

অধ্যায়-৯ অন্তরীকরণ

১. নং প্রশ্নের সমাধান:

$$f(x) = \ln(x), g(x) = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

ক. $x^2 - 2xy + y^2 = 5$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

২

খ. $y = e^{g(x)}$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)y_2 + 2(x-1)y_1 = 0$

৪

গ. $\frac{f(x)}{x}$ এর বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

৪

(ক). এর সমাধান:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 5$$

বা, $2x - 2x \frac{dy}{dx} - 2y + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $2(y-x) \frac{dy}{dx} = 2(y-x) \therefore \frac{dy}{dx} = 1$ (Ans.)

(খ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $g(x) = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x$

$$\therefore y = e^{g(x)} = e^{2 \tan^{-1} x} \dots\dots(i)$$

বা, $y_1 = e^{2 \tan^{-1} x} \frac{2}{1+x^2}$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

বা, $(1+x^2)y_1 = 2y$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 2y$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$$\therefore (1+x^2)y_2 + 2(x-1)y_1 = 0 \text{ (প্রমানিত)}$$

(গ). এর সমাধান:

$$\frac{2 \ln\{f(x)\}}{\{f(x)\}^2} = \frac{2 \ln \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

ধরি $y = \frac{\ln x}{x}$ বা, $\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য, $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$

বা, $\ln x = 1 \therefore x = e$

আবার, $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x^2 \left(-\frac{1}{x}\right) - (1 - \ln x)2x}{(x^2)^2}$

$$= \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

এখন, $x = e$ বিন্দুতে $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3+2\ln e}{e^3} = \frac{-3+2}{e^3} = \frac{1}{e^3} < 0$

$\therefore x = e$ বিন্দুতে সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

\therefore সর্বোচ্চ মান $= \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ (দেখানো হলো)

২. নং প্রশ্নের সমাধান:

$f(x) = \tan^{-1}ex$, $g(x) = a^x$ দুইটি ফাংশন এবং $y = \sqrt{4+3\sin x}$ হলে-

ক. $f'(x)$ নির্ণয় কর।

২

খ. মূল নিয়মে $g(x)$ এর অন্তরজ সহগ নির্ণয় কর।

৪

গ. দেখাও যে, $2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$

৪

(ক). এর সমাধান:

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}e^x) = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} (Ans.)$$

(খ). এর সমাধান:

মনে করি, $f(x) = a^x$

$$\therefore f(x+h) = a^{x+h}$$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{h} (a^h - 1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{h} \left[\left(1 + h(\ln a) + \frac{h^2}{2!}(\ln a)^2 + \dots \right) - 1 \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{h} \left[h(\ln a) + \frac{h^2}{2!}(\ln a)^2 + \dots \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{h}{h} \left[\ln a + \frac{h}{2!}(\ln a)^2 + \dots \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \left[\ln a + \frac{h}{2!}(\ln a)^2 + \dots \right]$$

$$= a^x \ln a (Ans.)$$

(গ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$y = \sqrt{4+3\sin x}$$

বা, $y^2 = 4+3\sin x$ [বর্গ করে]

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকণ করে পাই,

বা, $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(4 + 3 \sin x)$

বা, $2y \frac{dy}{dx} = 3 \cos x$

বা, $2 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \sin x$ [পুনরায় অন্তরীকরণ করে]

বা, $2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2y \frac{d^2y}{dx^2} = 4 - y^2$

$\therefore 2y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 = 4$ (দেখানো হলো)

৩. নং প্রশ্নের সমাধান:

$f(x) = \ln x$

ক. $2x^\circ \cos 3x^\circ$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।

২

খ. মূল নিয়মে দেখাও যে,

৪

গ. $y = a \cos \{f(x)\} = \frac{1}{x}$

(ক). এর সমাধান:

মনে করি, $y = 2x^\circ \cos 3x^\circ$

$$= 2 \cdot \frac{\pi x}{180} \cos \left(3 \cdot \frac{\pi x}{180} \right) = \frac{\pi x}{90} \cos \left(\frac{\pi x}{60} \right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{90} \cos \frac{\pi x}{60} \right) = \frac{\pi x}{90} \frac{d}{dx} \left(\cos \frac{\pi x}{60} \right)$$

$$180^\circ = \pi^c$$

$$\therefore 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}$$

$$\therefore x^\circ = \frac{\pi x^c}{180}$$

$$+ \cos \frac{\pi x}{60} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{90} \right)$$

$$= \frac{\pi x}{90} \left(-\sin \frac{\pi x}{60} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi x}{60} \right) + \cos \frac{\pi x}{60} \cdot \frac{\pi}{90}$$

$$= -\frac{\pi x}{90} \sin \frac{\pi x}{60} \cdot \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{90} \cos \frac{\pi x}{60}$$

$$= \frac{\pi}{90} \left(\cos \frac{\pi x}{60} - \frac{\pi x}{60} \sin \frac{\pi x}{60} \right) (Ans.)$$

(খ). এর সমাধান:

মনে করি, $f(x) = \ln x \therefore f(x+h) = \ln(x+h)$

সংজ্ঞানুসারে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{f(x)\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \left[\because \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b\right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{x} - \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{h}{x}\right)^3}{3} - \dots \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{x^3} - \dots \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{x^3} - \dots \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{x^3} - \dots \right) \\
&= \frac{1}{x}, (x > 0) \\
\therefore \frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{x} \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

(গ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$

x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1 = \frac{d}{dx}\{a \cos(\ln x)\} + \frac{d}{dx}\{b \sin(\ln x)\}$$

$$y_1 = a\{-\sin(\ln x)\} \times \frac{1}{x} + b\{\cos(\ln x)\} \times \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } y_1 = \frac{-a \sin(\ln x) + b \cos(\ln x)}{x}$$

$$\text{বা, } xy_1 = -a \sin(\ln x) + b \cos(\ln x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(xy_1) = -a \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)\} + b \frac{d}{dx}\{\cos(\ln x)\}$$

$$\text{বা, } xy_2 + y = -a \times \{\cos(\ln x)\} \times \frac{1}{x} + b\{-\sin(\ln x)\} \times \frac{1}{x}$$

$$\text{বা, } xy_2 + y_1 = -\frac{a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)}{x}$$

$$\text{বা, } xy_2 + y_1 = -\frac{y}{x}$$

$$\text{বা, } x^2 y_2 + xy_1 = -y$$

$$\therefore x^2 y_2 + xy_1 + y = 0 \text{ (দেখানো হলো)}$$

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 2, g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11$$

ক. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$ ।

২

খ. x এর কোন মানের জন্য $f(x)$ সর্বোচ্চ?

৪

গ. $(1, 2)$ বিন্দুতে $g(x,y)$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

৪

(ক). এর সমাধান:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{4} \\ &= 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (Ans.) \end{aligned}$$

(খ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 2$$

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য, $f'(x) = 0$

বা, $\frac{d}{dx}(3x^3 - 6x^2 - 5x + 2) = 0$

বা, $9x^2 - 12x - 5 = 0$

বা, $9x^2 - 15x + 3x - 5 = 0$

বা, $3x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$

বা, $(3x + 1)(3x - 5) = 0$

$\therefore 3x + 1 = 0$ অথবা, $3x - 5 = 0$

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ বা, $x = \frac{5}{3}$

এখন, $f''(x) = \frac{d}{dx}(9x^2 - 12x - 5)$
 $= 18x - 12$

$x = -\frac{1}{3}$ হলে, $f''(x) = 18\left(-\frac{1}{3}\right) - 12 = -18 < 0$

$x = \frac{5}{3}$ হলে, $f''(x) = 18\left(\frac{5}{3}\right) - 12 = 18 > 0$

$\therefore x = -\frac{1}{3}$ বিন্দুতে ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান বিদ্যমান।

$x = \frac{1}{3} f(x)$ এ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} + 2 \\ &= -\frac{-1-6+15+18}{9} = \frac{26}{9} \\ \therefore f(x) \text{ এর সর্বোচ্চ মান} &= \frac{26}{9} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(গ). এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } g(x,y) = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0 \dots\dots\dots(i)$$

(i) কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x + 2y \frac{dy}{dy} - 4 - 6 \frac{dy}{dy} + 0 = 0$$

$$\text{বা, } (2y - 6) \frac{dy}{dy} = 4 - 2x$$

$$\frac{dy}{dy} = \frac{2(2-x)}{2(y-3)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dy} = \frac{2-x}{y-3}$$

$$(1,2) \text{ বিন্দুতে } \frac{dy}{dy} = \frac{2-1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1$$

$\therefore (1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - 2 = -1(x - 1)$$

$$\text{বা, } y - 2 = -x + 1$$

$$\therefore x + y = 3 \text{ (Ans.)}$$

প্র্যাকটিসঃ-সৃজনশীল প্রশ্নঃ

১। $f(x) = \sin x$ এবং $(x) = \tan^{-1}x$.

ক. যোগজ নির্ণয় কর: $\int f^x(x) dx$.

২

খ. $y = \sin(m f^{-1}(x))$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)-x=0$

৪

গ. লেখচিত্র আঁক: $y = f(2x)$: যখন $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$

৪

২। $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = \cos x$.

- ক. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow 0} (-)$ ২
- খ. $y = \{f(x) + f(-x)\} g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ হলে প্রমাণ কর যে, $y_4 + 4y = 0$ 8
- গ. দেখাও যে, $4f(x) + 9f(-x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 12। 8
- ৩। : $R \rightarrow R$ এবং : $R \rightarrow R$ ফাংশন দুটি $(x) = \sin x$ এবং $(x) = \cos x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
ক. লিমিট বলতে কি বুঝ?
খ. মূল নিয়মে $(2x)$ এর অন্তরীকরণ কর।
গ. $y = 1 + 2(x) + x\{(x)\}^2(0 < x < \pi)$ ফাংশনটির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। 8
- ৪। $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1$, $g(x) = b \cos(\ln x) + d \sin(\ln x)$
ক. $y = x^2 + \sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখাটির উপর যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x -অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $x^2 g_2(x) + x g_1(x) + g(x) = 0$ 8
গ. $f(x)$ এর চরম মান নির্ণয় কর। 8
- ৫। $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$.
ক. লিমিটের সংজ্ঞা দাও। ২
খ. মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 8
গ. x এর সাপেক্ষে $[f(x)]^{8(x)}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। 8
- ৬। $g(x) = 9e^x + 16e^{-x}$ এবং $y = \sqrt{2 + 5 \sin x}$
ক. x এর সাপেক্ষে $(1+x)^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $2y + 2 + y^2 = 2$ 8
গ. প্রমাণ কর যে, $g(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান 24 8
- ৭। $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$
ক. $y^2 = 4 - x$ হলে $\int_0^4 xy \, dy = ?$ ২
খ. $y = f(x)$ বক্ররেখার $(4, 5)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 8
গ. $f(x)$ এর গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। 8
- ৮। দৃশ্যকল্প-১: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 45x + 13$
দৃশ্যকল্প-২: $y = x^{x^x}$
ক. $y = x^x$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? ২
খ. দৃশ্যকল্প-২ হতে এর মান নির্ণয় কর 8
গ. $f(x)$ এর গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর।
- ১০। বক্ররেখা: $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0 \dots\dots\dots(i)$ এবং $g(x) = \ln 2x$.
ক. $\ln(xy) = x + y$ হলে নির্ণয় কর। ২
খ. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $g(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। 8
গ. (i) নং বক্ররেখার $(1, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। 8
- ১১। $A = 2x^0 \cos 3x^0$; $y = ax^2 +$; $f(x) \ln(x)$
ক. A নির্ণয় কর। ২
খ. প্রমাণ কর যে, $2x^2 y_2 - xy_1 - 2y = 0$ 8

গ. দেখাও যে, $\frac{f(2x)}{x}$ এর বৃহত্তম মান

8

১২। $f(u) = \ln u$ একটি লগারিদমিক ফাংশন এবং $g(v) = p \sin^{-1}(v)$ একটি বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন।

ক. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

২

খ. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় কর।

8

গ. $f(y) = g(x)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - p^2y = 0$.

8

১৩। $f(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2} \cdot (x) \ln x$ দুইটি ফাংশন।

ক. $\lim_{x \rightarrow a} =$ কত?

২

খ. $y = \ln \{f(x)\}$ হলে প্রমাণ কর, $(a^2 + x^2) y_2 + xy_1 = 0$.

8

গ. দেখাও যে, এর সর্বোচ্চ মান

8

১৫। $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ একটি বক্র রেখা

ক. $y = x^x$ হতে নির্ণয় কর।

২

খ. প্রদত্ত বক্ররেখার $(4,3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8

গ. উদ্দীপকে উল্লেখিত ফাংশনের গুরু ও লঘুমান নির্ণয় কর।

8

১৬। $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 2$ এবং $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11$

ক. $\lim_{x \rightarrow a}$ এর মান নির্ণয় কর।

২

খ. x এর কোন মানের জন্য $f(x)$ ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ?

8

গ. $(1,2)$ বিন্দুতে $g(x,y) = 0$ এর স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8

১৮। (i) $f(x) = \cot x$ এবং (ii) $y = px^2 + qx^{-1/2}$ (iii) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

ক. মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

২

খ. দেখাও যে, $2x^2 y_2 - xy_1 - 2y = 0$

8

গ. দেখাও যে, $g(x)$ এর সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান নেই।

8

১৯। $y = \sqrt{4 + 3 \sin x}$ একটি ফাংশন এবং $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

ক. x এর সাপেক্ষে $2x^0 \cot x^3 x^0$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।

২

খ. প্রথম ফাংশন থেকে প্রমাণ কর যে, $2y + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y^2 = 4$.

8

গ. বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাদের ভূজ নির্ণয় কর।

8

২০। $x^3 + xy^2 - 3x^2 + 4x + 5y + 2 = 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।

ক. নির্ণয় কর।

২

খ. $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8

গ. $(0,-1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8

২১। $x = \cos \sqrt{y}$
 $x^2 + 2ax + y^2 = 0$

ক.	$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।	২
খ.	১ম উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-2=0$.	৪
গ.	২য় উদ্দীপকের যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।	৪
২২।	$f(x) = \sin x$	
ক.	$\lim_{x \rightarrow 0}$ নির্ণয় কর।	২
খ.	মূল নিয়মে $f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।	৪
গ.	$y = f(m \sin^{-1} x)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2y = 0$	৪
২৩।	দৃশ্যকল্প-১: $P(x) = 2x^3-21x^2+36x-20$	
	দৃশ্যকল্প-১: $\ln y = \tan^{-1}x$	
ক.	$\sin^2\{\ln(\sec x)\}$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।	২
খ.	দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$	৪
গ.	দৃশ্যকল্প-১ এর চরম বিন্দু নির্ণয় কর।	৪
২৪।	(i) $y = \cos^{-1}$, (ii) $4x^2+4y^2 = 25$	
ক.	x এর সাপেক্ষে $x^{\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।	২
খ.	(i) নং এর নির্ণয় কর।	৪
গ.	অন্তরীকরণের সাহায্যে (ii) নং বৃত্তের (,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।	৪
২৫।	$g(x) = x^3-6x^2+9x+5 \dots\dots\dots(i)$	
	$f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 8 \dots\dots\dots(ii)$	
ক.	$x^y = e^{x-y}$ হলে নির্ণয় কর।	২
খ.	$g(x)$ ফাংশনটির যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।	৪
গ.	$f(x)$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।	৪
২২।	$f(x) = \sin x$	
ক.	$\lim_{x \rightarrow 0}$ নির্ণয় কর।	২
খ.	মূল নিয়মে $f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।	৪
গ.	$y = f(m \sin^{-1} x)$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2)y_2-xy_1+m^2y = 0$	৪
২৩।	দৃশ্যকল্প-১: $P(x) = 2x^3-21x^2+36x-20$	
	দৃশ্যকল্প-১: $\ln y = \tan^{-1}x$	
ক.	$\sin^2\{\ln(\sec x)\}$ কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ কর।	২
খ.	দৃশ্যকল্প-২ হতে দেখাও যে, $(1+x^2)y_2+(2x-1)y_1=0$	৪
গ.	দৃশ্যকল্প-১ এর চরম বিন্দু নির্ণয় কর।	৪
২৪।	(i) $y = \cos^{-1}$, (ii) $4x^2+4y^2 = 25$	
ক.	x এর সাপেক্ষে $x^{\sin x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর।	২
খ.	(i) নং এর নির্ণয় কর।	৪
গ.	অন্তরীকরণের সাহায্যে (ii) নং বৃত্তের (,0) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।	৪
২৫।	$g(x) = x^3-6x^2+9x+5 \dots\dots\dots(i)$	

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 8 \dots\dots\dots(ii)$$

- ক. $x^y = e^{x-y}$ হলে নির্ণয় কর। ২
- খ. $g(x)$ ফাংশনটির যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। ৪
- গ. $f(x)$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর। ৪

২৬। $f(x) = \tan x$, $g(x) = \sin$ ও $h(x) = x^{x^x}$ হলে,

- ক. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x)}{\{g(x)\}}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
- খ. মূল নিয়মে $f(x)$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ৪
- গ. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{g(x)}} dx$ ও $\frac{d}{dx}\{h(x)\}$ নির্ণয় কর। ৪

২৮। ১ম ফাংশন $\cos \sqrt{y} + x$

- ২য় ফাংশন $f(x) = pe^x + qe^{-x}$
- ক. মূল নিয়মের সাহায্যে $\ln x$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। ২
- খ. ১ম ফাংশন হতে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$ ৪
- গ. $p = 4$, $q = 9$ হলে দেখাও যে, ২য় ফাংশনের ক্ষুদ্রতম মান ১২। ৪

২৯। $u = \cos^{-1}x$ এবং $v = \frac{1}{x}$

- ক. x এর সাপেক্ষে $2x^\circ \cos 3x^\circ$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। ২
- খ. $y = u^2$ হলে, দেখাও যে, $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2 = 0$ ৪
- গ. দেখাও যে, $v + \frac{1}{v}$ এর লঘুমান গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর। ৪

৩০। $f(x) = \tan(\sin^{-1}x)$ এবং $g(x) = \sqrt{4+3\sin x}$

- ক. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$ ২
- খ. $f(x)$ এর অন্তরজ সহগ নির্ণয় কর। ৪
- গ. যদি $y = g(x)$ হয় তবে দেখাও যে, $2y \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 4$ ৪

৩১। $f(x) = \begin{cases} 5-2x; x < \frac{5}{2} \\ 5+2x; x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$ এবং $g(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 5$.

- ক. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 4^{-x}}{4^x + 4^{-x}}$ নির্ণয় কর। ২
- খ. $x =$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা প্রমাণ কর। ৪
- গ. $g(x)$ এর চরম মানগুলি নির্ণয় কর। ৪

৩২। $y = a \cos(\ln x) + b \sin(\ln x)$ এবং $f(x) = 1 + 2\sin x + 3\cos^2 x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

- ক. $f'(x)$ ফাংশনের দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরজ নির্ণয় কর। ২
- খ. দেখাও যে, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ ৮
- গ. $f''(x)$ ফাংশনের গুরুমান ও লঘুমান নির্ণয় কর। ৮
- ৩৩। $f(x) = e^x$ এবং $g(x) = \sin x$
- ক. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ এর সীমা নির্ণয় কর। ২
- খ. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $f(2x)$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। ৮
- গ. $\int f(x) g(2x) dx$ নির্ণয় কর। ৮
- ৩৪। $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{x}{\ln x}$
- ক. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos x}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
- খ. $f(x) + f(y) = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যেকোনো স্পর্শক অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৮
- গ. $g(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। ৮
- ৩৫। (i) $f(x) = \cos 2x$
- (ii) $y = x^2 + \sqrt{1 - x^2}$
- ক. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{3x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ২
- খ. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে $\frac{d}{dx} f(x)$ নির্ণয় কর। ৮
- গ. (ii) নং বক্ররেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের উপর লম্ব তা নির্ণয় কর।
- ৩৬। দৃশ্যপট-১: $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$
- দৃশ্যপট-২: $y = \sqrt{g(x)}$
- ক. $\ln_3 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ এর x এর সাপেক্ষে অন্তরজ নির্ণয় কর। ২
- খ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ এর মান নির্ণয় কর। ৮
- গ. $g(x) = \sqrt{4 + 3 \sin x}$ হলে, দৃশ্যপট-২ হতে প্রমাণ কর: $2yy_2 + 2y_1^2 + y^2 = 4$ ৮
- ৩৭। $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$ একটি বক্ররেখার সমীকরণ।
- ক. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর ২
- খ. $(1, 2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। ৮
- গ. উক্ত বক্ররেখার উপর অঙ্কিত একটি স্পর্শক $(a, 0)$ বিন্দুতে x -অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করলে $a =$ কত? ৮