

গাণিতিক অনুসন্ধান

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া
- গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপসমূহ
- প্যাটার্ন
- তথ্যের উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই করার পদ্ধতি



গাণিতিক অনুসন্ধান

আগের শ্রেণিগুলোতে তোমরা সংখ্যা ও সংখ্যার বৈশিষ্ট্য নিয়ে নিশ্চয়ই কিছু মজার তথ্য জেনে এসেছ। কিন্তু আজ আমরা সংখ্যা নিয়ে নতুন কিছু শিখব না। আজ শিখব সংখ্যা নিয়ে কীভাবে অনুসন্ধান করতে হয়। আগের শ্রেণিতে তথ্য ও উপাত্তের অভিজ্ঞতাটিতে বিভিন্ন বিষয়ের উপর সংখ্যাবাচক তথ্য সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করে কিছু সিদ্ধান্ত নিয়েছিলে, মনে আছে? আমাদের চারপাশে এমন অগণিত সংখ্যা রয়েছে যেগুলো নিয়ে গণিতজ্ঞ এবং গবেষকগণ চিন্তা করেন। গণিতজ্ঞ ও গবেষকগণের মতো দেখে তো চেষ্টা করে ব্যাপারটি আনন্দের নাকি নীরস, তোমাদের কী মনে হয়? তাহলে চলো আমরা কোনো একটি সমস্যা গণিতজ্ঞ গবেষকগণের মতো পরীক্ষা করে দেখি।

আজকে যে সমস্যাটি দেখব সেটি পৃথিবীর বড়ো বড়ো গণিতজ্ঞদের প্রিয় একটি সমস্যা এবং সেটির সঙ্গে ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রমের সম্পর্ক আছে। সম্পর্কটি/সম্পর্কগুলো কী, ঘাঁটাঘাঁটি শেষ করে তোমরা বলবে। আরও বলে রাখি, এই সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে তুমি এমন কিছু আবিষ্কার করতে পার যা অন্য কেউ কখনো করতে পারেনি। পরীক্ষাটি করতে গিয়ে তুমি বেশ কিছু হিসাব-নিকাশ এবং লেখালেখি করবে। কাজ শেষ হলে তুমি দেখে অবাক হয়ে যাবে যে গণিত নিয়ে অনুসন্ধান করতে গিয়ে কত চমৎকার একটি রাস্তা পাড়ি দিয়েছ, কত কিছু শিখেছ! তাহলে চলো, ধাপে ধাপে সমস্যাটি দেখা যাক।



তার আগে একটু মনে করে নেওয়া যাক যে ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রম কী। একের পর এক ধারাবাহিকভাবে আসতে থাকে এমন সংখ্যা খেয়াল করেছ কখনো? যেমন, ১, ২, ৩,... -ইত্যাদি?

অথবা, টিভিতে কখনো দেখেছ রকেট বা মহাকাশযান উৎক্ষেপণের সময় নিচের দিকে গুনতে থাকে। যেমন: ১০, ৯, ৮, ৭...? ইংরেজিতে একে বলে কাউন্ট ডাউন।



“চলো আকাশপানে”



আবার ছোটো থেকে বড়ো হয় এমন সংখ্যার ক্রমও আমাদের সামনে আছে। চিন্তা করে দেখো, বইয়ের পৃষ্ঠা একের পর এক উল্টাতে থাকলে পৃষ্ঠা নম্বর বাড়তে থাকে, তাই না?

আমরা একে বলছি ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রম। আসলে এ আর কিছুই নয়, বিভিন্ন পূর্ণ সংখ্যা একের পর এক বসলে যা হয় তাই।





এবার মূল সমস্যায় যাওয়া যাক, প্রস্তুত খাতা-কলম নিয়ে?

১

সমস্যাটির শুরু সংখ্যা দিয়ে। যে কোনো চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নাও এবং সংখ্যাগুলোকে ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাশাপাশি বসাও। এবং তাদের মাঝখানে বেশ খানিকটা ফাঁকা জায়গা রাখো। তুমি যে কোনো চারটি সংখ্যা নিতে পার, বোঝার সুবিধার জন্য আমরা নিচের চারটি সংখ্যা নিলাম।



৪

৫

৬

৭

২

এখন তোমার কাজ হলো সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ (+) অথবা বিয়োগ (−) চিহ্ন বসানো। সংখ্যাগুলোর ক্রম ভঙ্গ না করে বিভিন্ন রকম ভাবে + অথবা − চিহ্ন বসাও। খানিকটা এমন—

৪ + ৫ − ৬ + ৭

৪ − ৫ + ৬ + ৭

৩



অনুমান করে বলো দেখি

- কত ভাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন বসানো যায়?
- পাশের ফাঁকা ঘরে লিখতে পার।

এবার + অথবা – যত রকম করে বসানো যায় সব রকম বসাও।

মাথায় যা এসেছে সব বসিয়েছ?

সব কটিই + এবং সব কটিই – , এমন করে বসিয়ে দেখেছ?



৪

এর পরের কাজ হলো সব কটির ফলাফল বের করা। যোগ বিয়োগ করে ঝটপট ফলাফল বের করে নাও। উদাহরণস্বরূপ–

$$৪ - ৫ + ৬ + ৭ = ১২$$

৫



অনুমান করে বলো দেখি

- ফলাফলগুলোর মধ্যে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা কী কী হতে পারে?
- ফলাফলগুলোকে ছোটো থেকে বড়ো সাজালে তাদের মধ্যে কি কোনো সম্পর্ক পাওয়া যেতে পারে?

৬

ফলাফলগুলোর মধ্যে বিশেষ কোনো অনুক্রম দেখতে পাচ্ছ অথবা কোনো সম্পর্ক খেয়াল করেছ?

মজার কোনো অনুক্রম লক্ষ করলে অথবা কোনো সম্পর্ক খেয়াল করলে সেগুলো তুমি খাতায় কোথাও টুকে রাখতে পার। তোমার চিন্তাভাবনার সুবিধার জন্য নিচের পরীক্ষাটি করো।



৭

পরীক্ষা করে দেখো

[তোমার বুদ্ধির ধার বাড়ানোর জন্য চারটি প্রশ্ন দেওয়া হলো। তোমার মাথায় আরও প্রশ্ন এলে নিচে এবং পরের পৃষ্ঠায় লিখে রাখতে পার]

- ১। ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে তাদের মধ্যে পার্থক্য (difference) কি একই থাকবে?
- ২। কোনো ফলাফল কি ০ (শূন্য) হতে পারে?
- ৩। কোনো ফলাফলের পুনরাবৃত্তি হতে পারে?
- ৪। + অথবা - চিহ্নের সংখ্যার উপর কি ফলাফলের ছোটো বা বড়ো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ভর করে?
- ৫।
- ৬।

٦

তোমার খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে মজার ছয়টি বৈশিষ্ট্য নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। সেই সঙ্গে এমনটি হওয়ার কারণ কী হতে পারে বলে তুমি মনে করো তাও লিখে রাখো।

পুরো পরীক্ষাটি করতে গিয়ে তোমার কোনো ভুল হয়েছে? কখনো পুনরায় গণনা করতে হয়েছে? বা আগের ধাপে ফেরত যেতে হয়েছে? এমন কিছু হয়ে থাকলে নিচের ফাঁকা ঘরে লিখে রাখতে পার।

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The paper has rounded corners at the top and bottom. There are ten evenly spaced horizontal lines across the page, providing a template for writing or drawing.

একক কাজ

তোমার চর্চার জন্য একই রকম আরও কিছু প্রশ্ন নিচে দেওয়া হলো। এমন সব প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে চেষ্টা করা তোমার বুদ্ধির বিকাশের জন্য ভালো। উপরের পর্যবেক্ষণটির পদ্ধতিতেই নিচের পরীক্ষাগুলো সম্পাদন করে দেখ—

- সংখ্যাগুলো ছোটো থেকে বড়ো ক্রমে না সাজিয়ে যদি বড়ো থেকে ছোটো ক্রমে সাজাই, তাহলে ফলাফল কী আসে?
- চারটির বদলে যদি তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নাও।
- চারটির বেশি ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো।
- ভিন্ন অন্য কোনো চারটি সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো। আগেরবারের সংখ্যাগুলোতে যে ফলাফলের ধারা লক্ষ্য করেছ, এবারের সঙ্গে তার কোনো মিল আছে? কোনো পার্থক্য আছে?



গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া

সংখ্যা নিয়ে উপরের পরীক্ষা-নিরীক্ষা বা অনুসন্ধানটি ভালো লেগেছে? এ তো গেল সংখ্যা নিয়ে একটিমাত্র সমস্যা। সংখ্যা ছাড়াও গণিতের আরও অনেক শাখা রয়েছে, সেসব শাখায় বিভিন্ন রকমের প্রশ্ন এবং সমস্যা আছে। সেগুলো আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গেই যুক্ত। গাণিতিক কোনো সমস্যার বৈশিষ্ট্য, সমাধান বা প্রশ্নের উত্তর খুঁজে বের করার প্রক্রিয়াকে আমরা **গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া** বলতে পারি। গণিত ছাড়াও অন্যসব বিষয়েরও অনুসন্ধান রয়েছে। যেমন, বিজ্ঞানের অনেক অনুসন্ধান ল্যাবরেটরিতে করে। আবার সামাজিক বিজ্ঞানের অনুসন্ধানের জন্য সামাজিক বিভিন্ন প্রতিষ্ঠানে যাওয়া লাগতে পারে। কিন্তু গণিতের মজা হলো, গাণিতিক অনুসন্ধানের অনেকটাই তুমি ঘরে বসে খাতা-কলমে করে ফেলতে পারবে। কখনো কখনো ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার লাগতে পারে। কিন্তু হাতে-কলমে গাণিতিক অনুসন্ধান করার থেকে আনন্দের আর কী আছে?

গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ

আগেই বলেছি, এই অভিজ্ঞতায় আমরা গণিত শিখব না, গাণিতিক অনুসন্ধান কীভাবে করে তার পদ্ধতি শিখব। তোমরা ইতোমধ্যেই একটি অনুসন্ধান সম্পন্ন করেছ, আশা করি মজা পেয়েছ। এখন একটু ফিরে দেখা দরকার যে আমরা আসলে কী পদ্ধতি অবলম্বন করলাম, কী কী ধাপে কাজটি শেষ করলাম। আমাদের গাণিতিক অনুসন্ধানে যা যা কাজ করেছি, নিচের ছকে সেগুলো এলোমেলো করে দেওয়া আছে (ক-ব্য)। তোমার কাজ হবে ধাপগুলোর বাম পাশের ফাঁকা ঘরে কোনটি তোমার ক্ষেত্রে কততম ধাপ, তা লেখা। কোনো ধাপ যদি প্রয়োজন না পড়ে, তবে তার ঘর ফাঁকা রাখতে পার।

ক. সম্ভাব্য ফলাফল অনুমান করেছি

খ. সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে বুঝে নিয়েছি

গ. অনুমানের সঙ্গে ফলাফল মিলেছে কি না, পরীক্ষা করতে গিয়ে ধরা পড়েছে

ঘ. যা করছি, ঠিক করছি কি না যাচাই করেছি

ঙ. সমস্যা/প্রশ্ন চিহ্নিত করেছি

চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করেছি

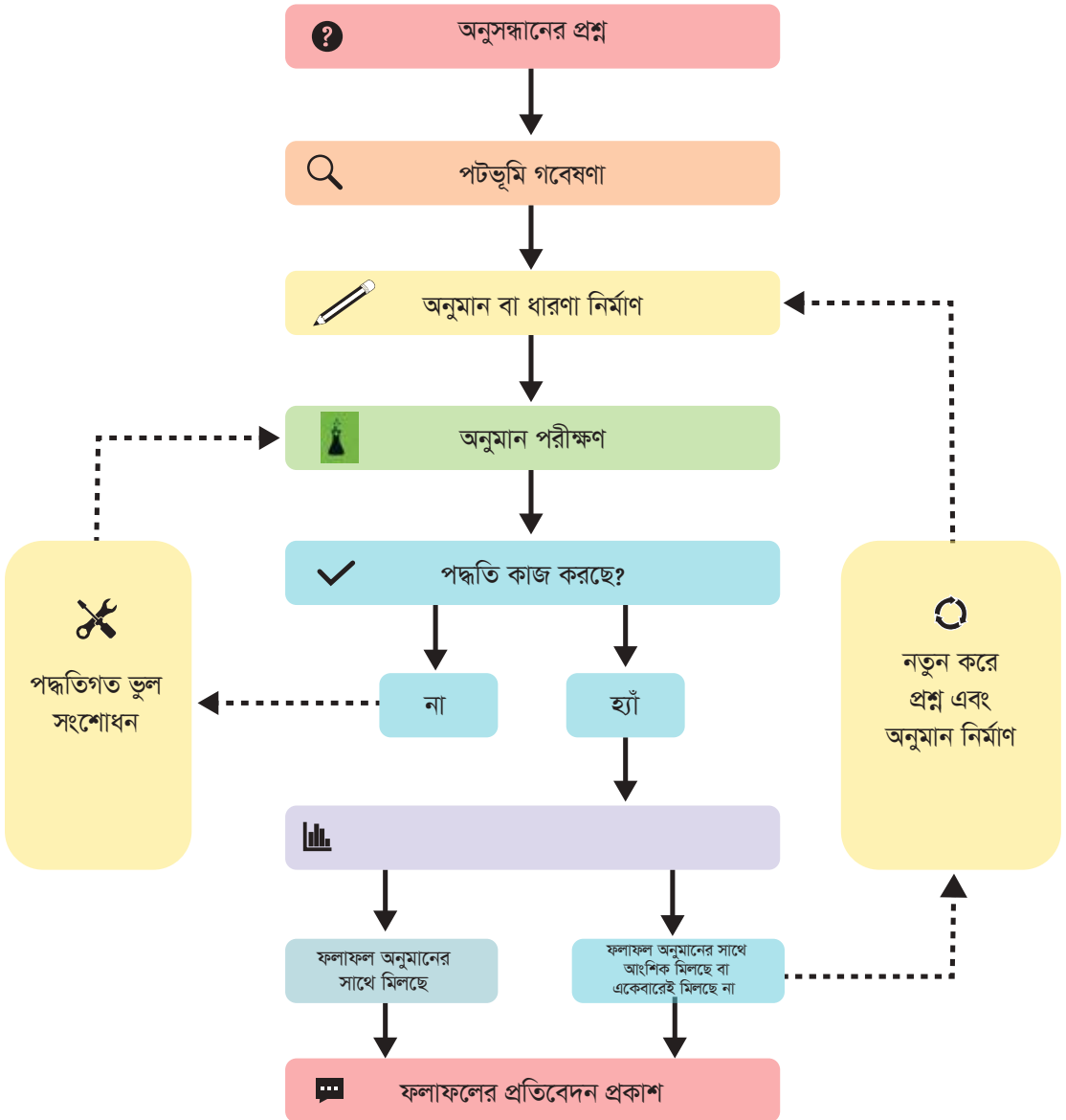
ছ. ভুল করলে আগের ধাপে ফেরত গিয়েছি

জ. কী পর্যবেক্ষণ করলাম, তা লিখেছি

ঝ. অনুমানগুলো পরীক্ষা করে দেখেছি



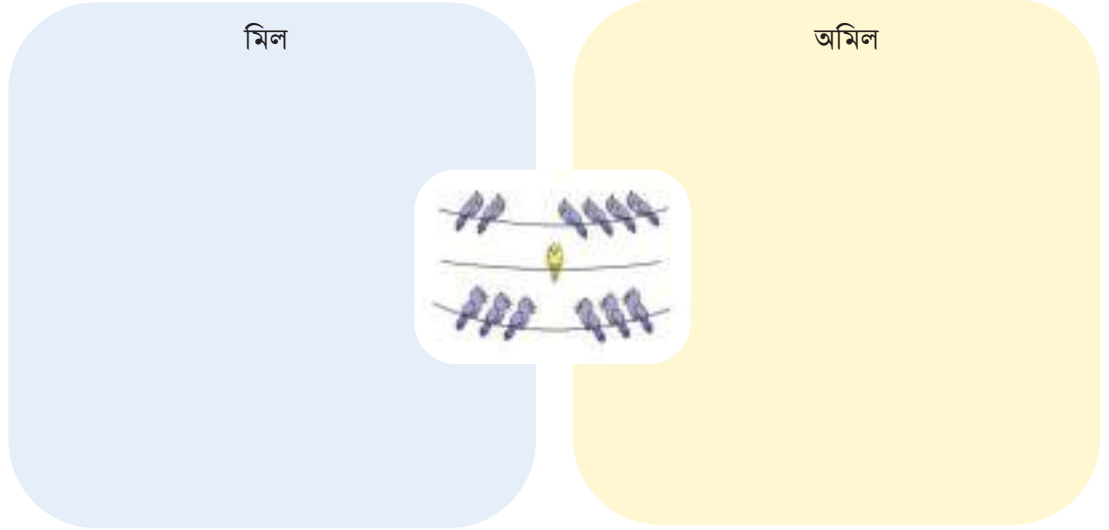
এখন খেয়াল করে দেখ, যে সব ধাপ চিহ্নিত করলে, সেগুলো যদি এলোমেলো অবস্থাতেই সম্পন্ন করতে, তোমার অনুসন্ধানে কি আশানুরূপ ফলাফল পেতে? প্রশ্নগুলোর উত্তর পেতে? নিশ্চয়ই না! তার অর্থ দাঁড়ায় গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপের একটি নির্দিষ্ট ক্রম আছে। সব অনুসন্ধানের পদ্ধতিগত ধাপগুলো একই হবে না, কিন্তু প্রত্যেকটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার একটি সাধারণ ক্রম থাকা উচিত। গণিতবিদ বা বিজ্ঞানীগণ তাঁদের বিভিন্ন অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে যে অনুসন্ধান প্রক্রিয়াটি ব্যবহার করে থাকেন, তা একটি ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। নিচে তার একটি ছক দেওয়া আছে। তোমরা এটিকে গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ফ্লো-চার্টও বলতে পার। ছকটির সঙ্গে তোমার করা গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপগুলোর কী কী মিল বা অমিল সেটি তোমার একজন সহপাঠীর সঙ্গে বসে মিলিয়ে নাও।



গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্ট

জোড়ায় কাজ

আগের পৃষ্ঠায় পাওয়া গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্টের সঙ্গে তোমাদের করা অনুসন্ধানটির নিশ্চয়ই কিছু মিল বা অমিল রয়েছে। তোমার বন্ধুর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের ছক দুটিতে কী কী মিল বা অমিল পেলো, সেগুলো লিখে ফেলো :



খেয়াল করো, নিচের ছকে ফ্লো-চার্ট থেকে পাওয়া অনুসন্ধানের বিভিন্ন ধাপ দেওয়া আছে। তোমার করা অনুসন্ধানের সময় ফ্লো-চার্টে উল্লেখ করা ধাপগুলোর নিশ্চয়ই কিছু কিছু মিল পেয়েছ। কোন ধাপে নির্দিষ্টভাবে কী করেছ সেটি নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। তোমার জন্য একটি করে দেওয়া হলো:

ধাপ	কাজ
সমস্যা চিহ্নিতকরণ	চারটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে বিভিন্নভাবে যোগ এবং বিয়োগ চিহ্ন বসালে ফলাফলের কী কী বৈশিষ্ট্য দেখা যায়?
অনুমান গ্রহণ	
পরীক্ষণ	
ভুল চিহ্নিতকরণ	
ফলাফল বিশ্লেষণ	

গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন?

এ পর্যন্ত আমরা গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপগুলো জানলাম, কোনটি কীভাবে করে তা হাতে-কলমে দেখলাম। কিন্তু তোমার কি জানতে ইচ্ছা করছে যে এই অনুসন্ধান করে কী হবে? কেন গণিতবিদ এবং বিজ্ঞানীগণ অনুসন্ধান করে থাকেন? প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার জন্য তো বটেই, কিন্তু কী হবে সে সব প্রশ্নের উত্তর জেনে? তোমার মাথায় কী আসছে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো তো, ইচ্ছে হলে পাশে ছবিও এঁকে রাখতে পার।

কেন অনুসন্ধান করতে হবে, তার অনেক রকম কারণ থাকতে পারে। তবে প্রধানতম কারণটি হলো সমস্যাটির বৈশিষ্ট্যগুলোকেই গভীরভাবে বুঝতে চেষ্টা করা। সব সমস্যারই যে সমাধান সঙ্গে সঙ্গে করে ফেলা সম্ভব তেমনটি সব সময় নয়। তবে সমস্যাটিকেই যদি আগের থেকে আরেকটু ভালো বোঝা যায়, তবে তা সমাধানের দিকে অনেকটা এগিয়ে যায়।

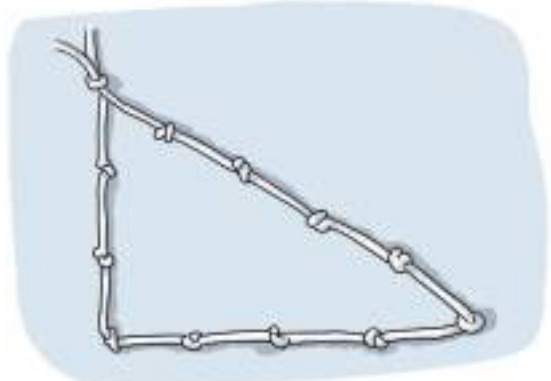
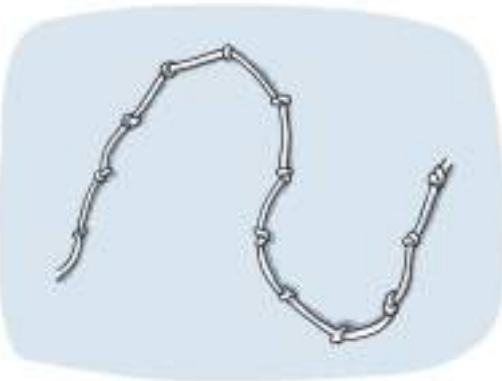
এই যে সমস্যার বৈশিষ্ট্য বোঝার কথা বললাম, এর মাধ্যমে কিন্তু আমরা সমজাতীয় সমস্যার সমাধান কীভাবে করব তাও বুঝতে পারি। আগের শ্রেণিতে তোমরা কিছু কিছু বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহার করা শিখে এসেছ। একই সূত্র দিয়ে সমজাতীয় অনেক গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়, তাই না?

দলগত অনুসন্ধান

এ পর্যন্ত তোমরা জেনে এসেছ গাণিতিক অনুসন্ধান কী, এই অনুসন্ধান কীভাবে সম্পন্ন করে, এর ধাপগুলো কী কী। কিন্তু ভবিষ্যতে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাবলি একই পদ্ধতিতে সমাধান করার জন্য আমাদের এখন থেকেই চর্চা থাকা প্রয়োজন। তাই আমরা এবার কিছু দলগত কাজ করব। তোমাদের পুরো ক্লাসটিকে শিক্ষক ছয়টি ভাগে ভাগ করবেন, প্রতিটি ভাগ একটি দল। নিচে তিনটি দলের জন্য একটি করে সমস্যা বা প্রশ্ন দেওয়া আছে, বাকি তিনটি সমস্যা শিক্ষক সরবরাহ করবেন। দলগুলোর সেগুলো অনুসন্ধান করে সমাধান/পর্যবেক্ষণ উপস্থাপন করতে হবে। কোন দলের ভাগে কোন সমস্যাটি পড়বে তা শিক্ষকের নির্দেশনায় লটারি করে নির্ধারণ করা হবে। উপস্থাপনের ক্ষেত্রে পোস্টার কাগজ ব্যবহার করলে ভালো, যদি না পার তবে শিক্ষকের পরামর্শে গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ অনুসারে তোমাদের পর্যবেক্ষণ ব্যাখ্যা করবে। তোমাদের জন্য ৩টি সমস্যা দেওয়া হলো। শিক্ষকের সহায়তায় তোমরা আরও দুই বা তিনটি অনুসন্ধানের সমস্যা তৈরি করবে এবং এই অভিজ্ঞতার সঙ্গে সংযুক্ত করে রাখবে। তাহলে সমস্যা বা প্রশ্নগুলো দেখে নাও—

সমস্যা ১

প্রাচীন মিশরীয়রা গণিত এবং বিজ্ঞানে ভীষণ উন্নতি করেছিলেন, জানো তো? তাঁরা বিভিন্ন জ্যামিতিক পরিমাপের জন্য একটি দড়ি ব্যবহার করতেন। দড়িটির বৈশিষ্ট্য হলো, তাতে নির্দিষ্ট সমান ব্যবধানে ১৩টি গিট দেওয়া থাকত (ঠিক নিচের বাম পাশের ছবিটির মতো করে)।



এই দড়ি দিয়ে তাঁরা সমকোণী ত্রিভুজ বানাতেন (উপরের ডান পাশের ছবিটির মতো করে)। তোমরা নিশ্চয়ই জানো সমকোণী ত্রিভুজ কোনগুলো? পরবর্তী একটি অভিজ্ঞতায় তোমরা সমকোণী ত্রিভুজের মজার কিছু ব্যবহার শিখবে।

তোমাদের দলের অনুসন্ধানটির জন্য সমান দূরত্বে ১৩টি গিট দেওয়া একটি দড়ি জোগাড় করো। এরপর—

১। খুঁজে বের করো কী কী প্রকার ত্রিভুজ তৈরি করতে পার। শর্ত হলো দড়িটির দুই প্রান্তে গিট থাকবে, ত্রিভুজের প্রতিটি কোণে একটি করে গিট থাকবে, এবং দুই প্রান্তের গিট মিলিত হবে।

২। এমন একটি দড়ি দিয়ে আর কী কী আকৃতি তৈরি করতে পার (যেমন— বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি)?

সমস্যা ২

নিচের ছকটিতে মোট ১৯৬টি ঘর রয়েছে (তবে নিজে গণনা করে নিশ্চিত হয়ে নেওয়া ভালো, আমরা ভুলও বলতে পারি)। ছকটির প্রতিটি সারির জন্য একটি করে সংখ্যা এবং প্রতিটি কলামের জন্য একটি করে বাংলা অক্ষর নির্ধারণ আছে। এই সংখ্যা এবং অক্ষর ধরে প্রতিটি ঘরের ঠিকানা বের করা যায়। যেমন— ২য় সারির ৩য় ঘরটির ঠিকানা হলো ২গ।

এই অনুসন্ধানটিতে তোমরা ছক-১.১ এর নির্দেশিত ঘরে মূলত ১ থেকে ১০ এর ঘরের নামতার ফলাফল লিখবে। যেমন— $২ \times ১ = ২$, নির্ধারিত ঘরে কেবল গুণফলটি লিখবে, অর্থাৎ ২। কিন্তু শর্ত হলো নামতার ফলাফলে যদি শতক বা দশকের ঘরের অঙ্কও থাকে সেটি বসাতে পারবে না, কেবল এককের ঘরের অঙ্কটি বসাবে। যেমন— $২ \times ৫ = ১০$, নির্ধারিত ঘরে কেবল ০ লিখবে।

	ক	খ	গ	ঘ	ঙ	চ	ছ	জ	ঝ	ঞ	ট	ঠ	ড	ঢ
১														
২			২গ											
৩														
৪														
৫														
৬														
৭														
৮														
৯														
১০														
১১														
১২														
১৩														
১৪														

ছক-১.১

এবার নিচের নির্দেশনাগুলো অনুসরণ করো

- ১। ৩গ ঘর থেকে ১ এর নামতার ফলাফল লেখা শুরু করো। অর্থাৎ, ৩গ-তে বসবে ১, ৩ঘ-তে ২, ৩ঙ-তে ৩...। এমন করে ১×১০ পর্যন্ত গুণফল লেখো, কিন্তু অবশ্যই শর্তটি মনে রাখবে।
- ২। ৪গ থেকে ২ এর নামতা, ৫গ থেকে ৩ এর..... এমন করে ১১গ থেকে ১০ এর নামতার ফলাফলগুলো লেখো।
- ৩। এবার পুরো ছকটা সম্পূর্ণ করার জন্য অঙ্কগুলোর চারপাশের ঘরগুলোতে শূন্য বসিয়ে দাও।

এখন পর্যবেক্ষণ করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও

- ক. অঙ্কগুলোর মধ্যে কী বৈশিষ্ট্য দেখতে পাচ্ছ?
- খ. কোনো পুনরাবৃত্তি দেখতে পাচ্ছ? কোনো পুনরাবৃত্তি যদি দেখতে পাও, সেটিকে/সেগুলোকে ভিতরে রেখে চারদিকে দাগ দিয়ে প্রকাশ করতে পারবে? পুনরাবৃত্তি কি কেবল একই দিকে ঘুরতে পারে, নাকি বিপরীতেও?
- গ. ছকটির বৈশিষ্ট্য এমনই কেন হলো?

সমস্যা ৩

সংখ্যার গুণনীয়ক সম্পর্কে নিশ্চয়ই তোমাদের ধারণা রয়েছে? না থাকলেও মনে করিয়ে দিই— কোনো একটি সংখ্যার গুণনীয়ক হলো এমন আরেকটি সংখ্যা যে সংখ্যা দিয়ে ঐ সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায়। যেমন—

৮ এর গুণনীয়কগুলো হলো—

১, ২, ৪ এবং ৮

এবার ৮কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায় দেখো :

$$১ + ২ + ৪ = ৭$$

একইভাবে, ১০ এর গুণনীয়কগুলো বের করো। ১০কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায়?

এবার এসো দেখি একইভাবে ১২ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল কত হয়।

১২ এর গুণনীয়কগুলো হলো—

১, ২, ৩, ৪, ৬ এবং ১২

তাহলে ১২ বাদ দিয়ে বাকি গুণনীয়কগুলো যোগ করলে যোগফল কত হয় দেখা যাক—

$$১ + ২ + ৩ + ৪ + ৬ = ১৬$$

খেয়াল করে দেখ, ৮ এবং ১০ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল যথাক্রমে ৮ এবং ১০ এর থেকে ছোটো। কিন্তু ১২ এর ক্ষেত্রে তা নয়। তাই ১২ হলো সমৃদ্ধ সংখ্যা (abundant number)।

তোমার অনুসন্ধানের কাজটি হলো—

১। ৫টি সমৃদ্ধ সংখ্যা খুঁজে বের করো।

২। সমৃদ্ধ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য কেন অন্যান্য সংখ্যার চেয়ে আলাদা?

৩। অন্য দলের সহপাঠীদের বোঝানোর জন্য সমৃদ্ধ সংখ্যার একটি সংজ্ঞা প্রস্তুত করো।

অনুসন্ধান উপস্থাপনের জন্য নির্দেশনা

তোমার দলের অনুসন্ধানটি কীভাবে করবে তার নির্দেশনা আগেই পেয়েছ। দলগতভাবে কাজটি হয়ে যাওয়ার পর কী করবে তার কিছু নির্দেশনা নিচে দেওয়া রইল, দেখে নাও।



১। প্রয়োজনীয় সংখ্যক পোস্টার কাগজে নিচের বিষয়গুলো লিখবে এবং ব্যাখ্যা করবে। প্রয়োজনে চিত্র, ছক বা ডায়াগ্রাম ব্যবহার করবে।

ক. তোমাদের দেওয়া অনুসন্ধানটি কী নিয়ে?

খ. কোন কোন প্রশ্নের উত্তর করলে তোমরা অনুসন্ধানটি সমাধান করতে পারবে?

গ. অনুসন্ধানটি সম্পাদন করার জন্য তোমাদের কী কী উপকরণ, জ্ঞান এবং দক্ষতা প্রয়োজন হয়েছে?

ঘ. অনুসন্ধানটি কী কী ধাপে সমাধান করেছ, তা একটি ফ্লো-চার্টের সাহায্যে উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে এই অভিজ্ঞতার “গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ” এর সাহায্য নিতে পার।

ঙ. অনুসন্ধানটির ফলাফল কী পেয়েছ?

চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করে তোমরা নতুন কী কী শিখতে পারলে?

ছ. কোনো ধাপে কি কোনো ভুল করেছিলে? ভুল শুধরে নেওয়ার জন্য কি আগের কোনো ধাপে আবার ফেরত যেতে হয়েছে?

২। এবার শিক্ষকের নির্দেশনায় অপর একটি দলের সঙ্গে তোমাদের সমস্যাটি ব্যাখ্যা করো এবং তোমাদের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি অদল-বদল করে নাও। তোমাদের অনুসন্ধানটি তারা বুঝতে পেরেছে নাকি খেয়াল করো। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো লিখে নাও। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো নিজেদের প্রতিবেদনে সংযোজন এবং পরিমার্জন করো।

৩। অপর যে দলের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি পেয়েছ, সেটি বুঝতে পেরেছ কি না দেখ, তাদের প্রশ্ন করো এবং পরামর্শ দাও।

৪। এই অনুসন্ধানটিতে শিক্ষক বা বাবা-মা তোমাদের তেমন কোনো সাহায্য করবেন না, কেবল লক্ষ্য করবেন। সুতরাং, তোমাদের সমস্যার উত্তর নিজেদেরই নির্ণয় করতে হবে।

৫। যদি অর্থবহ হয় তবে উপস্থাপনার দিন বাস্তব বস্তুর সাহায্যে প্রদর্শন করো।

গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাই?

তোমরা দলগতভাবে কিছু গাণিতিক অনুসন্धानে অংশগ্রহণ করলে এবং অন্যান্য দলের অনুসন্ধানের ফলাফল দেখলে। কিন্তু তোমাদের মনে কি প্রশ্ন জেগেছে যে গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাওয়া যায়? নিচে এই প্রশ্নের কিছু সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। যে উত্তরগুলো তোমার পর্যবেক্ষণের সঙ্গে মিলে সেগুলোর বাম পাশের ঘরে টিক (✓) চিহ্ন দাও। নিচের উত্তরগুলো ছাড়াও তোমার মাথায় আরও কিছু এলে ফাঁকা ঘরে লিখে রাখো।

- ☐ প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়।
- ☐ সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।
- ☐ উত্তর বা সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করা যায়।
- ☐ একজাতীয় সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি ঠিক করা যায়।
- ☐ জটিল কোনো বিষয়ের উপর সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।
- ☐ নতুন আরও সমস্যা তৈরি করা যায়।
- ☐ ভুল করার মাধ্যমে সঠিক পদ্ধতি খুঁজে পাওয়া যায়।
- ☐ নতুন গাণিতিক সম্পর্ক আবিষ্কার করা যায়।
- ☐ গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার মাধ্যমে অন্য বিষয়ে সমস্যার সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়।
- ☐ নিজের বুদ্ধিবৃত্তিক উন্নতি হয়।
- ☐ _____
- ☐ _____
- ☐ _____



[তুমি যে বক্তব্যগুলোর পাশে টিক চিহ্ন দিয়েছ, সেগুলোর একটি করে উদাহরণ দিতে পারবে?]

বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থেকে প্যাটার্ন

আগের ছকটিতে খেয়াল করে দেখ, গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে একই জাতীয় সমস্যার সমাধান করা যায় বলা আছে। তুমি যদি এই বাক্যটির সঙ্গে একমত হও, তাহলে এটি নিয়ে একটু আলোচনা করা যায়। নিচের দুই লাইনে বিভিন্ন সংখ্যা সাজানো রয়েছে। পর্যবেক্ষণ করে বলো, সংখ্যাগুলো যত পদ পর্যন্ত সাজানো রয়েছে তুমি কি তার পরের পদটি নির্ণয় করতে পারবে?

ক. ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭,

খ. ১, ২, ৪, ৮, ১৬, ৩২,

কী পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে?

প্রথম রাশিটির বৈশিষ্ট্য হলো : পরের পদ = আগের পদ + ১;

আর দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে : পরের পদ = আগের পদ \times ২

তাহলে যে কোনো গাণিতিক রাশির বৈশিষ্ট্যটি যদি তুমি ধরে ফেলতে পার, তাহলে ঐ রাশি বিষয়ক যে কোনো সমস্যাই সমাধান করতে পারবে। এই বৈশিষ্ট্যটির পুনরাবৃত্তিকে আমরা প্যাটার্ন (Pattern) বলে থাকি। গাণিতিক অনুসন্ধানের অন্যতম একটি কাজ হলো কোনো গাণিতিক সমস্যার বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি বা প্যাটার্ন আবিষ্কার করা।

গাণিতিক অনুসন্ধান থেকে প্যাটার্ন আবিষ্কারের আরও একটি মজার উদাহরণ দেখা যাক।

আমাদের আগেও অনেক মনীষী ছিলেন যারা অনুসন্ধান করে গণিতের সৌন্দর্য আবিষ্কার করেছিলেন। তাঁদের জ্ঞানের উপর ভর করেই আজ আমরা নিমেষের মধ্যে কঠিন কঠিন সমস্যার সমাধান করে ফেলতে পারি। তেমনই একজন হলেন যাঁর ছবি পাশে দেখতে পাচ্ছ। তিনি হলেন ১২শ শতকের বিখ্যাত ইতালীয় গণিতবিদ ফিবোনাচ্চি (Fibonacci)। তিনি প্রকৃতির মধ্যে অনুসন্ধান করে সংখ্যার একটি ধারা আবিষ্কার করেছিলেন বলে পরিচিত। ধারাটি প্রথম দেখায় খুবই সাধারণ বলে মনে হবে। কিন্তু মন দিয়ে দেখলে দেখবে তার মধ্যে একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি বা প্যাটার্ন রয়েছে। সেটি কী তা তোমাকে খুঁজে বের করতে হবে। ধারাটি হলো:



ইতালীয় গণিতবিদ ফিবোনাচ্চি

০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ৫৫, ...

তোমার জন্য প্রশ্ন হলো : ফিবোনাচ্চি অনুক্রমের ১২তম সংখ্যাটি কত?



এই ফাঁকা ঘরটি তোমার উত্তর নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করতে পার। তোমার উত্তর সম্পর্কে নিশ্চিত হতে পারলে ধারাটির মূল বৈশিষ্ট্যটি ব্যাখ্যা করে লিখে রাখতে পার।

একক কর্মপত্র

তুমি কি নিজের মতো করে কোনো সংখ্যার প্যাটার্ন এবং তার বৈশিষ্ট্য নির্ণয় তৈরি করতে পারবে? চেষ্টা করে দেখো এবং তোমার অনুসন্ধানের ফলাফল কর্মপত্রের মাধ্যমে শিক্ষকের কাছে জমা দাও।

কেন খুঁজব প্যাটার্ন?

ভাবছ যে প্যাটার্ন নিয়ে কথা বলার কী প্রয়োজন? তাহলে পাটিগণিত এবং বীজগণিতের দুটি খুব সাধারণ সমস্যার মধ্য দিয়ে প্যাটার্নের প্রয়োজনীয়তা বোঝার চেষ্টা করি, এসো। সমস্যা দুটি হলো :

১। ৫০ এর ৫% কত?

২। $(2 + b)^2 = ?$

সমস্যা দুটি সমাধান করতে তোমাদের নিশ্চয়ই তেমন কোনো কষ্ট হয়নি। প্রথম সমস্যাটিতে ৫০ এর জায়গায় ৫০০ আর ৫% এর জায়গায় ২৫% থাকলেও তোমার সমাধানের পদ্ধতি একই হতো। আবার দ্বিতীয় সমস্যাটিতেও ২ এর জায়গায় a , আর b এর জায়গায় ২৯ হলেও একই পদ্ধতিতে সমাধান করতে।

সুতরাং, একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতি ব্যবহার করে একজাতীয়, বা একই বৈশিষ্ট্যের, বা একই ধারার সমস্যা সমাধান করা সম্ভব। তাই গাণিতিক অনুসন্ধান করার সময় আমাদের লক্ষ থাকে সমস্যাটির প্যাটার্নটি বোঝার। একই জাতীয় সমস্যা সমাধানের পদ্ধতিকে আমরা **সূত্র বা Formula** বলি। প্যাটার্ন আবিষ্কার করতে না পারলে আমরা সমস্যা সমাধানের সূত্র খুঁজে পাব না। এই শ্রেণিতে সামনের অভিজ্ঞতাগুলোতে তোমরা অনেক সমস্যা

পাবে যেগুলো নিয়ে চিন্তা করে মজা পাবে। সমস্যাগুলোকে যদি একেকটি গাণিতিক অনুসন্ধান হিসেবে দেখ, তবে সেগুলোর প্যাটার্ন বুঝতে পারলেই সমাধান করাটা খুব সহজ হয়ে যাবে।

গাণিতিক অনুসন্ধান তথ্যের উৎস

আমরা এই অভিজ্ঞতায় গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ এবং অনুসন্ধানের মাধ্যমে প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণের কথা বলেছি। কিন্তু বাস্তব জীবনে প্রতিটি গাণিতিক অনুসন্ধানই তথ্য এবং উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়ে থাকে। সেসব তথ্য বা উপাত্ত বিভিন্ন নির্ধারিত উৎস থেকে সংগ্রহ করা হয়। অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে তথ্য বা উপাত্ত যতটা গুরুত্বপূর্ণ, তথ্যের উৎসও নির্ভরযোগ্য হওয়া একই রকম গুরুত্বপূর্ণ। একটি উদাহরণ দিলে বুঝতে সহজ হবে।

তোমাদের একটি ঘটনা বলি তাহলে সহজে বুঝতে পারবে। মনে করো তোমরা অষ্টম ‘জবা’ শাখার শিক্ষার্থী; তোমরা মোট ৪৫ জন ছেলেমেয়ে। তোমাদের বিদ্যালয়ের সব শ্রেণিতেই শিক্ষণীয় কোনো একটি জায়গায় ঘুরতে যাওয়ার পরিকল্পনা হচ্ছে। কিন্তু তোমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারছনা কোথায় যাবে। তোমাদের বন্ধু অনিক অষ্টম শ্রেণিতে ‘সূর্যমুখী’ শাখার বন্ধুদের নিকট থেকে জেনে এলো যে তারা চিড়িয়াখানায় ঘুরে এসেছে। অনিকের কাছ থেকে শুনে তোমাদের ক্লাসের ছেলেরা সিদ্ধান্ত নিয়ে ফেলল যে অষ্টম ‘জবা’ শাখার শিক্ষার্থীদেরও চিড়িয়াখানায় যাওয়া উচিত।



একটু চিন্তা করে বলো তো এই সিদ্ধান্ত গ্রহণের পদ্ধতির ভেতরে কোনো ভুল আছে কি না? যদি থাকে তাহলে কী কী লেখো।

তাহলে কি বুঝতে পারলে যে সঠিক/কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ করা কত জরুরি? তুমি কি নিজের ভাষায় ব্যাখ্যা করতে পারবে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস ব্যবহার করা কেন প্রয়োজন?

এ তো গেল স্বল্প পরিসরে সংগৃহীত উৎস। একটু বড়ো পরিসরে তথ্যের উৎসের গুরুত্ব কতটা একটু দেখা যাক।

তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে ২০২০ সালে কোভিড-১৯ মহামারিতে সারা পৃথিবীতে একটি ভয়াবহ বিপর্যয় শুরু হয়। সেই কঠিন সময়ে বিভিন্ন দেশের বিজ্ঞানীগণ অক্লান্ত পরিশ্রম করে সফলভাবে টিকা আবিষ্কার করে সারা পৃথিবীর মানুষকে মৃত্যুর হাত থেকে রক্ষা করেছিলেন। কিন্তু তোমরা কি জানো বিজ্ঞানীগণ কী পদ্ধতিতে টিকাগুলো আবিষ্কার করেছেন? তাঁরা কীভাবে পরীক্ষা করে দেখেছেন যে এই টিকা মানুষের জন্য কার্যকর?



যে কোনো টিকা তৈরি হলো একটি বৈজ্ঞানিক গবেষণার ফলাফল যা বিভিন্ন ধাপে সম্পন্ন করা হয়। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ হলো তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করা এবং তা বিশ্লেষণ করে সিদ্ধান্তে পৌঁছানো। নির্দিষ্ট সংখ্যক মানুষ ও অন্যান্য প্রাণীর উপর কয়েকটি ধাপে টিকা প্রয়োগ করে গবেষকগণ তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করেন। তারপর সেগুলোর চুলচেরা বিশ্লেষণ শেষ হলে আমরা টিকাগুলো পাই।

এই তথ্য সংগ্রহের জন্য একটি নির্ভরযোগ্য উৎস খুঁজে বের করা অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ একটি কাজ। এখন মনে করো বিজ্ঞানীগণ তোমার এলাকার ১০০ জন মানুষকে টিকা দিলেন, আর বললেন যে সামনের মাসে এসে তাঁদের স্বাস্থ্য কেমন আছে, এ সম্পর্কিত তথ্য নিয়ে যাবেন। কিন্তু পরের মাসে ঐ ১০০ জনের মধ্যে ৬৫ জন অন্য এলাকায় চলে গেলেন। এখন বিজ্ঞানীগণ যদি তোমার এলাকার যে কোনো ১০০ জনের থেকে উপাত্ত সংগ্রহ করেন এবং তার ভিত্তিতে টিকা তৈরি করেন, তুমি কি সেই টিকা নিবে?


☐

হ্যাঁ

☐

না

কেন?

তার মানে গবেষণা বা অনুসন্ধানের তথ্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে সংগ্রহ না করলে তার ফলাফল আমাদের কোনো কাজে আসে না। তাই না? কারণ উৎস যদি সঠিকভাবে নির্বাচন করা না হয় তাহলে তথ্য ও উপাত্ত সঠিক হবে না এবং প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যাবে না। টিকা তৈরির ক্ষেত্রেও বিজ্ঞানীগণ যদি সঠিক উৎস নির্বাচন করে তথ্য সংগ্রহ করতে না পারতেন, আমাদের পক্ষে কোভিড-১৯ মহামারি রোধে একটি কার্যকরী টিকা পাওয়া সম্ভব হতো না।

উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই

তথ্যের উৎস দুই প্রকার: ক) মানবীয় উৎস এবং খ) জড় উৎস।

মানবীয় উৎস হলো যখন একজন মানুষ তোমাকে সরাসরি/প্রত্যক্ষভাবে তথ্য দিচ্ছে। অপরদিকে জড় উৎস হলো যখন তোমাকে সক্রিয়ভাবে পর্যবেক্ষণ করে তথ্য সংগ্রহ করতে হচ্ছে। আবার, বলা হয়ে থাকে অনুসন্ধানের জন্য যে উপাত্তগুলো সহপাঠী বা পরিবারের কাছ থেকে সরাসরি অর্থাৎ প্রত্যক্ষভাবে সংগ্রহ করেছ, সেগুলো প্রাথমিক উপাত্ত (primary data)। আর যে উপাত্তগুলো স্কুল রেকর্ড বা অন্য কোনো নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে পরোক্ষভাবে সংগ্রহ

করেছ, সেগুলো মাধ্যমিক উপাত্ত (secondary data)। আমরা এভাবেও বলতে পারি, যে উৎস থেকে আমরা প্রাথমিক উপাত্ত পাই সেগুলো প্রাথমিক উৎস। আবার যে উৎসগুলো প্রাথমিক উৎস থেকে প্রাপ্ত তথ্য রেকর্ড করে রাখে যেমন— কাগজপত্র, রিপোর্ট কিংবা দলিল প্রভৃতি সেগুলো হচ্ছে তথ্যের মাধ্যমিক উৎস।



নির্ভরযোগ্য তথ্যের উৎসের বৈশিষ্ট্যগুলো হলো:

- ☐ যে বিষয়ে তথ্য সংগ্রহ করা হচ্ছে ঐ বিষয়ের সঙ্গে উৎসটির প্রাসঙ্গিকতা (credibility)
- ☐ কাক্ষিত তথ্যের ধরণ অনুযায়ী উৎসটির গ্রহণযোগ্যতা (acceptance)
- ☐ উৎসটির বিশ্বাসযোগ্যতা (trustworthiness)
- ☐ সংশ্লিষ্ট সকলকে উৎস হিসেবে বিবেচনা করা (representativeness)

এই যে বিভিন্ন ধরনের উৎস সম্পর্কে জানলে, তোমরা কি বলতে পারবে, কোন ধরনের উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা বেশি? নিশ্চয়ই প্রাথমিক উপাত্ত, তাই না? কারণ, প্রাথমিক উপাত্ত সরাসরি উৎস থেকে সংগ্রহ করা হয়। তাই ভুল বা বিকৃত হওয়ার সম্ভাবনা কম। অন্যদিকে, মাধ্যমিক উপাত্ত অনুসন্ধানকারী অনুসন্ধানের প্রয়োজনে কোনো পরোক্ষ উৎস থেকে সংগ্রহ করে থাকে। সে কারণেই উপাত্তের সঠিকতা যাচাই করার তেমন কোনো সুযোগ থাকে না। ফলে উপাত্ত ভুল বা বিকৃত থাকার সম্ভাবনা একেবারে উড়িয়ে দেওয়া যায় না। তাই মাধ্যমিক উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা প্রাথমিকের তুলনায়

অপেক্ষাকৃত কম। কিন্তু এর অর্থ এই নয় যে মাধ্যমিক উৎস থেকে প্রাপ্ত উপাত্তের গুরুত্ব কম। বরং অনেক ক্ষেত্রে প্রাথমিক উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করা সম্ভব হয় না; সেক্ষেত্রে মাধ্যমিক উৎস আমাদের সাহায্য করে। যেমন—যখন সদ্যজাত শিশুদের রোগ নির্ণয় করার প্রয়োজন হয় তখন চিকিৎসক অভিভাবকের কাছে বিভিন্ন প্রশ্ন করে এবং শিশুটির অভিভাবক এখানে মাধ্যমিক উৎসের কাজ করে।

একটি উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই করার জন্য কিছু বৈশিষ্ট্য দেওয়া আছে। যে কোনো উৎস নির্বাচনের ক্ষেত্রে তোমরা এই বৈশিষ্ট্যগুলো মিলিয়ে দেখবে।

এবার পরের সমস্যাটি জোড়ায় আলোচনা করে সমাধান করো।

জোড়ায় কাজ

সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করে লেখো।

নিচের বক্সে একটি টিকা তৈরির সময় বিজ্ঞানীগণ কোন উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করেছিল তার একটি বর্ণনা দেওয়া আছে। তোমাদের কাজ হবে তথ্যের উৎসের ধরন ও বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করা।

টিকার কার্যকারিতা পরীক্ষার জন্য তথ্য সংগ্রহের প্রক্রিয়া

প্রথমে বিজ্ঞানীগণ বিজ্ঞানাগারে টিকাটি তৈরি করেন। এরপর ঐ টিকা বিভিন্ন দলের মানুষের উপর প্রয়োগ করে, তাদের কাছ থেকে টিকার কার্যকারিতা সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করেন। টিকাটি তৈরি করার জন্য বিজ্ঞানীগণ ৩টি ধাপে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে তথ্য সংগ্রহ করেন। ২০২০ সালে জুলাই মাসে, টিকার তৃতীয় ধাপের পরীক্ষা (trial) পরিচালনা করা হয়। সারা বিশ্ব থেকে ৪৬,৩৩১ জন বিভিন্ন বয়সি মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেন। তাদের সকলকে টিকা প্রদান করে, এর কার্যকারিতা পরীক্ষা করার জন্য বিজ্ঞানীগণ তথ্য সংগ্রহ করেন। প্রাপ্ত তথ্যগুলো ভালোমতো বিশ্লেষণ ও পরীক্ষার মাধ্যমে ঐ টিকা কার্যকর হিসেবে প্রমাণ পাওয়া যায়।

নানা বৈশিষ্ট্যের মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেছিলো যাতে বিজ্ঞানীগণ নিশ্চিত করতে পারেন যে এই টিকাটি বিভিন্ন ধরনের মানুষের জন্য কার্যকরী। যেমন— এই পরীক্ষায় ৪৯.১% পুরুষ এবং ৫০.৯% নারী ছিলেন। এশিয়ান, আফ্রিকান, ল্যাটিন প্রভৃতি দলের মানুষ ছিলেন। এছাড়াও অংশগ্রহণকারীদের মধ্যে বিভিন্ন বয়সের মানুষের উপস্থিতি নিশ্চিত করা হয়েছিল। নিচের ছকে বয়স অনুযায়ী মানুষের সংখ্যা দেয়া হলো :

বয়স (বছর)	অংশগ্রহণকারীর সংখ্যা
১২-১৫	২,২৬০
১৬-১৭	৭৫৪
১৮-৫৫	২৫,৪২৭
৫৬+	১৭,৮৭৯

- (ক) টিকা তৈরির জন্য কোন ধরনের উৎস থেকে বিজ্ঞানীগণ তথ্য সংগ্রহ করেছিলেন? কেন?
- (খ) টিকা তৈরির জন্য যে উৎস ব্যবহার করা হয়েছিল তাদের সবার বৈশিষ্ট্য কি একই রকম ছিল? ভিন্নতা থাকলে তা বর্ণনা করো।
- (গ) তথ্য সংগ্রহের উৎসের ক্ষেত্রে বয়সের ভিন্নতা থাকলে কী সুবিধা হয়েছে বলে তুমি মনে করো, লেখো।
- (ঘ) এই টিকা তৈরির ক্ষেত্রে পৃথিবীর বিভিন্ন এলাকা থেকে বিভিন্ন জাতির মানুষের কাছ থেকে তথ্য সংগ্রহ করা হয়েছিল। এই কাজটি উপরের উৎসের নির্ভরযোগ্যতার কোন বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করছে?

শেষ কথা

অভিজ্ঞতাটিতে তুমি গাণিতিক অনুসন্ধান বা সমস্যা সমাধানের ধাপ, অনুসন্ধানের মাধ্যমে প্যাটার্ন আবিষ্কার এবং অনুসন্ধানের জন্য প্রয়োজনীয় তথ্যের উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাইয়ের বিষয়ে অভিজ্ঞতা অর্জন করতে চেষ্টা করেছে। তার মধ্যে কিছু খুঁটিনাটি বিষয় রয়েছে যেগুলো হাতে-কলমে চর্চা করতে গেলে আরও পরিষ্কার হবে। আশা করা যায়, সামনের অভিজ্ঞতাগুলোতে তুমি অনুসন্ধানী দৃষ্টি দিয়ে সমস্যাগুলোকে বিশ্লেষণ এবং সমাধানের চেষ্টা করবে। এটি এই অভিজ্ঞতার জন্য শেষ কথা হলেও, তোমার গণিত শিক্ষার জন্য একটি নতুন আনুষ্ঠানিক যাত্রা শুরু হোক গাণিতিক অনুসন্ধান দিয়ে।