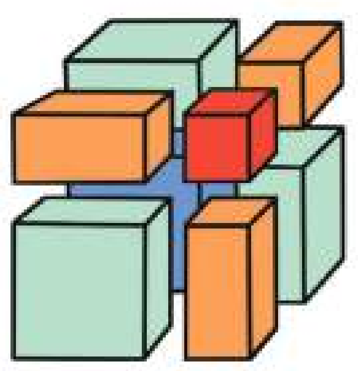
ঘনবস্তুতে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশি খুঁজি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- সংখ্যারাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে প্রতীক ব্যবহারের মাধ্যমে বীজগাণিতিক সম্পর্ক তৈরি
- গাণিতিক সম্পর্ক থেকে বাস্তব বা বিমূর্ত প্যাটার্ন উদ্‌ঘাটন
- প্রতীক এবং চলকের মাধ্যমে গাণিতিক সম্পর্ক প্রকাশ
- জ্যামিতিক আকৃতি এবং গাণিতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে গাণিতিক রাশি ব্যবহার



ঘনবস্তুতে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশি খুঁজি

পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা তোমাদের অভিজ্ঞতা অর্জনে চলক, বীজগাণিতিক রাশি, পদ, বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদক, লসাগু, গসাগু ইত্যাদি ব্যবহার করেছ। বাস্তব জীবনে সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক রাশি খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তোমরা বর্গক্ষেত্র এবং আয়তক্ষেত্রের বিষয়ে দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ব্যবহার শিখেছ। তোমরা শিখেছ, আয়তক্ষেত্র একটি দ্বিমাত্রিক আকৃতি। অর্থাৎ এটি পরিমাপের দুটি মাত্রা– দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ। বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্রের একটি বিশেষ অবস্থা। বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ সমান। মজার ব্যাপার হলো, আমাদের চারপার্শ্বে দ্বিমাত্রিক বস্তুর চেয়ে ত্রিমাত্রিক বস্তুই বেশি। যেমন– বই, খাতা, আলমারি, শোকেস, বুকশেল্ফ ইত্যাদি। ত্রিমাত্রিক বস্তুতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ছাড়াও একটি মাত্রা যোগ হয়, সেটি হলো– উচ্চতা। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সম্বলিত দ্বিমাত্রিক বস্তুকে আমরা যেমন আয়তাকার বলি, তেমনি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সম্বলিত ত্রিমাত্রিক বস্তুকে ঘনক আকার বলি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা এ সকল ঘনবস্তুর মাধ্যমে দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ব্যবহার শিখব। এসো আমরা প্রথমে জেনে নিই কীভাবে দ্বিমাত্রিক বস্তু থেকে দ্বিপদী রাশি গঠন করা যায়।

শ্রেণিকক্ষের জানালায় দ্বিপদী রাশি খুঁজি

তোমার শ্রেণিকক্ষের জানালার দিকে লক্ষ করো, জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে। জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে সম্পর্ক বের করো। যেমন, আমার জানালার দৈর্ঘ্য 5 ফুট এবং প্রস্থ 3 ফুট। তাহলে, দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 2 ফুট বেশি। অর্থাৎ

$$\text{দৈর্ঘ্য} = \text{প্রস্থ} + 2 \text{ ফুট} = (3+2) \text{ ফুট}$$

এটি দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে একটি সম্পর্ক। আমরা এই সম্পর্কটিকে অন্যভাবেও বলতে পারি। যেমন– দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে 1 ফুট কম। অর্থাৎ

$$\text{দৈর্ঘ্য} = 2 \times \text{প্রস্থ} - 1 \text{ফুট} = (2 \times 3 - 1) \text{ ফুট} = (6 - 1) \text{ ফুট।}$$

এখানে, $3+2$ এবং $6-1$ হলো সংখ্যার দুটি দ্বিপদী রাশি।

দ্বিপদী সংখ্যারাশি থেকে দ্বিপদী বীজগাণিতিক রাশির ধারণা

ধরো তুমি কোনো একটি শ্রেণি কক্ষের জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ জানো না কিন্তু জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে সম্পর্ক জানো। সম্পর্কটি হলো দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 2 ফুট বেশি। অর্থাৎ

দৈর্ঘ্য = প্রস্থ + 2 ফুট

এখানে দৈর্ঘ্য, প্রস্থের উপর নির্ভরশীল। এই সম্পর্কটি দেখানোর জন্য আমাদের একটি চলক ব্যবহার করতে হবে। যদি প্রস্থ x ফুট হয়, তবে

$$\text{দৈর্ঘ্য} = (x+2) \text{ ফুট}$$

এখানে, $x + 2$ একটি দ্বিপদী রাশি। এরকম যেসকল রাশির দুইটি পদ থাকে তাকে **দ্বিপদী রাশি** বলে। দ্বিপদী রাশি $x + 2$ এ একটি চলক x রয়েছে। তাই এটি একটি একচলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি। এই ধরনের যেসকল দ্বিপদী রাশিতে একটি চলক থাকে তাকে **এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি** বলে।

চিংড়ি মাছের ঘেরে দ্বিপদী রাশি খুঁজি

এবার আমরা দুইচলক বিশিষ্ট বীজগাণিতিক দ্বিপদী রাশির ধারণা দিব। রায়হানের বাবার দুইটি আয়তাকার চিংড়ি মাছের ঘের A এবং B আছে (পার্শ্বের চিত্র লক্ষ করো)। ঘের B এর দৈর্ঘ্য ঘের A এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের যোগফলের সমান। এখানে ঘের A এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ দুটিই অজানা রাশি। সুতরাং আমাদের দুটি চলক ব্যবহার করতে হবে। ধরি, ঘের A এর দৈর্ঘ্য x ও প্রস্থ y । তাহলে ঘের B এর দৈর্ঘ্য $x + y$। অর্থাৎ ঘের B এর দৈর্ঘ্য দুইচলক বিশিষ্ট একটি দ্বিপদী রাশি। এরকম যেসকল দ্বিপদী রাশির দুইটি চলক থাকে তাকে **দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি** বলে।

একক কাজ :

নিজের মতো করে 5টি দ্বিপদী রাশি লেখো এবং বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো

দলগত কাজ:

তোমার রোল নম্বরকে 4 দ্বারা ভাগ করো। যাদের ভাগশেষ যত হবে তাদের দলের নম্বর তত। যেমন, যাদের ভাগশেষ 0 তাদের দলের নম্বর 0 অর্থাৎ দল-0. এভাবে দল-1, দল-2 এবং দল-3 মোট 4টি দল তৈরি হবে। তোমার দলের নম্বরের সাথে 1 এবং 5 যোগ করো। যে নম্বর দুটি হয়, নিচের থেকে সেই নম্বরের রাশি দুটি নিয়ে বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো।

1) $x + 3$ 2) $2x + 1$ 3) $3x - 3$ 4) $x - 2$

5) $5x + y$ 6) $x^2 - 1$ 7) $x^2 - y$ 8) $x + y^2$

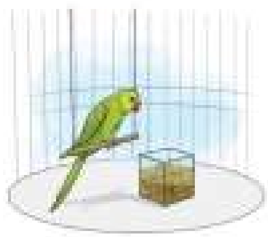
এবার একদল অন্য দলগুলোর কাজ মূল্যায়নের জন্য নিচের সারণীটির মতো একটি করে সারণী পূরণ করবে এবং শ্রেণি শিক্ষকের কাছে জমা দিবে। এখানে দল-0 এর মূল্যায়ন সারণী দেওয়া হলো।

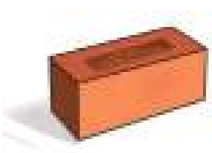
ছক ৩.১

দল-0 এর মূল্যায়ন	দ্বিপদী রাশি	উপস্থাপিত বাস্তব উদাহরণ মূল্যায়ন	তোমাদের মূল্যায়নের যুক্তি	তোমরা একটি বাস্তব উদাহরণ উপস্থাপন করো
দল-1	2)			
	6)			
দল-2	3)			
	7)			
দল-3	4)			
	8)			

ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তু (Cube and Rectangular Solid)

তোমরা সপ্তম শ্রেণিতে ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তুর আকার ও আয়তনের সঙ্গে পরিচিত হয়েছ। ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক। আয়তক্ষেত্রের সঙ্গে আরও একটি মাত্রা যোগ হয়ে আয়তাকার ঘনবস্তু তৈরি হয়। যেমন– তোমার শ্রেণিকক্ষের মেঝের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে। এর সঙ্গে উচ্চতা যোগ হয়ে আয়তাকার শ্রেণিকক্ষ তৈরি হয়েছে। মজার ব্যাপার হলো, ঘনবস্তু থেকে একটি মাত্রা বাদ দিলে আমরা আবার আয়তক্ষেত্র পাই। যেমন, তোমার শ্রেণিকক্ষের উচ্চতা বাদ দিলে আবার মেঝে পাবে। এবার বলো তো দৈর্ঘ্য বাদ দিলে কী পাবে? এভাবে প্রস্থ বাদ দিলে কী পাবে? আমরা আগেই বলেছি, আমাদের চারপার্শ্বে দ্বিমাত্রিক বস্তুর চেয়ে ত্রিমাত্রিক বস্তুই বেশি। পার্শ্বের চিত্রে পাখির খাবার রাখার বক্সটি একটি ঘনক এবং ইট একটি আয়তাকার ঘনবস্তু।





আয়তন (Volume)

ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান এবং ঘনকের আকারকে আমরা লিখি, দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য

ঘনকের আয়তন = (দৈর্ঘ্য)^3। অর্থাৎ যদি, ঘনকের দৈর্ঘ্য= l হয়, তবে ঘনকের আয়তন $V = l^3$.

আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান নয়।

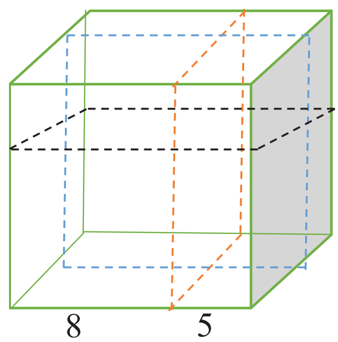
আয়তাকার ঘনবস্তুর আকার দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা।

যদি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য= l, প্রস্থ= w এবং উচ্চতা = h হয়, তবে আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন $V = lwh$

শোকেস তৈরিতে দ্বিপদী রাশির ঘন

তুমি তোমার বাসায় চারিদিকে খোলা একটি বর্গাকার কাচের শোকেস তৈরি করতে চাও। শোকেসটির চারিদিকে বিভিন্ন মাপের তাক থাকবে। এসো আমরা কাগজে ডিজাইন করে শোকেসের একটি মডেল তৈরি করি।

উদাহরণ-১ ধরো তোমার বর্গাকার কাচের শোকেসের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর একদিকে ৮ একক এবং অপরদিকে ৫ একক রেখে মাঝখানে একটি করে কাচের তাক দিবে (পার্শ্বের চিত্রের মতো)।



- তোমার শোকেসের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখ এবং আয়তন বের করো।
- শোকেসে কয়টি ঘর তৈরি হবে?
- ঘরগুলোতে $V_1, V_2, V_3 \ldots$ ইত্যাদি লেবেল বসাও।
- প্রত্যেক ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বের করো।
- প্রত্যেক ঘরের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখ এবং আয়তন বের করো।
- একই আকারের ঘরের সংখ্যা বের করো।
- শোকেসের আয়তন এবং ঘরের আয়তনের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি? থাকলে সম্পর্কটি লেখো।

উপরের প্রশ্নের উত্তরগুলো থেকে ছক ৩.২ পূরণ করো।

ছক ৩.২

শোকেসের	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা	আকার	আয়তন
	$8 + 5, 8 + 5, 8 + 5$		$(8 + 5)^3$
ঘরের লেবেল	ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা	ঘরের আয়তনের আকার	ঘরের আয়তন
V_1	8, 8, 8		
V_2	8, 5, 8		
V_3	8, 5, 8		
V_4	5, 5, 8		
V_5	8, 8, 5		

V_6	8, 5, 5		
V_7	8, 5, 5		
V_8	5, 5, 5		

শোকেসের আয়তন, $V = (8 + 5)^3 = 13^3 = 2197$

শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল

$$= 8^3 + (8^2 \times 5) + (8^2 \times 5) + (8^2 \times 5) + (8 \times 5^2) + (8 \times 5^2) + (8 \times 5^2) + 5^3$$

$$= 8^3 + 3 \times (8^2 \times 5) + 3 \times (8 \times 5^2) + 5^3$$

$$= 512 + (3 \times 320) + (3 \times 200) + 125$$

$$= 512 + 960 + 600 + 125 = 2197$$

☞ লক্ষ করে দেখো যে, শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল সমান। সুতরাং এই সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$(8 + 5)^3 = 8^3 + 3 \times (8^2 \times 5) + 3 \times (8 \times 5^2) + 5^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

উদাহরণ-২ এবার বলো তো, শোকেসের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর একদিকে 7 একক এবং অপরদিকে 6 একক রেখে মাঝখানে একটি করে কাঁচের তাক দিলে শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের ভিতরের বিভিন্ন ঘরগুলোর আয়তনের সম্পর্ক কী হতো? তোমরা অবশ্যই পাবে,

$$(7+6)^3 = 7^3 + 3\times(7^2\times6) + 3\times(7\times6^2) + 6^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

জোড়ায় কাজ

শোকেসের আকার 13 × 13 × 13 ঠিক রেখে অন্য কোনো দুটি সংখ্যার মাধ্যমে উপরের মতো কোনো সম্পর্ক লিখতে পারবে? পারলে এখানে লিখে রাখো। (সংকেত : দুটি সংখ্যা যেমন : 9, 4. এরকম আরও কমপক্ষে দুই জোড়া সংখ্যার জন্য লেখো।

উপরের দুইটি উদাহরণ এবং জোড়ায় কাজ থেকে তুমি যে বিষয়গুলো লক্ষ করেছ তা তোমার নোটবুকে লিখে রাখো। সতীর্থদের সঙ্গে আলোচনা করে তাদের ভিন্ন রকমের লক্ষ করা বিষয়গুলো যুক্তিসহকারে বোঝার চেষ্টা করো। শ্রেণিশিক্ষকের সাহায্য নিতে পার।

প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ

প্যাটার্ন গণিতের একটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। তোমরা কি জানো গণিতবিদরা বা বিজ্ঞানীগণ কোনো তত্ত্ব দেওয়ার আগে এবং প্রমাণের আগে কী করেন? তারা যে বিষয়ে তত্ত্ব দিবেন সেই বিষয়ের কিছু ঘটনা গভীর মনোযোগ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করেন। ঘটনাগুলোর একটি প্যাটার্ন বের করেন এবং সেই প্যাটার্ন অনুযায়ী একটি তত্ত্ব দেন এবং পরবর্তীতে গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে বা ল্যাবরেটরিতে পরীক্ষার মাধ্যমে সেই তত্ত্ব প্রমাণ করেন। একজন গণিতবিদের মতো আমরাও ঘনবস্তুর আয়তনের সম্পর্কের প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র বের করব এবং সূত্র প্রমাণ করব।

☞ লক্ষ করো, (i) নং সমীকরণ অনুসারে আমরা লিখতে পারি,

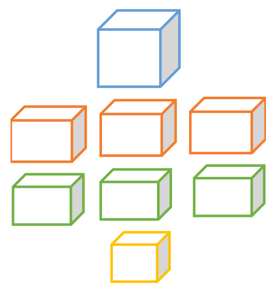
$8 \times 8 \times 8$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 1$

$8 \times 8 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 3$

$8 \times 5 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 3$

$5 \times 5 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 1$

মোট ঘর সংখ্যা $= 8$



একক কাজ

(ii) নং সমীকরণ অনুসারে,

- ঘরগুলোর আকার, বিভিন্ন আকারের ঘর সংখ্যা এবং মোট ঘর সংখ্যা লেখো।
- তোমাদের উপরের জোড়ায় কাজ থেকে পাওয়া পাওয়া ঘরগুলোর আকার, বিভিন্ন আকারের ঘর সংখ্যা এবং মোট ঘর সংখ্যা লেখো।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র

উপরের সংখ্যারাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে দুইটি সংখ্যার জন্য আমরা চলক হিসেবে a ও b ব্যবহার করে শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফলের সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

এটি দ্বিপদী রাশির ঘন এর একটি সূত্র। এই সূত্রটি আমরা বিভিন্নভাবে প্রমাণ করতে পারি।

বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহারের মাধ্যমে প্রমাণ: সূচকের নিয়ম থেকে আমরা পাই,

$$(a+b)^3 = (a+b)\,(a+b)(a+b)$$
$$=(a+b)\,(a^2+ab+ab+b^2)$$
$$=(a+b)\,(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

জ্যামিতিক প্রমাণ (আটটি ঘনবস্তুর খেলা) :

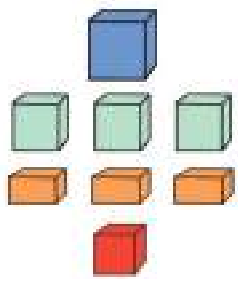
এখানে আমরা ল্যাবরেটরিতে কাজ করার মতো আটটি ঘনবস্তু তৈরি করে উপরের সূত্রটি প্রমাণ করব। কাজটি করার জন্য সুবিধামতো একটি কাঠি নাও। কাঠিটির মধ্যে (পার্শ্বের চিত্রের মতো) পেন্সিল দিয়ে একটি দাগ দাও। দাগের একপার্শ্বে a এবং অন্যপার্শ্বে b দ্বারা চিহ্নিত করো। এবার উপযুক্ত কাদামাটি, শক্ত কাগজ অথবা কর্কশীট অথবা তোমার সুবিধামতো কোনো উপাদান দিয়ে a এবং b এর সমান করে নিম্নের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা আকারের আটটি ঘনবস্তু তৈরি করো।

$a \times a \times a$ আকারের 1টি

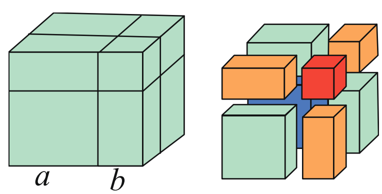
$a \times a \times b$ আকারের 3টি

$a \times b \times b$ আকারের 3টি

$b \times b \times b$ আকারের 1টি



এবার নিচের কাজগুলো করো।



- পার্শ্বের চিত্রের মতো ঘনবস্তুগুলোকে এমনভাবে একত্রে সাজাও যেন একটি ঘনক তৈরি হয়।
- তৈরিকৃত ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে কাঠিটির দৈর্ঘ্যের কোনো মিল আছে কী? না থাকলে তোমার তৈরিকৃত ঘনবস্তুগুলোতে ত্রুটি রয়েছে। ত্রুটিগুলো ঠিক করে নাও।
- তৈরিকৃত ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে কাঠিটির দৈর্ঘ্যের মিল থেকে তৈরিকৃত ঘনকের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন বের করো।
- আটটি ঘনবস্তুর আকার থেকে আয়তনের যোগফল বের করো।

- তৈরিকৃত ঘনকের আয়তনের সঙ্গে আটটি ঘনবস্তুর আয়তনের সম্পর্কটি গাণিতিকভাবে লেখো। তুমি সূত্রটি পেয়ে যাবে। যদি সূত্রের সঙ্গে না মিলে তবে বুঝতে হবে কোথাও ভুল করেছ। শ্রেণিশিক্ষক বা সতীর্থদের সঙ্গে আলোচনা করে ভুল সংশোধন করো।

দ্বিপদী রাশির বিয়োগের ঘন এর সূত্র

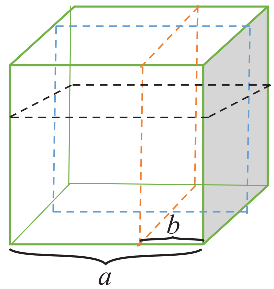
ধরি, একটি ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। প্রতি বাহু থেকে b একক বাদ দিয়ে একটি করে তাক দিলে নিম্নের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা আকারের আটটি ঘর তৈরি হবে।

$(a-b)\times(a-b)\times(a-b)$ আকারের 1টি

$(a-b)\times(a-b)\times b$ আকারের 3টি

$(a-b)\times b\times b$ আকারের 3টি

$b\times b\times b$ আকারের 1টি



শর্তানুযায়ী, এই আটটি ঘরের আয়তনের যোগফল ঘনকের আয়তন $= a^3$ এর সমান হবে। অর্থাৎ,

$$a^3=(a-b)(a-b)(a-b)+3(a-b)(a-b)b+3(a-b)b^2+b^3$$

$$=(a-b)^3+3(a-b)b(a-b+b)+b^3$$

$$=(a-b)^3+3ab(a-b)+b^3$$

$$=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2+b^3$$

সুতরাং

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

এটি দ্বিপদী রাশির বিয়োগের ঘন এর সূত্র।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র থেকে সূত্র গঠন

দ্বিপদী রাশির ঘন এর মূল সূত্র দুটি হলো :

১) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

২) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

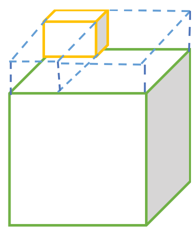
একক কাজ ৪

১. বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে উপরের মূল সূত্র দুটি থেকে নিচের সূত্রগুলো বের করো।

৩)	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
৪)	$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
৫)	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
৬)	$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-\mathrm{b})$
৭)	$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
৮)	$a^3 - \mathrm{b}^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$

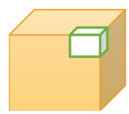
২. বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা ব্যবহার করে (৪) এবং (৫) নম্বর সূত্র দুটি প্রমাণ করো

(পার্শ্বের চিত্রে বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা দেওয়া আছে)।



৩. বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা ব্যবহার করে (৭) এবং (৮) নম্বর সূত্র দুটি প্রমাণ করো।

(পার্শ্বের চিত্রে বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা দেওয়া আছে)।



দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্রের ব্যবহার

সমস্যা ১. দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে $(102)^3$ এর মান বের করো।

সমাধান :

$(102)^3 = (100+2)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100^2 \times 2 + 3 \times 100 \times 2^2 + 2^3$ [সূত্র (১) অনুসারে]

$= 1000000 + 3 \times 10000 \times 2 + 3 \times 100 \times 4 + 8$

$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8$

$= 1061208$

সমস্যা ২. দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে $2x - y$ এর ঘন নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে মূল সূত্র (২) -এ $a = 2x,\ b = y$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2y + 3(2x)\,y^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

একক কাজ

1) দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে নিম্নের সংখ্যারাশির মান বের করো।

i) $(52)^3$ ii) $(79)^3$

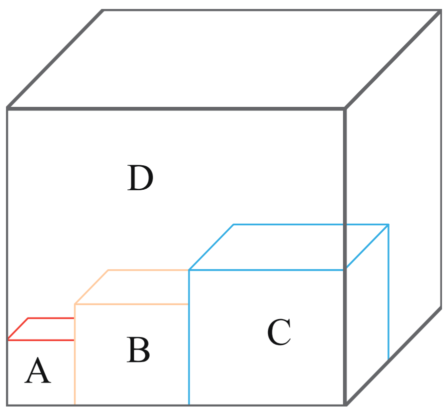
2) সূত্র ব্যবহার করে নিম্নের দ্বিপদী রাশির ঘন নির্ণয় করো।

i) $x + 1$ ii) $x - 3$ iii) $3x + 5$ iv) $5x - 3$

v) $2x + 3y$ vi) $x^2 + 1$ vii) $x^2 - y$ viii) $x^2 + y^2$

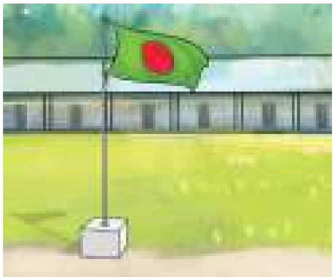
ত্রিপদী রাশির ঘন (Cube of Trinomial Expression)

ত্রিপদী রাশি (Trinomial Expression)



পার্শ্বের চিত্রে A, B, C এবং D চারটি ঘনক আকৃতির বক্স দেওয়া আছে। বক্স D এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য বক্স A, B, C এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান। তাহলে বক্স D এর বাহুর দৈর্ঘ্য বক্স A, B, C এর বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করছে, যেখানে বক্স A, B, C এর বাহুর দৈর্ঘ্যে অজানা। ধরি বক্স A, B, C এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যে যথাক্রমে x, y, z একক। তাহলে, D বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $x + y + z$ একক। এখানে $x + y + z$ তিনটি পদ বিশিষ্ট একটি বীজগাণিতিক রাশি। এরকম যেসকল বীজগাণিতিক রাশির তিনটি পদ থাকে তাকে **ত্রিপদী রাশি** বলে। লক্ষ করো যে, $x + y + z$ একটি তিন চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

একটি বাস্তব উদাহরণ



তোমার স্কুলের ঘনক আকৃতির পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য স্কুলের পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্যে, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টির সমান। অর্থাৎ পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য, পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার উপর নির্ভরশীল। যদি পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে x, y এবং z হয়, তবে পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য কত হবে? তোমরা অবশ্যই বলবে $x + y + z$। এটি একটি ত্রিপদী রাশি।

একক কাজ

১. নিজের মতো করে 10টি ত্রিপদী রাশি লেখো। সেখান থেকে 2টি ত্রিপদী রাশিকে বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো।

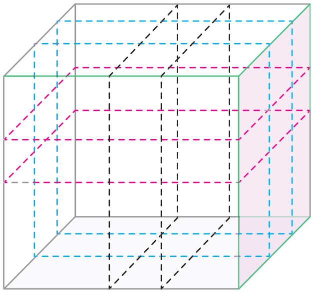
২. নিচের কোনটি ত্রিপদী রাশি নয়? তোমার সপক্ষে যুক্তি দাও।

i) $xy + 3y$ ii) xy iii) $x + y - 1$

iv) $x^2 - 2x + 1$ v) xy^2z

ত্রিপদী রাশির ঘন

দ্বিপদী রাশির ঘন এর মতো এসো আমরা কাগজে ডিজাইন করে নিচের চিত্রের মতো ঘনকের একটি মডেল তৈরি করি। এক্ষেত্রে ঘনকের প্রতি বাহুর মাঝখানে দুটি করে কাগজের তাক দেওয়া আছে। ধরো ঘনকটির প্রতি বাহু বরাবর প্রথমে 8 ইঞ্চি পরে 3 ইঞ্চি এবং শেষে 5 ইঞ্চি করে জায়গা আছে । এবার একটু চিন্তা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো।



- ঘনকের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখো এবং আয়তন বের করো।
- এবার বলো তো ঘনকটিতে কয়টি ঘর তৈরি হবে?
- প্রত্যেক ঘরের আকার বের করো।
- একই আকারের ঘরের সংখ্যা বের করো এবং তাদের আকার লেখো।
- প্রত্যেক আকারের ঘরের আয়তন বের করো।
- ঘনকের আয়তন এবং ঘরগুলোর আয়তনের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি? থাকলে সম্পর্কটি লেখো।

- উপরের প্রশ্নের উত্তরগুলো থেকে ছক ৩.৩ পূরণ করো।

ছক ৩.৩			
ঘনকের আকার	সংখ্যা	আয়তন	
$16 \times 16 \times 16$		$(8 + 3 + 5)^3$	
ঘরের আকার	সংখ্যা		
$8 \times 8 \times 8$	1	8^3	
$3 \times 3 \times 3$		3^3	
$5 \times 5 \times 5$		5^3	
$8 \times 8 \times 3$	3	$3 \times 8^2 \times 3$	
$8 \times 8 \times 5$			
$8 \times 3 \times 3$			
$8 \times 5 \times 5$			
$3 \times 3 \times 5$			
$3 \times 5 \times 5$			
$8 \times 3 \times 5$	6	$6 \times 8 \times 3 \times 5$	

সুতরাং ঘনকের আয়তন, $V = (8 + 3 + 5)^3 = 16^3 = 4096$

এবং বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল

$$= 8^3 + 3^3 + 5^3 + (3 \times 8^2 \times 3) + (3 \times 8^2 \times 5) + (3 \times 8 \times 3^2) + (3 \times 8 \times 5^2) + (3 \times 3 \times 5^2) + (3 \times 3^2 \times 5) + (6 \times 8 \times 3 \times 5)$$

$$= 512 + 27 + 125 + 576 + 960 + 216 + 600 + 225 + 135 + 720$$

$$= 4096$$

যেহেতু ঘনকের আয়তন এবং বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল সমান, সুতরাং

$$(8+3+5)^3 = 8^3 + 3^3 + 5^3 + (3 \times 8^2 \times 3) + (3 \times 8^2 \times 5) + (3 \times 8 \times 3^2) + (3 \times 8 \times 5^2) + (3 \times 3 \times 5^2) + (3 \times 3^2 \times 5) + (6 \times 8 \times 3 \times 5)$$

একক কাজ

নিচের তিনটি সংখ্যার যোগফলের ঘন তৈরিতে যেসকল ঘনবস্তু তৈরি করতে হবে তাদের আকার লেখো। প্রত্যেক আকারের কয়টি করে ঘনবস্তু তৈরি করতে হবে?

1) 5, 3, 2 ২) 8, 5, 3 ৩) 13, 8, 5 ৪) 5, 7, 12 ৫) 6, 4, 2

ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র

দ্বিপদী রাশির মতো যদি, যে কোনো তিনটি সংখ্যার জন্য আমরা চলক হিসেবে a, b ও c ব্যবহার করি, তবে উপরের ত্রিপদী রাশির ঘনক তৈরীর সংখ্যা রাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে লিখতে পারি,

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\ +3a^2c+3ac^2+6abc\end{aligned}}$$

এটি ত্রিপদী রাশির ঘন এর একটি সূত্র। এই সূত্রটি আমরা বিভিন্নভাবে প্রমাণ করতে পারি।

বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহারের মাধ্যমে প্রমাণ

সূচকের নিয়ম থেকে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\ &\quad +3a^2c+3ac^2+6abc\end{aligned}$$

ঘনবস্তুর মাধ্যমে প্রমাণ

এবার আমরা একটি প্রজেক্টের মাধ্যমে প্রয়োজনীয় ঘনবস্তু তৈরি করে ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র প্রমাণ করব।

দলগত কাজ

আগের মতো চারটি দল গঠন করতে হবে। দল-0, দল-1, দল-2, দল-3 । প্রত্যেক দল প্রয়োজনীয় ঘনবস্তু তৈরি করবে এবং এই ঘনবস্তুগুলোর মাধ্যমে একটি ঘনক তৈরি করবে।

প্রজেক্টের নাম

ত্রিপদী রাশির ঘন এর মাধ্যমে ঘনবস্তু তৈরি

প্রয়োজনীয় উপাদান: একটি উপযুক্ত কাঠি (যে দৈর্ঘ্যের ঘনক তৈরি হবে), পেন্সিল, কাদামাটি অথবা শক্ত কাগজ অথবা কাঠের টুকরা অথবা কর্কশীট অথবা দলগত মুক্ত চিন্তায় উপযুক্ত কোনো উপাদান, ইত্যাদি (তোমাদের কাজের প্রয়োজনে যা লাগবে)।

কার্যপ্রণালি

শ্রেণিশিক্ষক সুবিধামতো মাপের একটি কাঠি ক্লাসে নিয়ে আসবেন। প্রত্যেক দল এই কাঠিটির সমান মাপের একটি করে কাঠি নাও এবং কাঠিটিতে পেন্সিল দিয়ে দুইটি দাগ দাও এবং দাগের মধ্যে a, b এবং c দ্বারা চিহ্নিত করো (পার্শ্বের চিত্রের মতো, প্রত্যেক দলের কাঠিতে দাগ ভিন্ন ভিন্ন জায়গায় হবে)। কাঠিটির দাগ বরাবর কেটে তিন টুকরা করো। এবার সংগৃহীত কাদামাটি, শক্ত কাগজ অথবা কাঠের টুকরা অথবা কর্কশীট অথবা দলগত মুক্ত চিন্তায় উপযুক্ত কোনো উপাদান দিয়ে a, b এবং c এর সমান করে ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্রের ডানদিকের প্রতিটি পদের জন্য একটি করে ঘনবস্তু বানাও। যেমন –

a^3 পদের জন্য $a \times a \times a$ আকারের 1টি ঘনবস্তু বানাতে হবে,

$3a^2b$ পদের জন্য $a \times a \times b$ আকারের 3টি ঘনবস্তু বানাতে হবে,

$6abc$ পদের জন্য $a \times b \times c$ আকারের 6টি ঘনবস্তু বানাতে হবে, ইত্যাদি।

এবার বলো তো মোট কটি ঘনবস্তু বানাতে হবে? হিসাব করে দেখো মোট 27টি ঘনবস্তু বানাতে হবে। কাজটি দলের সবাই ভাগ করে নাও। এবার তোমার দলের 27টি ঘনবস্তু একত্র করে এমনভাবে একত্রে সাজাও যেন একটি ঘনক তৈরি হয়। দেখে অবাক হবে তৈরিকৃত ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য শ্রেণিশিক্ষকের দেওয়া কাঠিটির দৈর্ঘ্যের সমান হবে। যদি না হয়, তাহলে বুঝতে হবে কোথাও ত্রুটি হয়েছে। এমতাবস্থায় তৈরিকৃত ঘনকটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে ত্রুটি বের করে সংশোধন করতে হবে।

প্রজেক্টের ফলাফল সংরক্ষণ

- তৈরিকৃত ঘনকের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন চলকের মাধ্যমে লেখো।
- 27টি ঘনবস্তুর প্রত্যেকটির আকার থেকে আয়তন বের করো এবং আয়তনের যোগফল চলকের মাধ্যমে লেখো।
- যেহেতু তৈরিকৃত ঘনকের আয়তন, 27টি ঘনবস্তুর আয়তনের যোগফলের সমান, সুতরাং এই সম্পর্ক থেকে সূত্রটি পাওয়া যাবে।

একক কাজ

ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র থেকে বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে নিচের সূত্রগুলো বের করো।

a) $(a+b-c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 6abc$

b) $(a-b+c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c - 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 - 6abc$

c) $(a-b-c)^3 = \mathrm{a}^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$

d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$

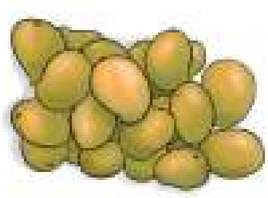
উৎপাদক (Factor)

'উৎপাদক' শব্দটির সঙ্গে তোমরা আগে থেকেই পরিচিত। তোমরা জানো, কোনো একটি সংখ্যার উৎপাদক আরেকটি সংখ্যা যাকে দিয়ে আগের সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায়। যেমন, 5, 10 এর একটি উৎপাদক, কারণ, 10 কে 5 দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার 2 ও 10 এর একটি উৎপাদক, কারণ, 10 কে 2 দিয়ে ভাগ করা যায়। এভাবে একটি সংখ্যার একাধিক উৎপাদক আছে। তোমরা জানো, 1 যে কোনো সংখ্যার একটি উৎপাদক। কারণ, যে কোনো সংখ্যাকে 1 দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার যে কোনো সংখ্যা নিজেই তার একটি উৎপাদক। সুতরাং প্রত্যেকটি সংখ্যার কমপক্ষে 2টি উৎপাদক আছে। যেসকল সংখ্যার শুধু 2টি ভিন্ন উৎপাদক আছে সে সকল সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা। এবার আমরা সংখ্যারাশির ধারণা থেকে বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকের ধারণা পেতে পারি। কোনো একটি বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদক আরেকটি বীজগাণিতিক রাশি যাকে দিয়ে আগের রাশিকে ভাগ করা যায়। যেমন, $x - 1$, বীজগাণিতিক রাশি $x^2 - 1$ এর একটি উৎপাদক, কারণ, $x^2 - 1$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার $x^2 - 1$ এর একটি উৎপাদক $x + 1$, কারণ, $x^2 - 1$ কে $x + 1$ দিয়ে ভাগ করা যায়। যেহেতু যে কোনো বীজগাণিতিক রাশিকে 1 দিয়ে ভাগ করা যায়, সুতরাং 1 যে কোনো বীজগাণিতিক রাশির একটি উৎপাদক। আবার যে কোনো বীজগাণিতিক রাশি নিজেই তার একটি উৎপাদক। সুতরাং প্রত্যেকটি বীজগাণিতিক রাশির কমপক্ষে 2টি উৎপাদক আছে। এই অভিজ্ঞতায় আমরা দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদক এবং এর ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করব।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদক (Factor of Cubic of a Binomial Expression)

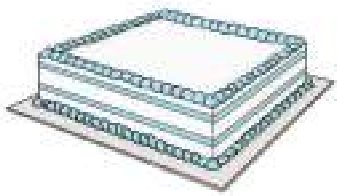
সংখ্যার উৎপাদক (আমের ভাগ)

আফসানা তাদের গাছের 20টি আম তার আত্মীয়দের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দিতে চায়। আফছানা আমগুলো কয়জন আত্মীয়কে সমানভাবে ভাগ করে দিতে পারবে? তুমি হয়তো বলবে 2 জনকে, কারণ, 10টা করে আম দিলে সমান 2 ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ 10দিয়ে 20কে ভাগ করা যায়। এখানে 10, 20 এর একটি উৎপাদক। এরকম যে সকল সংখ্যা দ্বারা 20কে ভাগ করা যায় ওই সকল সংখ্যাই 20 এর উৎপাদক। তুমি চাইলেও 6টা করে আম দিয়ে সমান ভাগে ভাগ করতে পারবে না। কারণ, 6, 20 এর উৎপাদক নয়। এবার বলো তো, কোন সংখ্যাগুলো 20 এর উৎপাদক? চিন্তা করে 20 এর সকল উৎপাদক নিচে লিখে রাখো।

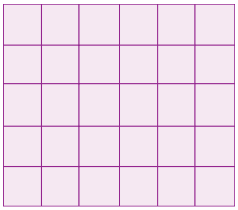


এই ধারণাকে বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে লিখলে আমরা লিখতে পারি, y দ্বারা x কে ভাগ করা যাবে যদি y, x এর একটি উৎপাদক হয়।

বর্গের উৎপাদক (কেক কাটি)



ধরো, তুমি একটি আয়তাকার কেককে সমান ভাগে ভাগ করতে চাও। কেকটির আকার $12'' \times 10''$। পূর্ণ ইঞ্চিতে কোন কোন আকারে এই কেকটিকে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে? একটু ভেবে দেখো তো। আমি একটু সাহায্য করেছি। 2×2 আকারে সমানভাবে ভাগ করা যাবে এবং সমান 30 ভাগ হবে। বিশ্বাস না হলে, 12×10 আকারের একটি কাগজ নাও। এবার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ উভয় দিকে $2''$ (দুই ইঞ্চি) পরপর একটি করে দাগ দাও। দেখো তো কাগজটি সমান কয় ভাগে ভাগ হয়েছে। অবশ্যই সমান 30 ভাগে ভাগ হয়েছে। যেহেতু 2×2 আকারে ভাগ করা যায়, সুতরাং 2×2 হবে 12×10 এর একটি উৎপাদক।

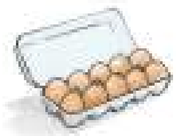


এবার একটু চিন্তা করে 12×10 আকারের কেকটিকে পূর্ণ ইঞ্চিতে যত আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে, সবকটি আকার এবং ঐ আকারের মোট ভাগ সংখ্যা নিচে লিখে রাখো (প্রয়োজনে কাগজে দাগ কেটে নিশ্চিত হও)।

লক্ষ করে দেখো যে, তোমার লেখা আকারের মধ্যে 3×3 আকারের কোনো কেক নাই। সুতরাং 3×3, 12×10 এর উৎপাদক নয়।

12×10 এর উৎপাদকের আকারের সঙ্গে 12×10 আকারের কোনো সম্পর্ক খুঁজে পাও কি? পেলে এখানে লিখে রাখো।

ঘন এর উৎপাদক (ডিমের খাঁচা সাজিয়ে রাখি)



জামাল চাচার একটি দোকান আছে। সেখানে তিনি ডিম বিক্রি করেন। তাঁর $3' \times 3' \times 3'$ ($3'$ = তিন ফুট) ঘনক আকৃতির একটি ডিমের খাঁচা আছে যেখানে তিনি ডিমের বক্সগুলো সাজিয়ে রাখেন। যদি ডিমের বক্সগুলোর প্রতিটির আকার $1' \times 1' \times 6''$ হয়, তবে জামাল চাচা তাঁর খাঁচাটি পূর্ণ করে বক্সগুলো রাখতে পারবেন। কারণ, $1' \times 1' \times 6''$ আকারটি $3' \times 3' \times 3'$ এর একটি উৎপাদক। এখানে লক্ষ করো, $1'$, $3'$ এর একটি উৎপাদক এবং $6''$, $(3 \times 12)'' = 36''$ এর একটি উৎপাদক। এবার বলো তো, জামাল চাচা তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো $1' \times 1' \times 6''$ আকারের বক্স রাখতে পারবেন?

একক কাজ

১. জামাল চাচার ডিমের বক্সগুলোর আকার $1' \times 1' \times 4''$ হলে সে তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো বক্স রাখতে পারবেন?

২. জামাল চাচার ডিমের বক্সগুলোর আকার $1' \times 1' \times 5''$ হলে তিনি কি তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে পারবেন?

ক) যদি খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে পারে, তবে খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো বক্স রাখতে পারবেন?

খ) যদি খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে না পারে, তবে কারণ কী? খাঁচাটির কত অংশ খালি থাকবে?

বীজগাণিতিক রাশির ঘন এর উৎপাদক

এবার সংখ্যা রাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে আমরা বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে উৎপাদকের সম্পর্ক উপস্থাপন করব। ধরো, একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য x একক। তাহলে, ঘনকটির আয়তনের আকার হবে $x \times x \times x$ এবং আয়তন x^3। এখন যদি p, q এবং r প্রত্যেকেই x এর একটি উৎপাদক হয়, তবে ঘনকটিকে $p \times q \times r$ আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ pqr হবে x^3 এর একটি উৎপাদক এবং ঘনকটিকে মোট $\frac{x^3}{pqr}$ টি

সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। এবার বলো তো, x এর মান 5 হলে, ঘনকটিকে কোন কোন আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে এবং প্রত্যেক আকারে কতটি সমান ভাগ হবে? আকার এবং ভাগ সংখ্যা এই বক্সে লিখে রাখো।

এখন ধরি, একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে x, y এবং z। তাহলে ঘনবস্তুটির আকার $x \times y \times z$। যদি p, q এবং r যথাক্রমে x, y এবং z এর একটি উৎপাদক হয়, তবে ঘন বস্তুটিকে $p \times q \times r$ আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ pqr হবে xyz এর একটি উৎপাদক এবং ঘনবস্তুটিকে মোট $\frac{xyz}{pqr}$ টি সমান ভাগে ভাগ করা যাবে।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

কোনো একটি বীজগাণিতিক রাশিকে 1 এবং ঐ রাশি ছাড়া অন্য কোনো রাশি দ্বারা ভাগ করা না গেলে ঐ বীজগাণিতিক রাশিকে **মৌলিক রাশি** বলে। প্রত্যেকটি বীজগাণিতিক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফল হিসেবে লেখা যায়। কোনো বীজগাণিতিক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফল হিসেবে প্রকাশ করাকে **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** বলে এবং ঐ মৌলিক রাশিগুলোকে ঐ রাশির **মৌলিক উৎপাদক** বলে। একটি দ্বিপদী রাশির ঘনকে আমরা সহজেই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি। যেমন, $x + y$ এর ঘনকে আমরা লিখতে পারি-

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)\,(x + y)$$

এটি $(x + y)^3$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ। আবার বীজগাণিতিক নিয়ম থেকে $x^3 + y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে আমরা পাই,

$$x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$$

ঘন রাশির গসাগু এবং লসাগু

তোমরা দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গসাগু) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (লসাগু) সম্বন্ধে জেনেছ। দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির সকল (একাধিকবারসহ) সাধারণ মৌলিক উৎপাদকের গুণফলই ঐ দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশিসমূহের **গসাগু**। অন্যদিকে কতগুলো বীজগাণিতিক রাশির সকল (একাধিকবার সহ) সাধারণ মৌলিক উৎপাদক, দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির সাধারণ মৌলিক উৎপাদক (সকল বীজগাণিতিক রাশি ব্যতিত, যদি থাকে) এবং অন্যান্য মৌলিক উৎপাদকসমূহের গুণফলই বীজগাণিতিক রাশি সমূহের লসাগু। একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি পরিষ্কার করা যাক।

উদাহরণ : x^3, x^2y, x^2y^2 এর গসাগু এবং লসাগু বের করো।

সমাধান : এখানে,

প্রথম রাশি, x^3 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, x

দ্বিতীয় রাশি, x^2y এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, y

তৃতীয় রাশি, x^2y^2 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, y, y

অর্থাৎ, তিনটি বীজগাণিতিক রাশির সকল সাধারণ মৌলিক উৎপাদক : x, x (দুইবার)। সুতরাং

$$\text{গসাগু} = x \times x = x^2$$

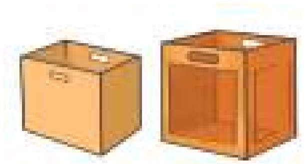
আবার, তিনটি বীজগাণিতিক রাশির সকল সাধারণ মৌলিক উৎপাদক : x, x (দুইবার)।

দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির সাধারণ মৌলিক উৎপাদক y

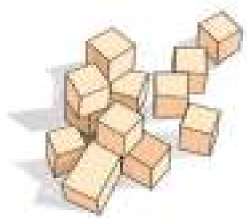
বাকি প্রথম রাশির মৌলিক উৎপাদক x এবং তৃতীয় রাশির মৌলিক উৎপাদক y। সুতরাং

$$\text{লসাগু} = x \times x \times y \times x \times y = x^3y^2$$

ঘন রাশির গসাগু



রাফিদ এবং রাহিমা দুই ভাই-বোন। তাদের 30 সেন্টিমিটার এবং 40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স আছে । তারা একই মাপের ঘনক আকৃতির মগের বক্স দ্বারা দুটি বক্সই সম্পূর্ণরূপে পূরণ করতে চায়।



- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা 30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স পূরণ করতে পারবে?
- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা 40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স পূরণ করতে পারবে?
- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা দুটি কাঠের বক্সই পূরণ করতে পারবে?

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

তোমার উত্তরগুলো দ্বারা নিচের ছক ৩.৪ পূরণ করো।

ছক ৩.৪								
ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স	ঘনক আকৃতির মগের বক্স (সেন্টিমিটারে দৈর্ঘ্য)							
30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের	1		3		6		15	
40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের								
উভয় দৈর্ঘ্যের								

উভয় কাঠের বক্স সর্বোচ্চ কোন মাপের মগের বক্স দ্বারা পূর্ণ করতে পারবে সেটি বের করো। এটিই কাঠের বক্স দুটির দৈর্ঘ্য পরিমাপক সংখ্যাগুলোর গসাগু। মিলিয়ে দেখো সর্বোচ্চ 10 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির মগের বক্স দ্বারা উভয় কাঠের বক্স পূর্ণ করা যাবে। অর্থাৎ, 30^3 এবং 40^3 এর গসাগু হবে 10^3 ।

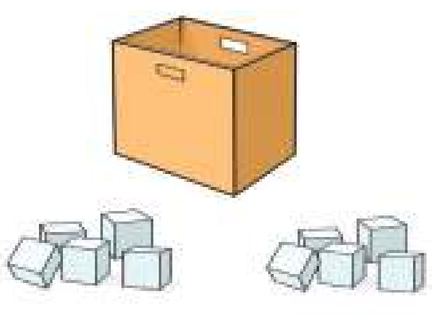
সংখ্যারাশির গসাগু পর্যবেক্ষণ করে আমরা বীজগাণিতিক প্রতীক এবং রাশির সম্পর্কের মাধ্যমে দুইটি রাশির ঘন এর গসাগু নির্ণয় করতে পারি। যদি x ও y এর গসাগু r হয়, তবে x^3 ও y^3 এর গসাগু হবে r^3।

একক কাজ

সর্বোচ্চ কোন আকৃতির ঘনক দ্বারা 10 একক এবং 6 একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির বক্স পূর্ণ করা যাবে।

ঘন রাশির লসাগু

রাফিদ 6 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ এবং রাহিমা 8 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনবে। তারা তাদের মগগুলো রাখার জন্য ঘনক আকৃতির একটি কাঠের বক্সও কিনতে চায়। সর্বনিম্ন কোন আকৃতির কাঠের বক্স কিনলে তারা তাদের মগগুলো কাঠের বক্সে সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করে রাখতে পারবে?



এক্ষেত্রে রাফিদকে কয়টি ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনতে হবে?

রহিমাকে কয়টি ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনতে হবে?

এসো ছক ৩.৫ পূরণ করি।

ছক ৩.৫								
ঘনক আকৃতির মগের বক্স	প্রয়োজনীয় ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স (সেন্টিমিটারে দৈর্ঘ্য)							
6 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের	6		18		30			
8 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের		16		32				
উভয় দৈর্ঘ্যের								

উভয় মাপের মগের বক্স সর্বনিম্ন কোন মাপের কাঠের বক্স দ্বারা সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করতে পারবে সেটি বের করো। এটিই মগের বক্স দুটির লসাগু। মিলিয়ে দেখ, উভয় আকৃতির মগের বক্স দ্বারা সর্বনিম্ন 24 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্সকে সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করা যাবে।

বীজগাণিতিক রাশির ঘন এর গসাগু নির্ণয়ের মতো আমরা বীজগাণিতিক প্রতীক এবং রাশির সম্পর্কের মাধ্যমে দুইটি রাশির ঘন এর লসাগু নির্ণয় করতে পারি। যদি x ও y এর গসাগু r হয়, তবে x^3 ও y^3 এর গসাগু হবে r^3।

একক কাজ

তোমরা বলো তো, 10 এবং 6 এর লসাগু কত হবে? তোমরা যে সংখ্যাটি বলবে সেটি সঠিক হলে সেই সংখ্যার ঘন, 10 এর ঘন এবং 6 এর ঘন এর লসাগু হবে।

অনুশীলনী

১. নিচের কোনটি দ্বিপদী রাশি নয়? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $xy + 3x$ খ) xy গ) $x + y - 1$

ঘ) $x^2 - 2x + 1$ ঙ) y^2

২. নিচের দ্বিপদী রাশিগুলো থেকে এক চলক ও দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

ক) $x + 1$ খ) $3x + 5$ গ) $x - 3$

ঘ) $5x - 2$ ঙ) $2x + 3y$ চ) $x^2 + 1$

ছ) $x^2 - y$ জ) $x^2 + y^2$

৩. নিচের বীজগাণিতিক রাশি থেকে এক চলক, দুই চলক ও তিন চলকবিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

ক) $x + y + 3$ খ) $x^2 + 3x + 5$ গ) $xy + z - 3$ ঘ) $5x + y^2 - 2$

ঙ) $2x + 3y - z$ চ) $y^2 - y + 1$ ছ) $x^2 - yz + 2$ জ) $x^2 + y^2 - y$

৪. নিচের ত্রিপদী রাশির ঘন নির্ণয় করো।

ক) $x + y + 3$ খ) $2x + 3y - z$ গ) $x^2 + 3x + 5$ ঘ) $xy + z - 3$

৫. বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো:

ক) $x^3 + 1$ খ) $x^3 - 1$ গ) $x^6 - 729$ ঘ) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

৬. একটি চকোলেট তৈরির ফ্যাক্টরিতে 2 ফুট এবং 3 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির কন্টেইনারে পূর্ণকরে চকোলেটের কাঁচামাল রাখা আছে।

ক) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের কাঁচামালকে একত্র করে $1'' \times 1'' \times 2''$ আকারের কতগুলো চকোলেট তৈরি করা যাবে?

খ) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের কাঁচামালকে একত্র করে $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের কতগুলো চকোলেট বার তৈরি করা যাবে?

গ) $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের 1440টি চকোলেট বার তৈরি হলে কী পরিমাণ কাঁচামাল নষ্ট হয়েছে।

৭. লতার বাবার একটি মাছ চাষের খামার আছে। খামারে একটি পুকুর আছে যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পানির গভীরতা যথাক্রমে 50 মিটার, 40 মিটার এবং 5 মিটার। আয়তন ঠিক রেখে পানির গভীরতা 3 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য কী পরিমাণ বাড়বে?