অধ্যায়-১: বাস্তব সংখ্যা ও অসমতা

১.নং প্রশ্নের সমাধান:

a ও b দুইটি সংখ্যা নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত।
$a \in Q$, $b \in R\backslash Q$
ক. দেখাও যে, $|a+b| \leq |a|+|b|$
খ. স্বীকার্যেও সাহায্যে প্রমাণ কর, $a+b \in R\backslash Q$
গ. দেখাও যে, ab অমূলদ সংখ্যা।

(ক). এর সমাধান :

$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= a^2 + 2|ab| + b^2 [\because |a|^2 = a^2, |b|^2 = b^2, |a||b| = |ab|]$

$\Rightarrow (|a|+|b|^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 [\because |ab| \geq ab])$

$\Rightarrow (|a|+|b|^2 \geq a^2 + 2ab + b^2 [\because |ab| \geq ab])$

(দেখানো হলো)

(খ). এর সমাধান :

দেওয়া আছে, $a \in Q$
$b \in R\backslash Q$
ধরি, $a+b \in Q$
বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতার স্বীকার্য থেকে সকল $a \in Q$ এর জন্য একটি মাত্র $a \in Q$ পাওয়া যাবে যার জন্য $a+(-a)=0$ হবে।

$\therefore (-a)+(a+b) = (-a+a)+b$ [সংযোজন যোগ্যতা]

$= 0+b = b \in Q$

কিন্তু $b \in R\backslash Q$ [দেওয়া আছে]
$\therefore a+b \notin Q$
$\therefore a+b \in R\backslash Q$ (প্রমাণিত)

(গ). এর সমাধান :

দেওয়া আছে, $\in Q$ এবং $b \in R-Q$
তাহলে, বিপরীতকের অস্তিত্বশীলতার স্বীকার্য থেকে, সকল $a \in Q$ এবং $a \neq 0$ এর জন্য একটি মাত্র $a^{-1} \in Q$ পাওয়া যাবে। যার জন্য $a^{-1}a = 1$ হবে।
ধরি, $ab \in Q$ তাহলে $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b \in Q$
কিন্তু $b \in R\backslash Q$ [দেওয়া আছে]
$\therefore ab \notin Q$
$\therefore ab \in R\backslash Q$ (দেখানো হলো)

২.নং প্রশ্নের সমাধান:

সিলেট সিটি কর্পোরেশন নির্বাচনে মেয়র পদের একজন প্রার্থীর নির্বাচন-পূর্ব জরিপে দেখা গেল যে 43% ভোটার তাকে ভোট দেবে। জরিপে ফলাফল 5% কম-বেশি হতে পারে।
ক. 'পরম মান সব সময়ই ধনাত্মক অথবা শূন্য'–উক্তিটির তাৎপর্য বিশ্লেষণ কর।
খ. উপর্যুক্ত বর্ণনাকে পরম মান অসমতায় প্রকাশ কর এবংএর একটি জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দাও।

গ. অসমতাটি সমাধান করে কত সংখ্যাক ভোটার তাকে ভোট দেবে তা নির্ণয় কর। ‘ত্রুটির কারণে জরিপের ফলাফল অসঙ্গতিপূর্ণ হবে’−উক্তিটির পক্ষে যুক্তি উপস্থাপন কর।

(ক). এর সমাধান :

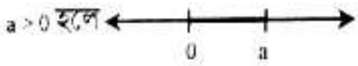
পরম মানের সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই,

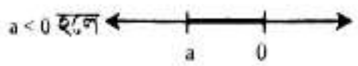
$$|a|=\begin{cases} a, \text{ যখন } a>0 \\ -a, \text{ যখন } a<0 \\ 0, \text{ যখন } a=0 \end{cases}$$

উদাহরণস্বরূপ, $|7|=7, |-7|=-(-7)=7$ এবং $|0|=0$

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে যে, ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য যেকোনো সাংখ্যিক মানের জন্যই উহার পরম মান ধনাত্মক বা শূন্য অর্থাৎ $|a|\geq 0$.

পরম মানের জ্যামিতিক প্রতিরূপ: জ্যামিতিক দৃষ্টিকোণ থেকে বিচার করলে a-এর পরম মান হচ্ছে বাস্তব সংখ্যারেখায় 0 বিন্দু থেকে a বিন্দুর দূরত্ব। a> 0 হলে





হলে

অতএব, $|a|<5$ এর অর্থ, মূলবিন্দু 0 থেকে a বিন্দুর দূরত্ব 5 এর কম অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যারেখায় a এর অবস্থান -5 এবং 5 এর মধ্যে।

(খ). এর সমাধান :

মনে করি, মেয়র x সংখ্যক ভোট পায় এবং মোট ভোটার সংখ্যা100 জন।

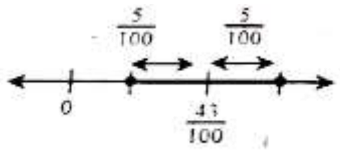
তাহলে, নির্ণয় পরম মান অসমতাটি, $\left|x-\frac{43}{100}\right|\leq\frac{5}{100}$.

100 জন ভোটারের মধ্যে মেয়র 43% ভোট পেতে পারেন অর্থাৎ $43\%=\frac{43}{100}$ জন ভোটার তাকে ভোট দেবেন। আবার,

জরিপে ত্রুটির দরুন ফলাফল 5% কম বেশি হতে পারে অর্থাৎ ত্রুটির পরিমাণ $5\%=\frac{5}{100}$.

(গ). এর সমাধান :

‘খ’ থেকে প্রাপ্ত অসমতাটি



$$\left|x-\frac{43}{100}\right|\leq\frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{100}\leq x-\frac{43}{100}\leq\frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{100}+\frac{43}{100}\leq x-\frac{43}{100}+\frac{43}{100}\leq\frac{5}{100}+\frac{43}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{-5+43}{100}\leq x\leq\frac{5+43}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{38}{100}\leq x\leq\frac{48}{100}$$

$\Rightarrow 38\% \le x \le 48\%$

ত্রুটির কারণে জরিপের ফলাফল অসঙ্গতিপূর্ণ হবে'- পক্ষের যুক্তি।

১. ত্রুটির দরুন মেয়র সর্বনিম্ন 38% ভোট পেতে পারেন যা তার নির্বাচনে নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা কমিয়ে দেয়।

২. মেয়র সঠিক কতজন ভোটারের ভোট পাবেন তা সম্পর্কে অনিশ্চয়তা সৃষ্টি হয়।

৩.নং প্রশ্নের সমাধান:

1. (a) মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার পার্থক্য লিখ।
   (b) পরম মান চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর:
   (c) $|4-3x|<2$ এর সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

(a). এর সমাধান :

(a) মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার পার্থক্য

	মূলদ সংখ্যা	অমূলদ সংখ্যা
সংজ্ঞা	$\frac{a}{b}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে যেখানে, $a,\ b$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $b\neq 0$	যা $\frac{a}{b}$ আকাওে প্রকাশ করা যায় না, তাই অমূলদ সংখ্যা।
প্রকাশ	একে Q দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	একে Q^c দ্বারা প্রকাশ করা যায়।
উদাহরণ	$\left\{........-3,\frac{1}{4},0,\frac{3}{7},1,\frac{3}{2}.......\right\}$	$\left\{\pm\pi,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{5},\pm\sqrt{7}.........\right\}$
দশমিকের মান	*মূলদ সংখ্যার দশমিকের মান অনন্ত কিন্তু পৌন;পুনিক*	*অমূলদ সংখ্যার দশমিকের মান অনন্ত কিন্তু পৌণ:পুণিক নয়।*

(b). এর সমাধান :

$-6\le x\le 2$

-6 এবং 2 এর গড় $\frac{-6+2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

$\therefore\ -6\le x\le 2$

$\Rightarrow -6-(-2)\le X-(-2)\le 2-(-2)$

[সকল ক্ষেত্রে বিয়োগ করে]

$\Rightarrow -6+2\le x+2\le 4$

$\Rightarrow -4\le x+2\le 4.$

$\therefore |x+2|\le 4.$

(c). এর সমাধান :

$|4-3x<2|$

$\Rightarrow -2<4-3x<2$

$\Rightarrow -2-4<4-3x-4<2-4$ [সকল ক্ষেত্রে বিয়োগ করে]

$\Rightarrow\ -6<-3x<-2$

$\Rightarrow -\frac{6}{3}<\frac{3x}{3}<-\frac{2}{3}$ [3দ্বারা ভাগ করে]

$\Rightarrow -2<-x<-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 2>x>\frac{2}{3}$ [(-1) দ্বারা গুণ করে]

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < x < 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\frac{2}{3} < x < 2$

সমাধান সেট, S = $\left\{ x \in R : \frac{2}{3} < x < 2 \right\}$

সংখ্যা রেখা : 

৪.নং প্রশ্নের সমাধান:

পাশে একটি অসমতা দেওয়া হলো : $|x-5| < 4$

ক. বাস্তব সংখ্যার উপসেট লিখ।

খ. বাস্তব রেখার সাহায্যে সমাধান কর।

গ. অসমতাটি সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও।

(ক). এর সমাধান :

বাস্তব সংখ্যার উপসেট 4টি।

(i) মূলদ সংখ্যার সেট : $Q = \left\{ x : \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}$

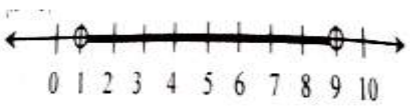
(ii) অমূলদ সংখ্যার সেট : Q = R/Q, R = Q $\cup$ Q.

(iii) স্বাভাবিক সংখ্যার সেট : N = $\{1, 2, 3, ...\}$

(iv) পূর্ণসংখ্যার সেট: $Z = \{......., -3, -2\ -1,\ 0, 1, 2, ...\}$

(খ). এর সমাধান :

$|x-5| < 4$



এক্ষেত্রে বাস্তব রেখায় x ও 5 এর প্রতিরূপী বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 4 এর কম হবে।

$(x-5)$ অঋণাত্মক হলে x-5<4

বা, x <4+5 [উভয় পক্ষে 5 যোগ করে]

$\therefore x < 9$

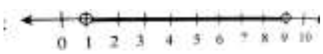
এবং (x-5) ঋণাত্মক হলে

$-(x-5) < 4$

বা, x -5 <- 4 [উভয় পক্ষে (-1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $x > 5-4$ [উভয় পক্ষে 5 যোগ করে]

বা, x>1 $\therefore 1 < x < 9$

সংখ্যারেখা: 

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: 1<x<9.

(গ). এর সমাধান :

$|x-5|<4$

$\therefore -4<x-5<4$

$\Rightarrow -4+5<x-5+5<4+5$ [উভয় পক্ষে যোগ করে]

$\Rightarrow 1<x<9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $1<x<9.$

প্র্যাকটিস অংশ:-সৃজনশীল প্রশ্নঃ

১. $AB \le AC \le BC$

ক. $x=2$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. $|AB-1|<\frac{1}{10}$ হলে দেখা ও যে, $|BC|<\frac{21}{100}$

গ. x এর ওপর কি শর্ত আরোপ করলে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন করা সম্ভব সংখ্যা রেখার সাহায্য দেখাও।

২. $f(X)=X(X+1)$ এবং $g(x)=x-2$ দুইটি ফাংশন

ক. $|g(X)|<5$ এর সমাধান সেট নির্ণয় কর।

খ. $f(x)>g(X)$ হলে অসমতাটির সমাধান সেট নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $f(X)<g(X)+2$ এ কোন বাস্তব সমাধান নেই।

৩. $f(X)=|X-1|-\frac{1}{3}$ একটি পরমমান সংবলিত ফাংশন।

ক. $f(X)$ এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

খ. $f(X)>0$ এর সমাধান সংখ্যারেখার সাহায্য দেখাও।

গ. দেখা ও যে, $f(X)<0$ হলে $|X^2-1|<\frac{7}{9}$

৪. $f(X)=|4-7X|$ একটি সমাধারন সংবলিত ফাংশন।

ক. $f(X)$ কে পরম মান মুক্ত করে প্রকাশ কর।

খ. $f(X)\le 18$ হলে সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. সংখ্যারেখার সাহায্য $-3\le f(X)\le 18$ অসমতাটি সমাধান কর।

৫. $f(X)-|X+1|$ এবং $g(X)=|X-1|$

ক. দেখাও যে, $f(X)+g(X)\ge|2X|$

খ. $f(X)g(X)\le 3$ হলে সমাধান সেট নির্ণয় কর।

গ. সংখ্যারেখার সাহায্য $f(X)\le g(X)$ এর সমাধান কর।

৬. $P=X+y-3, Q=2X-y-5$

ক. পরমমান চিহ্ন ব্যতিত প্রকাশ করঃ $|x-2|<5$

খ., $y=X$ হলে $\frac{1}{|Q|}>2$ এর সমাধান নির্ণয় করে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন কর। যখন $X\ne\frac{5}{3}$

গ. $P>0$ এবং $Q>0$ অসমতা যুগলে সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

৭. $A=[-1,3), B=\{2,4,6,8......\}$

ক. $C=(-1,3]$ সেটটিকে অসমতা চিহ্নের সাহায্য প্রকাশ করে এর একটি উধ্বসীমা নির্ণয় কর।

খ. কারণ উলে-ক সহ A সেটটি সীমিত কিনা তা যাচাই কর এবং বিদ্যমান থাকলে লঘিষ্ঠ উধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা নির্ণয় কর।

গ. কারণ উলে-খপূর্বক B সেটটি সীমিত কিনা তা আলোচনা কর। বিদ্যমান থাকলে লঘিষ্ঠ উধ্বসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা নির্ণয় কর।

৮. $f(X)=2X+3$ এবং $g(X)=\sqrt{X}$,

ক. x এর মান কত হলে $f=g^2$ হবে?

খ. $|f(x)|<7$ সমাধান করে সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. প্রমান কর যে $g(3)$ একটি অমূলদ সংখ্যা

৯. $f(X)=\dfrac{1}{1-4X}$ এবং $g(X)=X-1)$

ক, $-6\leq X\leq -1$ কে পরমমান চিহ্নের সাহায্য প্রকাশ কর।

খ. হলে দেখা যে, $\dfrac{1}{|f(X)|}\geq 3, X\neq \dfrac{1}{4}$

গ, $\dfrac{g(X)}{f(X)}>0$ সমাধান কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও

১০. $f(X)=\dfrac{X+1}{X-2}$ এবং $g(X)-X-\dfrac{1}{3}$

ক. $||2-6|-10+|7-3\ |$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $Xf(X)>0$ এর সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. $\dfrac{1}{|g(X)|}\geq 3, X\neq \dfrac{1}{3}$ অসমতাকে পরমমান চিহ্ন ব্যতিরেকে প্রকাশ করো এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও।