

সংখ্যার গল্প

বাস্তব জীবনে সকালে ঘুম হতে ওঠা থেকে শুরু করে রাতে ঘুমাতে যাওয়া পর্যন্ত আমরা প্রতিদিন বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা দেখতে পাই। চলো নিচের ছবিগুলো লক্ষ করি-



এই যে নানারকম সংখ্যা দেখতে পাচ্ছ, এগুলো কীভাবে মানুষ জানল? ভেবে দেখ তো? আজ থেকে অনেক অনেক বছর আগে তারা কীভাবে সংখ্যা লিখত এবং গণনা করত?

এই প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাবে সংখ্যার গল্পে। চলো তাহলে সংখ্যাগুলো কীভাবে এলো সেই মজার কাহিনি শুনি।

কয়েক হাজার বছর আগে আমরা ফিরে যাই, যখন মানুষ খাদ্যের জন্য কেবল শিকার বা বনের ফলমূলের

উপর নির্ভর করত- তখন সে সকালে ঘুম থেকে জেগে উঠত পাখির ডাকে। তারপর হয়ত নদীর জলে মুখ ধুয়ে খাদ্যের সন্ধানে বের হতো।

আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সাথে কয়েক হাজার বছর আগের মানুষের দৈনন্দিন জীবনে সংখ্যা গণনা ও ব্যবহারের পার্থক্য আছে কি?

চলো তাহলে প্রাচীনকালে মানুষ কীভাবে দাগ কেটে, দড়ির গিট দিয়ে বা পাথর ব্যবহার করে বিভিন্ন উপায়ে সংখ্যা গণনা করত তার কিছু নমুনা দেখে নেই।

দাগ কেটে গণনা

		/ /

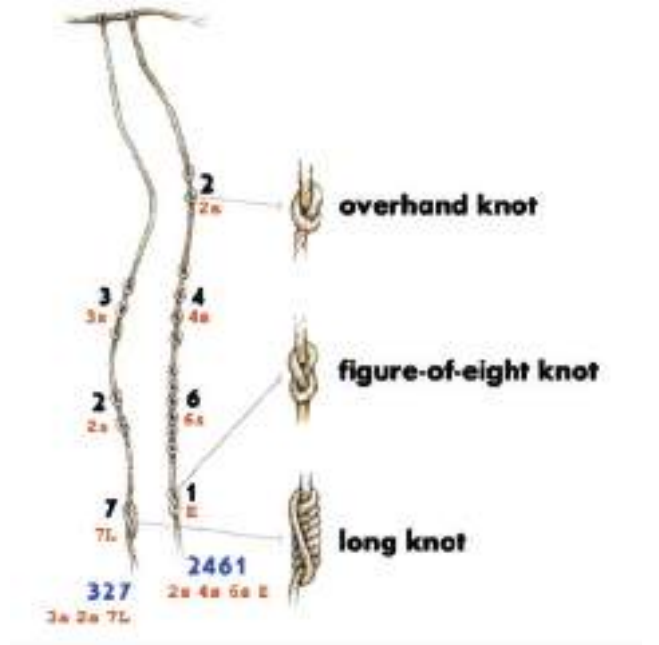
বিভিন্ন সময়ের মানুষ ৮ সংখ্যাটি উপরের ছবির মতো করে ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে দাগ কেটে প্রকাশ করত।

৮ সংখ্যাটি প্রকাশ করার এরকম আরও কোনো উপায় কি তোমরা বলতে পারবে?

দড়ির গিট দিয়ে গণনা

তোমরা কি জানো ইনকা সভ্যতার মানুষেরা দড়ির গিট দিয়ে সংখ্যা প্রকাশ করত?

নিচের ছবি দেখে বোঝা যাচ্ছে কি?



ট্যালির মাধ্যমে গণনা

| → ১
 || → ২
 ||| → ৩
 |||| → ৪
 ||||| → ৫

||||| → ৬
 ||||| || → ৭
 ||||| ||| → ৮
 ||||| |||| → ৯
 ||||| ||||| → ১০

||||| ||||| ||||| ||||| ||||| →

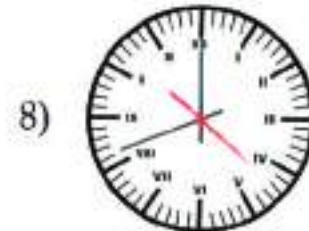
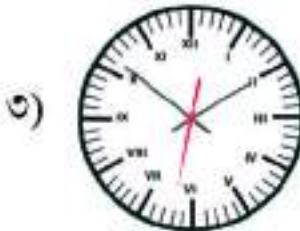
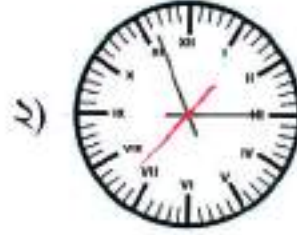
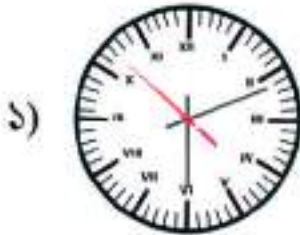
?

???

→ ২৭

ঘড়িতে সময় দেখি

কোন ঘড়িতে সময় কত?



নিচের ছকটি পূরণ করো

সংখ্যা	ঘড়িতে কীভাবে লেখা আছে	সংখ্যা	ঘড়িতে কীভাবে লেখা আছে
১		৭	
২		৮	
৩		৯	
৪		১০	
৫		১১	
৬		১২	



অনুশীলনী

এবার বলো তো ঘড়ির সংখ্যা লেখার পদ্ধতি অনুসারে ১৩, ২০, ৬৭ সংখ্যাগুলো কীভাবে লেখা হবে?



পাজল

মায়ানরা কীভাবে সংখ্যা লিখত জানো?

নিচের সারণিটি পূরণ করতে পারবে?

আমাদের পরিচিত সংখ্যা	মায়ানরা যেভাবে লিখত	আমাদের পরিচিত সংখ্যা	মায়ানরা যেভাবে লিখত
০		৬	
১		৭	
২		৮	?
৩	?	১০	
৪		১৪	?
৫		১৯	?

দশমিক (Decimal) সংখ্যা পদ্ধতির গল্প

০, ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯ এই মোট দশটা চিহ্ন দিয়ে সংখ্যা তৈরি করার যে পদ্ধতিটা ভারতীয় উপমহাদেশের গণিতবিদ আর্যভট্ট বের করেছিলেন সেটিকে আমরা দশমিক সংখ্যা পদ্ধতি বলি।

চলো এবারে গল্পের মতো করেই শুনী কীভাবে আর্যভট্ট এই পদ্ধতির চিন্তা করেছিলেন।

আর্যভট্ট ভাবলেন, ‘আমি যদি সংখ্যাকে প্রকাশ করতে চাই তাহলে নিচের মতো করে প্রকাশ করব।’

এরপর উনি লিখলেন:

০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

এখন উনি ভাবলেন, ‘আমার কাছে যতগুলো চিহ্ন ছিল সব একবার করে লেখা শেষ। এখন যদি একটু খেয়াল করি তাহলে দেখব রোমান পদ্ধতির মতো প্রত্যেকটা সংখ্যা এক এক করে বাড়তে থাকে। অর্থাৎ ১ এর সাথে ১ যোগ করলে ২ পাব আবার ২ এর সাথে ১ যোগ করলে ৩ পাব। এখন যদি আমি আবার লিখতে থাকি তাহলে ৯ এর পরে কী লিখব।

১ম বার লেখা শেষ:

০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
০ ??									

‘কিন্তু আমি যে সবগুলোর চিহ্ন একবার ব্যবহার করেছি সেটা তো সংখ্যায় লিখতে হবে। সেটা আমি কোথায় লিখব।’

০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
১০									

সংখ্যাগুলো লিখা শেষ এটা বুঝাতে শূন্য লিখলাম এবং ১ লিখলাম প্রত্যেকটি সংখ্যার বাম পাশে কারণ একবার করে লেখা শেষ হয়েছে। এরপর তিনি বললেন, ‘শুধু ১ এবং ১০ এ ০ এর বাম পাশের ১ কিন্তু একই অর্থ প্রকাশ করে না। অর্থাৎ এদের মান কিন্তু এক নয়। কারণ ১০ এ ০ এর বাম পাশের ১ বলছে আমরা সবগুলো সংখ্যা একবার লিখে ফেলেছি। এখন যদি আমি আবার একবারের পর এভাবে লিখতে থাকি তাহলে কী হবে?’

০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
১০	১১	১২	১৩	১৪	১৫	১৬	১৭	১৮	১৯
২০	২১	২২	২৩	২৪	২৫	২৬	২৭	২৮	২৯

এখানে ২০ এর ২ আর ১২ এর ২ কিংবা শুধু ২ এর মান কিন্তু একই না। আমরা যখন রোমান সংখ্যায় XX লিখি তাহলে ১০ আর ১০ যোগ করে ২০ বুঝাচ্ছি কিন্তু আমাদের এই নিয়মে ১০ লিখলে ১ আর ০ যোগ করে কিন্তু ১ বুঝাচ্ছে না। তিনি কিন্তু তখনও এইসব সংখ্যার নাম দেননি। তিনি বুঝালেন যে আমি সবগুলো প্রতীক কতবার লিখছি সেটা বুঝানোর জন্য সেই সংখ্যাটা বসাই। এভাবে তিনি কত পর্যন্ত লিখতে পারবেন?

তাহলে যে ৯টি প্রতীক আছে সবগুলো দিয়ে দুইবার যদি নানাভাবে লিখি তাহলে আমরা ৯৯ পর্যন্ত লিখতে পারবো। এরপর উনি আবার আটকে গেলেন যে এরপর কী করা যায়। এরপর তিনি চিন্তা করলেন এই পদ্ধতিতে যে সংখ্যা পর্যন্ত লিখলাম তাকে আরেকবার লিখি। অর্থাৎ আরেকবার লিখতে হলে আমাদের আবার ০ থেকে শুরু করতে হবে এবং সেটা আমাকে বলতে হবে।

$$\begin{array}{r} ৯৯ \\ ---- \\ ০ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ৯৯ \\ ---- \\ ০০ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ৯৯ \\ ---- \\ ১০০ \end{array}$$

এরপর আমরা যদি খেয়াল করি উপরে লেখা বামের অঙ্কগুলোতে, তাহলে দেখব, সেখানেও আমরা একবার করে ৯ বার সবগুলো প্রতীক লিখে ফেলেছি। অতএব আমাকে আরেকটা শূন্য বসাতে হবে।

এখন আর বাম পাশে যদি ১ লিখি তাহলে,

এই ১০০ এর বাম পাশের ১ কিন্তু দুই অঙ্কের সংখ্যার বামের সংখ্যাগুলো কয়বার লেখা হয়েছে তা প্রকাশ করছে। কিন্তু দুই অঙ্কের সংখ্যার ডান পাশের সংখ্যাগুলো কী দিয়ে প্রকাশ করছে? এরপর একটি নাম দিলেন। এরপর তিনি দুই অঙ্কের সংখ্যার বামের সংখ্যাটিকে দশক এবং তিন সংখ্যার বামের সংখ্যাটিকে শতক বলে নাম দেন। অর্থাৎ আমরা যদি দেখি প্রথম ১ টার দশ গুণ হয়ে গেলো ১০ এবং ১০ এর দশ গুণ হয়ে গেলো ১০০।

এখান থেকে একটি চমৎকার জিনিস উনি খেয়াল করলেন যে, ‘আমি যদি সংখ্যাগুলোকে পাশাপাশি লিখতে থাকি এবং আমি এক স্থান থেকে আরেক স্থানে আসি তবে সংখ্যাটা ১০ গুণ বাড়ে। এখন কিন্তু আমরা শিখে ফেললাম এবং তিন সংখ্যায় আমি ৯৯৯ পর্যন্ত লিখতে পারবো এবং এর পর আরও আবার এক ঘর বামে বাড়বে। এভাবে যতবার স্থানের পরিবর্তন হবে ততবার ১০ গুণ হয়ে বাড়তে থাকবে। এভাবে গণনার চিন্তা থেকেই আসলে দশমিক পদ্ধতিটা আসলো। আমরা যদি এখন দেখি যে প্রত্যেক বার স্থান পরিবর্তনে ১০ গুণ করে বেড়ে যাচ্ছে এবং সেইটাই সংখ্যা পদ্ধতি। আমাদের হাতের ১০টি আঙ্গুল দিয়ে ০ থেকে ৯ পর্যন্ত এই দশটা চিহ্ন বা প্রতীককে দেখানো বা প্রকাশ করা যায়।

তাহলে আমাদের সংখ্যা পদ্ধতিতে ১০ টা চিহ্ন বা প্রতীক রয়েছে যার বাংলায় একটা নাম দিলাম অঙ্ক আর ইংরেজিতে একটা নাম দিলাম ডিজিট (Digit)

আমরা এইযে ১ - ৯ পর্যন্ত সংখ্যা দেখছি ওরা নিজেরাই একটা কিছু প্রকাশ করে অর্থাৎ ওদের দাম আছে। তবে এককভাবে ০ এর কোনো দাম বা মূল্য নেই তাই ০ কে অন্য কোনো সংখ্যার সঙ্গে থাকতে হয়। এজন্য ০ কে বলা হয় সহকারী বা ইংরেজিতে auxiliary আর ১-৯ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোকে বলা হয় সার্থক অঙ্ক বা ইংরেজিতে significant number আমরা আগে রোমান সংখ্যার কথার সময় বলেছিলাম XX বা XC এভাবে পাশাপাশি সংখ্যা লেখাকে বলা সংখ্যা পাতন বা notation। কোনো সংখ্যা যদি আমরা লিখতে চাই তাহলে আমরা ০-৯ এই চিহ্নগুলোকে একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতিতে লিখবো যে পদ্ধতিতে প্রতিবার যখন সংখ্যাটা বাম দিকে আসবে তখন সেটা তার থেকে ১০ গুণ বেড়ে যাবে।

তাহলে এখন আমরা দেখি,

একটি সংখ্যা ১২৩

এখানে তিনটি অঙ্ক আছে এবং তিনি ডান থেকে একক, দশক, শতক এভাবে প্রতিটির একটি করে নাম দিয়েছেন।

১	২	৩
শতক	দশক	একক

এটা পড়ার সময় আমাদের পড়তে হবে: ১ শতক ২ দশক ৩ একক।

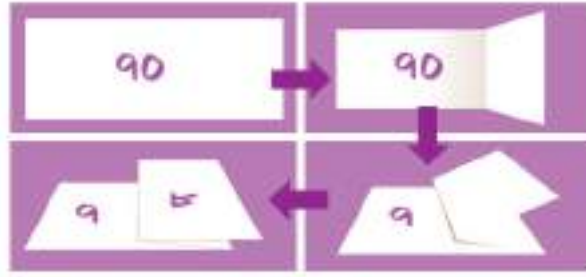
সংখ্যাটার সত্যিকারের মান হবে:

একটা শতক (১০০) + দুইটা দশক (২০) + তিনটা একক (৩) = একশত তেইশ (১২৩)।

এভাবে আমরা সংখ্যাগুলো লিখতে শুরু করলাম এবং লেখার ফলে কিন্তু আমরা দশমিক পদ্ধতি পেয়ে গেলাম।

কাগজের ভাঁজে লুকানো স্থানীয় মান

ভাঁজ করার পদ্ধতি



স্থানীয় মান কীভাবে দেখব?



স্থানীয় মান কীভাবে দেখা যাবে না?



আরও বড় সংখ্যা তৈরি করি



দেশীয় রীতি

	লক্ষ		হাজার		শতক	দশক	একক
কোটি	নিযুত	লক্ষ	অযুত	হাজার			
অষ্টম	সপ্তম	ষষ্ঠ	পঞ্চম	চতুর্থ	তৃতীয়	দ্বিতীয়	প্রথম
১	৩	০	৮	২	৫	২	৪

এক কোটি ত্রিশ লক্ষ বিরাশি হাজার পাঁচশত চব্বিশ

আন্তর্জাতিক রীতি

বিলিয়ন			মিলিয়ন			হাজার			শতক	দশক	একক
দ্বাদশ তম	একাদশ তম	দশম	নবম	অষ্টম	সপ্তম	ষষ্ঠ	পঞ্চম	চতুর্থ	তৃতীয়	দ্বিতীয়	প্রথম
২	৪	৪	২	১	৩	০	৮	২	৫	২	৪

দুইশত চুয়ালিশ বিলিয়ন দুইশত তেরো মিলিয়ন বিরাশি হাজার পাঁচশত চব্বিশ

দেশীয় ও আন্তর্জাতিক রীতির তুলনা

					লক্ষ		হাজার		শতক	দশক	একক
?	?	?	?	কোটি	নিযুত	লক্ষ	অযুত	হাজার			
দ্বাদশ তম	একাদশ তম	দশম	নবম	অষ্টম	সপ্তম	ষষ্ঠ	পঞ্চম	চতুর্থ	তৃতীয়	দ্বিতীয়	প্রথম
৩	৪	৭	৮	১	৯	৯	৩	৫	৬	১	৮
বিলিয়ন			মিলিয়ন			হাজার			শতক	দশক	একক

উপরের সংখ্যাটিকে দেশীয় ও আন্তর্জাতিক উভয় রীতিতে প্রকাশ করো।

দেশীয় রীতিতে কোটির উপরে আরও কিছু কি আছে?

খুঁজে বের করার দায়িত্ব তোমাদের। তোমাদের শিক্ষক, অভিভাবক, আত্মীয় স্বজন, বন্ধু সবার সাথে আলোচনা করতে পার।



জোড়ায় কাজ

- প্রতি জোড়ায় ০, ১, ২, ..., ৯ অঙ্কগুলি পুনরাবৃত্তিসহ লিখে মোট ১৬ টি কাগজের টুকরা তৈরি করো। নিচে একটি নমুনা দেওয়া হলো:

০	১	১	২
৩	৫	৬	৭
৪	৮	৮	৯
২	৬	০	৮

- এবার প্রতি জোড়ায় তৈরি করা ১৬ টুকরা কাগজ থেকে লটারির মাধ্যমে জোড়ার প্রত্যেকে ৮টি করে কাগজের টুকরা নাও।
- এরপর জোড়ার প্রত্যেক শিক্ষার্থী লটারিতে প্রাপ্ত ৮টি কাগজের টুকরায় সাজিয়ে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন সংখ্যা তৈরি করে খাতায় লিখো।
- এবার জোড়ার দুজনের সর্বোচ্চ সংখ্যা দুটির মধ্যে যার সংখ্যাটি বৃহত্তর হবে সে ১ পয়েন্ট পাবে অন্যজন ০ পয়েন্ট পাবে।

- এবার জোড়ার দুজন শিক্ষার্থীর সর্বনিম্ন সংখ্যা দুটির মধ্যে যার সংখ্যাটি ক্ষুদ্রতর হবে সে ১ পয়েন্ট পাবে অন্যজন ০ পয়েন্ট পাবে।
- যার মোট পয়েন্ট বেশি হবে সে বিজয়ী হবে, পয়েন্ট সমান হলে খেলা ড্র হবে।



অনুশীলনী

- ১) পুনরাবৃত্তি না করে নিচের অঙ্ক গুলো ব্যবহার করে চার অঙ্কের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা তৈরি করো।
ক) ২, ৮, ৭, ৪ খ) ৯, ৭, ৪, ১ গ) ৪, ৭, ৫, ০ ঘ) ১, ৭, ৬, ২ ঙ) ৫, ৪, ০, ২
(সংকেত : ০৭৫৪ কিন্তু তিন অঙ্কের একটি সংখ্যা)
- ২) যে কোনো একটি অঙ্ক দুইবার ব্যবহার করে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা তৈরি করো।
ক) ৩, ৮, ৭ খ) ৯, ০, ৫ গ) ০, ৪, ৯ ঘ) ৮, ৫, ১
(সংকেত: দুইবার ব্যবহার করা যায় এমন যতগুলো শর্ত আছে সেগুলো চিন্তা করো)
- ৩) নিচের শর্তগুলো পূরণ করে যে কোনো চারটি ভিন্ন অঙ্ক ব্যবহার করে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম সংখ্যা তৈরি করো। (প্রথমটি সমাধান করে দেওয়া হলো)
ক) ৭ অঙ্কটি এককের স্থানে থাকবে।

বৃহত্তম	৯	৮	৬	৭
ক্ষুদ্রতম	১	০	২	৭

(সংখ্যাটি ০ দিয়ে শুরু হতে পারবে না। কেন?)

খ) ৪ অঙ্কটি সবসময় দশকের স্থানে থাকবে।

বৃহত্তম			৪	
ক্ষুদ্রতম			৪	

গ) ৯ অঙ্কটি সবসময় শতকের স্থানে থাকবে।

বৃহত্তম		৯		
ক্ষুদ্রতম		৯		

ঘ) ১ অঙ্কটি সবসময় হাজারের স্থানে থাকবে।

বৃহত্তম	১			
ক্ষুদ্রতম	১			



পাজল

ছবির বাক্সে তোমার জন্মদিনের জন্য একটা উপহার রয়েছে। তবে সমস্যা হলো বাক্সটি একটা তালা দিয়ে বন্ধ করা আছে। তালার ঠিক নিচেই ০ থেকে ৯ পর্যন্ত অঙ্কগুলি লিখা আছে। তালা খুলতে প্রয়োজন তিনটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি একটি গোপন সংখ্যা। নিচের কাগজে লিখা আছে সেই গোপন সংখ্যার নানা বৈশিষ্ট্য।

এবার তাহলে খুঁজে বের করো সেই গোপন সংখ্যা আর জিতে নাও উপহার।



৬ ৮ ২



একটি অঙ্ক সঠিক ও অঙ্কটি সঠিক স্থানে আছে

৬ ১ ৪



একটি অঙ্ক সঠিক কিন্তু অঙ্কটি ভুল স্থানে আছে

২ ০ ৬



দুইটি অঙ্ক সঠিক কিন্তু অঙ্কগুলো ভুল স্থানে আছে

৭ ৩ ৮



কোনো অঙ্কই সঠিক নয়

? ? ?

৭ ৮ ০

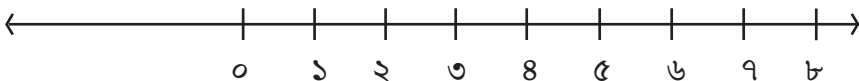


একটি অঙ্ক সঠিক কিন্তু অঙ্কটি ভুল স্থানে আছে

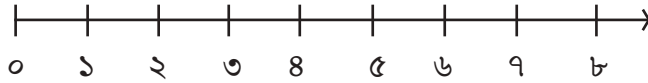
সংখ্যারেখা

সংখ্যারেখার মাধ্যমে পূর্ণসংখ্যার চার প্রক্রিয়ার ধারণা

- একটি সরল রেখা ঐকে তার উপরের যে কোনো বিন্দুকে ০ দ্বারা চিহ্নিত করো।
- ০ এর ডানদিকে দ্বিতীয় একটি বিন্দুকে ১ দ্বারা চিহ্নিত করো।
- ০ এবং ১ হিসেবে চিহ্নিত এই বিন্দুগুলোর মধ্যে দূরত্বকে একক দূরত্ব বলা হয়।
- এবারে এই সরলরেখায় ১ এর ডানদিকে এবং ১ থেকে একক দূরত্বে একটি বিন্দুকে ২ দ্বারা চিহ্নিত করো।
- এইভাবে সরলরেখায় ৩, ৪, ৫, ... হিসেবে ইউনিট দূরত্বে বিন্দু চিহ্নিত করো।
- এই পদ্ধতিতে তুমি ডানদিকে ০ এবং ০ থেকে বড় সকল পূর্ণ সংখ্যা চিহ্নিত করতে পারবে।



এখানে উপরের সংখ্যারেখার ০ এবং তার ডান পাশের অংশ নিয়ে আমরা আলোচনা করব।



এখানে ২ এবং ৪ এর মধ্যে দূরত্ব কত? অবশ্যই এটি ২ একক। তুমি কি ২ এবং ৬ এর মধ্যে, ২ এবং ৭ এর মধ্যে দূরত্ব বলতে পারবে?

সংখ্যারেখায় তুমি দেখতে পাবে যে ৭ নম্বরটি ৪ এর ডানদিকে রয়েছে। এই ৭ নম্বরটি ৪ এর চেয়ে বড় অর্থাৎ $৭ > ৪$ । ৮ নম্বরটি ৬ এর ডানদিকে রয়েছে এবং $৮ > ৬$ ।

এই পর্যবেক্ষণগুলি আমাদের বলতে সাহায্য করে যে, যে কোনো দুটি পূর্ণ সংখ্যার মধ্যে, ডানদিকের সংখ্যাটি বৃহত্তর সংখ্যা। আমরা আরও বলতে পারি যে, বাম দিকের পূর্ণ সংখ্যাটি ছোট সংখ্যা।

উদাহরণস্বরূপ, $৪ < ৯$; ৯ এর বাম দিকে ৪ আছে। একইভাবে, $১২ > ৫$; ১২ হলো ৫ এর ডানদিকে।

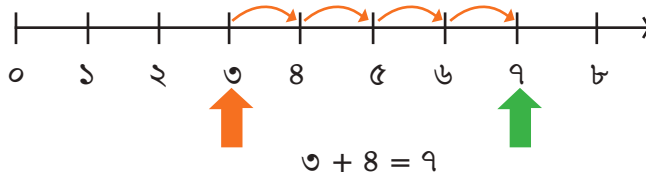
এবারে তুমি ১০ এবং ২০ সম্পর্কে মতামত দাও।

সংখ্যারেখায় ৩০, ১২, ১৮ চিহ্নিত করো। সবচেয়ে দূরে বাম দিকে কোন সংখ্যা? তুমি কি ১০০৫ এবং ৯৭৫৬ থেকে বলতে পারো, কোন নম্বরটি অন্য নম্বরের তুলনায় ডানদিকে হবে?

সংখ্যারেখায় ১২ এর পরের পূর্ণ সংখ্যা এবং ৭-এর আগের পূর্ণ সংখ্যা চিহ্নিত করো।

সংখ্যারেখায় যোগ

সংখ্যারেখায় পূর্ণ সংখ্যার যোগ দেখানো যেতে পারে। ৩ এবং ৪ এর যোগ দেখা যাক।



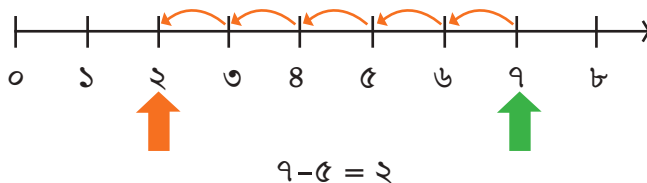
৩ থেকে শুরু করো। যেহেতু আমরা এই সংখ্যার সাথে ৪ যোগ করি, তাই ডানদিকে ৪ টি লাফ দাও; ৩ থেকে ৪, ৪ থেকে ৫, ৫ থেকে ৬ এবং ৬ থেকে ৭ পর্যন্ত (উপরের চিত্রে প্রদর্শিত)। ৪টি লাফের শেষ অবস্থান হবে ৭-এ।

সুতরাং, ৩ এবং ৪ এর যোগফল হবে ৭। অর্থাৎ $৩ + ৪ = ৭$

সংখ্যারেখা ব্যবহার করে $৪ + ৫$, $২ + ৬$, $৩ + ৫$ এবং $১ + ৬$ এই যোগফলগুলি চিহ্নিত করো।

সংখ্যারেখায় বিয়োগ

দুটি পূর্ণ সংখ্যার বিয়োগ ও সংখ্যারেখায় দেখানো যেতে পারে। এসো ৭-৫ বের করি।



৭ থেকে শুরু করি। যেহেতু আমরা এই সংখ্যার ৫ বিয়োগ করব, তাই ইহা বামদিকে ১ টি লাফে ১ একক যাবে। এরূপ ৫টি লাফে ২ বিন্দুতে গিয়ে পৌঁছবে।

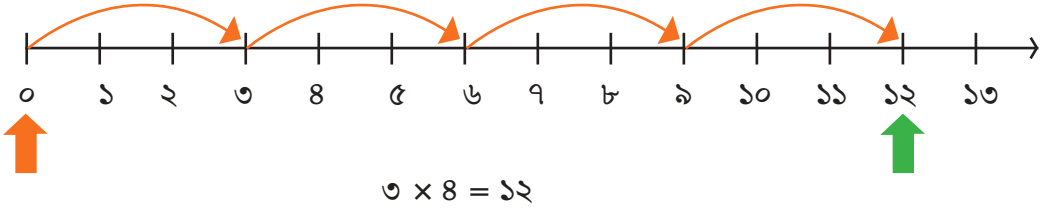
সুতরাং ৭ এবং ৫ এর বিয়োগফল হবে ২। অর্থাৎ $৭ - ৫ = ২$

সংখ্যারেখা ব্যবহার করে ৮-৩, ৬-২ এবং ৯-৬ এই বিয়োগফলগুলি চিহ্নিত করো।

সংখ্যারেখার মাধ্যমে গুণ

এখন সংখ্যারেখায় পূর্ণ সংখ্যার গুণ দেখতে পাচ্ছি।

সংখ্যারেখা ব্যবহার করে এসো আমরা ৩×৪ বের করি।



০ থেকে শুরু করো, ডানদিকে একবারে ৩ টি একক লাফ দাও, এইরকম ৪ টি লাফ দিতে হবে।

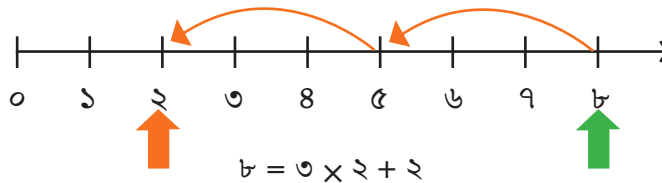
কোথায় পৌঁছাবে বলো তো? ১২ তে।

তাই, আমরা বলি, $৩ \times ৪ = ১২$ ।

সংখ্যারেখা ব্যবহার করে ৬×২ , ৬×৭ এবং ৫×৩ এই গুণফলগুলি নির্ণয় করো।

সংখ্যারেখার মাধ্যমে ভাগের ধারণা

সংখ্যারেখায় আমরা যোগ, বিয়োগ ও গুণের ধারণা দেখেছি। এবারে দেখবো ভাগের ধারণা। ভাগ অর্থ ভাজ্য থেকে বারবার করে ভাজককে বিয়োগ করা। এবং সবশেষে আমরা ভাজকের চেয়ে ছোট একটা সংখ্যায় পৌঁছালে সেটাকেই ভাগশেষ বলি।

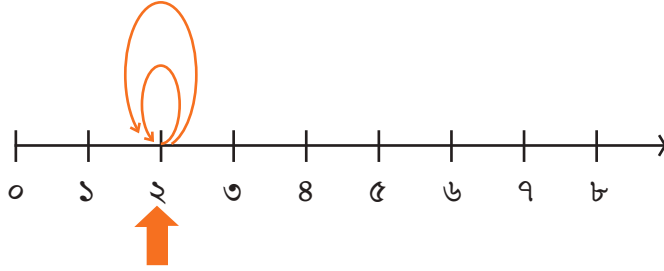


ভাজ্য = ৮, ভাজক = ৩,

ভাগফল = ২, ভাগশেষ = ২

এবারে তোমরা সংখ্যারেখার মাধ্যমে ১৩ কে ৪ দিয়ে ভাগ করে ভাগফল ও ভাগশেষ নির্ণয় করো।

চলো সংখ্যারেখার মাধ্যমে ২ কে ০ দিয়ে ভাগ করি।



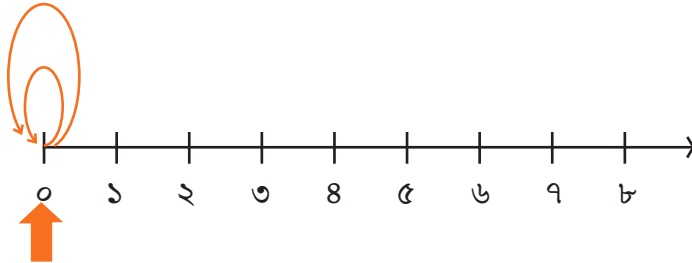
এখানে, ভাজ্য = ২ এবং ভাজক = ০। ফলে, ২ থেকে ০ দৈর্ঘ্যের লাফ যতবারই দেওয়া হোক অর্থাৎ যতবারই ০ বিয়োগ করা হোক অবস্থান ২ ই হবে। কাজেই কখনোই এই বিয়োগ শেষ হবে না। ফলে ভাগ প্রক্রিয়া চলতেই থাকবে। কোনো ভাগফলও পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ, ভাগ প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা অনুসারে কোনো ভাগফল পাওয়া যাচ্ছে না।

একারণে-

২ কে ০ দিয়ে ভাগ করলে সেটাকে আমরা অসংজ্ঞায়িত (Undefined) বলি।

একইভাবে ১, ৩, ৪, ৫, ৬, ১২ এরকম সব সংখ্যাকেই ০ দিয়ে ভাগ করলে আমরা অসংজ্ঞায়িত (Undefined) বলবো।

কিন্তু, ০ কে ০ দিয়ে ভাগ করলে কী হবে?



এবারে কিন্তু একটু অন্যরকম ঘটনা ঘটল।

এখানে, ভাজ্য = ০ এবং ভাজক = ০। ফলে, ০ থেকে ০ দৈর্ঘ্যের লাফ যতবারই দেওয়া হোক অর্থাৎ যতবারই ০ বিয়োগ করা হোক অবস্থান ০ ই হবে। এমনকি কোনোরকম লাফ না দিলে অর্থাৎ একবারও ০ বিয়োগ না করলেও একই ঘটনা ঘটবে। তাই ভাগফল ০, ১, ২, ৩, ৮, ১৫, ১৬ এভাবে অনেক কিছুই হতে পারে। এক্ষেত্রে একটি নির্দিষ্ট ভাগফল নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

একারণে- ০ কে ০ দিয়ে ভাগ করলে সেটাকে আমরা অনির্ণেয় (Indeterminate) বলি।

বিভাজ্যতা

বিভাজ্যতার ধারণা

যদি একটি পূর্ণসংখ্যাকে অন্য একটি পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ০ হয় তখন আমরা বলি প্রথম সংখ্যাটি (ভাজ্য) দ্বিতীয় সংখ্যা (ভাজক) দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

সংখ্যারেখার সাহায্যে অথবা প্রচলিত পদ্ধতিতে ভাগ করে ১২ সংখ্যাটি ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ ও ৭ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য কিনা যাচাই করো।

২ ও ৪ দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়ম ও স্থানীয়মানের সাহায্যে কারণ ব্যাখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য

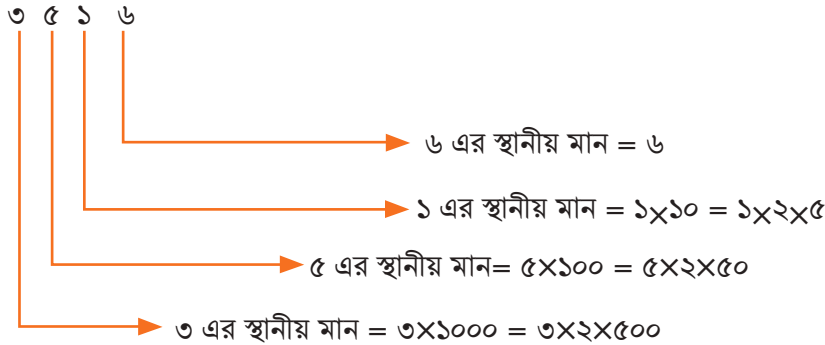
২ এর কয়েকটি গুণিতক লিখে পাই,

$$2 \times 0 = 0, 2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6, 2 \times 4 = 8,$$

$$2 \times 5 = 10, 2 \times 6 = 12, 2 \times 7 = 14, 2 \times 8 = 16, 2 \times 9 = 18 \text{ ইত্যাদি।}$$

গুণফলের প্রক্রিয়া লক্ষ করি। যে কোনো সংখ্যাকে ২ দ্বারা গুণ করলে গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে ০, ২, ৪, ৬ বা ৮। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ০, ২, ৪, ৬ বা ৮ হলে, সংখ্যাটি ২ দ্বারা বিভাজ্য হবে। এবারে স্থানীয়মানের সাহায্যে দেখে নেই আমাদের পর্যবেক্ষণ সত্যি কিনা।

৩৫১৬ কে স্থানীয় মানে লিখলে হয়



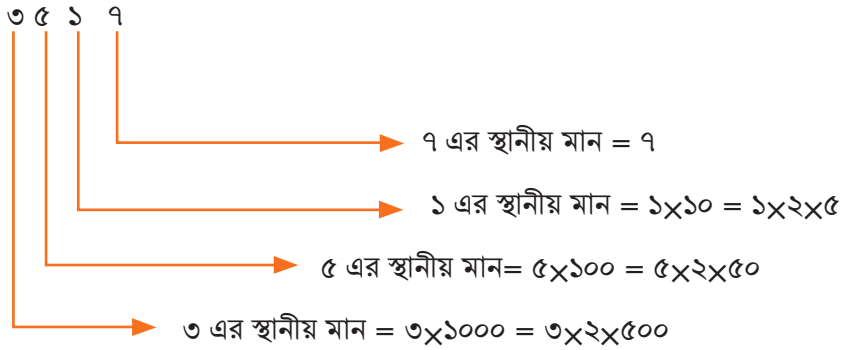
$$3516 = 3000 + 500 + 10 + 6$$

এখানে, একক স্থানীয় অঙ্ক = ৬, যা ২ দ্বারা বিভাজ্য। এছাড়া এককের বামদিকের যেকোনো অঙ্কের স্থানীয় মান ২ দ্বারা বিভাজ্য।

অর্থাৎ একক স্থানীয় অঙ্কটি ২ দ্বারা বিভাজ্য হলে সংখ্যাটিও ২ দ্বারা বিভাজ্য।

এরূপ সংখ্যাকে আমরা জোড় সংখ্যা বলে জানি।

আবার, ৩৫১৭ কে স্থানীয় মানে লিখলে হয়



$$৩৫১৭ = ৩০০০ + ৫০০ + ১০ + ৭$$

এখানে, একক স্থানীয় অঙ্ক = ৭, যা ২ দ্বারা বিভাজ্য নয়। এছাড়া এককের বামদিকের যে কোনো অঙ্কের স্থানীয় মান ২ দ্বারা বিভাজ্য।

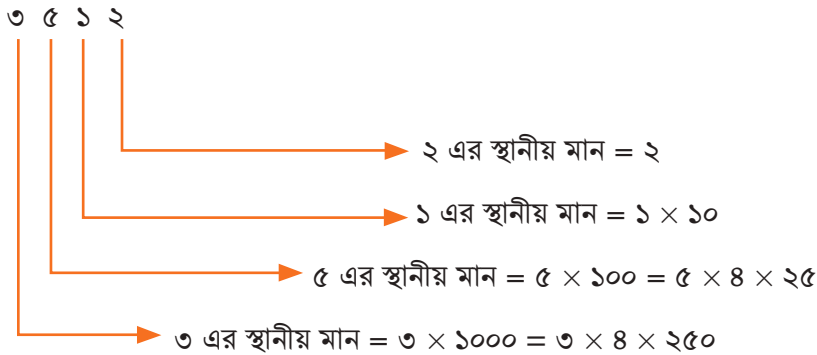
অর্থাৎ একক স্থানীয় অঙ্কটি ২ দ্বারা বিভাজ্য না হলে সংখ্যাটিও ২ দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

এরূপ সংখ্যাকে আমরা বিজোড় সংখ্যা বলে জানি।

কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্কে শূন্য অথবা জোড় সংখ্যা হলে সংখ্যাটি ২ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৪ দ্বারা বিভাজ্য

৩৫১২ কে স্থানীয় মানে লিখলে হয়



$$৩৫১২ = ৩০০০ + ৫০০ + ১০ + ২$$

এখানে, ১০, ৪ দ্বারা বিভাজ্য নয়। কিন্তু দশকের বামদিকের যে কোনো অঙ্কের স্থানীয় মান ৪ দ্বারা বিভাজ্য।

$$আবার, ৩৫১২ = ৩০০০ + ৫০০ + ১২$$

এখানে, ১২, ৪ দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং ৩৫১২ সংখ্যাটি ৪ দ্বারা বিভাজ্য। অর্থাৎ একক ও দশক স্থানীয় অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি ৪ দ্বারা বিভাজ্য হওয়ায় সংখ্যাটি ৪ দ্বারা বিভাজ্য।

কোনো সংখ্যার একক ও দশক স্থানের অঙ্ক দুইটি দ্বারা গঠিত সংখ্যা ৪ দ্বারা বিভাজ্য হলে, প্রদত্ত সংখ্যাটি ৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

অথবা একক ও দশক স্থানের অঙ্ক দুইটি শূন্য হলে, সংখ্যাটি ৪ দ্বারা বিভাজ্য।



দলগত কাজ: ৮ দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়ম স্থানীয়মানের সাহায্যে ব্যাখ্যা ও উপস্থাপন

৫ দ্বারা বিভাজ্য

৫ এর কয়েকটি গুণিতক লিখি।

$5 \times 0 = 0$, $5 \times 1 = 5$, $5 \times 2 = 10$, $5 \times 3 = 15$, $5 \times 4 = 20$, $5 \times 5 = 25$, $5 \times 6 = 30$,

$5 \times 7 = 35$, $5 \times 8 = 40$, $5 \times 9 = 45$ ইত্যাদি।

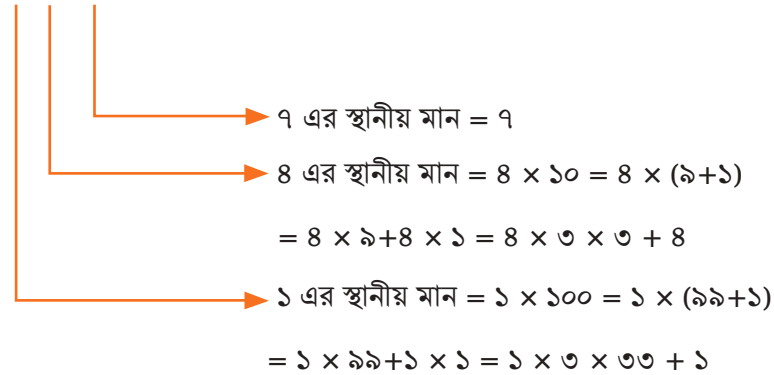
গুণফলের প্রক্রিয়া লক্ষ করে দেখি যে, কোনো সংখ্যাকে ৫ দিয়ে গুণ করলে গুণফলের একক স্থানীয় অঙ্কটি হবে ০ বা ৫। সুতরাং দেখা যাচ্ছে, একক স্থানে ০ বা ৫ অঙ্কযুক্ত সংখ্যা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে।



একক কাজ: ৫ দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়ম স্থানীয়মানের সাহায্যে ব্যাখ্যা ও উপস্থাপন

৩, ৬, ৯ দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়ম ও স্থানীয়মানের সাহায্যে কারণ ব্যাখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য

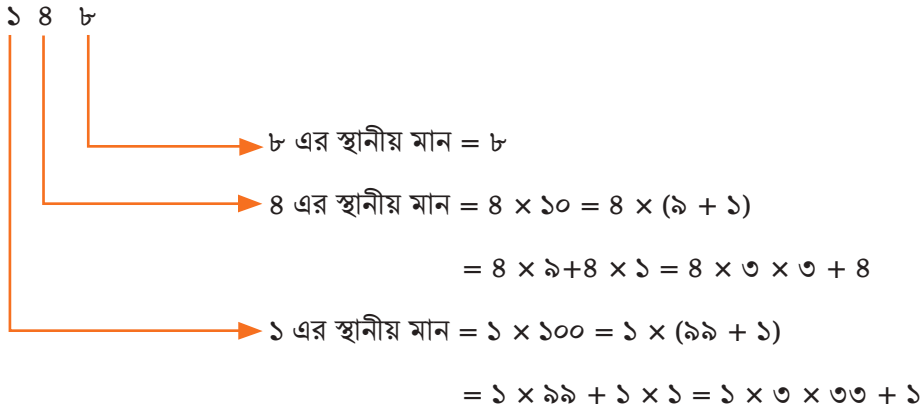
১ ৮ ৭



এখানে, $৮ \times ৩ \times ৩$ এবং $১ \times ৩ \times ৩৩$ সংখ্যাগুলো ৩ দ্বারা বিভাজ্য এবং একক, দশক ও শতক স্থানীয় অঙ্কগুলোর যোগফল = $১+৮+৭=১৬$; যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য।

ফলে, ১৮৭ সংখ্যাটি ৩ দ্বারা বিভাজ্য।

আবার, ১৪৮ সংখ্যাটি বিবেচনা করি।



এখানে, $৪ \times ৩ \times ৩$ এবং $১ \times ৩ \times ৩৩$ সংখ্যাগুলো ৩ দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু একক, দশক ও শতক স্থানীয় অঙ্কগুলোর যোগফল = $১ + ৪ + ৮ = ১৩$; যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

ফলে, ১৪৮ সংখ্যাটি ৩ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

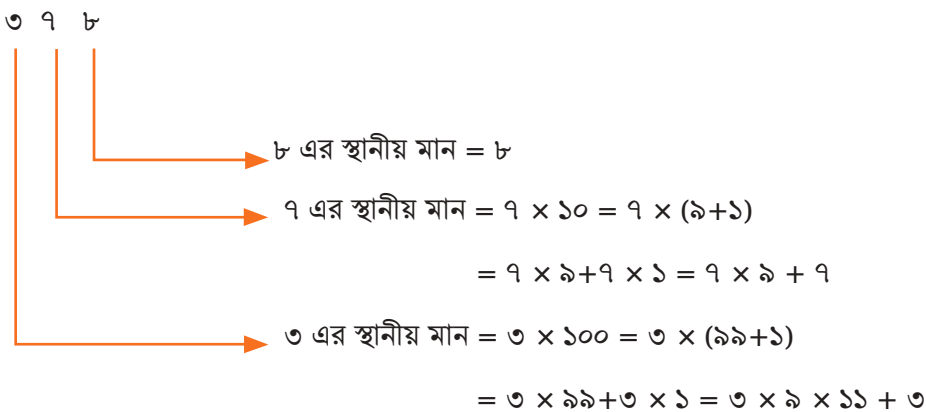
কোনো সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল ৩ দ্বারা বিভাজ্য হলে, প্রদত্ত সংখ্যাটি ৩ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৬ দ্বারা বিভাজ্য

কোনো সংখ্যা ২ এবং ৩ দ্বারা বিভাজ্য হলে সংখ্যাটি ৬ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৯ দ্বারা বিভাজ্য

৩৭৮ সংখ্যাটি বিবেচনা করি।



এখানে, ৭×৯ ও $৩ \times ৯ \times ১১$ প্রত্যেকে ৯ দ্বারা বিভাজ্য এবং একক, দশক ও শতক স্থানীয় অঙ্কগুলোর যোগফল = $৩ + ৭ + ৮ = ১৮$, যা ৯ দ্বারা বিভাজ্য। ফলে, ৩৭৮ সংখ্যাটি ৯ দ্বারা বিভাজ্য।

কোনো সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল ৯ দ্বারা বিভাজ্য হলে, প্রদত্ত সংখ্যাটি ৯ দ্বারা বিভাজ্য হবে।



দলগত কাজ: ১১ দিয়ে বিভাজ্যতার সহজ নিয়ম খুঁজে বের করা

১১ দ্বারা বিভাজ্যতা

৩০৮, ১৩৩১ এবং ৬১৮০৯ সংখ্যাগুলি সবই ১১ দ্বারা বিভাজ্য।

নিচের সারণি ব্যবহার করে আমরা ১১ দিয়ে বিভাজ্যতার কোনো সহজ নিয়ম খুঁজে পাই কিনা দেখি।

সংখ্যা	ডান থেকে অঙ্কের যোগফল (বিজোড় জায়গায়)	ডান থেকে অঙ্কের যোগফল (জোড় জায়গায়)	পার্থক্য
৩০৮	$৮+৩=১১$	০	$১১-০=১১$
১৩৩১	$১+৩=৪$	$৩+১=৪$	$৪-৪=০$
৬১৮০৯	$৯+৮+৬=২৩$	$০+১=১$	$২৩-১=২২$

তিন কার্ডের ম্যাজিক

- একটি কাগজকে আট টুকরো করে টুকরোগুলোর উপর ১ থেকে ৮ পর্যন্ত সংখ্যাগুলো লেখো।

১	২	৩	৪
৫	৬	৭	৮

- আট টুকরো কাগজ থেকে ইচ্ছামতো তিনটি কাগজ নির্বাচন করো।

(উদাহরণ)

নির্বাচিত সংখ্যা কার্ড

২	৬	৩
---	---	---

- তিনটি কাগজে যে তিনটি সংখ্যা রয়েছে সেগুলো দিয়ে তিন অঙ্কের সবচেয়ে বড় সংখ্যা এবং সবচেয়ে ছোট সংখ্যা তৈরি করে বৃহত্তম সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করো।

(উদাহরণ)

	৬	৩	২	তিন অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা
—	২	৩	৬	তিন অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা
	৩	৯	৬	

- এবার, ম্যাজিক দেখানোর পালা।
- একজন একজন করে প্রত্যেকের বিয়োগফলের শুধুমাত্র একক স্থানীয় অঙ্কটি শিক্ষককে বলো। (চিত্রে প্রদর্শিত উদাহরণের ক্ষেত্রে একক স্থানীয় অঙ্ক হবে = ৬)
- তোমার শিক্ষক বাকি দুইটি অঙ্ক (দশক ও শতক স্থানীয়) বলে দিবেন।
- তুমিও কি পারবে শিক্ষকের মতো এরকম ম্যাজিক দেখাতে? চেষ্টা করেই দেখো নিজে নিজে এই ম্যাজিকের রহস্য বের করতে পার কিনা?


তোমার বন্ধুদের ম্যাজিকটি দেখাও।

নিজের পরিবারের সদস্য, আত্মীয় স্বজন এবং প্রতিবেশীদের ম্যাজিকটি দেখাও।

প্রিয় নামে বয়স জানো

$10 \times \text{তোমার বয়স} =$

$৯ \times \text{তোমার প্রিয় মানুষের নামে বর্ণ সংখ্যা} =$



—

সবুজ ঘরে পাওয়া সংখ্যাটি শিক্ষককে বলো। শিক্ষক তোমার বয়স বলে দিবেন।

তোমার বন্ধুদের ম্যাজিকটি দেখাও।

নিজের পরিবারের সদস্য, আত্মীয় স্বজন এবং প্রতিবেশীদের ম্যাজিকটি দেখাও।