জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- নিয়মিত ও অনিয়মিত আকৃতি
- সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য
- পিথাগোরাসের উপপাদ্য
- পরিমাপে কম্পাসের ব্যবহার
- ত্রিভুজে অনুপাতের ব্যবহার
- চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য ও গঠন
- বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপের কাজ

জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

আমরা চারপাশে খেলার মাঠ, ধানখেত কিংবা বাড়ির সামনের বাগানের আকৃতি পর্যবেক্ষণ করি। ভালোমতো লক্ষ করলে দেখবে যে আমাদের চারপাশে বিভিন্ন আকৃতির জমি রয়েছে। মনে করো, কোনো জমির আকৃতি যদি সামান্তরিক কিংবা ট্রাপিজিয়ামের মতো হয় তাহলে তোমরা পরিমাপ করতে পারবে কি? একটি ট্রাপিজিয়াম আকৃতির জমি কীভাবে পরিমাপ করবে তা নিচের বক্সে লেখো।

এইবার চিত্র ৫.১ লক্ষ করো, এখানে একটি এলাকার বিভিন্ন জমির আকৃতিগুলোকে দেখা যাচ্ছে। এখানে কী কী আকৃতি দেখতে পাচ্ছ পর্যবেক্ষণ করো এবং খাতায় এঁকে রাখো। একটু চিন্তা করে বলো এই বিভিন্ন আকৃতির জমি আমরা কীভাবে পরিমাপ করতে পারি? তোমার সহপাঠী এবং প্রয়োজনে শিক্ষকের সঙ্গে আলোচনা করে নিচের বক্সে তোমার মতামত লেখো।

চিত্র -৫.১

ট্রাপিজিয়াম, রম্বস, ত্রিভুজ কিংবা বৃত্তাকার জমি আমরা খুব সহজেই পরিমাপ করতে পারি। এ পরিমাপের ক্ষেত্রে কখনো গ্রিড ব্যবহার করি আবার কখনো সূত্র ব্যবহার করি। কিন্তু ছবিতে যে আকৃতিগুলো দেখতে পেলাম এমন আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে আমরা কী করব? এ অভিজ্ঞতাটির আলোচনায় এবং বিভিন্ন কাজে অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা এই আকৃতিগুলোকে খুব সহজে চিহ্নিত করে পরিমাপ করার বিভিন্ন পদ্ধতি শিখবে।

আমার বিদ্যালয়ের জমি দেখতে কেমন?

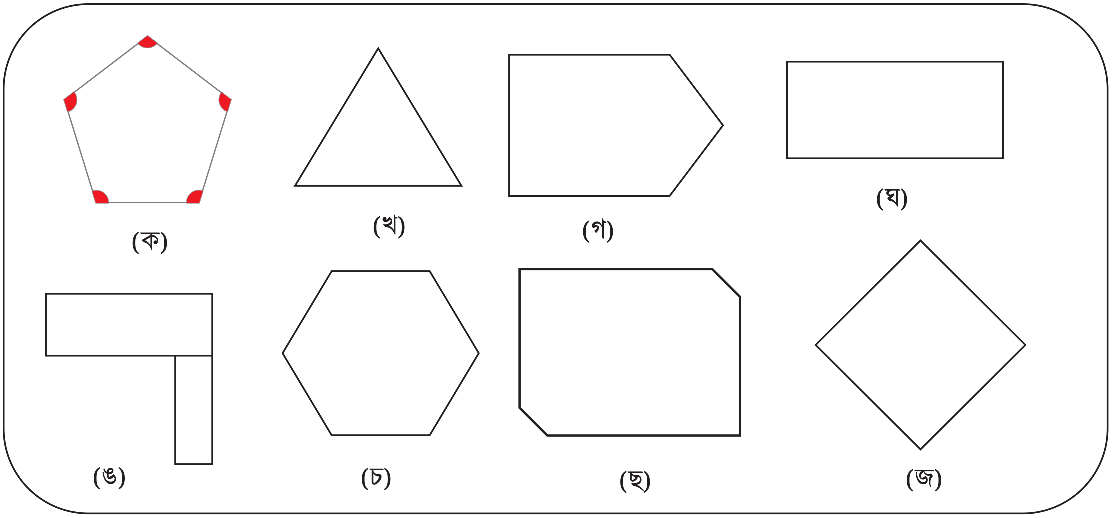
তোমাদের একটি কাজ দিতে চাই। কাজটি হলো তোমাদের বিদ্যালয়ের জমিটির আকৃতি সম্পর্কে ধারণা লাভ করবে এবং জমিটি মেপে দেখবে। বিদ্যালয়ের চারপাশ ভালোমতো পর্যবেক্ষণ করো। এই পর্যবেক্ষণের উপর ভিত্তি করে জমিটির একটি নকশা তৈরি করো। নিচের বক্সে ঐ নকশাটি এঁকে রাখো।

আমার বিদ্যালয়ের জমির নকশা আঁকি।

তোমরা বিদ্যালয়ের জমির নকশা তৈরি করেছ। আকৃতিগুলো সঠিকভাবে শনাক্ত করা জমি পরিমাপ করার জন্য খুব গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ। এখন এসো বিভিন্ন আকৃতি শনাক্ত করার একটি কাজ করি।

একক কাজ

প্রদত্ত বক্সে বিভিন্ন আকৃতি দেওয়া আছে। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর প্রতিটি বাহু এবং প্রতিটি কোণ পরিমাপ করে তাদের মধ্যে কী ধরনের মিল দেখতে পাচ্ছ? সমজাতীয়/একই বৈশিষ্ট্যযুক্ত আকৃতিগুলোকে শনাক্ত করো।



যে আকৃতিগুলোকে সমজাতীয় হিসেবে চিহ্নিত করলে তার কারণ লেখো।

____

____

____

____

____

একক কাজটির ক্ষেত্রে,

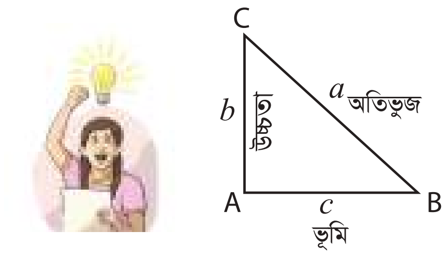
যে আকৃতিগুলোর বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান সেগুলো হলো [ ]

যে আকৃতিগুলোর বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান নয়, সেগুলো হলো [ ]

যখন কোনো আকৃতির বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান হয় আমরা তাকে নিয়মিত আকৃতি (Regular shape) হিসেবে চিহ্নিত করি। আবার যখন কোনো আকৃতির বাহু এবং কোণগুলোর ক্ষেত্রে যে কোনো একটি অসমান থাকে সেই আকৃতিকে অনিয়মিত আকৃতি হিসেবে (Irregular Shape) চিহ্নিত করি।

নিয়মিত এবং অনিয়মিত আকৃতিগুলো সঠিকভাবে শনাক্ত করার কাজটি পরিমাপ প্রক্রিয়ার জন্য খুব গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ। এখন চিন্তা করে দেখো তোমাদের বিদ্যালয়ের জমির নকশাটি কি নিয়মিত নাকি অনিয়মিত আকৃতি? অনিয়মিত জমি পরিমাপের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের বিভিন্ন ধারণা প্রয়োগ করে পরিমাপ করা সম্ভব। ইতোমধ্যে তোমরা ট্রাপিজিয়াম পরিমাপের ক্ষেত্রে এই কাজটি করেছ। অভিজ্ঞতার এই অংশে তোমরা ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আরও বিস্তারিত জানতে পারবে এবং এই ধারণাগুলো প্রয়োগ করে বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপ করতে পারবে।

প্রথমেই এসো যাচাই করে নিই ত্রিভুজ সম্পর্কিত কোন ধারণাগুলো তোমরা ইতোমধ্যে শিখেছ। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছ। এসো নিচের ছকে কুইজের মাধ্যমে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্যগুলো খুঁজে বের করার চেষ্টা করি।



চিত্র ৫.২

কুইজ

- সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ ________________ ।
- সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের নাম ________________ ।
- ভূ-সমান্তরালভাবে যে বাহুটি থাকে তাকে ____________ বলা হয়।
- সমকোণের বিপরীত বাহুটিকে ___________ বলা হয় ।
- চিত্র থেকে সমকোণটি চিহ্নিত করে পাশের বক্সে লেখো।
- সুত্রের সাহায্যে চিত্রে প্রদত্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ________________ ।

এসো তাহলে সমকোণী ত্রিভুজের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য খুঁজে বের করি।

একক কাজ

প্রত্যেকে নিজ নিজ খাতায় বিভিন্ন আকারের ৫টি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো । ত্রিভুজগুলোর নিচে ১ নং ত্রিভুজ, ২ নং ত্রিভুজ,... , ৫ নং ত্রিভুজ নাম দাও। ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করো। অতঃপর

ত্রিভুজের বাহুগুলো মেপে ছক ৫.১ পূরণ করো। ৫টি ত্রিভুজের বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করে ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করো।

ছক ৫.১

ত্রিভুজ নং	ভূমি	উচ্চতা	অতিভুজ	ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	উচ্চতার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে সম্পর্ক

ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পেলে কি? তোমরা যদি সঠিকভাবে বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো তবে নিশ্চয়ই একটি সম্পর্ক পেয়ে থাকবে। তবে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ অতি সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করতে না পারার কারণে সম্পর্ক নির্ণয়ে আসন্ন মান ব্যবহার করতে হতে পারে। সম্পর্কটি বক্সে দেওয়া হলো। তোমার অনুসন্ধানের ফলাফলের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

এখন আমরা যদি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ c এবং অপর দুই বাহু a ও b ধরি, তবে আমরা লিখতে পারি,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

জেনে রাখো

খ্রিষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীতে গ্রিক দার্শনিক ও গণিতবিদ পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের এই বিশেষ বৈশিষ্ট্যটি নিরূপণ করেন । এজন্য এটিকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য বলা হয়। তাঁর নামে এই উপপাদ্যের নামকরণ করা হলেও আরও প্রাচীনকাল থেকে এই উপপাদ্যটির ব্যবহার খুঁজে পাওয়া যায়। এর ব্যবহার দেখা যায় ব্যাবিলিয়নদের ব্যবহৃত বস্তুতে। আবার জানা যায় যে, খ্রিষ্টপূর্ব ৮০০ থেকে ৪০০ এর মধ্যে ভারতীয় উপমহাদেশের অনেক গণিতবিদও এই উপপাদ্যটি বিভিন্নভাবে ব্যাখ্যা করেছেন।

ধারণা করা হয়ে থাকে পিথাগোরাস বর্তমান তুরস্কের কাছাকাছি সামোস দ্বীপে জন্মগ্রহণ করেছিলেন। সংখ্যাতত্ত্ব, ত্রিমাত্রিক এবং ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত জ্যামিতিতে তাঁর অবদান খুঁজে পাওয়া যায়। পিথাগোরাস বিভিন্ন সংখ্যার সম্পর্ক নির্ণয়ে উৎসুক ছিলেন এবং যার প্রতিফলন হলো পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

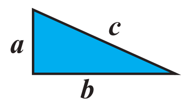
গ্রিক গণিতবিদ পিথাগোরাস

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ক্ষেত্রে আরেকটি মজার ঘটনা হলো **“পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী”**। যখন একটি সমকোণী ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা হয় তখন আমরা পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী পাই। যে তিনটি পূর্ণ সংখ্যা সমকোণী ত্রিভুজের এই বৈশিষ্ট্য মেনে চলে তাদেরকে পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী বলা হয়। যেমন, $(3, 4, 5)$ ও $(5, 12, 13)$ দুটি পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী। এরকম আরও অনেক পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী তোমরা খুঁজে বের করতে পার।

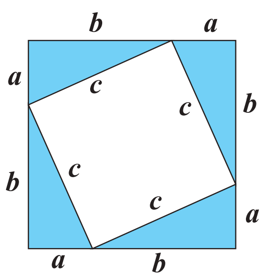
এবার তোমাদের একটি প্রশ্ন করি। আমরা যদি ইচ্ছাকৃতভাবে কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা পূর্ণ সংখ্যায় নিই তবে সবসময় অতিভুজ পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে কি? অথবা যে কোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণ সংখ্যায় নিলে তৃতীয় বাহুটির দৈর্ঘ্য পূর্ণ সংখ্যায় হবে কি?

একক কর্মপত্র—বিকল্প উপায়ে “পিথাগোরাসের উপপাদ্য”

খুব সহজে কাগজ কেটে এই সম্পর্কটি প্রমাণ করা যায়। এক্ষেত্রে 4টি একই মাপের সমকোণী ত্রিভুজ নাও ।



ধরো, প্রত্যেকটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য c এবং অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য a ও b । এখন 4টি ত্রিভুজকে নিচের চিত্রের মতো করে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের মধ্যে সাজাও (চিত্র: ৫.৩)।



চিত্র-৫.৩

এক্ষেত্রে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট বড়ো বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=(a+b)^2$

4টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{1}{2} \times a \times b = 2ab$

ফাঁকা অংশের ক্ষেত্রফল $= c^2$ [যেহেতু ফাঁকা অংশটি একটি বর্গক্ষেত্র]

যেহেতু বড়ো বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল, 4টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং ফাঁকা অংশের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান, সুতরাং প্রমাণ করো যে,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

কিন্তু এমন কি হতে পারে যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান নয় অথচ ত্রিভুজটি সমকোণী।

একক কাজ

নিজের ইচ্ছামতো তিনটি করে বাহুর দৈর্ঘ্য a, b ও c নিয়ে ত্রিভুজ গঠন করো যেন $a^2 \neq b^2 + c^2$, $b^2 \neq c^2 + a^2$, এবং $c^2 \neq a^2 + b^2$ হয়। বাহু তিনটি দিয়ে ত্রিভুজ গঠন করে কোণগুলো পরিমাপ করো। ত্রিভুজের যে কোনো একটি কোণ সমকোণ হয়েছে কি? ত্রিভুজটি কী ধরনের ত্রিভুজ হয়েছে?

যদি $a^2 > b^2 + c^2$ অথবা, $b^2 > c^2 + a^2$ অথবা, $c^2 > a^2 + b^2$ হয় তবে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী হবে। অন্যথায় ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হবে।

এখান থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর বর্গের সমান না হলে ত্রিভুজটি সমকোণী হয় না। **অর্থাৎ ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর বর্গের সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী হবে। একে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য বলে।**

আকৃতি পরিমাপের বিভিন্ন কৌশল আয়ত্ত করি

বিভিন্ন তথ্যের ভিত্তিতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ গঠনে আমাদের অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। আমরা এই কাজগুলো কাগজ ভাঁজ করে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে শিখেছি। আবার নিচে বর্ণিত একক কাজটির ক্ষেত্রে তোমরা খুব সহজেই চাঁদা ব্যবহার করে কাজটি সম্পন্ন করতে পার। কিন্তু যদি তোমার কাছে চাঁদা না থাকে তখন কী করবে?

একক কাজ

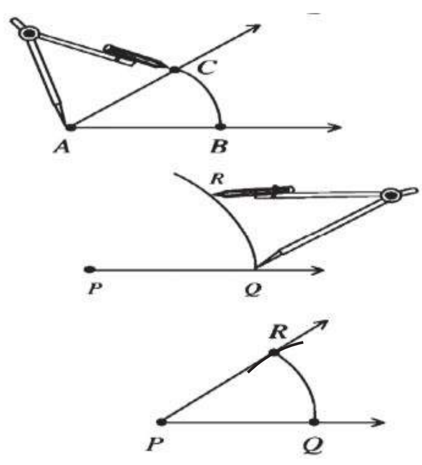
মনে করো, একটি জমি বা স্থাপনার নকশা তৈরির ক্ষেত্রে তোমাকে নিচের কাজগুলো করতে হবে।

- একটি কোণের ($\angle A$) সমান করে আরেকটি কোণ তৈরি করা
- যে কোণটি আঁকলে তাকে সমদ্বিখণ্ডিত করা
- একটি রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করা।

পরিমাপে কম্পাস ব্যবহারের উপায়

ক) ধরো, তুমি একটি কোণ $\angle A$ এর সমান করে একটি কোণ অঙ্কন করতে চাও।

- সেক্ষেত্রে যে কোনো একটি রশ্মি PQ নাও। এখন A বিন্দুতে পেন্সিল কম্পাসের কাঁটা স্থাপন করে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো (চিত্র:৫.৪)।
- বৃত্তচাপটি রশ্মিদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। একই ব্যাসার্ধ নিয়ে P কে কেন্দ্র করে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।



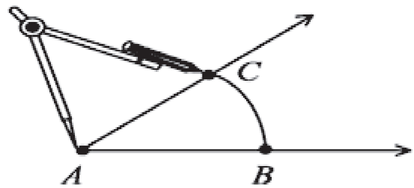
চিত্র: ৫.৪

বৃত্তচাপটি Q বিন্দুতে ছেদ করে। এবার Q কে কেন্দ্র করে BC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।

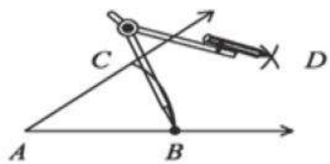
- এই বৃত্তচাপটি আগের বৃত্তচাপকে R বিন্দুতে ছেদ করে। PR যোগ করে বর্ধিত করো।

সঠিকতা যাচাই–এবার চাঁদা ব্যবহার করে মেপে দেখো উৎপন্ন ∠RPQ কোণটি ∠BAC কোণের সমান হয়েছে কি না।

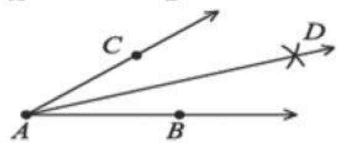
খ) আবার ধরো, একটি কোণ ∠A কে সমদ্বিখণ্ডিত করতে চাও।



এক্ষেত্রে A কে কেন্দ্র করে যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপটি রশ্মিদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র :৫.৫)।

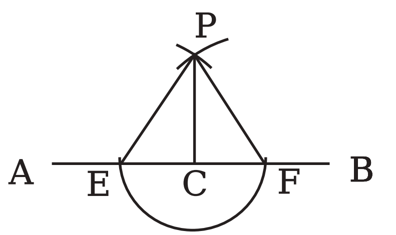


- এখন B কে কেন্দ্র করে BC এর অর্ধেকের চেয়ে বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। আবার C কে কেন্দ্র করে একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।
- ধরো, বৃত্তচাপ দুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D যোগ করো। এবার মেপে দেখো ∠BAD ও ∠CAD কোণদ্বয় সমান হয়েছে কি না।
- সঠিকতা যাচাই– কাগজ ভাঁজ করেও তুমি দেখতে পার AD এর উভয় পাশের কোণদ্বয় সমান কি না।



গ) আবার ধরো, তুমি কোনো একটি রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করতে চাও। রূলার ও কম্পাস ব্যবহার করে তুমি তা করতে পার।

- প্রথমে তুমি যে কোনো একটি রেখাংশ AB নাও। অতঃপর তুমি AB রেখাংশের উপর যে কোনো একটি বিন্দু C নাও (চিত্র : ৫.৬)।
- এই C বিন্দুতে তুমি লম্ব অঙ্কন করবে। C কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপটি AB কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন E ও F কে কেন্দ্র করে EF এর অর্ধেকের চেয়ে বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, C যোগ করো। এখন এই PC, AB এর উপর লম্ব।



চিত্র: ৫.৬

- সঠিকতা যাচাই– এখন এই PC, AB এর উপর লম্ব হয়েছে কি না তা তুমি সহজেই PC এর উভয় পাশের কোণ মেপে দেখতে পার। তবে এটি যুক্তি দিয়েও প্রমাণ করা যায়। সেক্ষেত্রে P,E ও P,F যোগ করে ΔPEC এবং ΔPFC গঠন করো। এই ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে অঙ্কন অনুসারে $EC = FC$, $PE = PF$ এবং PC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। অর্থাৎ একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান। সুতরাং আমরা বলতে পারি, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং $\angle PCE = \angle PCF = 1$ সমকোণ। [যেহেতু $\angle ECF$ = এক সরলকোণ= দুই সমকোণ।]

  সুতরাং PC, AB **এর উপর লম্ব**।

এখন বলো তো এমন কোনো উপায় কি আছে যেখানে উপরের পরিমাপগুলো কম্পাস কিংবা চাঁদা ব্যবহার না করেও তোমরা করতে পারবে? তোমার আইডিয়া এখানে লেখো।

ত্রিভুজে অনুপাতের ব্যবহার

অভিজ্ঞতার এই অংশে তোমরা বিভিন্ন আকৃতি তৈরি ও পরিমাপ করার ক্ষেত্রে ত্রিভুজের অনুপাত সম্পর্কিত কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করবে। যে কোনো একটি আকৃতির ত্রিভুজ চিহ্নিত করে ত্রিভুজের অনুপাত সম্পর্কিত এই বৈশিষ্ট্যগুলো কাজে লাগিয়ে ঐ আকৃতিটি পরিমাপ করা সম্ভব। আবার একটি ত্রিভুজের সঙ্গে আরেকটি ত্রিভুজের তুলনা করে পরিমাপ প্রক্রিয়ার অনেক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা সম্ভব।

জোড়ায় কাজ

আমরা ইতোমধ্যে জেনেছি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ x ভূমি x উচ্চতা। প্রত্যেক দল 3 cm ভূমি বিশিষ্ট পাঁচটি করে ভিন্ন ভিন্ন উচ্চতার ত্রিভুজ আঁকো। প্রতিটি ত্রিভুজের উচ্চতা পরিমাপ করে পাশের ছকটি পূরণ করো। তোমরা কি ক্ষেত্রফল ও উচ্চতার মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পেলে?

ছক-৫.২

ক্রমিক নং	ভূমি	উচ্চতা	ক্ষেত্রফল	ক্ষেত্রফল/ উচ্চতা
১.	3 cm			
২.	3 cm			
৩.	3 cm			
৪.	3 cm			
৫.	3 cm			

এখান থেকে তোমরা কী সিদ্ধান্ত নিলে তা নিচের বক্সে লেখো।

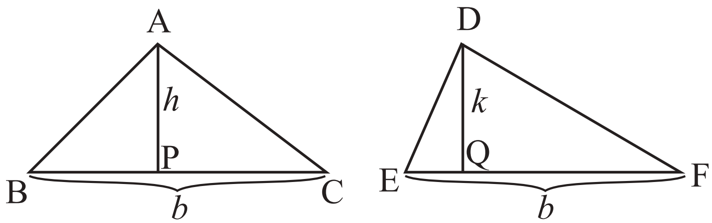
জোড়ায় কাজের সিদ্ধান্ত –

তোমরা যদি ভূমি ঠিক রেখে ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা পরিমাপ করো তাহলে দেখবে যে

ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রে নিচের বিবৃতিটি সত্য।

দুটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উচ্চতার সমানুপাতিক।

বিকল্প প্রমাণ– ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রকে কাজে লাগিয়ে উপরের বিবৃতিটি প্রমাণ করার আরেকটি বিকল্প উপায় নিচে বর্ণিত হলো।



চিত্র: ৫.৭

আমরা যদি ধরে নিই যে, ΔABC এবং ΔDEF এর একই ভূমি b এবং তাদের উচ্চতা যথাক্রমে h এবং k (চিত্র :৫.৭), তাহলে আমরা পাই,

$$\frac{\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEF \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2}\times b\times h}{\frac{1}{2}\times b\times k} = \frac{h}{k} = \frac{\Delta ABC \text{ এর উচ্চতা}}{\Delta DEF \text{ এর উচ্চতা}}$$

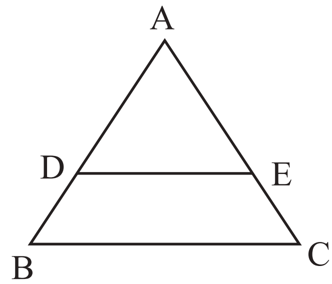
বা, $$\frac{\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{ABC \text{ এর উচ্চতা}} = \frac{\Delta DEF \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEF \text{ এর উচ্চতা}}$$

সুতরাং, আমরা পেলাম যে, ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উচ্চতার সমানুপাতিক।

একক কর্মপত্র– একই উচ্চতা ও ভিন্ন ভিন্ন ভূমিবিশিষ্ট পাঁচটি ত্রিভুজ এঁকে পরিমাপ করে দেখাও যে, ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক। প্রাপ্ত সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে বিকল্প প্রমাণ করে দেখাও।

আমরা এখানে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে ভূমি এবং উচ্চতার আনুপাতিক সম্পর্ক পেয়েছি। ত্রিভুজের আরও কিছু বৈশিষ্ট্য আছে যেখানে আনুপাতিক সম্পর্ক পাওয়া যায়। চলো আমরা নিচের কাজটি করে দেখি।

- প্রত্যেকে যে কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকো। ধরো, ত্রিভুজটি ΔABC ।
- কাগজ ভাঁজ করে বা অন্য কোনো উপায়ে BC এর সমান্তরাল করে DE সমান্তরাল রেখা আঁকো (চিত্র : ৫.৮)।
- ধরো, সমান্তরাল রেখাটি AB ও AC রেখাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছক ৫.৩ পূরণ করো।



চিত্র: ৫.৮

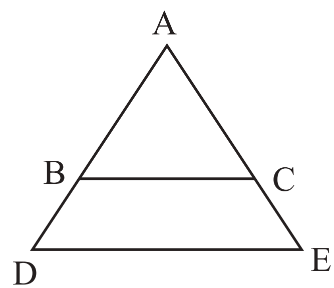
ছক-৫.৩		
দৈর্ঘ্য পরিমাপে একই একক ব্যবহার করো		অনুপাত
AD=	DB=	AD/DB =
AE=	CE=	AE/CE =

ফলাফলগুলো নিয়ে নিজেদের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। দেখো তো তোমাদের সিদ্ধান্ত নিচের মতো কি না?

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

এবার বিষয়টি নিয়ে একটু অন্যভাবে চিন্তা করো। প্রত্যেকে যে কোনো মাপের একটি করে ত্রিভুজ ΔABC আঁকো ।

AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করো যেন BC ও DE সমান্তরাল হয়। পূর্বের মতো ছক বানিয়ে হিসেব করে সিদ্ধান্ত খাতায় লেখো। উপরের প্রাপ্ত সিদ্ধান্তগুলো আমরা নিচের মতো করে লিখতে পারি।



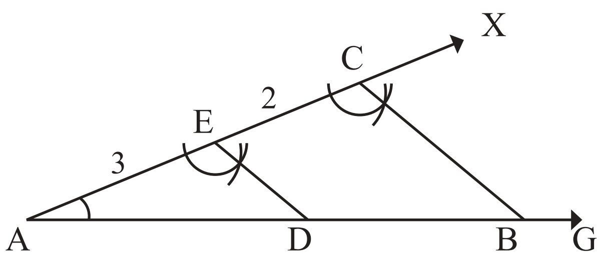
চিত্র: ৫.৮

ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

দলগত কাজ

প্রমাণ করো যে, কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

উপরোক্ত ধারণা ব্যবহার করে আমরা যে কোনো দৈর্ঘ্যের রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করতে পারি। ধরো, 9 cm. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে চাও। এক্ষেত্রে নিচের কাজটি করে সহজেই এটি করা যেতে পারে।



চিত্র : ৫.১০

- প্রথমে যে কোনো একটি রশ্মি AG আঁকো। AG থেকে AB=9 cm. অংশ কেটে নাও।
- A বিন্দুতে যে কোনো মাপের কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করো (চিত্র : ৫.১০) ।
- AX থেকে $AE = 3$ cm. অংশ কেটে নাও এবং EX থেকে $EC = 2$ cm. অংশ কেটে নাও।
- B ও C যোগ করো। এখন BC এর সমান্তরাল করে E বিন্দু দিয়ে ED সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করো যা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

এবার, AD ও BD পরিমাপ করে $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ এর সত্যতা নিশ্চিত করো। যেহেতু, $AD + BD = AB = 9$ cm. এবং $AD : BD = 3 : 2$, সুতরাং 9 cm. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

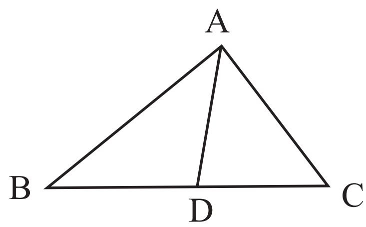
একক কাজ

মনে করো, তোমার কাছে একটি ফিতা বা দড়ি আছে। ফিতা বা দড়িটি যেকোনো দৈর্ঘ্যের হতে পারে। ঐ ফিতা বা দড়িটিকে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করো।

এবার চলো ত্রিভুজের অনুপাত সংক্রান্ত আরেকটি বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করি।

দলগত কাজ

তিনজন করে দল গঠন করো। প্রত্যেকে যে কোনো মাপের একটি করে ত্রিভুজ আঁকো (চিত্র-৫.১১)। কাগজ ভাঁজ করে বা অন্য কোনো উপায়ে কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক AD আঁকো। দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছকটি পূরণ করো।



চিত্র : ৫.১১

ছক: ৫.৪		
দৈর্ঘ্য পরিমাপে একই একক ব্যবহার করো		অনুপাত
BD=	DC=	BD/DC=
AB=	AC=	AB/AC=

প্রাপ্ত ফলাফলগুলো নিয়ে দলের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। তোমাদের দলের সিদ্ধান্ত অন্যদের সঙ্গে মিলাও। প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত নিচের বিবৃতির সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।

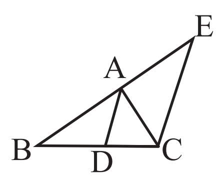
ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

একক কাজ

১. ΔABC আকৃতির একটি জমির AB ও AC বাহুকে DE রেখা এমনভাবে ছেদ করে যেন $AB : BD = AC : CE$ হয়। ΔDBC আকৃতির জমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গমিটার হলে ΔBEC এর ক্ষেত্রফল কত?

২. ΔABC আকৃতির একটি জমির BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AE : CE = 3 : 2$ এবং $BD = 2$ m হলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

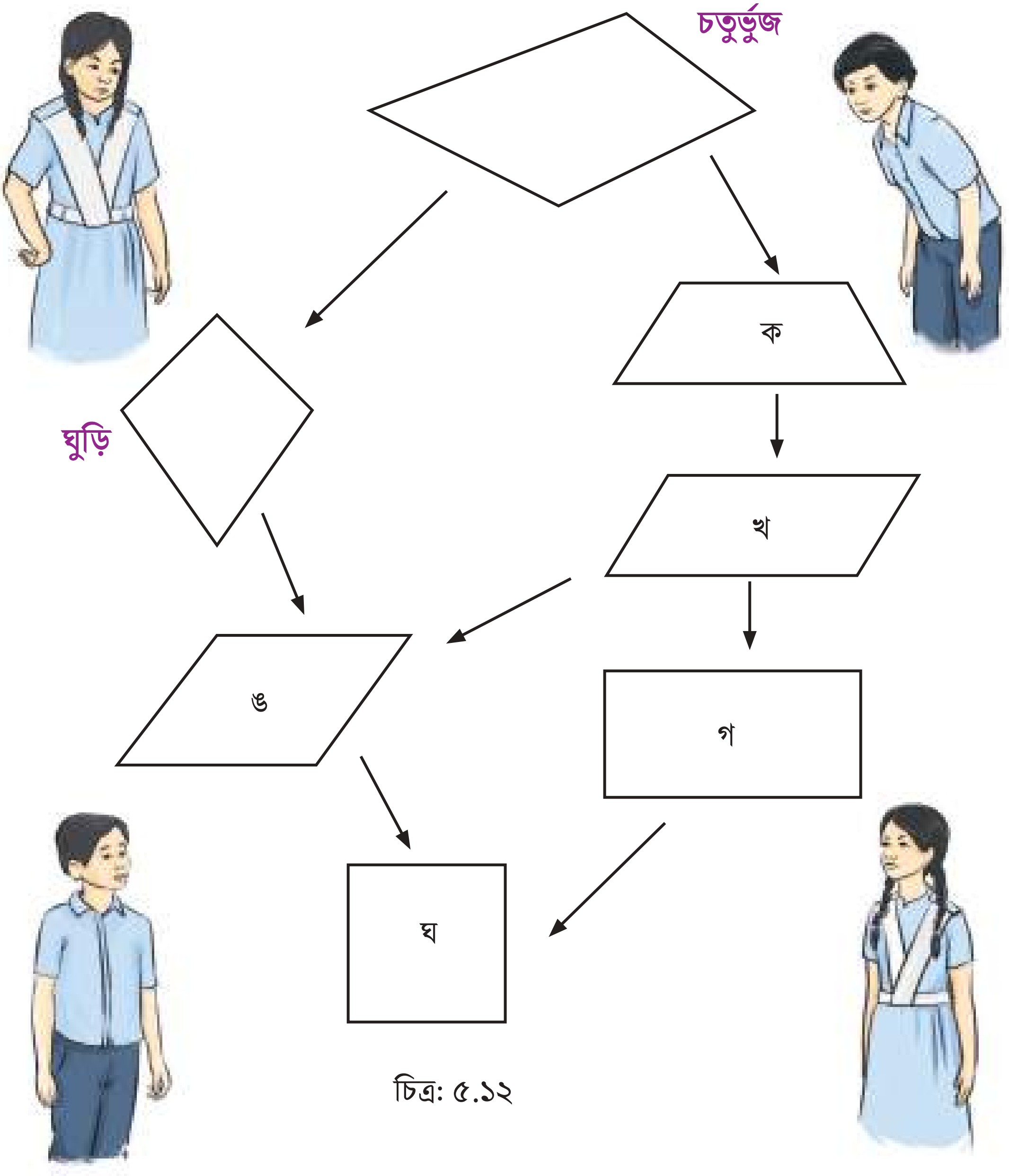
৩. ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। CE, AD এর সমান্তরাল এবং $BD : DC = 3 : 2$ । $AE = 10$ m হলে AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

নানা রকম চতুর্ভুজ খুঁজি

জমির নকশা তৈরির ক্ষেত্রে কিংবা জমি পরিমাপের ক্ষেত্রে ত্রিভুজের পাশাপাশি চতুর্ভুজের ধারণা নানাভাবে সাহায্য করে। আমরা বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজ সম্পর্কে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে জেনেছি। নিচের চিত্রটি লক্ষ করো।



চিত্র: ৫.১২

চিত্র : ৫.১২ এ বর্ণিত বিভিন্ন চতুর্ভুজকে ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে ছক ৫.৫ পূরণ করো :

ছক-৫.৫		
আকৃতি	আকৃতির নাম	সিদ্ধান্তের সপক্ষে যুক্তি
ক		
খ		
গ		
ঘ		
ঙ		

তোমরা নিশ্চয় লক্ষ করে থাকবে যে, আমরা একটি নতুন চিত্র দেখলাম। চিত্রটির নাম হলো ঘুড়ি। ঘুড়ির দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান। আবার ঘুড়ির দুই জোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো অর্থাৎ চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে আমরা তাকে বলব রম্বস। ফলে সকল রম্বসকে আমরা ঘুড়ি বলতে পারি। একইভাবে অন্য আকৃতিগুলোর মধ্যেও কিছু সম্পর্ক খুঁজে বের করা সম্ভব। নিচের ছকের প্রশ্নগুলোর উত্তর দিলে তোমরা ঐ সম্পর্কগুলো চিহ্নিত করতে পারবে। এখন জোড়ায় আলোচনার মাধ্যমে ছক ৫.৬ পূরণ করো।

ছক-৫.৬	
প্রশ্ন	উত্তর
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে চতুর্ভুজ ট্রাপিজিয়াম হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে ট্রাপিজিয়াম সামান্তরিক হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে সামান্তরিক আয়ত হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে সামান্তরিক রম্বস হবে?	
বর্গ কি একটি রম্বস? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে আয়ত বর্গ হবে?	
বর্গ কি একটি সামান্তরিক? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	
সামান্তরিক কি একটি ট্রাপিজিয়াম? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	

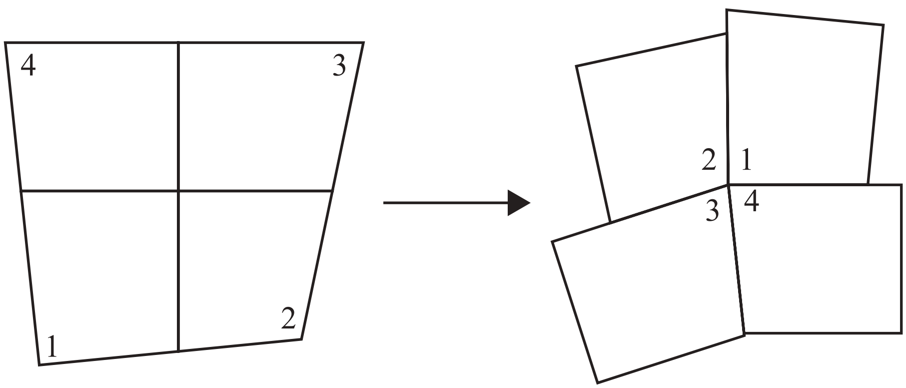
নিচে প্রদত্ত আকৃতির নামগুলো ব্যবহার করে শূন্যস্থান পূরণ করো।

আয়ত, ট্রাপিজিয়াম, বর্গ, সামান্তরিক, রম্বস, চতুর্ভুজ

চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ আকৃতিকে ____________ বলে। যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল তাকে ________________ বলে। ট্রাপিজিয়ামের দুই জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল হলে সেটি হবে ____________। আবার সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে আমরা ___________ পাব। আয়তের সন্নিহিত বাহু সমান হলে আমরা ________ পাব। অন্যদিকে ____________ সন্নিহিত বাহু সমান হলে সেটি হবে রম্বস এবং __________ এর একটি কোণ সমকোণ হলে তাকে বর্গ বলে।

চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি কত?

বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য এবং তাদের পারস্পরিক সম্পর্কগুলো খুঁজে বের করেছ। এবার তোমরা কাগজ কেটে চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি কত তা খুঁজে বের করবে। তোমরা প্রত্যেকে তোমাদের নিজেদের মতো করে একটি চতুর্ভুজ আঁক। অতঃপর চতুর্ভুজটিকে কেটে চার টুকরা করো যাতে চারটি কোণ চার অংশে থাকে। কোণগুলোকে একটি বিন্দুতে পরপর নিচের মতো করে সাজাও।



হিসেব করে বলো তো চতুর্ভুজের চারকোণের সমষ্টি কত? প্রত্যেকে আলাদাভাবে চতুর্ভুজ তৈরি করে হিসেব করেছ। সবার হিসেব কি একই রকম হয়েছে? নিজেদের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। দেখো তো তোমাদের সিদ্ধান্ত নিচের মতো কি না?

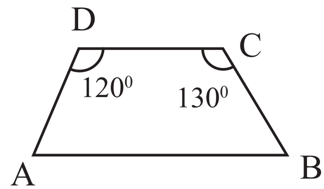
চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ বা 360^0

একক কাজ

১. ABCD একটি সামান্তরিক। $\angle A = 60^{\circ}$ হলে, $\angle B = ?$

২. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। AB এবং CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল।

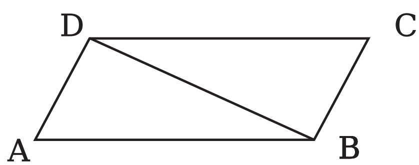
চিত্র দেখে উত্তর লেখো : $\angle A = ?$, $\angle B = ?$



সামান্তরিকের বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করি

সামান্তরিকের চারটি শীর্ষকে আমরা দুই জোড়া বিপরীত শীর্ষ হিসেবে বিবেচনা করতে পারি। চলো আমরা প্রতি জোড়া বিপরীত শীর্ষে উৎপন্ন কোণদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক খুঁজে দেখি।

- প্রত্যেকে নিজেদের মতো করে ABCD একটি সামান্তরিক আঁকো (চিত্র : ৫.১৩) ।
- সামান্তরিকের একটি কর্ণ BD বরাবর সামান্তরিকটিকে কেটে $\triangle ABD$ এবং $\triangle BDC$ নামে দুটি ত্রিভুজ তৈরি করো।
- অতঃপর $\triangle BDC$ কে $\triangle ABD$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করো যেন C বিন্দু A বিন্দুর উপর, B বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং D বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়ে। এক্ষেত্রে BC বাহু DA বাহুর উপর এবং DC বাহু BA বাহুর উপর পড়বে।



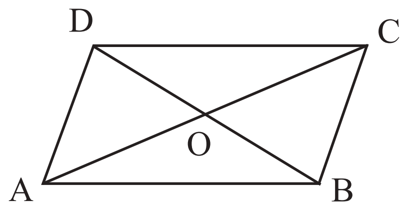
চিত্র: ৫.১৩

- লক্ষ করো, ত্রিভুজ দুটি সম্পূর্ণভাবে মিলে গিয়েছে। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, $\angle A = \angle C$, $AD = BC$, $AB = CD$।
- অনুরূপভাবে AC কর্ণ বরাবর কেটে দেখানো যায় যে, $\angle B = \angle D$। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে,

সামান্তরিকের বিপরীত শীর্ষকোণগুলো পরস্পর সমান এবং সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।

আবার, ABCD একটি সামান্তরিক অঙ্কন করো যার কর্ণদ্বয় AC ও BD (চিত্র-৫.১৪)।

- ধরো, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
- এখন C বিন্দুকে ভাঁজ করে A বিন্দুর উপর স্থাপন করো।
- অতঃপর ভাঁজ খুলে ভাঁজ বরাবর AC কর্ণের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করো।



চিত্র: ৫.১৪

- আবার B বিন্দুকে ভাঁজ করে D বিন্দুর উপর স্থাপন করো এবং ভাঁজ খুলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করো।
- মিলিয়ে দেখো যে বিন্দু দুইটি আলাদা কোনো বিন্দু নয় । বিন্দু দুইটি এবং AC ও BD কর্ণের ছেদবিন্দু মূলত একই বিন্দু। অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সঠিকতা যাচাই- অন্যভাবে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব মেপেও আমরা এর সত্যতা নিরূপণ করতে পারি। তোমার আঁকা সামান্তরিকের ক্ষেত্রে এভাবে সত্যতা প্রমাণ করে দেখতে পার।

একক কাজ

সামান্তরিকের ন্যায় রম্বস, আয়ত ও বর্গের কর্ণের ক্ষেত্রে কি একই বৈশিষ্ট্য কাজ করে? যাচাই করে দেখো।

আমরা জানি, রম্বসের চারটি বাহুই সমান। প্রত্যেকে ABCD একটি করে রম্বস এঁকে তার বিপরীত শীর্ষগুলো যোগ করো।

ফলে AC ও BD কর্ণদ্বয় পাওয়া যাবে। ধরো, কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে (চিত্র : ৫.১৫) । কোণ মেপে নিচের ফাঁকা স্থান পূরণ করো।

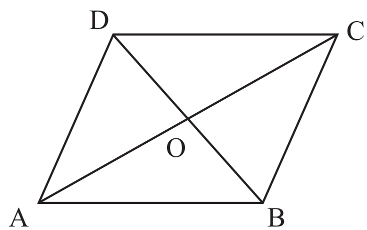
$\angle AOB=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle BOC=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle COD=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle DOA=$ - - - - ডিগ্রি ।

$\angle AOB+\angle BOC=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle AOC=$ এক সরলকোণ।

$\angle BOC+\angle COD=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle BOD=$ এক সরলকোণ।

$\angle COD+\angle DOA=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle COA=$ এক সরলকোণ।

$\angle DOA+\angle AOB=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle DOB=$ এক সরলকোণ।



চিত্র-৫.১৫

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে --------- কোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং আমরা জানলাম, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

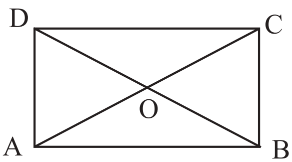
একক কাজ

বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে কি না তা প্রমাণ করে কর্মপত্রের মাধ্যমে জমা দাও।

ইতঃপূর্বে আমরা কাজের মাধ্যমে জেনেছি, আয়তের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কিন্তু আয়তের কর্ণদ্বয় কি সমান? চলো আমরা পরের কাজটি করে জেনে নিই।

একক কাজ

চিত্র : ৫.১৬ থেকে ছক ৫.৭ এর খালি ঘর পূরণ করো এবং সিদ্ধান্ত লেখো।



চিত্র: ৫.১৬

ছক- ৫.৭	
প্রস্তাবনা ($\triangle BAD$ এবং $\triangle CAD$ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে)	কারণ
$AB = CD$	
$AD = AD$	
অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDA$	
$\therefore \triangle BAD$ এবং $\triangle CAD$ সর্বসম	দুইটি ত্রিভুজের দুই বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।
$\therefore BD = AC$	

সিদ্ধান্ত: ____

চতুর্ভুজের গঠন

আমরা বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানলাম যা আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে এবং পরিমাপের সিদ্ধান্ত নিতে আমাদের সাহায্য করবে। এবার আমরা কীভাবে বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজ গঠন করা যায় তা নিয়ে কাজ করব। আগের শ্রেণিতে কাঠিতে স্কেলের সাহায্যে 1 cm পরপর দাগ দিয়ে চার কাঠি ব্যবহার করে সুতার সাহায্যে কাঠিগুলোকে বেঁধে বর্গ, রম্বস, আয়ত ও সামান্তরিক তৈরি করে খাতায় বসিয়ে চিত্রগুলো এঁকেছ। এই সবকটি আকৃতিই হলো চতুর্ভুজ। এর বাইরেও চার কাঠি ব্যবহার করে নানা রকমের চতুর্ভুজ বানানো সম্ভব। তবে এদেরকে হয়তো আমরা বিশেষায়িত নাম দিতে পারব না। এক কথায় সবকটিই হচ্ছে চতুর্ভুজ। কিন্তু যে কোনো দৈর্ঘ্যের চার কাঠি হলেই কি আমরা চতুর্ভুজ গঠন করতে পারব?

তোমরা ত্রিভুজ গঠনের সময় এ ধরনের সমস্যায় পড়েছিলে। যে কোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দিয়ে কি ত্রিভুজ গঠন সম্ভব ছিল? সেক্ষেত্রে দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হওয়ার প্রয়োজন ছিল। চতুর্ভুজ গঠনের ক্ষেত্রে তোমরা বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের কাঠি নিয়ে চেষ্টা করো এবং তোমার সিদ্ধান্ত নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

এবার সহপাঠীদের সঙ্গে আলোচনা করে দেখো কোথাও ভুল হয়েছে কি না। প্রয়োজনে তোমার সিদ্ধান্তটি সংশোধন করো।

ত্রিভুজ গঠনে যেমন যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হতে হয়, ঠিক তেমনি চতুর্ভুজ গঠনেও যেকোনো তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল চতুর্থ বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হতে হয়। এটা না হলে চতুর্ভুজ গঠন করা সম্ভব হয় না।

দলগত কাজ

চলো এবার আমরা চতুর্ভুজ গঠন করি। এক্ষেত্রে তোমরা জ্যামিতি বক্স ব্যবহার করে কাজটি করতে পার।

(ক) ABCD চতুর্ভুজটি গঠন করো যেখানে, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm এবং $DA = 6$ cm.

তোমাদের বিভিন্ন দলের আঁকা চতুর্ভুজগুলো কি দেখতে একই রকম? নিশ্চয়ই নয়। কারণ পাশাপাশি দুই বাহুর মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ জানা না থাকার কারণে তোমরা তোমাদের ইচ্ছেমতো কোণ নিয়ে কাজটি করেছ। ফলে একেক দলের চতুর্ভুজের আকৃতি একেক রকম হয়েছে। তাহলে আমরা চারটি বাহুর সঙ্গে একটি কোণ নির্দিষ্ট করে দিয়ে দেখতে পারি চতুর্ভুজগুলোর আকৃতি কেমন হয়।

(খ) ABCD চতুর্ভুজটি গঠন করো যেখানে, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 5$ cm, $DA = 4.5$ cm এবং AB ও AD বাহুর মধ্যবর্তী কোণ 60 ডিগ্রি।

এবার দেখো যে, তোমাদের প্রত্যেক দলের চতুর্ভুজটি দেখতে একই রকম হয়েছে। তাহলে আমরা বলতে পারি যে, চারটি বাহু হলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ গঠন করা যায় না । একটি কোণকেও নির্দিষ্ট করতে হয়। তবে এখানে একটি ব্যাপার আছে। তুমি যদি বাহুগুলোকে নির্দিষ্ট ক্রমে যুক্ত না করে অন্য কোনোভাবে যুক্ত করো তবুও কি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে?

সহপাঠীদের সঙ্গে আলোচনা করে তোমার মতামত নিচের ঘরে লেখো।

চারটি বাহু এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ দিয়ে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করতে হলে বাহুগুলোর ক্রম নির্দিষ্ট করে দিতে হবে এবং কোণটি কোন দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত হবে তা নির্দিষ্ট করতে হবে এবং তখনই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে।

(গ) এবার আমরা দেখি, চারটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া থাকলে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করা যায় কি না। ধরো চতুর্ভুজের বাহুগুলো 4 cm, 4.5 cm, 5 cm, 3.5 cm এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.5 cm ।

অঙ্কনের নির্দেশনা

- যে কোনো একটি সরলরেখা থেকে কর্ণের সমান করে অংশ কেটে নিয়ে কর্ণের একপাশে কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো ।
- এক্ষেত্রে তুমি যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য নিতে পার।
- একইভাবে কর্ণের অপর পাশে অন্য দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে আরও দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো।
- উভয় পাশের বৃত্তচাপদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পর্যন্ত রেখা টেনে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো । এবার মিলিয়ে দেখো সবার চতুর্ভুজ একই রকম হয়েছে কি না।

চতুর্ভুজগুলো একই রকম না হয়ে থাকলে তার কারণ এবং কী শর্তে চতুর্ভুজগুলো একই রকম তথা নির্দিষ্ট হতে পারে তা নিচের বক্সে উল্লেখ করো।

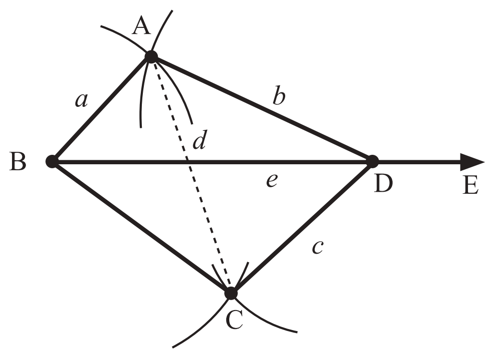
শিক্ষককে দেখাও এবং শিক্ষকের পরামর্শ নিয়ে প্রয়োজনে সংশোধন করো।

আমরা এবার লক্ষ করি একটি চতুর্ভুজে কী কী থাকে। একটি চতুর্ভুজে চারটি বাহু, চারটি কোণ এবং দুইটি কর্ণ থাকতে পারে। এই দশটি তথ্যের মধ্য থেকে আমরা পাঁচটি নির্দিষ্ট তথ্য নিয়ে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করতে পেরেছি। আমরা এখন নানাভাবে পাঁচটি তথ্য নিয়ে দেখব নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করা যায় কি না। পরবর্তী সময়ে বিভিন্ন আকৃতির নকশা তৈরি এবং পরিমাপ করার ক্ষেত্রে চতুর্ভুজ গঠনের এই বৈশিষ্ট্যগুলো তোমরা ব্যবহার করতে পারবে।

তিনটি বাহু এবং দুইটি কর্ণ

ধরো, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3.5$ cm এবং দুইটি কর্ণ $d = 4$ cm, $e = 5$ cm।

তথ্যগুলো দিয়ে একটি চিত্র অঙ্কন (চিত্র-৫.১৭) করা হলো।



চিত্র : ৫.১৭

৫.৮ ছকে এলোমেলোভাবে অঙ্কনের বিবরণ দেওয়া হলো। বিবরণগুলো সাজিয়ে লেখো।

ছক-৫.৮	
অঙ্কনের বিবরণ (এলোমেলোভাবে রয়েছে)	অঙ্কনের বিবরণ (সাজিয়ে লেখো)
যে কোনো রশ্মি BE থেকে $BD = e = 5$ cm নিই।	
D কে কেন্দ্র করে $c = 3.5$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A বিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
ধরি, বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।	
D কে কেন্দ্র করে $b = 4$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকি।	

B কে কেন্দ্র করে $a = 3$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে কোনো পাশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
ধরি, বৃত্তচাপদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করে।	
A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি।	
A কে কেন্দ্র করে $d = 4$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A বিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
সুতরাং ABCD চতুর্ভুজই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।	

এবার চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে তোমার বিবরণের যথার্থতা নিশ্চিত করো এবং মিলিয়ে দেখো সকলের চতুর্ভুজ একই রকম হয়েছে কি না।

তিনটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

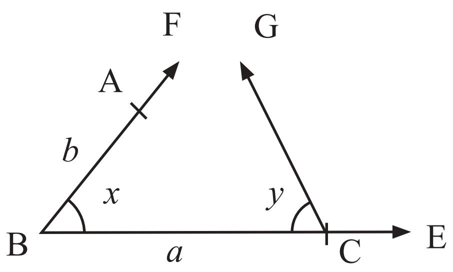
ধরো, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm এবং a ও b এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 80^\circ$, b ও c এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 70^\circ$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

৫.৯ ছকে এলোমেলোভাবে অঙ্কনের বিবরণ দেওয়া হলো। বিবরণগুলো সাজিয়ে লেখো এবং চিত্র অঙ্কন করো।

ছক-৫.৯	
অঙ্কনের বিবরণ এলোমেলোভাবে রয়েছে	অঙ্কনের বিবরণ (সাজিয়ে লেখো)
B বিন্দুতে $\angle x = 80^\circ$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকি।	
C বিন্দুতে $\angle y = 70^\circ$ এর সমান করে $\angle BCG$ আঁকি।	
CG থেকে $c = 4$ cm $=$ CD অংশ কেটে নিই।	
BF থেকে $b = 5$ cm $=$ BA অংশ কেটে নিই।	
যে কোনো রশ্মি BE থেকে BC$=a=6$ cm নিই।	
সুতরাং ABCD চতুর্ভুজই হলো উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।	
AD যোগ করি।	

দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং তিনটি কোণ

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র : ৫.১৮

একক কাজ: ধরো, একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু $a = 5$ cm, $b = 6$ cm এবং তিনটি কোণ $\angle x = 70^o$, $\angle y = 80^o$ ও $\angle z = 100^o$। অঙ্কনের বিবরণসহ চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো। [ধারণা গঠনের জন্য চতুর্ভুজের একটি আংশিক খসড়া চিত্র দেওয়া হলো (চিত্র : ৫.১৮)]।

ক্ষেত্রফল নির্ণয়

তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে ত্রিভুজ ও বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছ।

ত্রিভুজ ও বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলগুলো একটি ঘরে রাখা আছে। ক্ষেত্রফলগুলো ছকে সাজিয়ে লেখো।

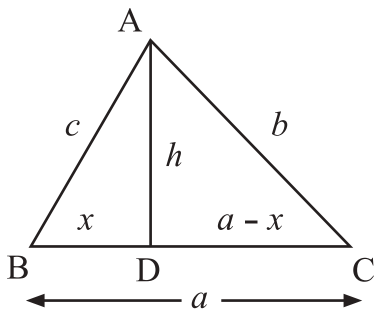
$\frac{1}{2}d_1d_2$, bh, a^2, ab, dh, $\frac{1}{2}bh$, $\frac{h(a+b)}{2}$

ছক-৫.১০	
আকৃতি	**ক্ষেত্রফল**
আয়তক্ষেত্র (দৈর্ঘ্য a এবং প্রস্থ b)	
বর্গক্ষেত্র (বাহুর দৈর্ঘ্য a)	
সামান্তরিকক্ষেত্র (ভূমি b এবং উচ্চতা h)	
সামান্তরিকক্ষেত্র (একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h)	

রম্বস (রম্বসের কর্ণদ্বয় d_1 ও d_2)	
ট্রাপিজিয়াম (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a ও b এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব h)	
ত্রিভুজ (ভূমি b এবং উচ্চতা h)	

তোমরা জেনেছ যে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা। অর্থাৎ, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল জানতে হলে তোমাদেরকে ভূমি ও উচ্চতা সম্পর্কে জানতে হবে। যদি এমন হয় যে, উচ্চতা জানা নেই । শুধু তিন বাহুর দৈর্ঘ্য জানা আছে। সেক্ষেত্রে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের করা যায় কি না চলো আমরা সে বিষয়ে অনুসন্ধান করি।

ধরো, ΔABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $BC = a, CA = b, AB = c$ এবং ভূমি BC এর উপর AD লম্ব। আমাদের AD লম্বের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ ত্রিভুজটির উচ্চতা জানা নেই।



চিত্র : ৫.১৯

এক্ষেত্রে আমাদের ত্রিভুজের ভূমি $BC = a$ জানা আছে। আমরা যদি ত্রিভুজের উচ্চতাকে বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে বের করে ফেলতে পারি, তাহলেই আমরা আমাদের জানা সূত্রের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের করতে পারব। লম্ব AD, ΔABC কে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করেছে। ফলে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে, AD এর দৈর্ঘ্য বের করতে পারব।

ধরো, $AD = h$ এবং $BD = x$, সুতরাং, $CD = a-x$ ।

সুতরাং, ΔABD এবং ΔACD সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে বক্সটি পূরণ করো।

$AB^2 =$

$AC^2 =$

$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, ____

____

____

$\therefore x = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

এবং $AD^2 = c^2 - x^2$

$= c^2 - (\frac{c^2+a^2-b^2}{2a})^2$

$= (c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a})(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a})$

$= \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a}$

$= \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2}$

$= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}$

[ধরি, $a + b + c = 2s$;
"s" ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা
(Semi Parameter) নির্দেশ করে।]

$= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2}$

$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$

$\therefore \boldsymbol{AD} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2}.a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

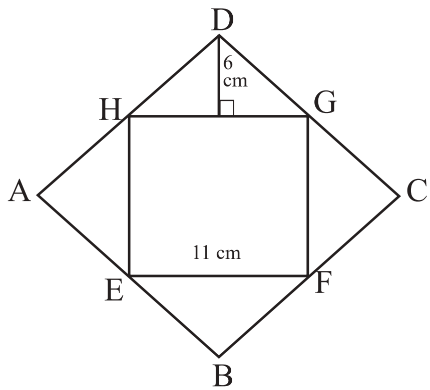
এখান থেকে বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে $s = \frac{a+b+c}{2}$ নির্ণয় করে আমরা যে কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারব।

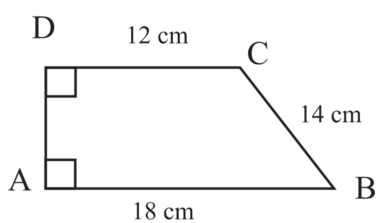
আবার ত্রিভুজটি যদি সমদ্বিবাহু হয় তবে ধরো, ত্রিভুজের বাহু তিনটি a, a, b । সেক্ষেত্রে, $s = \frac{a+a+b}{2} = \frac{2a+b}{2}$
$\therefore s-a = \frac{2a+b}{2} - a = \frac{2a+b-2a}{2} = \frac{b}{2}$, $s-b = \frac{2a+b}{2} - b = \frac{2a+b-2b}{2} = \frac{2a-b}{2}$ ।

প্রমাণ করো যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ΔABC এর ক্ষেত্রফল$=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

আবার, ত্রিভুজটি সমবাহু হলে, ধরো বাহুগুলো a, a, a । সেক্ষেত্রে, $s = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$ এবং
$s-a = \frac{3a}{2} - a = \frac{3a-2a}{2} = \frac{a}{2}$ । **প্রমাণ করো যে,সমবাহু ত্রিভুজ ΔABC এর ক্ষেত্রফল$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$**

চিত্র : ৫.২০ লক্ষ করো। এখানে দুইটি ছবি দেওয়া আছে। আমরা কীভাবে এদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি?





ABCD বর্গের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে E,F,G ও H

চিত্র: ৫.২০

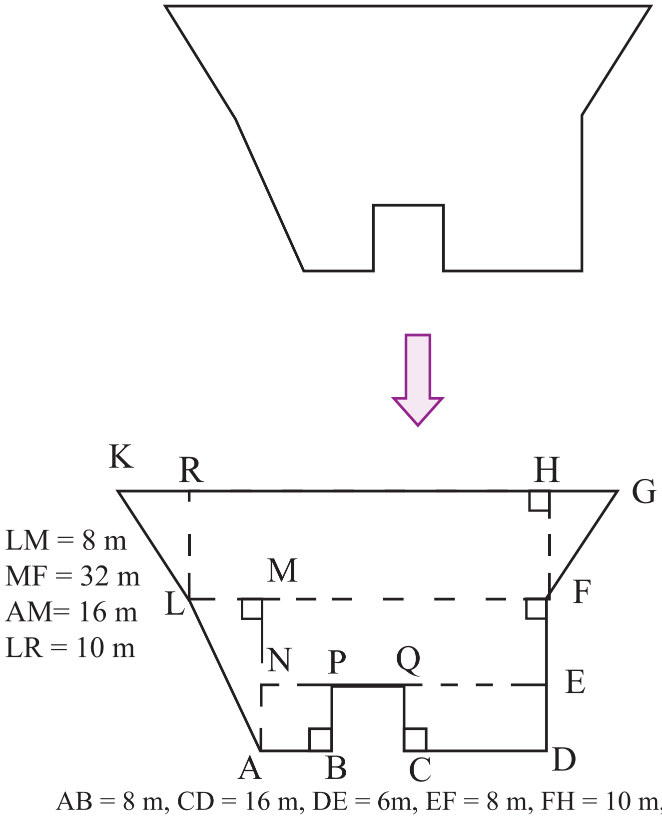
প্রথম চিত্রটির ক্ষেত্রফল বের করার ক্ষেত্রে লক্ষ করো যে, ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে আরেকটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্র EFGH তৈরি করা হয়েছে। যেহেতু $AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA$ এবং $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, সুতরাং চারদিকে চারটি সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ রয়েছে।

মাঝখানের বর্গক্ষেত্র ও ত্রিভুজক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল বের করে সহজেই তোমরা সম্পূর্ণ কাঠামোটির ক্ষেত্রফল বের করে ফেলতে পারবে।

দ্বিতীয় চিত্রটি দেখো। দ্বিতীয় চিত্রটি একটি ট্রাপিজিয়াম। ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল দুই বাহুর মধ্যবর্তী দূরত্ব দেওয়া নেই। তোমরা C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কন করে ক্ষেত্রটিকে একটি আয়তক্ষেত্র ও একটি ত্রিভুজক্ষেত্রে আলাদা করতে পার। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের ভূমি হবে $(18 - 12)$ cm $= 6$ cm.। অতঃপর পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে তোমরা ত্রিভুজটির উচ্চতা তথা ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল দুই বাহুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বের করতে পারবে।

একক কাজ

চিত্র : ৫.২১ -এ একটি নমুনা নকশার মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজগুলো চিহ্নিত করে দেখানো হলো। জমিটির মোট ক্ষেত্রফল বের করো।



ক্ষেত্রফল = ________________ বর্গ মি.

চিত্র : ৫.২১

ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য এবং গঠন-সম্পর্কিত বিভিন্ন বিষয় তোমরা আয়ত্ত করলে। এখন তোমাদের বিদ্যালয়ের জমির যে নকশা তৈরি করেছিলে সেই নকশাটিকে বিভিন্ন ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজে বিভক্ত করে পরিমাপ করার জন্য একটি ছবি নিচের বক্সে আঁকো।

তোমার বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপের ছবি :

- তোমার বিদ্যালয়ের জমির মোট পরিমাণ কত?
- বিদ্যালয়ের খালি জায়গার পরিমাণ কত?
- বিদ্যালয়ের খালি জায়গার পরিমাণ মোট জমির কত অংশ?

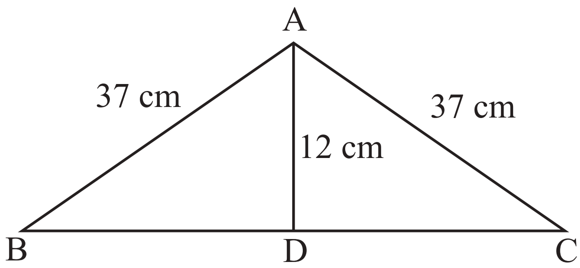
উক্ত তথ্যগুলো পরিমাপ করে পরিমাপের ফলাফল লিখে শ্রেণিকক্ষে উপস্থাপন করো।

এই অভিজ্ঞতাটির মধ্য দিয়ে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের গঠন ও বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত যে কাজগুলো তোমরা সম্পন্ন করেছ তা বিভিন্ন বস্তু পরিমাপের ক্ষেত্রে তোমরা ব্যবহার করবে। একই সঙ্গে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে এই শিখনগুলো প্রয়োগ করবে।

অনুশীলনী

১। চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে কীভাবে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করবে? সমস্যাটি সমাধান করো এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্য কীভাবে সাহায্য করল যুক্তি দাও।

$AD = 12$ cm হলে BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

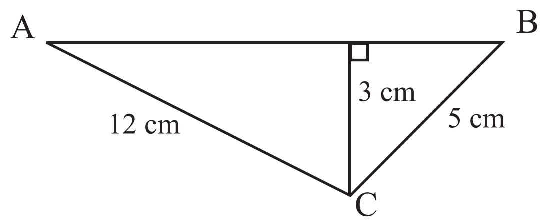


চিত্র-ক

২। চিত্র এঁকে বা কাগজ কেটে প্রমাণ করো– বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

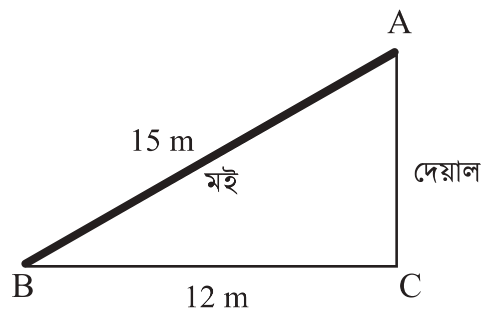
৩। ধরো চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে 4 cm, 3 cm, 3.5 cm, 5 cm এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60 ডিগ্রি। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো।

৪। চিত্র : খ-এ $AB = ?$



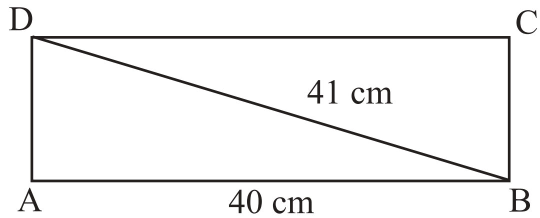
চিত্র-খ

৫। তোমার স্কুলের একটি দেয়াল রঙ করার জন্য যদি 15 m একটি মইকে দেয়াল থেকে 12 m দূরত্বে স্থাপন করা হয় (চিত্র : গ)। তাহলে ভূমি থেকে মইয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা নির্ণয় করো।



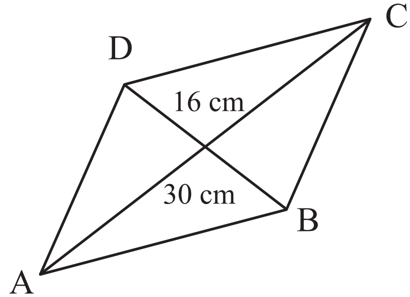
চিত্র-গ

৬। চিত্র : ঘ এর আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় করো।



চিত্র : ঘ

৭। চিত্র : ঙ এর রম্বসের কর্ণ AC = 30 cm. ও BD = 16 cm. হলে রম্বসের পরিধি নির্ণয় করো।



চিত্র : ঙ

৮। "যদি (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হয়, তবে (3k, 4k ও 5k) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হবে, যেখানে k যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।" উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করো।

৯। "যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।" যে কোনো আকৃতির ত্রিভুজ তৈরি করে বা কাগজ কেটে পরিমাপের মাধ্যমে উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করো।

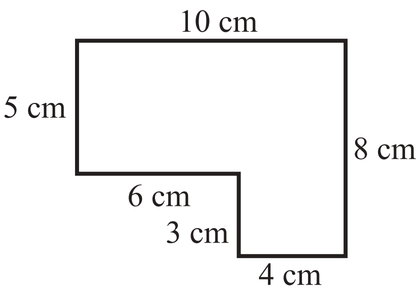
১০। সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 6 cm ও 5 cm এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° হলে সামান্তরিকটি অঙ্কন করো।

১১। একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 cm হলে বর্গটি অঙ্কন করো।

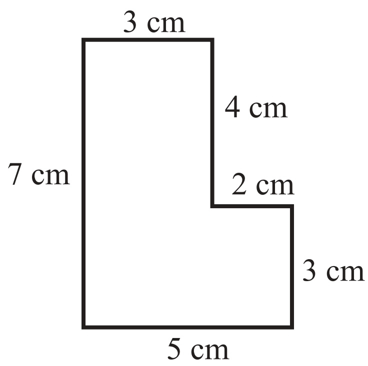
১২. একটি সামান্তরিক আকৃতির জমির দুটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 4 m ও 5 m এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 m। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

১৩। ABCD আয়তাকার জমির AB = 10 m এবং কর্ণ AC = 16 m । কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু G হলে ΔAGB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

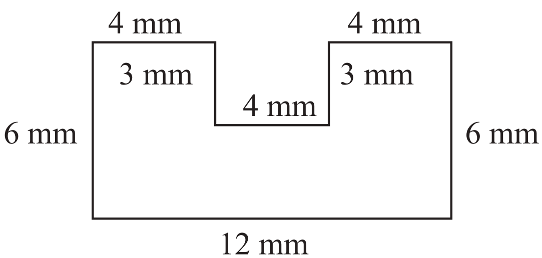
১৪। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো :



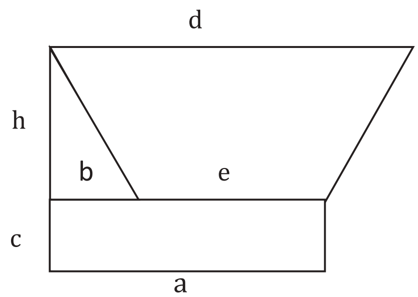
(ক)



(খ)



(গ)



(ঘ)