

১. নং প্রশ্নের সমাধান :

$$১. a = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, b = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

ক. $|pa + b|$ নির্ণয় কর যেখানে p একটি ধ্রুবক।

খ. a এবং b ভেক্টর দুইটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. b ভেক্টর বরাবর a ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।

(ক). এর সমাধান :

$$a = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, b = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \therefore p a + b &= p(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k} \\ &= p\hat{i} - p\hat{j} + p\hat{k} + 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k} \\ &= (p+3)\hat{i} - (p+5)\hat{j} + (p+2)\hat{k} \\ \therefore |pa + b| &= \sqrt{(p+3)^2 + \{-(p+5)\}^2 + (p+2)^2} \\ &= \sqrt{p^2 + 6p + 9 + p^2 + 10p + 25 + p^2 + 4p + 4} \\ &= \sqrt{3p^2 + 20p + 38} (Ans) \end{aligned}$$

(খ). এর সমাধান :

$$a = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, b = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i}(-2+5) - \hat{j}(2-3) + \hat{k}(-5+3) \\ &= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \end{aligned}$$

$$|a \times b| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

a b ভেক্টর দুইটি লম্ব একক ভেক্টর

$$\begin{aligned} &= \frac{a \times b}{|a \times b|} = \frac{3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) (Ans.) \end{aligned}$$

(গ). এর সমাধান :

$$a = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, b = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$b \text{ ভেক্টর বরাবর } a \text{ ভেক্টরের উপাংশ} = |a| \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|b|} \hat{b}$$

$$a \cdot b = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$|b| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$$

$$\hat{b} = \frac{b}{|b|} = \frac{3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{38}}$$

$$\therefore b \text{ ভেক্টর বরাবর } a \text{ ভেক্টরের উপাংশ} = \frac{10}{\sqrt{38}} \cdot \frac{3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{38}}$$

$$\frac{10}{38}(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\frac{5}{19}(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) (Ans.)$$

২. নং প্রশ্নের সমাধান :

$A = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $B = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ হলে,

ক. A এবং B এর অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

খ. A এবং B এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. A ভেক্টরের ওপর B এর অভিক্ষেপ কত?

(ক). এর সমাধান :

ধরি, A ও B ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ .

আমরা জানি,

$$A \cdot B = |A||B|\cos\theta$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } (3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}) \\ = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} \cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{বা, } -3 + 2 + 8 = \sqrt{17}\sqrt{18}\cos\theta$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \frac{7}{\sqrt{17}\sqrt{18}}$$

$$\text{বা, } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{17}\sqrt{18}}\right)$$

$$= 66.41^\circ (Ans.)$$

(খ). এর সমাধান :

দেওয়া আছে, $A = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $B = -\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

তাহলে, লব্ধি ভেক্টর $= A+B = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k} - \hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$

$$= (3-1)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-2-4)\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\text{লব্ধি ভেক্টরের মান, } |A+B| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{সুতরাং, একক ভেক্টর} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}}{7} = \frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} - \frac{6}{7}\hat{k} (Ans.)$$

(গ). এর সমাধান :

A ভেক্টরের উপর B এর অভিক্ষেপ,

$$B \cos\theta = \frac{A \cdot B}{|A|}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})(-\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k})}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} \\
&= \frac{-3 + 2 + 8}{\sqrt{17}} \\
&= \frac{7}{\sqrt{17}} \text{ (Ans.)}
\end{aligned}$$

৩. নং প্রশ্নের সমাধান :

$$\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}, \underline{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$$

ক. \underline{a} ও \underline{b} ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব কিনা যাচাই করো।

খ. \underline{a} ও \underline{b} ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ক). এর সমাধান :

দেওয়া আছে,

$$\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\underline{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\therefore \underline{a} \cdot \underline{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$= 6 - 12 + 24 = 18$$

যেহেতু, $\underline{a} \cdot \underline{b} \neq 0$, সেহেতু এরা পরস্পর লম্ব নয়।

$$\underline{a} \times \underline{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \times (2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k})$$

$$\text{খ.} = -18\hat{k} + 12\hat{j} - 4\hat{k} - 8\hat{i} - 12\hat{j} - 36\hat{i}$$

$$= -44\hat{i} - 22\hat{k}$$

$$\text{এখন, } |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{(-44)^2 + (-22)^2}$$

$$= \pm 22\sqrt{5}$$

$$\frac{\underline{a} \times \underline{b}}{|\underline{a} \times \underline{b}|} = \pm \frac{-44\hat{i} - 22\hat{k}}{22\sqrt{5}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} (-2\hat{i} - \hat{k})$$

ইহা \underline{a} ও \underline{b} ভেক্টর দুটি দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর। (Ans.)

(গ). এর সমাধান :

মনে করি, ত্রিভুজটির A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\xrightarrow{a}, \xrightarrow{b}, \xrightarrow{c}$

এখানে,

$$\xrightarrow{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\xrightarrow{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\xrightarrow{c} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\therefore AB \text{ বাহু নির্দেশক ভেক্টর } \xrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$= (2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$= -\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$$

এবং AC বাহু নির্দেশক ভেক্টর $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$

$$= (3\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) - (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k})$$

$$= \hat{j} + 2\hat{k}$$

এখন,

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-16-2) - \hat{j}(-2-0) + \hat{k}(-1+0)$$

$$= -18\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-18)^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{324 + 4 + 1} = \sqrt{329}$$

$$\therefore \text{ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \sqrt{329} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{329}$$

$$= 9.069 \text{ বর্গ একক (প্রায়) (Ans.)}$$

৪.নং প্রশ্নের সমাধান :

$$\overrightarrow{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}, \overrightarrow{B} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

ক. P(4, 3, 1), Q(2, -1, -2) এ সংযোগ রেখাকে R বিন্দু 3 : 4 অনুপাতে বিভক্ত করলে \overrightarrow{OR} নির্ণয় কর।

খ. $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ এবং $\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

গ. $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ভেক্টর কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(ক). এর সমাধান :

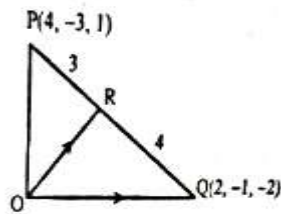
মনে করি, R বিন্দুর স্থানাংক (x, y, z)

$$\therefore x = \frac{6+16}{3+4} = \frac{22}{7}$$

$$y = \frac{-3-12}{3+4} = \frac{15}{7}$$

$$z = \frac{-6+4}{3+4} = -\frac{2}{7}$$

$$\therefore \overrightarrow{OR} = \frac{22}{7}\hat{i} - \frac{15}{7}\hat{j} - \frac{2}{7}\hat{k}$$



(খ). এর সমাধান :

দেওয়া আছে,

$$\overrightarrow{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{B} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\text{এখানে } \vec{A} + \vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k} + 3\hat{j} + 4\hat{k} = 2\hat{i}$$

$$\begin{aligned}\text{এবং } \vec{A} - 2\vec{B} &= 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k} - 2(3\hat{j} + 4\hat{k}) \\ &= 2\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k} - 6\hat{j} - 8\hat{k} \\ &= 2\hat{i} - 9\hat{j} - 12\hat{k}\end{aligned}$$

মনেকরি, $\vec{A} + \vec{B}, \vec{A} - 2\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$$\begin{aligned}\therefore \cos \theta &= \frac{(\vec{A} + \vec{B})(\vec{A} - 2\vec{B})}{|\vec{A} + \vec{B}| |\vec{A} - 2\vec{B}|} \\ &= \frac{2\hat{i} \cdot (2\hat{i} - 9\hat{j} - 12\hat{k})}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-9)^2 + (-12)^2}} \\ &= \frac{4}{2 \cdot \sqrt{4 + 81 + 144}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{229}} \\ \therefore \cos \theta^{-1} &\left(\frac{2}{\sqrt{229}} \right) (\text{Ans.})\end{aligned}$$

(গ). এর সমাধান :

আমরা জানি, \vec{A}, \vec{B} দ্বারা কোন ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু হলে উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\begin{aligned}\text{এখন, } \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(-12 + 12) + \hat{j}(0 - 8) + \hat{k}(6 - 0) \\ &= -8\hat{j} + 6\hat{k} \\ \therefore |\vec{A} \times \vec{B}| &= \sqrt{(-8)^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{64 + 36} \\ &= \sqrt{100} = 10 \\ \therefore \text{নির্ণেয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}| \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \\ &= 5 \text{ বর্গ একক (Ans.)}\end{aligned}$$

ব্যাকটিস অংশ: সৃজনশীল প্রশ্নঃ

$$\text{প্রশ্ন-১ } A = x\hat{i} + y\hat{j} + 2z\hat{k}, B = y\hat{i} + 3z\hat{j} - 2x\hat{k}$$

$$\text{এবং } C = \begin{bmatrix} x-2y & z-y & y \\ y & -z & z-y-1 \\ y-1 & z-2 & x-3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ক. } D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ হলে } D^2 \text{ নির্ণয় কর।}$$

$$\text{খ. } \begin{bmatrix} x-1 & 3 \\ z & y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2-z & 5-y \end{bmatrix} \text{ হলে দেখাও যে, } \mathbf{A} \text{ ও } \mathbf{B} \text{ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।}$$

গ. $x = 4, y = 2, z = 3$ হলে C^{-1} নির্ণয় কর।

প্রশ্ন-২

চিত্র:

চিত্রে OABC একটি সামান্তরিক।

ক. \overrightarrow{AB} নির্ণয় কর।

খ. \overrightarrow{OA} বরাবর \overrightarrow{OB} এর উপাংশ নির্ণয় কর।

গ. ΔOAC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রশ্ন-৩ $A = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}, B = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

ক. $|2\vec{A} - 3\vec{B}|$ নির্ণয় কর।

খ. \vec{A} বরাবর \vec{B} এর উপাংশ নির্ণয় কর।

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

প্রশ্ন-৪. $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর রাশি।

ক. \hat{j} এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

খ. উভয় ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. প্রথম ভেক্টরের সাথে অক্ষত্রয়ের উৎপন্ন কোণ সমূহ নির্ণয় কর।

প্রশ্ন-৫. $a = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, b = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

ক. a বিন্দুগামী এবং b ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ. a ও b এর মধ্যবর্তী কোণের সাইনের মান নির্ণয় কর।

গ. একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা a ও b এর সাথে সমতলীয় এবং এর উপর লম্ব।