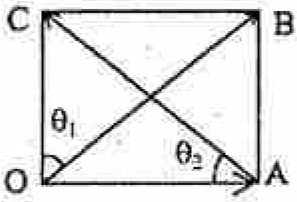
অধ্যায়-২: ভেক্টর

প্রশ্ন ▶ ১



উপরের চিত্র অনুসারে OABC একটি আয়তক্ষেত্র। এর OA এবং OB বাহু দ্বারা দুটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ নির্দেশিত হয়েছে। *[ঢা. বো. ২০১৭]*

ক. তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? ১

খ. পরবশ কম্পন ও অনুনাদের মধ্যে দুইটি পার্থক্য লিখ। ২

গ. উদ্দীপক অনুসারে ΔOAB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে θ_1 ও θ_2 এর মধ্যে কোনটি বড় তা গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বের কর। ৪

১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক সময়ের খুব অল্প ব্যবধানে সময়ের সাথে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বলে।

খ পরবশ কম্পন এবং অনুনাদের মধ্যে পার্থক্য—

পরবশ কম্পন	অনুনাদ
(১) নিজস্ব কম্পাঙ্ক এবং আরোপিত পর্যাবৃত্ত কম্পনের কম্পাঙ্ক সাধারণত সমান হয় না।	(১) নিজস্ব কম্পাঙ্ক এবং আরোপিত পর্যাবৃত্ত কম্পনের কম্পাঙ্ক সমান হয়।
(২) কম্পন বিস্তার কম হয় এবং পর্যায়ক্রমে হ্রাস বৃদ্ধি ঘটে।	(২) সর্বোচ্চ বিস্তার সহকারে কাঁপতে থাকে।

গ দেওয়া আছে,

OA বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

OB বাহু দ্বারা নির্দেশিত ভেক্টর, $\vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4-3) - \hat{j}(2+2) + \hat{k}(-3+4)$

$= -7\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{66}$

$\therefore \Delta AOB$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{P} \times \vec{Q}|$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{66}$ বর্গ একক

$= 4.062$ বর্গ একক **(Ans.)**

ঘ 'গ' অংশ হতে পাই,

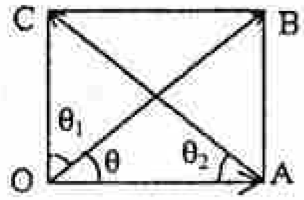
$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{66}$

বা, $PQ \sin\theta = \sqrt{66}$

বা, $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} \times \sin\theta = \sqrt{66}$

$\therefore \theta = 53.55°$

$\therefore$ OA এবং OB এর অন্তর্গত কোণ, $\theta = 53.55°$



$\because$ OABC একটি আয়তক্ষেত্র,

$\therefore \angle AOC = 90°$

$\therefore \theta_1 = 90° - \theta$

$= 90° - 53.55°$

$= 36.45°$

আবার,

ΔAOC এবং ΔOAB সর্বসম।

অতএব, $\angle AOB = \angle OAC$

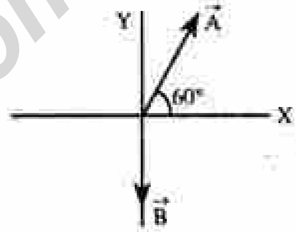
$\therefore \theta_2 = \theta$

$\therefore \theta_2 = 53.55°$

অতএব, $\theta_2 > \theta_1$

অর্থাৎ, θ_2, θ_1 অপেক্ষা বড়।

প্রশ্ন ▶ ২



চিত্রে, $|\vec{A}| = 5$ এবং $|\vec{B}| = 6$

[ঢা. বো. ২০১৬]

ক. স্পর্শ কোণ কাকে বলে? ১

খ. ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে বৈদ্যুতিক পাখার সকল বিন্দুর কৌণিক বেগ সমান কেন? ২

গ. চিত্রে $(\vec{A} - \vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত— গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে এর সত্যতা যাচাই কর। ৪

২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু থেকে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন পদার্থের সাথে তরলের অভ্যন্তরে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে কঠিন ও তরলের স্পর্শ কোণ বলে।

খ পাখার প্রতিটি কণা ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে সমান সময়ে সমান কোণ উৎপন্ন করে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে। তাই প্রতিটি কণার কৌণিক বেগ একই থাকে।

গ এখানে, $|\vec{A}| = A = 5$

$|\vec{B}| = B = 6$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90° + 60° = 150°$

$|\vec{C}| = C = ?$

$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ হলে

$|\vec{C}| = C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \alpha)}$

$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \times 5 \times 6 \cos(180° - 150°)}$

$= \sqrt{25 + 36 + 60\cos 30°}$

$= 10.63$

ঘ X-অক্ষ বরাবর— $\vec{A}$ এর উপাংশ, $A_X = |\vec{A}|\cos 60°$

$= 5 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{5}{2}$

$\vec{B}$ এর উপাংশ, $B_X = |\vec{B}|\cos(-90°)$

$= 0$

Y-অক্ষ বরাবর— $\vec{A}$ এর উপাংশ, $A_Y = |\vec{A}|\sin 60°$

$= 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\vec{B}$ এর উপাংশ, $B_Y = |\vec{B}|\sin(-90°)$

$= -6$

$\therefore \vec{A} = \frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

$\vec{B} = -6\hat{j}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \left(\frac{5}{2}\hat{i} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right) - 6\hat{j}$

$= \frac{5}{2}\hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 6\right)\hat{j}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{5}{2} & \frac{5\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$= -15\hat{k}$

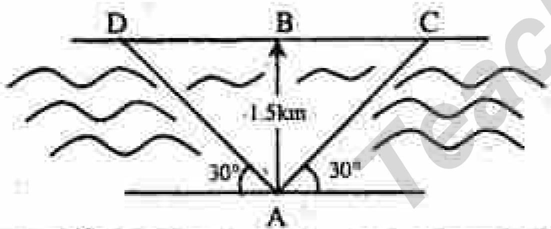
$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) . (\vec{A} + \vec{B})$

$= -15\hat{k} . \left[\frac{5}{2}\hat{i} + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - 6\right)\hat{j}\right]$

$= 0$

অতএব, $(\vec{A} \times \vec{B})$ ভেক্টরটি $(\vec{A} + \vec{B})$ এ উপর লম্ব।

প্রশ্ন ▶ ৩



চিত্রে প্রবাহমান নদীটির প্রশস্ততা 1.5 km এবং স্রোতের বেগ 4 kmh^{-1}। রহমত মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌঁছালেন। নৌকার বেগ 3 kmh^{-1}। /দি. বো. ২০১৫/

ক. স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ কাকে বলে? ১

খ. ভর ও জড়তার ভ্রামকের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর। ২

গ. AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। ৩

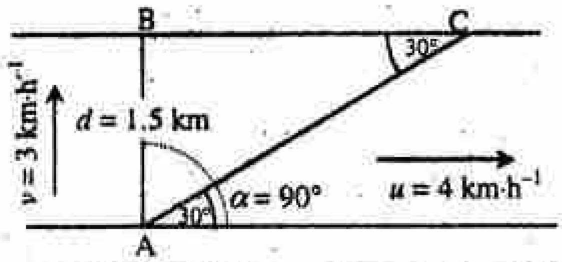
ঘ. AD বরাবর নৌকা চালিয়ে রহমত মাঝি কি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবেন? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক তোমার মতামত দাও। ৪

৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সমস্ত সংঘর্ষের ক্ষেত্রে গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে তাকে স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ বলে।

খ ভর হচ্ছে বস্তুর জড়তার পরিমাপ। বস্তু যে ধর্মের কারণে কোনো নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে তার কৌণিক গতির পরিবর্তনে বাধা দেয় তাকে তার ঘূর্ণন জড়তা বা জড়তার ভ্রামক বলে। অর্থাৎ রৈখিক গতির ক্ষেত্রে ভর যে ভূমিকা পালন করে কৌণিক গতির ক্ষেত্রে ঘূর্ণন জড়তা বা জড়তার ভ্রামক সে ভূমিকা পালন করে। কোনো বস্তুর ভর সকল ক্ষেত্রে ধ্রুব অপর পক্ষে নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বস্তুর ঘূর্ণন জড়তা নির্দিষ্ট কিন্তু ভিন্ন ভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে ভিন্ন ভিন্ন।

গ



মাঝি AB বরাবর নৌকা চালনা করে AC বরাবর ওপারে পৌঁছাল।

স্রোত ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

প্রদত্ত চিত্রানুসারে,

ΔABC এ, $\angle ACB = \theta = 30°$

$\therefore \sin\theta = \frac{AB}{AC}$

বা, $AC = \frac{AB}{\sin\theta} = \frac{1.5 \text{ km}}{\sin 30°} = \frac{1.5 \text{ km}}{0.5}) = 3 \text{ km}$

AC বরাবর নৌকার অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 km **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি,

স্রোতের বেগ, $u = 4 \text{ km·h}^{-1}$

নৌকার বেগ, $v = 3 \text{ km·h}^{-1}$

নৌকার পার হতে প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{AB}{v} = \frac{1.5 \text{ km}}{3 \text{ km·h}^{-1}} = 0.5 \text{ h}$

এ সময় নৌকা স্রোতের দিকে BC দূরত্ব অতিক্রম করবে, সুতরাং

$\therefore BC = u \times t = 4 \text{ km·h}^{-1} \times 0.5 \text{ h} = 2 \text{ km}$

সুতরাং $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (1.5 \text{ km})^2 + (2 \text{ km})^2 = 6.25 \text{ km}^2$

$\therefore AC = 2.5 \text{ km}$

(দুই পদ্ধতিতে AC এর দুটি ভিন্ন মান পাওয়া যায়। সুতরাং প্রদত্ত তথ্য ত্রুটি পূর্ণ)

ঘ AD বরাবর নৌকা চালালে চিত্রানুসারে স্রোতের বেগ u ও নৌকার বেগ v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180° - 30° = 150°$। সুতরাং স্রোতের বেগ ও লব্ধি বেগের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} = \frac{3\sin 150°}{4 + 3\cos 150°}$$

$$= \frac{3 \times 0.5}{4 + 3 \times (-0.866025)} = \frac{1.5}{4 - 2.598} = 1.07$$

$\therefore \theta = 46.91°$

এখানে, $\theta < 90°$। সুতরাং নৌকা AB বরাবর নদী পার হতে পারবে না।

বিকল্প উত্তর: চিত্রানুসারে স্রোতের বেগ u ও নৌকার বেগ v এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180° - 30° = 150°$। সুতরাং স্রোতের বেগ ও লব্ধি বেগের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

এখন, $\theta = 90°$ হতে হলে $u + v\cos\alpha = 0$ হবে। কিন্তু

$u + v\cos\alpha = 4 + 3\cos 150° = 4 + 3 \times -0.866025$

$= 4 - 2.598 = 1.402 \neq 0$

সুতরাং নৌকা AB বরাবর নদী পার হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶ ৪ কোনো এক বৃষ্টির দিনে নাফিসা জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উলম্বভাবে 6 km·h^{-1} বেগে পতিত হচ্ছে। নাফিসা লক্ষ্য করল, রাস্তায় একজন লোক 4 km·h^{-1} বেগে হাঁটছে এবং অপরজন 8 km·h^{-1} বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। তাদের উভয়ের ছাতা ভিন্ন ভিন্ন কোণে বাঁকাভাবে ধরা। /সি. বো. ২০১৭/

ক. একক ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. কোনো রাশির পরিমাপ প্রকাশ করতে এককের প্রয়োজন হয় কেন? ২

গ. উদ্দীপকে হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত? ৩

ঘ. হেঁটে চলন্ত লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়— নাফিসার পর্যবেক্ষণটি গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের উত্তর

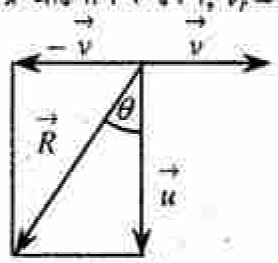
ক যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এরূপ ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ভেক্টরটির দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

খ প্রত্যেকটি রাশি পরিমাপের জন্য তারই একটি সুবিধাজনক অংশকে আদর্শ ধরে নেওয়া হয় এবং এরই সাথে তুলনা করে সে জতীয় রাশির পরিমাপ করা হয়। এই আদর্শ অংশকে ঐ রাশি একক বলা হয়। সুতরাং, কোনো রাশির পরিমাপ প্রকাশ করতে এককের প্রয়োজন হয়

গ মনে করি, বৃষ্টির বেগ, $u = 6\ km{\cdot}h^{-1}$

এবং লোকটির বেগ, $v = 4\ km{\cdot}h^{-1}$

লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ, $v_r = ?$



ধরা যাক, বৃষ্টির ফোটার বেগ $\vec{u}$ সাইকেলের বেগ $\vec{v}$ (পাশের চিত্র)। সুতরাং সাইকেলের সাপেক্ষে বৃষ্টির ফোঁটার বেগ হলে

$$v_r = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos(\pi - \alpha)}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (4)^2 + 2(6)(4)\cos 90^\circ}$$
$$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 7.21\ km \cdot h^{-1}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{v\sin(\pi - \alpha)}{u + v\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{4\sin 90^\circ}{6 + 4\cos 90^\circ} = \dfrac{4}{6} = 0.666667$

$\theta = 33.69^\circ$

সুতরাং, লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের মান $7.21\ km{\cdot}h^{-1}$ এবং এই বেগ উল্লম্বের সাথে 33.69° কোণ তৈরি করে। **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক হতে পাই,

হেঁটে চলা লোকের বেগ, $v_1 = 4\ km{\cdot}h^{-1}$

সাইকেলে চলন্ত লোকের বেগ, $v_2 = 8\ km{\cdot}h^{-1}$

বৃষ্টির বেগ, $u = 6\ km{\cdot}h^{-1}$

মনেকরি, বৃষ্টি হতে বাঁচার জন্য হেঁটে চলন্ত লোককে উলম্বের সাথে θ_1 কোণে এবং সাইকেলে চলন্ত লোককে উলম্বের সাথে θ_2 কোণে ছাতা ধরতে হবে।

$$\tan\theta_1 = \frac{v_1\sin(\pi - \alpha)}{u + v_1\cos(\pi - \alpha)} = \frac{4\sin 90^\circ}{6 + 4\cos 90^\circ} = \frac{4}{6} = 0.666667$$

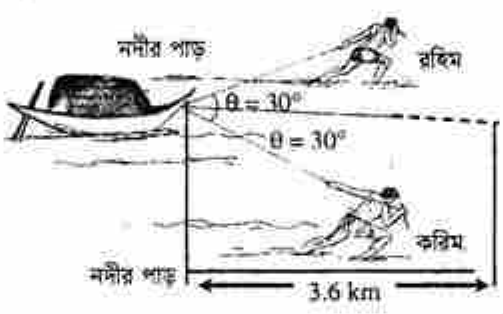
$\therefore \theta_1 = 33.69^\circ$

এবং, $\tan\theta_2 = \dfrac{v_2\sin(\pi - \alpha)}{u + v_2\cos(\pi - \alpha)} = \dfrac{8\sin 90^\circ}{6 + 8\cos 90^\circ} = \dfrac{8}{6} = 1.333333$

$\therefore \theta_2 = 53.13^\circ$

অতএব, হেঁটে চলা লোকটির এবং সাইকেলে চলন্ত লোকটির ছাতা একই রকমভাবে বাঁকানো নয়।

প্রশ্ন ▶৫ নিচের চিত্রে করিম ও রহিম দুজন মাঝি স্থির পানিতে 500 kg ভরের একটি স্থির নৌকাকে নদীর দু'তীর থেকে দড়ি দিয়ে 30° কোণে $\vec{F}$ বলে টানছে। নৌকাটি 5 মিনিটে তীরের সমান্তরালে 3.6 km পথ অতিক্রম করে। করিম রহিমকে বলে "সমান টানে এ দূরত্ব 5 মিনিটের কম সময়ে পৌঁছা সম্ভব।" [নৌকার তল ও পানির ঘর্ষণ বল উপেক্ষণীয়]।



[রা. বো. ২০১৬]

ক. ভেক্টর বিশ্লেষণ কী? ১

খ. নাল ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক নেই কেন? ২

গ. উদ্দীপকের $\vec{F}$ এর মান বের কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে করিমের বক্তব্য সঠিক কিনা — গাণিতিক বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। ৪

৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি ভেক্টরকে যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরে এমনভাবে বিভক্ত করা হয়, যাদের লব্ধি হবে মূল ভেক্টর, তবে এ বিভক্তকরণ প্রক্রিয়াকে ভেক্টরের বিশ্লেষণ বলে।

খ নাল ভেক্টর হলো শূন্য ভেক্টর। এর মান শূন্য বলে এর কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তাই এর দিক যেকোনো দিকেই বিবেচনা করা যেতে পারে।

গ ধরা যাক, করিম ও রহিমের প্রযুক্ত বল দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 2θ। সুতরাং বল দ্বয়ের লব্ধি

$$R = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \times F\cos 2\theta}$$
$$= F\sqrt{1 + 1 + 2\cos 2\theta}$$
$$= F\sqrt{2(1 + \cos 2\theta)}$$
$$= F\sqrt{2 \times 2\cos^2\theta}$$
$$= 2F\cos\theta$$

এখন প্রদত্ত তথ্যানুসারে $\theta = 30^\circ$। সুতরাং

$R = 2F\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,F$

নৌকার আদিবেগ, $u = 0\ m{\cdot}s^{-1}$

সময়কাল, $t = 5\ min = 300\ sec$

সরণ, $s = 3.6\ km = 3600\ m$

আমরা জানি,

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2$$

বা, $a = \dfrac{2s}{t^2} = \dfrac{2 \times 3600\ m}{(300\ s)^2} = 0.08\ m{\cdot}s^{-2}$

সুতরাং, $\sqrt{3}\,F = ma = 500\ kg \times 0.08\ m{\cdot}s^{-2} = 40\ N$

$\therefore\ F = \dfrac{40\ N}{\sqrt{3}} = 23.094\ N$ **(Ans.)**

ঘ "গ" অনুসারে,

লব্ধি টান, $R = 2F\cos\theta$

$s = 3.6\ km = 3600\ m$

$\therefore$ সময়, t হলে,

$t < 5\ min$

বা, $\sqrt{\dfrac{2s}{a}} < 5 \times 60s$

বা, $a > \dfrac{2s}{(300)^2}$

বা, $\dfrac{R}{m} > \dfrac{2 \times 3600}{90000}$

বা, $R > \dfrac{2 \times 3600 \times 500}{90000}$

বা, $2F\cos\theta > 40$

বা, $\cos\theta > \dfrac{20}{F}$

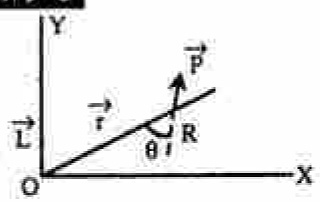
বা, $\cos\theta > \dfrac{20}{\frac{40}{\sqrt{3}}}$

বা, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \theta < 30^\circ$

অতএব, θ এর মান 30° এর চেয়ে কমিয়ে সময় 5 min এর চেয়ে কমানো সম্ভব। এ ক্ষেত্রে তাদের তীরের একটি নিকটে এসে টানতে হবে। অর্থাৎ করিমের বক্তব্য সঠিক।

প্রশ্ন ▶ ৬



R বিন্দুতে বস্তুর ভর m = 2kg
$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m
$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ ms^{-1}$
$\vec{P}$ = ভরবেগ।

/দি. বো. ২০১৬/

ক. মুক্তি বেগ কাকে বলে? ১
খ. বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়– ব্যাখ্যা কর। ২
গ. b = 2 হলে বস্তুর কৌণিক ভরবেগের মান নির্ণয় কর। ৩
ঘ. $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল ও লম্ব হলে b এর মানের কীরূপ পরিবর্তন হবে– বিশ্লেষণ কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক সর্বাপেক্ষা কম যে বেগে কোনো বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না সেই বেগকে মুক্তিবেগ বলে।

খ আমরা জানি, কেন্দ্রমুখী বল, $F = m\omega^2 r$। এখানে m বস্তুর ভর, ω কৌণিক বেগ এবং r বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ। একটি নির্দিষ্ট ভরের বস্তু একটি নির্দিষ্ট কৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করলে, $F \propto r$ অর্থাৎ বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনশীল বস্তুর কেন্দ্রমুখী বল ব্যাসার্ধের পরিবর্তনের সাথে পরিবর্তিত হয়।

গ দেয়া আছে, বস্তুর ভর, $m = 2$ kg
$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m
$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ m{\cdot}s^{-1}$
কৌণিক ভরবেগের মান, $L = ?$
$b = 2$ হলে
$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ m
$\vec{P} = m\vec{v} = 2\ kg \times (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ m{\cdot}s^{-1} = (4\hat{i} - 8\hat{j} + 4\hat{k})\ kg{\cdot}m{\cdot}s^{-1}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\ (-8 + 16) - \hat{j}\ (4 - 8) + \hat{k}\ (-8 + 8)$$
$$= (8\hat{i} + 4\hat{j})\ kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}$$

কৌণিক ভরবেগের মান = $|\vec{L}| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}\ kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}$ **(Ans.)**

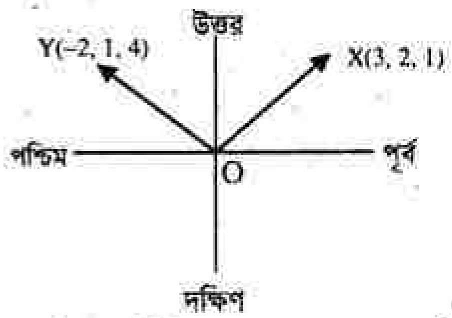
ঘ দেয়া আছে,
$\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k})$ m
$\vec{v} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})\ m{\cdot}s^{-1}$
$\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\vec{r} \times \vec{v} = 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & b \\ 2 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $(-4 + 4b)\hat{i} + (2b - 2)\hat{j} + (-4 + 4)\hat{k} = 0$
বা, $(-4 + 4b)\hat{i} + (2b - 2)\hat{j} = 0$
এখন, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,
$-4 + 4b = 0$ বা, $b = 1$
এবং $2b - 2 = 0$ বা, $b = 1$
$\therefore$ $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $b = 1$ হবে।
আবার, $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর লম্ব হলে,
$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$
বা, $(\hat{i} - 2\hat{j} + b\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$
বা, $2 + 8 + 2b = 0$
বা, $2b = -10$
$\therefore b = -5$

অতএব, $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ পরস্পর লম্ব হলে $b = -5$ হবে। সুতরাং $\vec{r}$ ও $\vec{v}$ এর লম্ব অবস্থায় b এর মান সমান্তরাল অবস্থায় b এর মানের চেয়ে $1 - (-5) = 6$ কম হবে।

প্রশ্ন ▶ ৭



উদ্দীপকে X ও Y বিন্দু দুইটি কলেজের অবস্থান নির্দেশ করে। O উভয় কলেজের যাত্রা অবস্থানের সাধারণ বিন্দু। /দি. বো. ২০১৫/

ক. তাৎক্ষণিক ত্বরণ কাকে বলে? ১
খ. উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায় কেন? ২
গ. $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর এবং $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর, একই হবে কি? প্রয়োজনীয় গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যুক্তি দাও। ৪

৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো গতিশীল বস্তুর কোনো বিশেষ মুহূর্তে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময় ব্যবধানে বেগের পরিবর্তনের হারকে ঐ বিশেষ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে।

খ উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল অভিকর্ষ বলের দিক নিচের দিকে। তাই অভিকর্ষজ ত্বরণের দিকও খাড়া নিচের দিকে। এ ত্বরণের কারণে উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিবেগ হ্রাস পায়।

গ এখানে, X বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 2, 1)
Y বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–2, 1, 4)
তাহলে,
$\overrightarrow{OX} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OY} = -2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$
বের করতে হবে, এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = ?$
আমরা জানি,
$\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$
বা, $|\overrightarrow{OX}|\ |\overrightarrow{OY}| \cos\theta = 3 \times (-2) + 2 \times 1 + 1 \times 4 = 0$
বা, $\cos\theta = 0$
$\therefore \theta = \cos^{-1}0 = 90°$
অতএব, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°। **(Ans.)**

ঘ $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}|}$

এখানে, $\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$
$= 7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}$
আবার, $|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}| = \sqrt{7^2 + (-14)^2 + 7^2} = 7\sqrt{6}$
$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}}{|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}|} = \dfrac{7\hat{i} - 14\hat{j} + 7\hat{k}}{7\sqrt{6}} = \dfrac{\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$

কিন্তু $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \dfrac{\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}}{|\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}|}$
সুস্পষ্টত: $\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX} = -(\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}) = -7\hat{i} + 14\hat{j} - 7\hat{k}$
এবং $|\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}| = 7\sqrt{6}$

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{OY}\times\overrightarrow{OX}}{|\overrightarrow{OY}\times\overrightarrow{OX}|} = \dfrac{-7\hat{i}+14\hat{j}-7\hat{k}}{7\sqrt{6}} = -\dfrac{\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}$

অর্থাৎ লম্ব একক ভেক্টরদ্বয় মানে সমান হলেও দিকে পরস্পর বিপরীত। $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর কাগজপৃষ্ঠ হতে লম্বভাবে খাড়া ওপর দিকে ক্রিয়া করে এবং $\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OX}$ এর তলের ওপর লম্ব একক ভেক্টর কাগজপৃষ্ঠ হতে লম্বভাবে খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

প্রশ্ন ▶৮ দুটি বিন্দুর ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় স্থানাঙ্কদ্বয় যথাক্রমে A(1, 0, – 1) এবং B(1, 1, 0)। [কু. বো. ২০১৭]

ক. ডান হাতি স্ক্রু নিয়মটি বিবৃত কর। ১

খ. একটি বিপ্রতীপ ভেক্টরকে সমরেখ ভেক্টর বলা যেতে পারে-ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. দুটি বিন্দুর A ও B এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের X অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপ এর তুলনামূলক বিশ্লেষণ করো। ৪

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফলের দিক হবে উভয় ভেক্টরের ওপর লম্বভাবে স্থাপিত একটি ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হবে সেই দিকে।

খ একই দিকে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের একটির মান অপরটির মানের বিপরীত হলে ভেক্টর দুটিকে পরস্পর বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। যেমন— $\vec{A} = A\hat{a}$ এবং $\vec{B} = \frac{1}{A}\hat{a}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপ্রতীপ ভেক্টর। যেহেতু বিপ্রতীপ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল তাই, বিপ্রতীপ ভেক্টরকে সমরেখ ভেক্টর বলা যেতে পারে।

গ দেওয়া আছে

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক, A (1, 0, – 1)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক, B (1, 1, 0)

অর্থাৎ, ভেক্টর $\overrightarrow{AB} = (1-1)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (0+1)\hat{k}$

$= \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর,

$$\hat{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\hat{i}+\hat{k}}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k} \text{ (Ans.)}$$

ঘ উদ্দীপক হতে,

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক, A (1, 0, – 1)

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক, B (1, 1, 0)

অর্থাৎ

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OA} = \hat{i} - \hat{k}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OB} = \hat{i} + \hat{j}$

∴ X- অক্ষের উপর $\overrightarrow{OA}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ,

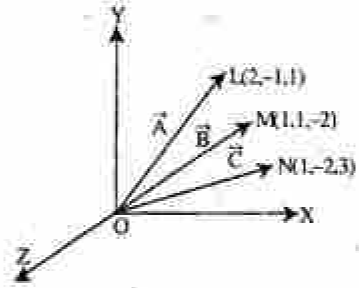
$$|\overrightarrow{OA}|\cos\theta_1 = \frac{(\overrightarrow{OA}).\hat{i}}{|\hat{i}|} = \frac{(\hat{i}-\hat{k}).\hat{i}}{1} = 1$$

এবং X- অক্ষের উপর $\overrightarrow{OB}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

$$|\overrightarrow{OB}|\cos\theta_2 = \frac{|\overrightarrow{OB}|.\hat{i}}{|\hat{i}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}).\hat{i}}{1} = 1$$

অতএব, A ও B এর অবস্থান ভেক্টরদ্বয়ের X অক্ষের উপর লম্ব অভিক্ষেপের মান সমান এবং তা 1।

প্রশ্ন ▶৯



[কু. বো. ২০১৬]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

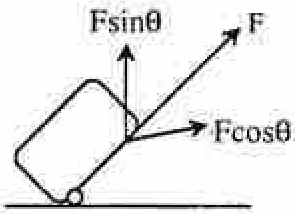
গ. C, X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণের মান কত? ৩

ঘ. B এবং C ভেক্টরদ্বয়ের লম্বদিকের ভেক্টরটি $\vec{A}$ এর সাথে একই সমতলে অবস্থান করে কি না গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল দ্বারা ট্রলি ব্যাগকে সামনের দিকে টেনে নিয়ে যাওয়ার সময় হাতলে প্রযুক্ত বল F দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি $F\sin\theta$ এবং অপরটি $F\cos\theta$। $F\sin\theta$ উপাংশটি উপরের দিকে কার্যরত হয়, এবং $F\cos\theta$ উপাংশটি ব্যাগকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। হাতল লম্বা হলে θ এর মান কম হয়। এ অবস্থায় $\cos\theta$ এর মান বেশি হয় এবং ট্রলির বেগ ধ্রুব রেখে টানতে কম বল লাগে। এ কারণে ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।



গ দেয়া আছে, N বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, -2, 3)

সুতরাং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

যেহেতু X অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\hat{i}$, সুতরাং $\hat{i}$ এর সাথে কোণই X অক্ষের সাথে কোণ

$\vec{C}$ ও X অক্ষের অন্তর্ভুক্ত কোণ, $\theta = ?$

$$\cos\theta = \frac{\vec{C}\cdot\hat{i}}{C} = \frac{(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})\cdot\hat{i}}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = 0.267$$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(0.267) = 74.5°$ (Ans.)

ঘ প্রদত্ত চিত্রের তথ্যানুসারে,

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{C} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

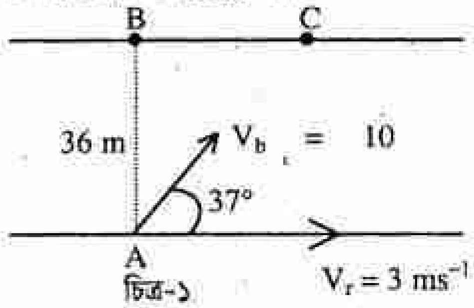
ধরা যাক, $\vec{D} = \vec{B}\times\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

$= (3-4)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-2-1)\hat{k}$

$= -\hat{i} - 5\hat{j} - 3\hat{k}$

এখন আমাদেরকে দেখতে হবে, $\vec{A}$ ও $\vec{D}$ একই সমতলে কি না। দুটি ভেক্টর যে অবস্থাতেই থাক না কেন তারা একই সমতলে। সুতরাং $\vec{A}$ ও $\vec{D}$ ভেক্টরদ্বয়ও একই সমতলে।

প্রশ্ন ▶ ১০ 36 m চওড়া একটি নদীতে 10 ms^{-1} বেগে একটি নৌকা চলছে (চিত্র-১)। নৌকাটি নদী পার হয়ে বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌছাল। নদীতে স্রোতের বেগ 3ms^{-1}।



চিত্র-১

/কু. বো. ২০১৬/

ক. কার্ল কি? ১

খ. কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয় — ব্যাখ্যা কর। ২

গ. নদীটির বিপরীত পাড়ের BC দুরত্ব বের কর। ৩

ঘ. নদীর বিপরীত পাড়ের B বিন্দুতে নৌকাটিকে পৌছাতে হলে, মাঝির কি ব্যবস্থা নিতে হবে? ৪

১০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{v}(x, y, z)$ অন্তরিকরণযোগ্য ভেক্টর ক্ষেত্র হলে $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ কে $\vec{v}$ এর কার্ল বলে।

খ আমরা জানি, বেগ একটি ভেক্টর রাশি। মান অথবা দিক অথবা উভয়ের পরিবর্তনে ভেক্টরের পরিবর্তন হয়। কোনো বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণন কালে বেগের মান পরিবর্তিত না হলেও প্রতি মুহূর্তে দিকের পরিবর্তন হয় এবং বেগের দিক হয় যেকোনো বিন্দুতে বৃত্তাকার পথের স্পর্শক বরাবর। সুতরাং বলা যায়, কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়।

গ নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ $= V_b \sin 37°$

$= 10\ m{\cdot}s^{-1} \times \sin 37° = 6.02\ m{\cdot}s^{-1}$

$\therefore$ নদী পার হতে সময়, $t = \dfrac{d}{6.02\ m{\cdot}s^{-1}} = \dfrac{36\ m}{6.02\ m{\cdot}s^{-1}} = 5.982$ sec

নদীর পাড় বরাবর বেগের উপাংশের যোগফল $= V_b \times \cos 37° + V_r$

$= 10\ m{\cdot}s^{-1} \times \cos 37° + 3\ m{\cdot}s^{-1} = 10.986\ m{\cdot}s^{-1}$

$\therefore$ দূরত্ব, $BC = 10.986\ m{\cdot}s^{-1} \times 5.982\ sec = 65.72\ m$ **(Ans.)**

ঘ নৌকাটিকে A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌছাতে হলে নৌকা ও স্রোতের বেগের লব্ধি এবং স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$ হতে হবে। নৌকা ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ α হলে আমরা পাই

$$\tan 90° = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$$

$$\text{বা, } \infty = \frac{v_b \sin\alpha}{v_r + v_b \cos\alpha}$$

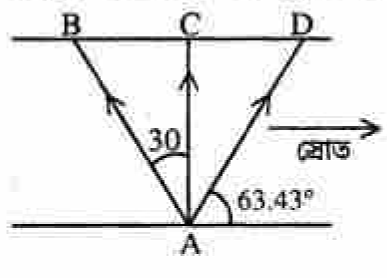
$$\text{বা, } v_r + v_b \cos\alpha = 0$$

$$\text{বা, } \cos\alpha = -\frac{v_r}{v_b} = -\frac{3\ m{\cdot}s^{-1}}{10\ m{\cdot}s^{-1}} = -0.3$$

$$\therefore \alpha = 107.45°$$

সুতরাং A থেকে সরাসরি B বিন্দুতে পৌছাতে হলে নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে 107.45° কোণে চালনা করতে হবে।

প্রশ্ন ▶ ১১



চিত্রানুযায়ী একটি নদী 31 km প্রশস্ত। দুটি ইঞ্জিন বোট আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য A হতে অভিন্ন বেগে যাত্রা শুরু করল যাদের একটি AB বরাবর অপরটি AC বরাবর। প্রথমটি আড়াআড়ি পার হয়ে C বিন্দুতে পৌছালেও দ্বিতীয়টি D বিন্দুতে পৌছায়। স্রোতের বেগ 9 $km{\cdot}h^{-1}$।

/চ. বো. ২০১৭/

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য কিনা– ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপক হতে নৌকার অভিন্ন বেগ হিসাব কর। ৩

ঘ. নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পারে পৌছায় কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

১১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দিয়ে নির্দেশ করা হয় তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য নয়। কারণ, প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর বেগের উল্লম্ব উপাংশ (v_y) শূন্য হলেও অনুভূমিক উপাংশ (v_x) শূন্য নয়। অতএব, প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগ, $v = v_x$

$\therefore$ প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি $= \dfrac{1}{2} m v_x^2$

অর্থাৎ, সর্বোচ্চ উচ্চতায় v_x শূন্য নয়। তাই প্রাসের গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দুতে গতিশক্তি শূন্য নয়।

গ দেওয়া আছে,

স্রোতের বেগ, $u = 9\ km{\cdot}h^{-1}$

১ম ইঞ্জিন বোট ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = (30 + 90)° = 120°$

লব্ধি বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90°$

ধরি, উভয় নৌকার বেগ $= v$

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$$

$$\text{বা, } \tan 90° = \frac{v \sin 120°}{u + v \cos 120°}$$

$$\text{বা, } u + v\cos 120° = 0$$

$$\text{বা, } v = \frac{-9}{\cos 120°}$$

$$\text{বা, } v = \frac{-9}{-0.5}$$

$\therefore v = 18\ km{\cdot}h^{-1}$ (Ans.)

ঘ দেওয়া আছে,

নদীর প্রস্থ, $d = 31$ km

স্রোতের বেগ, $u = 9\ km{\cdot}h^{-1}$

'গ' হতে পাই, নৌকার বেগ, $v = 18\ km{\cdot}h^{-1}$

স্রোতের বেগ ও ১ম নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

স্রোতের বেগ ও ২য় নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha' = ?$

দ্বিতীয় নৌকার ক্ষেত্রে,

$$\tan 63.43° = \frac{18 \sin\alpha'}{9 + 18\cos\alpha'}$$

$$\text{বা, } 2 = \frac{2\sin\alpha'}{1 + 2\cos\alpha'}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\alpha'}{1 + 2\cos\alpha'} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{2\sin\alpha'/2 \cos\alpha'/2}{2\cos^2\alpha'/2} = 1$$

$$\text{বা, } \tan\alpha'/2 = 1$$

$$\text{বা, } \alpha'/2 = 45°$$

$$\text{বা, } \alpha' = 90°$$

ধরি, ১ম নৌকার নদী পার হতে t ও ২য় নৌকার নদী পার হতে t' সময় লাগে।

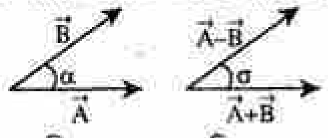
$$\therefore \quad t = \frac{d}{v \sin \alpha} = \frac{31}{18 \sin 120^\circ} = 1.988 \text{ h}$$

$$t' = \frac{d}{v \sin \alpha'} = \frac{31}{18 \sin 90^\circ} = 1.722 \text{ h}$$

গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায়, $t' < t$

অতএব, নৌকা দুটি একই সময়ে নদীর অপর পারে পৌছায় না। ২য় নৌকাটি আগে নদীর অপর পারে পৌছায়।

প্রশ্ন ▶ ১২



চিত্র-১ চিত্র-২

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

[চি. বো. ২০১৬]

ক. লব্ধ একক কী? ১

খ. দুটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. α-এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. α-এর মানের পরিবর্তন কত হলে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ এক-চতুর্থাংশ হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। ৪

১২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে সকল একক মৌলিক একক সমন্বয়ে গঠিত হয় তাদেরকে লব্ধ একক বা যৌগিক একক বলে।

খ দুইটি অসমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না। কারণ দুটি ভেক্টর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি সর্বনিম্ন হয় এবং এক্ষেত্রে লব্ধির মান হয় ভেক্টরদ্বয়ের মানের বিয়োগফলের সমান। তাই অসমান সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের লব্ধি কখনোই শূন্য হতে পারে না।

গ দেয়া আছে,

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$
$$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$$

$A = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = 3$

$B = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 7$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$
$= 12 - 6 - 2$
$= 4$

আমরা জানি,

বা, $\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$

$\therefore \quad \alpha = 79.02^\circ$ (প্রায়)

$\therefore \vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণ, $\alpha = 79.02^\circ$ (প্রায়)। **(Ans.)**

ঘ মনে করি, α এর পরিবর্তে কোণের মান α' করলে $\vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ এক চতুর্থাংশ হবে।

যেহেতু, $\alpha = 79.02^\circ$ [(গ) অংশ হতে প্রাপ্ত]

$\therefore \vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ,

$$B\cos\alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$$
$= \frac{4}{3}$; [$\vec{A} \cdot \vec{B}$ এবং A এর মান (গ) হতে]

$\therefore \vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপের এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

এখন,

$B\cos\alpha' = \frac{1}{3}$

বা, $7\cos\alpha' = \frac{1}{3}$

বা, $\alpha' = \cos^{-1}\left(\frac{1}{21}\right)$

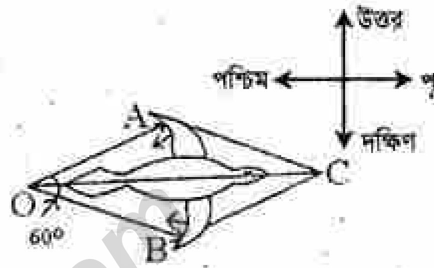
$\therefore \quad \alpha' = 87.27^\circ$

$\therefore$ কোণের মান 87.27° হলে $\vec{A}$ এর ওপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ পূর্বের এক চতুর্থাংশ হবে।

$\therefore \alpha$ এর মানের পরিবর্তন $= 87.27^\circ - 79.02^\circ = 8.25^\circ$

সুতরাং α এর মান 8.25° বাড়ালে $\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ পূর্বের এক চতুর্থাংশ হবে।

প্রশ্ন ▶ ১৩



চিত্রানুযায়ী একটি পাখি সমতল ভূমির সমান্তরালে আকাশে উড়ছে। পাখিটির উভয় পাখা কর্তৃক ধাক্কার পরিমাণ 5 N। [সি. বো. ২০১৭]

ক. কার্ল কাকে বলে? ১

খ. আমাদের পায়ে হাঁটা কিভাবে ভেক্টর বিভাজনের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়? ২

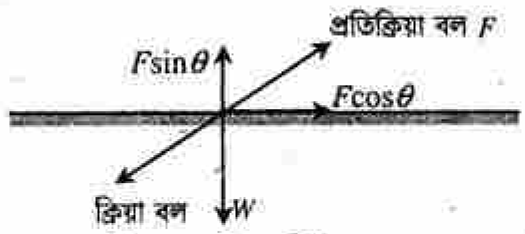
গ. চিত্রের OC বরাবর প্রতিক্রিয়া বলের মান কত? ৩

ঘ. AO বরাবর পাখার ধাক্কার পরিমাণ দ্বিগুণ হলে পাখিটি কোনদিকে উড়বে? গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\vec{\nabla}$ অপারেটরের সাথে কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের $(\vec{V})$ ক্রস বা ভেক্টর গুণ $(\vec{\nabla} \times \vec{V})$ কে ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল বলে।

খ



হাঁটার সময় আমরা ভূমিকে পা দিয়ে তীর্যক বল প্রয়োগে পেছনের দিকে ঠেলে দেই। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে ভূমি আমাদের ওপর একটি প্রতিক্রিয়া বল F প্রয়োগ করে। ধরা যাক, প্রতিক্রিয়া বল ভূমির সাথে θ কোণে ক্রিয়া করে। এ প্রতিক্রিয়া বল দুটি উপাংশে বিভক্ত হয়। উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ যা আমাদের ওজনের বিপরীতে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া হিসেবে কাজ করে এবং অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে যেতে সাহায্য করে।

গ দেওয়া আছে,

OA বরাবর প্রতিক্রিয়া বল, $P = 5$ N

OB বরাবর প্রতিক্রিয়া বল, $Q = 5$ N

OA ও OB বলের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60^\circ$

OC বরাবর লব্ধি প্রতিক্রিয়া বল, $R = ?$

আমরা জানি,

প্রতিক্রিয়া বল, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{(5)^2 + (5)^2 + 2(5)(5)\cos 60°}$

$= \sqrt{25 + 25 + 50 \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{75}$

$\therefore R = 8.66$ N **(Ans.)**

ঘ এখানে,

AO বরাবর ধাক্কার মান 10 N

সুতরাং OA বরাবর প্রতিক্রিয়ার মান, $P = 10$ N

অনুরূপে OB বরাবর প্রতিক্রিয়ার মান, $Q = 5$ N

OA ও OB এর মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60°$

মনে করি, পাখিটি OA এর সাথে θ কোণে উড়বে।

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 + 5 \times \frac{1}{2}} = \frac{4.33}{12.5} = 0.346$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(0.346)$

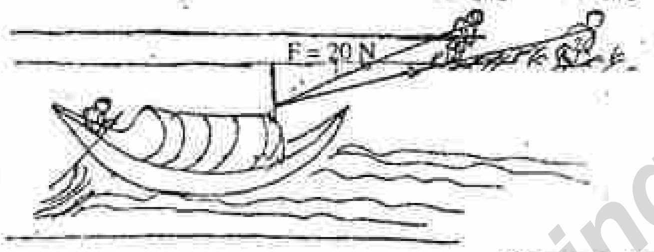
$= 19.10°$

পাখিটির পূর্বের চলার দিক বা পূর্বদিকের সাথে বর্তমান চলার দিকে মধ্যবর্তী কোণ $= 30° - 19.10°$

$= 10.9°$

অতএব, পাখিটি পূর্বদিকের সাথে 10.9° কোণে উত্তর-পূর্ব দিকে চলবে।

প্রশ্ন ▶ ১৪



/সি. বো. ২০১৬/

ক. টর্ক কাকে বলে? ১

খ. $\hat{i}.\hat{i} = 0$ হয় কেন? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. যদি ক ব্যক্তি অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে গুণ টানে তবে বলের অনুভূমিক উপাংশ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. যদি ক ব্যক্তি ও খ ব্যক্তি একই বলে নৌকা দুটি টানে তবে কে সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও। ৪

১৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যা কোনো অঘূর্ণনশীল বস্তুতে ঘূর্ণন সৃষ্টি করে বা ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তন করে তাকে টর্ক বলে।

খ $\hat{i}.\hat{i} = 0$ নয় 1।

$\hat{i}$ এবং $\hat{i}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 0°

$\therefore \hat{i}.\hat{i} = 1 \times 1 \times \cos 0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$।

গ দেওয়া আছে, অনুভূমিকের সাথে কোণ, $\theta = 45°$

প্রযুক্ত বল, $F = 20$ N

$\therefore$ অনুভূমিক উপাংশ $= F\cos\theta$

$= 20\cos 45°$

$= 20 \times 0.7071$ N

$= 14.142$ N **(Ans.)**

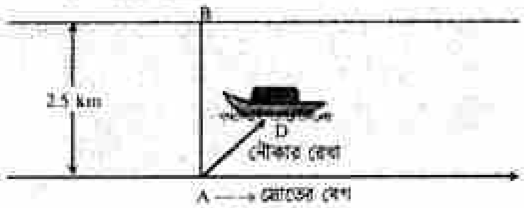
ঘ চিত্র থেকে স্পষ্ট যে, $\theta_1 > \theta_2$

$\therefore \cos\theta_1 < \cos\theta_2$

$\therefore F\cos\theta_1 < F\cos\theta_2$

$\therefore$ খ ব্যক্তি সহজেই নৌকাটি চালাতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ১৫ একটি নৌকা চিত্রানুযায়ী 2.5 km প্রস্থের একটি নদীতে A অবস্থান হতে অন্য প্রান্তে AD বরাবর যাচ্ছে।



স্থির পানিতে নৌকার বেগ $= (3\hat{i} + 3\hat{j})$ m·s^{-1} এবং স্রোতের বেগ $= 2\hat{i}$ m·s^{-1}. অন্য একটি ক্ষেত্রে নৌকাটিকে AB বরাবর একই দ্রুতিতে চালানো হয়। /য. বো. ২০১৭/

ক. স্বাধীন ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রত্যায়নী বল দ্বারা কৃত কাজ কখন ঋণাত্মক হবে– ব্যাখ্যা করো। ২

গ. নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় করো। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে কোন ক্ষেত্রে নৌকাটি আগে অপর তীরে পৌঁছবে তা গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক উত্তর দাও। ৪

১৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের পাদবিন্দু নির্দিষ্ট নয় বা যে ভেক্টরের পাদবিন্দু ইচ্ছানুযায়ী পরিবর্তন করা যায়, তাকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, বলের বিপরীত দিকে বস্তুর সরণ হলে ঋণাত্মক কাজ হয়। স্থিতিস্থাপক বস্তুর বিকৃতি ঘটালে প্রযুক্ত বলের বিপরীতে বস্তুর অভ্যন্তরে উদ্ভূত বলই প্রত্যয়নী বল। সংকোচন বা প্রসারণ যাই হোক না কেন এ বল সর্বদা সাম্যাবস্থান থেকে সরণের বিপরীতে ক্রিয়া করে। তাই যখন কোনো বস্তুর বিকৃতি ঘটানো হয় তখন প্রত্যয়নী বল দ্বারা কৃতকাজ ঋণাত্মক হয়।

গ এখানে,

নৌকার বেগ, $\vec{v}_b = (3\hat{i} + 3\hat{j})$ m·s^{-1}

এবং স্রোতের বেগ, $\vec{v}_c = 2\hat{i}$ m·s^{-1}

নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = ?$

নদীর সমতলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর হবে $\vec{v}_b$ ও $\vec{v}_c$ যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের উপর লম্ব।

$\therefore \hat{\eta} = \frac{\vec{v}_c \times \vec{v}_b}{|\vec{v}_c \times \vec{v}_b|}$

$\vec{v}_c \times \vec{v}_b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-0) + \hat{k}(6-0)$

$= 6\hat{k}$

$|\vec{v}_c \times \vec{v}_b| = \sqrt{(6)^2} = 6$

$\therefore \hat{n} = \frac{6\hat{k}}{6} = \hat{k}$ **(Ans.)**

ঘ ১ম ক্ষেত্রে,

নৌকার বেগ, $\vec{v}_b = (3\hat{i} + 3\hat{j})$ m·s^{-1}

$\therefore$ নৌকার দ্রুতি $= \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ m·s^{-1}

এবং AB বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ, $v_{by} = 3$ m·s^{-1}

নদীর প্রশস্ততা, $d = 2.5$ km $= 2.5 \times 10^3$ m

$\therefore$ ১ম ক্ষেত্রে অন্য তীরে পৌঁছানোর সময়, $t_1 = \frac{d}{v_{by}} = \frac{2.5 \times 10^3 \text{ m}}{3 \text{ m·s}^{-1}}$

$= 833.33$ sec.

২য় ক্ষেত্রে,

নৌকার বেগ, $\vec{v}_b = 3\sqrt{2}\hat{j}$ m·s^{-1}

AB বরাবর নৌকার বেগের উপাংশ, $v_{by} = 3\sqrt{2}\ \text{m·s}^{-1}$

$\therefore$ ২য় ক্ষেত্রে অপর তীরে পৌঁছানোর সময়, $t_2 = \frac{d}{v_{by}} = \frac{2.5 \times 10^3 \text{ m}}{3\sqrt{2} \text{ m·s}^{-1}}$

$= 589.26$ sec.

দেখা যাচ্ছে, $t_2 < t_1$

সুতরাং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নৌকাটি অপর তীরে আগে পৌঁছাবে।

প্রশ্ন ▶১৬ কোনো এক বৃষ্টির দিনে আসাদ ঘরের দরজায় দাঁড়িয়ে বৃষ্টি দেখছিল। বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 6 kmh^{-1} বেগে পড়ছিল। এমন সময় আসাদ দেখল এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে 33.8° কোণে ছাতা ধরে পায় হেঁটে চলছে। অপর এক ব্যক্তি উল্লম্বের সাথে 53.06° কোণে ছাতা ধরে সাইকেলে চলছে। উভয়েই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেল। /দি. বো. ২০১৬/

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. প্রাসের বেগ বিশ্লেষণ কর। ২

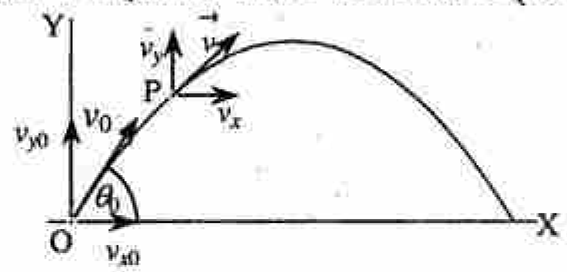
গ. পায়ে হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ব্যক্তিদ্বয়ের ভিন্ন কোণে ছাতা ধরার কারণ ব্যাখ্যা কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডানহাতি ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ প্রাসের বেগ সমত্বরণে দ্বি-মাত্রিক গতির একটি উৎকৃষ্ট উদাহরণ।



মনে করি, ভূমির উপরস্থ O বিন্দু থেকে $\vec{v_0}$ বেগে অনুভূমিকের সাথে θ_0 কোণে একটি প্রাসকে নিক্ষেপ করা হলো। X ও Y অক্ষ বরাবর আদিবেগের উপাংশগুলো হলো যথাক্রমে

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{y0} = v_0 \sin\theta_0$$

বস্তুটি t সময় পর P অবস্থানে পৌঁছালে তার বেগ $\vec{v}$ এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে,

$v_x = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ এবং

$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt$

সুতরাং t সময়ে বা P অবস্থানে, প্রাসের বেগ $\vec{v}$ এর মান হলো $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ এবং বেগ $\vec{v}$, X অক্ষ তথা অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে,

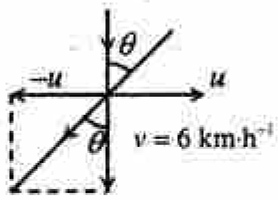
$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$

গ দেয়া আছে, বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ \text{km·h}^{-1}$

ছাতা ও উল্লম্বের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 33.8^\circ$

পায় হেঁটে চলা ব্যক্তির বেগ, $u = ?$

চিত্র হতে পাই,



$\tan\theta = \frac{u}{v}$

বা, $u = v\tan\theta$

$= 6 \times \tan 33.8^\circ$

$= 4\ \text{km·h}^{-1}$ **(Ans.)**

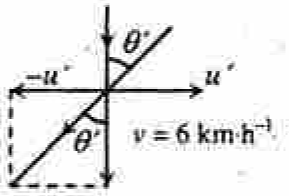
ঘ সাইকেলে চলা ব্যক্তির ছাতা ও উল্লম্বের সাথে-

উৎপন্ন কোণ, $\theta' = 53.06^\circ$

বৃষ্টির বেগ, $v = 6\ \text{km·h}^{-1}$

সাইকেলে চলা ব্যক্তির বেগ, $u' = ?$

চিত্র হতে পাই,



$\tan\theta' = \frac{u'}{v}$

বা, $u' = v\tan\theta'$

$= 6 \times \tan 53.06^\circ$

$= 7.98\ \text{km·h}^{-1}$

'গ' অংশ হতে পাই, পায়ে হাঁটা ব্যক্তির বেগ, $u = 4\ \text{km·h}^{-1}$

ব্যক্তিদ্বয়ের বেগ ভিন্ন হওয়ায় তাদের সাপেক্ষে বৃষ্টির পানির আপেক্ষিক বেগও ভিন্ন। অর্থাৎ উলম্বের সাথে আপেক্ষিক বেগের উৎপন্ন কোণও ভিন্ন। তাই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাবার জন্য ব্যক্তিদ্বয়ের ভিন্ন কোণে ছাতা ধরতে হয়েছিল।

প্রশ্ন ▶১৭ সাবিহা একদিন শপিং মলে বাজার করার সময় ট্রলি গাড়ী ব্যবহার করল। সে ট্রলি গাড়ীর হেন্ডেলটিতে উলম্বের সাথে 30° কোণে 10N বল প্রয়োগ করে গাড়ীটিকে ঠেলতে থাকে। এই দেখে দোকানদার বলল, আপনি গাড়ীর হেন্ডেল ধরে টানেন, তাহলে কম বল লাগবে। /দি. বো. ২০১৫/

ক. লব্ধি ভেক্টর কী? ১

খ. অভিকর্ষজ বল অসংরক্ষণশীল বল নয় — ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত? ৩

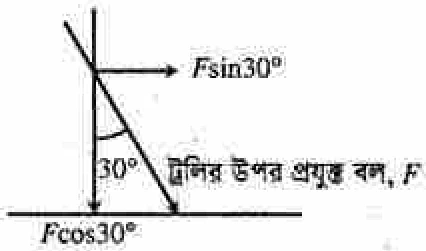
ঘ. দোকানদার সাবিহাকে ট্রলির হেন্ডেল ধরে সামনে টানতে বলল কেন — যুক্তিসহ গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক একই জাতীয় ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তাকে ভেক্টরগুলোর লব্ধি ভেক্টর বলে।

খ অভিকর্ষ বলের ক্ষেত্রে এক বিন্দু হতে অপর বিন্দুতে বস্তুর গমনের ফলে কৃতকাজ, পথের ওপর নির্ভর করে না বরং আদি ও অন্তবিন্দুর ওপর নির্ভর করে। বস্তুটি পুনরায় আদি বিন্দুতে ফিরে এলে কৃত কাজ শূন্য হয় এবং শক্তির অপচয় ঘটে না। তাই অভিকর্ষ বল অসংরক্ষণশীল বল নয় অর্থাৎ সংরক্ষণশীল বল।

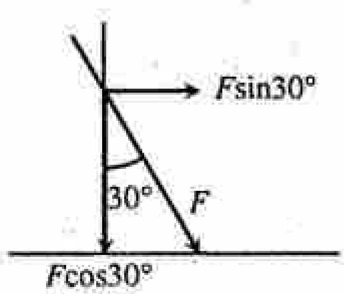
গ



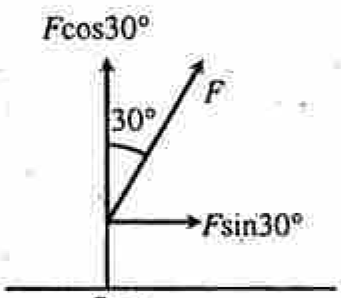
ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল = প্রযুক্ত বলের অনুভূমিক উপাংশ।

$= F\sin30^\circ = 10\ \text{N} \times 0.5 = 5\ \text{N}$ **(Ans.)**

ঘ



চিত্র-১



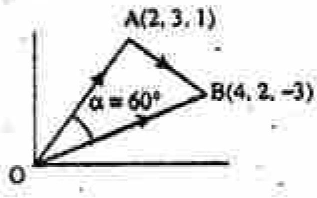
চিত্র-২

চিত্র-১ অনুসারে যখন ট্রলিকে ঠেলা হচ্ছে তখন বলের উলম্ব উপাংশ $F\cos30^\circ$ নিচের দিকে ক্রিয়া করছে। ট্রলির ওজন W হলে, নিম্নমুখী মোট বল $= W + F\cos30^\circ$

এতে ভূমির প্রতিক্রিয়া বল বৃদ্ধি পায় ফলে ঘর্ষণ বল বেশি হয় কারণ ঘর্ষণ বল অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক। অপর পক্ষে ট্রলিটিকে চিত্র-২ অনুসারে টানা হলে বলের উলম্ব উপাংশ $F\cos30^\circ$ উপরের দিকে ক্রিয়া করে। ফলে নিম্নমুখী মোট বল $= W - F\cos30^\circ$

এতে ভূমির প্রতিক্রিয়া বল হ্রাস পায় ফলে ঘর্ষণ বল কম হয়। এ কারণে ট্রলি ঠেলার থেকে টানা সহজ হয়। তাই দোকানদার সাবিহাকে ট্রলি টানতে বলেছিল।

প্রশ্ন ▶ ১৮ নিচের চিত্রে দুটি বিন্দু A ও B স্থানাংক দেয়া আছে :



/ব. বো. ২০১৭/

ক. নাল ভেক্টরের সংজ্ঞা লিখ। ১

খ. একটি ভারী বস্তুকে স্বল্প কোণে টেনে নেওয়ার কারণ ব্যাখ্যা কর। ২

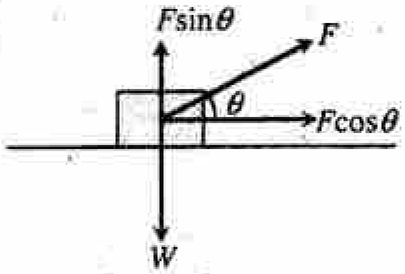
গ. AB সংযোগকারী ভেক্টরের মান নির্ণয় কর? ৩

ঘ. উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে কি? বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। ৪

১৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে নাল ভেক্টর বা শূন্য ভেক্টর বলে।

খ



একটি ভারি বস্তুকে যদি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে F বলে টেনে নিয়ে যাওয়া হয় তাহলে বস্তুটিকে গতিশীল রাখতে F বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ ক্রিয়া করে। আমরা জানি যে, θ এর মান যত ছোট হয় $\cos\theta$ এর মান তত বড় হয়। তাই স্বল্প কোণে কোনো বস্তুকে টেনে নিয়ে গেলে কার্যকর বলের মান বেশি হয় তথা বস্তুর গতি বৃদ্ধি পায়।

সুতরাং, সহজে একটি ভারি বস্তুকে টেনে নিয়ে যেতে স্বল্প কোণে বল প্রয়োগ করা হয়।

গ দেওয়া আছে,

A এর স্থানাঙ্ক (2, 3, 1)

B এর স্থানাঙ্ক (4, 2, –3)

AB সংযোগকারী ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ = ?

এখানে, $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

আমরা জানি,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$

সুতরাং, AB সংযোগকারী ভেক্টরের মান = $|\overrightarrow{AB}|$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{21} \text{ (Ans.)}$$

ঘ 'গ' অংশ হতে,

$$\overrightarrow{AB} = 2\hat{i} - \hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}$$
$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$
$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$$

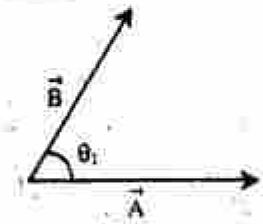
এখানে,

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$$
$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{21})^2 = 35$$

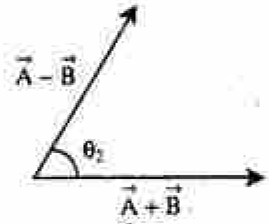
অর্থাৎ, $|\overrightarrow{OB}|^2 \neq |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$

অতএব, উদ্দীপকের ত্রিভুজ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে না।

প্রশ্ন ▶ ১৯



চিত্র-১



চিত্র-২

উপরের চিত্রে $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$.

/ব. বো. ২০১৬/

ক. ঘাত বল কাকে বলে? ১

খ. একটি ইঞ্জিনের দক্ষতা 60% বলতে কী বুঝায়? ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে θ_1 এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকে $\theta_1 = \theta_2$ হওয়া সম্ভব কিনা গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত দাও। ৪

১৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক খুব অল্প সময়ের জন্য খুব বড় মানের যে বল কোনো বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয় তাকে ঘাত বল বলে।

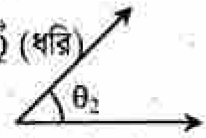
খ একটি ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 60% বলতে বুঝায়, যদি এই ইঞ্জিনে 100 J শক্তি দেয়া হয় তাহলে সেই ইঞ্জিন থেকে প্রাপ্ত মোট কার্যকর শক্তি হবে 60 J।

গ ১২(গ)নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ। উত্তর: $\theta_1 = 24.87°$।

ঘ 'গ' নং প্রশ্নের আলোকে আমরা θ_1 এর মান পাই 24.87°।

আবার চিত্র—২ থেকে পাই,

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{Q}$ (ধরি)



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ (ধরি)

এখানে, $\vec{P} = \vec{A} + \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$$

এবং $\vec{Q} = \vec{A} - \vec{B} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$

$$= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k} - 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$$
$$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$$

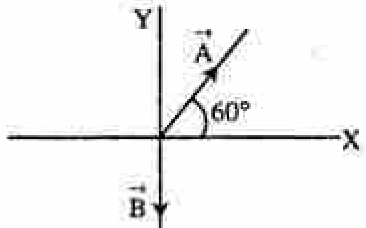
এখন, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\theta_2 \Rightarrow \cos\theta_2 = \dfrac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{PQ}$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 3 \times (-1) + (-4) \times (2) + 7 \times (-5)$$
$$= -3 - 8 - 35$$
$$= -46$$
$$P = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{74}$$
$$Q = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{30}$$
$$\therefore \cos\theta_2 = \frac{-46}{\sqrt{74} \times \sqrt{30}}$$
$$= -0.9763$$
$$\Rightarrow \theta_2 = \cos^{-1}(-0.9763) = 167.5°$$

কাজেই $\theta_2 > \theta_1$

$\therefore$ দেখা যায় যে $\theta_2 = \theta_1$ হওয়া সম্ভব নয়।

প্রশ্ন ▶ ২০



চিত্রে A = 4 এবং B = 6

[রাজশাহী ক্যাডেট কলেজ]

ক. নাল ভেক্টর কী? ১

খ. দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণ ব্যাখ্যা করো। ২

গ. উদ্দীপক থেকে $\vec{A}-\vec{B}$ নির্ণয় করো। ৩

ঘ. $\vec{A}\times\vec{B}$ ও $\vec{A}+\vec{B}$ পরস্পর লম্ব– গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

২০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বা নাল ভেক্টর বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের ভেক্টর বা ক্রস গুণফল,

$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\hat{n}$ এখানে, A ও B হলো যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর মান, θ হলো $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যকার কোণ। $\vec{A}$ থেকে $\vec{B}$ এর দিকে একটি ডানহাতি কর্ক স্ক্রু কে ঘুরালে স্ক্রুর মাথাটি যেদিকে অগ্রসর হয়, সেদিক বরাবর একক ভেক্টর হলো $\hat{n}$।

গ ২(গ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর: $\vec{A}-\vec{B} = 2\hat{i}+(2\sqrt{3}-6)\hat{j}$

ঘ ২(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

প্রশ্ন ▶ ২১ $\vec{V} = (3x^2y+4xy)\,\vec{i} + 5xy^3z\,\vec{j} + (6y^2-7xz)\,\vec{k}$ একটি ভেক্টর ফাংশন। *[জয়পুরহাট গার্লস ক্যাডেট কলেজ]*

ক. স্পর্শকোণ কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টরের সাহায্যে পাখি কীভাবে উড়ে তা ব্যাখ্যা করো। ২

গ. (1,–1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}.\vec{V}$ এর মান নির্ণয় করো। ৩

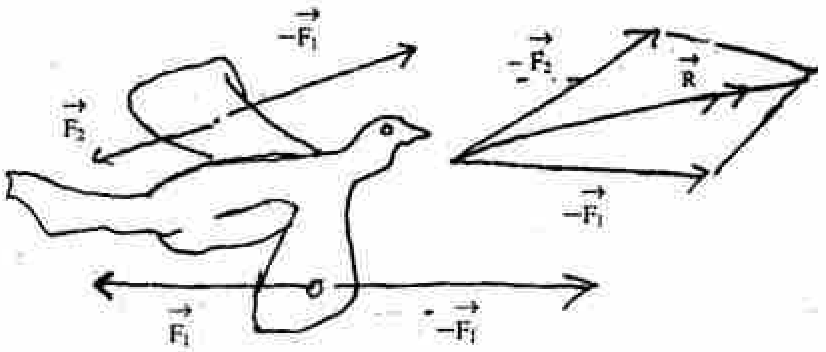
ঘ. যথার্থ গাণিতিক যুক্তি দ্বারা উদ্দীপকের ভেক্টরটি সংরক্ষণশীল কিনা তা বিশ্লেষণ করো। ৪

২১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু হতে তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন বস্তুর সাথে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ কঠিন ও তরলের মধ্যকার স্পর্শ কোণ বলে।

খ পাখি তার ডানা দিয়ে বাতাসের ওপর $\vec{F_1}$ বল প্রয়োগ করে, এতে গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে,

পাখির উক্ত ডানার ওপর বায়ু দ্বারা $-\vec{F_1}$ প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয়। একই কারণে, পাখির অপর ডানার ওপর $-\vec{F_2}$ প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয়। এ বলদ্বয়ের ভেক্টর যোগের মাধ্যমে $\vec{R}$ লব্ধি বল উৎপন্ন হয়। $\vec{R}$ এর দিকেই পাখির দেহটি এগিয়ে যায়।



গ $\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial x}\hat{k}\right)$

$[(3x^2y+4xy)\hat{i} + 5xy^3z\hat{j} + (6y^2-7xz)\hat{k}]$

$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y+4xy) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^3z) + \frac{\partial}{\partial z}(6y^2-7xz)$

$= 6xy + 4y + 15xy^2z - 7x$

∴ (1, – 1, 1) বিন্দুতে,

$\vec{\nabla}.\vec{V}$ এর মান $= 6\times1\times(-1)+4(-1)+15\times1\times(-1)^2\times1-7\times1$

$= -6-4+15-7$

$= -2$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপকের ভেক্টর $\vec{V}$ সংরক্ষণশীল হবে যদি এর কার্ল,

অর্থাৎ, $\vec{\nabla}\times\vec{V}=0$ হয়।

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial x}\hat{k}\right)\times$

$[(3x^2y+4xy)\hat{i} + 5xy^3z\hat{j} + (6y^2-7xz)\hat{k}]$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y+4xy & 5xy^3z & 6y^2-7xz \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(6y^2-7xz) - \frac{\partial}{\partial z}(5xy^3z)\right]$

$-\hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(6y^2-7xz) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y+4xy)\right]$

$+\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(5xy^3z) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y+4xy)\right]$

$= (12y-5xy^3)\,\hat{i} + 7z\hat{j} + (5y^3z-3x^2-4x)\,\hat{k}$

∴ $\vec{\nabla}\times\vec{V}\neq0$ যেহেতু, $\vec{V}$ এর কার্ল অশূন্য, তাই এটি সংরক্ষণশীল নয়।

প্রশ্ন ▶ ২২ দেওয়া আছে, $\vec{F} = (2x+y-z)\hat{i}+(x-2y+3z)\hat{j}+(x-y-z)\hat{k}$

[রংপুর ক্যাডেট কলেজ, রংপুর]

ক. সমতলীয় ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কাজ একটি স্কেলার রাশি– ব্যাখ্যা করো। ২

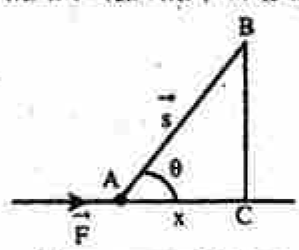
গ. (1, –1, 1) বিন্দুতে $\vec{F}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করো। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরটি কি ঘূর্ণনশীল নাকি অঘূর্ণনশীল গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা করো। ৪

২২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একই সমতলে অবস্থিত হয় তবে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

খ ধরা যাক, কোনো বস্তুর ওপর F বল প্রয়োগ করায় বস্তুটি বলের সাথে θ কোণ করে s পরিমাণ সরে যায়। তাহলে,



কাজ, W = বল × বলের দিকে সরণের উপাংশ

$= F\times x$

কিন্তু ΔABC-এ, $x = s\cos\theta$

∴ $W = F.s\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$

সুতরাং বল ভেক্টর এবং সরণ ভেক্টরের স্কেলার গুণফলই হলো কাজ। এ কারণে কাজ একটি স্কেলার রাশি।

গ দেয়া আছে, $\vec{F} = (2x + y - z)\hat{i} + (x - 2y + 3z)\hat{j} + (x - y - z)\hat{k}$

ডাইভারজেন্স $= \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x + y - z) + \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y + 3z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - y - z)$$
$$= 2 - 2 - 1$$
$$= -1$$

∴ (1, −1, 1) বিন্দুতে ডাইভারজেন্স = −1 **(Ans.)**

ঘ একটি ভেক্টর ঘূর্ণনশীল হবে যদি তার কার্ল $\neq 0$ হয়।

এখন, $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + y - z & x - 2y + 3z & x - y - z \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x - y - z) - \frac{\partial}{\partial z}(x - 2y + 3z)\right\}$$
$$- \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x - y - z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x + y - z)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x - 2y + 3z) - \frac{\partial}{\partial y}(2x + y - z)\right\}$$
$$= \hat{i}(-1 - 3) - \hat{j}(1 + 1) + \hat{k}(1 - 1)$$
$$= -4\hat{i} - 2\hat{j}$$
$$\neq 0$$

অতএব, ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶ ২৩ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α

[ফেনী গার্লস ক্যাডেট কলেজ, ফেনী]

ক. কার্ল কী? ১

খ. গ্রাডিয়েন্ট বলতে কী বোঝ? ২

গ. $= 90°$ হলে m এর মান কত? ৩

ঘ. গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা করো ভেক্টর দুটি ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে কি? ৪

২৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং ভেক্টর $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

খ ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ কোনো স্কেলার ফাংশন (φ) এর উপর অপারেট করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকে (x, y, z) অবস্থানে ঐ রাশির গ্রাডিয়েন্ট বলে।

∴ φ এর গ্রাডিয়েন্ট, $\vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)\varphi$

$$= \hat{i}\frac{\delta\varphi}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta\varphi}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta\varphi}{\delta z}$$

কাজেই অবস্থানের সাপেক্ষে কোনো স্কেলার ক্ষেত্র φ এর সর্বোচ্চ পরিবর্তনের হারই ঐ ক্ষেত্রের গ্রাডিয়েন্ট এবং দেখা যাচ্ছে grad φ ভেক্টর, ফলে এটি একটি ভেক্টর ক্ষেত্র। অর্থাৎ ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla}$ দ্বারা অন্তরীকরণ করে অন্তরীকরণযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র φ কে ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{\nabla}\varphi$ এ রূপান্তর করা যায়।

গ $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha$

বা, $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})\cdot(m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}) = AB\cos 90°$

বা, $2m + 6 + 50 = AB\cdot 0$

বা, $2m + 56 = 0$

বা, $2m = -56$

∴ $m = -28$ **(Ans.)**

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$
$\vec{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$
$\alpha = 90°$
$m = ?$

ঘ প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয় $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -28\hat{i} + 2\hat{j} - 10\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -5 \\ -28 & 2 & -10 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -28 & -10 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -28 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\{3\times(-10) - (-5)\times 2\} - \hat{j}\{2\times(-10) - (-5)\times(-28)\} + \hat{k}\{2\times 2 - 3(-28)\}$$
$$= \hat{i}(-30 + 10) - \hat{j}(-20 - 140) + \hat{k}(4 + 84)$$
$$= -20\hat{i} + 160\hat{j} + 88\hat{k}$$

$$\vec{B}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -28 & 2 & -10 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -28 & -10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -28 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\{2(-5) - (-10)3\} - \hat{j}\{(-28)(-5) - (-10)2\} + \hat{k}\{(-28)3 - 2\times 2\}$$
$$= 20\hat{i} - 160\hat{j} - 88\hat{k} = -(-20\hat{i} + 160\hat{j} + 88\hat{k}) = -\vec{A}\times\vec{B}$$

∴ $\vec{B}\times\vec{A} \neq \vec{A}\times\vec{B}$

সুতরাং, ভেক্টর দুটি ভেক্টর গুণের ক্ষেত্রে বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

প্রশ্ন ▶ ২৪ নিম্নে তিনটি ভেক্টর দেওয়া হলো:

$\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$

$\vec{B} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

$\vec{C} = (6x^2y - z^3x)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

[ফৌজদারহাট ক্যাডেট কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ডট গুণ কী? ১

খ. ডাইভারজেন্সের তাৎপর্য লিখো। ২

গ. (1, −2, 1) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করো। ৩

ঘ. $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাঝে কোনটি (1, 2, −1) বিন্দুতে ঘূর্ণনশীল?— তোমার উত্তরের স্বপক্ষে গাণিতিক যুক্তি দাও। ৪

২৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গুণনে দুটি সমজাতীয় বা ভিন্ন ভেক্টর গুণ করলে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হয়, সেই গুণনই ডট গুণ।

খ ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্মগুলো হলো:

i. ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে এই দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখী বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ বা div $\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বোঝায়।

ii. মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে।

iii. মান ঋণাত্মক হলে আয়তনের সংকোচন ঘটে, ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}$

∴ div $\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(6x^2y\hat{i} + 4xy^2\hat{j} + 2x\hat{k}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(4xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x)$$
$$= 12xy + 8xy + 0$$
$$= 20xy$$

∴ (1, −2, 1) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স $= 20\times 1\times(-2)$
$= -40$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে,

$\vec{B} = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

এবং $\vec{C} = (6x^2y - z^3x)\hat{i} + 2x^3\hat{j} - 3xz^2\hat{k}$

$\vec{B}$ এর কার্ল $= \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-2xz)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right\}$$

$$= \hat{i}(2z + 2x) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(-2z - x^2)$$

$$= \hat{i}(2z + 2x) + \hat{k}(-2z - x^2)$$

$(1, 2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{B}$ এর কার্ল $= \hat{i}\{(2 \times (-1) + 2 \times 1) + \hat{k}(-2 \times (-1) - 1^2)\}$

$$= \hat{i} \cdot 0 + \hat{k}(2 - 1) = \hat{k} \neq 0$$

$\vec{C}$ এর কার্ল $= \vec{\nabla} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6x^2y - z^3x & 2x^3 & -3xz^2 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^3)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(6x^2y - z^3x)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(2x^3) - \frac{\partial}{\partial y}(6x^2y - z^3x)\right\}$$

$$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(-3z^2 - 0 + 3xz^2) + \hat{k}(6x^2 - 6x^2)$$

$$= \hat{j}(3z^2 - 3xz^2)$$

$\therefore (1, 2, -1)$ বিন্দুতে $\vec{C}$ এর কার্ল $= \hat{j}\{3(-1)^2 - 3.1.(-1)^2\}$

$$= \hat{j}(3 - 3) = 0$$

সুতরাং, গাণিতিক বিশ্লেষণে দেখা গেল যে, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাঝে $\vec{B}(1, 2, -1)$ বিন্দুতে ঘূর্ণনশীল, $\vec{C}$ ঘূর্ণনশীল নয়।

প্রশ্ন ▶২৫ $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3\hat{j} + xy^2\hat{k}$

[রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. সংরক্ষণশীল বল কাকে বলে? ১

খ. ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল কেন ব্যাখ্যা করো। ২

গ. $(1, 1 - 1)$ বিন্দুতে $\vec{A}$ এর মান নির্ণয় করো। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল কিনা গাণিতিকভাবে যাচাই করো। ৪

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

খ আমরা জানি, ঘর্ষণ বল সর্বদা গতির বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে। তাই একটি পূর্ণ চক্রের প্রতিটি অংশে ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজ ঋণাত্মক। ফলে একটি পূর্ণ চক্রে ঘর্ষণ বল দ্বারা কৃতকাজ কখনই শূন্য হতে পারে না। আবার ঘর্ষণ বলের ক্ষেত্রে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যে সম্পন্ন কাজের পরিমাণ গতিপথের উপর নির্ভর করে। তাই ঘর্ষণ বল একটি অসংরক্ষণশীল বল।

গ এখানে, $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3\hat{j} + xy^2\hat{k}$

এখন, $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে তথা, $x = 1, y = 1$ এবং $z = -1$

$\vec{A} = \{1^2 \times (-1)\}\hat{i} - (2 \times 1^3)\hat{j} + (1 \times 1^2)\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore \vec{A}$ এর মান, $A = |\vec{A}|$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1}$$

$\therefore A = \sqrt{6}$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{A} = x^2z\hat{i} - 2y^3\hat{j} + xy^2\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$

$\therefore$ Curl. $A = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times (x^2z\hat{i} - 2y^3\hat{j} + xy^2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z & -2y^3 & xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-2y^3)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-2y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2z)\right\}$$

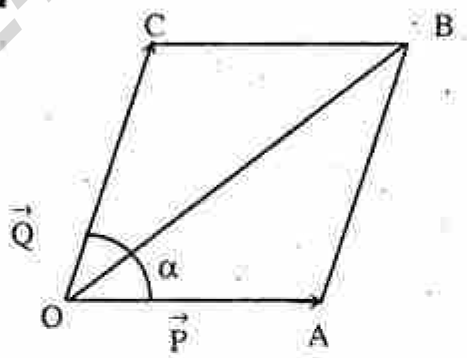
$$= \hat{i}(2xy - 0) - \hat{j}(y^2 - x^2) + \hat{k}(0 - 0)$$

$$= 2xy\hat{i} - \hat{j}(y^2 - x^2)$$

$\because$ curl $A \neq 0$

$\therefore$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶২৬



দেওয়া আছে, $|\vec{P}| = 30$ এবং $|\vec{Q}| = 20$, $\alpha = 60^\circ$

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. সমান্তরিকের সূত্রটা লিখ। ১

খ. যদি দুইটি বস্তুর ভরবেগ সমান হয় অর্থাৎ $m_1v_1 = m_2v_2$ হয় তবে তাদের গতিশক্তি কী সমান হবে? $(m_1 < m_2)$ ২

গ. উদ্দীপক হতে কি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়? ৩

ঘ. যদি $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$ হয় তবে উদ্দীপকের $\overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করবে। ৪

২৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশি নির্দেশ করলে ঐ সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের মিলিত বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি নির্দেশ করে।

খ দুটি বস্তুর ভরবেগ সমান হলেও তাদের গতিশক্তি সমান নাও হতে পারে। দুটি বস্তুর ভর ও বেগ যথাক্রমে m_1, v_1 এবং m_2, v_2 হলে এদের গতিশক্তির অনুপাত :

$$\frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \frac{\frac{(m_1v_1)^2}{m_1}}{\frac{(m_2v_2)^2}{m_2}} = \left(\frac{m_1v_1}{m_2v_2}\right)^2 \frac{m_2}{m_1}$$

এদের ভরবেগ সমান হলে ঃ $m_1v_1 = m_2v_2$

$$\therefore \frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

কেবলমাত্র $m_1 = m_2$ হলে $E_{k_1} = E_{k_2}$ হয়।

অতএব, সমান ভরবেগ সম্পন্ন দুটি বস্তুর গতিশক্তি তখনই সমান হবে যদি তাদের ভর সমান হয়। অন্যথায় হালকা বস্তুটির গতিশক্তি বেশি হবে।

গ সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল A হলে,

$A =$ ভূমি × উচ্চতা

$= OA \times OC \sin\alpha$

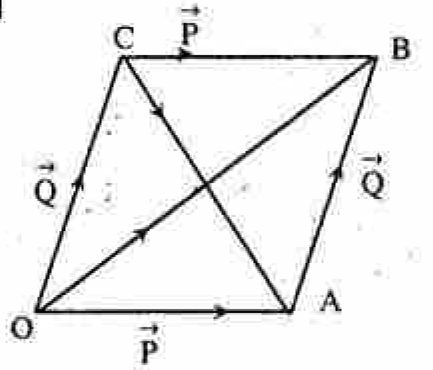
$= |\vec{P}| \times |\vec{Q}| \times \sin 60°$

$= 30 \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 519.62$ বর্গ একক।

অতএব, উদ্দীপকের সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে এবং তা 519.62 বর্গ একক। **(Ans.)**

ঘ



$|\vec{P}| = |\vec{Q}|$

চিত্রে, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{P} + \vec{Q}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$ [∵ $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{CB}|$ ও এরা সমান্তরাল]

$= \vec{P} - \vec{Q}$

এখন, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{CA}$ পরস্পর লম্ব হবে যদি এদের ডট গুণফল শূন্য হয়।

$\therefore \overrightarrow{OB} . \overrightarrow{CA} = (\vec{P} + \vec{Q}).(\vec{P} - \vec{Q})$

$= \vec{P}.\vec{P} + \vec{P}.\vec{Q} - \vec{P}.\vec{Q} - \vec{Q}.\vec{Q}$

$= |\vec{P}|^2 - |\vec{Q}|^2$

$= |\vec{P}|^2 - |\vec{P}|^2$ [যেহেতু $|\vec{P}| = |\vec{Q}|$]

$= 0$

অতএব, $\overrightarrow{OB}$ ও $\overrightarrow{CA}$ পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

প্রশ্ন ▶ ২৭ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ $18 kmh^{-1}$ এবং প্রতিকূলে নৌকার বেগ $8 kmh^{-1}$। নদীর প্রস্থ 3km। নৌকাটিকে সোজা অপর পাড়ের কোন বিন্দুতে যাওয়ার জন্য চালনা করা হয়। অপর একটি নৌকাকে স্রোতের বিপরীত দিকের সাথে 110° কোণে চালনা করা হয় যার বেগ পূর্বের নৌকার বেগের সমান।

[ঢাকা রেসিডেনসিয়াল মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক. মৌলিক একক কী? ১

খ. একটি ভেক্টর থেকে অপর কোন ভেক্টর কীভাবে বিয়োগ করা হয় ব্যাখ্যা করো। ২

গ. প্রথম নৌকাটিকে কোনদিকে চালনা করা হয়েছিল? ৩

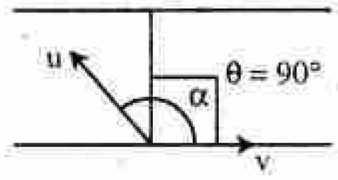
ঘ. কোন নৌকাটি কম সময়ে অপর পাড়ে পৌঁছাতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

২৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক মৌলিক রাশির একককে মৌলিক একক বলে। যেমন– kg

খ একটি ভেক্টর থেকে অপর একটি ভেক্টরকে বিয়োগ করার জন্য যে ভেক্টরটিকে বিয়োগ করতে হবে তার বিপরীত ভেক্টর নেয়া হয়। অতঃপর এই বিপরীত ভেক্টরটিকে প্রথম ভেক্টরের সাথে যোগ করে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল নির্ণয় করা হয়।

গ



ধরা যাক,
নৌকার বেগ = u
স্রোতের বেগ = v
দেয়া আছে,
স্রোতের অনুকূলে বেগ,
$u + v = 18$ km/h
স্রোতের প্রতিকূলে বেগ,
$u - v = 8$ km/h
সমাধান করে পাই,
$\therefore u = 13$ km/h
এবং $v = 5$ km/h

ধরি, ঠিক অপরপ্রান্তে পৌঁছতে নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে α কোণে চালনা করা হয়েছিল।

$\therefore \tan 90° = \frac{u \sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{u \sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\Rightarrow v + u\cos\alpha = 0$

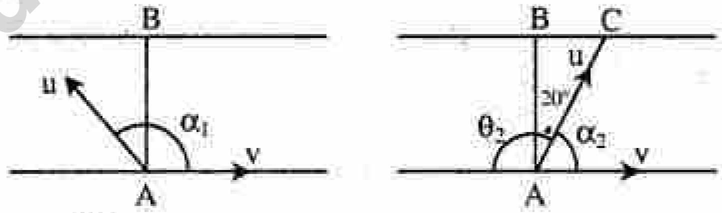
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{v}{u}$

$= -\frac{5}{13}$

$\therefore \alpha = 112.6°$

∴ প্রথম নৌকাটিকে 112.6° কোণে চালানো হয়েছিল। **(Ans.)**

ঘ



'গ' হতে পাই,

নৌকার বেগ, $u = 13$ km/h

স্রোতের বেগ, $v = 8$ km/h

প্রথম নৌকার ক্ষেত্রে,

মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha_1 = 112.6°$ ['গ' হতে]

∴ লব্ধি বেগ, $w_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha_1}$

$= \sqrt{13^2 + 5^2 + 2 \times 13 \times 5 \times \cos 112.6°}$

$= 12$ km/h

অতিক্রান্ত দূরত্ব, s_1 = নদীর প্রস্থ = AB = 3 km [দেয়া আছে]

∴ প্রয়োজনীয় সময়, $t_1 = \frac{s_1}{w_1} = \frac{3 \text{ km}}{12 \text{ km/h}} = 15$ min.

দ্বিতীয় নৌকার ক্ষেত্রে,

নৌকা ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha_2 = 180° - \theta_2$

$= 180° - 110°$ [দেয়া আছে]

$= 70°$

নৌকাটির নদীর প্রস্থ বরাবর বেগের উপাংশ $= u\sin 0° + v\sin\alpha_2$

$= v\sin\alpha_2$

∴ প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \frac{d}{v\sin\alpha_2}$

$= \frac{3}{13\sin 70°}$

$= 14.73$ min

অতএব, দ্বিতীয় নৌকাটি কম সময়ে অপর প্রান্তে পৌঁছতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ২৮ $\vec{V} = 3x^2\hat{i} + (4xy + 5z)\hat{j} + (6y^2 - 7x)\hat{k}$

[হলি ক্রস কলেজ, ঢাকা]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কী শর্তে তিনটি অসমান সামতলিক ভেক্টর কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে? ২

গ. div $\vec{V}$ কত? ৩

ঘ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ভেক্টরটি কী ঘূর্ণনশীল?— ব্যাখ্যা কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে তখনই যখন বল তিনটির লব্ধি শূণ্য হবে। সুতরাং তিনটি অসমান সামতলিক ভেক্টর কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে যদি বল তিনটির লব্ধি শূণ্য হয়।

গ দেওয়া আছে,

$$\vec{V} = 3x^2\hat{i} + (4xy + 5z)\hat{j} + (6y^2 - 7x)\hat{k}$$

বের করতে হবে, div $\vec{V}$ = ?

$$\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4xy + 5z) + \frac{\partial}{\partial z}(6y^2 - 7x)$$
$$= 6x + 4x + 0$$
$$= 10x\ \textbf{(Ans.)}$$

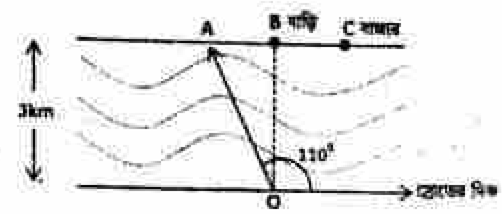
ঘ $\vec{V} = 3x^2\hat{i} + (4xy + 5z)\hat{j} + (6y^2 - 7x)\hat{k}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 & 4xy + 5z & 6y^2 - 7x \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(6y^2 - 7x) - \frac{\partial}{\partial z}(4xy + 5z)\right\}$$
$$-\hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(6y^2 - 7x) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2)\right\}$$
$$+\hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(4xy + 5z) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2)\right\}$$
$$= \hat{i}\,(12y - 5) - \hat{j}\,(-7) + \hat{k}\,(4y)$$
$$= (12y - 5)\hat{i} + 7\hat{j} + 4y\hat{k}$$

যেহেতু, $\vec{\nabla}\times\vec{V} \neq 0$

সুতরাং ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।

প্রশ্ন ▶ ২৯ নিঝুম দ্বীপের একজন মাঝি O বিন্দু হতে মেঘনা নদীর অপর পাড়ে তার বাড়ি B-তে যাওয়ার জন্য বিকাল 5.00 টায় চিত্রের ন্যায় OA বরাবর 6kmh^{-1} বেগে যাত্রা করে নিঝুম দ্বীপের বাজার C-তে পৌছল। C হতে স্রোতের প্রতিকূল নৌকা চালিয়ে 19 মিনিট পর বাড়িতে পৌছল। ঐ দিনের সূর্যাস্ত ছিল সন্ধ্যা 6.00 টায় এবং নদীতে স্রোতের বেগ 4 kmh^{-1}।



[মাইলস্টোন কলেজ]

ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. "লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ"— ব্যাখ্যা কর। ২

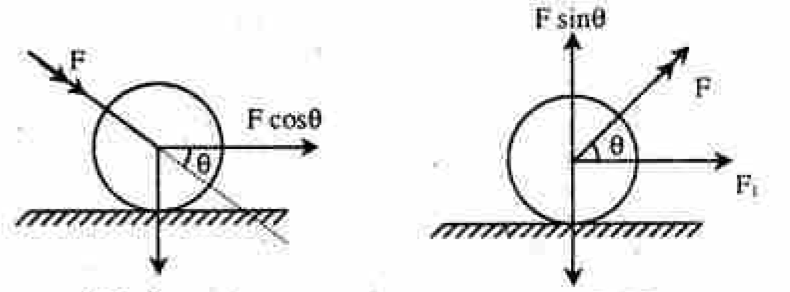
গ. নৌকার লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. সূর্যাস্তের পূর্বে মাঝি বাড়ি ফিরতে পারবে কী? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

২৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

খ লন রোলার ঠেলার সময় এর আপাত ওজন বৃদ্ধি পায় কিন্তু টানার সময় আপাত ওজন হ্রাস পায়। এজন্য লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।



চিত্র: ঠেলার ক্ষেত্রে   চিত্র: টানার ক্ষেত্রে

m ভর বিশিষ্ট একটি লন রোলার কে F বলে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ঠেলার ক্ষেত্রে নিচের দিকে লব্ধি বল হয় (F sinθ + mg), যা লন রোলারের নিজস্ব ওজন mg অপেক্ষা বেশি। অন্য দিকে টানার ক্ষেত্রে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল হয় (mg − F sinθ), ফলে রোলারটি হালকা মনে হয়।

গ নৌকার লব্ধি বেগ, w হলে,

$$w = \sqrt{v^2 + u^2 + 2uv\cos\alpha}$$
$$= \sqrt{6^2 + 4^2 + 2\times 4\times 6\cos 110°}$$
$$= 5.97\ \text{kmh}^{-1}\ \textbf{(Ans.)}$$

এখানে,
নৌকার বেগ, $v = 6\text{kmh}^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 4\text{kmh}^{-1}$
স্রোত ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 110°$

ঘ নৌকাটি স্রোতের সাথে 110° কোণে যাত্রা করে।
ফলে নদীর প্রস্থ বরাবর স্রোতের বেগ, u ও নৌকার বেগ, v এর উপাংশের যোগফল, তথা বেগদ্বয়ের লব্ধি, $w_1 = u\sin 0° + v\sin 110°$

$$= 6\times 0.9397$$
$$= 5.638\ \text{kmh}^{-1}$$

∴ নৌকাটির নদী পার হতে t_1 সময় লাগলে,

$$t_1 = \frac{d}{w_1}$$
$$= \frac{3}{5.638}$$
$$= 0.532\ \text{h}$$
$$= 31.92\ \text{min}$$

এখানে,
নদীর প্রস্থ, d = 3 km
নৌকার নদীর প্রস্থ বরাবর লব্ধি বেগ, $w_1 = 5.638\ \text{kmh}^{-1}$

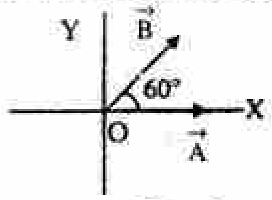
যেহেতু C বিন্দু হতে বাড়িতে পৌছাতে (B বিন্দু) মাঝির $t_2 = 9$ min লাগে।

∴ বাড়িতে পৌছাতে মাঝির মোট সময় লাগবে, $t = t_1 + t_2 = 31.92 + 19$

$$= 50.92\ \text{min}$$

ফলে সে বাড়িতে পৌছাবে 5:53 মিনিটে, অর্থাৎ সূর্যাস্তের পূর্বে।
সুতরাং, মাঝি সূর্যাস্তের আগে পৌছাতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ৩০ চিত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর দেখানো হলো যেখানে $|\vec{A}| = 5N$ এবং $|\vec{B}| = 6N$ এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ 60°।



[বীরশ্রেষ্ঠ নূর মোহাম্মদ পাবলিক কলেজ, ঢাকা]

ক. তাৎক্ষণিক বেগ কাকে বলে? ১

খ. অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর— ব্যাখ্যা করো। ২

গ. চিত্রে $|\vec{A} - \vec{B}| = ?$ ৩

ঘ. 'X-অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর উপাংশের সমষ্টি, একই দিকে এদের লব্ধির উপাংশের সমান'— উদ্দীপক হতে গাণিতিকভাবে যাচাই করো। ৪

৩০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো গতিশীল বস্তুর কোনো বিশেষ মুহূর্তের বেগকে ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক বেগ বলে। ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানে সরণের হার দ্বারা তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করা হয়।

খ আমরা জানি, কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি সর্বদাই নির্দিষ্ট অবস্থানে থাকে এবং প্রান্তবিন্দু যদি পরিবর্তন হতে পারে তবে একে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক ভেক্টর স্থানাংক ব্যবস্থায়, যেকোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের পাদবিন্দু সর্বদাই মূলবিন্দুতে অবস্থিত। তাই অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর।

গ $\vec{A}$ এবং $-\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ,

$$180° - 60° = 120°$$

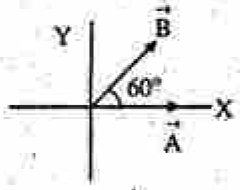
$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos 120°}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2(5)(6)\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 5.57\text{N (Ans.)}$$

এখানে,
$\vec{A}$ ভেক্টরের মান, $|\vec{A}| = 5$N
$\vec{B}$ ভেক্টরের মান, $|\vec{B}| = 6$N

ঘ উদ্দীপক হতে পাই,



$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লব্ধি $\vec{R}$ হলে,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos 60°}$$

$$= \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \times 5 \times 6 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 9.54\text{N}$$

এখানে, ভেক্টর, $|\vec{A}| = 5$N
ভেক্টর, $|\vec{B}| = 6$N
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 60°$

ভেক্টর $\vec{A}$ এর সাথে লব্ধি $\vec{R}$ এর উৎপন্ন কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{B \sin 60°}{A + B \cos 60°}$$

$$= \frac{6 \sin 60°}{5 + 6 \cos 60°}$$

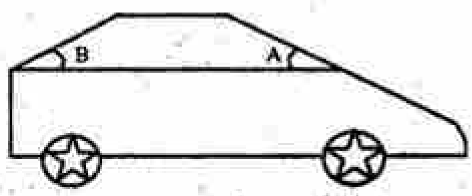
$$\theta = 33°$$

X অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর উপাংশের সমষ্টি, $5 \cos 0° + 6 \cos 60° = 8$N

X অক্ষ বরাবর $\vec{R}$ এর উপাংশ, $9.54 \cos 33° = 8$N

অর্থাৎ X অক্ষ বরাবর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর উপাংশের সমষ্টি, একই দিকে তাদের লব্ধির উপাংশের সমান।

প্রশ্ন ▶৩১ 2ms^{-1} বেগে বয়ে যাওয়া বাতাসের দিকে একটি গাড়ি 12ms^{-1} বেগে চলছে। চিত্রানুযায়ী গাড়িটির সামনের ও পিছনের গ্লাসের কোণ ∠A = 35° ও ∠B = 60°। গাড়িটির সামনের গ্লাসে লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছে।



[আদমজী ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, ঢাকা]

ক. কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে? ১

খ. $\hat{i} \times \hat{i}$ -একটি নাল ভেক্টর কেন? তা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. বৃষ্টির বেগ বের কর। ৩

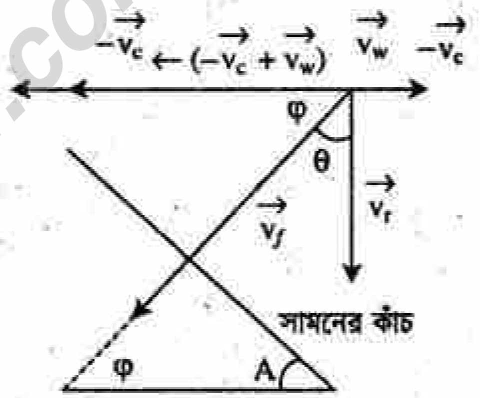
ঘ. বৃষ্টির ফোটা কি সরাসরি পিছনের কাঁচে আঘাত করবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৩১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ঘূর্ণায়মান বস্তুর ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণন জড়তা ও কৌণিক বেগের গুণফলকে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগ বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় যে সাধারণ তলে অবস্থিত, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিক তার লম্ব দিকে। $\hat{i}, \hat{i}$ ভেক্টরদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থান করায় এবং একই দিক নির্দেশ করায় এদের ধারণকারী সাধারণ তল খুঁজে পাওয়া সম্ভব নয় এবং $\hat{i} \times \hat{i}$ এর মান শূন্য তাই লম্ব ভেক্টরের দিকও নির্দেশ করা সম্ভব নয়। সুতরাং $\hat{i} \times \hat{i}$ দ্বারা এমন একটি ভেক্টর নির্দেশিত হয় যার কোনো নির্দিষ্ট মান নেই এবং দিক নেই, এরূপ ভেক্টর কেবল একটিই আছে, সেটি হলো নাল ভেক্টর। একারণেই $\hat{i} \times \hat{i}$ দ্বারা নাল ভেক্টর বুঝায়।

গ



বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $\vec{v}_F = \vec{v}_r + \vec{v}_w$

গাড়ীর সাপেক্ষে বৃষ্টির লব্ধির আপেক্ষিক বেগ, $\vec{v}_f = \vec{v}_F - \vec{v}_c$

$= \vec{v}_r + \vec{v}_w - \vec{v}_c$

$= \vec{v}_r + \vec{v}_w - \vec{v}_c$

এখানে,
গাড়ীর বেগ, $v_c = 12\text{ms}^{-1}$
বাতাসের বেগ, $v_w = 2\text{ms}^{-1}$
গাড়ীর সামনের ও পেছনের কাঁচের অনুভূমিকের সাথে নতি কোন যথাক্রমে ∠A = 35°
∠B = 60°
∴ বৃষ্টির বেগ, $v_r = ?$

$v_C > v_W$; তাই মধ্যবর্তী কোণ,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{|-\vec{v}_c + \vec{v}_w|}{|\vec{v}_r|}$$

বা, $\theta = \tan^{-1}\frac{v_c - v_w}{v_r}$

আবার, $\angle A + \varphi = 90°$

$\theta + \varphi = 90°$

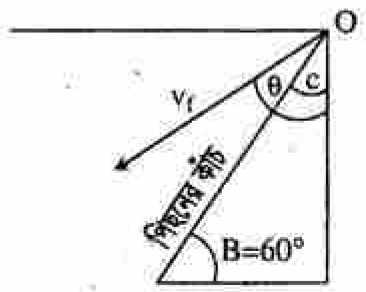
$\therefore \theta = \angle A = 35°$

$\therefore 35° = \tan^{-1}\left(\frac{0.12 - 2}{v_r}\right)$

বা, $\frac{10}{v_r} = \tan 35°$

$\therefore v_r = 14.28\text{ms}^{-1}$ (Ans.)

ঘ



চিত্র থেকে পাই, $\theta = 35°$

$\angle B + \angle C = 90°$

$\therefore \angle C = 90° - \angle B$

$= 90° - 60°$

$= 30°$

যেহেতু $\theta > \angle C$, সেহেতু এমনকি গাড়ির ছাদের পেছনের অংশ ঘেঁষে বৃষ্টি পড়লেও পিছনের কাঁচে আঘাত করবে না।

প্রশ্ন ▶৩২ ২টি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ একই বিন্দু P এর উপর ক্রিয়াশীল। PQRS সমান্তরিকের ২টি সন্নিহিত বাহু $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়। *[এস ও এস হারম্যান মেইনার কলেজ, ঢাকা]*

ক. ভেক্টর ক্ষেত্র কি? ১

খ. লন রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজ, ব্যাখ্যা করো। ২

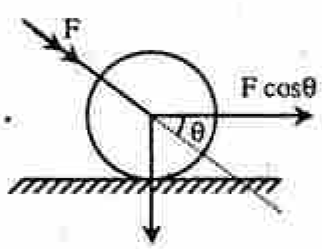
গ. উদ্দীপকের ভেক্টর ২ টির মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো। ৩

ঘ. উদ্দীপকের সামান্তরিকের কর্ণ ও ক্ষেত্রফলের মান কিরূপ হবে, নির্ণয় করো। ৪

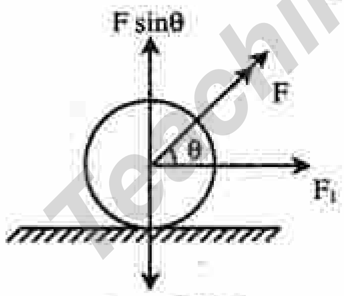
৩২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট রাশিগুলো যদি ভেক্টর হয় তবে ঐ ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

খ লন রোলার ঠেলার সময় এর আপাত ওজন বৃদ্ধি পায় কিন্তু টানার সময় আপাত ওজন হ্রাস পায়। এজন্য লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।



(Fsinθ + mg)



(mg − Fsinθ)

m ভর বিশিষ্ট একটি লন রোলার কে F বলে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ঠেলার ক্ষেত্রে নিচের দিকে লব্ধি বল হয় $(F \sin\theta + mg)$, যা লন রোলারের নিজস্ব ওজন mg অপেক্ষা বেশি। অন্য দিকে টানার ক্ষেত্রে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল হয় $(mg - F \sin\theta)$, ফলে 'রোলারটি হালকা মনে হয়।

গ

$\vec{A} . \vec{B} = AB \cos\theta$ ....(i)

$\vec{A} . \vec{B} = 2 \times 6 + (-2) \times (-4) + (-1) \times 2$

$= 18$

$A = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3$

$B = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{56}$

(i) নং এ মান বসিয়ে পাই,

$18 = 3\sqrt{56} \cos\theta$

$\therefore \theta = 36.7°$

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

ঘ সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি হল $\vec{A} + \vec{B}$ ও $\vec{A} - \vec{B}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) + (6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k})$

$= 8\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ একটি কর্ণের মান $= \sqrt{8^2 + (-6)^2 + (1)^2} = 10.05$ একক **(Ans.)**

আবার, $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} - 6\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

$= -4\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ অপর কর্ণের মান $= |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{29}$

$= 5.39$ একক

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4-4) - \hat{j}(4+6) + \hat{k}(-8+12)$

$= -8\hat{i} - 10\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{(-8)^2 + (-10)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{180}$

$= 6\sqrt{5}$ বর্গ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶৩৩ 3 কি.মি. বিস্তার বিশিষ্ট একটি স্রোতের নদীতে স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে একটি নৌকার বেগ যথাক্রমে 20 km/hr ও 10 km/hr। *[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]*

ক. কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয় কেন? ২

গ. কোন দিকে চালনা করলে ঠিক অপরপারে পৌঁছা যাবে? ৩

ঘ. যদি সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হয় তাহলে স্রোতের দিকে নৌকার সরণ কত হবে? ৪

৩৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যখন কোনো বস্তু একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ঐ বৃত্তের কেন্দ্র অভিমুখে যে নিট ত্বরণ ক্রিয়া করে বস্তুটিকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল রাখে তাকে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল দ্বারা ট্রলি ব্যাগকে সামনের দিকে টেনে নিয়ে যাওয়ার সময় হাতলে প্রযুক্ত বল দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি Fsinθ এবং অপরটি Fcosθ। Fsinθ উপাংশটি উপরের দিকে কার্যরত হয়, এবং Fcosθ উপাংশটি ব্যাগকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। হাতল লম্বা হলে θ এর মান কম হয়। এ অবস্থায় cosθ এর মান বেশি হয় এবং ট্রলির বেগ ধ্রুব রেখে টানতে কম বল লাগে। এ কারণে ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।

গ ধরি,

নৌকার বেগ, u km/hr

স্রোতের বেগ, v km/hr

দেওয়া আছে,

স্রোতের অনুকূলে বেগ, $u + v = 20$ .... (1)

" প্রতিকূলে " , $u - v = 10$ ....(2)

(1) ও (2) যোগ করে,

$2u = 30$

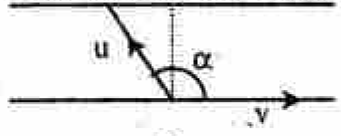
বা, $u = 15$

(1) হতে (2) বিয়োগ করে,

$2v = 10$

$\therefore v = 5$

ধরি, স্রোতের সাথে α কোণে চালনা করতে হবে।



তাহলে যদি সোজা অপরপারে পৌঁছায়, তবে v বরাবর u ও v এর উপাংশের যোগফল শূন্য হবে কারণ $\tan 90° = \frac{1}{0} = \frac{u \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$।

∴ স্রোতের দিকে, u ও v এর উপাংশের যোগফল = $u\cos\alpha + v$

$u\cos\alpha + v = 0$

বা, $\cos\alpha = -\frac{v}{u}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{v}{u}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-5}{15}\right)$

$= \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

∴ $\alpha = 109.47°$

∴ সোজা অপরপারে পৌছানোর জন্য স্রোতের সাথে 109.47° কোণে যাত্রা করতে হবে। (Ans.)

ঘ নদীর প্রস্থ d ও নদী পার হতে সময়, t হয় তবে, $t = \frac{d}{u\sin\alpha}$ .....(1)

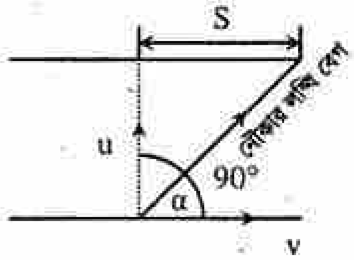
এখন, t সর্বনিম্ন হবে যদি, $u\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হয়, অর্থাৎ, $\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হয়, যেহেতু u ধ্রুবক।

যেহেতু, $\sin\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান 1,

∴ $\sin\alpha = 1$

∴ $\alpha = \sin^{-1}(1) = 90°$

∴ (1) হতে,



∴ $t = \frac{d}{u\sin 90°}$

$= \frac{3\ km}{15\ km/hr \times 1}$

$= \frac{1}{5}$ hr

$= 0.2$ hr

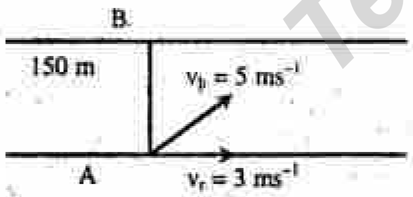
এখন স্রোতের দিকে নৌকার বেগ, u ও স্রোতের বেগ, v এর উপাংশের যোগফল = $u\cos 90° + v\cos 0° = v$

∴ t = 0.2 hr এ নৌকার স্রোতের দিকে সরণ হবে, $s = vt$

$= 5 \times 0.2$

$= 1$ km (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৩৪



চিত্র হতে নিচের প্রশ্নের উত্তর দাও—

[সাভার ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. অপারেটর কী? ১

খ. ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে— ব্যাখ্যা করো। ২

গ. কোন দিকে নৌকা চালালে B বিন্দুতে পৌছানো যাবে? ৩

ঘ. নৌকাটি সর্বনিম্ন কত সময়ে নদী পাড় হতে পারবে? ৪

৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক ক্রিয়া একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তরিত করে তাকে অপারেটর বলে।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে।

ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণ থেকে পাই, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

$\vec{B}.\vec{A} = BA\cos\theta$

কিন্তু A ও B যথাক্রমে ভেক্টর রাশি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মান অর্থাৎ A ও B স্কেলার রাশি।

∴ স্কেলার রাশির গুণন থেকে পাই,

$AB\cos\theta = BA\cos\theta$

∴ $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ এটিই বিনিময় সূত্র।

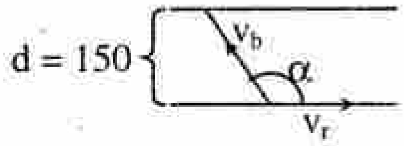
অর্থাৎ, দুইটি ভেক্টর রাশির ডট গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

গ ১০(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর : স্রোতের দিকের সাথে 126.87° কোণে চালাতে হবে।

ঘ ধরি, নৌকাটি পৌছানোর সর্বনিম্ন সময়, t

এবং নৌকাটি স্রোতের সাথে α কোণে যাত্রা করে।



নদীর প্রস্থ বরাবর নৌকার বেগ, v_b ও স্রোতের বেগ, v_r এর উপাংশের যোগফল $= v_b\sin\alpha + v_r\sin 0°$

$= v_b\sin\alpha$

∴ নদী পার হতে সর্বনিম্ন সময় $t = \frac{d}{v_b\sin\alpha}$

t সর্বনিম্ন হবে যদি $v_b\sin\alpha$ অর্থাৎ, $\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হয়, যেহেতু, v_b ধ্রুবক

$\sin\alpha$ সর্বোচ্চ হয়, যখন $\alpha = 90°$

∴ $t = \frac{d}{v_b\sin 90°} = \frac{150\ m}{5\times 1} = 30$ sec **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৩৫ দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$; θ কোণে অবস্থান করছে। *[ঘাটাইল ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. কোনো বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়—ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের বাহু দ্বারা সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণনকে কার্ল বলে।

খ বেগ একটি ভেক্টর রাশি। বৃত্তাকার পথে বস্তু চলতে সবসময় বেগের দিকের পরিবর্তন ঘটে। এমনকি একই দ্রুতিতে চললেও দিকের পরিবর্তনের জন্য সবসময়ই বেগ পরিবর্তিত হয়। এজন্য বৃত্তাকার পথে কোনো বস্তুর সমবেগে চলা সম্ভব নয়।

গ ১২(গ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ। **উত্তর:** 90°।

ঘ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু হলে,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $|\vec{A}\times\vec{B}|$

এখানে,

$\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 1 & -6 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(5 - 36) - \hat{j}(45 + 24) + \hat{k}(-54 - 4)$

$= -31\hat{i} - 69\hat{j} - 58\hat{k}$

∴ $|\vec{A}\times\vec{B}| = \sqrt{(-31)^2 + (-69)^2 + (-58)^2}$

= 95.321 বর্গ একক

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = 95.321 বর্গএকক

প্রশ্ন ▶ ৩৬ রতন সাতপাড় সরকারি কলেজের ছাত্র। তার বাড়ির সামনে 1km প্রশস্ত একটি নদী প্রবাহিত। বাড়ির সোজাসুজি অপর পাড়ে তার কলেজ। একটি সকালে সে ক্লাশ শুরু হওয়ার 4 মিনিট পূর্বে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে $12 kmh^{-1}$ বেগের একটি নৌকায় কলেজের উদ্দেশ্যে রওনা দিলেন।

[শেখ ফজিলাতুন্নেছা সরকারি মহিলা কলেজ, গোপালগঞ্জ]

ক. অভিকর্ষ কেন্দ্র কাকে বলে? ১

খ. আমাদের পায়ে হাঁটা কিভাবে ভেক্টর বিভাজনের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা যায়? ২

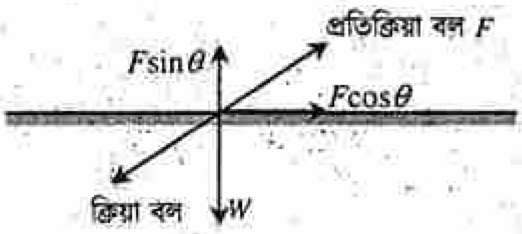
গ. নদীতে স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. রতন কী যথাসময়ে ক্লাশে উপস্থিত হতে পারবে? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে মতামত দাও। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক একটি বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন বস্তুর ভেতরে অবস্থিত যে বিন্দুর মধ্য দিয়ে মোট ওজন ক্রিয়া করে সেই বিন্দুকে বস্তুর অভিকর্ষ কেন্দ্র বলে।

খ



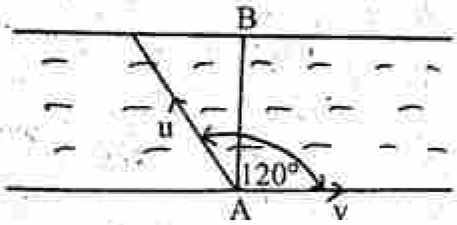
হাঁটার সময় আমরা ভূমিকে পা দিয়ে তীর্যক বল প্রয়োগে পেছনের দিকে ঠেলে দেই। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে ভূমি আমাদের ওপর একটি প্রতিক্রিয়া বল F প্রয়োগ করে। ধরা যাক, প্রতিক্রিয়া বল ভূমির সাথে θ কোণে ক্রিয়া করে। এ প্রতিক্রিয়া বল দুটি উপাংশে বিভক্ত হয়। উলম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ যা আমাদের ওজন কিছুটা হ্রাস করে এবং অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে যেতে সাহায্য করে।

গ উদ্দীপক হতে পাই,

নৌকার বেগ, $u = 12\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = 120°$

স্রোতের বেগ, $v = ?$



আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

বা, $\tan 90° = \frac{12\sin 120°}{v + 12\cos 120°}$

বা, $\frac{1}{0} = \frac{12\sin 120°}{v - 6}$

বা, $v - 6 = 0$

$\therefore v = 6\ kmh^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক হতে পাই,

নৌকার বেগ, $u = 12\ kmh^{-1}$

নদীর প্রস্থ, $d = 1\ km$

স্রোতের বেগের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = 120°$

নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় t হলে,

$d = u\sin\alpha\, t$

বা, $t = \frac{d}{u\sin\alpha} = \frac{1}{12\sin 120°} = 0.0964hr = 5.77\ min$

$\therefore t = 5.77\ min$

কিন্তু রতন ক্লাস শুরুর 4 মিনিট আগে রওনা হয়েছিল। তাই সে যথাসময়ে ক্লাসে উপস্থিত হতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶ ৩৭ পদার্থবিজ্ঞান ক্লাস শেষে দুই বন্ধু জনি ও তপু বাসায় যাওয়ার পথে $6ms^{-1}$ বেগে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। জনি ও তপু যথাক্রমে $10ms^{-1}$ ও $15ms^{-1}$ বেগে সাইকেলে ছাতা ধরে নিরাপদে বাসায় ফিরল।

[সিটি গভ: সিটি কলেজ, রাজশাহী]

ক. কার্ল কি? ১

খ. শূন্য ভেক্টর একাধিক ভেক্টরের লব্ধি-ব্যাখ্যা কর। ২

গ. তপুর সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের জনি ও তপুর ছাতা ধরার কৌশল-গাণিতিক যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর। ৪

৩৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

খ একটি ভেক্টরের মান আলাদা আলাদাভাবে শূন্য হতে পারে না। কিন্তু দুই বা ততোধিক সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে। যেমন, দুটি সমান মানের বলের সমজাতীয় ভেক্টর কোনো বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে সামন্তরিকের সূত্রানুযায়ী তাদের লব্ধি হবে একটি শূন্য ভেক্টর। আবার একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় ভেক্টরকে একই ক্রমে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করলে ত্রিভুজের সূত্রানুযায়ী তাদের লব্ধি হবে শূন্য ভেক্টর। অতএব বলা যায়, শূন্য ভেক্টর হলো একাধিক ভেক্টরের লব্ধি।

গ ৪(গ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর: $16.15\ ms^{-1}$; উলম্বের সাথে 68.2° কোণ উৎপন্ন করে।

ঘ ৪(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর: জনি উলম্বের সাথে 59.036° কোণে এবং তপু উলম্বের সাথে 68.2° কোণে ছাতা ধরবে।

প্রশ্ন ▶ ৩৮ স্থির পানিতে একজন সাঁতারু $4kmh^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারে। $2kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহিত নদীটি সাঁতার কেটে সাঁতারু এপাড় থেকে ঠিক ওপাড়ে সাঁতরে গেলেন। নদীর প্রস্থ 2km.

[বরিশাল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, বরিশাল]

ক. গ্র্যাডিয়ান্ট কাকে বলে? ১

খ. ঠেলার সময় রোলারের আপাত ওজন বৃদ্ধি পায় কেন? ২

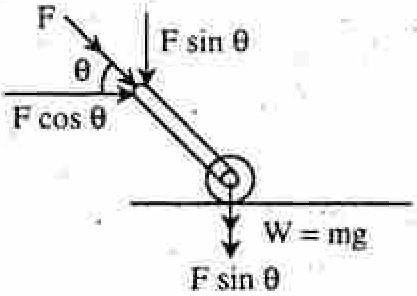
গ. নদীটি সোজাসুজি পাড় হতে সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? ৩

ঘ. নদীটি 30 মিনিট সময়ে পার হওয়া সম্ভব কী? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\phi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করলে $\vec{\nabla}\phi$ কে ϕ-এর গ্র্যাডিয়েন্ট বলা হয়।

খ ঠেলার সময়:



ধরি, লন রোলারের ভর = m

$\therefore$ লন রোলারের ওজন, W = mg

লন রোলারের ঠেলার সময় F বল প্রয়োগ করা হলে θ কোণে ভূমির সাথে তা দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয় যার একটি F sinθ ওজন বরাবর কাজ করে।

$\therefore$ আপাত ওজন = W + F sinθ

এজন্য লন রোলার ঠেলার সময় ওজন বেড়ে যায়।

গ ১০(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।

উত্তর: স্রোতের দিকের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

ঘ আমরা জানি, সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে চাইলে সোজাসুজি অপরপ্রান্তে রওনা দিতে হবে।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে, স্রোতের বেগ ও সাঁতারুর বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 90°$

দেয়া আছে, সাঁতারুর বেগ, u = 4 km/h

স্রোতের বেগ, v = 2 km/h

নদীর প্রস্থ, d = 2km

নদীর প্রস্থ বরাবর u ও v উপাংশের যোগফল, w $= u\cos 0° + v\cos 90°$

$= 4 \times 1 + 2 \times 0$

$= 4\ \text{kmh}^{-1}$

$\therefore$ এক্ষেত্রে, প্রয়োজনীয় সময়, $t = \dfrac{d}{w}$

$= \dfrac{2\ \text{km}}{4\ \text{kmh}^{-1}}$

$= 0.5$ hr

$= 30$ min

অতএব, সাঁতারু যদি নদীর প্রস্থ বরাবর যাত্রা শুরু করে, তবে 30 min এ নদী পার হওয়া সম্ভব। তবে এর চাইতে কম সময়ে পার হওয়া সম্ভব নয়।

প্রশ্ন ▶৩৯ $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

[কাদিরাবাদ ক্যান্টনমেন্ট স্যাপার কলেজ, নাটোর]

ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. একটি ট্রলি ব্যাগকে স্থানান্তরের সময় টানা হয় কেন? ২

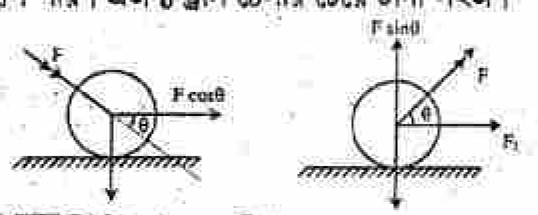
গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? ৩

ঘ. ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত কিনা-গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে। কোন ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

খ ট্রলি ঠেলার সময় এর আপাত ওজন বৃদ্ধি পায় কিন্তু টানার সময় আপাত ওজন হ্রাস পায়। এজন্য ট্রলি ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।



ঠেলার ক্ষেত্রে (Fsinθ + mg) টানার ক্ষেত্রে (mg − Fsinθ)

m ভর বিশিষ্ট একটি ট্রলিকে F বলে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ঠেলার ক্ষেত্রে নিচের দিকে লব্ধি বল হয় (F sinθ + mg), যা ট্রলির নিজস্ব ওজন mg অপেক্ষা বেশি। অন্য দিকে টানার ক্ষেত্রে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল হয় (mg − F sinθ), ফলে ট্রলিটি হালকা মনে হয়।

গ দেওয়া আছে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ $\therefore A = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}$

$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ $\therefore B = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $2 \times 1 + 2 \times 2 + (-3) \times 4 = \sqrt{17} \times \sqrt{21}\cos\theta$

বা, $\cos\theta = \dfrac{-6}{\sqrt{17} \times \sqrt{21}}$

বা, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-6}{\sqrt{357}}\right) = 108.52°$ **(Ans.)**

ঘ একই সমতলে অবস্থিত হবে

যদি $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হয়

এখানে,

$\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(2-8) - \hat{j}(1-8) + \hat{k}(2-4)$

$= -6\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore \vec{B} \times \vec{C} = -6\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$

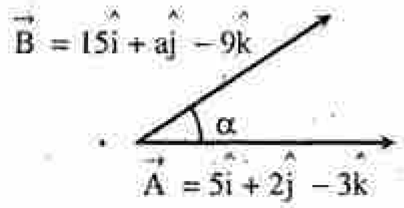
এবং $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

আবার, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = -6 \times 2 + 7 \times 2 + (-2) \times (-3)$

$= 8 \neq 0$

$\because \vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) \neq 0$, তাই A, B ও C একই সমতলে অবস্থিত নয়।

প্রশ্ন ▶৪০



চিত্রে A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ = α

[বি এ এফ শাহীন কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. কার্লের তাৎপর্য বর্ণনা কর। ২

গ. a এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে? ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় কী ভেক্টর গুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। ৪

৪০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

খ কার্লের ভৌত তাৎপর্যগুলো নিম্নরূপ:

i. কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান।

ii. ভেক্টরটির দিক ঐ ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

iii. কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেক্টরটির মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ হলে, $|\vec{\nabla} \times \vec{v}| = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

iv. কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা শূন্য।

অর্থাৎ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$

গ এখানে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$

$a = ?$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 0^0$ হবে।

অর্থাৎ, $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\eta}\, AB\sin 0^\circ = 0$ হবে।

এখন, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 15 & a & -9 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-18 + 3a) - \hat{j}(-45 + 45) + \hat{k}(5a - 30)$

$= (3a - 18)\hat{i} + (5a - 30)\hat{k}$

সুতরাং $(3a - 18)\hat{i} + (5a - 30)\hat{k} = \vec{0}$

এখন, $\hat{i}$ এবং $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে অর্থাৎ সমীকরণের দুইপাশের সহগ সমান বিবেচনা করে পাই,

$3a - 18 = 0$

বা, $a = 6$

এবং $5a - 30 = 0$

$\therefore a = 6$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 15 & a & -9 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ a & -9 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 15 & -9 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 15 & a \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-18 + 3a) - \hat{j}(-45 + 45) + \hat{k}(5a - 30)$

$= (3a - 18)\hat{i} + (5a - 30)\hat{k}$

আবার,

$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 15 & a & -9 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} a & -9 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 15 & -9 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 15 & a \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-3a + 18) - \hat{j}(-45 + 45) + \hat{k}(30 - 5a)$

$= -\{(3a - 18)\hat{i} + (5a - 30)\hat{k}\}$

$= -\vec{A} \times \vec{B}$

$\therefore \vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

সুতরাং, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় ভেক্টরগুণনের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

প্রশ্ন ▶ ৪১ $\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$

[ক্যান্টনমেন্ট কলেজ, যশোর]

ক. অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা থাকার সুবিধা ব্যাখ্যা কর। ২

গ. a এর মান কত হলে $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে তা নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর একই সমতলে রাখতে তোমার কী ব্যবস্থা নিতে হবে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল দ্বারা ট্রলি ব্যাগকে সামনের দিকে টেনে নিয়ে যাওয়ার সময় হাতলে প্রযুক্ত বল দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি $F\sin\theta$ এবং অপরটি $F\cos\theta$। $F\sin\theta$ উপাংশটি উপরের দিকে কার্যরত হয়, এবং $F\cos\theta$ উপাংশটি ব্যাগকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। হাতল লম্বা হলে θ এর মান কম হয়। এ অবস্থায় cosθ এর মান বেশি হয় এবং ট্রলির বেগ ধ্রুব রেখে টানতে কম বল লাগে। এ কারণে ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$

$\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হলে $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$

বের করতে হবে, $a = ?$

আমরা জানি, $\vec{\nabla} . \vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \{(x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}\}$

$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(ay - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + 4z)$

$= 1 + 0 + a - 0 + 0 + 4 = a + 5$

শর্ত মতে, $\vec{\nabla} . \vec{V} = 0$

বা, $a + 5 = 0$

$\therefore a = -5$ **(Ans.)**

$\therefore$ a এর মান -5 হলে $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে।

ঘ প্রদত্ত $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি নিম্নরূপ:

$\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই তলের উপর অবস্থিত হতে হলে $\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হতে হবে।

এখানে,

$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$= -7\hat{i} - 14\hat{j} - 7\hat{k}$

$\therefore \vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) = (m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) . (-7\hat{i} - 14\hat{j} - 7\hat{k})$

$= -7m - 14 + 7 = -m - 7$

শর্তমতে, $\vec{A} . (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

বা, $-7m - 7 = 0$

বা, $-7m = 7$

বা, $m = -1$

সুতরাং m এর মান -1 হলে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে রাখা যাবে।

প্রশ্ন ▶ ৪২ দুটি ভেক্টর রাশিকে নিম্নরূপে লেখা হলো:

$\vec{A} = 2\hat{i} + 7\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$

[দিনাজপুর সরকারি কলেজ, দিনাজপুর]

ক. একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. $\vec{A} \times \vec{B}$ এবং $\vec{B} \times \vec{A}$ সমান নয় কেন ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ এর মান কত? ৩

ঘ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণের চেয়ে $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ বড় না ছোট হবে— বিশ্লেষণ কর। ৪

৪২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান এক তাকে একক ভেক্টর বলে কোন ভেক্টরকে এর মান দিয়ে ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর পাওয়া যায়।

খ $\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta\hat{\eta}_1$

$=AB\sin\theta\,\hat{\eta}_1$

$\hat{\eta}_1$ হলো একটি একক ভেক্টর যার দিক একটি ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের সমতলে রেখে $\vec{A}$ ভেক্টর হতে $\vec{B}$ ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকে,

আবার, $\vec{B}\times\vec{A}=|\vec{B}|\,|\vec{A}|\sin\theta\hat{\eta}_2=BA\sin\theta\,\hat{\eta}_2$

$\hat{\eta}_2$ হলো একটি একক ভেক্টর যার দিক একটি ডানহাতি স্ক্রুকে $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ ভেক্টরের সমতলে রেখে $\vec{B}$ ভেক্টর হতে $\vec{A}$ ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকে,

যেহেতু $\hat{\eta}_1$ ও $\hat{\eta}_2$ এর ডান হাতি স্ক্রুকে দুই বিপরীত ঘুরানো হয়, তাই $\hat{\eta}$। -1 ও $\hat{\eta}_2$ এর দিক বিপরীত।

$\therefore \hat{\eta}_2=-\hat{\eta}_1$

$\therefore \vec{B}\times\vec{A}=AB\sin\theta(-\hat{\eta}_1)=-AB\sin\theta\hat{\eta}_1=-\vec{A}\times\vec{B}$

অতএব এদের মান সমান কিন্তু $\vec{A}\times\vec{B}$ এর দিক যেদিকে $\vec{B}\times\vec{A}$ এর দিক তার বিপরীত দিকে। তাই এরা সমান নয়।

গ

দেওয়া আছে,
$\vec{A}=2\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}$
$\vec{B}=2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{A}+\vec{B}=2\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}+2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$

$=4\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{4^2+4^2+1^2}=\sqrt{33}$ (Ans.)

$\vec{A}-\vec{B}=2\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}-2\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$

$=10\hat{j}-5\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{10^2+(-5)^2}=5\sqrt{5}$ (Ans.)

ঘ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে, $\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\alpha$

দেওয়া আছে,
$\vec{A}=2\hat{i}+7\hat{j}-2\hat{k}$
$\vec{B}=2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$
$\therefore \vec{A}.\vec{B}=4-21-6$
$=-23$
$A=\sqrt{2^2+7^2+(-2)^2}$
$=\sqrt{57}$
$B=\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}$
$=\sqrt{22}$
আবার,
$\vec{A}+\vec{B}=4\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$
$\vec{A}-\vec{B}=10\hat{j}-5\hat{k}$
$\therefore (\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=35$
$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{4^2+4^2+1}$
$=\sqrt{33}$
$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{10^2+(-5)^2}$
$=\sqrt{125}$

$\therefore \cos\alpha=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$

$=\dfrac{-23}{\sqrt{57\times22}}$

$\therefore \alpha=130.5°$

আবার, $\vec{A}+\vec{B}$ ও $\vec{A}-\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ β হলে,

$\cos\beta=\dfrac{(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})}{|\vec{A}+\vec{B}|\,|\vec{A}-\vec{B}|}$

$=\dfrac{35}{\sqrt{33\times125}}$

$\therefore \beta=57°$

$\therefore \alpha>\beta$

$\therefore$ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $(\vec{A}+\vec{B})$ ও $(\vec{A}-\vec{B})$ এর মধ্যবর্তী কোণ অপেক্ষা বড়। (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৪৩ দেওয়া আছে, দুটি ভেক্টর $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ও $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ *[সরকারি বেগম রোকেয়া কলেজ, রংপুর]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. ক্রস গুণ বিনিময় সূত্র মেনে চলে না— ব্যাখ্যা করো। ২

গ. উদ্দীপকের ভেক্টর দুটির ডট গুণফল নির্ণয় করো। ৩

ঘ. ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল হলে গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে দেখাও যে, $\dfrac{A_x}{B_x}=\dfrac{A_y}{B_y}=\dfrac{A_z}{B_z}$। ৪

৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

খ মনেকরি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ θ হলে, $\vec{A}\times\vec{B}=\hat{\eta}\,AB\sin\theta$

আবার, $\vec{B}\times\vec{A}=AB\sin\theta(-\hat{\eta})=-AB\sin\theta\,\hat{\eta}$

অর্থাৎ, $\vec{A}\times\vec{B}$ এর দিক যা হবে $\vec{B}\times\vec{A}$ এর দিক হবে বিপরীতে তাই $\vec{A}\times\vec{B}$ এবং $\vec{B}\times\vec{A}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলেও দিক হবে পরস্পর বিপরীত। এ কারণে $\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$

অর্থাৎ ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

গ

দেওয়া আছে,
$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$
$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

$\vec{A}.\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

যেহেতু $\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$ এবং $\hat{i}.\hat{j}$
$=\hat{i}.\hat{k}=\hat{j}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=\hat{k}.\hat{j}=0$

ঘ আমরা জানি, দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে, $\vec{A}\times\vec{B}=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \hat{i}(A_yB_z-A_zB_y)-\hat{j}\,(A_xB_z-A_zB_x)+\hat{k}\,(A_xB_y-A_yB_x)=0$

যেহেতু তিনটি পরস্পর লম্ব ভেক্টর এর যোগফল 0, সুতরাং তারা প্রত্যেকে আলাদাভাবে 0।

$\therefore A_yB_z-A_zB_y=0$

$\Rightarrow A_yB_z=A_zB_y$

$\therefore \dfrac{A_y}{B_y}=\dfrac{A_z}{B_z}$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $A_xB_z=A_zB_x$

$\therefore \dfrac{A_x}{B_x}=\dfrac{A_z}{B_z}$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে,

$\dfrac{A_x}{B_x}=\dfrac{A_y}{B_y}=\dfrac{A_z}{B_z}$ [দেখানো হলো]

প্রশ্ন ▶ ৪৪ দুইটি ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{A}=4x^2yz\,\hat{i}+3xy\,\hat{j}-x^2y\,\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3xy\,\hat{i}-yz\,\hat{j}+zx\hat{k}$ *[চট্টগ্রাম ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক কলেজ, চট্টগ্রাম]*

ক. বিপ্রতীপ ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. ভেক্টরের সাহায্যে নৌকার গুণ টানা ব্যাখ্যা করো। ২

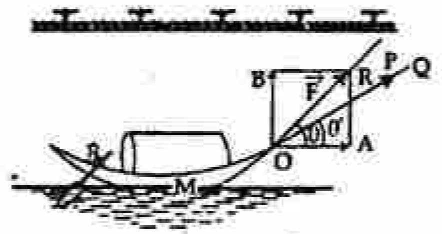
গ. ভেক্টর দুইটির লম্ব দিকের ভেক্টর নির্ণয় করো। ৩

ঘ. (2, -1,3) বিন্দুতে লম্বদিকের ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে কি-না গাণিতিক ব্যাখ্যা করো। ৪

৪৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপরীত রাশি হলে এদেরকে পরস্পরের বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

খ মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে F বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা- স্রোতের দিকের উপাংশ ও নদীর প্রস্থ বরাবর উপাংশ।



স্রোতের দিকে উপাংশ = $F\cos\theta$, এর দিক OA বরাবর। নদীর প্রস্থ বরাবর উপাংশ $F\sin\theta$, এর দিক OB বরাবর।
বলের উপাংশ $F\cos\theta$, নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উপাংশ $F\sin\theta$, নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উপাংশ, $F\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ এর মান তত কম হবে; ফলে $F\sin\theta$ এর মান কম হবে এবং $F\cos\theta$ এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। অর্থাৎ গুণের রশি বেশি লম্বা হলে নৌকা বেশি দ্রুত চলবে। OP রশি দ্বারা টানলে নৌকার গতি OQ রশি দ্বারা টানার চেয়ে কম হবে। কারণ OQ রশি লম্বা এবং $\theta' < \theta$

গ দেওয়া আছে, $\vec{A} = 4x^2yz\,\hat{i} + 3xyz\,\hat{j} - x^2y\,\hat{k}$

$\vec{B} = 3xy\,\hat{i} - yz\,\hat{j} + zx\,\hat{k}$

ভেক্টর দুটির লম্ব দিকের ভেক্টর,

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4x^2yz & 3xyz & -x^2y \\ 3xy & -yz & zx \end{vmatrix}$$

$$= (3x^2yz^2 - x^2y^2z)\,\hat{i} - \hat{j}\,(4x^3yz^2 + 3x^3y^2) + \hat{k}\,(-4x^2y^2z^2 - 9x^2y^2z)\ \textbf{(Ans.)}$$

ঘ (গ) হতে মান ব্যবহার করে,

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2yz^2 - x^2y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^2 + 3x^3y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-4x^2y^2z^2 - 9x^2y^2z)$$

$$= 6xyz^2 - 2xy^2z - 4x^3z^2 - 6x^3y - 8x^2y^2z - 9x^2y^2$$

$$= 2xyz(3z - y) - 2x^3(2z^2 + 3y) - x^2y^2(8z + 9)$$

∴ (2, −1, 3) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$= 2\times2\times(-1)\times3\,(3\times3+1) - 2\times2^3\,\{2\times3^2 + 3\times(-1)\} - 2^2 \times(-1)^2\times(8\times3+9)$

$= -120 - 240 - 132$

$= -492 \neq 0$

∴ লম্ব ভেক্টরটি সলিনয়ডাল নয়। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৫ করিম ও রহিম দুই মাঝি 500 মিটার প্রস্থ সন্ধ্যা নদীতে ট্রলার চালায়। একদিন নদীতে স্রোতের বেগ 8 মি./সে. স্রোতহীন নদীতে উভয়ের ট্রলারের বেগ 10 মি./সে। করিম স্রোতের সাথে তির্যকভাবে পাড়ি দিয়ে ঠিক অপর পারে পৌছায়। অন্যদিকে রহিম সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌছুতে গিয়ে ব্যর্থ হয়।

[পিরোজপুর সরকারি মহিলা কলেজ, পিরোজপুর]

ক. গ্র্যাডিয়েন্ট কাকে বলে? ১

খ. ফ্যানের বাতাস নিচে লাগে কেন ব্যাখ্যা করো। ২

গ. করিম মাঝি কত কোণে পাড়ি দেয় নির্ণয় করো। ৩

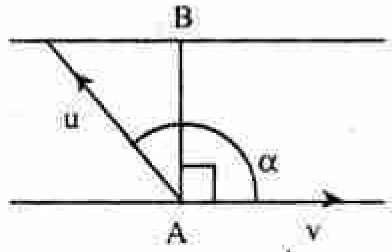
ঘ. করিম ও রহিমের মধ্যে কে বুদ্ধিমান গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করো। ৪

৪৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\phi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করলে $\vec{\nabla}\phi$ কে φ-এর গ্রেডিয়েন্ট বলা হয়।

খ বৈদ্যুতিক ফ্যানের পাখার একটি ধার নিচের দিকে বাঁকানো অবস্থায় থাকে এবং এ ধারটি ফ্যান যেদিকে ঘোরে তার বিপরীত পাশে থাকে। ফলে, যখন ফ্যান ঘোরে তখন পাখার সামনের বাতাস উক্ত বাঁকানো ধারে বাধা পেয়ে নিচের দিকে নেমে আসে।
একারণে ফ্যানের নিচে বাতাস লাগে।

গ



দেওয়া আছে,
স্রোতহীন নদীতে নৌকার বেগ, u = 10 m/s
মধ্যবর্তী কোণ, α = ?
স্রোতের বেগ, v = 8 m/s

$\tan\theta = \dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

$\tan 90^\circ = \dfrac{10\sin\alpha}{8 + 10\cos\alpha}$

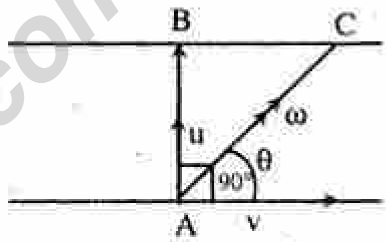
$\Rightarrow \dfrac{1}{0} = \dfrac{10\sin\alpha}{8 + 10\cos\alpha}$

$\Rightarrow 8 + 10\cos\alpha = 0$

$\therefore \alpha = 143.1^\circ$

করিম মাঝি 143.1° কোণে পাড়ি দেয়। **(Ans.)**

ঘ



যেহেতু রহিম সোজাসুজি 90° কোণ অনুযায়ী যাত্রা শুরু করে। সুতরাং তার ক্ষেত্রে u ও v এর মধ্যবর্তী কোণ, α = 90°
∴ লব্ধি ও v এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\tan\theta = \dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$

এখানে,
নৌকার বেগ, u = 10 m/s
স্রোতের বেগ, v = 8m/s
নদীর প্রস্থ, AB = 500 m

$= \dfrac{10\sin 90}{8 + 10\cos 90}$

$\therefore \theta = 51.34^\circ$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 51.34^\circ = 38.66^\circ$

$\therefore BC = AB\tan(\angle BAC)$

$= 500\times\tan(38.66^\circ)$

$= 400$ m

∴ রহিম অপর পাড় হতে 400 m দূরে পৌছাবে।
কিন্তু (গ) হতে পাই, করিম 143.1° কোণে রওনা দেয়, ফলে ঠিক অপর প্রান্তে পৌছায়।
∴ করিম বুদ্ধিমান। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৬ $\vec{A} = xy\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2y\hat{k}$ এবং $\vec{B} = (6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি নির্দেশ করে।

[বাংলাদেশ নৌবাহিনী স্কুল এন্ড কলেজ, খুলনা]

ক. পীচ কাকে বলে? ১

খ. ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখার সুবিধা কী? ব্যাখ্যা করো। ২

গ. (2, −1,2) বিন্দুতে $\vec{A}$ এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় করো। ৩

ঘ. উদ্দীপক অনুসারে $\vec{B}$ ভেক্টরটির কার্লের প্রকৃতি বিশ্লেষণ করো। ৪

৪৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো বৃত্তাকার স্কেল একবার ঘুরালে তা রৈখিক স্কেল বরাবর যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ঐ যন্ত্রের পীচ বলে।

খ ট্রলি ব্যাগের হাতল দ্বারা ট্রলি ব্যাগকে সামনের দিকে টেনে নিয়ে যাওয়ার সময় হাতলে প্রযুক্ত বল দুইটি উপাংশে বিভক্ত হয়। একটি $F\sin\theta$ এবং অপরটি $F\cos\theta$। $F\sin\theta$ উপাংশটি উপরের দিকে কার্যরত হয়, এবং $F\cos\theta$ উপাংশটি ব্যাগকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায়। হাতল লম্বা হলে θ এর মান কম হয়। এ অবস্থায় $\cos\theta$ এর মান বেশি হয় এবং ট্রলির বেগ ধ্রুব রেখে টানতে কম বল লাগে। এ কারণে ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা রাখা হয়।

গ

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2y)$$
$$= y + 2yz + 2yz$$
$$= y + 4yz$$
$$= y(1 + 4z)$$

এখানে,
$\vec{A} = xy\hat{i} + y^2z\hat{j} + z^2y\hat{k}$

$\therefore (2, -1, 2)$ বিন্দুতে, $\vec{\nabla}.\vec{A} = -1 \times (1 + 4 \times 2)$
$= -9$ **(Ans.)**

ঘ $\vec{B} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy + z^3 & 3x^2 - z & 3xz^2 - y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\}$$
$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}(-1 + 1) - \hat{j}(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}(6x - 6x)$$
$$= 0$$

যেহেতু $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$

$\therefore \vec{B}$ অঘূর্ণনশীল। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৭ জারিয়া স্টেশনে ট্রেন ধরার জন্য দূর্গাপুর বাসিন্দাদের নদী পার হতে হয়। একদিন ট্রেন ছাড়ার 30 মিনিট সময় বাকি আছে। নদীতে স্রোতের বেগ $1 kmh^{-1}$ একজন মাঝি $30°$ কোণে $3 kmh^{-1}$ নৌকা চালাচ্ছেন। নদীটির চওড়া 0.5 km। একদল যাত্রী নৌকায় ট্রেন ধরার জন্য নদী পার হচ্ছে। *[আহম্মদ উদ্দিন শাহ শিশু নিকেতন স্কুল ও কলেজ, গাইবান্ধা]*

ক. সমান ভেক্টর কী? ১

খ. রৈখিক বেগ ভিন্ন হলেও কী কেন্দ্রমুখী ত্বরণ একই হতে পারে? ব্যাখ্যা করো। ২

গ. নৌকা আড়াআড়ি পার হতে হলে স্রোতের কালে কত কোণে নৌকা চালাতে হবে নির্ণয় করো। ৩

ঘ. যাত্রীরা কী ট্রেন ধরতে পেরেছিল। গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। ৪

৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর

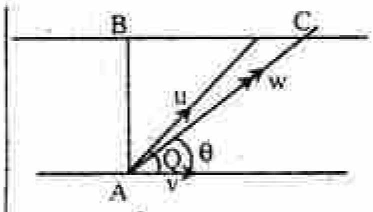
ক সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের মান যদি সমান হয় আর তাদের দিক যদি একই দিকে হয় তবে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

খ আমরা জানি, সমকৌণিক বেগে গতিশীল কণার একটি রৈখিক ত্বরণ সর্বদা কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করে। এই ত্বরণকে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ বলা হয়। এই রৈখিক ত্বরণ হলো কণার রৈখিক বেগের পরিবর্তনের হার। রৈখিক বেগের পরিবর্তনের হার একই হয় বলে রৈখিক ত্বরণ ধ্রুব থাকে। কিন্তু রৈখিক বেগ পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ, রৈখিক বেগ প্রতিমুহূর্তে ভিন্ন ভিন্ন হয়। অতএব, রৈখিক বেগ ভিন্ন হলেও কেন্দ্রমুখী ত্বরণ একই হতে পারে।

গ ১০(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ। **উত্তর:** $109.47°$

ঘ লব্ধি বেগ,
$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
$= \sqrt{1^2 + 3^2 + 2 \times 1 \times 3 \times \cos30°}$
$= 3.9$ km/h

দেওয়া আছে,



স্রোতের বেগ, $v = 1$ km/h
নৌকার বেগ, $u = 3$ km/h
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 30°$
নদীর প্রস্থ, $AB = 0.5$ km

এবং, v এর সাথে লব্ধির কোণ θ হলে,

$$\tan\theta = \frac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha}$$
$$= \frac{3\sin30°}{1 + 3\cos30°}$$
$$= 0.4168$$

$\therefore \theta = 22.63°$
$\therefore \angle ACB = 22.63°$

এখন, $\frac{AB}{AC} = \sin\angle ACB$

$\therefore AC = \frac{0.5}{\sin 22.63°}$
$= 1.3$ km

$\therefore$ অতিক্রম করতে সময় $= \frac{1.3}{3.9}$ h
$= 0.33$ h
$= 20$ min.

যেহেতু, তাদের হাতে সময় ছিল 30 min, সুতরাং তারা ট্রেনটি ধরতে পারবে। **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৪৮ সাথী শপিংমলে বাজার করার সময় একদিন ট্রলি গাড়ি ব্যবহার করছিল। সে ট্রলি গাড়ির হ্যান্ডেলটিতে উলম্বের সাথে $30°$ কোণে 10 N বল প্রয়োগ করে গাড়িটিকে ঠেলতে থাকে। এটা দেখে দোকানদার বললেন, আপনি গাড়ির হ্যান্ডেল ধরে টানেন, এতে কম পরিশ্রম হবে। *[বৃন্দাবন সরকারি কলেজ, হবিগঞ্জ]*

ক. কার্ল কী? ১

খ. "কোন বস্তুর বৃত্তাকার পথে সমবেগে চলা সম্ভব নয়"— ব্যাখ্যা করো। ২

গ. ট্রলির গতি সৃষ্টিকারী বল কত? ৩

ঘ. দোকানদারের কথার যৌক্তিকতা প্রমাণ করো। ৪

৪৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর $\vec{\nabla}$ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণকে কার্ল বলে।

খ সুষম বৃত্তাকার গতিতে বেগ সর্বদা বৃত্তাকার পথের যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে। এজন্য বেগের মান এক হলেও দিক সর্বদা পরিবর্তনশীল হওয়ায় বেগের পরিবর্তনের মান শূন্য হয় না। এজন্য সুষম বৃত্তাকার গতিতে ত্বরণ থাকে।
এ কারণে বৃত্তাকার পথে গতিশীল বস্তুর সমবেগে চলা সম্ভব নয়।

গ ১৭(গ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

ঘ ১৭(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৪৯ একজন মাঝি 5 km প্রশস্থ নদীতে নৌকা চালানোর সময় দেখল যে, স্রোতের অনুকূলে গতিবেগ 18 km/h এবং প্রতিকূলে গতিবেগ 6 km/h। মাঝি তার অভিজ্ঞতা কাজে লাগিয়ে সোজা ওপারে পৌঁছাল। ফেরার পথে সময় কম থাকায় নৌকার বেগ দ্বিগুণ করলেন এবং সোজা ঘাটে ফিরলেন। *[লালমনিরহাট সরকারি কলেজ, লালমনিরহাট]*

ক. তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. উদাহরণসহ সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বলের সংজ্ঞা দাও। ২

গ. যাওয়ার সময় নৌকাকে কোনদিকে চালাতে হয়েছিল এবং লব্ধি বেগ কত ছিল? ৩

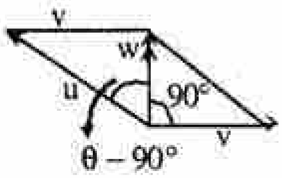
ঘ. ফেরার পথে নৌকাকে কোনদিকে চালাতে হয়েছিল এবং সময় কত লেগেছিল? ৪

৪৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো গতিশীল বস্তুর কোনো বিশেষ মুহূর্তের বেগকে ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক বেগ বলে। ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানে সরণের হার দ্বারা তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করা হয়।

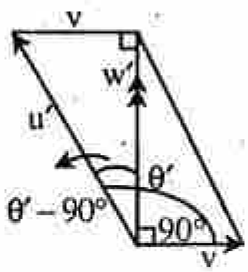
খ যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ– অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, আদর্শ স্প্রিং এর বিকৃতি প্রতিরোধী বল প্রভৃতি।
যে বল কোনো বস্তুর ওপর ক্রিয়া করলে তাকে যেকোনো পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ঐ বল কর্তৃক কাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে। উদাহরণ– ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল প্রভৃতি।

গ মনে করি, নৌকার প্রকৃত গতিবেগ, u
এবং স্রোতের গতিবেগ, v
$\therefore$ প্রশ্নমতে, $u + v = 18 km/h$ এবং $u - v = 6 km/h$
সমাধান করে পাই, $u = 12 km/h$ এবং $v = 6 km/h$
মনেকরি, নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে θ কোণে চালাতে হবে।
তাহলে,



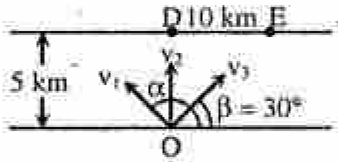
$$\sin(\theta - 90°) = \frac{v}{u}$$
বা, $-\sin(90° - \theta) = \frac{v}{u}$
বা, $-\cos\theta = \frac{v}{u}$
বা, $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{v}{u}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right) = 120°$
সুতরাং যাওয়ার সময় নৌকাটিকে স্রোতের দিকের সাথে 120° কোণে চালাতে হয়েছিল এবং এ সময় লব্ধিবেগ ছিল,
$$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos120°}$$
$$= \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \times 12 \times 6\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= 10.4 km/h$$

ঘ ফেরার পথে নৌকাটির বেগ, $u' = 2 \times 12 km/h$
$= 24 km/h$
মনে করি, ফেরার পথে নৌকাকে স্রোতের দিকের সাথে θ′ কোণে চালাতে হয়েছিল।
তাহলে লব্ধিবেগের সাথে নৌকার দিকের কোণ $= \theta' - 90°$
এবার,



$$\sin(\theta' - 90°) = \frac{v}{u'}$$
বা, $-\sin(90° - \theta') = \frac{v}{u'}$
বা, $-\cos\theta' = \frac{v}{u'}$
বা, $\theta' = \cos^{-1}\left(-\frac{v}{u'}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{24}\right) = 104.5°$
সুতরাং স্রোতের দিকের সাথে 104.5° কোণে নৌকাটি চালাতে হয়েছিল।
এক্ষেত্রে লব্ধিবেগ, $w' = \sqrt{u'^2 - v^2}$
$= \sqrt{24^2 - 6^2}$
$= 23.24 km/h$
সময় লেগেছিল, $t = \frac{\text{নদীর প্রশস্ততা}}{\text{নৌকার লব্ধি গতিবেগ}}$
$= \frac{5 km}{23.24 km/h} = 0.215 hr$
$= 0.215 \times 60 min$
$= 12 min 54 sec$

প্রশ্ন ▶ ৫০ ক, খ ও গ তিন মাঝি 5 km প্রস্থবিশিষ্ট 3 kmh^{-1} স্রোতবিশিষ্ট একটি নদীর এক পাড় থেকে অপর পাড়ে 6 kmh^{-1} বেগে নদী পাড়ি দিতে শুরু করল। ক মাঝি ঠিক বিপরীত D বিন্দুতে পৌছায়।



[বান্দরবান সরকারি কলেজ]

ক. ভেক্টর অপারেটর বলতে কি বুঝ? ১
খ. গাড়ির গতি দ্বিগুণ হলে থামানোর দূরত্ব চারগুণ হতে হবে- ব্যাখ্যা কর। ২
গ. ক মাঝির লব্ধি বেগ নির্ণয় কর। ৩
ঘ. খ মাঝি যদি নৌকার বেগের মান ও দিক অপরিবর্তিত রাখে তাহলে কি E বিন্দুতে পৌছাতে পারবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৫০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি ভেক্টর রাশিকে অন্য একটি স্কেলার বা ভেক্টর রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল ভেক্টর রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে ভেক্টর অপারেটর বলে।

খ বাসটি থেমে গেলে, $v = 0$
$\therefore v^2 = v_0^2 - 2as$ সূত্র হতে
$v_0^2 = 2as$
মন্দন a ধ্রুবমানের হলে, $s \propto v_0^2$
সুতরাং কোনো বাস ড্রাইভারের গাড়ির গতিবেগ দ্বিগুণ হলে থামানোর দূরত্ব 2^2 বা 4 গুণ হতে হয়।

গ এখানে, ক মাঝির নৌকার বেগ, $v_1 = 6 kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $v = 3 kmh^{-1}$
নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha$
স্রোতের সাথে লব্ধির উৎপন্ন কোণ, $\theta = 90°$
আমরা জানি,
$$\tan\theta = \frac{v_1\sin\alpha}{v + v_1\cos\alpha}$$
বা, $\tan90° = \frac{6\sin\alpha}{3 + 6\cos\alpha}$
বা, $\frac{1}{0} = \frac{6\sin\alpha}{3 + 6\cos\alpha}$
বা, $3 + 6\cos\alpha = 0$
বা, $\cos\alpha = -\frac{3}{6}$
বা, $\alpha = \cos^{-1}(-1/2)$
$\therefore \alpha = 120°$
ক মাঝির লব্ধি বেগ w হলে,
$w^2 = v_1^2 + v^2 + 2v_1v\cos\alpha$
বা, $w = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2 \times 6 \times 3\cos120°}$
$\therefore w = 5.19 ms^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক অনুযায়ী,
খ মাঝি v_2 বেগে স্রোতের বেগের সাথে 90° কোণে রওনা দেয়।
দেওয়া আছে, খ মাঝির নৌকার বেগ, $v_2 = 6 kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $v = 3 kmh^{-1}$
নদীর প্রস্থ, $d = 5 km$
v_2 ও v এর অনুভূমিক উপাংশের যোগফল $= v_2\cos90° + v\cos0°$
$= v = 3 kmh^{-1}$
এবং উল্লম্ব উপাংশের যোগফল $= v_2\cos0° + v\cos90°$
$= v_2 = 6 kmh^{-1}$

$\therefore$ নদী পাড়ি দিতে খ মাঝির প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{v_2}$

$= \frac{5 \text{ km}}{6 \text{ kmh}^{-1}}$

$= \frac{5}{6}$ hr

এ সময়ে খ মাঝি কর্তৃক অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব, $x = vt$

$= 3 \times \frac{5}{6}$ km

$= 2.5$ km

কিন্তু, D হতে E এর দূরত্ব, DE = 10 km > 2.5 km

অতএব, খ মাঝি নৌকার বেগের মান ও দিক অপরিবর্তিত রাখলে E বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে না।

প্রশ্ন ▶ ৫১ $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N এবং $\vec{F_2} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 0.5\hat{k})$ N এর দুটি সমান্তরাল বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে। 1 সেকেন্ড পর বলদ্বয়ের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায়। পরবর্তী 1 সেকেন্ডে বস্তুটি সমবেগে চলতে থাকে।

[ডা. আব্দুর রাজ্জাক মিউনিসিপ্যাল কলেজ, যশোর]

ক. শিশির কী? ১

খ. চলমান অবস্থায় গাড়ির চাকার চাপ বৃদ্ধি পায় কেন? ২

গ. উদ্দীপকের তথ্য থেকে m এর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব বেগ বনাম সময় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব কি-না তা গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৫১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক তাপমাত্রা যখন শিশিরাঙ্কের নিচে নেমে আসে তখন বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের অতিরিক্ত বাষ্প ঘনীভূত হয়ে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুতে পরিণত হয়, একে শিশির বলে।

খ চলমান অবস্থায় গাড়ির চাকার অভ্যন্তরে সমআয়তন প্রক্রিয়া চলে। এতে চাকার অভ্যন্তরে গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধি পায় না। চাকার সাথে রাস্তার ঘর্ষণের ফলে চাকায় যে তাপ উৎপন্ন হয় তার কিছু অংশ গ্যাসে প্রবেশ করে, এছাড়া গাড়ির গতিশক্তির সামান্য অংশ গ্যাসের তাপশক্তিরূপে দেখা দেয়। এই তাপশক্তির কারণে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়। তখন স্থির আয়তনে চাপের সূত্রানুসারে $\left(\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}\right)$ গ্যাসের চাপ বৃদ্ধি পায়। এ কারণে চলমান অবস্থায় গাড়ির চাকার চাপ বৃদ্ধি পায়।

গ দেওয়া আছে, $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N

$\vec{F_2} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 0.5)$ N

বলদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে তাদের অক্ষীয় উপাংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

$\therefore \frac{4}{2} = \frac{-m}{-2} = \frac{1}{0.5}$

$\therefore$ m = 4 **(Ans.)**

ঘ এখানে, $\vec{F_1} = (4\hat{i} - m\hat{j} + \hat{k})$ N

$= (4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$ N

'গ' থেকে পাই, m = 4

$\therefore \quad |\vec{F_1}| = (\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2})$ N

বা, $F_1 = \sqrt{33}$ N = 5.74 N

আবার, $\vec{F_2} = (2\hat{i} - 2\hat{i} + 0.5\hat{k})$ N

$\therefore \quad |\vec{F_2}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (.5)^2}$ N

বা, $F_2 = 2.87$ N

$\because \quad \vec{F_1}$ ও $\vec{F_2}$ পরস্পর সমান্তরাল।

তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 0°$

$\vec{F_1}$ ও $\vec{F_1}$ এর লব্ধি $F = F_1 + F_2$

$= (5.74 + 2.87)$ N

$= 8.61$ N

F লব্ধি বলটি m = 2kg ভরের বস্তুর উপর $t_1 = 1$ sec ক্রিয়া করে। ফলে বস্তুটি প্রথম 1 sec ত্বরণে যায়। পরবর্তী 1 sec বস্তুটি সমবেগে যায়।

মনে করি, বস্তুটির ত্বরণ a এবং প্রথম 1 sec পর বেগ v।

এখানে, আদিবেগ $u = 0 \text{ ms}^{-1}$

সময় $t_1 = 1$ sec

ভর m = 2 kg

শেষ বেগ = $v \text{ ms}^{-1}$

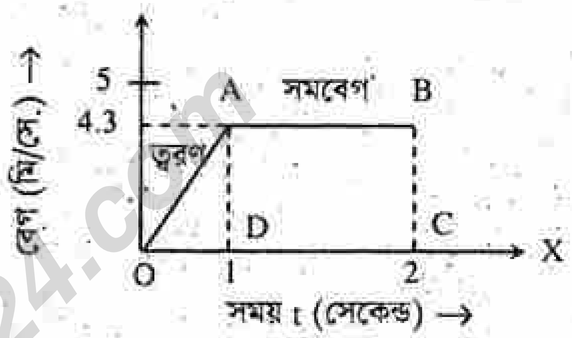
প্রযুক্ত বল F = 8.61 N

প্রথম ক্ষেত্রে, F = ma

বা, $8.61 = 2\left(\frac{v-u}{t_1}\right)$

বা, $8.61 = 2\left(\frac{v-0}{1}\right)$

$\therefore \quad v = 4.31 \text{ ms}^{-1}$



উপরের লেখচিত্রে, বস্তুটি প্রথম OA অংশ ত্বরণে এবং পরবর্তী AB অংশ সমবেগে অতিক্রম করে।

সুতরাং, বস্তুটির ত্বরণে অতিক্রান্ত দূরত্ব ΔOAD এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং সমবেগে অতিক্রান্ত দূরত্ব ABCD চর্তুভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

$\therefore$ 2 sec এ বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s = Δ ক্ষেত্র OAD + ক্ষেত্র ABCD

বা, $s = \left(\frac{1}{2} \times OD \times AD\right) + (AD \times DC)$

বা, $s = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 4.31\right) + (4.31 \times 1)$

$\therefore \quad s = 6.465$ m

অতএব, বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হতে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় সম্ভব এবং তা 6.465 m

প্রশ্ন ▶ ৫২ একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 200 m প্রশস্ত একটি নদী 8 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পাড়ে পৌঁছাইতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে একই পথে 10 মিনিট সময় লাগে। *[সৃষ্টি কলেজ অব টাঙ্গাইল]*

ক. অপারেটর কী? ১

খ. কার্লের তাৎপর্য লিখ। ২

গ. উদ্দীপকে নদীর স্রোতের বেগ কত? ৩

ঘ. উদ্দীপকের লোকটি স্রোতের সাথে 60° কোণে সাঁতার কাটলে অপর পাড়ে কোথায় পৌঁছাবে? ৪

৫২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে গাণিতিক ক্রিয়া একটি রাশিকে অন্য রাশিতে রূপান্তরিত করে তাকে অপারেটর বলে।

খ কার্লের ভৌত তাৎপর্যগুলো নিম্নরূপ:

i. কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান।

ii. ভেক্টরটির দিক ঐ ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

iii. কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত ভেক্টরটির মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ হলে, $|\vec{\nabla} \times \vec{v}| = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

iv. কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা শূন্য।

অর্থাৎ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$

গ দেওয়া আছে, নদীর প্রশস্ততা, $d = 200$ m

স্রোতবিহীন অবস্থায় সময়কাল, $t_1 = 8$ min $= 8 \times 60$ sec $= 480$ sec

স্রোত থাকাকালীন সময়কাল, $t_2 = 10$ min $= 10 \times 60$ sec $= 600$ sec

মনে করি, লোকটির প্রকৃত বেগ u এবং স্রোতের বেগ v

তাহলে, $u = \frac{d}{t_1} = \frac{200 \text{ m}}{480 \text{ sec}} = 0.417 \text{ ms}^{-1}$

এবং লব্ধিবেগ, $w = \sqrt{u^2 - v^2} = \frac{d}{t_2} = \frac{200 \text{ m}}{600 \text{ sec}} = 0.33 \text{ ms}^{-1}$

বা, $u^2 - v^2 = (0.33)^2$

$\therefore v = \sqrt{u^2 - (0.33)^2} = \sqrt{0.417^2 - 0.33^2} = 0.255 \text{ms}^{-1}$

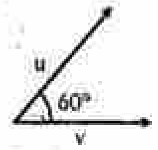
সুতরাং, নদীর স্রোতের বেগ 0.255 ms^{-1} **(Ans.)**

ঘ 'গ' অংশ হতে পাই,

লোকের প্রকৃত বেগ, $u = 0.417 \text{ ms}^{-1}$

এবং স্রোতের বেগ, $v = 0.255 \text{ ms}^{-1}$

স্রোতের দিকের সাথে লোকটির বেগের কোণ, $\theta = 60°$



নদীর প্রস্থ বরাবর লোকের বেগের উপাংশ $= u \sin\theta$

$= 0.417 \text{ ms}^{-1} \times \sin 60°$

$= 0.36 \text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ নদী পার হতে সময় লাগবে, $t = \frac{d}{u \sin\theta}$

$= \frac{200 \text{ m}}{0.36 \text{ ms}^{-1}}$

$= 555.6$ sec

নদীর পাড় বরাবর লব্ধিবেগের উপাংশ $= v + u\cos\theta$

$= 0.255 + 0.417 \cos 60°$

$= 0.4635 \text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ উক্ত সময়কালে নদীর পাড় বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$R = (v + u\cos\theta)t$

$= 0.4635 \text{ ms}^{-1} \times 555.6$sec

$= 257.5$ m

সুতরাং, উদ্দীপকের লোকটি স্রোতের সাথে 60° কোণে সাঁতার কাটলে অপর পাড়ে সোজাসুজি বিপরীত বিন্দু হতে 257.5m দূরত্বের অবস্থানে পৌঁছাবে।

প্রশ্ন ▶ ৫৩ কোনো একদিন দ্বাদশ বিজ্ঞান শাখার মেধাবী ছাত্র সামির তিনটি ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\vec{P} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{Q} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $\vec{R} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ কে একই সমতল রাখার চেষ্টা করছিল। অপর একদিন সামির স্রোতস্বিনী নদীতে নৌকার বেগ পর্যবেক্ষণ করছিল। সে পর্যবেক্ষণ করে দেখল যে, স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ 24 kmh^{-1} এবং প্রতিকূলে নৌকার বেগ 12 kmh^{-1}।

[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]

ক. আপেক্ষিক ত্রুটি কাকে বলে? ১

খ. কীভাবে একটি ভেক্টর ক্ষেত্র উৎস এবং লক্ষ্যস্থল হিসেবে কাজ করে? ব্যাখ্যা কর। ২

গ. উদ্দীপকের নৌকাটিকে কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে ঠিক অপর পাড়ে পৌঁছাতে পারবে? নির্ণয় কর। ৩

ঘ. সামির ওপরে উল্লিখিত ভেক্টরগুলোকে একই সমতলে স্থাপন করতে পেরেছিল কি? গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। ৪

৫৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক গড় পরম ত্রুটি $|\overline{\Delta x}|$ ও ভৌত রাশির পরিমাপকৃত মান বা গড় মান $\bar{x}$ এর অনুপাতকে আপেক্ষিক ত্রুটি বলে।

খ যখন একটি ভেক্টর ক্ষেত্র উৎস হিসেবে কাজ করে, তখন ভেক্টর ক্ষেত্রের দিক বহির্মুখী হয় এবং উক্ত ভেক্টরক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স হয় ধনাত্মক। আবার একটি ভেক্টর ক্ষেত্র লক্ষ্য হিসেবে কাজ করলে ভেক্টরক্ষেত্রের দিক হয় অন্তর্মুখী। ফলে উক্ত ভেক্টরক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স ঋণাত্মক হয়। অতএব, ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স এর মান হতে বোঝা যায় যে এটি লক্ষ্য না উৎস হিসেবে কাজ করে।

গ ধরি, স্রোতের বেগ, $= u \text{ kmh}^{-1}$

নৌকার বেগ $= v \text{ kmh}^{-1}$

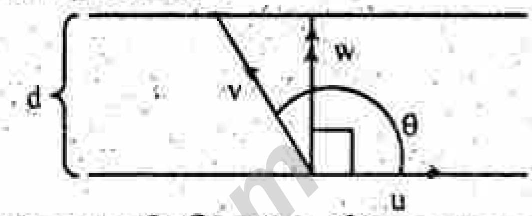
প্রশ্নমতে, $u + v = 24$ ....(i)

$v - u = 12$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই,

$u = 6 \text{ kmh}^{-1}$

এবং $v = 18 \text{ kmh}^{-1}$



এখন, সোজা বিপরীত পাড়ে পৌঁছতে স্রোতের সাথে θ কোণে রওনা দিতে হবে। লব্ধি w এর সাথে u এর কোণ হবে 90°।

$\therefore \tan 90° = \frac{u \sin\theta}{u + v\cos\alpha}$

বা, $u + v\cos\alpha = 0$

$\cos\theta = -\frac{u}{v}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{18}\right) = 109°.5°$

লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta}$

$= \sqrt{6^2 + 18^2 + 2.6.18 \cos 109.5°}$

$= 16.97 \text{ kmh}^{-1}$

অতএব, 16.97 kmh^{-1} বেগে স্রোতের বেগের সাথে 109.5° কোণে যাত্রা করলে ঠিক অপর পাড়ে পৌঁছাবে।

ঘ তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকলে এবং ভেক্টরত্রয় $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ হলে $(\vec{P} \times \vec{Q}).\vec{R} = 0$ হবে।

এখন, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}$

এখানে,
$\vec{P} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
$\vec{Q} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$
$\vec{R} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$

$= \hat{i}(5 + 3) + \hat{j}(1 + 10) + \hat{k}(-6 + 1)$

$= 8\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}$

এখন, $(\vec{P} \times \vec{Q}).\vec{R} = (8\hat{i} + 11\hat{j} - 5\hat{k}).(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 24 - 44 + 20 = 0$

অতএব, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে স্থাপন করতে পেরেছিল।

প্রশ্ন ▶ ৫৪ A (3, −2, 1), B (1, −3, 5), C (2, 1, −4)

[এম সি কলেজ, সিলেট]

ক. কোন ভেক্টরক্ষেত্র সংরক্ষণশীল হওয়ার শর্ত কী? ১

খ. 'দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে' —ব্যাখ্যা কর। ২

গ. $\overrightarrow{BC}$ বাহুর মান নির্ণয় কর। ৩

ঘ. উদ্দীপকের ত্রিভুজটি সমকোণী কিনা- মূল্যায়নপূর্বক মতামত দাও। ৪

৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোন ভেক্টর ক্ষেত্র সংরক্ষণশীল হবে যদি ঐ ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল শূন্য হয়।

খ ধরা যাক, দুটি সমান ভেক্টরের মান P ভেক্টরদ্বয় যদি কোন বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে অথবা ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 180°$ হলে, সামান্তরিকের সূত্রানুসারে লব্ধি $R = P^2 + P^2 + 2.P.P \cos 180°$

$$= 2P^2 + 2P^2(-1)$$
$$= 2P^2 - 2P^2 = 0$$

অর্থাৎ, দুটি সমান ভেক্টর একই বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি শূন্য হবে।

গ ১৮(গ)নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ। **উত্তর:** $7\sqrt{2}$

ঘ ১৮(ঘ)নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ।
উত্তর: সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করবে না।

প্রশ্ন ▶ ৫৫ বাদল ও মনির দুজন মাঝি নৌকা চালিয়ে 5 km চওড়া একটি নদী পার হতে চাইল। 3 kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত স্রোতের মধ্যদিয়ে উভয়ে 4 kmh^{-1} বেগে নৌকা চালাচ্ছিল। বাদলের নৌকা চালানোর অভিমুখ এমন ছিল যে নৌকা সোজা নদীর প্রস্থ বরাবর অপর পাড়ে পৌছায়। মনির তার নৌকা সোজা নদীর প্রস্থ বরাবর চালিয়েও অপর পাড়ে বাদল থেকে অনেক দূরে গিয়ে পৌছায়।

[ইনজিনিয়ারিং ইউনিভার্সিটি কলেজ, ঢাকা]

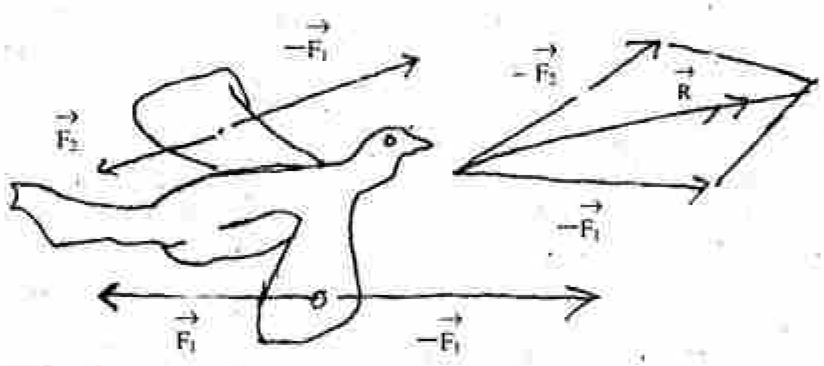
ক. আয়ত একক ভেক্টর কী? ১
খ. পাখি ওড়ার সময় কীভাবে সামনে এগিয়ে যায় —ব্যাখ্যা কর। ২
গ. বাদল কত কোণে নৌকা চালাচ্ছিল নির্ণয় কর। ৩
ঘ. তারা দুজন কি একই সময়ে নদীর অপর পাড়ে পৌছেছিল গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর। ৪

৫৫ নং প্রশ্নের উত্তর

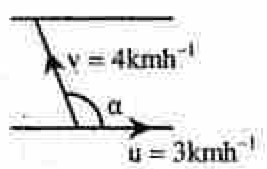
ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয়, তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ পাখি তার ডানা দিয়ে বাতাসের ওপর $\vec{F_1}$ বল প্রয়োগ করে, এতে গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে,

পাখির উক্ত ডানার ওপর বায়ু দ্বারা $-\vec{F_1}$ প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয়। একই কারণে, পাখির অপর ডানার ওপর $-\vec{F_2}$ প্রতিক্রিয়া বল প্রযুক্ত হয়। এ বলদ্বয়ের ভেক্টর যোগের মাধ্যমে $\vec{R}$ লব্ধি বল উৎপন্ন হয়। $\vec{R}$ এর দিকেই পাখির দেহটি এগিয়ে যায়।



গ



বাদল সোজা অপর পাড়ে পৌছায় বলে স্রোতের দিকে তার নৌকার লব্ধি বেগ = 0

নৌকার বেগ যদি স্রোতের বেগের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে, তবে স্রোতের দিকে নৌকার লব্ধি বেগ $v\cos\alpha + u = 0$

$$বা, \cos\alpha = \frac{-u}{v}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-u}{v}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-3}{4}\right)$$
$$= 138.6° \textbf{ (Ans.)}$$

এখানে,
স্রোতের বেগ, $u = 3\ kmh^{-1}$
নৌকার বেগ, $v = 4\ kmh^{-1}$

ঘ ১১ (ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তরের অনুরূপ। উত্তর : বাদল 1.89 sec-এ অপর পাড়ে পৌছায়। মনির 1.25 sec-এ অপর পাড়ে পৌছায়।

প্রশ্ন ▶ ৫৬ বর্ষাকালে স্রোতের নদীতে মাঝি 7 kmh^{-1} বেগে নৌকা চালিয়ে আড়াআড়িভাবে নদী পার হয়। স্রোতের বেগ 3 kmh^{-1}।

[সরকারি আজিজুল হক কলেজ, বগুড়া]

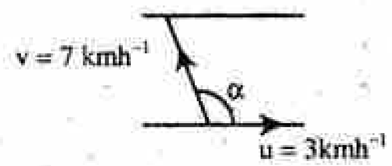
ক. পরিমাপের একক কাকে বলে? ১
খ. দুটি সমান ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এদের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা? ব্যাখ্যা করো। ২
গ. উদ্দীপকের মাঝিকে কোন দিকে নৌকা চালাতে হয়েছিল? ৩
ঘ. মাঝি আড়াআড়ি নৌকা চালনা করলে নৌকার লব্ধির মান উদ্দীপকের নৌকার লব্ধির বেগের বেশি হবে— উক্তিটি গাণিতিকভাবে যাচাই কর। ৪

৫৬ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে কোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে যে প্রমিত বা আদর্শ মাপের সাথে তুলনা করা হয়, তা-ই হলো পরিমাপের একক।

খ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি যদি α কোণে নত থাকে, তবে এদের লব্ধির মান হবে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ যখন $\alpha = 180°$ তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ লব্ধি ভেক্টরের ন্যূনতম মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q$। দেখা যাচ্ছে, যদি P = Q হয় তবে R এর মান শূন্য হবে। সুতরাং সমান ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীত দিকে কাজ করলে লব্ধি শূন্য হবে।

গ



ধরি নৌকাটি স্রোতের সাথে α কোণে গেলে তা আড়াআড়িভাবে নদী পার হয়। যেহেতু আড়াআড়িভাবে নদী পার হয়েছে, তাই স্রোতের দিকে নৌকার বেগের লব্ধি শূন্য হবে।

চিত্রে, স্রোতের দিকে নৌকার লব্ধি বেগ $= u\cos0° + v\cos\alpha$
$= u + v\cos\alpha$

$$\therefore u + v\cos\alpha = 0$$
$$বা, \cos\alpha = -\frac{u}{v}$$
$$বা, \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-u}{v}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right)$$
$$= 115.38° \textbf{ (Ans.)}$$

এখানে,
নৌকার বেগ, $v = 7\ kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 3\ kmh^{-1}$

ঘ 'গ' থেকে পাই, নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha_1 = 115.38°$

∴ নৌকার লব্ধি বেগ, w_1 হলে,

$$w_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha_1}$$
$$= \sqrt{3^2 + 7^2 + 2 \times 3 \times 7 \times \cos 115.38°}$$
$$= 6.32 \text{ ms}^{-1}$$

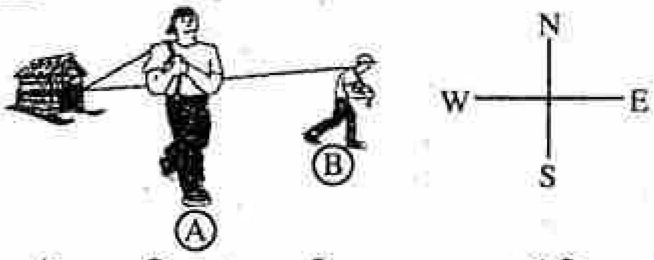
এখন, যদি নৌকাটি আড়াআড়িভাবে যাত্রা করে তবে, লব্ধি বেগ w_2 হলে,

$$w_2 = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos 90°}$$
$$= \sqrt{u^2 + v^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 7^2}$$
$$= 7.62 \text{ ms}^{-1}$$

$\therefore w_2 > w_1$

অর্থাৎ, নৌকাটি আড়াআড়ি চললে উদ্দীপকের চাইতে লব্ধির মান বেশি হবে উক্তিটি যথার্থ।

প্রশ্ন ▶ ৫৭



A ও B দুইজন ব্যক্তি কোন একটি কুড়ে ঘরকে পূর্ব দিকে স্থানান্তর করার জন্য চিত্র মোতাবেক রশি দিয়ে টানছে। A কর্তৃক প্রযুক্ত বল 120N যা xy তলে ক্রিয়ারত এবং এটি পূর্ব দিকের সাথে 315° কোণে ক্রিয়া করছে। B কর্তৃক প্রযুক্ত বল ভেক্টরটি $\vec{F} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং এটি 35° কোণে ক্রিয়া করছে। ঘর ও তলের মধ্যকার ঘর্ষণ বল 150N।

[সরকারি সিটি কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর কাকে বলে? ১

খ. দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না— ব্যাখ্যা করো। ২

গ. B এর বল ভেক্টরটির সমকোণে এবং xy তলের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করো। ৩

ঘ. A ও B এর টানের কারণে কুড়ে ঘরটি গতিশীল হবে কিনা যাচাই করো। ৪

৫৭ নং প্রশ্নের উত্তর

ক Del বা Nabla কে ভেক্টর ডিফারেন্সিয়াল অপারেটর বলা হয়। একে $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

খ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর হলে, এদের লব্ধি,

$|\vec{R}| = R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\alpha}$ যেখানে α ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ।

লব্ধি R এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\cos\alpha$ এর মান সর্বোচ্চ হয়।

আমরা জানি, $\cos\alpha$ এর সর্বোচ্চ মান 1

$$\therefore R_{max} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB.1}$$
$$= \sqrt{(A+B)^2}$$
$$\therefore R_{max} = A + B$$

এখন, যেহেতু $\cos\alpha$ এর মান 1 এর থেকে বেশি হওয়া সম্ভব নয়। তাই R এর সর্বোচ্চ মানও (A + B) এর চেয়ে বেশি হওয়া সম্ভব নয়।

গ B এর বল, $\vec{F}$ ভেক্টরটির সমকোণে কোনো ভেক্টর $\vec{V}$ হলে এটি xy তলের সমান্তরাল বলে এটির কোনো z-অক্ষের দিকে উপাংশ থাকবে না।

ধরি, ভেক্টরটি $\vec{V} = x\hat{i} + y\hat{j}$

যেহেতু, $\vec{V}$ ও $\vec{F}$ সমকোণে আছে,

$$\therefore \vec{F} \cdot \vec{V} = 0$$
বা, $(7\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (x\hat{i} + y\hat{j}) = 0$

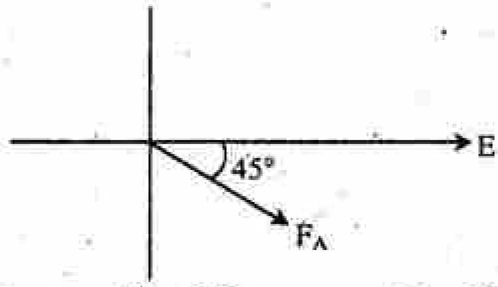
বা, $7x - 6y = 0$

$$\therefore y = \frac{7}{6}x$$

∴ $\vec{V}$ ভেক্টরের দিকে একক ভেক্টর $= \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

$$= \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$= \frac{x\hat{i} + \frac{7}{6}x\hat{j}}{\sqrt{x^2 + \left(\frac{7}{6}x\right)^2}}$$
$$= \frac{x\left(\hat{i} + \frac{7}{6}\hat{j}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{49}{36}}}$$
$$= \frac{\hat{i} + \frac{7}{6}\hat{j}}{\frac{\sqrt{85}}{6}}$$
$$= \frac{6\hat{i} + 7\hat{j}}{\sqrt{85}} \text{ (Ans.)}$$

ঘ



A কর্তৃক প্রযুক্ত F_A বলটি পূর্ব দিকের সাথে ঘড়ির কাঁটার উল্টোদিকে 315° অর্থাৎ, ঘড়ির কাঁটার দিকে (360°-315°) = 45° কোণ উৎপন্ন করে।

এটি xy তলে কাজ করে বলে,

$$\vec{F_A} = 120\cos(45°)\hat{i} + 120\sin(-45°)\hat{j}$$
$$= \frac{120}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{120}{\sqrt{2}}\hat{j}$$

আবার, B এর প্রযুক্ত বল, $\vec{F_B} = 7\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}$

xy তলে ক্রিয়ারত $\vec{F_B}$ বলের উপাংশ,

$$\vec{F}_{Bxy} = 7\hat{i} - 6\hat{j}$$

xy তলে ঘরের ওপর বলের লব্ধি $\vec{F}$ হলে,

$$\vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B}$$
$$= \frac{120}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{120}{\sqrt{2}}\hat{j} + 7\hat{i} - 6\hat{j}$$
$$= \left(\frac{120}{\sqrt{2}} + 7\right)\hat{i} - \left(\frac{120}{\sqrt{2}} + 6\right)\hat{j} \text{ N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(\frac{120}{\sqrt{2}}+7\right)^2 + \left(\frac{120}{\sqrt{2}}+6\right)^2}$$
$$= 129.2 \text{ N}$$

Z অক্ষ বরাবর ধনাত্মক দিকে ঘরের ওপর ক্রিয়ারত বল হল ঘরের ওজন বল ও $\vec{F_B}$ এর Z-অক্ষ বরাবর উপাংশের যোগফলের সমান।

$\therefore$ ঘর্ষণ বল, $F_s = \mu_s(W-4)$

$$= \mu_s R\left(1 - \frac{4}{W}\right)$$

যেহেতু, স্বাভাবিক অবস্থায় ঘর্ষণ বল, $\mu_s R = 150N$

$$F_s = 150\left(1 - \frac{4}{W}\right)$$

ঘরটি গতিশীল হতে হলে,

$$F > F_s$$

বা, $129.2 > 150\left(1 - \frac{4}{W}\right)$

বা, $\left(1 - \frac{4}{W}\right) < \frac{129.2}{150}$

বা, $1 - \frac{4}{W} < 0.86$

বা, $\frac{4}{W} > 0.14$

বা, $\frac{W}{4} < 7.2$

বা, $W < 28.8$

বা, $mg < 28.8$

বা, $m < \frac{28.8}{9.8}$

$\therefore$ $m < 2.94$

অর্থাৎ, ঘরটি গতিশীল হতে হলে ঘরের ভর 2.94 kg অপেক্ষা কম হতে হবে, যা অসম্ভব।
ফলে, ঘরটি গতিশীল হবে না।

প্রশ্ন ▶ ৫৮ নদীতে স্রোতের বেগ $5kmh^{-1}$ এবং নৌকার বেগ $12kmh^{-1}$। বৃষ্টি $6kmh^{-1}$ বেগে উলম্ব ভাবে পড়ছে। *[ঢাকা সিটি কলেজ]*

ক. তাৎক্ষণিক বেগ কী? ১

খ. সমদ্রুতিতে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ ব্যাখ্যা কর। ২

গ. সোজা অপর পাড়ে যেতে নৌকাকে স্রোতের সাথে কত কোণে রওনা হতে হবে নির্ণয় কর। ৩

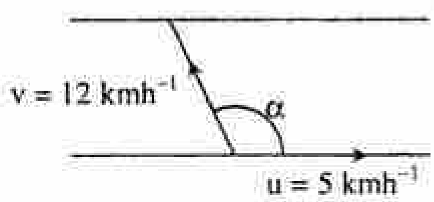
ঘ. বৃষ্টি হতে বাঁচতে নৌকায় বসা একজন লোককে স্রোতের অনুকূলে এবং প্রতিকূলে উলম্বের সাথে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে- গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। ৪

৫৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো গতিশীল বস্তুর কোনো বিশেষ মুহূর্তের বেগকে ঐ মুহূর্তের তাৎক্ষণিক বেগ বলে। ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানে সরণের হার দ্বারা তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করা হয়।

খ আমরা জানি, ভেক্টরের মান অথবা দিক অথবা উভয়ের পরিবর্তনে ভেক্টর পরিবর্তীত হয়। বেগ হচ্ছে ভেক্টর রাশি। সুতরাং মান পরিবর্তন না হলেও দিকের পরিবর্তনে বেগ পরিবর্তীত হবে। সমদ্রুতিতে সরল পথে চলমান কোনো বস্তুর ক্ষেত্রে এর গতির বেগ ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকে বিধায় এর কোনো ত্বরণ ঘটে না। কিন্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তপথে বা বক্রপথে চলার সময় বেগের মান পরিবর্তীত না হলেও দিকের পরিবর্তন হয়। আর বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। সুতরাং আমরা বলতে পারি, সরল পথে সমদ্রুতিতে চলমান কোনো বস্তুর ত্বরণ না থাকলেও বক্র পথে সমদ্রুতিতে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে।

গ



নদী আড়াআড়ি পার হওয়ার জন্য স্রোতের সাথে α কোণে নৌকা রওনা দিলে স্রোতের দিকে নৌকার লব্ধি বেগ শূন্য হবে।

$\therefore$ স্রোতের দিকে নৌকার লব্ধি বেগ $= u\cos0° + v\cos\alpha$
$= u + v\cos\alpha$

$\therefore$ $u + v\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\frac{u}{v}$

বা, $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

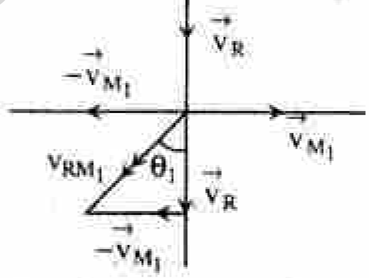
$= \cos^{-1}\left(-\frac{5}{12}\right)$

$\therefore$ $\alpha = 114.62°$ (Ans.)

ঘ স্রোতের অনুকূলে বেগ v_{M_1} হলে,

$v_{M_1} = v + u$
$= 12 + 5$
$= 17 \text{ kmh}^{-1}$

এখানে,
স্রোতের বেগ, $u = 5kmh^{-1}$
নৌকার বেগ, $v = 12kmh^{-1}$



এখন, স্রোতের অনুকূলে যাত্রার সময় লোকটির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ, $\vec{v}_{RM_1}$ হলে,

$$\vec{v}_{RM_1} = \vec{v}_R - \vec{v}_{M_1} = \vec{v}_R + (-\vec{v}_{M_1})$$

$\therefore$ $\vec{v}_{RM_1}$ এর দিক বৃষ্টির বেগের সাথে তথা উলম্বের সাথে θ_1 কোণ উৎপন্ন করলে,

$$\tan\theta_1 = \frac{|-v_{M_1}|\sin90°}{|v_R| + |-v_{M_1}|\cos90°}$$
$$= \frac{|v_{M_1}|}{|v_R|}$$

বা, $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{|-v_{M_1}|}{|v_R|}\right)$

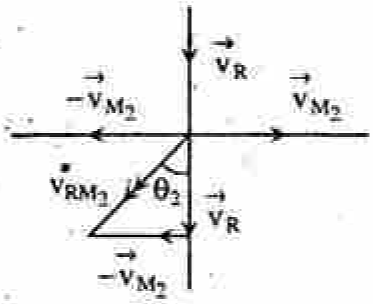
$= \tan^{-1}\left(\frac{17}{6}\right)$

$= 70.6°$

$\therefore$ স্রোতের অনুকূলে চলমান নৌকায় বসে থাকা ব্যক্তিকে বৃষ্টি হতে বাঁচার জন্য উলম্বের সাথে 70.6° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

আবার, স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ, v_{M_2} হলে,

$v_{M_2} = v - u$
$= 12 - 5$
$= 7 \text{ kmh}^{-1}$



একইভাবে স্রোতের প্রতিকূলের ক্ষেত্রে উল্লম্বের সাথে θ_2 কোণে ছাতা ধরতে হলে,

$$\tan\theta_2 = \frac{|-v_{M_2}|\sin 90^\circ}{|v_R| + |-v_{M_2}|\cos 90^\circ}$$

$$= \frac{|-v_{M_2}|}{|v_R|}$$

$$\therefore \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{|-v_{M_2}|}{|v_R|}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)$$

$$= 49.4^\circ$$

$\therefore$ স্রোতের প্রতিকূলে যাত্রার ক্ষেত্রে নৌকায় বসে থাকা ব্যক্তিকে উল্লম্বের সাথে 49.4° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

প্রশ্ন ▶ ৫৯ 1500m প্রশস্থ একটি নদীতে $4 kmh^{-1}$ বেগে স্রোত তীরের সমান্তরালে প্রবাহিত হচ্ছে। নদীটি পাড়ি দেওয়ার জন্য তিন জন মাঝির প্রত্যেকেই $8 kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালিয়ে রওনা দিল। ১ম মাঝি সোজা অপর পাড়ে পৌছাল, ২য় মাঝি সোজাসোজি অপর পাড়ের দিকে এবং ৩য় মাঝি স্রোতের সাথে 30° কোণে রওনা দিল।

[ব্রাহ্মণবাড়ীয়া সরকারি কলেজ]

ক. শূন্য ভেক্টর কী? ১

খ. $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর দিক ব্যাখ্যা কর। ২

গ. ১ম মাঝি স্রোতের দিকে কত দূরত্ব অতিক্রান্ত করবে তা নির্ণয় কর? ৩

ঘ. কোন মাঝি দ্রুত অপর পাড়ে পৌছাতে পারবে, গাণিতিকভাবে দেখাও। ৪

৫৯ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বা নাল ভেক্টর বলে।

খ এখানে, $\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\,|P|\,|Q| \sin\alpha$, $\hat{\eta}$ একটি একক ভেক্টর যা $\vec{P} \times \vec{Q}$ ভেক্টরের দিক নির্দেশ করে। $\hat{\eta}$ এর দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম থেকে পাওয়া যায়। একটি ডানহাতি স্ক্রুকে উভয় ভেক্টরের সমতলে লম্বভাবে স্থাপন করে $\vec{P}$ থেকে $\vec{Q}$ এর দিকে ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হবে $\hat{\eta}$ তথা $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর দিক হবে সে দিকে। এক্ষেত্রে $\hat{\eta}$ এর দিক হয় $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে সমতলে অবস্থান করে তার লম্ব বরাবর উপরের দিকে। সুতরাং $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর দিক $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর সমতলের উপরের দিকে লম্ব বরাবর।

গ উদ্দীপক হতে দেখা যায় যে ১ম মাঝি এমনভাবে নৌকা চালায় যাতে সোজা অপর পাড়ে পৌছায়। এক্ষেত্রে নদীর স্রোত বরাবর তার লব্ধি বেগের কোনো উপাংশ নেই। অর্থাৎ স্রোত বরাবর সে কোনো দূরত্ব অতিক্রম করবে না।

$\therefore$ ১ম মাঝি স্রোতের দিকে কোনো দূরত্ব অতিক্রম করবে না।

ঘ এখানে,

স্রোতের বেগ, $v = 4 kmh^{-1}$

১ম = ২য় = ৩য় মাঝির নৌকার বেগ, $u = 8 kmh^{-1}$

নদীর প্রশ্থ, $d = 1500m = 1.5$ km

মনে করি, ১ম মাঝি স্রোতের দিকের সাথে α কোণে নৌকা চালাচ্ছিল। লব্ধি বেগ, v এর সাথে $\theta = 90^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\therefore \tan\theta = \tan 90^\circ = \infty$$

বা, $\dfrac{u\sin\alpha}{v + u\cos\alpha} = \infty$

বা, $v + u\cos\alpha = 0$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{v}{u} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120^\circ$

এখন, ১ম মাঝির নদীর প্রশ্থ বরাবর উপাংশ

$$u' = u\cos(120^\circ - 90^\circ) + v\cos 90^\circ$$
$$= 8\cos 30^\circ + 3 \times 0$$
$$= 8 \times \sqrt{\frac{3}{2}}$$
$$= 4\sqrt{3}\ kmh^{-1}$$

এখন ১ম মাঝির নদী পার হতে সময় লাগবে

$$t_1 = \frac{d}{u'}$$
$$= \frac{1.5}{4\sqrt{3}}$$
$$= 0.216\ hr$$

আবার, দ্বিতীয় মাঝির ক্ষেত্রে,

নদীর প্রশ্থ বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ

$$u'' = u\cos 0^\circ + v\cos 90^\circ$$
$$= 8 + 0$$
$$= 8 kmh^{-1}$$

$\therefore$ ২য় মাঝির নদী পার হতে সময় লাগবে,

$$t_2 = \frac{1.5}{8}$$
$$= 0.187\ hr$$

আবার, ৩য় মাঝি স্রোতের সাথে 30° কোণে নৌকা চালাচ্ছিল।

৩য় মাঝির ক্ষেত্রে,

নদীর প্রশ্থ বরাবর লব্ধি বেগের উপাংশ

$$u''' = u\cos(90^\circ - 30^\circ) + v\cos 90^\circ$$
$$= 8\cos 60^\circ + 0$$
$$= 4\ kmh^{-1}$$

$\therefore$ ৩য় মাঝির নদী পার হতে সময় লাগবে

$$t_3 = \frac{1.5}{4}$$
$$= 0.375\ hr$$

লক্ষ্য করি, $t_2 < t_1 < t_3$

অর্থাৎ ২য় মাঝির নদী পার হতে সবচাইতে কম সময় লাগবে। সুতরাং ২য় মাঝি দ্রুত অপর পাড়ে পৌছাতে পারবে।

প্রশ্ন ▶ ৬০ জাফর এবং সাদিক পদার্থবিদ্যার ভেক্টর অধ্যায় নিয়ে আলোচনা করছিল। তারা একটি গাণিতিক সমস্যায় চারটি ভিন্ন ভিন্ন কণার উপর ক্রিয়াশীল চারটি ভেক্টরের যথাক্রমে–

$\vec{A} = m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{V} = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$ দেখতে পেল।

[কুমিল্লা সরকারি সিটি কলেজ]

ক. কার্ল কাকে বলে? ১

খ. দুটি অসমান বলের লব্ধি শূন্য হতে পারে না ব্যাখ্যা কর। ২

গ. 'a' এর মান কত হলে $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে? ৩

ঘ. m এর মান কত হবে $\vec{A}$, $\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর তিনটি একই তলের উপর হবে? বিশ্লেষণ করো। ৪

৬০ নং প্রশ্নের উত্তর

ক কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ঐ ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে এর লাইন ইনটিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।

ঘ দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে না।

ব্যাখ্যা : $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটি যদি α কোণে নত থাকে, তবে এদের লব্ধির মান হবে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ যখন $\alpha = 180°$ তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ লব্ধি ভেক্টরের ন্যূনতম মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P-Q)^2} = P - Q$। দেখা যাচ্ছে, কেবল এবং কেবল যদি $P = Q$ হয় তবে R এর মান শূন্য হবে। অন্যথায় লব্ধির ন্যূনতম একটি মান থাকবে। সুতরাং দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনোই শূন্য হতে পারে না।

গ $\vec{V}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে যদি $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হয়। এখন,

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).$$
$$[(x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(ay - 2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + 4z)$$
$$= 1 + a + 4$$
$$= a + 5$$

$\therefore \vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে,

$a + 5 = 0$

$\therefore a = -5$ **(Ans.)**

ঘ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ একই তলের ওপর হবে যদি $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হয়।

এখানে, $\vec{B} \times \vec{C} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) \times (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i}(-10 + 12) - \hat{j}(15 - 4) + \hat{k}(-9 + 2)$$
$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

আবার,

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (m\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k})$$
$$= 2m - 11 + 7$$
$$= 2m - 4$$

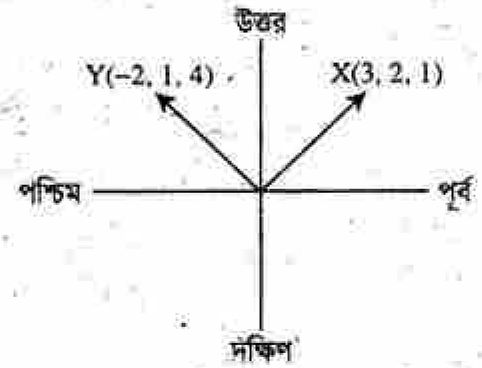
এরা একই তলের উপর হলে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

বা, $2m - 4 = 0$

$\therefore m = 2$

$\therefore m = 2$ হলে $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ একই তলে অবস্থিত হবে।

প্রশ্ন ▶ ৬১



[লক্ষ্মীপুর সরকারি কলেজ, লক্ষ্মীপুর]

ক. ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর কী? ১

খ. $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ এর ব্যাখ্যা দাও। ২

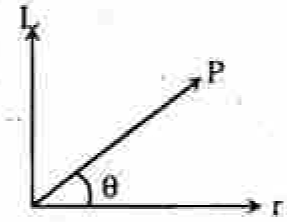
গ. $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো। ৩

ঘ. $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর এবং $\overrightarrow{OY}$ ও $\overrightarrow{OX}$ এর তলের উপর লম্ব একক ভেক্টর একই হবে কী? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে যুক্তি দাও। ৪

৬১ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ল্যাপ্লাসিয়ান অপারেটর হলো ∇^2।

খ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ থেকে দেখা যাচ্ছে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বা অবস্থান ভেক্টর এবং রৈখিক ভরবেগ ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল করলে কৌণিক ভরবেগ পাওয়া যায়।



ধরা যাক, কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং রৈখিক ভরবেগ $\vec{P}$ ও এদের মধ্যবর্তী কোণ θ। বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ হবে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$ এর সমতলের লম্ব বরাবর, যার দিক ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম দ্বারা পাওয়া যায়। তাহলে, $\vec{L} = rP\sin\theta\hat{n}$; এখানে, $\hat{n}$, $\vec{L}$ এর দিক নির্দেশ করে।

গ ৭(গ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

ঘ ৭(ঘ) নং সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন ▶ ৬২ নিচের উদ্দীপকটি পড় এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

সানিয়া বাসা হতে কলেজে যাওয়ার পথে হঠাৎ করে বৃষ্টি শুরু হলো। বৃষ্টির ফোটা $15ms^{-1}$ বেগে খাড়া নিচের দিকে পড়ছিল। সানিয়া তার সাথে থাকা ছাতা মাথায় দিয়ে $10ms^{-1}$ বেগে কলেজের দিকে রওনা দিল। *[কক্সবাজার সরকারি মহিলা কলেজ]*

ক. টর্কের সংজ্ঞা দাও। ১

খ. বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণায়মান বস্তু কর্তৃক কৃতকাজ শূন্য হয় কেন? ২

গ. সানিয়ার সাপেক্ষে উদ্দীপকের বৃষ্টির লব্ধিবেগ কত হবে? ৩

ঘ. বৃষ্টি হতে রক্ষা পাওয়ার জন্য সানিয়াকে কি ব্যবস্থা গ্রহণ করতে হবে? ৪

৬২ নং প্রশ্নের উত্তর

ক যা কোন অঘূর্ণনশীল বস্তুতে ঘূর্ণন সৃষ্টি করে বা ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তন করে তাকে টর্ক বলে।

খ কোনো বস্তু যখন বৃত্তপথে ঘুরতে থাকে, তখন এর ওপর বৃত্তের কেন্দ্রের দিকে কেন্দ্রমুখী বল ($\vec{F}_c$) ক্রিয়া করে। এ সময় প্রতিটি মুহূর্তে যে ক্ষুদ্র সরণ ($\Delta\vec{S}$) হয় তার দিক বৃত্তের স্পর্শক বরাবর অর্থাৎ কেন্দ্রমুখী বলের লম্বদিকে। ফলে এর ক্ষুদ্র সরণে কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ, $\Delta W = \vec{F}_c \cdot \Delta\vec{S} = F_c\Delta S\cos 90° = 0$; ফলে বস্তুটি সম্পূর্ণ একবার ঘুরে আসলেও এমন কি বারবার ঘুরতে থাকলেও কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃতকাজ শূন্য।

গ এখানে, বৃষ্টির বেগ, $u = 15\ ms^{-1}$

সানিয়ার বেগ, $v = 10\ ms^{-1}$

মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = 90°$

সানিয়ার সাপেক্ষে বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

আমরা জানি,

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta$$

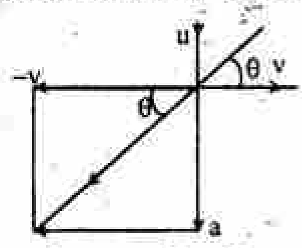
বা, $w = (15)^2 + (10)^2 + 2 \times 15 \times 10 \times \cos 180° - 90°$

$\therefore w = 18.03\ ms^{-1}$ **(Ans.)**

ঘ এখানে, বৃষ্টির বেগ, $u = 15\ ms^{-1}$

সানিয়ার বেগ, $v = 10\ ms^{-1}$

মনে করি, বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে সানিয়াকে তার বেগের সাথে θ কোণে ছাতা ধরতে হবে।



আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{15}{10}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{15}{10}\right) = 56.31°$$

সুতরাং বৃষ্টি হতে রক্ষা পাওয়ার জন্য সানিয়াকে বৃষ্টির দিকের সাথে 56.31° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

প্রশ্ন ▶ ৬৩ $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি আয়তাকার স্থানাংক ব্যবস্থায় অক্ষ রেখা সমূহের সাথে যথাক্রমে $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরটি আয়তাকার স্থানাংক ব্যবস্থায় অক্ষ রেখা সমূহের সাথে যথাক্রমে $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ কোণ উৎপন্ন করে। *[নীলফামারী সরকারি কলেজ]*

ক. আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে? ১

খ. মাটি চাপানোর জন্য রোলার ঠেলা অথবা টানা কোনটি অধিক সুবিধাজনক? ২

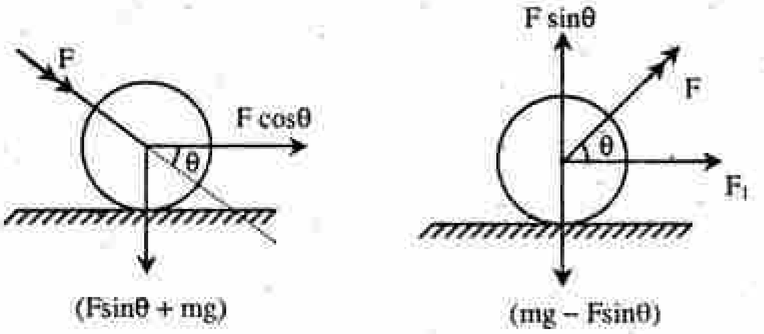
গ. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর তলের লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। ৩

ঘ. $\vec{B}$ ও $\vec{A}$ এর সমান্তরাল করতে হলে কি করতে হবে α, β, γ এর মাধ্যমে বিশ্লেষণ কর। ৪

৬৩ নং প্রশ্নের উত্তর

ক ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয়, তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।

খ লন রোলার ঠেলার সময় এর আপাত ওজন বৃদ্ধি পায় কিন্তু টানার সময় আপাত ওজন হ্রাস পায়। এজন্য লন রোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।



m ভর বিশিষ্ট একটি লন রোলার কে F বলে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ঠেলার ক্ষেত্রে নিচের দিকে লব্ধি বল হয় (F sinθ + mg), যা লন রোলারের নিজস্ব ওজন mg অপেক্ষা বেশি। অন্য দিকে টানার ক্ষেত্রে নিচের দিকে ক্রিয়াশীল বল হয় (mg − F sinθ), ফলে রোলারটি হালকা মনে হয়।

গ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর লম্বদিকে একক ভেক্টর $\hat{\eta}$ হলে,

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

এখানে,
$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$
$\vec{A} \times \vec{B}$ এর দিকে
একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = ?$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}}{\sqrt{7^2 + (-2)^2 + (-8)^2}} = \frac{7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k}}{\sqrt{49 + 4 + 64}}$$

$$\therefore \hat{\eta} = \frac{1}{\sqrt{117}}(7\hat{i} - 2\hat{j} - 8\hat{k})$$ **(Ans.)**

ঘ উদ্দীপক হতে পাই,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$
$\vec{B} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{j}$

$\vec{A}$ ও $\hat{i}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha_1$
$\vec{A}$ ও $\hat{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \beta_1$
$\vec{A}$ ও $\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \gamma_1$
$\vec{B}$ ও $\hat{i}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \alpha_2$
$\vec{B}$ ও $\hat{j}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \beta_2$
$\vec{B}$ ও $\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \gamma_2$

এখন, $\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}.\hat{i}}{|\vec{A}|\,|\hat{i}|}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 57.69°$$

$$\beta_1 = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\hat{j}}{|\vec{A}|\,|\hat{j}|}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 36.7°$$

$$\gamma_1 = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\hat{k}}{|\vec{A}|\,|\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 74.5°$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{B}.\hat{i}}{|\vec{B}|\,|\hat{i}|}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 42.03°$$

$$\beta_2 = \cos^{-1}\frac{\vec{B}.\hat{j}}{|\vec{B}|\,|\hat{j}|}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 68.20°$$

$$\gamma_3 = \cos^{-1}\frac{\vec{B}.\hat{k}}{|\vec{B}|\,|\hat{k}|}$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2}}\right)$$

$$= 56.14°$$

$\vec{B}$ একে $\vec{A}$ এর সমান্তরাল করতে হলে,
$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ এবং $\gamma_1 = \gamma_2$ করতে হবে।
এক্ষেত্রে, $\vec{B}$ ভেক্টরকে
X-অক্ষের সাথে $(57.69 - 42.03)° = 15.66°$ কোণ বাড়াতে হবে।
Y-অক্ষের সাথে $(68.20 - 36.7)° = 31.5°$ কোণ কমাতে হবে।
Z-অক্ষের সাথে $(74.5 - 56.14)° = 18.36°$ কোণ বাড়াতে হবে।

পদার্থবিজ্ঞান

দ্বিতীয় অধ্যায় : ভেক্টর

৪১. যেসব রাশির মান আছে কিন্তু দিক নেই তাদেরকে কী বলে? (জ্ঞান)
ক) দিক রাশি খ) অদিক রাশি
গ) ভেক্টর রাশি ঘ) লব্ধ রাশি **খ**

৪২. কোনটি ভেক্টর রাশি? (জ্ঞান)
ক) ভর খ) কাজ
গ) সরণ ঘ) তাপমাত্রা **গ**

৪৩. কোনটি সঠিক ? (অনুধাবন)
ক) $\vec{F} = m\vec{s}$ খ) $\vec{F} = \frac{\vec{dp}}{dt}$
গ) $\vec{F} = m\vec{v}$ ঘ) $\vec{F} = m\frac{\vec{dp}}{dt}$ **গ**

৪৪. $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরটি x ও y অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণ উৎপন্ন করলে কোনটি সঠিক হবে? *[সরকারি বিজ্ঞান কলেজ, ঢাকা]*
ক) $\theta_1 > \theta_2$ খ) $\theta_1 < \theta_2$
গ) $\theta_1 = \theta_2$ ঘ) $\theta_1 = 0.5\theta_2$ **খ**

৪৫. নিচে তিনটি একই জাতীয় ভেক্টরের মান দেওয়া আছে। কোন সেট এর লব্ধি শূন্য হবে না। *[সরকারি এম এম কলেজ, যশোর]*
ক) 10, 10, 20 খ) 10, 10, 10
গ) 10, 20, 10 ঘ) 10, 20, 40 **ঘ**

৪৬. ভেক্টরটির মূলবিন্দু কোনটি? (অনুধাবন)
ক) A খ) C
গ) B ঘ) M **ক**

৪৭. নিচের কোনটি দ্বারা ভেক্টরটির মান প্রকাশ পায়-(অনুধাবন)
ক) $|\vec{A}|$ খ) $|\vec{B}|$
গ) $|\vec{O}|$ ঘ) $|\vec{M}|$ **ঘ**

৪৮. নাল ভেক্টরকে সাধারণত কোন চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়? (জ্ঞান)
ক) $\vec{a}$ খ) $\hat{a}$
গ) $\hat{0}$ ঘ) $\vec{0}$ **ঘ**

৪৯. দুটো ভেক্টরের সমান্তরালের শর্ত কী? (জ্ঞান) *[ক্যান্টনমেন্ট, সিলেট]*
ক) P.Q = 0 খ) P × Q = 0
গ) P.Q = 1 ঘ) P × Q = 1 **খ**

৫০. যে ভেক্টরের মান এক তাকে কী বলে? (জ্ঞান)
ক) আয়ত ভেক্টর খ) একক ভেক্টর
গ) সমান ভেক্টর ঘ) নাল ভেক্টর **খ**

৫১. P ও Q দুটি ভেক্টরের মান যথাক্রমে 8 এবং 5 একক। এরা পরস্পর 30° কোণে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধি কত? (প্রয়োগ)
ক) 12.58 খ) 10.5
গ) 5.85 ঘ) 3.5 **ক**

৫২. $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ সূত্রে α-এর কোনো মানের জন্য R সর্বনিম্ন হবে? (প্রয়োগ)
ক) 0° খ) 45°
গ) 90 ঘ) 180° **ঘ**

৫৩. $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\vec{A}|$ কত? (প্রয়োগ)
ক) 0 খ) 5
গ) $\sqrt{31}$ ঘ) 7 **ঘ**

৫৪. $5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এর মান কত? (প্রয়োগ)
ক) $\sqrt{38}$ খ) 38
গ) $\sqrt{6}$ ঘ) 6 **ক**

৫৫. ভেক্টর গুণন কয়ভাবে হতে পারে? (জ্ঞান)
ক) ২ খ) ৩
গ) ৪ ঘ) ৬ **গ**

৫৬. $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (জ্ঞান)
ক) B cos θ খ) B sin θ
গ) A cos θ ঘ) B sin θ **গ**

৫৭. দুটি ভেক্টরের ডট গুণন মেনে চলে-(প্রয়োগ) *[আইডিয়াল স্কুল ও কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]*
ক) সংযোগ সূত্র খ) বণ্টন সূত্র
গ) ডানহাতি স্ক্রু নিয়ম ঘ) সামান্তরিক সূত্র **খ**

৫৮. দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণনের গুণফল শূন্য হলে ভেক্টরদ্বয়-(প্রয়োগ) *[আইডিয়াল স্কুল ও কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]*
ক) পরস্পর লম্ব খ) সমান্তরাল
গ) বিপরীত সমান্তরাল ঘ) বিসদৃশ **ক**

৫৯. ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। m এর মান কত হলে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের উপর লম্ব হবে? (প্রয়োগ)
ক) 8 খ) 15
গ) 27 ঘ) 32 **গ**

৬০. $\vec{P} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 4\hat{j} - \hat{k}$ হলে, এদের স্কেলার গুণফল কত?
ক) 3 খ) 7
গ) 9 ঘ) 11 **খ**

৬১. $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? (জ্ঞান)
ক) 0° খ) 60°
গ) 90° ঘ) 120° **গ**

৬২. $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে বোঝায়—(অনুধাবন)
ক) $\vec{A} = 0$ খ) $\vec{B} = 0$
গ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একে অপরের উপর লম্ব
ঘ) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল **গ**

৬৩. একটি সামান্তরিকের কর্ণ $2\hat{i}$ ও $2\hat{j}$ হলে তার ক্ষেত্রফল কত হবে? (প্রয়োগ) *[জালালাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, সিলেট]*
ক) 1 বর্গ একক খ) 2 বর্গ একক
গ) 4 বর্গ একক ঘ) 8 বর্গ একক **খ**

৬৪. যদি $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে তবে উহার ক্ষেত্রফল কত? (প্রয়োগ)
ক) $\sqrt{32}$ sq. unit খ) $\sqrt{63}$ sq. unit
গ) $\sqrt{72}$ sq. unit ঘ) $\sqrt{98}$ sq. unit **গ**

৬৫. দুটি ভেক্টর রাশির মান 10 ও 15 একক। এরা লম্বভাবে অবস্থান করলে ভেক্টর দুটির ভেক্টর গুণফল কত? (প্রয়োগ)
ক) 200 একক খ) 150 একক
গ) 120 একক ঘ) 80 একক **খ**

৬৬. নিচের কোন ভেক্টরটি X-অক্ষের সমান্তরাল?

ক $(\hat{i}+\hat{j})\times\hat{i}$ খ $(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{k}$

গ $(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{j}$ ঘ $(\hat{k}\times\hat{j})\times\hat{k}$ **গ**

৬৭. ভেক্টর রাশি— (অনুধাবন)

i. কাজ ii. ত্বরণ

iii. ওজন

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৬৮. কৌণিক ভরবেগ — (অনুধাবন)

i. ঘূর্ণন জড়তা ও কৌণিক বেগের গুণফলের সমান

ii. একটি ভেক্টর রাশি

iii. এর দিক কৌণিক বেগের দিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii

গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৬৯. দুটি ভেক্টর সমান হলে ভেক্টরদ্বয় —(অনুধাবন)

i. ভিন্নজাতীয় হতে পারে

ii. একই দিকে ক্রিয়ারত থাকে

iii. সমান মানের হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৭০. সমজাতীয় এবং সমমানের দুটি ভেক্টরের দিক যদি পরস্পর বিপরীতমুখী হয় তাহলে এদের একটিকে অপরটির— (অনুধাবন)

i. ঋণ ভেক্টর বলে

ii. বিপরীত ভেক্টর বলে

iii. অসম-ভেক্টর বলে

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৭১. নাল ভেক্টর — (অনুধাবন)

i. একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে পাওয়া যায়

ii. দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়

iii. এর কোনো সুনির্দিষ্ট দিক নেই

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৭২. লন রোলারের ক্ষেত্রে— (অনুধাবন)

[পুলিশ লাইনস স্কুল এন্ড কলেজ, কুষ্টিয়া]

i. টানার চেয়ে ঠেলা সহজ

ii. ঠেলা বা টানার মধ্যে কোন পার্থক্য নেই

iii. ঠেলার চেয়ে টানা সহজ

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii

গ iii ঘ i ও iii **গ**

৭৩. $\vec{A}=9\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$, $\vec{B}=4\hat{i}-6\hat{j}+5\hat{k}$ হলে— (প্রয়োগ)

i. ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণফলের মান শূন্য

ii. ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল

iii. ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

৭৪. $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{B}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে — (প্রয়োগ)

i. $|\vec{A}|=3$ ii. $|\vec{B}|=7$

iii. $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ হলো 97°

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৭৫. $\vec{A}.\vec{B}=-AB$ হলে —(অনুধাবন)

i. $\vec{A}$, $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল

ii. $\vec{A}$, $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীতমুখী

iii. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $\theta = 90°$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৭৬. $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=2\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের —(প্রয়োগ)

i. ডট গুণফলের মান 0

ii. ক্রস গুণফলের মান 0

iii. এরা পরস্পর সমান্তরাল

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii

গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

উদ্দীপকটি পড়ে ৭৭ ও ৭৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\vec{A}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$; $\vec{B}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$; $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ যে সমতলে অবস্থিত তার লম্বদিকে একটি একক ভেক্টর অঙ্কন করা হলো।

৭৭. কোনটি উদ্দিষ্ট একক ভেক্টর? (অনুধাবন)

ক $\frac{2}{5\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{11}{5\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{6}\hat{k}$

খ $-\frac{2}{5\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{11}{5\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

গ $\frac{2}{5\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{11}{5\sqrt{6}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

ঘ $\frac{2}{5\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{11}{5\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ **ঘ**

৭৮. একক ভেক্টরটির মান কত হবে? (প্রয়োগ)

ক 1 খ $\sqrt{6}$

গ $5\sqrt{6}$ ঘ 5 **ক**

নিচের তথ্যে ভিত্তিতে ৭৯ ও ৮০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\vec{A}=3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ এবং

$\vec{B}=-\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি।

৭৯. $\vec{A}.\vec{B}=?$ [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক −25 খ −30

গ −35 ঘ 35 **ক**

৮০. $\vec{A}-\vec{B}=?$ [রাজউক উত্তরা মডেল কলেজ, ঢাকা]

ক $4\hat{i}+2\hat{j}+11\hat{k}$ খ $4\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k}$

গ $4\hat{i}-2\hat{j}-11\hat{k}$ ঘ $4\hat{i}-2\hat{j}+11\hat{k}$ **খ**