দৈনন্দিন কাজে বাস্তব সংখ্যা

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- বর্গসংখ্যার বর্গমূল এবং ঘনসংখ্যার ঘনমূল
- পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল ও ঘনমূল
- বর্গমূল ও ঘনমূলের গাণিতিক বৈশিষ্ট্য
- ভগ্নাংশের বর্গমূল
- বর্গমূল ও ঘনমূলের সরলীকরণ
- সংখ্যারেখায় বর্গমূল সংখ্যার অবস্থান
- ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে বর্গমূল ও ঘনমূলের আসন্নমান
- বর্গমূল ও ঘনমূলের ব্যবহার

দৈনন্দিন কাজে বাস্তব সংখ্যা

প্রতিদিন নানা কাজে আমরা বিভিন্ন রকম সংখ্যা ব্যবহার করি। তোমার শ্রেণিতে বা শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে কতজন শিক্ষার্থী আছে? শ্রেণিকক্ষে কতগুলো জানালা আছে? এই ধরনের গণনার সঙ্গে পূর্ণসংখ্যা সম্পর্কিত থাকে। আবার উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি পরিমাপে অধিকাংশ ক্ষেত্রে ভগ্নাংশ বা দশমিক চলে আসে। কখনো অনেক বিশাল সংখ্যা হলে সূচকের মাধ্যমেও প্রকাশ করা হয়। তোমরা ভগ্নাংশ, দশমিক এবং সূচকের সঙ্গে আগেই পরিচিত আছ। যেমন, $\frac{১}{২}$, $\frac{২}{৩}$, $\frac{৫}{৪}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশ আকার। আবার ০.২৫, ৩.৩৩, ৫.২৫৫৫...দশমিক আকার এবং $৪^{১০}$ সূচক আকার। এই ধরনের সংখ্যা মূলদ সংখ্যা। এছাড়া অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও রয়েছে। এ অভিজ্ঞতায় আমরা মূলদ সংখ্যা ছাড়াও অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে পরিচিত হব। বাস্তব জীবনে ব্যবহৃত এই সকল সংখ্যাকে আমরা বাস্তব সংখ্যা (real number) বলি। এই শিখন অভিজ্ঞতায় আমরা বিভিন্ন রকম বাস্তব সংখ্যা ও তাদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানব।

ভাগাভাগির খেলা

সংখ্যার ভাগ আমাদের দৈনন্দিন কাজের সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত। যেমন, ৬টি রুটি ২ জনে ভাগ করে খাওয়া, ১০০ টাকা ৫ জনে ভাগ করে নেওয়া, ২বিঘা জমি ৩ ভাই-বোনের মধ্যে ভাগ করা, ইত্যাদি। এসব ভাগের ক্ষেত্রে আমরা কখনো সহজেই করতে পারি আবার কখনো বেশ সমস্যায় পড়তে হয়। একটি অভিজ্ঞতার মাধ্যমে আমরা বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করব। মনে করো, তোমরা বন্ধুরা মিলে টিফিনের সময় দোকান থেকে খাবার কিনে একসঙ্গে খাও এবং সমান ভাগে বিল পরিশোধ করো। বিভিন্ন দিনে বন্ধুদের সংখ্যা এবং খাবারের খরচ নিচে দেওয়া হলো। ছক ২.১ পূরণ করো।

ছক ২.১			
বন্ধুদের সংখ্যা	খাবারের খরচ (টাকা)	প্রতিজনের খরচ (টাকা) ভগ্নাংশে	প্রতিজনের খরচ (টাকা) দশমিকে
২	২০		
৪	৪২	$\frac{৪২}{৪}$	
৪	৪১		
৫	৫৪		১০.৮০
৩	৩২		১০.৬৬৬৬ ...
৩	৪২		
৬	৫৫		
৭	৬০		

উপরের ছকটি পূরণ করতে গিয়ে তোমরা কী পর্যবেক্ষণ করলে তা নিচে লিখে রাখো।

সসীম এবং অসীম দশমিক সংখ্যা (Finite and Infinite Decimal Number)

ভাগাভাগির খেলাতে তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ, ভগ্নাংশ থেকে দশমিকে রূপান্তর করার সময় কখনো পূর্ণসংখ্যা হয়েছে, কখনো দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয়েছে, আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক শেষই হচ্ছে না। যে সব সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয়ে যায় তাকে **সসীম দশমিক সংখ্যা** বলে। যে সব সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয় না, তাকে **অসীম দশমিক সংখ্যা** বলে। কোনো অসীম দশমিক সংখ্যার দশমিক প্রকাশে দশমিকের পরে এক বা একাধিক অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে তাকে আবৃত্ত বা **পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ** (recurring or repeating decimal) বলে। পৌনঃপুনিক দশমিকে অসীম পর্যন্ত লেখা সম্ভব নয়, তাই যে অংশের পুনরাবৃত্তি হচ্ছে তার উপরে "$-$" বা "$\dot{}$" দিয়ে প্রকাশ করা হয়। "$-$" ব্যবহারের ক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তি হওয়া সবকটি অঙ্কের উপর "$-$" দেওয়া হয়। "$\dot{}$" ব্যবহারের ক্ষেত্রে এক বা দুইটি অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে প্রতিটি অঙ্কের উপরেই "$\dot{}$" ব্যবহার করা হয়। তবে একাধিক অঙ্কের পুনরাবৃত্তির ক্ষেত্রে শুধু পুনরাবৃত্ত অঙ্কগুলোর প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর "$\dot{}$" দেওয়া হয়। যেমন–

$৩৩.৩৩৩\ldots = ৩৩.\dot{৩} = ৩৩.\overline{৩}$,

$১.২৭২৭\ldots = ১.\overline{২৭} = ১.\dot{২}\dot{৭}$,

$০.৩৪৫৩৪৫\ldots = ০.\overline{৩৪৫} = ০.\dot{৩}৪\dot{৫}$

মূলদ সংখ্যা (Rational Number)

তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ, ভগ্নাংশকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ ভগ্নাংশ দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত। যে সকল সংখ্যাকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়, শুধু তাদেরকেই আমরা মূলদ সংখ্যা বলি। ভগ্নাংশে লব ও হর থাকে। এখানে p লব এবং q হর। হরে ০ (শূন্য) হতে পারে না কারণ হর যদি ০ হয়, তাহলে শূন্য দিয়ে ভাগ করতে হয়। আর সেক্ষেত্রে তোমরা সংখ্যারেখায় ভাগের ধারণা ব্যবহার করে দেখতে পাবে সেই অনুপাতের মান অসংজ্ঞায়িত হয়ে যায়।

সুতরাং,

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $(q \neq 0)$ তাদেরকেই শুধু আমরা **মূলদ সংখ্যা** (rational number) বলি।

একক কাজ

শূন্য (০) কি মূলদ সংখ্যা? মূলদ সংখ্যা হলে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

যে কোনো পূর্ণসংখ্যা কি মূলদ সংখ্যা? মূলদ সংখ্যা হলে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

সসীম দশমিক সংখ্যা কি মূলদ সংখ্যা? ০.২১ এবং ২.০১ সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

এবার বলো তো, পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাকে কি ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়? এসো চেষ্টা করে দেখি। এখানে আমরা অজানা রাশির একটুখানি ব্যবহার শিখব।

সমস্যা : $০.\dot{৩} = ০.৩৩৩...$ সংখ্যাটিকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করো।

সমাধান : ধরি, ক = ০.৩৩৩...। তাহলে, ১০ক = ৩.৩৩৩... (উভয় পার্শ্বে ১০ দ্বারা গুণ করে)।

এখন, ১০ক থেকে ক বিয়োগ করে পাই,

$$
\begin{array}{r}
১০\text{ ক} = ৩.৩৩৩... \\
\text{ক} = ০.৩৩৩... \\
\hline
৯\text{ক} = ৩
\end{array}
$$

অর্থাৎ

$$\text{ক} = \frac{৩}{৯} = \frac{১}{৩}$$

সুতরাং, $০.৩৩৩... = \frac{১}{৩}$

শূন্য(০), সকল পূর্ণসংখ্যা, সসীম দশমিক সংখ্যা এবং পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা মূলদ সংখ্যা।

☞ এখানে একটি বিষয় লক্ষ রাখতে হবে যে, যেহেতু পূর্ণসংখ্যা ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হতে পারে, সুতরাং মূলদ সংখ্যাও ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হতে পারে।

একক কাজ

১. নিচের দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করো :

০.৬৬৬ ..., ০.৪৭৭৭ ..., ১.৯৯৯ ..., $১.\overline{২৭}$, $০.২\overline{৩৫}$, $৩.০\dot{৯}$, $২.\dot{৩}\dot{৪}$, $০.\dot{১}২৩\dot{৪}$

২. নিচের ভগ্নাংশগুলোকে দশমিক ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করে কোনো প্যাটার্ন খুঁজে পাও কি না বের করো। এরপর প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত দশমিক ভগ্নাংশকে উপরে দেখানো বিভিন্ন কৌশল বা সেগুলোর সমন্বয়ে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করে যাচাই করো।

$\frac{২}{৩}$, $\frac{৬১}{৯০}$, $\frac{১২}{১৩}$, $২\frac{৩৪}{৯৯}$

আসন্নমান (Approximate Value)

তোমরা তিন বন্ধু মিলে ১০০ টাকা সমান ভাগে ভাগ করে নিতে চাইছ। ভাগ করে দেখ, তুমি ক্লান্ত হয়ে যাবে কিন্তু ভাগ প্রক্রিয়া শেষ হবে না। এই ধরনের কাজ করার জন্য মানুষ নানারকম যন্ত্র আবিষ্কার করেছে। এই ধরনের যন্ত্র আমাদের নানা সমস্যায় সাহায্যকারী বন্ধুর মতো কাজ করে। নানারকম হিসাব-নিকাশের কষ্ট কমানোর জন্য মানুষ বিভিন্ন ধরনের ক্যালকুলেটর, কম্পিউটার বা অন্য কোনো ডিজিটাল ডিভাইস তৈরি করেছে। তোমার কাছে থাকা এরকম কোনো ডিজিটাল ডিভাইসের মাধ্যমে ১০০ কে ৩ দ্বারা ভাগ করো। **সবরকম গণনাযন্ত্র বা ডিজিটাল ডিভাইসে কি একই ভাগফল দেখতে পাচ্ছ?** নিশ্চয়ই না। আর ১০০কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল একটাই আসার কথা। তাহলে কোনটা ঠিক আর কোনটা ভুল? কোনো ডিভাইস কিন্তু “১০০ কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল” কে সাধারণ ভগ্নাংশ $\frac{১০০}{৩}$ আকারেই দেখায়। সেক্ষেত্রে সেটা ঠিকই আছে। কিন্তু ভাগ করতে গিয়ে তুমি দেখেছ যে $\frac{১০০}{৩}$ এর মানের ক্ষেত্রে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক শেষই হচ্ছে না, বারবারই ৩ আসছে। কিন্তু ডিজিটাল ডিভাইসগুলো দশমিকের পর নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক পর্যন্তই দেখাতে পারে। কোনো ডিজিটাল ডিভাইসই তাদের নির্দিষ্ট সীমার বাইরে সংখ্যা দেখাতে পারে না। তাই যখনই কোনো ডিজিটাল ডিভাইসে $\frac{১০০}{৩}$ এর মান দশমিক ভগ্নাংশে দেখানো হবে সেটা ওই নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক পর্যন্তই দেখিয়ে শেষ হয়ে যাবে।

তবে যদি ১০০ কে ৩-এর পরিবর্তে ১৬ দিয়ে ভাগ করা হতো তাহলে ভাগফল হতো $\frac{১০০}{১৬} = ৬.২৫$, এখানে দশমিক বিন্দুর পর মাত্র ২টি অঙ্ক আছে এরপর আর নেই, অর্থাৎ সংখ্যাটিতে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা শেষ হচ্ছে। এ ক্ষেত্রে ডিজিটাল ডিভাইসগুলোতেই ৬.২৫ অর্থাৎ, একেবারে সঠিক মানই দেখাত।

এবার মনে করো, কোনো ডিজিটাল ডিভাইস $\frac{১০০}{৩}$ এর মান দশমিক বিন্দুর পর ১ কোটি অঙ্ক পর্যন্ত দেখাতে পারে। তবুও কিন্তু সেটা সসীম দশমিক সংখ্যাই দেখাবে। আর সেটা কখনোই $\frac{১০০}{৩}$ এর সত্যিকারের মানের (৩৩.৩৩৩..., যা একটি অসীম দশমিক সংখ্যা) সমান হবে না। তারমানে কোনো ডিজিটাল ডিভাইস $\frac{১০০}{৩}$ এর কখনো সঠিক মান দিতে পারে না।

আচ্ছা, অসীম দশমিকের গণনার ক্ষেত্রে এই সীমাবদ্ধতার ব্যাপারটা বোঝার পর তুমি কি ডিজিটাল ডিভাইস নামের এই সাহায্যকারী বন্ধুদেরকে সবসময় ভরসা করবে? নাকি মোটেও ব্যবহার করবে না? তাহলে বিশাল বিশাল যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করতেও অনেক কষ্ট হবে। কী করা যায় বলো তো?

আমরা শুরুতেই বলেছি ডিজিটাল ডিভাইসগুলো তোমার বন্ধুর মতো নানা কাজে সাহায্য করে। তবে তুমি নিজে ভেবে দেখবে যে কাজটা ঠিক হচ্ছে কি না। একইভাবে, ডিজিটাল ডিভাইসগুলোও সবক্ষেত্রে একেবারে সঠিক উত্তর দিতে পারে না, কাছাকাছি উত্তর দেয় যাকে আমরা **আসন্নমান (approximate value)** বলে থাকি। এটা ডিজিটাল ডিভাইসের সীমাবদ্ধতা।

সমতুল মূলদ সংখ্যা

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে ধনাত্মক ভগ্নাংশের সমতুল্যতা নিয়ে আলোচনা করেছি। এখানে আমরা ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয় ভগ্নাংশের সমতুল্যতা নিয়ে আলোচনা করব। চলো এবার নিচের মূলদ সংখ্যাগুলোর দিকে লক্ষ করি।

$$-\frac{৩}{৪}, \quad -\frac{৬}{৮}, \quad -\frac{৭৫}{১০০}, \quad -০.৭৫$$

এই সংখ্যাগুলো কি আলাদা? সাধারণ ভগ্নাংশ আর দশমিক ভগ্নাংশের ধারণা ব্যবহার করে যাচাই করে দেখো তো। আমার জানা একটি বুদ্ধি আছে।

দুটি মূলদ সংখ্যা $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ সমান হবে, অর্থাৎ

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হবে, যদি $ad = bc$ হয়।

মূলদ সংখ্যার এই বৈশিষ্ট্যকে সমতুল্য বৈশিষ্ট্য বলে। নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে, সংখ্যাগুলোর প্রতিটি একই সংখ্যাকে নির্দেশ করে। তারমানে এই সবকটি সংখ্যার মান সমান। অর্থাৎ,

$$-\frac{৩}{৪} = -\frac{৬}{৮} = -\frac{৭৫}{১০০} = -০.৭৫,$$

এই সংখ্যাগুলোর একটি অন্যটির সমতুল মূলদ সংখ্যা।

একক কাজ

সমতুল বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে নিচের সমান ভগ্নাংশগুলো নির্ণয় করো।

$\frac{২}{৩}, \quad -\frac{৩}{২}, \quad \frac{৬}{৯}, \quad \frac{১৬}{২৪}, \quad -\frac{১৫}{১০}, \quad -\frac{৫}{১৫}.$

একটি মূলদ সংখ্যার অসংখ্য সমতুল মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়। লব ও হর উভয়কে ০ ব্যতীত অন্য যে কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ করে সমতুল মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়।

যেকোনো মূলদ সংখ্যা $\frac{a}{b}$ এর জন্য,

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \ (x \neq 0)$$

এবং $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

এই বৈশিষ্ট্যকে মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য বলে। সুতরাং, প্রতিটি মূলদ সংখ্যার অসীম সংখ্যক সমতুল মূলদ সংখ্যা আছে।

$$-\frac{৩}{৪}, -\frac{৬}{৮}, -\frac{৭৫}{১০০}, -০.৭৫, - - -$$

এই সংখ্যা গুলোর আরেকটি বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এগুলোর বামপাশে ঋণাত্মক চিহ্ন (–) আছে। তার মানে এই সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং মূলদ সংখ্যা, অর্থাৎ ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা।

মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা সাধারণ ভগ্নাংশকে সরল করতে পারি। এক্ষেত্রে হর ও লব উভয়কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করতে হয়। যেমন–

$$\frac{৩০}{৩৬} = \frac{২\times৩\times৫}{২\times২\times৩\times৩} = \frac{৫}{৬}$$

একক কাজ

মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে নিচের ভগ্নাংশগুলো সরল করো।

$\frac{১২}{৩২}, \quad -\frac{৬৩}{৪২}, \quad \frac{৩৬}{১০৯}, \quad \frac{১০৬}{১৫৯}, \quad -\frac{৭৫}{১৫০}, \quad -\frac{৩৯}{৬৫}$

জোড়ায় কাজ

জোড়ার প্রত্যেকে একটি কাগজে দুইটি করে সমতুল মূলদ সংখ্যা লেখো এবং একে অন্যের লেখা যাচাই করো।

বর্গমূল (Square Root)

বাগান করতে তোমাদের অনেকের শখ আছে। কারো ফুলের বাগানের শখ, কারো সবজির বাগান করতে ইচ্ছা হয়। আবার কারো ফলের বাগানের শখ। অনেকের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে খালি জায়গা আছে। আবার কারো বাড়ির আঙিনায় বা দেয়াল ঘেরা ছাদে খালি জায়গা আছে। ধরো, তোমাকে একটা বর্গাকার বাগান করতে জায়গা দেওয়া হলো যার ক্ষেত্রফল ১৬ বর্গ একক। তাহলে বলো তো, তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য কত হবে? তুমি অবশ্যই বলবে, দৈর্ঘ্য ৪ একক। কারণ–

আমরা জানি, একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দৈর্ঘ্যের বর্গের সমান। অর্থাৎ দৈর্ঘ্যে ৪ একক হলে,

ক্ষেত্রফল = ৪ এর বর্গ = $৪^২ = ৪ \times ৪ =$ ১৬ বর্গ একক। এখানে ৪ কে ১৬ এর বর্গমূল বলে এবং ৪ কে লেখা হয় $\sqrt{১৬}$, অর্থাৎ,

$$৪ = \sqrt{১৬}$$

এবার বলো তো, আর কি কোনো সংখ্যা আছে যাকে বর্গ করলে ১৬ হয়? তোমার উত্তর নিচে লিখে রাখো।

তোমাদের শুধু একটুখানি স্মরণ করিয়ে দিতে চাই যে, তোমরা আগের শ্রেণিতে ঋণাত্মক সংখ্যার গুণ শিখেছ। গাণিতিক প্রয়োজনে আমাদের ঋণাত্মক সংখ্যার ব্যবহারও জানতে হবে। দেখ,

$$-৪ \text{ এর বর্গ} = ১৬$$

তাহলে, –৪ ও কি ১৬ এর বর্গমূল হবে? হ্যাঁ, ৪ এর মতোই –৪, ১৬ এর একটি বর্গমূল। তাহলে, ১৬ এর বর্গমূল হচ্ছে ২টি। একটি ৪ এবং অন্যটি –৪। তবে,

$$-৪ \neq \sqrt{১৬}$$

এখানে $\sqrt{}$ শুধু ধনাত্মক বর্গমূলকেই নির্দেশ করে। অর্থাৎ,

$$\sqrt{১৬} = ৪$$

তাহলে,

$$-৪ = -\sqrt{১৬}$$

কোনো সংখ্যার ধনাত্মক বর্গমূলকে ঐ সংখ্যার উপর $\sqrt{}$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং একে **প্রধান বর্গমূল** (principal square root) বলে। অন্য মূলটিকে ঐ সংখ্যার উপর $-\sqrt{}$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ,

$$৪ = \sqrt{১৬} \qquad \text{এবং } -৪ = -\sqrt{১৬}.$$

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

চলকের মাধ্যমে আমরা বলতে পারি, একটি সংখ্যা a, অন্য একটি অঋণাত্মক সংখ্যা b-এর একটি বর্গমূল হবে যদি $a^2 = b$ হয়। এখানে b কে a-এর বর্গ বলে এবং a কে b-এর বর্গমূল বলে। যদি a ধনাত্মক হয়, তবে

$$a = \sqrt{b}$$

যেহেতু যে কোনো সংখ্যার বর্গ ০ অথবা একটি ধনাত্মক সংখ্যা, সুতরাং ০ এবং যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আছে। ০ এর বর্গমূল ০ । অর্থাৎ $\sqrt{০} = ০$। অন্য যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার ২টি বর্গমূল আছে। একটি ধনাত্মক অপরটি **ঋণাত্মক। এবার বলো তো, কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল পাওয়া যাবে কি? তোমার উত্তর যুক্তিসহ নিচে লিখে রাখো।**

পূর্ণবর্গ সংখ্যার প্রধান বর্গমূল

তোমরা কি বলতে পারবে ২ এর বর্গ সংখ্যার $\sqrt{}$ কত? নিচে লিখে রাখো।

এবার বলো তো –২ এর বর্গ সংখ্যার $\sqrt{}$ কত? বুঝতেই পারছো, $\sqrt{(-২)^২} = \sqrt{৪} = ২$.

তাহলে, সংখ্যারাশিকে বিমূর্ত রাশির মাধ্যমে আমরা লিখতে পারি,

a বাস্তব সংখ্যা হলে, $\sqrt{a^২} = |a|$

এখানে, $|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0. \end{cases}$

$|a|$ কে a-এর **পরম মান** বলে।

পরম মানের সূত্র অনুযায়ী,

|২| = ২ এবং |−২| = −(−২) = ২.

অমূলদ সংখ্যার খোঁজে

এবার ধরো, তোমাকে একটা বর্গাকার বাগান করতে জায়গা দেওয়া হলো যার ক্ষেত্রফল ১৫ বর্গ একক। তাহলে বলো তো, তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য কত হবে? তুমি অবশ্যই বলবে, দৈর্ঘ্য $\sqrt{১৫}$ একক। এখন প্রশ্ন হলো, $\sqrt{১৫}$ কি মূলদ সংখ্যা? অর্থাৎ $\sqrt{১৫}$ কে কি $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়? এই প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে আমাদেরকে একটু পিথাগোরাসের যুগে যেতে হবে। চলো ঘুরে আসি পিথাগোরাসের যুগে।

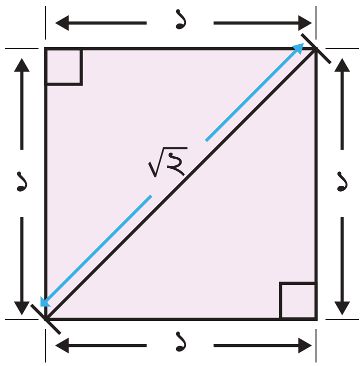
(Hippasus)

গ্রিসের গণিতবিদ পিথাগোরাসের অনুসারী হিপ্পাসাসের মাথায় একদিন প্রশ্ন জাগে যে, একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ১ একক (১ মিটার, ১ সেমি, ১ ইঞ্চি যা ইচ্ছে হতে পারে) হলে সেই বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত একক? যেহেতু বর্গকে কর্ণ বরাবর কেটে অর্ধেক করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাই যার উচ্চতা ও ভূমি পরস্পর

সমান। তাহলে, প্রশ্নটা এভাবেও বলা যেতে পারে, ১ একক দৈর্ঘ্যের একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?

পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

(অতিভুজের দৈর্ঘ্য)^২ = (ভূমির দৈর্ঘ্য)^২ + (উচ্চতার দৈর্ঘ্য)^২



অর্থাৎ, অতিভুজের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{ভূমির দৈর্ঘ্য})^২ + (\text{উচ্চতার দৈর্ঘ্য})^২} = \sqrt{১^২ + ১^২}$ একক $= \sqrt{২}$ একক

আর এই দৈর্ঘ্য কি মূলদ হবে? হিপ্পাসাসের দাবি ছিল যে এটি মূলদ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ $\sqrt{২}$ কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না এবং তিনি সেটি প্রমাণও করেছিলেন। হিপ্পাসাসের এই প্রমাণের মাধ্যমে $\sqrt{২}$ এর মতো 'মূলদ নয়' এমন একটি সংখ্যার ব্যাপারে মানুষ প্রথম জানতে পারে। তোমরা প্রমাণের বিষয়ে উপরের শ্রেণিতে জানতে পারবে। এই ধরনের সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলে। $\sqrt{২}$ এর মতো তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য $\sqrt{১৫}$ ও একটি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু তোমরা দেখতেই পাচ্ছ, এই সংখ্যাগুলো বাস্তব সমস্যা থেকে এসেছে। সুতরাং এরা বাস্তব সংখ্যা। এ ধরনের সংখ্যার মান কত এবং কীভাবে পরিমাপ করা যায় সেটি জানা আমাদের দরকার।

উল্লেখ্য যে স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে যারা পূর্ণবর্গ শুধু তাদের বর্গমূল মূলদ সংখ্যা এবং যারা পূর্ণবর্গ নয় তাদের বর্গমূল অমূলদ সংখ্যা।

সাধারণভাবে বলা যায় যে, বাস্তব সংখ্যার জগত থেকে সকল মূলদ সংখ্যা সরিয়ে নিলে যা অবশিষ্ট থাকবে তা-ই হলো অমূলদ সংখ্যা।

সংখ্যার বর্গমূলের মান ও পরিমাপ

পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূলের মান কীভাবে বের করতে হয় তা আমরা শিখেছি। পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূলের মান একটি পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে তার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। তখন আমরা কীভাবে তার মান বের করব? **চলো $\sqrt{২}$ এর মান ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে** নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।

	১. ৪ ১ ৪ ২
১	০২.০০ ০০ ০০ ০০...
১ x ১	-১
২৪	১০০
২৪ x ৪	-৯৬
২৮১	৪০০
২৮১ x ১	-২৮১
২৮২৪	১১৯০০
২৮২৪ x ৪	-১১২৯৬
২৮২৮২	৬০৪০০
২৮২৮২ x ২	-৫৬৫৬৪
	৩৮৩৬...

ছক-২.২

যেমন– চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানের ক্ষেত্রে সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পর কমপক্ষে ৮টি অঙ্ক নিব। এক্ষেত্রে প্রয়োজনমতো ডানদিকে ০ (শূন্য) বসিয়ে নিব। ছক-২.২-এ $\sqrt{২}$ এর **মান ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে** ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা হয়েছে।

একক কাজ

১. **ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে** $\sqrt{২}$ এর **মান** ৬ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

২. ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\sqrt{২}$ এর **মান বের করো এবং** ৬ দশমিক স্থান পর্যন্ত তোমার বের করা মানের সঙ্গে মিলিয়ে নাও। কোনো পার্থক্য আছে কি? পার্থক্য থাকলে ভুল সংশোধন করো।

৩. **ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে** $\sqrt{১৫}$ এর **মান** ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

৪. ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\sqrt{১৫}$ এর **মান বের করো এবং** ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত তোমার বের করা মানের সঙ্গে মিলিয়ে নাও। কোনো পার্থক্য আছে কি? পার্থক্য থাকলে ভুল সংশোধন করো।

৫. ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে পূর্ণবর্গ নয় এমন আরও ৫টি সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো।

প্রধান বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য

বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূলের সরলীকরণ করতে পারি। বর্গমূলের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য এখানে দেওয়া হলো।

শূন্য বা শূন্যের চেয়ে বড়ো যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা a এবং b হলে,

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a, \qquad (-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a, \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

উদাহরণ: $\sqrt{৩৬} = \sqrt{২ \times ২ \times ৩ \times ৩} = \sqrt{২ \times ২}\sqrt{৩ \times ৩} = (\sqrt{২}\sqrt{২})(\sqrt{৩}\sqrt{৩}) = ২ \times ৩ = ৬$

সাধারণ ভগ্নাংশের প্রধান বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য

যদি a শূন্য বা যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং b যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

উদাহরণ : $\frac{৯}{১৬}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান: উপরের বৈশিষ্ট্য থেকে আমরা লিখতে পারি, $\sqrt{\frac{৯}{১৬}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{১৬}} = \frac{\sqrt{৩ \times ৩}}{\sqrt{৪ \times ৪}} = \frac{\sqrt{৩}\sqrt{৩}}{\sqrt{৪}\sqrt{৪}} = \frac{৩}{৪}$

তাহলে, $\frac{৯}{১৬}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩}{৪}$

উদাহরণ : $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{\frac{২৭}{৪৮}} = \sqrt{\frac{৩ \times ৯}{৩ \times ১৬}} = \sqrt{\frac{৯}{১৬}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{১৬}} = \frac{৩}{৪}$

অর্থাৎ $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩}{৪}$

এখানে লক্ষ করো, $\frac{৯}{১৬}$ এর লব ও হর উভয়েই পূর্ণবর্গ। আবার $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বেলায় লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করার পরে লব ও হর উভয়েই পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়েছে। এরূপ ভগ্নাংশকে **পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ** বলে।

উদাহরণ : $\frac{৯}{৩২}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{\frac{৯}{৩২}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{৩২}} = \frac{\sqrt{৩\times৩}}{\sqrt{২\times২\times২\times২\times২}} = \frac{৩}{৪\times\sqrt{২}} = \frac{৩\times\sqrt{২}}{৪\times\sqrt{২}\times\sqrt{২}} = \frac{৩\times\sqrt{২}}{৪\times২} = \frac{৩\sqrt{২}}{৮}$,

অর্থাৎ, $\frac{৯}{৩২}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩\sqrt{২}}{৮}$

এখানে লক্ষ করো, $\frac{৯}{৩২}$ এর লব $=$ ৯ পূর্ণবর্গ হলেও হর $=$ ৩২ পূর্ণবর্গ নয়। আবার, লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করাও সম্ভব নয়। তাই, $\frac{৯}{৩২}$ পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ নয়।

একক কাজ

উপরের পদ্ধতিতে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\frac{৩২}{৫০}, \frac{৪১}{৪৪১}, \frac{১০৮৯}{১২১}$ এই সাধারণ ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করে পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ কি না তা চিহ্নিত করো এবং উভয় পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ফলাফল তুলনা করে মতামত দাও।

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয়

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের নানা পদ্ধতি এবং দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করে কীভাবে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের সহজ কৌশল পাওয়া যায় সে-সম্পর্কে জেনেছ। এই কৌশলগুলোর সমন্বয়ে আমরা দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করতে পারি।

উদাহরণ: ১.২ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{১.২} = \sqrt{\frac{১২}{১০}} = \frac{\sqrt{৬}}{\sqrt{৫}} = \frac{\sqrt{৬}\sqrt{৫}}{\sqrt{৫}\sqrt{৫}} = \frac{\sqrt{৩০}}{৫}$

এবার ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $\sqrt{৩০}$ এর মান দশমিকে বের করে ৫ দ্বারা ভাগ করে $\sqrt{১.২}$ এর মান দশমিকে পাওয়া যাবে।

একক কাজ

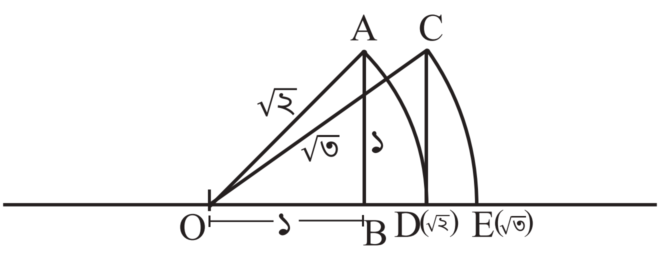
উপরের পদ্ধতিতে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে ০.২৫, ০.০০০১, ১০.২৪ এই দশমিক ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করো এবং উভয় পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ফলাফল তুলনা করে মতামত দাও।

সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যার অবস্থান

পূর্বে সংখ্যারেখা সম্পর্কে জেনেছ। পিথাগোরাসের সূত্র সম্পর্কেও জেনেছ। এখন আমরা সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যার অবস্থান সম্পর্কে আলোচনা করব।

সংখ্যারেখায় $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt{৩}$ এর অবস্থান নির্ণয়

সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু O থেকে ডানে ১ একক দূরে B বিন্দু নেই এবং B বিন্দু থেকে লম্বভাবে ১ একক দূরে A বিন্দু নেই। এবার বলো তো OA এর দূরত্ব কত? পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী,



চিত্র-২.২

$OA = \sqrt{১^২ + ১^২} = \sqrt{২}$

এখন O বিন্দু হতে ডানদিকে OA এর সমান করে সংখ্যারেখায় একটি বিন্দু D নেই। তাহলে D বিন্দুই সংখ্যারেখায় $\sqrt{২}$ এর অবস্থান।

এবার D বিন্দুতে লম্বভাবে ১ একক দুরে C বিন্দু নেই। এবার বলো তো OC এর দূরত্ব কত? পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে OC = $\sqrt{৩}$. এখন O বিন্দু হতে ডানদিকে সংখ্যারেখায় OC এর সমান করে একটি বিন্দু E নেই। তাহলে E বিন্দুই সংখ্যারেখায় $\sqrt{৩}$ এর অবস্থান।

☞ এখানে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt{৩}$ এর সঠিক মান আমরা বের করতে না পারলেও এদেরকে সংখ্যারেখায় সঠিকভাবে উপস্থাপন করা যায়।

একক কাজ

এই পদ্ধতি অনুসরণ করে $\sqrt{৪}, \sqrt{৫}, \sqrt{৬}, \sqrt{৭}$ ... বিন্দুগুলোর অবস্থান নির্ণয় করো।

ঘনমূল (Cube root)

তোমরা ইতোমধ্যে বর্গমূল সম্পর্কে জেনেছ। তাহলে তোমরা কি বলতে পারবে ঘনমূল কী? বর্গের উদাহরণ থেকে আমরা জানি, বর্গমূল হলো বর্গের বিপরীত প্রক্রিয়া। তাহলে ঘনমূল হবে ঘনের বিপরীত প্রক্রিয়া। বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে আমরা বলতে পারি, a, b এর একটি ঘনমূল হবে যদি

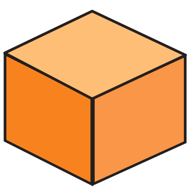
$$a^{৩} = b \text{ হয়।}$$

ঘনমূল প্রকাশের জন্য $\sqrt[৩]{}$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেহেতু, ৪ এর ঘন ৬৪ অর্থাৎ,

$৪^{৩} = ৪ \times ৪ \times ৪ = ৬৪$. সুতরাং

$$৬৪ \text{ এর ঘনমূল} = \sqrt[৩]{৬৪} = ৪$$

আবার বর্গমূল নির্ণয়ের সময় আমরা দেখেছিলাম, বর্গমূল হলো একটি বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য। তেমনি ঘনমূল হলো একটি ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য।



একটি ঘনক এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার এবং আয়তন ৬৪ ঘনমিটার। তাহলে আমরা পাই,

$x.x.x$=৬৪, সুতরাং $x^{৩}$=৬৪ বা, $x = \sqrt[৩]{৬৪} = ৪$

এবার ভেবে দেখো তো, $\sqrt[৩]{৬৪} = ৪$ হলে, $\sqrt[৩]{-৬৪}$ বাস্তবে কি নির্দেশ করে?

বলো তো $\sqrt[৩]{-৬৪}$ এর মান কত হতে পারে? অর্থাৎ কোন সংখ্যাকে ঘন করলে –৬৪ হবে? তোমরা অবশ্যই বলবে –৪, কারণ (–৪) × (–৪) × (–৪) = –৬৪

অর্থাৎ $(-৪)^{৩} = -৬৪$

সুতরাং, আমরা বলতে পারি,

$x^{৩} = y$ হলে $x = y^{\frac{১}{৩}}$, যেখানে x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য

ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা পূর্ণ সংখ্যার ঘনমূলের সরলীকরণ করতে পারি। ঘনমূলের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য এখানে দেওয়া হলো।

যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা a এবং b হলে,

$$\sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{a} = (\sqrt[৩]{a})^{৩} = a, \qquad \sqrt[৩]{ab} = \sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{b}$$

মৌলিক উৎপাদকের সাহায্যে ঘনমূল নির্ণয়

বর্গমূল নির্ণয়ের মতো ঘনমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রথমে সংখ্যাটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে। যেমন– ২১৬ এর ক্ষেত্রে

$$২১৬ = ২\times২\times২\times৩\times৩\times৩=(২\times২\times২)\times(৩\times৩\times৩)$$

দেখ, এখানে ২ আছে ৩টি এবং ৩ আছে ৩টি। বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমরা প্রতি জোড়া একই সংখ্যা থেকে একটি করে নিয়ে বর্গমূল নির্ণয় করেছি । এখন ঘনমূল নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রতি তিনটি একই সংখ্যা থেকে একটি করে নিয়ে গুণ করব। তাহলে, ২১৬ এর ঘনমূল = ২ x ৩ = ৬ অর্থাৎ

$$\sqrt[৩]{২১৬} = ২\times৩=৬$$

একক কাজ

মৌলিক উৎপাদক বা গুণনীয়কের সাহায্যে নিচের সংখ্যাগুলোর ঘনমূল নির্ণয় করো।

১২১৬১, –৯২৬১, ১৫৬২৫, –২৬২১৪৪, ৯২৬১০০০, ৩২৭৬৮

ভগ্নাংশের ঘনমূল

এখন চলো দেখি ভগ্নাংশের ঘনমূল নির্ণয় করা যায় কীভাবে? এক্ষেত্রে আমরা ঘন ও ঘনমূলের ধারণা ব্যবহার করতে পারি।

$\frac{৬৪}{১২৫}$ এর ঘনমূল $= \sqrt[৩]{\frac{৬৪}{১২৫}} = \sqrt[৩]{\frac{৪\times৪\times৪}{৫\times৫\times৫}} = \sqrt[৩]{\left(\frac{৪}{৫}\right)^৩} = \frac{৪}{৫}$

আবার,

$$\frac{\sqrt[৩]{৬৪}}{\sqrt[৩]{১২৫}} = \frac{৪}{৫} = \frac{\sqrt[৩]{৪^৩}}{\sqrt[৩]{৫^৩}}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, বর্গমূলের মতো একটি ভগ্নাংশের ঘনমূল তার লব ও হরের ঘনমূলের ভাগফলের সমান। এক্ষেত্রে খেয়াল করো যে, ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা। কোনোটি যদি ঋণাত্মক হয় তাহলে কি একইভাবে ঘনমূল নির্ণয় করা সম্ভব হবে? ভেবে দেখো।

সাধারণ ভগ্নাংশের ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য

যদি a যে কোনো পূর্ণসংখ্যা এবং b শূন্য ব্যতীত যে কোনো পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

একক কাজ

ভগ্নাংশগুলোর ঘনমূল নির্ণয় করো: $\frac{২৭}{২১৬}, \ -\frac{৭০৪৯৬৯}{৩৫৯৩৭}, \ \frac{১৩৮২৪}{১৬৬৩৭৫}$

বর্গমূল এবং ঘনমূলের প্রক্রিয়াকরণ

মূলদ সংখ্যার মতো আমরা বর্গমূল ও ঘনমূলের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করতে পারি।

যোগ বা বিয়োগ

যোগ বা বিয়োগের ক্ষেত্রে একই সংখ্যার বর্গমূল বা ঘনমূল হতে হবে এবং তাদের সহগের যোগ বা বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : $৫\sqrt{২}$ এর সঙ্গে $২\sqrt{২}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।

সমাধান :

$$৫\sqrt{২} + ২\sqrt{২} = (৫ + ২)\sqrt{২} = ৭\sqrt{২}$$

$$৫\sqrt{২} - ২\sqrt{২} = (৫ - ২)\sqrt{২} = ৩\sqrt{২}$$

গুণ বা ভাগ

বর্গমূল বা ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য এবং মূলদ সংখ্যার গুণ বা ভাগের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা বর্গমূল বা ঘনমূলের গুণ এবং ভাগ করতে পারি।

উদাহরণ : $\sqrt{২} + \sqrt{৩}$ এর সঙ্গে $\sqrt{২} - \sqrt{৩}$ কে গুণ করো।

সমাধান :

$$\left(\sqrt{২} + \sqrt{৩}\right)\left(\sqrt{২} - \sqrt{৩}\right) = \sqrt{২}\sqrt{২} + \sqrt{২}\sqrt{৩} - \sqrt{২}\sqrt{৩} - \sqrt{৩}\sqrt{৩} = ২ - ৩ = -১$$

উপরের উদাহরণে কী পর্যবেক্ষণ করলে তা নিচে লিখে রাখো। এখানে উল্লেখ্য যে, $\sqrt{২} - \sqrt{৩}$ কে $\sqrt{২} + \sqrt{৩}$ এর **অনুবন্ধি (conjugate) রাশি** বলে। এবং উল্টোটাও সত্য।

ভাগের ক্ষেত্রে হরকে বর্গমূলমুক্ত করতে হবে।

উদাহরণ : $\sqrt{২}+\sqrt{৩}$ কে $\sqrt{২}-\sqrt{৩}$ দ্বারা ভাগ করো।

সমাধান : $\frac{\sqrt{২}+\sqrt{৩}}{\sqrt{২}-\sqrt{৩}} = \frac{(\sqrt{২}+\sqrt{৩})\,(\sqrt{২}+\sqrt{৩})}{(\sqrt{২}-\sqrt{৩})\,(\sqrt{২}+\sqrt{৩})} = \cdots = -(৫+২\sqrt{৬})$ [মাঝখানের ক্যালকুলেশন করে দেখাও]

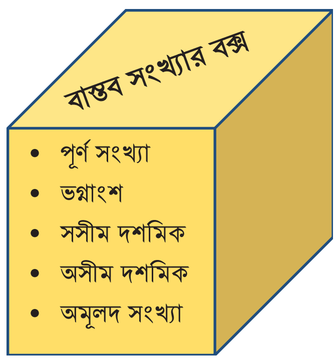
একক কাজ

- $২\sqrt{২}$ এর সঙ্গে $\sqrt{৮}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।
- $\sqrt[৩]{২}$ এর সঙ্গে $\sqrt[৩]{৫৪}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।
- দুটি সংখ্যা $২\sqrt{৩}+৫\sqrt{২}$ এবং $৭\sqrt{২}-৪\sqrt{৩}$ এর মধ্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।
- $\frac{৫}{\sqrt{৩}+\sqrt{৫}}$ এর হরকে বর্গমূলমুক্ত করো
- ক এর মান বের করো : $\frac{১}{\sqrt{১৯}-\sqrt{১২}} = \frac{\sqrt{১৯}+\sqrt{ক}}{৭}$
- সরলীকরণ করো : $\frac{১}{৯+\sqrt{৩}} + \frac{১}{৩+\sqrt{২}}$

দুইটি অমূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ মূলদ বা অমূলদ যে কোনোটা হতে পারে।

বাস্তব সংখ্যার বক্স

চলো আমরা ছোটো ছোটো কাগজের টুকরায় নিচের সংখ্যাগুলোর মতো বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা লিখি। এবার ঐ কাগজের টুকরাগুলোকে একটা বক্সে রাখি। বক্সের নাম দেই **'বাস্তব সংখ্যার বক্স'**। এবার তোমরা দৈবচয়ন প্রক্রিয়ায় একটি করে সংখ্যা বক্স থেকে তুলে নাও এবং সংখ্যাটি কী ধরনের তা ছক ২.৩ এ লেখো। এমন কোনো সংখ্যা পেয়েছ কি যেটা সম্পর্কে তোমরা জানো না?



$২,\quad \frac{৩}{৫},\quad ২.৩৪,\quad \pi,\quad \sqrt{২}$

ছক ২.৩					
	পূর্ণসংখ্যা	ভগ্নাংশ	সসীম দশমিক	অসীম দশমিক	অমূলদ সংখ্যা
২					
$\frac{৩}{৫}$					

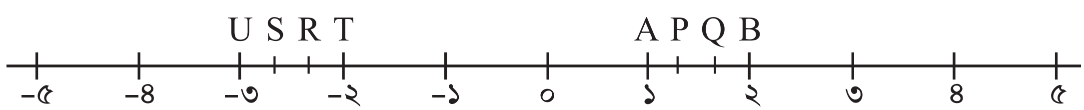
অনুশীলনী

১. ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় একটি মজার খেলা হলো দীর্ঘ লাফ। ধরা যাক তোমাকে দীর্ঘ লাফ প্রতিযোগিতায় ১০ মিটার দূরের একটি দেয়াল ছুঁতে হবে কিন্তু তুমি প্রতি লাফে শুধু অর্ধেক পথ যেতে পারবে। যেমন, প্রথম লাফে $\frac{১০}{২}$ = ৫ মিটার পথ গেলে, এরপরের লাফে $\frac{৫}{২}$ =২.৫ মিটার পথ গেলে দেয়াল ছুঁতে কটি লাফ দিতে হবে তা কি বের করতে পারবে?

২. একটি বর্গাকার আমবাগানে ১৩৬৯টি আমগাছ আছে। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয় দিকে সমান সংখ্যক আমগাছ থাকলে, প্রত্যেক সারিতে গাছের সংখ্যা যুক্তিসহকারে উপস্থাপন করো। দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থে দুটি গাছের মধ্যে দূরত্ব ১০০ ফুট হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল আনুমানিক কত হবে বলে তুমি মনে করো?

৩. ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল ও পূর্ণঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।

৪. একটি সংখ্যারেখায় P, Q, R, S, T, U, A এবং B বিন্দুগুলো এমনভাবে আছে যে, TR = RS = SU এবং AP = PQ = QB. এমতাবস্থায় P, Q, R এবং S মূলদ সংখ্যাসমূহের মান নির্ণয় করো।



৫. নিচের সংখ্যাগুলো মূলদ নাকি অমূলদ যুক্তিসহ ব্যাখ্যা দাও।

৮.৯২৯২৯২..., ০.১০১০০১০০০১..., ৬৫৩৪.৭৮৯৭৮৯..., ২.১৮২৮১৮২৮, ০.১২২৩৩৩...

৬. $২\sqrt{২} + ৫\sqrt{৮}$ এবং $৭\sqrt{৮} - ৪\sqrt{২}$ সংখ্যা দুটির যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন করো।

৭. সরল করো : $\sqrt[৩]{\frac{৩}{৫}} + \frac{\sqrt[৩]{৯}}{৫} - \sqrt[৩]{৮১}$

৮. নিশিথ চাকমার দুইটি বর্গাকার সবজি বাগান আছে।

একটির দৈর্ঘ্য $২\sqrt{২}$ একক এবং অন্যটির ক্ষেত্রফল এটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। তাহলে অন্য বাগানের দৈর্ঘ্য কত?

৯. তোমার দুইটি ঘনক আকৃতির বক্স আছে। একটির আয়তন ১৬ ঘনফুট এবং অন্যটির আয়তন ১১ ঘনফুট। প্রতিটি বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত? যদি উক্ত বক্স দুটি ভেঙে তাদের আয়তনের যোগফলের সমান আয়তনের একটি ঘনক আকৃতির বক্স বানানো হয় তবে সেটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে?