অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক
- স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়
- রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক
- সরলরেখার সমীকরণ
- সরলরেখার ঢাল

অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

আমাদের দৈনন্দিন বিভিন্ন কাজে মানচিত্র ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়; যেমন– ভৌগোলিক অবস্থান জানতে, ঐতিহাসিক স্থান চিহ্নিত করতে, জমির পরিমাপ করতে ইত্যাদি। মানচিত্র তৈরি করতে জ্যামিতির ভূমিকা অপরিসীম। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে আমরা অতি সহজেই বিভিন্ন স্থানের অবস্থান নির্ণয় করতে পারি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে আমাদের শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের বিভিন্ন স্থাপনার অবস্থান নির্ণয় করব এবং এর মাধ্যমে শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের একটি মানচিত্র প্রস্তুত করব।

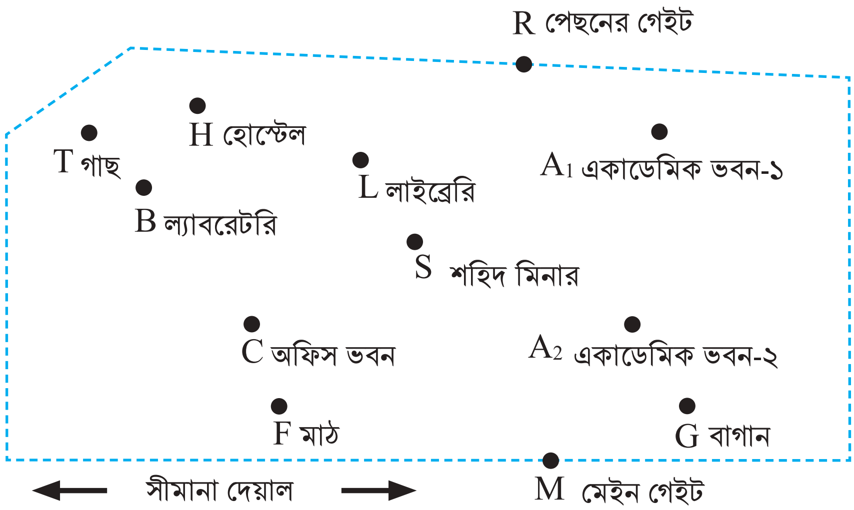
মানচিত্রে একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠান

এখানে একটি শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের মানচিত্রের নমুনা উপস্থাপন করা হয়েছে। এই মানচিত্রে অফিস ভবন, ফুলের বাগান ইত্যাদি দেখা যাচ্ছে। তোমরা আরও কী কী দেখতে পাচ্ছ, তার একটা তালিকা নিচের ঘরে লেখো।

চিত্র : ৬.১

তোমাদের তালিকাটি শ্রেণিশিক্ষককে এবং সতীর্থদেরকে দেখাও এবং তাদের পরামর্শমতো প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নাও।

মানচিত্রে উপস্থাপিত বিভিন্ন স্থাপনা, ফুলের বাগান, মাঠ, গাছপালার অবস্থানকে বিন্দুর মাধ্যমে প্রকাশ করে চিত্র : ৬.২-এ উপস্থাপন করা হয়েছে। এ ধরনের মানচিত্রকে **অবস্থান মানচিত্র** বলে।



চিত্র : ৬.২

চোখের আন্দাজ বা অনুমান করে অবস্থান মানচিত্র প্রস্তুত করা যায় না। অবস্থান মানচিত্র প্রস্তুত করতে গুরুত্বপূর্ণ হলো গাণিতিক হিসাব করে বিভিন্ন বস্তুর সঠিক অবস্থান, আকার ও একটির সাপেক্ষে অন্যটির দূরত্ব পরিমাপ করা এবং পরিমাপমতো মানচিত্রে বস্তুগুলো অঙ্কন করা। এই কাজগুলো করতে আমাদের স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ধারণা প্রয়োজন। এসো আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির প্রয়োজনীয় বিষয়গুলো জেনে নিই।

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Cartesian coordinate system)

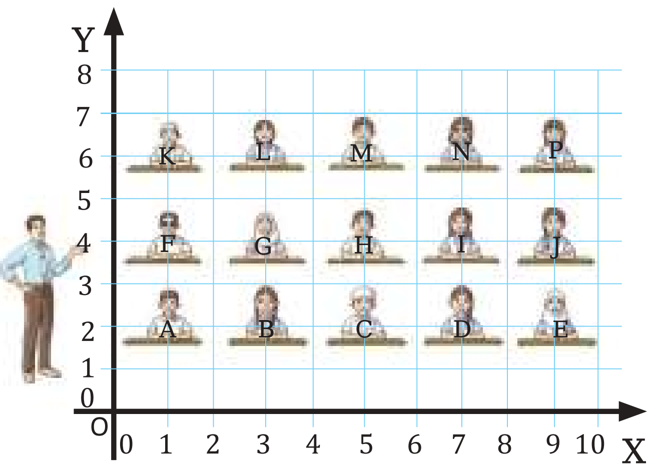
কোনো প্রতিষ্ঠানের মানচিত্র তৈরি করতে হলে প্রতিষ্ঠানের ভেতরের বিভিন্ন বস্তুর অবস্থান গাণিতিকভাবে নির্ণয় করতে হয়। যেমন– প্রতিষ্ঠানটি যে জমি বা ভূমির উপর স্থাপিত, তার পরিমাণ বা ক্ষেত্রফল কত? এর পরিসীমা বা সীমানা উত্তর, পশ্চিম, দক্ষিণ ও পূর্ব দিকে কতটা দীর্ঘ? প্রতিষ্ঠানের ভেতরে কটি ভবন আছে এবং কোন ভবনের পাশে কী আছে? একটি ভবন থেকে আরেকটি ভবন কত দূরে? চলাচলের পথ কতটা সোজা অথবা, কতটা বাঁকা? গাছ, বাগান ও খেলার মাঠ ইত্যাদি কোথায় অবস্থিত? এই রকম নানা প্রশ্নের উত্তর গাণিতিকভাবে পরিমাপ করতে হয় এবং সঠিক আনুপাতিক হারে তা কাগজে অঙ্কন করে অবস্থান মানচিত্র তৈরি করতে হয়। আর এই কাজগুলো করতে গণিতের স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। স্থানাঙ্ক পদ্ধতি সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা পেতে আমরা বিভিন্ন ছবি দেখে কিছু কাজ করব।

স্থানাঙ্কের মাধ্যমে অবস্থান চিহ্নিতকরণ

ছবিতে (চিত্র ৬.৩) কী দেখতে পাচ্ছ? একজন শিক্ষক দাঁড়িয়ে আছেন এবং শিক্ষার্থীরা বসে আছে। শিক্ষকের অবস্থান থেকে আনুভূমিকভাবে একটি সংখ্যারেখা এবং উল্লম্বভাবে সমকোণে আরেকটি সংখ্যারেখা গিয়েছে। এই সংখ্যারেখা দুটির নির্দিষ্ট নাম আছে; আনুভূমিক সংখ্যারেখার নাম হলো x-অক্ষ (x-axis), আর x-অক্ষের সঙ্গে উল্লম্ব সংখ্যারেখাটির নাম হলো y-অক্ষ (y-axis)।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

x-অক্ষ ও y-অক্ষ পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করেছে, তাকে মূলবিন্দু (origin) বলে। চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষক যেখানে দাঁড়িয়ে আছেন, সেখানে অক্ষ দুইটি ছেদ করেছে এবং এই ছেদবিন্দুটি হলো মূলবিন্দু। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ব্যবহার করে একজন শিক্ষক গাণিতিকভাবে শিক্ষার্থীদের সঠিক অবস্থান বলে দিতে পারবেন। যেমন- শিক্ষার্থী M এর অবস্থান হলো মূলবিন্দু হতে x-অক্ষ বরাবর 5 একক দূরত্বে এবং y-অক্ষ বরাবর 6 একক দূরত্বে। শিক্ষার্থী M এর অবস্থান সংক্ষেপে লেখা যায় M(5, 6)। একইভাবে শিক্ষার্থী G এর অবস্থান হলো মূলবিন্দু হতে x-অক্ষ বরাবর 3 একক দূরত্বে এবং y-অক্ষ বরাবর 4 একক দূরত্বে। একে সংক্ষেপে লেখা যায় G(3, 4)। এদের প্রথমটিকে ভুজ (abscissa) এবং দ্বিতীয়টিকে কোটি (ordinate) বলে। এভাবে মূল বিন্দু, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থানকে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এখন তোমরা কি P এর স্থানাঙ্ক লেখতে পারবে? প্রদত্ত বক্সে P এর স্থানাঙ্ক লেখো।



চিত্র: ৬.৩

একক কাজ

চিত্র : ৬.৩ দেখে নিচের ছকে নামের পাশে ভুজ ও কোটি উল্লেখ করে স্থানাঙ্ক লেখো।

ছক ৬.১

নাম	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
B	3	1	B(3, 1)
G			
L			

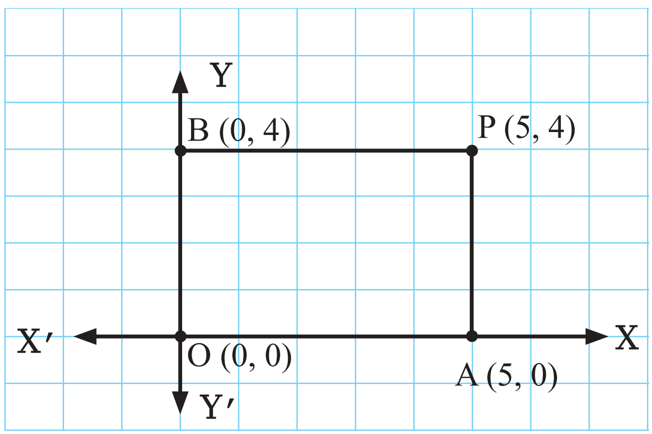
নাম	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
E			
K	1	6	
A			

লক্ষ করো যে, চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষকের অবস্থানের সাপেক্ষে শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে। আসলে কোনো বস্তুর অবস্থান জানতে হলে আরেকটি বস্তুর অবস্থানের সাপেক্ষে তা জানতে হয়। যেমন– কোন শিক্ষার্থীর অবস্থান কোথায় তা এখানে শিক্ষকের অবস্থানের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়েছে। এখানে শিক্ষক হচ্ছেন মূল অবস্থানে যার সাপেক্ষে অন্যান্য শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে। তাই শিক্ষকের অবস্থান হলো এখানে মূলবিন্দু। যদি তুমি তোমার সাপেক্ষে অন্যদের অবস্থান নির্ণয় করতে চাও, তাহলে তোমার অবস্থান হবে মূলবিন্দু।

মূলবিন্দুতে **(origin)** x-অক্ষ ও y-অক্ষ পরস্পরকে ছেদ করে। মূলবিন্দুতে ভুজ 0 ও কোটি 0। অর্থাৎ মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো (0, 0)। এভাবে একটি মূলবিন্দু ধরে তার সাপেক্ষে অন্য বিন্দুর ভুজ ও কোটির মাধ্যমে অবস্থান প্রকাশ করার গাণিতিক পদ্ধতিকে বলা হয় স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (coordinate geometry)। ফরাসি দার্শনিক, গণিতবিদ এবং বিজ্ঞানী রেনে দেকার্তে (Rene Descartes) এই স্থানাঙ্ক পদ্ধতির সূচনা করেন। তাঁরই নামানুসারে জ্যামিতির এই শাখাটি কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নামে পরিচিত। কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এই পদ্ধতির মাধ্যমে আমরা বিভিন্ন বস্তুর অবস্থান সঠিকভাবে নির্ণয় করতে পারি।


Rene' Descartes

ধরো, তুমি মূলবিন্দু থেকে কোনো একটি বিন্দু যেমন, P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে চাও। তাহলে তুমি x-অক্ষ বরাবর 5 একক দূরত্বে (5, 0) বিন্দুতে পৌঁছানোর পর y-অক্ষের সমান্তরালে 4 একক দূরত্ব অতিক্রম করে P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে পার। আবার অন্যভাবে, প্রথমে মূলবিন্দু থেকে y-অক্ষ বরাবর 4 একক দূরত্বে (0, 4) বিন্দুতে পৌঁছানোর পর x-অক্ষের সমান্তরালে 5 একক দূরত্ব অতিক্রম করে P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে পার। পথ দুইটি একটি আয়তাকার আকৃতি তৈরি করে। অর্থাৎ অক্ষদ্বয় এবং P বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের উপর লম্ব রেখাদ্বয় একটি আয়ত উৎপন্ন করে। এজন্য কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্কও বলা হয়।



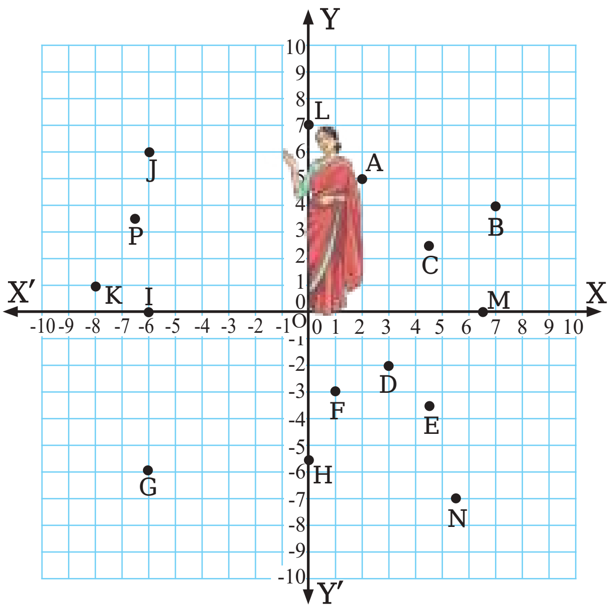
চিত্র: ৬.৫

চিত্র : ৬.৩-এ শ্রেণিকক্ষে শিক্ষক এক কর্নারে দাঁড়িয়ে ছিলেন। যদি শিক্ষক শ্রেণিকক্ষের মাঝখানে দাঁড়িয়ে থেকে বিভিন্ন শিক্ষার্থীর অবস্থান নির্ণয় করতে চান, তখন কী করবেন? এই অবস্থায় ছোটো একটি কাজ করে খুব সহজে শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। যা করতে হবে তা হলো, x-অক্ষের সংখ্যারেখাকে বামদিকে

বর্ধিত করতে হবে। সংখ্যারেখায় 0 এর বামদিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং সংখাগুলো ক্রমান্বয়ে ছোটো হতে থাকে। একইভাবে y-অক্ষের সংখ্যারেখাকে নিচের দিকে বর্ধিত করতে হবে। এই বর্ধিত সংখ্যারেখায় 0 এর নিচের দিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং সংখ্যাগুলো নিচের দিকে ক্রমান্বয়ে ছোটো হতে থাকে।

একক কাজ

চিত্র ৬.৬ এ দেখানো শিক্ষকের অবস্থান O (0, 0) সাপেক্ষে বিন্দুগুলোর অবস্থান কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।



চিত্র: ৬.৬

ছক: ৬.২			
বিন্দু	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
K	−8	1	K(−8,1)
C			
H			
N			
P	−6.5	3.5	P(−6.5,3.5)
M			
A			
B			
D			
E			
F			
G			
I			
J			
L			

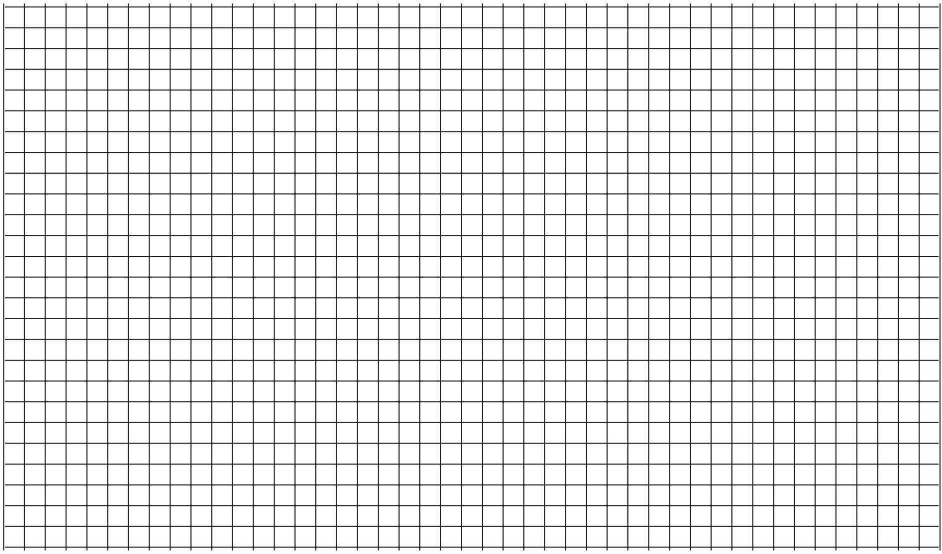
x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর কোটি শূন্য এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর ভুজ শূন্য।

দলগত কাজ

নিচে কিছু বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। তোমাদের সুবিধামতো মূলবিন্দু নিয়ে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করে নাও। তারপর নিচের বিন্দুগুলো প্রদত্ত গ্রাফপেপারে চিহ্নিত করো :

A(−3.5, 5.5), B(−4, −4), C(0, − 5, 5),

D(−5,0), E(3.5, − 5.5) ,F(3.5, − 5.5), G(0, 1.5)



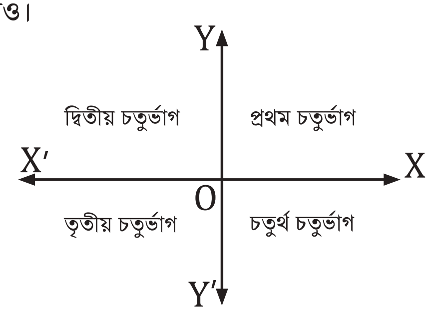
চিত্র: ৬.৭

চতুর্ভাগ (Quadrant)

তোমরা দেখেছ, বস্তুর অবস্থানের ক্ষেত্রে কখনো কোটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক এবং ভুজ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়। এ কারণে আমরা xy- সমতলকে চারটি ভাগে ভাগ করতে পারি। এই ভাগগুলোকে আমরা প্রথম চতুর্ভাগ, দ্বিতীয় চতুর্ভাগ, তৃতীয় চতুর্ভাগ এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ বলি। চিত্র : ৬.৮-এ ভাগগুলোকে দেখানো হয়েছে। তোমরা কি বলতে পারবে প্রতি চতুর্ভাগের বিন্দুর স্থানাঙ্ককে যথাযথ চিহ্নের মাধ্যমে আমরা কীভাবে লেখতে পারি? নিচের ছকটি পূরণ করো এবং প্রত্যেক চতুর্ভাগে চিহ্নগুলো দেখাও।

ছক: ৬.৩

চতুর্ভাগ	ভুজের চিহ্ন	কোটির চিহ্ন
প্রথম		
দ্বিতীয়		
তৃতীয়		
চতুর্থ		



চিত্র: ৬.৮

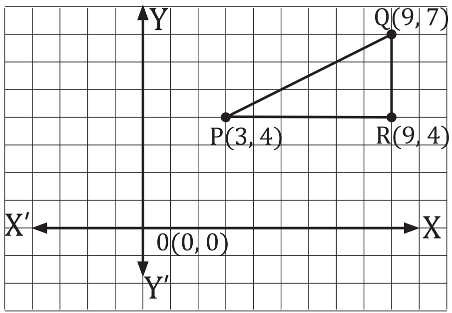
কোনো একটি বিন্দু যে কোনো চতুর্ভাগেই অবস্থিত হোক না কেন বিন্দুটির ভুজ হবে উক্ত বিন্দু থেকে y-অক্ষের উপর লম্ব দূরত্বের সংখ্যাগত মান এবং চতুর্ভাগ বিবেচনায় যথাযথ চিহ্ন (+ বা –)। একইভাবে কোনো একটি বিন্দু যে কোনো চতুর্ভাগেই অবস্থিত হোক না কেন বিন্দুটির কোটি হবে উক্ত বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব দূরত্বের সংখ্যাগত মান এবং চতুর্ভাগ বিবেচনায় যথাযথ চিহ্ন (+ বা –)।

দুটি বিন্দুর দূরত্ব

মানচিত্র তৈরি করার সময় বিভিন্ন বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব পরিমাপ করে গ্রাফ কাগজে সঠিকভাবে আনুপাতিক হারে বস্তুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত করতে হয়। এখন আমরা বিভিন্ন বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করব এবং মানচিত্রে বস্তুগুলোকে দূরত্বের আনুপাতিক হারে চিহ্নিত করব। পিথাগোরাসের উপপাদ্য, যা তোমরা আগেই জেনেছ, ব্যবহার করে দুটি বস্তু বা বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে দূরত্ব নির্ণয়

ধরো, xy-সমতলে (চিত্র :৬.৯) P(3, 4) এবং Q(9,7) দুটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের সমান্তরাল করে PR রেখাংশ এবং Q বিন্দু থেকে y-অক্ষের সমান্তরাল করে QR রেখাংশ আঁকি যারা R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ΔPQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ।



চিত্র: ৬.৯

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ΔPRQ সমকোণী ত্রিভুজটি বিবেচনা করো। এবার বলো তো R বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? লক্ষ করো, PR রেখাংশটি x-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় রেখাংশটির প্রত্যেক বিন্দুর কোটি সমান। একইভাবে QR রেখাংশটি y-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় তাদের ভুজ সমান। সুতরাং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক R(9, 4)। এখানে P ও R বিন্দুদ্বয়ের কোটি একই থাকায় P ও R বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে বিন্দু দুটির ভুজদ্বয়ের অন্তরের সংখ্যাগত মান। অর্থাৎ $PR = 9 - 3 = 6$. একইভাবে, $RQ = 7 - 4 = 3$.

এবার, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

সুতরাং, $PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2}$ [দূরত্বের ক্ষেত্রে ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

$$= \sqrt{(9-3)^2 + (7-4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9}$$

$$= \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

সুতরাং, এখানে P ও Q এর মধ্যে দূরত্ব হলো $3\sqrt{5}$ একক।

একক কাজ

নিচের ছকে কিছু বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

ছক ৬.৪

প্রথম বিন্দু	দ্বিতীয় বিন্দু	ভুজদ্বয়ের পার্থক্য	কোটিদ্বয়ের পার্থক্য	দূরত্ব
$B(-8,4)$	মূলবিন্দু $O(0,0)$	$0-(-8)$ $=8$	$0-4=-4$	$\sqrt{(8)^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$
$A(4,6)$	$B(-8,4)$			
$B(-8,4)$	$C(2,3)$			
$D(2,-3)$	$E(-3,2)$			
$F(-5,-6)$	$A(4,6)$			

সুতরাং, যদি দুটি বিন্দু P ও Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) হয়, তবে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের পার্থক্য})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের পার্থক্য})^2}$$

মধ্যবিন্দু (Mid Point) নির্ণয়

মানচিত্র প্রস্তুত করার সময় দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়ে থাকে। যেমন, একটি ভবন বা মাঠ অনেক বিস্তৃত হয়। ভবন বা মাঠের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে তা গ্রাফ কাগজে চিহ্নিত করার প্রয়োজন হয়ে থাকে। চলো আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে কীভাবে মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা যায় তা দেখি।

বিন্দুদ্বয় অক্ষের উপরে অবস্থিত হলে

ধরো, x-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু $P(x_1,0)$ এবং $Q(x_2,0)$

$\therefore OP=x_1$ এবং $OQ=x_2$

ধরো, P ও Q বিন্দুর মধ্যবিন্দু R এবং R এর স্থানাঙ্ক $(x,0)$

$\therefore OR=x, PR=OR-OP=x-x_1$ এবং $QR=OQ-OR=x_2-x$

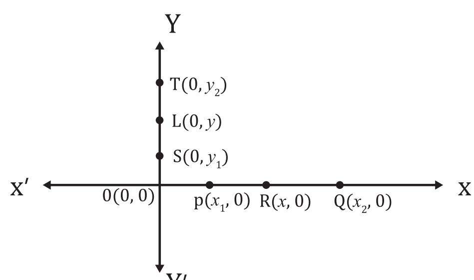
যেহেতু P ও Q এর মধ্যবিন্দু R, সুতরাং $PR=QR$.

সুতরাং

$$x-x_1=x_2-x$$

$$\text{বা, } 2x=x_1+x_2$$

$$\text{বা, } x=\frac{x_1+x_2}{2}$$



চিত্র : ৬.১০

যেহেতু R, x-অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং R বিন্দুর কোটি শূন্য। ফলে R এর স্থানাঙ্ক $R(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$।

এবার ধরো, y-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু $S(0, y_1)$ এবং $T(0, y_2)$

$\therefore OS = y_1$ এবং $OT = y_2$

ধরো, S ও T বিন্দুর মধ্যবিন্দু L এবং L এর স্থানাঙ্ক $(0, y)$

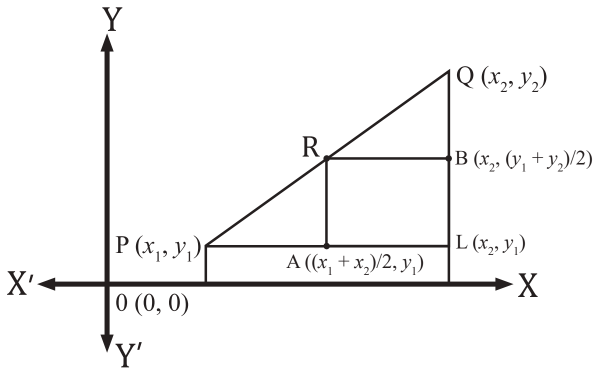
এবার তুমি L বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করো তো। দেখ, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে, $L(0, \frac{y_1+y_2}{2})$।

যে কোনো দুটি বিন্দুর ক্ষেত্রে

আমরা দেখলাম, কীভাবে x-অক্ষের উপর এবং y-অক্ষের উপর দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা যায়। এখন আমরা যে কোনো দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দু কীভাবে নির্ণয় করা যায় তা নিয়ে চিন্তা করি।

ধরো, P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) যে কোনো দুটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের সমান্তরাল করে PL রেখাংশ এবং Q বিন্দু থেকে y-অক্ষের সমান্তরাল করে QL রেখাংশ আঁকি যারা L বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ΔPQL একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

PL এর মধ্যবিন্দু A দিয়ে LQ এর সমান্তরাল AR (LQ ∥ AR) এবং LQ এর মধ্যবিন্দু B দিয়ে PL ∥ BR আঁকি। এবার R বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত তা নিচে লেখো।



চিত্র: ৬.১১

এখন, ΔPAR এবং ΔBRQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে AP = AL = BR, AR = LB = BQ। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$PR = RQ , অর্থাৎ R, PQ এর মধ্যবিন্দু। চিত্রানুযায়ী, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $R(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$।

যদি দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হয়, তবে বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দু R হলে, R এর স্থানাঙ্ক হবে $R(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ।

সুতরাং, দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{\text{ভুজদ্বয়ের যোগফল}}{2}, \frac{\text{কোটিদ্বয়ের যোগফল}}{2}\right)$

উদাহরণ: $A(4,6)$ ও $B(-8,4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

সমাধান : A ও B এর মধ্যবিন্দু $=(\frac{4+(-8)}{2}, \frac{6+4}{2}) = (\frac{4-8}{2}, \frac{10}{2}) = (-2, 5)$

একক কাজ

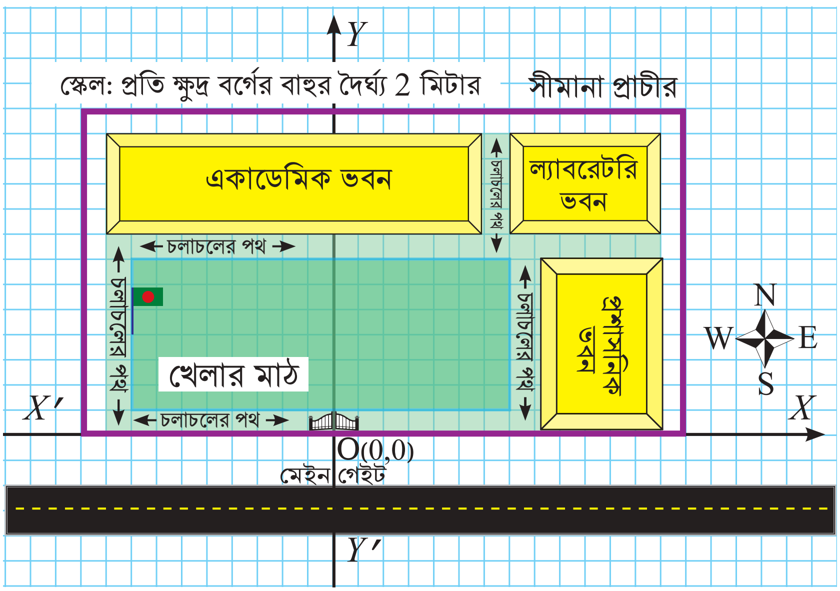
নিচের ছকে প্রদত্ত বিন্দুগুলোর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

ছক ৬.৫

ক্রমিক	প্রথম বিন্দু	দ্বিতীয় বিন্দু	মধ্যবিন্দু
১	$B(-8,4)$	$O(0,0)$	$(\frac{-8+0}{2}, \frac{4+0}{2}) = (-4, 2)$
২	$A(4,6)$	$B(-8,4)$	
৩	$C(-5,-5)$	$D(6.5,-6.5)$	
৪	$B(-8,4)$	$D(6.5,-6.5)$	
৫	$A(4,6)$	$C(-5,-5)$	
৬	$B(-8,4)$	$C(-5,-5)$	

দলগত কাজ

চিত্র : ৬.১২-এ একটি বিদ্যালয়ের ম্যাপ দেওয়া আছে। এটি ভালো করে পর্যবেক্ষণ করো।



চিত্র: ৬.১২

চিত্র : ৬.১২ অনুযায়ী বিদ্যালয়ের মেইন গেইট এর মাঝ বরাবর ভূমিতে মূলবিন্দু $(0, 0)$ ধরে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো। শিক্ষকের নির্দেশনা ভালোমতো লক্ষ করো।

ছক ৬.৬		
ক্রমিক	**প্রশ্ন**	**উত্তর**
১	পতাকা স্ট্যান্ডের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?	
২	খেলার মাঠের চার কোনার স্থানাঙ্কগুলো লেখো।	
৩	খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।	
৪	ল্যাবরেটরি ভবনের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো এবং মেইন গেইট থেকে ল্যাবরেটরি ভবনের মধ্যবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।	
৫	প্রশাসনিক ভবনের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো এবং ল্যাবরেটরি ও প্রশাসনিক ভবনের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।	
৬	খেলার মাঠের কর্ণ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।	
৭	খেলার মাঠের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?	
৮	বিদ্যালয়ের সীমানা প্রাচীরের পরিসীমা নির্ণয় করো।	
৯	তোমার বন্ধু/সহপাঠীর জন্য এই ম্যাপ থেকে দুটি চ্যালেঞ্জিং প্রশ্ন তৈরি করো।	

ঢাল (slope)

তোমরা নদীর পাড়ের ঢাল বা পাহাড়ের ঢাল দেখেছ? অথবা শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের সিঁড়ি দেখেছ নিশ্চয়ই। সমতল ভূমির সাপেক্ষে নদীর পাড় ক্রমশ নিচু হয়ে যায়। আবার পাহাড় ও সিঁড়ি সমতল ভূমির সাপেক্ষে ক্রমশ উঁচু হয়ে যায়। সমভূমির সাপেক্ষে ক্রমশ উঁচু বা নিচু হওয়া বিষয়টিকে আমরা ঢাল হিসেবে চিনি। সহজ কথায়, ঢাল বলতে বোঝায় কোনো কিছু ক্রমশ নিচু বা উঁচু হওয়া ।

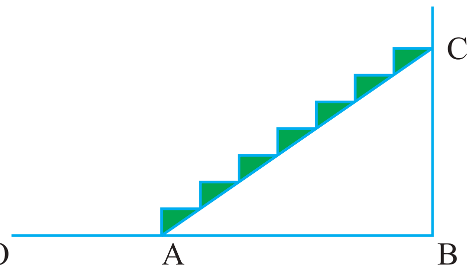

চিত্র : ৬.১৩ নদীর ঢালু পাড়


চিত্র : ৬.১৪ পাহাড়ের ঢাল


চিত্র : ৬.১৫ স্লাইড

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাপেক্ষে কোনো সরলরেখা কতটুকু আনত তাকেই ঢাল (slope) হিসেবে বিবেচনা করা হয়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে ঢাল নির্ণয় করা একটি গুরুত্বপূর্ণ কাজ। তোমরা কি জানো আনত বলতে কী বোঝায়? আনত হলো আনুভূমিক দূরত্বের সঙ্গে উল্লম্ব দূরত্বের অনুপাত। অর্থাৎ আনুভূমিকভাবে এক একক দূরত্ব অতিক্রম করলে তার সাপেক্ষে উল্লম্ব দিকে কতটুকু পরিবর্তন হয়, তার পরিমাণ হলো ঢাল। পাশে একটি সিঁড়ির চিত্র দেওয়া আছে। এর আনুভূমিক দূরত্ব AB, এবং উল্লম্ব দূরত্ব BC। তাহলে,

$$\text{সিঁড়ির ঢাল} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{উলম্ব দূরত্ব}}{\text{আনুভূমিক দূরত্ব}}$$



চিত্র : ৬.১৬

স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ঢাল নির্ণয়

আমরা যদি অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলে অর্থাৎ xy-সমতলে দুইটি বিন্দু P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) নেই, তবে PQ রেখার ঢাল নিচের চিত্র থেকে বের করতে পারি।

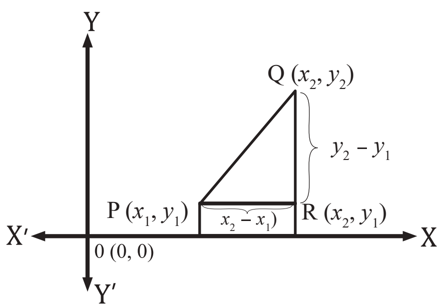
$$PQ \text{ রেখার ঢাল } = \frac{RQ}{PR} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

সুতরাং আমরা বলতে পারি,

যদি দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হয়,

তবে P ও Q বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল m হলে,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ।}$$

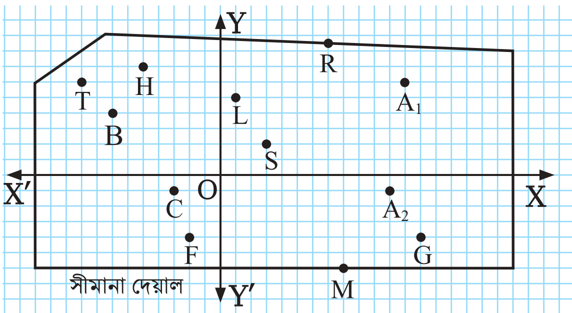


চিত্র : ৬ ১৭

ঢালকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে আনত বিবেচনা করা হয়। ফলে সরলরেখার বিভিন্ন অবস্থানের কারণে ঢাল (বা আনতি বা নতি) ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

দলগত কাজ

অবস্থান মানচিত্র তৈরিতেও ঢালের ব্যবহার হয়ে থাকে। শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের অবস্থান মানচিত্র (চিত্র ৬.২) এর বিভিন্ন স্থাপনার বিন্দুর স্থানাঙ্ক চিত্র ৬.১৮ এর মাধ্যমে গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করা আছে। এই চিত্র থেকে নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।



চিত্র: ৬.১৮

1) নিচের বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল বের করো।

ক) S এবং A_1 খ) S এবং A_2 গ) C এবং G ঘ) F এবং T

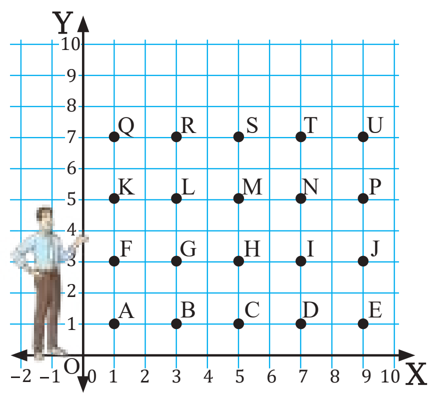
2) তোমাদের ইচ্ছেমতো যে কোনো তিন জোড়া বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল নির্ণয় করো।

সরলরেখার সমীকরণ

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষক শিক্ষার্থীদের ছবিটিকে যদি আমরা বিন্দুর মাধ্যমে প্রকাশ করি, তাহলে আমরা চিত্র : ৬.১৯ এর অনুরূপ পাব। একজন শিক্ষকের সাপেক্ষে বিভিন্ন শিক্ষার্থীর অবস্থানের বিন্দুগুলোকে বিভিন্ন অক্ষর (letter) দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে। পর্যবেক্ষণ করে বলো তো A(1, 1), B(3, 1), C(5, 1), D(7, 1), E(9, 1)

বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কগুলোর মধ্যে কোনো মিল খুঁজে পাও কি না?



চিত্র: ৬.১৯

কী মিল খুঁজে পেলে তা এখানে লেখো।

তোমরা দেখবে যে, উক্ত বিন্দুগুলোর কোটি একই। এবার এই বিন্দুগুলো যদি তুমি ক্রমান্বয়ে সংযোগ করো, তাহলে একটি সরল রেখা দেখতে পাবে। মজার ব্যাপার হলো, এই সরলরেখাটির সকল বিন্দুতে কোটি সমান

এবং তা হলো 1 । সুতরাং আমরা লিখতে পারি, কোটি $y = 1$ এবং এই সরলরেখাটিকে আমরা বীজগাণিতিকভাবে লিখতে পারি

$$y = 1$$

এটি হলো একটি সরলরেখার সমীকরণ। দেখতে পাচ্ছ এই সরল রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

একক কাজ

চিত্র ৬.১৯ অনুযায়ী সমস্যাগুলোর সমাধান করো।

১ F(1, 3), G(3, 3), H(5, 3), I(7, 3), J(9, 3) বিন্দুগুলোর সংযোগ সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

২ A, B, C, D, E বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৩ K, L, M, N, P বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৪ Q, R, S, T, U বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

এখন কী বলতে পারবে, x-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি কত? x-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি 0, অর্থাৎ x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$ ।

এবার বলো তো (3, –4), (5, –4), (7, –4) বিন্দুগুলোর সংযোগ সরল রেখার সমীকরণ কী হবে? একটু খেয়াল করে দেখ, এখানেও সবকটি বিন্দুর কোটি সমান, কিন্তু ঋণাত্মক। সকল বিন্দুর কোটি –4। এইসব বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নিচে লেখো।

জোড়ায় কাজ

নিচে উল্লেখিত কোন কোন বিন্দুগামী সরলরেখা x অক্ষের সমান্তরাল হবে, তাদেরকে চিহ্নিত করে নিচের ঘরে লিখো।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক

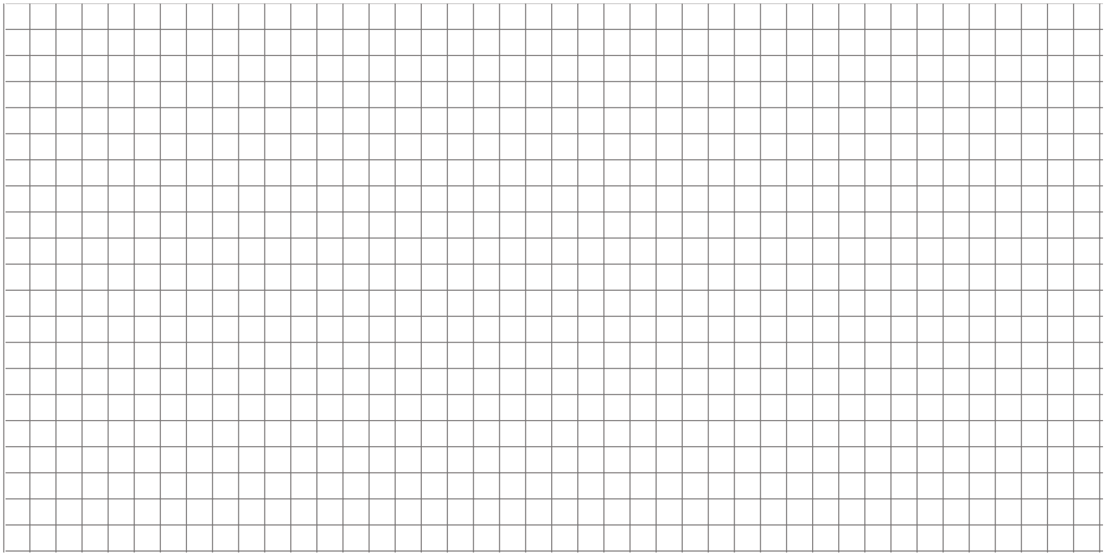
A(3, –3), B(4, 4), C(–6, 4), D(–4, 7),

E(–8, 4), G(-10, –3), H(12,17),

I(13, –3), J(15, 7), K(17, 3),

L(18, 4), M(20, 7)

বিন্দুগুলোকে গ্রাফ পেপারে (চিত্র ৬.২০) উপস্থাপন করো এবং x-অক্ষের সমান্তরাল বিন্দুগুলো সংযোগ করো। উপরের ঘরে লেখা তোমাদের উত্তর গ্রাফ পেপারের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।



চিত্র: ৬.২০

উপরের পর্যবেক্ষণগুলো থেকে তোমরা কি কোনো সাধারণ সিদ্ধান্ত নিতে পার? হ্যাঁ, আমরা একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারি-

যে সকল বিন্দুর কোটি একই, তাদেরকে ক্রমান্বয়ে যোগ করলে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা পাওয়া যায়।

y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করার মতো আমরা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করতে পারি। চির ৬.১৯-তে A, F, K, Q বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নিচে লেখো।

লক্ষ করলে দেখবে যে, উক্ত বিন্দুগুলোর ভুজ 1 । এবার এই বিন্দুগুলো যদি তুমি ক্রমান্বয়ে সংযোগ করো, তাহলে তোমরা একটি সরলরেখা পাবে। এই সরলরেখাটির সমীকরণ কী হবে বলো তো? এই সরলরেখাটির সকল বিন্দুতে ভুজ সমান এবং তা হলো 1 । সুতরাং আমরা লিখতে পারি, ভুজ $x=1$ এবং এই সরলরেখাটিকে আমরা বীজগাণিতিকভাবে লিখতে পারি

$$x = 1$$

এটি হলো একটি এই সরলরেখার সমীকরণ। দেখতে পাচ্ছ এই সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল।

জোড়ায় কাজ

নিচে উল্লেখিত কোন কোন বিন্দুগামী সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হবে, তাদেরকে চিহ্নিত করে নিচের ঘরে লেখো।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

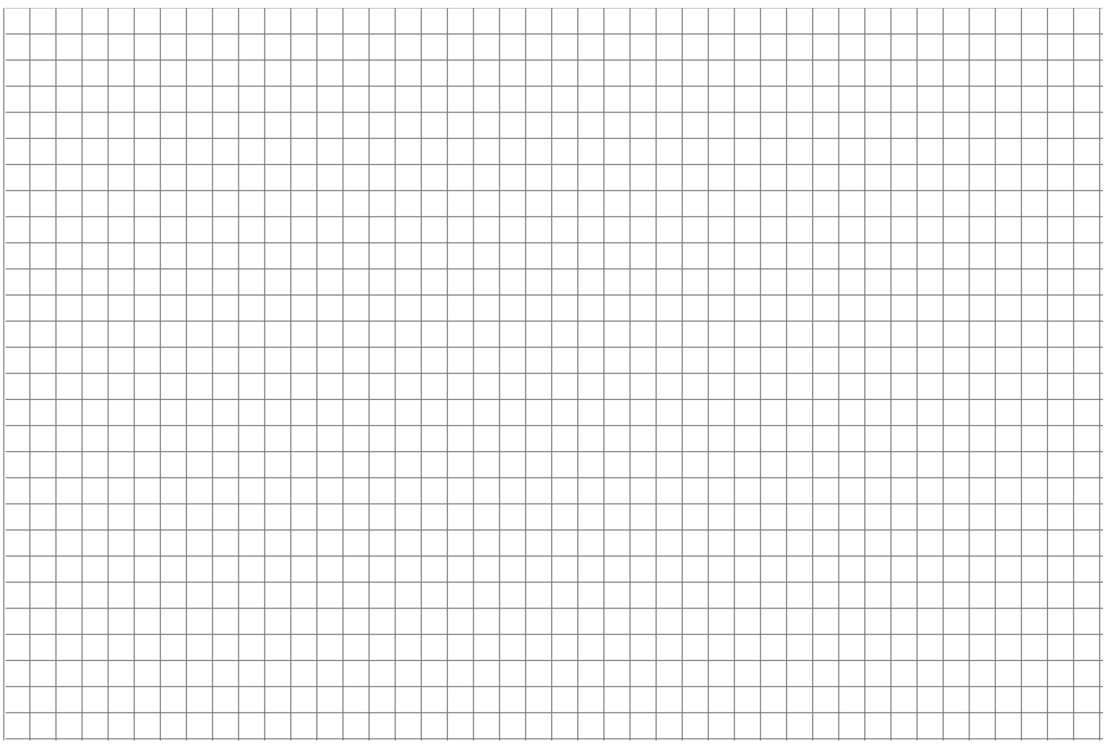
A(–3, –3), B(4, 4), C(3, –6), D(7, 7),

E(4, –6), G(7, –3), H(4, –7), I(-3, 8),

J(7, 12), K(4, 11), L(7, 4), M(–3, 0),

N(0, 6), P(0, –6)

বিন্দুগুলোকে গ্রাফ পেপারে (চিত্র : ৬.২১) উপস্থাপন করো এবং y-অক্ষের সমান্তরাল বিন্দুগুলো সংযোগ করো। উপরের ঘরে লেখা তোমাদের উত্তর গ্রাফ পেপারের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।



চিত্র: ৬.২১

এবার বলো তো, y-অক্ষের সমীকরণ কত? তোমার উত্তর নিচে লেখো।

উপরের পর্যবেক্ষণগুলো থেকে তোমরা কি কোনো সাধারণ সিদ্ধান্ত নিতে পার? হ্যাঁ, আমরা একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারি-

যে সকল বিন্দুর ভুজ একই, তাদেরকে ক্রমান্বয়ে যোগ করলে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা পাওয়া যায়।

জোড়ায় কাজ

$x = 6, x = -5, y = 3, y = -4$ সরলরেখাগুলো অঙ্কন করো। সরলরেখাগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কগুলো চিহ্নিত করো এবং ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বের করো।

অক্ষের সমান্তরাল নয় এমন সরলরেখার সমীকরণ

এখন অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল নয় এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে চাই। অবস্থান মানচিত্রে (চিত্র : ৬.২২) $S(3, 2)$ এবং A_1 $(12, 6)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ বের করতে হবে। ধরি, SA_1 রেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $P(x, y)$. ঢালের সূত্র অনুযায়ী-

SP রেখার ঢাল $= \frac{y-2}{x-3}$

এবং SA_1 রেখার ঢাল $= \frac{6-2}{12-3} = \frac{4}{9}$

যেহেতু SP এবং SA_1 একই সরলরেখা, সুতরাং তাদের ঢালদ্বয় সমান।

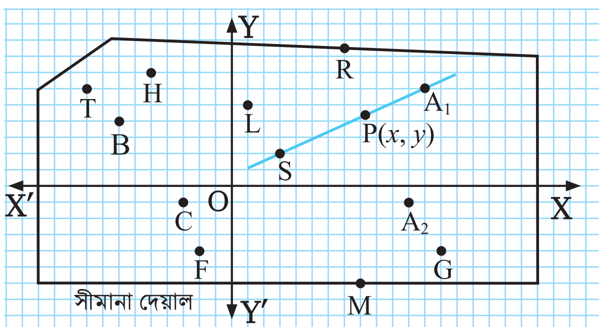
$\therefore \frac{y-2}{x-3} = \frac{4}{9}$

বা, $4x - 12 = 9y - 18$

বা, $4x - 9y - 12 + 18 = 0$

$\therefore 4x - 9y + 6 = 0$

এটিই SA_1 সরলরেখার সমীকরণ।



চিত্র: ৬.২২

জোড়ায় কাজ

চিত্র : ৬.২২ এর ক্ষেত্রে-

১) মূলবিন্দু এবং A_2 বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

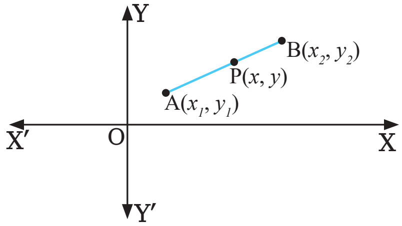
২) CL সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

চলো এবার দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করার চেষ্টা করি। xy-সমতলে $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু নিই। আমরা AB সরলরেখার সমীকরণ বের করব। ধরি, AB সরলরেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $P(x, y)$.

AB রেখার ঢাল $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

এবং AP রেখার ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$



চিত্র: ৬.২৩

যেহেতু AB এবং AP একই সরলরেখা, সুতরাং তাদের ঢালদ্বয় সমান। অর্থাৎ,

AP রেখার ঢাল $=$ AB রেখার ঢাল

বা, $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

বা, $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$\therefore \dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

এটিই দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ।

> (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

একক কাজ

১) $(3, 4)$ এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

২) $(0, 0)$ এবং $(-7, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

ঢালের মাধ্যমে সরলরেখার সমীকরণ

উপরের (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

বা, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \mathrm{m}$ [এখানে $\mathrm{m} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ হলো (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল]

বা, $y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$।

m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

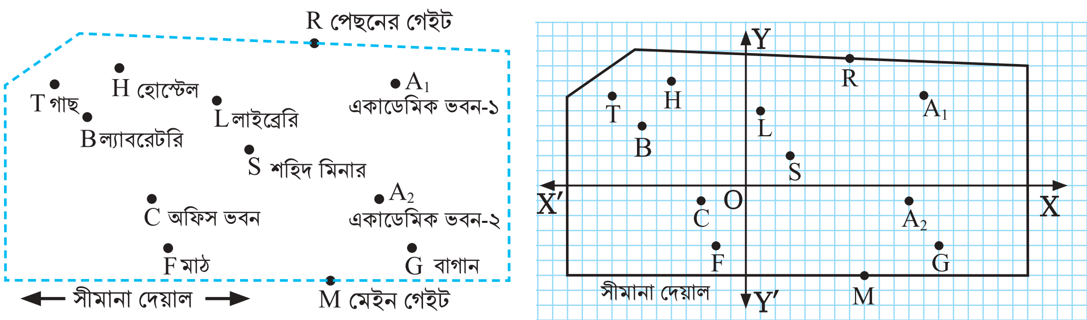
$$y - y_1 = \mathrm{m}(x - x_1)$$

একক কাজ

এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল 3 এবং $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

দলগত কাজ

এই অভিজ্ঞতার শুরুতে উপস্থাপিত প্রতিষ্ঠানের অবস্থান মানচিত্র গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করা আছে। শিক্ষকের নির্দেশমতো দলে বিভক্ত হয়ে তোমরা নিচের প্রশ্ন/সমস্যাগুলোর সমাধান করো।



চিত্র: ৬.২৪

ক) ল্যাবরেটরি, লাইব্রেরি, হোস্টেল, মেইন গেইট এর স্থানাঙ্ক বের করো।

খ) একাডেমিক ভবন-১ এবং মাঠ কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

গ) হোস্টেল এবং শহীদ মিনারের অবস্থান দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল কত?

ঘ) মেইন গেইট থেকে হোস্টেলের দূরত্ব কত?

ঙ) মেইন গেইট থেকে সবচেয়ে দূরে কোন স্থাপনাটি রয়েছে?

চ) হোস্টেল থেকে কোন গেইটটি নিকটবর্তী? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

ছ) অফিস ভবন এবং শহীদ মিনার দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢালের সঙ্গে লাইব্রেরি এবং পেছনের গেইট দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢালের তুলনা করো।

জ) প্রতিষ্ঠানের সীমানার মোট দৈর্ঘ্য কত?

ঝ) মাঠ এবং অফিস ভবন দিয়ে গমনকারী সরল রেখার সমীকরণ বের করো।

প্রজেক্ট ওয়ার্ক

শ্রেণিশিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক

১) তোমাদের প্রতিষ্ঠানের একটি অবস্থান মানচিত্র গ্রাফ কাগজে প্রস্তুত করো।

২) বিদ্যালয়ের যে কোনো সুবিধাজনক জায়গায় মূলবিন্দু ধরে অক্ষদ্বয় চিহ্নিত করো।

৩) তোমার সুবিধামতো কমপক্ষে পাঁচটি স্থান বা স্থাপনা মানচিত্রে উল্লেখ করো।

৪) সবচেয়ে কাছের দুটি স্থাপনা এবং সবচেয়ে দূরের দুইটি স্থাপনার দূরত্ব নির্ণয় করো।

৫) প্রধান শিক্ষকের অফিস ঘরের অবস্থান স্থানাঙ্কে প্রকাশ করো।

শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক একটি নির্দিষ্ট দিনে তোমাদের প্রজেক্টটি বিদ্যালয়ে প্রদর্শন করো।

অনুশীলনী

১. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল -2 এবং রেখাটি $(4, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

২. $A(3, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। সরলরেখাটির ঢাল কত?

৩. দেখাও যে, $A(0, -3), B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$বিন্দু তিনটি সমরেখ।

৪. $A(1, -1), B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

৫. $A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9)$ এবং $D(3, 10)$ এই বিন্দুগুলো লেখচিত্রে বসাও এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকো। এই রেখাগুলো দ্বারা কী ধরনের ক্ষেত্র তৈরি হয়েছে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

৬. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2, 1), B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$. যদি $AB = BC$ হয়, তবে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো। a এর প্রতিটি মানের জন্য গঠিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৭. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-1, 1), B(2, -1), C(0, 3)$ ও $D(3, 3)$। বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।