বিন্দুর সঙ্গে H বিন্দু সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে গণসংখ্যা বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করো (চিত্র : ১০.৩)। তাহলে, ABCDEFGH-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।

সুতরাং কোনো অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণিব্যাপ্তির গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ।

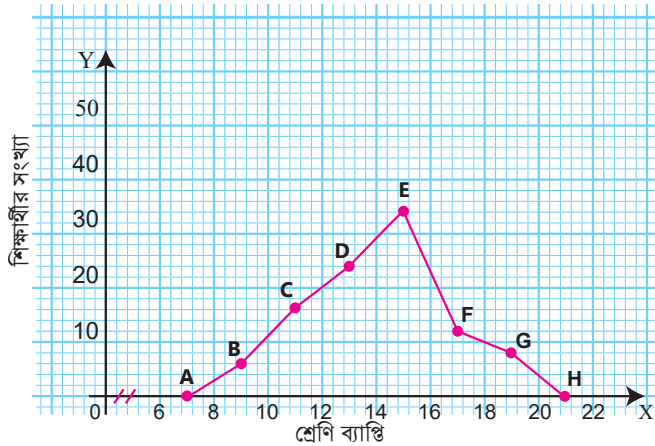
**একক কাজ:** ক) প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

খ) মাথা খাটিয়ে প্রমাণ করো যে, গণসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল = আয়তলেখের ক্ষেত্রফল।

### আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন আয়তলেখ ছাড়াও সম্ভব। তাহলে চলো, শ্রেণি বিন্যস্ত ছক-১০.২ ব্যবহার করে আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ কীভাবে অঙ্কন করা যায় দেখি।

এক্ষেত্রে আয়তলেখ না এঁকে প্রত্যেকটি শ্রেণির মধ্যমানকে ভুজ এবং ঐ শ্রেণির গণসংখ্যাকে কোটি ধরে B(9, 6), C(11, 16), D(13, 24), E(15, 34), F(17, 12) এবং G(19, 8) বিন্দুগুলো ছক কাগজে চিহ্নিত করো।



চিত্র : ১০.৪



তারপর বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করো। কিন্তু বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য  $x$  অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক আগের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু  $A(7, 0)$  এবং শেষ শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক পরের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু  $H(21, 0)$  চিহ্নিত করো। এখন  $B$  বিন্দুর সঙ্গে  $A$  এবং  $G$  বিন্দুর সঙ্গে  $H$  সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করো (চিত্র-১০.৪)। তাহলে, ABCDEFGH-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।

### একক কাজ

প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

### উপাত্ত বিশ্লেষণ

মনে করো তোমরা চার বন্ধু মিলে “নভোথিয়েটার” ঘুরে দেখতে যাবে।



নভোথিয়েটারে আছে নানারকম প্রদর্শনীর ব্যবস্থা এবং সেগুলোর জন্য টিকেট কাটতে হবে। তপুর আছে ৪০ টাকা, নিতু এনেছে ৬৫ টাকা, হিমুর আছে ৭০ টাকা আর তোমার ৭৫ টাকা। সব মিলিয়ে  টাকা। নভোথিয়েটারে গিয়ে দেখলে ৫D চলচ্চিত্র প্রদর্শনীর টিকেট ৭০ টাকা করে, ভারুয়াল রিয়েলিটি গেইম এর টিকেট ৭৫ টাকা করে এবং প্ল্যানেটেরিয়াম প্রদর্শনী ৪০ টাকা করে। তোমরা চার বন্ধু মিলে সর্বোচ্চ কত

টাকায় কোন প্রদর্শনীটি দেখতে পারবে? কীভাবে হিসাব করলে? অর্থাৎ তোমাদের সব মিলিয়ে যত টাকা হচ্ছে তার মাঝামাঝি সংখ্যা নির্ণয় করলে, যেন সবাই অংশগ্রহণ করতে পার। এই পদ্ধতিটিকে বলা হয় গড় (Average)।

এ তো গেল একটি সহজ উদাহরণ। কিন্তু আরও জটিল প্রশ্ন আসতে পারে— বিজ্ঞান শিক্ষা অর্জনের ক্ষেত্রে বাংলাদেশে ছেলেদের চেয়ে মেয়েরা বেশি এগিয়ে আছে কি? কিংবা বাংলাদেশে ক্রিকেট দলে গত দশ বছরের মধ্যে সেরা খেলোয়াড় কে? অথবা গতমাসে তোমার স্কুলের মাধ্যমিক পর্যায়ে কোন শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির হার সবচেয়ে বেশি ছিল? এই প্রশ্নগুলোর উত্তর যদি আমরা দিতে চাই তাহলে পরিসংখ্যানের যে বিষয়টি আমাদের সবচেয়ে বেশি সাহায্য করে তাহলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা— যার মাধ্যমে উপাত্তের সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করা যায়।

## কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency)

নিতুর স্কুলের পাশে দুটি চায়ের দোকানে খুব ভালো মানের চা পাওয়া যায়। একটি মন্টু মামার এবং অন্যটি বিন্দু মাসীর।



নিতু স্কুলে আসা-যাওয়ার সময় লক্ষ করে দিনের প্রায় সকল সময়ে ঐ দুটি দোকানে খরিদারের ভিড় লেগেই থাকে। কিন্তু কোন দোকানে বেশি লাভ হয়, নিতু তা বুঝতে পারছে না। সেজন্য নিতু ঐ দুটি চা এর দোকানের প্রত্যেকটির গতমাসের প্রতিদিন কত টাকা লাভ হয়েছে সে উপাত্তগুলো সংগ্রহ করে। নিচের বক্সে নিতুর সংগৃহীত উপাত্ত দেওয়া আছে।

গতমাসে মন্টু মামার দোকানের প্রতিদিনের লাভ (টাকায়):

560, 615, 830, 670, 720, 920, 775, 920, 775, 720, 560, 615, 670, 920, 830, 775, 720, 775, 720, 775, 615, 670, 615, 720, 830, 720, 670, 720, 830, 670

গতমাসে বিন্দু মাসীর দোকানের প্রতিদিনের লাভ (টাকায়):

555, 730, 555, 780, 620, 825, 620, 730, 875, 620, 780, 660, 825, 660, 730, 780, 730, 730, 620, 730, 780, 660, 780, 825, 660, 825, 875, 660, 875, 730

ভেবে দেখো তো, প্রদত্ত উপাত্তগুলো থেকে গতমাসে কোন দোকানে কত বেশি লাভ হয়েছে নিতু কি তা বলতে পারবে? সে দুটি দোকানের পাওয়া উপাত্তের তুলনা কীভাবে করবে?

আমরা প্রতিটি উপাত্তের জন্য এমন কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি যা সম্পূর্ণ উপাত্তের প্রতিনিধিত্ব করবে। এই বিশেষ সংখ্যাগুলো সাধারণত উপাত্তের কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি থাকে। অর্থাৎ অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। নিচের বক্সের একক কাজটি করে দেখো।

### একক কাজ

ক) মন্টু মামার দোকান থেকে প্রাপ্ত উপাত্তগুলো মানের উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাও।

খ) বিন্দু মাসীর দোকান থেকে প্রাপ্ত উপাত্তগুলো মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

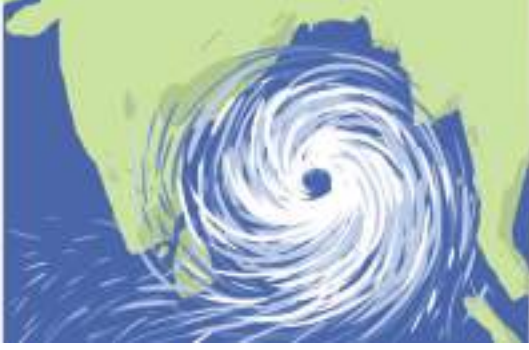
গ) নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজাও।

বিন্যস্ত করার পর এমন কোনো মান কি দেখতে পাচ্ছ যা সবচেয়ে বেশি সংখ্যকবার পাওয়া গেছে? তাহলে ঐ মান বা মানগুলো লিখে রাখো।

ক) \_\_\_\_\_

খ) \_\_\_\_\_

গ) \_\_\_\_\_



সাইক্লোনের সময় বাতাসের গতিবেগ



কোনো দেশের রাজধানীর জনসংখ্যার ঘনত্ব

চিত্র : ১০.৫

**চিত্র -১০.৫ দেখে তোমরা কি কিছু ধারণা করতে পারছ? সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করো। তোমাদের ভাবনাটা সংক্ষেপে লিখে শিক্ষককে দেখাও।**

আমরা যদি অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করি, তাহলেও দেখা যাবে মাঝামাঝি কোনো একটি শ্রেণিতে সবচেয়ে বেশি সংখ্যক গণসংখ্যা রয়েছে। মূলত সংখ্যাগুলোর কাছাকাছি অবস্থানই হলো কেন্দ্রীয় অবস্থান। সুতরাং আমরা বলতে পারি, উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : ১) গাণিতিক গড় বা গড় (arithmetic average or mean) (২) মধ্যক (median) (৩) প্রচুরক (mode)।

তোমরা দলগতভাবে যে উপাত্ত সংগ্রহ করেছ অধ্যায়টির এই অংশে ঐ উপাত্তসমূহকে বিশ্লেষণ করে কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করবে। এরপর সংগৃহীত উপাত্তের সাধারণ কিছু বৈশিষ্ট্য শনাক্ত করার জন্য সিদ্ধান্ত গ্রহণ করবে। এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় প্রবণতার যে তিনটি পরিমাপক (গড়, মধ্যক ও প্রচুরক) আছে, সে সম্পর্কে ধারণা লাভ করবে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ আমাদের কি কাজে লাগে?

মনে করো, তোমরা শিক্ষার্থীদের মাসিক উপস্থিতি সম্পর্কে উপাত্ত সংগ্রহ করলে। যদি ঐ উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করতে পার তাহলে খুব সহজেই বলতে পারবে “মাসের কোন দিনগুলোতে শিক্ষার্থীর উপস্থিতি সবচেয়ে কম বা বেশি ছিল” কিংবা “বেশিরভাগ দিন কত সংখ্যক শিক্ষার্থী সাধারণত উপস্থিত থাকে”। অর্থাৎ, একটি নির্দিষ্ট ঘটনা সম্পর্কে উপাত্ত সংগ্রহ করার পর যদি ঐ উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপগুলো নির্ণয় করতে পারি তাহলে আমরা খুব সহজেই ঐ উপাত্তের তথ্য ঐ নির্দিষ্ট ঘটনার সাধারণ বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে পারব।

- ☐ গড়, মধ্যক ও প্রচুরক কখন/কোন পরিস্থিতিতে ব্যবহার করতে হয়?
- ☐ গড়, মধ্যক ও প্রচুরক থেকে আমরা কী ধরনের তথ্য পাই এবং এর মাধ্যমে উপাত্তকে কীভাবে ব্যাখ্যা করা যায়?
- ☐ অবিন্যস্ত (raw data) ও বিন্যস্ত (data in frequency table) উপাত্ত থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক গণনা/পরিমাপ করার প্রক্রিয়া কী?

এই অংশের কাজগুলো করার সময় তোমরা যে বিষয়গুলো গুরুত্বের সঙ্গে বিবেচনা করবে তা পাশের বক্সে দেওয়া আছে।

## গাণিতিক গড় বা গড় (Arithmetic Average or Mean)

তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণিতে শিখেছ, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। মনে করো মন্টু মামার দোকান থেকে নিতুর পাওয়া ৩০ দিনের উপাত্ত (লাভ) যথাক্রমে  $x_1 = 560, x_2 = 615, x_3 = 830, \dots, x_{30} = 670$

এখন  $x$  চলকের  $n$  সংখ্যক বিভিন্ন মান  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  এবং উপাত্তগুলোর গড়  $\bar{x}$  (পড়তে হবে  $x$  বার) হলে,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

এখানে,  $\Sigma$  চিহ্নটি হলো গ্রিক বর্ণ এবং বলা হয় (Capital Sigma), যার অর্থ সমষ্টি।

তাহলে, গতমাসে মন্টু মামার মোট লাভ হয়

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{30}$$

$$= (560 + 615 + 830 + \dots + 670) \text{ টাকা}$$

$$= 21925 \text{ টাকা।}$$

$\therefore$  মন্টু মামার দোকানে গতমাসের গড় লাভ

$$= \frac{21925}{30} = 730.83 \text{ টাকা (প্রায়)।}$$

(প্রয়োজনে ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যেতে পারে।)

এই পদ্ধতিতে পাওয়া গড়কে আমরা গাণিতিক গড় বা গড় বলে থাকি।

আচ্ছা, সংখ্যাগুলো যদি অনেক বড়ো হয় সেক্ষেত্রে উপরের পদ্ধতিতে গড় বের করা অনেক কষ্টের, তাই না? একটু কম কষ্ট করে সহজেই বড়ো বড়ো অনেকগুলো সংখ্যার গড় নির্ণয় করা গেলে কেমন হয়। তাহলে চলো, বিন্দু মাসীর দোকান থেকে নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোকে ছক: ১০.৮ এর মাধ্যমে বিন্যস্ত করে দেখি তিনি গতমাসে গড়ে কত টাকা লাভ করেছেন।

ছক- ১০.৮		
লাভের পরিমাণ (টাকা) ( $x_i$ )	দিনসংখ্যা ( $f_i$ )	$f_i x_i$
555	2	1110
620	4	2480
660	5	3300
730	7	5110





780	5	3900
825	4	3300
875	3	2625
মোট	$n = 30$	$\sum f_i x_i = 21825$

$\therefore$  গতমাসে বিন্দু মাসীর চা এর দোকান থেকে গড় লাভ হয়েছে  $= \frac{1}{n} \sum f_i x_i = \frac{1}{30} \times 21825 = 727.50$  টাকা।

তাহলে দেখা যাচ্ছে, নিতুর পাওয়া তথ্য অনুসারে গতমাসে মন্টু মামার দোকানে গড় লাভ বেশি ছিল।

আমরা দুটি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করে দেখলাম। যদিও এই পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সহজ কিন্তু উপাত্তের সংখ্যা অনেক বেশি হলে, এভাবে গড় নির্ণয় করা একদিকে যেমন সময়সাপেক্ষ, অন্যদিকে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। তাই উপাত্তের সংখ্যা বেশি হলে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে গড় নির্ণয় করা অধিক শ্রেয়।

তাহলে চলো, বিন্দু মাসীর দোকান থেকে নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে গড় নির্ণয় করার চেষ্টা করি :

নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা 555 এবং সবচেয়ে বড়ো সংখ্যা 875। এক্ষেত্রে উপাত্তের পরিসর কত হবে পাশের ঘরে  $\text{পরিসর} = ( \quad - \quad ) + 1 = \quad$  লেখো।

এখন শ্রেণি ব্যবধান 50 নিলে শ্রেণি সংখ্যা হবে  $= ( \quad \div 50 ) = 6.42$  বা  $\quad$  ।

**ভেবে দেখো তো, উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করা হলে প্রতিটি শ্রেণির কেন্দ্রীয় মান কীভাবে পাওয়া যাবে?**

ধরে নেওয়া হয় যে, শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ উপাত্তের প্রতিটি শ্রেণির গণসংখ্যাগুলোর বেশিরভাগ ঐ শ্রেণির মধ্যমানের কাছাকাছি কেন্দ্রীভূত হয়ে থাকে। তাই প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমানকেই ঐ শ্রেণির প্রতিনিধি বিবেচনা করা হয়। অর্থাৎ

কোনো একটি শ্রেণি লিখে শ্রেণিটির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা লেখো।

শ্রেণি: \_\_\_\_\_

উচ্চসীমা = \_\_\_\_\_, নিম্নসীমা = \_\_\_\_\_

শ্রেণি মধ্যমান =  $\frac{\text{শ্রেণির নিম্নসীমা} + \text{শ্রেণির উচ্চসীমা}}{2}$

এবার চলো ছক ১০.৫ তৈরি করে ফেলি :

ছক- ১০.৫				
লাভের পরিমাণ (টাকা)	ট্যালি চিহ্ন	দিনসংখ্যা ( $f_i$ )	শ্রেণির মধ্যমান ( $x_i$ )	$f_i x_i$
550 – 600	II	2	575	1150
601 – 650	IIII	4	625	2500
651 – 700	IIII	5	675	3375
701 – 750	IIII II	7	725	5075
751 – 800	IIII	5	775	3875
801 – 850	IIII	4	825	3300
851 – 900	III	3	875	2625
		$n = 30$		$\sum f_i x_i = 21900$
$\therefore$ গতমাসে লাভের গাণিতিক গড় $= \frac{1}{n} \sum f_i x_i = \frac{1}{30} \times 21900 = 730$ টাকা।				
গাণিতিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method) বলা হয়।				

### দলগত কাজ:

- প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করো।
- গোলাপ দলের সদস্যরা কি মনে করে বয়স অনুসারে সহপাঠীদের গড় উচ্চতা যথার্থ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে ছেলে ও মেয়েদের বয়সের সঙ্গে আদর্শ উচ্চতার আলাদা আলাদা তথ্য-উপাত্ত ব্যবহার করতে পারবে।
- বিদ্যালয়ের বাগানের গাছগুলোর উচ্চতার গড় থেকে ডালিয়া দলের সদস্যরা কি মনে করে গাছগুলোর বৃদ্ধি স্বাভাবিক? অন্য দলের সামনে তোমাদের যুক্তি উপস্থাপন করো।
- ছক ১০.৪ ও ১০.৫ এর ক্ষেত্রে ক্যালকুলেটর ব্যবহার তোমাদের কীভাবে সাহায্য করেছে লেখো।

লক্ষ করো, বিন্দু মাসীর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গড় লাভ পেয়েছিলে 727.50 টাকা এবং বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গড় লাভ পেয়েছ 730 টাকা। কিন্তু প্রশ্ন হলো এমন আলাদা মান কেন পেলাম এবং এদের কোনটি ঠিক? অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে আমরা জানি ঠিক কোন উপাত্ত কতবার করে আছে। যেমন- ছক-১০.৪ -এ 555 আছে 2 বার। কিন্তু বিন্যস্ত উপাত্তে আমরা শুধু এটুকু জানি যে একটি শ্রেণিতে ঠিক কতগুলো উপাত্ত

আছে। যেমন- ছক-১০.৫-এ (550 – 600) শ্রেণিতে উপাত্ত আছে 2টি। কিন্তু বিন্যস্ত করার ফলে আর জানার সুযোগ থাকে না যে এই ২টি উপাত্তের মান কী কী? এজন্য আমরা (550 – 600) এর শ্রেণি মধ্যমানকে (575) ঐ শ্রেণির প্রতিনিধি নিয়েছি। তারমানে আমরা ধরে নিচ্ছি (550 – 600) শ্রেণিতে থাকা 2টি উপাত্তের মানই হচ্ছে 575। তাই সত্যি বলতে এই গড় আসলে অবিন্যস্ত উপাত্তেরই গড়। কিন্তু বিন্যস্ত উপাত্তের প্রতিনিধিত্বকারী উপাত্ত (শ্রেণির মধ্যমানগুলো) এবং সঠিক উপাত্ত (অবিন্যস্ত উপাত্ত) সবসময় এক নয়। আর উপাত্তই যদি বদলে যায় তাহলে কী সঠিক গড় পাওয়া সম্ভব? তোমরাই ভেবে দেখো।

আমরা প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা জানলাম। তোমরা মনে হয় ভাবছ, যদি আরও একটু সহজ পদ্ধতিতে গড়টি নির্ণয় করা যেতো তাহলে ভালো হতো। তাই না? কেননা তোমাদের কাছে হয়তো মনে হচ্ছে,  $x_i$  এবং  $f_i$  অনেক বড়ো হলে  $f_i x_i$  নির্ণয় ও এদের যোগফল হিসাব করা জটিল এবং সময়সাপেক্ষ হবে। এমনকি ভুল হওয়ারও সম্ভাবনা থাকতে পারে। তাহলে চলো আরও একটি পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

যদি ভালোভাবে খেয়াল করো, দেখবে ছক-১০.৪ ও ছক-১০.৫ উভয়টিতেই  $f_i$  এর কোনো পরিবর্তন হয়নি। অর্থাৎ,  $f_i$  একই আছে। আমরা ইতোমধ্যেই জেনেছি, গড় এই  $x_i$  গুলোর কেন্দ্রীয় মান হবে। সেক্ষেত্রে  $x_i$  গুলোর মাঝামাঝি কোনো একটি  $x_i$  কে অনুমিত গড় (Assumed Mean) হিসেবে ধরে নিতে পারি। আর এই অনুমিত গড়কে সাধারণত ( $a$ ) প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করা হলে প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি ব্যবধান ( $h$ ) সাধারণত সমান থাকে। সেক্ষেত্রে প্রতিটি শ্রেণির ধাপ

বিচ্যুতি ( $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ) নির্ণয় করে তুলনামূলকভাবে সহজে এবং কম সময়ে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা

যায়। তাছাড়া  $f_i u_i$  এর মান ও সমষ্টি বের করাও অনেক সহজ।

গাণিতিক গড় নির্ণয় করার এই পদ্ধতিকে অনুমিত গড় পদ্ধতি (Assumed Mean Method) বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short Method) বা বিচ্যুতি পদ্ধতি (Deviation Method) বলা হয়ে থাকে।

## অনুমিত গড় পদ্ধতি বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি বা বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় :

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের জন্য পাশের সূত্রটি ব্যবহার করতে পারি।	গাণিতিক গড় ( $\bar{x}$ ) = $a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$
--	---

কারণ, প্রতিটি শ্রেণির অনুমিত গড় ও প্রতিটি উপাত্তের পার্থক্যই হলো ধাপ বিচ্যুতি (Deviation)। এই বিচ্যুতি বা পার্থক্যের গড়ই হচ্ছে অনুমিত গড় আর প্রকৃত গড়ের পার্থক্য। তারমানে অনুমিত গড়ের সঙ্গে এই বিচ্যুতি বা পার্থক্যের গড় ( $\frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$ ) যোগ করলেই আমরা পেয়ে যাব গড়ের প্রকৃত বা সঠিক মান।

যেখানে,  $\bar{x}$  = গাণিতিক গড়,  $a$  = অনুমিত গড়,  $n$  = মোট গণসংখ্যা,  $h$  = শ্রেণি ব্যবধান এবং  $\sum f_i u_i$  = ধাপ বিচ্যুতিকে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণফলগুলোর সমষ্টি



এবার চলো ছক- ১০.৬ ব্যবহার করে সংক্ষিপ্ত বা বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করি:

ছক- ১০.৬				
লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিন সংখ্যা $f_i$	শ্রেণির মধ্যমান $x_i$	ধাপ বিচ্যুতি $(u_i) = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
550 – 600	2	575	- 3	- 6
601 – 650	4	625	- 2	- 8
651 – 700	5	675	- 1	-5
701 – 750	7	725 = (a)	0	0
751 – 800	5	775	1	5
801 – 850	4	825	2	8
851 – 900	3	875	3	9
	$n = 30$			$\sum f_i u_i = 3$

এখানে, অনুমিত গড়  $a = 725$ , মোট গণসংখ্যা  $n = 30$ , শ্রেণি ব্যবধান  $h = 50$  এবং  $\sum f_i u_i = 3$

$$\therefore \text{গাণিতিক গড় } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h = 725 + \frac{3}{30} \times 50 = 725 + 5 = 730$$

$\therefore$  লাভের গাণিতিক গড় 730 টাকা।

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম, বিন্দু মাসীর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত গড় লাভের মান একই। তাহলে বলা যায়, শ্রেণির দৈর্ঘ্য বা শ্রেণি ব্যবধান সমান থাকলে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় অধিকতর নির্ভরযোগ্য।

### দলগত কাজ:

- প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করো।
- কোন পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সহজ ও বেশি নির্ভরযোগ্য ব্যাখ্যা করে নিজ নিজ খাতায় লেখো।

এই পর্যন্ত তোমার দলের কাজের অগ্রগতি সম্পর্কে তোমার মতামত এখানে লিখে রাখো।

---



---



---



---



---

## মধ্যক (Median)

ধরো, কোনো এক অফিসের চারজন কর্মচারীর মাসিক বেতন যথাক্রমে 15000, 16000, 17000 ও 18000 টাকা। তোমরা ইতোমধ্যেই গড় নির্ণয় করা শিখেছ। হিসেব করে দেখো তো এই চারজন কর্মচারীর মাসিক বেতন গড়ে কত টাকা? হিসেবটি নিচের খালি ঘরে করো:



কিন্তু যিনি ঐ অফিসের প্রধান, তার মাসিক বেতন 75000 টাকা। এখন তাকে নিয়ে মোট পাঁচ জনের মাসিক গড় বেতন হিসেব করো। কত টাকা পেয়েছ?

তোমরা এরই মধ্যে জেনেছ, গড় মান এমন একটি সংখ্যা যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। তাহলে তোমাদের পাওয়া গড় মানটি কি সকল উপাত্তের কেন্দ্রীয় মান? অথবা উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সংখ্যাটি কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি হয়? যদি না হয়, সেক্ষেত্রে এর কারণ খুঁজতে হবে। কারণটি হলো প্রদত্ত উপাত্তের মধ্যে দু'একটি যদি অন্যান্য মানগুলোর তুলনায় অনেক বড়ো বা অনেক ছোটো হয়, তখন উপাত্তসমূহের গড় মান তাদের কেন্দ্রীয় মানের কাছাকাছি থাকে না। অর্থাৎ উপাত্তে গড় এক্ষেত্রে ভালো ফল দিতে পারে না। এই ধরনের পরিস্থিতিতে উপাত্তের গড় মানের চেয়ে মধ্যক (median) অনেক বেশি কার্যকরী হতে পারে।

## কিন্তু মধ্যক কী?

মধ্যক হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের আরও একটি মাপক। ষষ্ঠ শ্রেণিতে মধ্যক সম্পর্কে কিছুটা ধারণা দেওয়া হয়েছে। তোমরা জেনেছ, অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে তাদের মানের ক্রমানুসারে সাজানো হলে, মধ্যক উপাত্তগুলোকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে।

অফিসের পাঁচ জনের মাসিক বেতন হতে প্রাপ্ত টাকার সংখ্যাগুলো মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানোর পর যে মানটি উপাত্তগুলোকে সমান দুইভাগে ভাগ করে ঐ মানটিকে বক্স করে চিহ্নিত করো :



উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজানো পর মধ্যম মানটির কোনো পরিবর্তন হয় কি না যাচাই করো:



অফিসের প্রধানসহ মোট 5 জন ছিল। তাই তুমি 5টি উপাত্ত পেয়েছিলে। উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজানোর পর ঠিক মাঝখানে একটি সংখ্যাই পেয়েছ এবং ঐটিই ছিল মধ্যক। কিন্তু তাদের সঙ্গে যদি আরও একজন কর্মচারি অংশগ্রহণ করত এবং যদি তার মাসিক বেতন 20000 টাকা হতো, তখন উপাত্তের সংখ্যা হতো মোট 6টি। সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে মাঝামাঝি স্থানে কটি উপাত্ত পাওয়া যেত এবং সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলোর মধ্যক কী হতো? তোমার ভাবনা ও হিসাবটি নিচের খালি ঘরে লেখো।



তুমি যদি মাঝামাঝি স্থানে দুটি সংখ্যা পেয়ে থাকো, তবে মধ্যক হবে ঐ সংখ্যা দুটির গড় মান। তাহলে আমরা বলতে পারি, অবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা  $n$  হলে এবং  $n$  যদি বিজোড় সংখ্যা হয়, সেক্ষেত্রে মধ্যক হবে  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  তম পদ। কিন্তু  $n$  জোড় সংখ্যা হলে মধ্যক হবে  $\left(\frac{n}{2}\right)$  তম ও  $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$  তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়।

### দলগত কাজ

প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তগুলোর মধ্যক নির্ণয় করো। নির্ণয় করা গড় ও মধ্যকের মধ্যে কোনটি অধিক কার্যকরী এবং কেন যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

তোমাদের সংগৃহীত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় ও মধ্যক কীভাবে কাজে লাগবে লিখে রাখো।

---



---



---



---



---

## ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (Cumulative Frequency)

নিতু ও সজল স্কুলের 100 জন বন্ধুর সপ্তাহের যাতায়াত খরচের তথ্য সংগ্রহ করেছে। তারা জানতে চায় কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম এবং কতজন বন্ধুর 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে। কাজটি করার জন্য সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে প্রথমে তালিকাবদ্ধ করেছে। তালিকাটি হলো :

সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110
বন্ধুদের সংখ্যা	12	13	20	23	19	13

তারা প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 12 এর সঙ্গে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13 যোগ করে পায় 25। এই 25 হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা 12ই থাকবে। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যার সঙ্গে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে  $(25 + 20) = 45$  পাওয়া যাবে। এটি হবে তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এভাবে দুজনে মিলে ছক-১০.৭ এর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি এর কয়েকটি শ্রেণি পূরণ করেছে। অবশিষ্ট শ্রেণিগুলো পূরণ করা তোমার দায়িত্ব। কী, পারবে না?

ছক-১০.৭					
সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	বন্ধুদের সংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা		সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
50 – 60	12	12		60 এর কম	12
60 – 70	13	$12 + 13 = 25$		70 এর কম	25
70 – 80	20	$25 + 20 = 45$		80 এর কম	45
80 – 90	23			90 এর কম	
90 – 100	19			100 এর কম	
100 – 110	13			110 এর কম	



কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম এবং কতজন বন্ধুর 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে তা নিতু ও সজল সহজেই ছক-১০.৭ থেকে জানতে পারল। নিতু ও সজলের মতো মাথা খাটিয়ে ফাঁকা ঘরে বন্ধুর সংখ্যা লেখ।

ক)		জন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম
খ)		জন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে

### দলগত কাজ :

প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তের শ্রেণি বিন্যস্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো। কাজ সম্পন্ন করে পোর্টফলিওতে জমা রাখো।

### মধ্যক নির্ণয়ে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার প্রয়োজন কেন?

নিতুর ক্লাসের 51 জন শিক্ষার্থী প্রত্যেকে নিজেদের উচ্চতা মেপে পাশের ছকটি তৈরি করেছে। আমরা শিক্ষার্থীদের উচ্চতার মধ্যক নির্ণয় করতে চাই।

উচ্চতা (সেমি.)	150	155	160	165	170	175
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	4	6	12	16	8	5

নিতুর ক্লাসের শিক্ষার্থীর সংখ্যা  $n = 51$ , যা বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং শিক্ষার্থীদের উচ্চতার মধ্যক হবে  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  তম পদের মান অর্থাৎ  $\left(\frac{51+1}{2}\right)$  তম বা 26তম পদের মান। কিন্তু 26তম পদের মান কত বা এই পদটি কোথায় আছে তা জানার জন্য আমাদের শিক্ষার্থীদের ক্রমযোজিত সংখ্যা জানতে হবে। তাহলে চলো প্রথমে শিক্ষার্থীদের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করি (ছক-১০.৮) :

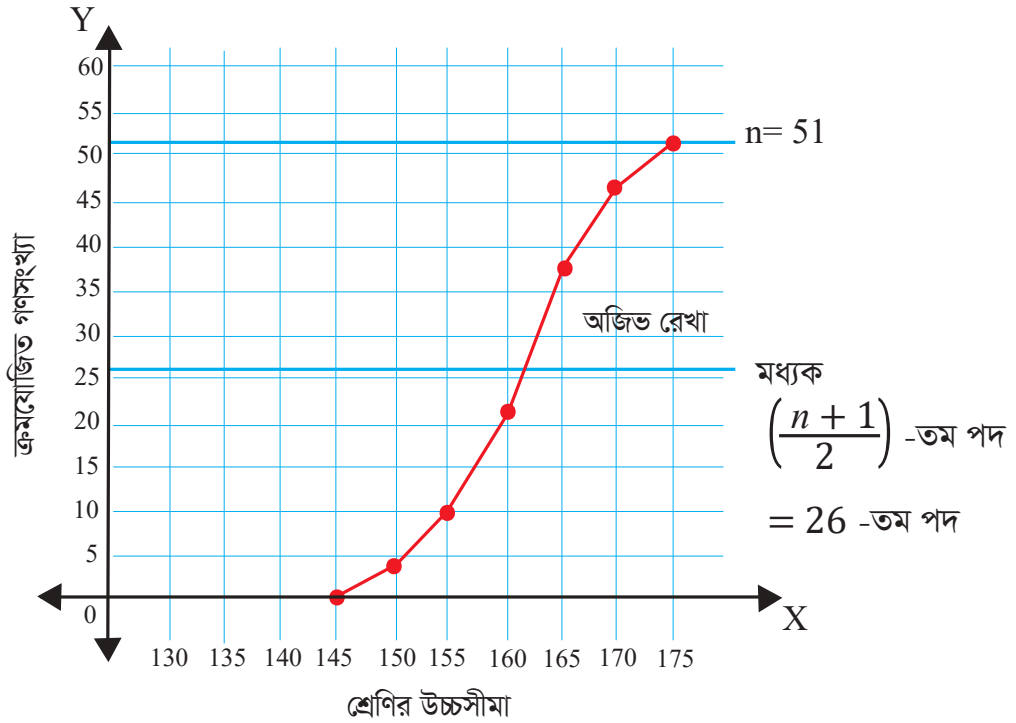
ছক- ১০.৮						
উচ্চতা (সেমি.)	150	155	160	165	170	175
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	4	6	12	16	8	5
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	22	38	46	51

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে দেখা যাচ্ছে, 23তম থেকে 38তম পর্যন্ত সকল পদের মানই 165।  
আমাদের প্রয়োজন 26তম পদের মান।

∴ 26তম পদের মান = 165

∴ নির্ণেয় মধ্যক 165 সেমি।

এখানে ক্রমযোজিত সংখ্যা ছক-১০৮ কে আমরা ছক কাগজে উপস্থাপন করে দেখি মধ্যকের মানের সিদ্ধান্ত নেওয়ার কাজটা আরেকটু সহজ করা যায় কি না।



চিত্র- ১০.৬

ছক কাগজের উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ  $x$ -অক্ষ বরাবর এবং ক্রমযোজিত গণসংখ্যাকে উল্লম্ব রেখা বা  $y$ -অক্ষ বরাবর বসাই। উভয় অক্ষের মাপের স্কেল প্রয়োজনে আলাদাও নেওয়া যেতে পারে। এখন ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ছক-১০.৮ থেকে (150, 4), (155, 10), (160, 22), (165, 38), (170, 46) ও (175, 51) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো পর্যায়ক্রমে স্কেল ছাড়া খালি হাতে যুক্ত করি। ফলে একটি বক্ররেখা পাওয়া গেল (চিত্র : ১০.৬)। এই বক্ররেখাটিই ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা। এবার অজিভ রেখা থেকে দেখে

আরও সহজেই  $n = 51$  এর জন্য  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  তম = 26 তম পদের মান = 165 জেনে মধ্যক নির্ণয় করা যায়।

### একক কাজ :

প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি এবং ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা থেকে মধ্যক নির্ণয় করো। অজিভ রেখা আঁকার ফলে মধ্যক নির্ণয় কাজটি সহজ হয়েছে কি না যুক্তি দাও। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

### অজিভ রেখা ব্যবহার করে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়:

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা  $n$  হলে,  $\left(\frac{n}{2}\right)$  তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর  $\left(\frac{n}{2}\right)$  তম পদটি নিশ্চয়ই কোনো একটি শ্রেণিতে থাকবে। যে শ্রেণিতে  $\left(\frac{n}{2}\right)$  তম পদটি থাকবে তাকে আমরা মধ্যক শ্রেণি বলব। কিন্তু আমাদের শুধু মধ্যক শ্রেণি জানলেই হবে না, মধ্যকও নির্ণয় করতে হবে। শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়ে আমরা নিচের সূত্রটি ব্যবহার করতে পারি।

যেখানে,  $L$  = যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা,  $n$  = মোট গণসংখ্যা,  $F_c$  = মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা,  $f_m$  = মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং  $h$  = শ্রেণি ব্যবধান।

$$\text{শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক} = L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$$

তোমরা জানো, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক কোনো একটি শ্রেণিতে থাকে। কিন্তু মধ্যক কি ঐ শ্রেণির নিম্নসীমার চেয়ে কম হতে পারবে? যদি না পারে তবে নিশ্চয়ই মধ্যক ঐ শ্রেণির নিম্নসীমা ( $L$ ) থেকে বেশি হবে। প্রশ্ন হলো কত বেশি হবে? এই প্রশ্নের উত্তর জানার জন্য চলো নিতু ও পুণ্যর মধ্যক নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি বিশ্লেষণী চোখ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করি:

তোমাদের মতো নিতুর স্কুলের বাগানেও নানা ধরনের ফুলের গাছ আছে। মালীচাচার পাশাপাশি ক্লাসের সবাই পালা করে নিয়মিত বাগানের পরিচর্যা করে। তারা মাঝেমাঝেই গাছগুলোর উচ্চতা ও পাতার দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে। উদ্দেশ্য গাছগুলোর বৃদ্ধি স্বাভাবিক কি না। এমনই একদিন নিতু ও তার বন্ধু পুণ্য কতগুলো গাছের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছক-১০.৯ তৈরি করেছে।

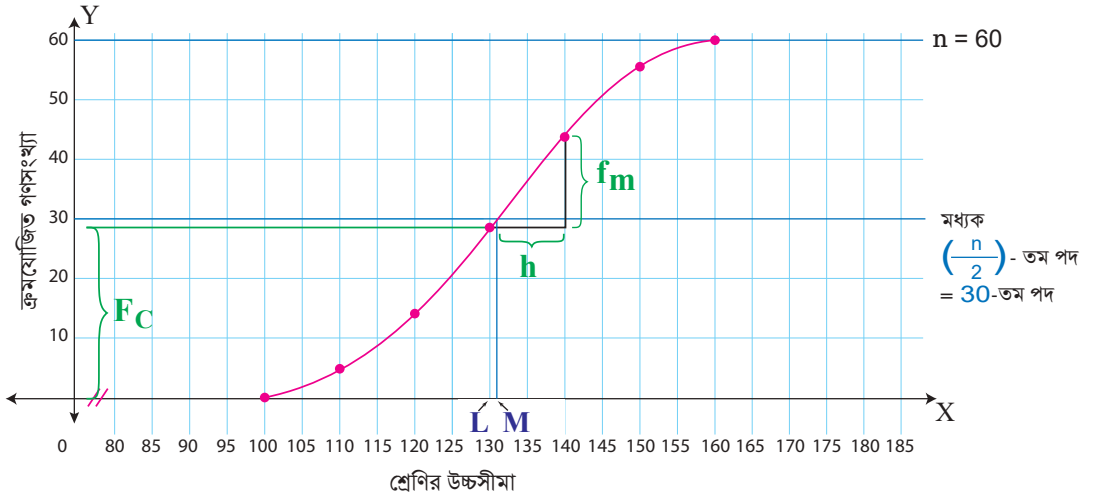
ছক- ১০.৯						
গাছের দৈর্ঘ্য (সেমি.) (প্রায়)	100 – 110	110 – 120	120 – 130	130 – 140	140 – 150	150 – 160
গাছের সংখ্যা	5	8	15	16	10	6

বাগানের গাছগুলো স্বাভাবিকভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে কি না জানার জন্য নিতু ও পুণ্য স্থির করে তাদের সংগ্রহ করা উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় করবে। সেজন্য প্রথমেই তারা ছক-১০.১০ এর মতো একটি সারণি তৈরি করে :

ছক- ১০.১০						
গাছের দৈর্ঘ্য (সেমি.) (প্রায়)	100 – 110	110 – 120	120 – 130	130 – 140	140 – 150	150 – 160
গাছের সংখ্যা	5	8	15	16	10	6
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	5	13	28	44	54	60

**মধ্যক নির্ণয় করার জন্য তারা নিচের কাজগুলো করল:**

প্রথমে তারা ছক-১০.১০ থেকে অজিভ রেখা আঁকল।



চিত্র: ১০.৭





মধ্যকের মান থেকে আমরা বলতে পারি ‘অর্ধেক সংখ্যক গাছের দৈর্ঘ্য 131.25 সেমি. এর কম এবং অর্ধেক সংখ্যক গাছের দৈর্ঘ্য 131.25সেমি. এর বেশি। অর্থাৎ মধ্যক-এর মান থেকে গাছের দৈর্ঘ্য সম্পর্কে একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য পাওয়া গেল।



### দলগত কাজ :

নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তের শ্রেণি বিন্যস্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে অজিভ রেখা অঙ্কন করে মধ্যক নির্ণয় করো। উপাত্তের একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করো।

## প্রচুরক (Mode)

তোমাদের স্কুলের মতো নিতুর স্কুলেও ১৪ই মার্চকে পাই দিবস হিসেবে উদযাপন করা হয়। প্রতি বছরের মতো এই বছরেও দিবসটি পালন করার উদ্যোগ নেওয়া হয়েছে। নিতু ও তার বন্ধুরা ঠিক করেছে, এবারে নাচ, গান, আবৃত্তি, ঝাঁকা ও অভিনয়ের পাশাপাশি ষষ্ঠ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সঙ্গে একটি মজার কুইজ বা ম্যাজিকের আয়োজন করবে। আলোচনার পর ষষ্ঠ শ্রেণির 36 জন শিক্ষার্থীদের সমান তিনটি দলে ভাগ করেছে। প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেককে 10টি মজার খাঁধার উত্তর লিখতে দিলো।



প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলো সঠিক

উত্তর লিখেছে, সেগুলো হলো : 6, 5, 4, 6, 7, 5, 4, 6, 7, 3, 6, 8। তারা সঠিক উত্তরের তথ্যটিকে তালিকাবদ্ধ করে দেখে:

সঠিক উত্তরের সংখ্যা $x_i$	3	4	5	6	7	8
শিক্ষার্থীর সংখ্যা $f_i$	1	2	2	4	2	1

এই ছক থেকে দেখা যায়, 6টি সঠিক উত্তর দিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। তোমরা কি বলতে পারবে তালিকায় প্রাপ্ত উপাত্তের প্রচুরক কত হবে? ষষ্ঠ শ্রেণিতে তোমরা শিখেছ, উপাত্তগুলোর মধ্যে যে সংখ্যা সর্বাধিকবার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই প্রচুরক। তাহলে তোমরাই বলো ছকের তথ্যানুসারে প্রচুরক কত হবে?

এবার নিতু ও তার বন্ধুরা ষষ্ঠ শ্রেণির দ্বিতীয় দলের 12 জনের প্রত্যেককে অন্য 10টি মজার খাঁধার উত্তর লিখতে দিলো।

দ্বিতীয় দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলো সঠিক উত্তর লিখেছে, সেগুলো হলো : 5, 7, 4, 6, 7, 5, 4, 6, 4, 3, 6, 8

তারা সঠিক উত্তরের তথ্যটিকে তালিকাবদ্ধ করে দেখে :

সঠিক উত্তরের সংখ্যা $x_i$	3	4	5	6	7	8
শিক্ষার্থীর সংখ্যা $f_i$	1	3	2	3	2	1

উপরের ছক থেকে দেখা যায়, 4টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 3 জন এবং 6টি সঠিক উত্তরও দিয়েছে 3 জন শিক্ষার্থী। এক্ষেত্রে প্রচুরক দুইটি। প্রচুরক দুটি হলো 4 ও 6। সুতরাং প্রচুরক এক বা একাধিক হতে পারে। সর্বশেষ তারা তৃতীয় দলের প্রত্যেককে একটু জটিল কিন্তু মজার 10টি খাঁধীর উত্তর লিখতে দিলো। ফলাফল হলো : 12 জনের প্রত্যেকেই একটি করে সঠিক উত্তর দিতে পেরেছে।

 প্রচুরক কী হবে ভেবে ব্যাখ্যাসহ উত্তর লেখো।

### একক কাজ :

- তোমাদের ক্লাসের সবার গতমাসের অনুপস্থিতির তথ্য সংগ্রহ করো।
- অনুপস্থিতির কারণগুলো চিহ্নিত করো। ক্ষেত্রগুলো অনুসন্ধান ও বিশ্লেষণ করে চিহ্নিত কারণগুলো পর্যালোচনা করো।
- প্রয়োজনে অনুপস্থিত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করো।
- সমস্যাটি সমাধানের লক্ষ্যে একটি প্রস্তাব বা মডেল উপস্থাপন করো

### প্রচুরক কেন প্রয়োজন

তৈরি করা পোশাক বা জুতো কেনার জন্য প্রায়শই তোমাকে বাজারে বা দোকানে যেতে হয়। তুমি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ, ছোটো এবং মাঝারি সাইজের জিনিসপত্র দোকানে সবচেয়ে বেশি পাওয়া যায়। যেমন— একটি বিশেষ কোম্পানির জুতোর ক্ষেত্রে মেয়েদের



জন্য 4 নম্বর ও ছেলেদের জন্য 7 ও 8 নম্বর জুতোর সংখ্যাই বেশি। লম্বা মানুষের জামা-প্যান্ট কেনা যেমন কষ্টের, তেমনি আবার 10 নম্বর জুতো সব দোকানে পাওয়াও যায় না। ভেবে দেখো তো এর কারণ কী? সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করো। তারপর দুই-তিন লাইনে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

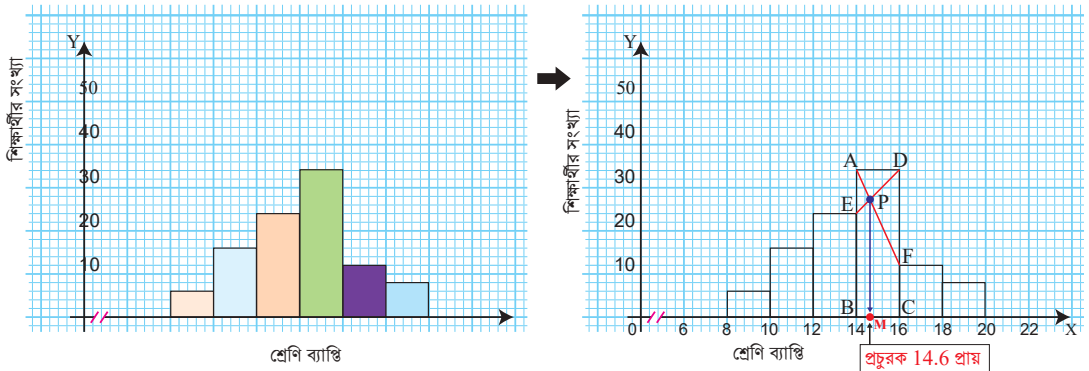
### শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে শুধু উপাত্ত দেখে প্রচুরক নির্ণয় সম্ভব নয়। প্রথমে প্রচুরক শ্রেণি খুঁজে বের করতে হবে। অর্থাৎ কোন শ্রেণিতে সবচেয়ে বেশি গণসংখ্যা আছে তা দেখতে হবে। কারণ প্রচুরকটি ঐ শ্রেণিতেই থাকবে। এক্ষেত্রে আমরা আয়তলেখের সাহায্য নিতে পারি।

### আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয়

আমরা আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। আয়তলেখ থেকেও প্রচুরক নির্ণয় করা যায়। মনে করে দেখো ছক-১০.২ -এ নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতি নিয়ে আয়তলেখ অঙ্কন করেছিলো। ঐ আয়তলেখ থেকে কীভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় তা দেখি।

উপস্থিতির শ্রেণি	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	6	16	24	34	12	8



চিত্র: ১০.৯

চিত্রে প্রচুরক শ্রেণির আয়তক্ষেত্রটি হলো ABCD (ছক-১০.৯)। এবার A, F ও E, D যোগ করি। AF ও ED পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে  $x$ - অক্ষের উপর PM লম্ব অঙ্কন করি, যা  $x$ - অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করেছে। হিসাব করে দেখি M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (14.6, 0)। এই M বিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজই হবে নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতি সম্পর্কে সংগৃহীত উপাত্তের প্রচুরক। অর্থাৎ, নির্ণেয় প্রচুরক 14.6 (প্রায়)।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক আমরা সূত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করতে পারব।

প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য ছক কাগজ থেকে **M** বিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজ নির্ণয় করতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। সরাসরি জ্যামিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করে আরও সহজেই সঠিক মান পাওয়া যাবে।

মধ্যক নির্ণয়ের সময় আমরা একই রকম সমস্যা সমাধানে সদৃশ ত্রিভুজের ধারণা প্রয়োগ করেছিলাম। একটা সহজ সূত্রও পেয়েছিলাম। প্রচুরকের ক্ষেত্রেও একইভাবে একটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করি।



শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য আমরা ব্যবহার করতে পারি,  $\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

যেখানে,  $L$  = যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা,  $n$  = মোট গণসংখ্যা,  $f_1$  = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য,  $f_2$  = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য এবং  $h$  = শ্রেণি ব্যবধান।

তোমাদের মতো নিতুও তার গ্রামের 40টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয়ের (টাকায়) তথ্য সংগ্রহ করে। সংগৃহীত উপাত্তগুলোর শ্রেণি বিন্যস্ত তালিকাটি হলো :

সাপ্তাহিক আয় (টাকা)	4000-5000	5000-6000	6000-7000	7000-8000	8000-9000	9000-10000
পরিবারের সংখ্যা	5	8	12	10	3	2

চলো, সূত্র প্রয়োগ করে নিতুর তৈরি তালিকা থেকে প্রচুরক নির্ণয় করি :

তোমরা জানো, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক বের করতে হলে প্রথমে প্রচুরক শ্রেণি নির্ণয় করতে হয়। তালিকা অনুসারে, 40টি পরিবারের মধ্যে সবচেয়ে বেশি 12টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয় (6000 – 7000) টাকা।

সুতরাং তালিকায় প্রচুরক শ্রেণি (6000 – 7000)।

$$\therefore \text{শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$$

$$= 6000 + \frac{4}{4+2} \times 1000 = 6000 + \frac{4}{6} \times 1000$$

$$= 6,666.67 \text{ টাকা (প্রায়)}।$$

$$L = 6000$$

$$f_1 = (12 - 8) = 4$$

$$f_2 = (12 - 10) = 2$$

$$\text{এবং } h = 1000$$



কিন্তু শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক শ্রেণি সব সময় শ্রেণিগুলোর মাঝামাঝি নাও থাকতে পারে। কোনো কোনো ক্ষেত্রে প্রথমটি আবার কখনো শেষেরটিও হতে পারে। সেক্ষেত্রে কী হবে?

এবার আরেকটি ঘটনা লক্ষ্য করো। নিতু তার গ্রামের 40টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয়ের (টাকায়)

পাশাপাশি প্রতিটি পরিবারের লোকসংখ্যার বয়সের (বছরে) তথ্য সংগ্রহ করে নিচের তালিকাটি তৈরি করে।

বয়স (বছরে)	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70
লোকসংখ্যা	82	27	25	52	50	32	12

তালিকা থেকে দেখতে পাই, 40টি পরিবারের মধ্যে (1 – 10) বছর বয়সের শিশুর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। সুতরাং, তালিকায় প্রচুরক শ্রেণি হবে (1 – 10)।

সুতরাং,  $L = 1$ ,  $f_1 = (82 - 0) = 82$ ,  $f_2 = (82 - 27) = 55$  এবং  $h = 10$

$$\therefore \text{শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h = 1 + \frac{82}{82+55} \times 10 = 1 + \frac{82}{137} \times 10$$

$$= 6.99 \text{ বছর (প্রায়)}।$$

আবার মনে করি, দশম শ্রেণির কয়েকজন শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) মেপে নিচের তালিকাটি তৈরি করা হলো:

ওজন (কেজিতে)	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	3	10	18	32

এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 32 আছে (55 – 60) শ্রেণিতে। সুতরাং প্রচুরক শ্রেণি (55 – 60)।

সুতরাং  $L = 55, f_1 = (32 - 18) = 14, f_2 = (32 - 0) = 32$  এবং  $h = 5$

$$\therefore \text{শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h = 55 + \frac{14}{14 + 32} \times 5 = 55 + \frac{14}{46} \times 5 \\ = 56.52 \text{ কেজি (প্রায়)}।$$

### দলগত কাজ

ক) প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয় করো।

খ) সূত্রের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করে তা যাচাই করো।

গ) প্রচুরকের প্রাপ্ত মান থেকে সংগৃহীত উপাত্ত সম্পর্কে কী সিদ্ধান্ত নেয়া যায় লেখো।

এ অভিজ্ঞতায় তোমরা দলগত কাজের মাধ্যমে উপাত্ত সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করেছ। বিশ্লেষণের ফলাফল থেকে ঐ ঘটনার কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করেছ। পরিসংখ্যান মূলত তথ্য সংগ্রহ ও বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত গ্রহণেরই বিজ্ঞান। তোমরা তথ্য সংগ্রহ, তথ্য উপস্থাপন এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের যে ধাপগুলো অনুসরণ করেছ তা দৈনন্দিন জীবনের যে কোনো সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার প্রতিটি পরিমাপক অর্থাৎ, গড়, মধ্যক এবং প্রচুরক যে কোনো ঘটনার সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করতে তথা ঘটনাটি সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণে অবদান রাখে। সুতরাং, উপরে বর্ণিত বিভিন্ন পদ্ধতিতে বিন্যস্ত অথবা অবিন্যস্ত উপাত্তকে বিশ্লেষণ করে কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করার দক্ষতা অর্জন করা গুরুত্বপূর্ণ। একই সঙ্গে উপাত্ত উপস্থাপনের জন্য কীভাবে আয়তলেখ, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিত রেখা প্রভৃতি লেখচিত্রের ব্যবহার করা যায় তা আয়ত্ত করাও জরুরি।

## অনুশীলনী

- ১। অষ্টম শ্রেণির কয়েকজন শিক্ষার্থীর উচ্চতার (সেন্টিমিটার) ছক দেওয়া আছে। নিচের প্রশ্নগুলো সমাধান করো।

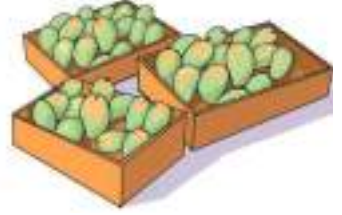
90, 140, 97, 125, 97, 134, 97, 97, 110, 125, 110, 134, 110, 125, 110, 140, 125, 134, 125, 125, 134, 110, 125, 97, 125, 110, 125, 97, 134, 125, 110, 134, 125, 134, 90, 140, 148, 148, 110, 125

ক) উপাত্তগুলোকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাও।

খ) উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

গ) শিক্ষার্থীদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করো।

- ২। মিজান সাহেব একজন আম বিক্রেতা। তিনি 50 বক্স আম কিনলেন। প্রতিটি বক্সে আমের সংখ্যা সমান নয়। কিন্তু গড়ে প্রতিটি বক্সে কটি আম আছে জানা প্রয়োজন। নিচের সারণি থেকে 50 টি বক্সে গড়ে কটি আম আছে নির্ণয় করো।



আমের সংখ্যা	51 – 53	54 – 56	57 – 59	60 – 62	63 – 65
বক্সের সংখ্যা	6	14	16	9	5

- ৩। পাশের লেখচিত্রটি লক্ষ করো।

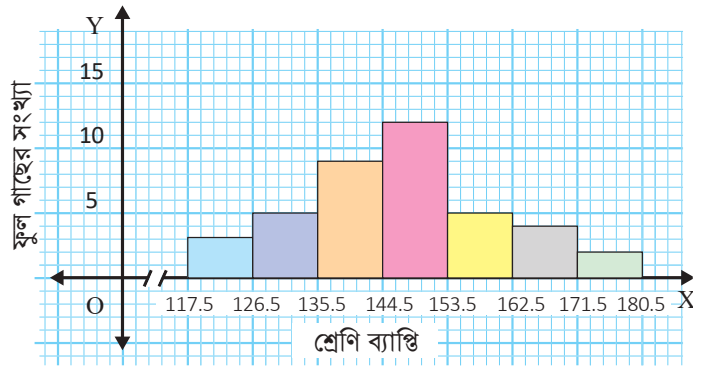
ক) লেখচিত্রটির নাম লেখো।

খ) লেখচিত্রের উপাত্তগুলো কোন ধরনের উপাত্ত?

গ) এর প্রচুরক শ্রেণি কত?

ঘ) লেখচিত্র থেকে শ্রেণি বিন্যস্ত সারণি তৈরি করো।

ঙ) সারণি থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।



চিত্র: ১০.১০



শ্রেণি ব্যাপ্তি	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
গণসংখ্যা	7	11	p	9	13

গণসংখ্যা নিবেশন তালিকার গাণিতিক গড় 54 হলে, প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে p এর মান নির্ণয় করো। তারপর সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে প্রাপ্ত p এর মানের সত্যতা যাচাই করো।

- ৫। একটি পোশাক কারখানার শ্রমিকদের দৈনিক মজুরির (টাকায়) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। উপাত্তের মধ্যক 525 হলে,  $x$  ও  $y$  এর মান নির্ণয় করো। কারখানায় শ্রমিকের মোট সংখ্যা 120 জন।

দৈনিক মজুরি (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
300 – 400	12
400 – 500	20
500 – 600	$x$
600 – 700	30
700 – 800	$y$
800 – 900	5
900 – 1000	4

- ৬। একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের 100 রোগীর বয়সের (বছরে) শ্রেণি ব্যাপ্তি ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যার তালিকা থেকে শ্রেণি অনুসারে রোগীর সংখ্যা নির্ণয় করো।

বয়স (বছরে)	0 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70
রোগীর সংখ্যা							
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	5	9	24	41	68	85	100

৭। নাগরী বাজারের 100টি দোকানের দৈনিক লাভের (টাকায়) পরিমাণের ছকটি হলো—

প্রতি দোকানের লাভ (টাকা)	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450 – 500	500 – 550	550 – 600
দোকানের সংখ্যা	10	16	28	22	18	6

ক) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

খ) কতগুলো দোকানে দৈনিক 500 টাকার কম লাভ হয়?

৮। অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর পরিবারের সদস্যদের বয়সের (বছরে) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ বিন্যস্ত করে নিচের তালিকাটি তৈরি করা হয়েছে।

বয়স (বছর)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
গণসংখ্যা	30	60	82	94	66	48	20

ক) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন করো।

খ) উপাত্তের আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

গ) উপাত্তের আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

৯। সজল তার দাদুর সঙ্গে প্রতিদিন পার্শ্ববর্তী একটি পার্কে প্রাতঃভ্রমণে যায়। সে মনে মনে ঠিক করেছে আজ যতজন প্রাতঃভ্রমণে এসেছে তাদের বয়স অনুযায়ী তথ্য সংগ্রহ করবে।



সজলের সংগ্রহ করা উপাত্তের ছকটি হলো :

বয়স (বছরে)	41 – 45	46 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 65
গণসংখ্যা	12	15	25	18	10

ক) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় করো।	ঘ) প্রচুরক নির্ণয় করো।
খ) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় করো।	ঙ) উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো।
গ) সজলের তথ্য সংগ্রহের তালিকা ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করো।	চ) উপাত্তের অজিত রেখা অঙ্কন করো।

১০। মনে করো তোমার এলাকায় মাঝেমাঝে বিদ্যুৎ থাকে না। সমস্যাটি কীভাবে সমাধান করবে, তার জন্য একটি পরিকল্পনা করো। পরিকল্পনা অনুসারে নিচের কাজগুলো করো:

ক) প্রতিবেশী পরিবারগুলোর এক মাসের বিদ্যুৎ খরচের তথ্য সংগ্রহ।

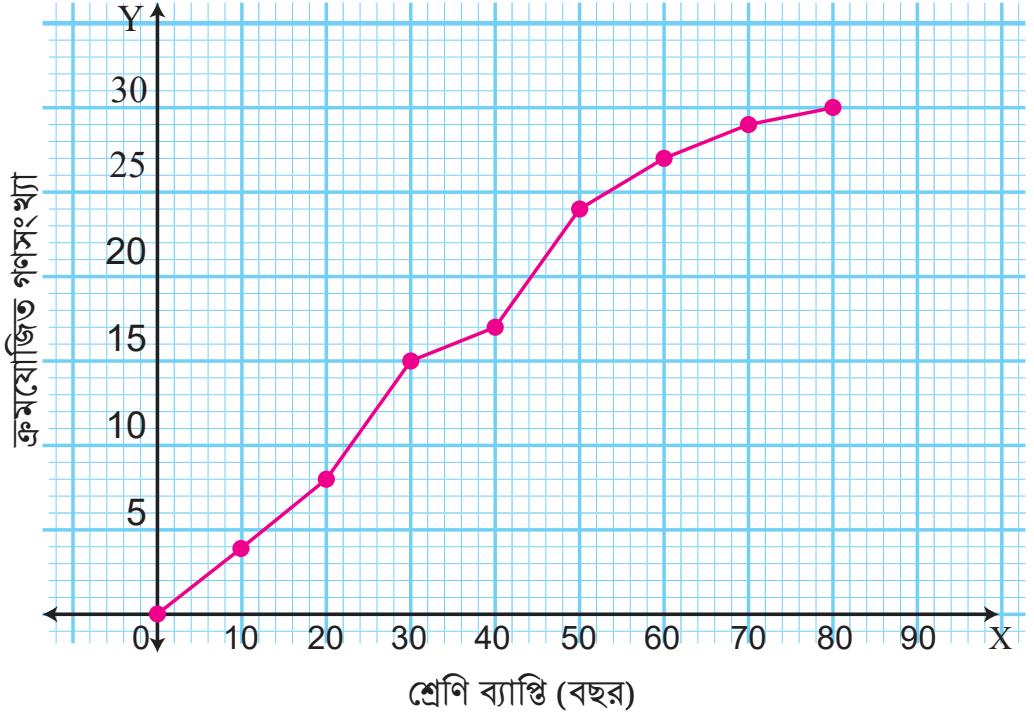
খ) প্রতিমাসে পরিবারগুলো গড়ে কী পরিমাণ বিদ্যুৎ খরচ করে তা জানার জন্য উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করে গড় নির্ণয়।

গ) বিদ্যুতের চাহিদা অনুসারে করণীয় সম্পর্কে তোমার মতামত বা প্রস্তাব উপস্থাপন।

১১।

(ক) তোমার পরিবারসহ নিকটাত্মীয় 25 জন সদস্যের বয়সের তথ্য (বছরে) সংগ্রহ করে লিপিবদ্ধ করো। (প্রয়োজনে অভিভাবকের সাহায্য নাও)

(খ) তোমার বন্ধুর পরিবারসহ তার নিকটাত্মীয় 30 জন সদস্যের বয়সের (বছরে) সংগৃহীত তথ্যের লেখচিত্র:



চিত্র: ১০.১১

(i) এর উপাত্ত ব্যবহার করে—

ক) একটি গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

খ) আয়তলেখ অঙ্কন করে আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

গ) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করো।

ঘ) মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

ঙ) (ii) এর চিত্র থেকে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

চ) তোমার ও তোমার বন্ধুর পরিবারের সদস্যদের গড় বয়সের তুলনামূলক পার্থক্য লেখো। এক্ষেত্রে পরিবারের সদস্য সংখ্যা, বয়স ও শ্রেণি ব্যবধান গড়কে প্রভাবিত করে কি না ব্যাখ্যা করো।

ছ) চিত্র ও ছক এর মধ্যে কোনটির মাধ্যমে তথ্য উপস্থাপন সহজবোধ্য বলে তুমি মনে করো? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

১২। উপাত্ত সংগ্রহ থেকে শুরু করে তথ্য বিশ্লেষণ করে সিদ্ধান্ত গ্রহণ পর্যন্ত কীভাবে কাজগুলো সম্পন্ন করা হয়েছে তা তোমার দলের কাজের ক্রমানুসারে সাজাও। প্রতিটি ধাপে তোমার দলের কাজের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা লিখে উপস্থাপন করো। এখানে ধাপগুলো এলোমেলো করে লেখা আছে। যে ধাপ তোমাদের অনুসরণ করতে হয়নি তা বাদ দিবে।

উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ → উপাত্ত সংগ্রহ → উপাত্ত বিন্যস্তকরণ → উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই → পরিসর নির্ধারণ → উৎস নির্বাচন → শ্রেণি ব্যবধান নির্ণয় → প্রচুরক ও মধ্যক নির্ণয় → কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয় → গাণিতিক গড় নির্ণয় → কেন্দ্রীয় প্রবণতার মান থেকে উপাত্ত সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণ → ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় → প্রাপ্ত মধ্যক ও প্রচুরকের মানের ব্যাখ্যা প্রদান → আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয়।

