5 অধ্যায় ৫

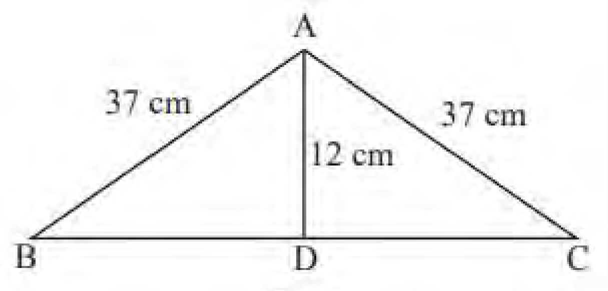
জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

Triangle and Quadrilateral in Land Design

অনুশীলনী

১। চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে কীভাবে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করবে? সমস্যাটি সমাধান করো এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্য কীভাবে সাহায্য করল যুক্তি দাও।

AD = 12 cm হলে BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



চিত্র-ক

সমাধানঃ

চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজের একটি বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করা যায়। সেটি হলোঃ-

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

এখানে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD ও ΔACD আছে; তাহলে উপরোক্ত সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট অনুসারে আমরা লিখতে পারি-

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ ....(i)

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ....(ii)

এবং এই দুই সমীকরণ থেকে আমরা চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপ করতে পারি।

<u>BC এর মান নির্ণয়ঃ</u>

(i) নং এ, AD = 12 cm; AC = 37 cm বসিয়ে পাই,

$37^2 = 12^2 + DC^2$

বা, $DC^2 = 37^2 - 12^2$

বা, $DC^2 = 1225$

বা, $DC = \sqrt{1225} = 35$

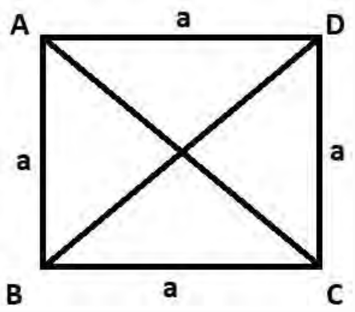
অনুরুপভাবে, (ii) নং থেকে পাই,

BD = 35

$\therefore$ BC = BD + DC = 35 + 35 = 70 cm

২। চিত্র এঁকে বা কাগজ কেটে প্রমাণ করো– বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

সমাধানঃ



মনে করি, ABCD একটি বর্গ যাদের AC ও BD দুইটি কর্ণ। নিম্নের চিত্রে বর্গ ও তার কর্ণদ্বয়কে এঁকে দেখানো হলো। এখন এই চিত্র থেকে প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD.

প্রমাণঃ

ABCD বর্গে, AB = BC = CD = DA = a [$\therefore$ বর্গের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হয়];

আবার, $\angle BCD = 90°$ [যেহেতু, ABCD একটি বর্গ]

$\therefore$ ΔBCD হতে পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে পাই,

$BD^2 = BC^2 + DC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

বা, $BD = \sqrt{(2a^2)} = \sqrt{2}.a$ …….(i)

অনুরুপভাবে,

$AC^2 = CD^2 + DA^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

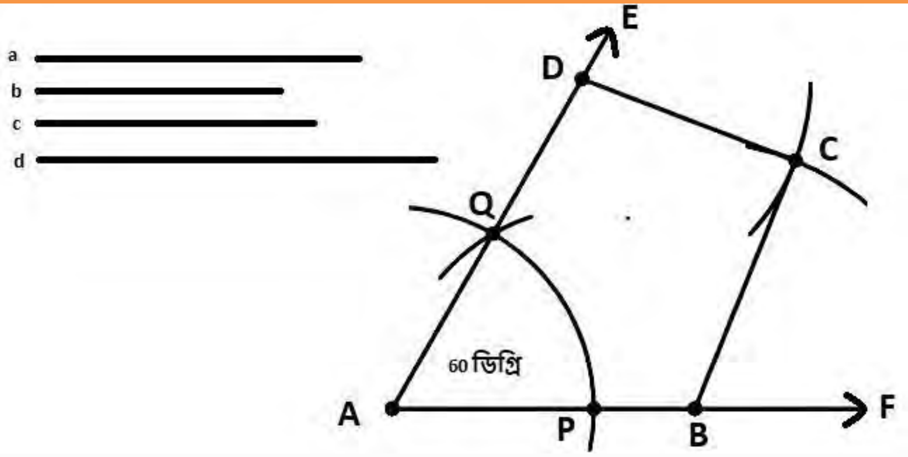
বা, $AC = \sqrt{(2a^2)} = \sqrt{2}.a$ …….(ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

AC = BD [প্রমাণিত]

৩। ধরো চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে 4 cm, 3 cm, 3.5 cm, 5 cm এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60 ডিগ্রি। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো। [জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ এর ৩ নং প্রশ্ন এটি; পর্যায়ক্রমে সব দেয়া হয়েছে।]

সমাধানঃ



চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে a = 4 cm, b= 3 cm, c = 3.5 cm, d = 5 cm এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60 ডিগ্রি দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণঃ

(ক) যেকোনো একটি রশ্মি AF নেই এবং A কে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা AF কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) P কে কেন্দ্র করে ঐ একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা পূর্বের বৃত্তচাপকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

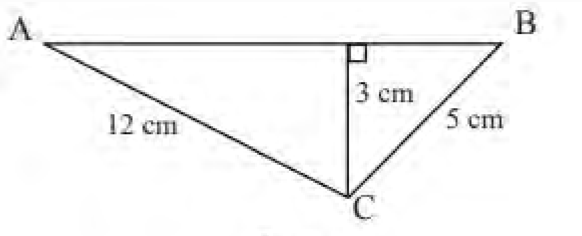
(গ) A,Q যোগ করে AE রশ্মি আঁকি। তাহলে ∠EAF = 60° অঙ্কিত হলো।

(ঘ) এখন, AF থেকে AB = a এবং AE থেকে AD = d অংশ কেটে নিই।

(ঙ) B কে কেন্দ্র করে b ও D কে কেন্দ্র করে c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠DAB এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(চ) D,C; B,C যোগ করি; তাহলে ABCD নির্ণেয় চতুর্ভুজ অঙ্কিত হলো।

৪। চিত্র : খ-এ AB = ?



চিত্র-খ

সমাধানঃ

অঙ্কনঃ

C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব AB কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে D দ্বারা চিহ্নিত করি।

AB নির্ণয়ঃ

চিত্রানুসারে,

ΔBCD-এ,

$BD^2+CD^2=CB^2$ [পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে]

বা, $BD^2 = CB^2-CD^2$

বা, $BD^2 = 5^2-3^2$

বা, $BD^2 = 25 - 9$

বা, $BD^2 = 16$

বা, $BD = 4$ cm [বর্গমূল করে]

আবার,

ΔACD-এ,

$AD^2+CD^2=AC^2$ [পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে]

বা, $AD^2 = AC^2-CD^2$

বা, $AD^2 = 12^2-3^2$

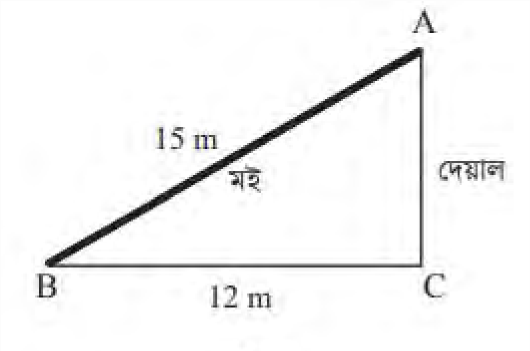
বা, $AD^2 = 144 - 9$

বা, $AD^2 = 135$

বা, $BD = 3\sqrt{15}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore AB = AD+BD = (3\sqrt{15}+4)$ cm

৫। তোমার স্কুলের একটি দেয়াল রঙ করার জন্য যদি 15 m একটি মইকে দেয়াল থেকে 12 m দূরত্বে স্থাপন করা হয় (চিত্র : গ)। তাহলে ভূমি থেকে মইয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা নির্ণয় করো।



চিত্র-গ

সমাধানঃ

চিত্র অনুসারে,

AB = মইয়ের দৈর্ঘ্য = 15m

BC = ভূমির দৈর্ঘ্য = 12m

AC = ভূমি থেকে মইয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা

এখন, AB, BC, AC মিলিত হয়ে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করেছে যেখানে, $\angle BCA = 90°$।

$AB^2 = BC^2+AC^2$

বা, $AC^2 = AB^2-BC^2$

বা, $AC^2 = 15^2-12^2$

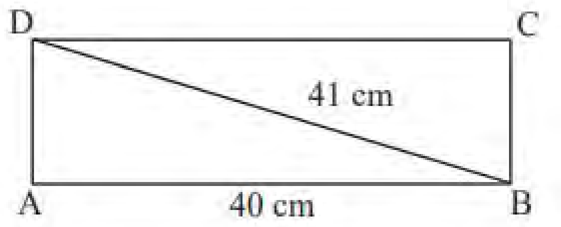
বা, $AC^2= 225-144$

বা, $AC^2 = 81$

বা, $AC = 9$ [বর্গমূল করে]

∴ ভূমি থেকে মইয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা 9m.

৬। চিত্র : ঘ এর আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় করো।



চিত্র : ঘ

সমাধানঃ

চিত্র অনুসারে,

ΔABD-এ,

$BD^2 = AD^2+AB^2$

বা, $AD^2 = BD^2-AB^2$

বা, $AD^2= 41^2-40^2$

বা, $AD^2=1681-1600$

বা, $AD^2 = 81$

বা, $AD = 9$ [বর্গমূল করে]

অর্থাৎ,

আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ = AD = BC = 9 cm;

আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = AB = CD = 40 cm.

∴ আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা

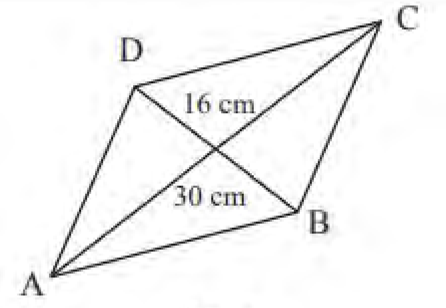
= 2(দৈর্ঘ্য+প্রস্থ) একক

= 2(40+9) cm

= 2×49 cm

= 98 cm

৭। চিত্র : ঙ এর রম্বসের কর্ণ AC = 30 cm. ও BD = 16 cm. হলে রম্বসের পরিধি নির্ণয় করো।



চিত্র : ঙ

সমাধানঃ

আমরা জানি,

রম্বসের কর্ণদ্বয় নিজেদের ছেদবিন্দুতে নিজেদেরকে সমান দৈর্ঘ্যে দ্বিখন্ডিত করে এবং একে অপরের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে।

এখন, AC ও BD এর ছেদবিন্দু O হলে,

$AO = \frac{1}{2}\times30$ cm = 15 cm;

$BO = \frac{1}{2}\times16$ cm = 8 cm;

∴ ΔABO-এ,

$AB^2 = AO^2+OB^2$

বা, $AB^2=15^2+8^2$

বা, $AB^2=225+64$

বা, $AB^2=289$

বা, AB = 17 [বর্গমূল করে]

অর্থাৎ, রম্বসটির বাহুর দৈর্ঘ্য = 17 cm

∴ রম্বসটির পরিধি = 4×17 cm = 68 cm.

৮। যদি (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হয়, তবে (3k, 4k ও 5k) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হবে, যেখানে k যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করো।

সমাধানঃ

যেহেতু (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী সেহেতু, $3^2+4^2=5^2$

এখন, $(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$ এর ক্ষেত্রে k এর জন্য ধণাত্মক ও ঋণাতমক মান ধরে হিসাব করি-

K=1 হলে,

$(3.1)^2+(4.1)^2=(5.1)^2$

বা, $3^2+4^2=5^2$

বা, 9+16=25

বা, 25=25, যা যথার্থ।

আবার,

K=-1 হলে,

$(3.-1)^2+(4.-1)^2=(5.-1)^2$

বা, $(-3)^2+(-4)^2=(-5)^2$, কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

আবার,

K=2 হলে,

$(3.2)^2+(4.2)^2=(5.2)^2$

বা, $6^2+8^2=10^2$

বা, 36+64=100

বা, 100=100 যা যথার্থ।

আবার,

K=-2 হলে,

$(3.-2)^2+(4.-2)^2=(5.-2)^2$

বা, $(-6)^2+(-8)^2=(-10)^2$, কিন্তু সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

অর্থাৎ, k এর মান ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে পারে না কিন্তু সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে পারে [উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করা হলো]

৯। যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক। যে কোনো আকৃতির ত্রিভুজ তৈরি করে বা কাগজ কেটে পরিমাপের মাধ্যমে উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করো।

সমাধানঃ

যেকোনো আকৃতির ত্রিভুজ ABC তৈরি করি এবং AB ও AC এর মধ্যবিন্দু P ও Q সংযুক্ত করি। এখন নিচের সারণিতে বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাণ করে নিম্নোক্ত তথ্যগুলি পূরণ করে প্রদত্ত উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করি।

বাহুর দৈর্ঘ্য	বাহুর দৈর্ঘ্য	অনুপাত
AP = 2.5 cm	BP = 2.5 cm	AP/BP = 1
AQ = 2.5 cm	CE = 2.5 cm	AQ/CE = 1
BC = 4 cm	PQ = 2 cm	BC/PQ = 2

সারণি থেকে পাই,

BP = CQ = 2.5 cm,

∴ BC || PQ

আবার,

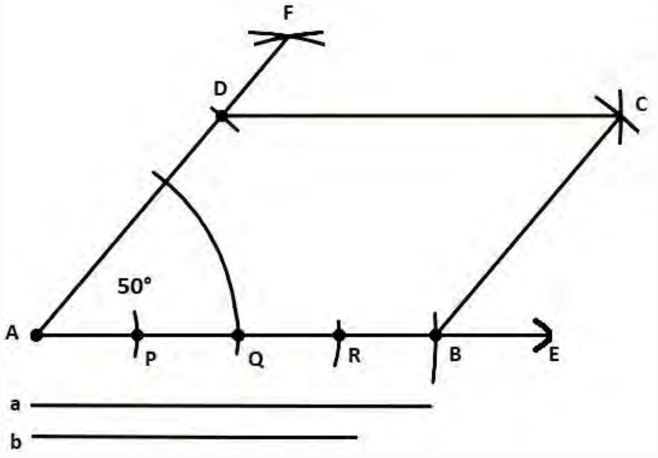
BC/PQ = 2

বা, PQ = ½BC

অর্থাৎ, প্রদত্ত উক্তিটির সত্যতা যাচাই করা হলো।

১০। সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 6 cm ও 5 cm এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50° হলে সামান্তরিকটি অঙ্কন করো।

সমাধানঃ



মনে করি, একটি সামন্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য a = 6 cm ও b=5 cm এবং এই বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50°। সামন্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ

(ক) যেকেনো রশ্মি AE লই।

(খ) A কে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা AE কে P বিন্দুতে ছেদ করে। এবং অনুরুপভাবে AP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে P কে কেন্দ্র করে Q, Q কে কেন্দ্র করে R ছেদ বিন্দু লই।

(গ) Q ও R কে কেন্দ করে AE এর একই দিকে AR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\angle EAF = 50°$ অঙ্কিত হলো।

(ঘ) A, F যোগ করি।

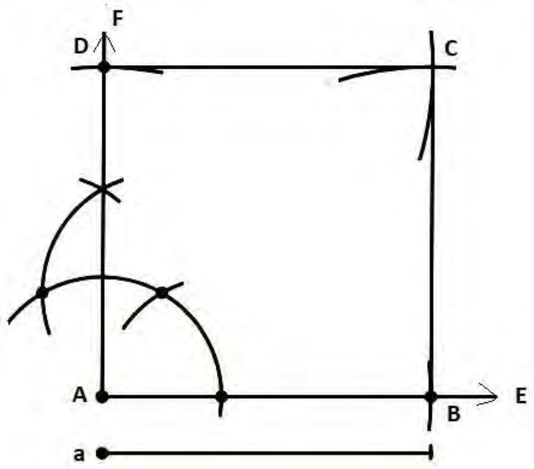
(ঙ) AE থেকে AB = a, AF থেকে AD = b কেটে নিই।

(চ) D কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ ও B কে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়্যে $\angle DAB$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(ছ) D,C ও A,B যোগ করি। তাহলে, ABCD-ই নির্ণেয় সামন্তরিক।

১১। একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 cm হলে বর্গটি অঙ্কন করো।

সমাধানঃ



মনে করি একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a = 5 cm দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

অংকনঃ

(ক) যেকোনো রশ্মি AE নিই।

(খ) AE থেকে AB = a কেটে নিই।

(গ) A বিন্দুতে AF লম্ব আঁকি এবং AF থেকে AD=a কেটে নিই।

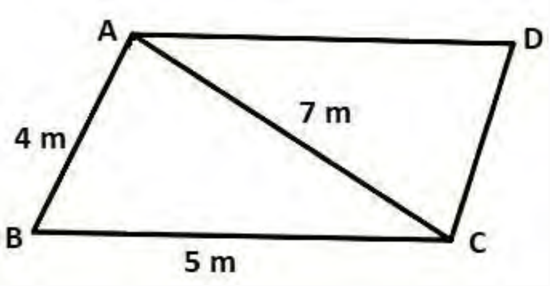
(ঘ) B ও D কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle DAB$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি যারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

(ঙ) D,C ও B,C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই নির্ণেয় বর্গ।

১২. একটি সামান্তরিক আকৃতির জমির দুটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 4 m ও 5 m এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 m। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত গাণিতিক প্রশ্ন অনুসারে নিম্নোক্ত মডেল চিত্রটি অঙ্কন করি-



চিত্র অনুসারে,

ΔABC-এ

পরিসীমা = $(4+5+7)$ m = 16 m;

$\therefore$ অর্ধ-পরিসীমা, $s = {}^{16}/_{2}$ m = 8 m;

এবং, তিনটি বাহু a, b, c এর মান যথাক্রমে 4m, 5m, 7m;

$\therefore \Delta ABC$-এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}}$ বর্গ একক

$= \sqrt{\{8(8-4)(8-5)(8-7)\}}\ m^2$

$= \sqrt{(8\times4\times3\times1)}\ m^2$

$= \sqrt{96}\ m^2$

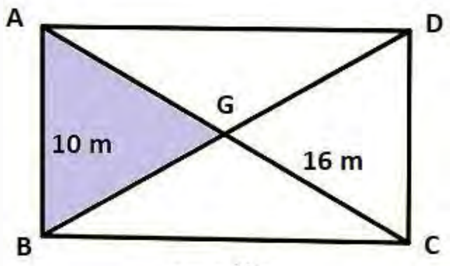
এখন, সামন্তরিকের যেকোনো কর্ণ সামন্তরিকটিকে দুইটি সমান ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

$\therefore$ সামন্তরিকটির ক্ষেত্রফল $= 2\times\sqrt{96}\ m^2 = 19.5959\ m^2$ (প্রায়)

১৩। ABCD আয়তাকার জমির AB = 10 m এবং কর্ণ AC = 16 m । কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু G হলে ΔAGB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধানঃ

প্রদত্ত প্রশ্নের একটি গাণিতিক মডেল চিত্র অঙ্কন করি যা নিম্নরুপঃ



মডেল চিত্র

চিত্র বা শর্ত অনুসারে,

আয়তাকার জমির কর্ণ = AC = BD = 16 m [যেহেতু আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমান];

এবং AG = BG = $^{16}/_{2}$ m = 8 m [যেহেতু আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় একে আপরকে সমদ্বিখন্ডিত করে];

∴ ΔAGB-এর ক্ষেত্রে,

তিনটি বাহু a, b, c এর দৈর্ঘ্য = 10m, 8m, 8m;

পরিসীমা = (10+8+8) m = 26 m;

∴ অর্ধ-পরিসীমা, s = $^{26}/_{2}$ m = 13 m;

∴ ΔAGB-এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

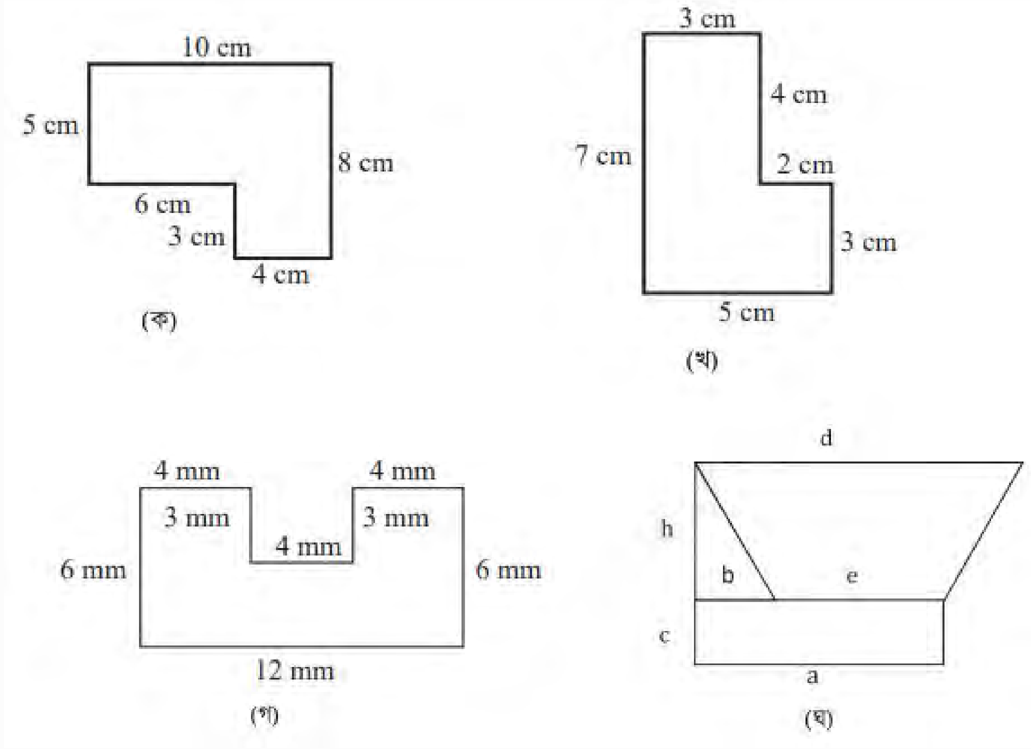
$= \sqrt{13(13-10)(13-8)(13-8)}\ m^2$

$= \sqrt{13\times3\times5\times5}\ m^2$

$= \sqrt{975}\ m^2$

$= 31.22499\ m^2$

১৪। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো:



সমাধানঃ

(ক)

ক-আকৃতিকে আমরা দুইটি অংশে বিভক্ত করি-

তাহলে,

ক-আকৃতির ক্ষেত্রফল

= ১ম আয়তের ক্ষেত্রফল + ২য় আয়তের ক্ষেত্রফল

= $6cm \times 5cm + 8cm \times 4cm$

= $30cm^2 + 32cm^2$

= $62cm^2$

(খ)

খ-আকৃতিকে আমরা দুইটি অংশে বিভক্ত করি-

তাহলে,

খ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

= ১ম আয়তের ক্ষেত্রফল + ২য় আয়তের ক্ষেত্রফল

= $7cm \times 3cm + 2cm \times 3cm$

= $21cm^2 + 6cm^2$

= $27cm^2$

(গ)

গ-আকৃতিকে আমরা তিনটি অংশে বিভক্ত করি-

তাহলে,

গ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

= ১ম আয়তের ক্ষেত্রফল + ২য় আয়তের ক্ষেত্রফল + ৩য় আয়তের ক্ষেত্রফল

= $4cm \times 3cm + 4cm \times 3cm + 12cm \times 3cm$

= $12cm^2 + 12cm^2 + 36cm^2$

= $60cm^2$

(ঘ)

ঘ-আকৃতিকে আমরা তিনটি অংশে বিভক্ত করি-

তাহলে,

ঘ-আকৃতির ক্ষেত্রফল

= ১ম ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল + ২য় ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল + ৩য় আয়তের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times b \times h + \frac{1}{2}(d+e)h + a \times c$

$= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}dh + \frac{1}{2}eh + ac$

$= \frac{1}{2}h(b+d+e) + ac$