দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression) :** বীজগাণিতিক রাশিকে সংৰেপে রাশি বলা হয়। যেমন : $2x$, $2x + 3y$, $6x + 4y^2$ ইত্যাদি প্রত্যেকেই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি। এদের প্রতীকটিকে চলক বলা হয়।
- **বহুপদী :** বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূ প রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে। পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধু অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল।

  x একটি চলক হলে a, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ ইত্যাদি আকারের রাশি x চলকের বহুপদী। এরূ প এক চলকের বহুপদী, দুই চলকের বহুপদী, তিন চলকের বহুপদী হতে পারে।
- **ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য**

  i. $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে

  ii. $P(x)$ বহুপদীকে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

  iii. $P(a) = 0$ হলে $(x - a)$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক

  vi. $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক হলে $P(a) = 0$
- **সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র–ক্রমিক রাশি**

  সমমাত্রিক বহুপদী (Homogeneous Polynomial) : কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী বলে।

  প্রতিসম রাশি (Symmetric) : একাধিক চলকবিশিষ্ট কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়।

  $ab + bc + ca$ রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।

  চক্র–ক্রমিক রাশি (Cxclic) : চক্র–ক্রমিক রাশিতে চলকগুলোর স্থান চক্রাকারে পরিবর্তন হলেও রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে।

  তিন চলকের প্রত্যেক রাশি চক্র–ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র–ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।

  $x^2 + y^2 + z^2$ চক্র–ক্রমিক রাশির কারণে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2 + z^2 + x^2$ পূর্বের রাশির সমান হয়।
- **চক্র–ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশেৱষণ**

  ক. কোনো চক্র–ক্রমিক বহুপদীর $(a - b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b - c)$ এবং $(c - a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

  খ. এক মাত্রার এবং দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র–ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a + b + c)$ ও $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুবক।

  গ. দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূ প পদগুলোর সহগ পরস্পর সমান হবে।
- **মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fractions) :** একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলে।

  যেমন, $\frac{x}{(x-1)(x-5)}$ এবং $\frac{x^2+1}{(x+8)(x^2+5x+7)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

  মূলদীয় ভগ্নাংশের সরলীকরণের সময় নিম্নোক্ত অভেদগুলো বিনা প্রমাণে গ্রহণ করা যায় :

  i. $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

  ii. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

  iii. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a - b)(b - c)(c - a)$

  iv. $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a)$

  v. $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

  vi. $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$

  vii. $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

  viii. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

  Note : এই অধ্যায়ের প্রতিটি অঙ্কের সমাধান করতে এসব সূত্র ব্যবহার করতেই হবে। তাই সূত্রগুলো মুখস্থ রাখা অত্যন্ত জরবরি।
- **আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fraction) :** যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফলরূ পে প্রকাশ করা যায়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

  ধরা যাক, $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী এবং লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেৰা ছোট হয় তাহলে ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper Fraction)। যদি $D(x)$ এর মাত্রা $N(x)$ এর চেয়ে ছোট বা সমান হয়, তবে সেই ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper Fraction) বলা হয়।
- **সমতা সূত্র :**

  i. যদি সকল x এর জন্য $ax + b = px + q$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাই, $b = q$ এবং $a + b = p + q$ যা থেকে দেখা যায়, $a = p$, $b = q$.

ii. যদি সকল x এর জন্য $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ হয়; তবে $x = 0$, $x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাই, $c = r$, $a + b + c = p + q + r$ এবং $a - b + c = p - q + r$; যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p$, $b = q$, $c = r$.

iii. সাধারণভাবে, দেখা যায় যে, যদি সকল x এর জন্য $a_ox^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = p_ox^n + p_1x^{n-1} + ... + p_{n-1}x + p_n$ হয়,

তবে $a_o = p_o$, $a_1 = p_1$, ..., $a_{n-1} = p_{n-1}$, $a_n = p_n$

অর্থাৎ সমতা চিহ্নের উভয়পক্ষে x এর একই ঘাতের সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. **নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?**

ক $a + b + c$ খ $xy + yz + zx$

গ $x^2 - y^2 + z^2$ ঘ $2a^2 - 5bc - c^2$

সঠিক উত্তর : ক, খ ও গ

ব্যাখ্যা : একাধিক চলক সংবলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম রাশি বলে।

ক. $a + b + c$ = তিনটি চলকের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

খ. $xy + yz + zx$ = তিনটি চলকের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

গ. $x^2 - y^2 + z^2$ = রাশিটি x ও z এর সাপেক্ষে প্রতিসম।

ঘ. $2a^2 - 5bc - c^2$ = রাশিটি প্রতিসম নয় কারণ a, b, c এর মধ্যে যেকোনো দুইটি চলকের স্থান পরিবর্তন করলে রাশিটির মান পরিবর্তন হয়ে যায়।

২. (i) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

(ii) $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি চক্র–ক্রমিক

(iii) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$ এর সরলীকৃত মান $\frac{1}{x-1}$

উপরের উক্তিগুলোর কোনগুলো সত্য?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ● i, ii ও iii

ব্যাখ্যা :

(i) দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$

$\therefore a + b = -c$

বামপক্ষ $= a^3 + b^3 + c^3$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$

$= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3$

$= -c^3 + 3ab + c^3$

$= 3abc$

= ডানপক্ষ

(ii) দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

এখানে, x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে, রাশিটির কোনো পরিবর্তন হয় না। সুতরাং রাশিটি চক্রক্রমিক।

(iii) $\frac{1}{x+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{(x^2)-(1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2(x^2-1)+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

বহুপদী $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$। এই তথ্যের আলোকে নিচের ৩ এবং ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩. **p এর মান কত?**

ক -7 ● 7 গ $\frac{54}{7}$ ঘ 477

৪. **বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?**

ক $(x - 1)(x - 1)$ খ $(x + 1)(x - 2)$

গ $(x - 1)(x + 3)$ ● $(x + 1)(x - 1)$

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$

সমাধান : মনে করি, $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$

$(x - 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $P(2) = 0$ হয়।

এখন, $P(2) = 2^4 - 5.2^3 + 7.2^2 - a$

$= 16 - 40 + 28 - a$

$= 4 - a$

যেহেতু, $P(2) = 0$

সুতরাং, $4 - a = 0$

$\therefore a = 4$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ মনে কর, $P(x) = x^n - a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

ক. দেখাও যে, $(x - a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x - a)Q(x)$ হয়।

সমাধান : $P(x) = x^n - a^n$

$P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$

$\therefore P(a) = a^n - a^n = 0$

$P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়।

$\therefore (x - a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

$(x - a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore P(x) = x^n - a^n$

$= x^n - x^{n-1}a + x^{n-1}a - x^{n-2}a^2 + x^{m-2}a^2 - x^{n-3}a^3 + ... + x.a^{n-1} - a^n$

$= x^{n-1}(x - a) + x^{n-2}a(x - a) + x^{n-3}a^2(x - a) + ...+ a^{n-1}(x - a)$

$= (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3}a^2 + ...+ a^{n-1})$

যেহেতু $P(x) = (x - a)\,Q(x)$

$\therefore\ Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots\ldots\ldots + a^{n-1}$ **(Ans.)**

(খ) n জোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, (x + a) বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন Q(x) নির্ণয় কর যেন P(x) = (x + a) Q(x) হয়।

সমাধান : $P(x) = x^n - a^n$

n জোড় সংখ্যা হলে $n = 2k$ (এখানে K স্বাভাবিক সংখ্যা)

$\therefore\ P(x) = x^{2k} - a^{2k}$

P(x) কে (x + a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে P(–a)

$\therefore\ P(-a) = (-a)^{2k} - a^{2k}$

$= a^{2k} - a^{2k} = 0$

P(x) কে (x + a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়।

$\therefore$ (x + a), P(x) এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

$\therefore\ P(x) = x^n - a^n$

$= x^n + x^{n-1}.a - x^{n-1}.a + x^{n-2}.a^2 - x^{n-2}.a^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + xa^{n-1} - a^n$

$= x^{n-1}(x + a) - x^{n-2}.a(x + a) + x^{n-3}.a^2(x + a) - \ldots\ldots\ldots - a^{n-1}(x + a)$

$= (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots\ldots\ldots - a^{n-1})$

যেহেতু, $P(x) = (x + a)\,Q(x)$

$\therefore\ Q(x) = x^{n-1} - x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}.a^{n-1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ মনে কর, $P(x) = x^n + a^n$ যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, (x + a) বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন Q(x) নির্ণয় কর যেন,
P(x) = (x + a) Q(x) হয়।

সমাধান : $P(x) = x^n + a^n$

n বিজোড় ধনাত্মক সংখ্যা হলে, $n = 2k + 1$ (এখানে k স্বাভাবিক সংখ্যা)

$\therefore\ P(x) = x^{2k+1} + a^{2k+1}$

P(x) কে x + a দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে P(–a)

$\therefore\ P(-a) = (-a)^{2k+1} + a^{2k+1}$

$= -a^{2k+1} + a^{2k+1}$

$= 0$

P(x) কে P(x + a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হয়।

$\therefore$ (x + a), P(x) এর একটি উৎপাদক। (দেখানো হলো)

$\therefore\ P(x) = x^n + a^n$

$= x^n + x^{n-1}.a - x^{n-1}.a - x^{n-2}.a^2 + x^{n-2}.a^2 + x^{n-3}.a^3 - \ldots\ldots\ldots\ldots + xa^{n-1} + a^n$

$= x^{n-1}(x + a) - x^{n-2}.a(x + a) + x^{n-3}.a^2(x + a) - \ldots\ldots + a^{n-1}(x + a)$

$= (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}.a + x^{n-3}.a^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots(-1)^{n-1}a^{n-1}$

$\because\ P(x) = (x + a)\,Q(x)$

$\therefore\ Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ মনে কর, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$, দেখাও যে, (x – r) যদি P(x) এর একটি উৎপাদক হয়, তবে P(x) এর আরেকটি উৎপাদক (rx – 1)।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$........ (i)

[যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

যেহেতু (x – r), P(x) এর একটি উৎপাদক, সেহেতু P(r) = 0

এখন, $P(r) = ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a$

$\therefore\ ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0$ .... (ii)

ধরি, $rx - 1 = 0$

বা, $rx = 1$

$\therefore\ x = \frac{1}{r}$

এখন, $P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$

$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$

$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$

$= \frac{0}{r^5}$ [(ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

$= 0$

যেহেতু (i) নং বহুপদীতে $x = \frac{1}{r}$ বসালে প্রদত্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়

সেহেতু (rx – 1) উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

$\therefore$ (rx – 1) ও P(x) এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ উৎপাদকে বিশেরষণ কর :

(i) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

সমাধান : মনে করি, $P(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$\therefore\ P(-1) = (-1)^4 + 7(-1)^3 + 17(-1)^2 + 17(-1) + 6$

$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$

$= 24 - 24$

$= 0$

সুতরাং (x + 1), P(x) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$

$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x - 2)$

$= (x + 1)(x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 - x - 2)$

$= (x + 1)\{(x + 2)^3 - 1(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)\{(x + 2)^2 - 1\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 2 + 1)(x + 2 - 1)$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 1)$

$= (x + 1)^2(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

(ii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

সমাধান : মনে করি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

$\therefore\ P(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$

$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$

$= 14 - 14$

$= 0$

সুতরাং (a + 1), P(a)-এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$

$= 4a^3(a + 1) + 8a^2(a + 1) - a(a + 1) - 2(a + 1)$

$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$

$= (a+1)\{4a^2(a+2) - 1(a+2)\}$

$= (a+1)(a+2)(4a^2 - 1)$

$= (a+1)(a+2)\{(2a)^2 - 1\}$

$= (a+1)(a+2)(2a+1)(2a-1)$

$= (2a-1)(a+1)(a+2)(2a+1)$ **(Ans.)**

(iii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

সমাধান : মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1$

$= -1 + 2 - 2 + 1$

$= 3 - 3$

$= 0$

সুতরাং $(x+1)$, $P(x)$ –এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$

$= x^2(x+1) + x(x+1) + 1(x+1)$

$= (x+1)(x^2 + x + 1)$ **(Ans.)**

(iv) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি,

$= x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$

$= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$

$= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z)$

$= (x+y+z)(xy+yz+zx)$ **(Ans.)**

(v) $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি,

$(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$

$= (x^2+2x+1)(y-z) + (y^2+2y+1)(z-x) + (z^2+2z+1)(x-y)$

$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y) + (y-z+z-x+x-y)$

$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2(xy - zx + yz - xy + zx - yz) + 0$

$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2 \times 0$

$= x^2(y-z) + y^2z - xy^2 + z^2x - yz^2$

$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y^2 - z^2)$

$= (y-z)\{x^2 + yz - x(y+z)\}$

$= (y-z)(x^2 + yz - xy - zx)$

$= (y-z)(x^2 - xy - zx + yz)$

$= (y-z)\{x(x-y) - z(x-y)\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= (y-z)(x-y)\{-(z-x)\}$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$ **(Ans.)**

(vi) $b^2c^2(b^2-c^2) + c^2a^2(c^2-a^2) + a^2b^2(a^2-b^2)$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি,

$b^2c^2(b^2-c^2) + c^2a^2(c^2-a^2) + a^2b^2(a^2-b^2)$

$= b^2c^2(b^2-c^2) + c^4a^2 - c^2a^4 + a^4b^2 - a^2b^4$

$= b^2c^2(b^2-c^2) + a^4b^2 - c^2a^4 - a^2b^4 + c^4a^2$

$= b^2c^2(b^2-c^2) + a^4(b^2-c^2) - a^2(b^4-c^4)$

$= (b^2-c^2)\{b^2c^2 + a^4 - a^2(b^2+c^2)\}$

$= (b^2-c^2)(b^2c^2 + a^4 - a^2b^2 - c^2a^2)$

$= (b^2-c^2)\{a^2(a^2-b^2) - c^2(a^2-b^2)\}$

$= (b^2-c^2)(a^2-b^2)(a^2-c^2)$

$= (b^2-c^2)(a^2-b^2)\{-(c^2-a^2)\}$

$= -(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

অতএব, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2 = 0$

যেহেতু তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য, সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

বা, $a = b$

অনুরূপভাবে, $b = c$ এবং $c = a$

$\therefore a = b = c$

সুতরাং $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

সমাধান : এখানে,

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x^2)\}$

$= \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)\{(b+c-a-c-a+b)^2 + (c+a-b-a-b+c)^2 + (a+b-c-b-c+a)^2$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(2b-2a)^2 + (2c-2b)^2 + (2a-2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[\{-2(a - b)\}^2 + \{-2(b - c)\}^2 + \{-2(c - a)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ সরল কর :

(a) $\frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$

সমাধান :

$\frac{a^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2}{(c - a)(c - b)}$

$= \frac{a^2}{-(a - b)(c - a)} + \frac{b^2}{-(b - c)(a - b)} + \frac{c^2}{-(c - a)(b - c)}$

$= \frac{a^2(b - c) - b^2(c - a) + c^2(a - b)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$

চক্রক্রমিক রাশির সূত্রানুযায়ী

$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a - b)(b - c)(c - a)}{-(a - b)(b - c)(c - a)} = 1$ **(Ans.)**

(b) $\frac{a}{(a - b)(a - c)(x - a)} + \frac{b}{(b - a)(b - c)(x - b)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)(x - c)}$

সমাধান :

$\frac{a}{(a - b)(a - c)(x - a)} + \frac{b}{(b - a)(b - c)(x - b)} + \frac{c}{(c - a)(c - b)(x - c)}$

$= \frac{a}{-(a - b)(c - a)(x - a)} + \frac{b}{-(a - b)(b - c)(x - b)} + \frac{c}{-(c - a)(b - c)(x - c)}$

$= \frac{-a}{(a - b)(c - a)(x - a)} - \frac{b}{(a - b)(b - c)(x - b)} - \frac{c}{(c - a)(b - c)(x - c)}$

$= \frac{-a(b - c)(x - b)(x - c) - b(c - a)(x - a)(x - c) - c(a - b)(x - a)(x - b)}{(a - b)(b - c)(c - a)(x - a)(x - b)(x - c)}$

এখানে, লব

$= -a(b - c)(x^2 - bx - cx + bc) - b(c - a)(x^2 - ax - cx + ca) - c(a - b)(x^2 - ax - bx + ab)$

$= -a(b - c)\{x^2 - (b + c)x + bc\} - b(c - a)\{x^2 - x(c + a) + ca\} - c(a - b)\{x^2 - x(a + b) + ab\}$

$= -ax^2(b - c) + a(b - c)(b + c)x - abc(b - c) - bx^2(c - a) + b(c - a)(c + a)x - abc(c - a) - cx^2(a - b) + c(a - b)(a + b)x - abc(a - b)$

$= -x^2\{a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)\} + x\{a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)\} - abc(b - c + c - a + a - b)$

$= -x^2(ab - ca + bc - ab + ca - bc) + x(a - b)(b - c)(c - a) - abc \times 0$

$= -x^2 \times 0 + x$

$= x(a - b)(b - c)(c - a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $\frac{x(a - b)(b - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)(x - a)(x - b)(x - c)}$

$= \frac{x}{(x - a)(x - b)(x - c)}$ **(Ans.)**

(c) $\frac{(a + b)^2 - ab}{(b - c)(a - c)} + \frac{(b + c)^2 - bc}{(c - a)(b - a)} + \frac{(c + a)^2 - ca}{(a - b)(c - b)}$

সমাধান :

$\frac{(a + b)^2 - ab}{(b - c)(a - c)} + \frac{(b + c)^2 - bc}{(c - a)(b - a)} + \frac{(c + a)^2 - ca}{(a - b)(c - b)}$

$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - ab}{-(b - c)(c - a)} + \frac{b^2 + 2bc + c^2 - bc}{-(c - a)(a - b)} + \frac{c^2 + 2ca + a^2 - ca}{-(a - b)(b - c)}$

$= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (b - c)(b^2 + bc + c^2) + (c - a)(c^2 + ca + a^2)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \frac{(a^3 - b^3) + (b^3 - c^3) + (c^3 - a^3)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \frac{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= \frac{0}{(a - b)(b - c)(c - a)}$

$= 0$ **(Ans.)**

(d) $\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{x^{16} - 1}$

সমাধান :

$\frac{1}{1 + x} + \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{x^{16} - 1}$

$= \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{x - 1}\right) + \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^4 + 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{x - 1 - x - 1}{(x + 1)(x - 1)} + \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^4 + 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-2}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^4 + 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-2x^2 - 2 + 2x^2 - 2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)} + \frac{4}{x^4 + 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-4}{x^4 - 1} + \frac{4}{x^4 + 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-4x^4 - 4 + 4x^4 - 4}{(x^4 - 1)(x^4 + 1)} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-8}{x^8 - 1} + \frac{8}{x^8 + 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-8x^4 - 8 + 8x^8 - 8}{(x^8 + 1)(x^8 - 1)} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{-16}{x^{16} - 1} + \frac{16}{x^{16} - 1} + \frac{1}{x - 1}$

$= \frac{1}{x - 1}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

(a) $\frac{5x + 4}{x(x + 2)}$

সমাধান : মনে করি, $\frac{5x+4}{x(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x + 4 \equiv A(x+2) + B(x)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$5.0 + 4 = A(0+2) + B \times 0$

বা, $4 = 2A$

বা, $2A = 4$

$\therefore A = 2$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$5.(-2) + 4 = A(-2+2) + B(-2)$

বা, $-2B = -6$

$\therefore B = 3$

এখন, A এবং B এর মান সমীকরণ (i)–এ বসিয়ে পাই,

$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$; এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(b) $\mathbf{\frac{x+2}{x^2-7x+12}}$

সমাধান : এখানে, $\frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x+2}{x^2-4x-3x+12}$

$= \frac{x+2}{x(x-4)-3(x-4)}$

$= \frac{(x+2)}{(x-3)(x-4)}$

মনে করি, $\frac{(x+2)}{(x-3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-4)}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 2 \equiv A(x-4) + B(x-3)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 + 2 = A(3-4) + B(3-3)$

বা, $-A = 5$

$\therefore A = -5$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 + 2 = A(4-4) + B(4-3)$

$\therefore B = 6$

এখন, A ও B এর মান সমীকরণ (i)–এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{-5}{x-3} + \frac{6}{(x-4)}$

$= \frac{6}{(x-4)} - \frac{5}{x-3}$; এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(c) $\mathbf{\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}}$

সমাধান : মনে করি,

$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x-2)(x+3) + B.x(x+3) + C.x(x-2)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$(0)^2 - 9.0 - 6 = A(0-2)(0+3) + B.0(0+3) + C.0(0-2)$

বা, $-6 = -6A$

বা, $A = 1$

$\therefore A = 1$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 - 9.2 - 6 = A(2-2)(2+3) + B.2(2+3) + C.2(2-2)$

বা, $4 - 18 - 6 = 10B$

বা, $10B = -20$

$\therefore B = -2$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 - 9(-3) - 6 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3)(-3+3) + C(-3)(-3-2)$

বা, $9 + 27 - 6 = 0 + 0 + 15C$

বা, $15C = 30$

$\therefore C = 2$

এখন A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$; এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(d) $\mathbf{\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}}$

সমাধান :

মনে করি, $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ … … … … (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$ … … … … (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 - 4(-1) - 7 = A\{(-1)^2 + 4\} + \{B(-1) + C\}(-1+1)$

বা, $1 + 4 - 7 = 5A$

বা, $5 - 7 = 5A$

বা, $-2 = 5A$

$\therefore A = -\frac{2}{5}$

আবার সমীকরণ (ii) এর x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 1$ .... (iii)

এবং $B + C = -4$........ (iv)

সমীকরণ (iii)–এ $A = -\frac{2}{5}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{-2}{5} + B = 1$

বা, $B = 1 + \frac{2}{5}$

$\therefore B = \frac{7}{5}$

সমীকরণ (iv)–এ $B = \frac{7}{5}$ বসিয়ে পাই,

$\frac{7}{5} + C = -4$

বা, $C = -4 - \frac{7}{5}$

বা, $C = \frac{-20-7}{5}$

$\therefore C = \frac{-27}{5}$

সমীকরণ (i) এ A, B এবং C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{\frac{-2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4} = \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{x+1} + \frac{7x-2}{x^2+4}\right)$$

$\therefore \frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\left(\frac{7x-27}{x^2+4} - \frac{2}{x+1}\right)$; এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(e) $\mathbf{\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}}$

সমাধান : মনে করি,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \text{ .... (i)}$$

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(x+3)(2x+1) + C(2x+1)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = A(-3+3)^2 + B(-3+3)\{2(-3)+1\} + C\{2(-3)+1\}$

বা, $9 = -5C$

বা, $C = -\frac{9}{5}$

$\therefore C = -\frac{9}{5}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 + B\left(-\frac{1}{2}+3\right)\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\} + C\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\}$

বা, $\frac{1}{4} = A\left(\frac{-1+6}{2}\right)^2 + B.0 + C.0$

বা, $\frac{1}{4} = A\left(\frac{5}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A\,\frac{25}{4}$

$\therefore A = \frac{1}{25}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + 2B = 1$

বা, $2B = 1 - \frac{1}{25}$

বা, $2B = \frac{25-1}{25}$

বা, $B = \frac{24}{25 \times 2}$

$\therefore B = \frac{12}{25}$

এখন, A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2}$$

$\therefore \frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$;

এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ চলক x এর একটি বহুপদী $\mathbf{P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3}$

ক. বহুপদীটির আদর্শরূপ লেখ।

খ. P(x) এর একটি উৎপাদক $(x+2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. যদি $Q(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হয়, তবে P(x) এবং Q(x) এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

x চলকের বহুপদীকে x–এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজালে বহুপদীর এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটির আদর্শরূপ বলে।

$\therefore$ P(x) এর আদর্শরূপ হলো : $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $(x+2)$, P(x)–এর একটি উৎপাদক হবে যদি $P(-2) = 0$ হয়।

এখন, $P(-2)$

$= 7(-2)^2 - 3(-2) + 4(-2)^4 - a + 12(-2)^3$

$= 28 + 6 + 64 - a - 96$

$= 2 - a$

যেহেতু $P(-2) = 0$ সুতরাং, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $Q(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$

যেহেতু $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, সুতরাং $(2x-1)$, Q(x) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $Q(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$
$= 6x^3 - 3x^2 + 2x^2 - x - 4x + 2$
$= 3x^2(2x-1) + x(2x-1) - 2(2x-1)$
$= (2x-1)(3x^2 + x - 2)$
$= (2x-1)(3x^2 + 3x - 2x - 2)$
$= (2x-1)\{3x(x+1) - 2(x+1)\}$
$= (2x-1)(x+1)(3x-2)$

আবার, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$
$= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$ $[\because a = 2]$

$\therefore P(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$
$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$
$= 14 - 14$
$= 0$

$\therefore (x+1)$, P(x) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
$= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2$
$= 4x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1)$
$= (x+1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)$
$= (x+1)\{4x^2(x+2) - 1(x+2)\}$
$= (x+1)(x+2)(4x^2 - 1)$
$= (x+1)(x+2)\{(2x)^2 - 1\}$
$= (x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)$

$\therefore$ P(x) ও Q(x) উভয় বহুপদীর সাধারণ উৎপাদক $(x+1)$ ও $(2x-1)$

(Ans.)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $(x + y + z) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx)$

গ. যদি $x = (b + c - a)$, $y = (c + a - b)$, এবং $z = (a + b - c)$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

এখন, রাশিটিতে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3y.z.x$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(x, y, z) = F(y, z, x) = F(z, x, y)$

দেখা যাচ্ছে চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

সুতরাং $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)\{(x + y)^2 - (x + y)z + z^2\} - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy\,(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - zx - yz - 3xy)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

প্রশ্নানুসারে $F(x, y, z) = 0$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ $[\because x + y + z \neq 0]$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ .... (i)

$\therefore F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)[\{-2(a - b)\}^2 + \{-2\,(b - c)\}^2 + \{-2(c - a)\}^2]$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$\therefore F(x, y\, z) = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y\, z) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) : 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$= 1 : 4$

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ চলক x এর চারটি রাশি $(x + 3)$, $(x^2 - 9)$, $(x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$

ক. উপরিউক্ত রাশিগুলো হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ বের কর।

খ. $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে উপস্থাপন কর।

গ. উপরের প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টিকে সরলরূপে প্রকাশ কর।

সমাধান :

ক. প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $= \frac{x^2 - 9}{x^3 + 27}$

এবং অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $= \frac{x^4 - 81}{x^3 + 27}$

খ. প্রদত্ত ভগ্নাংশ $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} = \frac{x^3 + 3^3}{x^2 - 3^2}$

$= \frac{(x + 3)(x^2 - x - 3 + 3^2)}{(x + 3)(x - 3)}$

$= \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3}$

$= \frac{x(x - 3) + 9}{x - 3}$

$= \frac{x\,(x - 3)}{(x - 3)} + \frac{9}{x - 3} = x + \frac{9}{x - 3}$ **(Ans.)**

গ. প্রথম রাশি $(x + 3)$ এর গুণাত্মক বিপরীত রাশি $\frac{1}{x + 3}$

দ্বিতীয় রাশি $(x^2 - 9)$ এর গুণাত্মক বিপরীত রাশি $\frac{1}{x^2 - 9}$

এবং চতুর্থ রাশি $(x^4 - 81)$ এর গুণাত্মক বিপরীত রাশি $\frac{1}{x^4 - 81}$

$\therefore$ গুণাত্মক বিপরীত রাশিগুলোর সমষ্টি

$= \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{x^4 - 81}$

$= \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{(x^2)^2 - (9)^2}$

$= \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{x^2 - 9} + \frac{1}{(x^2 + 9)(x^2 - 9)}$

$= \frac{1}{x + 3} + \frac{x^2 + 9 + 1}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}$

$= \frac{(x - 3)(x^2 + 9) + x^2 + 10}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}$

$= \frac{x^3 + 9x - 3x^2 - 27 + x^2 + 10}{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}$

$= \frac{x^3 - 2x^2 + 9x - 17}{x^4 - 81}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ $(x + 1)^3\, y + (y + 1)^2$ রাশিটিকে

ক. x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুবক পদ নির্ণয় কর।

খ. y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুবক পদ নির্ণয় কর।

গ. x ও y চলকের বহুপদীরূপে বিবেচনা করে তার মাত্রা নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $(x + 1)^3 y + (y + 1)^2$

$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) y + y^2 + 2y + 1$

$= x^3y + 3x^2y + 3xy + y + y^2 + 2y + 1$

$= x^3y + 3x^2y + 3xy + (y^2 + 3y + 1)$ এটি x চলকের আদর্শ আকার।

এখানে, x চলকের মাত্রা = 3

মুখ্য সহগ = y

এবং ধ্রুবক পদ = $y^2 + 3y + 1$

খ. দেওয়া আছে, $(x + 1)^3y + (y + 1)^2$

$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) y + y^2 + 2y + 1$

$= x^3y + 3x^2y + 3xy + y + y^2 + 2y + 1$

$= y^2 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 3) y + 1$; এটি y চলকের আদর্শ আকার।

এখানে, y চলকের মাত্রা = 2

মুখ্য সহগ = 1

এবং ধ্রুবক পদ = 1

গ. দেওয়া আছে, $(x + 1)^3y + (y + 1)^2$

$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) y + y^2 + 2y + 1$

$= x^3y + 3x^2y + 3xy + y^2 + 3y + 1$;

এখানে x ও y এর ঘাতের যোগফলের সর্বোচ্চ মান 4 যা x^3y পদে পাওয়া যায়।

∴ রাশিটিকে x ও y চলকের বহুপদী বিবেচনা করলে বহুপদীটির মাত্রা 4.

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. $x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 5$ বহুপদীর মুখ্য সহগ কোনটি?

ⓚ – 5 ● 1 ⓖ 3 ⓘ 6

২. $P(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$ হলে, $P(1, -2)$ এর মান কত?

ⓚ 9 ⓛ 1 ● – 1 ⓘ – 9

৩. $x^3 + 2x^2 + 2x + a$ এর একটি উৎপাদক $(x + 1)$ হলে, a এর মান কত?

ⓚ – 5 ⓛ – 1 ● 1 ⓘ 5

৪. $x^4 + x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 2)$ হলে a এর মান কত?

ⓚ 44 ⓛ 48 ⓖ 50 ● 52

৫. $a + b + c = 0$ হলে, $a^3 + b^3 + c^3$ এর মান কত?

ⓚ 0 ⓛ $(a - b) (b - c) (c - a)$

● 3abc ⓘ abc

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৬ – ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

বহুপদী $x^3 + 2x^2 - ax - 6$ এর একটি উৎপাদক $(x + 3)$।

৬. বহুপদীটির মুখ্য সহগ কত?

ⓚ – 6 ● 1 ⓖ 2 ⓘ 3

৭. a এর মান কত?

ⓚ 13 ● 5 ⓖ – 5 ⓘ – 17

৮. বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলো কী কী?

● $(x + 1)$ ও $(x - 2)$ ⓛ $(x + 1)$ ও $(x + 2)$

ⓖ $(x - 1)$ ও $(x + 2)$ ⓘ $(x - 1)$ ও $(x - 2)$

৯. নিচের কোনটি চক্রক্রমিক রাশি? [য. বো. '১৫]

ⓚ $a^2 - b^2 + c^2$ ⓛ $a^2b + ab^2 + b^2c$

ⓖ $xy + yz - zx$ ● $x^2y + y^2z + z^2 + x$

১০. $A = \{x : x^2 - 4 = 0\}, B = \{x : x^2 - x - 6 = 0\}$ হলে, $A \cap B$ = কত?

ⓚ $\{-2, -3, 2\}$ ● $\{-2\}$

ⓖ $\{-3\}$ ⓘ $\{2\}$

১১. $2x^3 + x^2 + ax + 18$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে, a এর মান কত?

ⓚ – 15 ⓛ – 3 ● 3 ⓘ 15

১২. $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে, $P(1, 1, -2)$ এর মান কত?

● 0 ⓛ 2

ⓖ 4 ⓘ 16

১৩. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এর মান–

i. $(x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ii. $(x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$

iii. $\frac{1}{2}(x + y + z) \{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৪. কোনটি সমমাত্রিক রাশি?

ⓚ $p^3 + p^2q + q^4$ ● $p^2 + pq + q^2$

ⓖ $p^3 + 3pq + q^2$ ⓘ $p^3 + pq^2 + 3q^2$

১৫. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি–

i. চক্রক্রমিক

ii. প্রতিসম

iii. সমমাত্রিক বহুপদী

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৬. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হলে, $p\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

ⓚ $\frac{21}{8}$ ● $\frac{43}{8}$ ⓖ $\frac{53}{8}$ ⓘ $\frac{63}{4}$

১৭. $\frac{x^3}{x^2 - 9}$ ভগ্নাংশটির সমান কত?

ⓚ $x + \frac{9}{x^2 - 9}$ ⓛ $x + \frac{x}{x^2 - 9}$

● $x + \frac{9x}{x^2 - 9}$ ⓘ $x + \frac{1}{x^2 - 9}$

১৮. $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হলে, a এর মান কত?

ⓚ 35 ● 32 ⓖ 30 ⓘ 36

১৯. $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

ⓚ 49 ⓛ 41 ● 33 ⓘ 23

২০. $y^5 - 3y^6 + 5y^4 - 7$ রাশিটি y-চলকের একটি বহুপদী যার–

i. মাত্রা 6
ii. মুখ্যপদ $3y^6$
iii. ধ্রুবপদ – 7
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

২১. বহুপদী $P(x) = 2x^2 - 9x + 6$ কে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
ⓚ 4 ● 2 ⓖ 1 ⓘ – 2

২২. $f(x) = x^2 - 7x + 12$ হলে, x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?
ⓚ – 3, – 4 ⓛ – 3, 4 ● 3, 4 ⓘ 3, – 4

২৩. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হলে, $P(-2)$ এর মান কত?
ⓚ – 22 ⓛ – 10 ● 6 ⓘ 10

নিচের উদ্দীপকের আলোকে ২৪ ও ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$

২৪. $P(x)$ কে $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
ⓚ – 120 ⓛ – 30 ⓖ – 24 ● 24

২৫. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক নিচের কোনটি?
ⓚ $x - 3$ ⓛ $x + 1$ ⓖ $x - 2$ ● $x - 1$

২৬. কোনটি x চলকের বহুপদী?
● $4x^4 - 5x^3y^2 + 7$ ⓛ $5x^3 + \frac{3}{x} + 8$
ⓖ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{x^2} + 9$ ⓘ $4x^{-4} - 2x^2 + 12$

২৭. যদি $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 6x + a$, $x - 1$ দ্বারা বিভাজ্য, তবে a এর মান কত?
● – 2 ⓛ – 1 ⓖ 1 ⓘ 2

২৮. $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$ বহুপদীর একটি উৎপাদক—
ⓚ $2x - 1$ ● $3x - 1$ ⓖ $3x + 1$ ⓘ $3x - 2$

২৯. যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে—
i. $a^3 + b^3 + r^3 = 3abc$
ii. $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$
iii. $(a + b)^3 + 3abc = -c^1$
নিচের কোনটি সঠিক?
● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

অতিরিক্ত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

এক চলকের বহুপদী

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩০. একটি প্রতীক একাধিক সদস্যবিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যেকোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে, তবে প্রতীকটিকে কী বলা হয়? (সহজ)
ⓚ ধ্রুবক ● চলক ⓖ ডোমেন ⓘ মুখ্য পদ

৩১. কোনো বহুপদীতে উলিরখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ অর্থাৎ সবচেয়ে বড় মাত্রাকে কী বলা হয়? (সহজ)
ⓚ মুখ্যপদ ● বহুপদীর মাত্রা
ⓖ ধ্রুবক ⓘ চলক

৩২. চলকবর্জিত পদকে কী বলা হয়? (সহজ)
ⓚ ধ্রুবক ● ধ্রুব পদ ⓖ চলক ⓘ মুখ্য পদ

৩৩. দুটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে, তাদের সমতাকে কী বলে? (সহজ)
ⓚ মুখ্যপদ ● অভেদ
ⓖ বহুপদী অভিন্ন ⓘ মুখ্য সহগ

৩৪. নিচের কোনটি অভেদ চিহ্ন? (সহজ)
● $\cong$ ⓛ $\neq$ ⓖ $\equiv$ ⓘ $\approx$

৩৫. যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় তবে $P(x)$–কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)
● $P(a)$ ⓛ a ⓖ $\frac{1}{a}$ ⓘ $P\left(\frac{1}{a}\right)$

৩৬. যদি $P(x) = x^2 - 5x + 6$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে ? (মধ্যম)
ⓚ 4 ● 2 ⓖ 3 ⓘ $x + 2$

৩৭. যদি $P(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)
ⓚ $P(a)$ ● $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ ⓖ $P\left(\frac{b}{a}\right)$ ⓘ $P\left(-\frac{a}{b}\right)$

৩৮. Cx^p পদে C কে x^p এর কী বলা হয়? (সহজ)
● সহগ ⓛ মাত্রা ⓖ বেজ ⓘ ধ্রুব পদ

৩৯. Cx^p পদে p কে কী বলা হয়? (সহজ)
ⓚ সহগ ● মাত্রা ⓖ বেজ ⓘ ধ্রুব পদ

৪০. কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে কী বলে? (সহজ)
● সমমাত্রিক বহুপদী ⓛ প্রতিসম
ⓖ বহুপদী ⓘ চক্র–ক্রমিক

৪১. একাধিক চলক ধারণকারী কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত হয়, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের কী বলে? (সহজ)
ⓚ অপ্রতিসম রাশি ● প্রতিসম রাশি
ⓖ সমমাত্রিক রাশি ⓘ চক্র–ক্রমিক রাশি

৪২. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
● $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
ⓛ $(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
ⓖ $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$
ⓘ $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 3abc)$

৪৩. যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে $a^3 + b^3 + c^3$ = কত? (মধ্যম)
ⓚ 3ab ● 3abc ⓖ abc ⓘ 3

৪৪. একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে কী বলা হয়? (সহজ)
● মূলদ ভগ্নাংশ ⓛ প্রকৃত ভগ্নাংশ
ⓖ আংশিক ভগ্নাংশ ⓘ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

৪৫. যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফলরূ পে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের কী বলা হয়? (সহজ)
● আংশিক ভগ্নাংশ ⓛ মূলদ ভগ্নাংশ
ⓖ প্রকৃত ভগ্নাংশ ⓘ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

৪৬. বহুপদীতে মুখ্যপদের সহগকে কী বলা হয়? (সহজ)

● মুখ্য সহগ ⓑ ধ্রুবকপদ ⓒ সহগ ⓓ ধ্রুবক

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৭. i. বহুপদীর গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদকে মুখ্যপদ বলা হয়

ii. বহুপদীতে পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীর মাত্রা বলা হয়

iii. এক মাত্রাযুক্ত পদকে ধ্রুবকপদ বলা হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓑ i ও iii ⓒ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

৪৮. Cx^py^q এ পদে–

i. C হলো x^py^q এর সহগ

ii. $p + q$ হচ্ছে পদের মাত্রা

iii. $p - q$ হচ্ছে পদের মাত্রা

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓑ i ও iii ⓒ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

৪৯. i. চলকবর্জিত পদটিকে ধ্রুবকপদ বলে

ii. x^3y, এখানে x ও y চলকের মাত্রা 4

iii. চলকের গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদকে মুখ্যপদ বলে

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓐ i ও ii ⓑ i ও iii ⓒ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৫০ ও ৫১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যদি $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হয়

৫০. x এর পরিবর্তে 0 হলে $P(0)$ = কত? (মধ্যম)

ⓐ 4 ● 8 ⓒ 6 ⓓ 5

৫১. বহুপদীটির ধ্রুবকপদ কত? (মধ্যম)

ⓐ 3 ⓑ 2 ⓒ 7 ● 8

$(x - 1)^3y + (y + 1)^2$ একটি রাশি।

নিচের তথ্যের আলোকে ৫২ – ৫৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৫২. x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার নিচের কোনটি? (সহজ)

● $x^3 - y - 3x^2y + 3xy + y^2 + y + 1$

ⓑ $3xy + 3x^2y + 3xy + y^2$

ⓒ $3x^3y - 3x^2y + 6xy + y^2 + y + 1$

ⓓ $3x^2y - 3xy^2 + 4xy + y^2 - y + 1$

৫৩. উক্ত রাশিটি x চলকের বহুপদী হলে এর মাত্রা ও মুখ্য সহগ কত? (সহজ)

ⓐ 3 ও x ⓑ 2 ও y

● 3 ও y ⓓ 3 ও $(y^2 + 3y + 1)$

৫৪. উপরের রাশিটি x ও y চলকের বহুপদী হলে এর মাত্রা কত? (মধ্যম)

ⓐ 1 ⓑ 2 ⓒ 3 ● 4

দুই ও তিন চলকের বহুপদী

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫৫. যদি কোনো ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রার চেয়ে ছোট হয়, তাকে কোন ভগ্নাংশ বলে ? (সহজ)

● প্রকৃত ⓑ অপ্রকৃত ⓒ আংশিক ⓓ অমূলদ

৫৬. যদি কোনো ভগ্নাংশের লবের মাত্রা হরের মাত্রার চেয়ে বড় হয় তাকে কোন ভগ্নাংশ বলে? (সহজ)

ⓐ প্রকৃত ● অপ্রকৃত ⓒ আংশিক ⓓ অমূলদ

৫৭. $\frac{9x}{(x-3)(x+3)}$ ভগ্নাংশটি কী ধরনের? (সহজ)

● প্রকৃত ভগ্নাংশ ⓑ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

ⓒ মিশ্র ভগ্নাংশ ⓓ জটিল ভগ্নাংশ

৫৮. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ রাশিটিতে চলকের প্রেক্ষিতে a, b, c, d কে কী বলে? (সহজ)

ⓐ চলক ⓑ ডোমেন

ⓒ বীজগাণিতিক রাশি ● ধ্রুবক

৫৯. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ এর উৎপাদক কোনটি? (কঠিন)

ⓐ $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ ⓑ $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

● $(x + 1)(x^2 + x + 1)$ ⓓ $(x - 1)(x^2 - x + 1)$

৬০. যদি $\frac{x-5}{(x+3)(x-1)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$ হয়, তবে A এর সঠিক মান কত? (কঠিন)

ⓐ – 3 ⓑ – 1 ⓒ 1 ● 2

৬১. বহুপদী বিশেষ ধরনের– (সহজ)

ⓐ বীজগাণিতিক সমীকরণ ● বীজগাণিতিক রাশি

ⓒ বীজগাণিতিক অসমতা ⓓ বীজগাণিতিক প্রতীক

৬২. বীজগাণিতিক রাশিকে কয়ভাগে ভাগ করা যায়? (সহজ)

● ২ ভাগে ⓑ ৩ ভাগে ⓒ ৪ ভাগে ⓓ ৫ ভাগে

৬৩. কোনো বহুপদীর গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে কী বলে? (সহজ)

ⓐ মাত্রা ● মুখ্যপদ ⓒ মুখ্য সহগ ⓓ ঘাত ও মাত্রা

৬৪. বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$–কে $(2x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)

ⓐ $P\left(\frac{1}{2}\right)$ ● 10 ⓒ 16 ⓓ 20

৬৫. যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয়, তবে $P(x)$ কে $2x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)

ⓐ $P(1)$ ⓑ $P(-1)$ ● $P\left(\frac{1}{2}\right)$ ⓓ $P\left(\frac{-1}{2}\right)$

৬৬. $2x^2 - 3x + 1$ এর উৎপাদক কত? (কঠিন)

ⓐ $(2x + 1)(x + 1)$ ● $(2x - 1)(x - 1)$

ⓒ $(x + 1)(2x - 1)$ ⓓ $(x - 1)(2x + 1)$

৬৭. $a^3 - 7a - 6$ এর উৎপাদক কোনটি? (কঠিন)

ⓐ $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$ ⓑ $(a - 1)(a + 2)(a - 3)$

● $(a + 1)(a + 2)(a - 3)$ ⓓ $(a - 1)(a - 2)(a - 3)$

৬৮. $x^3 + 4x^2 + 72$ এর একটি উৎপাদক কোনটি? (কঠিন)

ⓐ $x + 2$ ⓑ $x + 3$ ● $x + 6$ ⓓ $x + 4$

৬৯. নিচের কোনটি সমমাত্রিক বহুপদী? (সহজ)

ⓐ $2x + xy + y^2$ ⓑ $x^2 + x + y^2$

ⓒ $x^2 + y^2 + y$ ● $x^2 + xy + y^2$

৭০. কোনটি $2x^4 - 5x^3 - 5x + 2$ এর একটি উৎপাদক? (মধ্যম)

ⓐ $x + 1$ ● $x - 1$ ⓒ $x + 2$ ⓓ $x - 2$

৭১. $x^4 - x^2 - 12$ এর উৎপাদক কত? (কঠিন)

ⓐ $(x + 2)^2(a^2 - 3)$ ⓑ $(a - 2)^2(a^2 - 3)$

ⓒ $(a + 2)(a^2 + 3)$ ● $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 3)$

৭২. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ = কত ? (মধ্যম)

● 1 (খ) –1 (গ) 0 (ঘ) $a + b + c$

৭৩. $F(x, y) = 8x^3 + y^3 - 4x^2 + 7xy + 2y - 5$ হলে, $F(1, 0)$ = কত? (মধ্যম)

(ক) 8 (খ) – 4 (গ) 7 ● – 1

৭৪. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে $F(1, 1, -2)$ = কত? (মধ্যম)

● 1 (খ) – 1 (গ) 0 (ঘ) 3

৭৫. $px^2 + qx + r$ রাশিতে চলক কোনটি? (সহজ)

(ক) p (খ) q (গ) r ● x

৭৬. $F(x) = px^3 + qx + r$ কে $r - m$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (মধ্যম)

● $pm^3 + qm + r$ (খ) $px^2 + qmx + r$

(গ) $pm^2 + qm + r$ (ঘ) $px^2 + mx + r$

৭৭. $F(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে a এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 5 (খ) 6 ● 35 (ঘ) – 6

৭৮. $F(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$ এর একটি উৎপাদক কোনটি? (কঠিন)

(ক) $x - 1$ (খ) $x - 5$ (গ) $x + 5$ ● $x + 1$

৭৯. নিচের কোনটির x চলকের ঘাত শূন্য? (সহজ)

(ক) $4x^2$ (খ) $4x$ (গ) $\frac{3}{4}$ ● 2

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮০. যদি $P(x) = 32x^4 - 16x^2 + 8x + 7$ হয়–

i. $P(0) = 7$

ii. $P(1) = 31$

iii. $P(-1) = 15$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৮১. i. $P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে

ii. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ কে $(x + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 8

iii. যদি $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - a$ হয়, তবে $P(a) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৮২. i. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ এর একটি উৎপাদক $(x - 1)$

ii. $a^3 - a^2 - 10a - 8$ এর একটি উৎপাদক $(a + 1)$

iii. $2a^3 - 3a^2 + 3a - 1$ এর একটি উৎপাদক $(2a - 1)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮৩. a = 2, b = 3 ও c = 2 হলে—

i. $ax^2 + bx + c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি

ii. $ax^2 + bcxy + cy^2$ প্রতিসম রাশি

iii. $ax^2 + by^2 + cz^2$ চক্র–ক্রমিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮৪. $P(x) = x^2 - x - 2$ হলে–

i. $(x + 1)$ রাশিটির একটি উৎপাদক

ii. $x = 2$ এর জন্য রাশিটির মান শূন্য

iii. একে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 10 হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৮৫ – ৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x - 2)} \equiv \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{3x - 2}$$

৮৫. x = কত হলে, A = 1 হবে? (কঠিন)

● – 2 (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) 2

৮৬. $x = \frac{2}{3}$ হলে B = কত? (কঠিন)

(ক) – 3 (খ) – 2 ● 2 (ঘ) 3

৮৭. আংশিক ভগ্নাংশটি কত হবে? (মধ্যম)

(ক) $\frac{2}{x + 2} + \frac{1}{3x - 2}$ (খ) $\frac{1}{3x - 2} + \frac{3}{x + 2}$

● $\frac{1}{x + 2} + \frac{2}{3x - 2}$ (ঘ) $\frac{1}{x + 2} - \frac{2}{3x - 2}$

ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৮. $2(1 + 2x)(1 - 2x)$ বহুপদীর চলকের সহগ কত? (সহজ)

● – 8 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 8

৮৯. $5y \times 3y + 2y \div 3x - 4$ রাশিটিতে কয়টি পদ আছে? (সহজ)

(ক) 5 (খ) 4 ● 3 (ঘ) 2

৯০. $x^2(3 - 2x - x^3)$ বহুপদীর মুখ্য সহগের মান কত? (সহজ)

(ক) – 3 ● – 1 (গ) 1 (ঘ) 3

৯১. $3 \div x^3 \times x^4 + x^6 \times 2 \div x^5 + x^2$ বহুপদীর মাত্রা কত? (সহজ)

● 2 (খ) 3 (গ) 4 (ঘ) 6

৯২. $2(1 + 2x)(1 - 2x)$ বহুপদীর চলকের মুখ্য সহগ কত? (মধ্যম)

● –8 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 8

৯৩. $x^2 - x^7 \times 2 \div x^6 - 2$ বহুপদীর মুখ্য পদ কত? (সহজ)

● x^3 (খ) $-x^7$ (গ) x^6 (ঘ) $-x$

৯৪. $9x - 2 = bx + a$ তুলনা করলে a এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) – 9 (খ) – 2 (গ) 2 ● 9

৯৫. $Q(y) = x^2 - 5y + 6$ বহুপদীর y এর কোন মানের জন্য $Q(y) = 2$ হবে? (কঠিন)

(ক) 2 ● 4 (গ) 5 (ঘ) 6

৯৬. $A(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 4$ হয়, তবে $(x - 3)$ দ্বারা $A(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (কঠিন)

(ক) 2 (খ) 1 (গ) 0 ● – 1

৯৭. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ বহুপদীর ধ্রুব পদের উৎপাদকের সেট নিচের কোনটি? (কঠিন)

(ক) $\{-2, 2\}$ (খ) $\{-2\}$ ● $\{1, -1, 2, -2\}$ (ঘ) $\{1, -1\}$

৯৮. নিচের কোনটি সমমাত্রিক বহুপদী? (সহজ)

(ক) $2x + xy + y^2$ (খ) $x^2 + x + y^2$

(গ) $x^2 + y^2 + y$ ● $x^2 + xy + y^2$

৯৯. $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ⓚ $a^2 + 2b + c = 0$ ⓛ $a + b + c = 0$
ⓖ $2a + b + c = 0$ ● $a + 2b + c = 0$

১০০. $P(x) = 2x^2 - 7x + 5$ হলে $P(2)$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ -2 ● -1 ⓖ 1 ⓘ 4

১০১. $\frac{x^3}{x^2 - 9}$ ভগ্নাংশটির সমান নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ $x + \frac{9}{x^2 - 9}$ ⓛ $x + \frac{x}{x^2 - 9}$ ● $x + \frac{9x}{x^2 - 9}$
ⓘ $x + \frac{1}{x^2 - 9}$

১০২. $\frac{9x}{(x + 3)(x - 3)}$ ভগ্নাংশটি কী ধরনের ভগ্নাংশ? (সহজ)

● প্রকৃত ⓛ অপ্রকৃত ⓖ মিশ্র ⓘ আংশিক

১০৩. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ এর উৎপাদক বিশেরষিত রূ প নিচের কোনটি? (কঠিন)

● $(a + b)(b + c)(c + a)$ ⓛ $(a - b)(b - c)(c - a)$
ⓖ $-(a + b)(b + c)(c + a)$ ⓘ $2abc(a^2 - b^2 - c^2)$

১০৪. $5x^2y + 6y^2z + 12z^2x - 8xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের কত মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী? (মধ্যম)

ⓚ 1 ⓛ 2 ● 3 ⓘ 4

১০৫. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 2)$ হলে, a = ?(মধ্যম)

ⓚ 6 ● 4 ⓖ 3 ⓘ -4

১০৬. $4x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 3$ বহুপদটিতে ধ্রুবক কোনটি?(সহজ)

ⓚ 5 ⓛ 4 ⓖ 2 ● 3

১০৭. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)$ এর উৎপাদক বিশেরষিত রূ প নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $(a + b)(b + c)(c + a)$ ⓛ $(a - b)(b - c)(c - a)$
● $-(a - b)(b - c)(c - a)$ ⓘ $(a + b + c)(b - c)(c - a)$

১০৮. $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ হলে, $P(0, 1, 2)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 18 ● 9 ⓖ 12 ⓘ 3

১০৯. $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ হলে $P(1)$ = কত হবে? (মধ্যম)

ⓚ 1 ⓛ -1 ⓖ 3 ● 0

১১০. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ উৎপাদকটির মুখ্য সহগ কত? (সহজ)

● 2 ⓛ 3 ⓖ -1 ⓘ 4

ব্যাখ্যা : বহুপদীর গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে মুখ্য পদ বলে এবং মুখ্য পদের সহগকে মুখ্য সহগ বলে।
x চলকের বহুপদী $2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$
x এর সর্বোচ্চ ঘাত 3 যুক্ত পদটি $2x^3$
$2x^3$ মুখ্য পদ।
সুতরাং মুখ্য সহগ 2

১১১. $P(x) = 6x^2 - 2x + 3$ কে $(x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (মধ্যম)

ⓚ 5 ⓛ -1 ● 7 ⓘ 3

১১২. $P(y) = y^3 - 8x^2 + 6y + 60$ বহুপদীটিকে $y + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)

ⓚ 6 ● 8 ⓖ 72 ⓘ 12

১১৩. যদি $x - 1$, $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - a$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে a এর মান কত? (মধ্যম)

● 3 ⓛ 4 ⓖ -3 ⓘ 1

১১৪. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ একটি রাশি হলে, এর চক্র–ক্রমিক রাশি কত হবে? (সহজ)

ⓚ $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ ⓛ $y^2 + z^2 - x^2 - xy + zx + yz$
ⓖ $x^2 - y^2 - z^2 - xy - yz - zx$ ● $z^2 + y^2 + x^2 + zx + yx + yz$

১১৫. $\frac{4x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 3}$ রাশিটির মুখ্য সহগ কত? (মধ্যম)

ⓚ 4 ⓛ 2 ● 2 ⓘ 3

১১৬. $(x^2 + 2)$ ও $(x + 1)$ এর গুণফল কত? (মধ্যম)

ⓚ $(x^4 + x^3 + 2x + 2)$ ⓛ $(x^2 + x + 2)$
ⓖ $x^3 + x^2 + 3x + 2$ ● $x^3 + x^2 + 2x + 2$

১১৭. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি কী ধরনের? (সহজ)

ⓚ একমাত্রিক ⓛ একমাত্রিক প্রতিসম
● সমমাত্রিক প্রতিসম ⓘ সমমাত্রিক

১১৮. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 2)$ হলে a = কত? (মধ্যম)

ⓚ 6 ● 4 ⓖ 3 ⓘ -4

১১৯. $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$ এর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ = কত? (মধ্যম)

● 0 ⓛ $\frac{1}{2}$ ⓖ 4 ⓘ 12

১২০. নিচের কোনটি প্রকৃত ভগ্নাংশ? (মধ্যম)

● $\frac{a + 1}{a^2 + 1}$ ⓛ $\frac{a^2 + 1}{a + 1}$ ⓖ $\frac{a^2}{a + 1}$ ⓘ $\frac{a^3 + 1}{a^2 + 1}$

১২১. $y^3 - 8y^2 + 6y + 60$ বহুপদীকে $y + 2$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে? (কঠিন)

ⓚ 6 ● 8 ⓖ 75 ⓘ 112

ব্যাখ্যা : ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী কোনো বহুপদী $Q(y) = y^3 - 8y^2 + 6y + 60$ কে $y + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $Q(-2)$
$= (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60$
$= -8 - 32 - 12 + 60$
$= 52 + 60$
$= 8$

১২২. দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে, এদের সমতাকে কী বলা হয়? (সহজ)

ⓚ ভেদ ● অভেদ ⓖ উৎপাদক ⓘ প্রতিসম

১২৩. $P(x) = ax^3 + bx + c$; $P(x)$ কে $x - m$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $ax + b + c$ ⓛ $ax^2 + bx + c$ ⓖ $bx + c$
● $am^3 + bm + c$

১২৪. $P(x) = 5x^2 + 6x^2 - ax + 6$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয় তবে a = কত? (মধ্যম)

ⓚ 2 ● 32 ⓖ 12 ⓘ 20

১২৫. $\frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$ ● $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$

ⓖ $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}$ ⓓ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{(x^2+1)^2}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১২৬. $x^2+y^2+z^2$ একটি–
i. প্রতিসম রাশি
ii. সমমাত্রিক বহুপদী
iii. চক্র-ক্রমিক রাশি
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১২৭. $y \times y + 2y \times 2 - 5 \div 5$ রাশিটিতে —
i. পদ সংখ্যা 3
ii. ধ্রুবকের মান − 1
iii. y এর সহগ 4
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১২৮. $x^5 \times x^2 + x^5 \div x^2$ বহুপদীর—
i. মাত্রা 7
ii. x^3 এর সহগ 1
iii. ধ্রুবপদ নেই
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১২৯. $2 \times x^5 \div x^2 - 3x^2 + x^3 \times 2 \times x$ বহুপদীর—
i. মুখ্য পদের সহগ 2
ii. মুখ্য পদ $2x^4$
iii. মাত্রা 3
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

১৩০. $7x^2 - 5x + 6 = ax^2 + cx + b$ এ সহগগুলো সমীকৃত করলে–
i. b = 6
ii. c = –5
iii. a = 7
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৩১. $3x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x - 8$ রাশিটি x চলকের একটি বহুপদী যার–
i. মাত্রা 4
ii. মুখ্য পদ $3x^5$
iii. মুখ্য সহগ 3
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম))
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ● ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

১৩২. $3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ রাশিটিতে–
i. মাত্রা 3
ii. ধ্রুবক x
iii. P(0) = 8
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম))
ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii ● i ও iii ⓓ i, ii ও iii

১৩৩. (x^2+2) কে $(x+1)$ দ্বারা গুণ করলে–
i. গুণফল $x^3 + x^2 + 2x + 2$
ii. মুখ্য সহগ 3
iii. P(1) = 6
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

১৩৪. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}$ হলে— (কঠিন)
i. প্রথম ভগ্নাংশটি মূলদ
ii. দ্বিতীয় ভগ্নাংশটি মূলদ
iii. সরলমান $\frac{2a^2 - ab + bc - ca + a + 1}{(a-b)(a-c)}$
নিচের কোনটি সঠিক?
● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

১৩৫. দুইটি বহুপদী P(x) ও Q(x) সকল x এর জন্য সমান হলে–
i. এদের সমতাকে অভেদ বলা হয়
ii. তা বোঝাতে অনেক সময় P(x) ≅ Q(x) লেখা হয়।
iii. তা বোঝাতে অনেক সময় P(x) = Q(x) লেখা হয়।
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৬ – ১৩৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$P(x) = x^2 + 3x + 2$

১৩৬. রাশিটির উৎপাদকে বিশেরষিত রূ প নিচের কোনটি? (মধ্যম)
ⓚ (x + 3)(x + 4) ● (x + 1)(x + 2)
ⓖ (x – 1)(x – 2) ⓓ (x + 3)(x – 2)

১৩৭. রাশিটির মুখ্য মাত্রা কত? (সহজ)
● 2 ⓛ 1 ⓖ 3 ⓓ 4

১৩৮. x = – 1 হলে P(x) = ? (মধ্যম)
ⓚ 1 ⓛ 2 ⓖ 3 ● 0

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৯ ও ১৪০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$P(x) = 32x^4 - 16x^2 + 8x + 7$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

১৩৯. P(1) এর মান কত? (সহজ)
ⓚ 63 ⓛ 47 ● 31 ⓓ 1

১৪০. P(x) কে 2x – 1 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (মধ্যম)
● 9 ⓛ 11 ⓖ 13 ⓓ 19

১৪১. দ্বিচলক বহুপদী $8x^3 + y^3 - 2xy$ এর মাত্রা কত?
ⓚ 8 ● 3 ⓖ 2 ⓓ – 2

১৪২. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হলে, P(0) এর মান কত?
● 8 ⓛ 3 ⓖ 2 ⓓ – 2

১৪৩. যদি $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ হয়, তবে P(x) কে (x – 2) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ নিচের কোনটি?
ⓚ P(1) ● P(2) ⓖ P(3) ⓓ P(4)

১৪৪. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে, P(x) এর একটি উৎপাদক নিচের কোনটি?
ⓚ (x + 3) ⓛ (x + 2)
ⓖ (x + 1) ● (x – 1)

১৪৫. প্রতিসম রাশি নিচের কোনটি?
ⓚ $2x^2 + 3xy + y^2$ ● $2x^2 + 2xy + 2y^2$
ⓖ $x^2 + 3xy + 2y^2$ ⓓ $4x^2 + xy + 3y^2$

১৪৬. $x^2y + y^2z + z^2x$ বহুপদীর চক্র–ক্রমিক রাশি নিচের কোনটি?

ⓚ $y^2z - z^2x + x^2y$ ⓛ $y^2z + z^2x - x^2y$
ⓜ $- y^2x + z^2x + x^2y$ ● $y^2z + z^2x + x^2y$

১৪৭. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটির চক্র–ক্রমিক রাশি নিচের কোনটি?

ⓚ $x^2(y - z) + z^2(z - x) + y^2(y - z)$
ⓛ $y^2(x - z) + x^2(z - y) + z^2(y - x)$
● $z^2(x - y) + y^2((z - x) + x^2(y - z)$
ⓜ $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$

১৪৮. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ করলে নিচের কোনটি পাওয়া যাবে?

ⓚ $(a - b)(b - c)(c - a)$ ⓛ $(a + b)(b + c)(c + a)$
● $-(a - b)(b - c)(c - a)$ ⓜ $-(a + b)(b + c)(c + a)$

১৪৯. $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে, $P(1, 1, -1)$ = কত?

ⓚ 0 ● 4 ⓖ – 1 ⓜ 2

১৫০. a এর কোন মানের জন্য $x^4 - 5x^2 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$.

ⓚ 1 ⓛ 2 ⓖ 3 ● 4

১৫১. $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাঙ্ক কোণগুলো?

ⓚ (1, – 1), (2, – 1) ⓛ (1, 1), (2, – 1)
● (1, 1), (– 2, – 1) ⓜ (– 1, 1), (2, – 1)

১৫২. $y = x^2 - x + 6$ হলে, স্বাধীন চলক কোনটি?

ⓚ y ● x ⓖ $x^2 - x$ ⓜ $6 - x$

১৫৩. কোনো বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে কী বলে?

ⓚ গৌণপদ ⓛ মুখ্য সহগ ● মুখ্যপদ ⓜ ধ্রুবকপদ

১৫৪. নিচের কোনটি x চলকের ঘাত শূন্য?

ⓚ $7x^2$ ● 2 ⓖ $\frac{3x}{x}$ ⓜ 4x

১৫৫. Variable শব্দটির অর্থ কী?

ⓚ সচল ⓛ অচল ● চলরাশি ⓜ চলমান

১৫৬. তিন চলকের বহুপদী নিচের কোনটি?

ⓚ $x + y + 1$ ⓛ $2 + y + z$
ⓖ $3 + x + z$ ● $4x + 2y + 3z$

১৫৭. $x^2 + y^2 + z^2$ একটি–

i. প্রতিসম রাশি
ii. সমমাত্রিক রাশি
iii. চক্র–ক্রমিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৫৮. Y × Y + 2Y × 2 – 5 + 5 রাশিটিতে–

i. পদ সংখ্যা 3
ii. ধ্রুবকের মান – 1
iii. y এর সহগ 4

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৫৯. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটি–

i. চক্রক্রমিক
ii. প্রতিসম
iii. সমমাত্রিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓜ i, ii ও iii

১৬০. $P(x) = x^2 - x - 2$ হলে,

i. $(x + 1)$ রাশিটির একটি উৎপাদক
ii. $x = 2$ এর জন্য রাশিটির মান শূন্য
iii. একে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 10

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬১ ও ১৬২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$P(x) = 32x^4 - 16x^2 + 8x + 7$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

১৬১. P(1) এর মান কত?

ⓚ 63 ⓛ 47 ● 31 ⓜ 1

১৬২. P(x) কে 2x – 1 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

● 9 ⓛ 11 ⓖ 13 ⓜ 19

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬৩ – ১৬৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\frac{5x - 7}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$; A ও B মূলদ।

১৬৩. A = কত?

ⓚ 1 ● 2 ⓖ 3 ⓜ 4

১৬৪. B = কত?

ⓚ 1 ⓛ 2 ● 3 ⓜ 4

১৬৫. আংশিক ভগ্নাংশটি কত হবে?

● $\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x - 2}$ ⓛ $\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x + 2}$
ⓖ $\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 2}$ ⓜ $\frac{2}{x + 1} + \frac{3}{x - 2}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬৬ ও ১৬৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$5x^2 - 4x^4y^4 - 2$ একটি বহুপদী।

১৬৬. বহুপদীটির মাত্রা কত?

ⓚ 2 ⓛ 3 ⓖ 4 ● 8

১৬৭. বহুপদীটির মুখ্য সহগ কত?

ⓚ 3 ⓛ 2 ● – 4 ⓜ – 1

নিচের তথ্যের আলোকে ১৬৮ – ১৭০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$x^2 + 4x^2 + x - a$ রাশির একটি উৎপাদক $(x - 1)$

১৬৮. a এর মান কত?

ⓚ 2 ⓛ 4 ● 6 ⓜ 8

১৬৯. বহুপদীর মুখ্য সহগ হলো–

● 1 ⓛ – 1 ⓖ 2 ⓜ 4

১৭০. বহুপদীর অন্যান্য উৎপাদক হলো–

i. $x + 1$
ii. $x + 2$
iii. $x + 3$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ● ii ও iii ⓜ i, ii ও iii

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৭১. $P(x) = x^2 - 5x + 6$ কে $x - 4$ দ্বারা ভাগ করলে–

i. ভাগশেষ 2
ii. ভাগশেষ P (– 4) এর সমান
iii. ভাগশেষ P (4) এর সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : ভাগশেষ উপপাদ্য হতে জানি, $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ এর সমান। এক্ষেত্রে ভাগশেষ হবে $P(4) = 4^2 - 5 \times 4 + 6 = 2$

সুতরাং i ও iii সঠিক।

১৭২. দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে–

i. এদের সমতাকে অভেদ বলে

ii. $P(x) \cong Q(x)$ লেখা যায়

iii. এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি ভিন্ন হতে পারে

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : সংজ্ঞানুযায়ী i ও ii সঠিক।

$P(x) \cong Q(x)$ হলে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়।

তাই iii সঠিক নয়

১৭৩. i. যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.

ii. $p(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক

iii. $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$ এর সরল মান $\frac{1}{x-1}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

১৭৪. i. তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক

ii. প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি, প্রতিসম নয়

iii. প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ● ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৭৫. $x^2 (y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটি–

i. বীজগাণিতিক

ii. চক্র-ক্রমিক

iii. প্রতিসম

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৭৬. a = 2, b = 3 ও c = 2 হলে–

i. $ax^2 + bx + c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি

ii. $ax^2 + bcxy + cy^2$ প্রতিসম রাশি

iii. $ax^2 + by^2 + cz^2$ চক্র-ক্রমিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : iii সঠিক নয়; $2x^2 + 3y^2 + 2z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক নয়।

১৭৭. i. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$

ii. $x^2(y - z) + y^2 (z - x) + z(x - y)$

iii. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ⓛ ii ⓖ iii ● i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : চক্র-ক্রমিক রাশির সংজ্ঞা অনুযায়ী (i), (ii) ও (iii) সঠিক।

১৭৮. i. $x^2 - y^2 + z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি

ii. $x^2y + y^2z + z^2x$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি

iii. বর্ণনার সুবিধার্থে x, y, z চলকের রাশিকে $F(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৭৯. i. যদি $P(x)$ বহুপদীর $x - 6$ একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(6) = 1$

ii. যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ হবে

iii. ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদিও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৮০. i. $P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে

ii. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ কে $(x + 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 8।

iii. যদি $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - a$ হয়, তবে $P(a) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii ⓖ i ও iii ● i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : (i) সঠিক, ভাগশেষ উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা-১ অনুযায়ী।

(ii) সঠিক, $x + 2 \equiv x - (-2)$

$P(-2) = (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60$

$= -8 - 32 - 12 + 60 = 60 - 52 = 8$

$\therefore$ ভাগশেষ = 8.

(iii) সঠিক, উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুসারে।

১৮১. i. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$

ii. $x^2 (y - z) + y^2(z - x) + z(x - y)$

iii. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

উপরের কোনটি প্রতিসম রাশি? (মধ্যম)

● i ⓛ ii ⓖ iii ⓘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : একাধিক চলক ধারণকারী কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে তবে ঐ রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলে। অতএব, প্রতিসম রাশির সংজ্ঞা অনুযায়ী (i) সঠিক।

১৮২. i. $5x + 9ay$ একটি বীজগাণিতিক রাশি

ii. $13x - 14y^2 + a + 8$ একটি পার্টিগাণিতিক রাশি

iii. বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii ● i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৮৩. i. ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি শূন্য হয়

ii. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ হলে $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

iii. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর $(x - 1)$ একটি উৎপাদক হলে $a = b = c = d$.

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓛ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১৮৪. i. বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদকে মুখ্যপদ বলা হয়

ii. বহুপদীতে পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীর মাত্রা বলা হয়

iii. এক মাত্রাযুক্ত পদকে ধ্রুবপদ বলা হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে ১৮৫–১৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৮৫. প্রদত্ত বহুপদীর ধ্রুবপদ কত? (সহজ)

ⓚ 1 ⓚ 3 ⓖ 6 ● – 6

১৮৬. $x = 1$ হলে $P(x)$ = কত? (মধ্যম)

● 0 ⓚ 1 ⓖ –1 ⓘ 24

১৮৭. প্রদত্ত বহুপদীর উৎপাদকে বিশেরষিত রূ প নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $(x - 1)(x - 2)$ ⓚ $(x + 1)(x + 2)$

● $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ ⓘ $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$

$$P(x) = \frac{2}{1 + x^2} + \frac{4}{1 + x^4} + \frac{8}{1 + x^8} + \frac{16}{x^{16} - 1}$$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে ১৮৮ ও ১৮৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১৮৮. $P(x)$ এর ৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি কত? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{2}{x^2 - 1}$ ⓚ $\frac{4}{x^4 - 1}$ ● $\frac{8}{x^8 - 1}$ ⓘ $\frac{16}{x^{16} - 1}$

১৮৯. $\frac{1}{1 + x} + P(x)$ এর সরলমান কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ $\frac{1}{x + 1}$ ● $\frac{1}{x - 1}$ ⓖ $\frac{2}{x + 2}$ ⓘ $\frac{2}{x - 2}$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $x + y + z \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$. ৪

গ. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ ও $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

অনুশীলনীর ১৫নং সমাধান দেখ।

প্রশ্ন–২ ▸ $P(x) = - x^2 + 15x + 10x^3 + 9$ এবং $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$. [রা. বো. '১৫]

ক. $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূ পে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ৪

গ. $\frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = - x^2 + 15x + 10x^3 + 9$

এখন $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূ পে লিখলে হবে,

$P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$\therefore$ $P(x)$ এর মুখ্য সহগ হলো 10. **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই, $P(x) = 10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$P(x)$ এর ধ্রুবপদ 9 এর উৎপাদকসমূহের সেট $f_1 = \{1, - 1, 3 - 3, 9, - 9\}$

$P(x)$ এর মূখ্যসহগ 10 এর উৎপাদকসমূহের সেট $f_2 = \{1, -1, 2, - 2, 5, - 5, 10 - 10\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে $a = \frac{\pi}{4}$ এবং $\pi \in f_1$, $s \in f_2$

$a = 1$ হলে $P(1) = 10 - 1 + 15 + 9 \neq 0$

$a = - 1$ " $P(-1) = - 10 - 1 - 15 + 9 \neq 0$

$a = -\frac{1}{2}$ হলে $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4} + 15\left(-\frac{1}{2}\right) + 9$

$= -\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 9$

$= \frac{- 5 - 1 - 30 + 36}{4}$

$= \frac{- 36 + 36}{4}$

$= \frac{0}{4}$

$= 0$

সুতরাং $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $10x^3 - x^2 + 15x + 9$

$= 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9$

$= 5x^2(2x + 1) - 3x(2x + 1) + 9(2x + 1)$

$= (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9)$

$\therefore P(x) = (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9)$

গ. দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$= x(x^2 + x - 6)$

$= x(x^2 + 3x - 2x - 6)$

$= x(x(x + 3) - 2(x + 3)\}$

$= x(x + 3)(x - 2)$

$\therefore \frac{x^2 + x - 1}{Q(x)}$

$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x + 3)(x - 2)}$

ধরি, $\frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{c}{x + 3}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পৰকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 + x - 1 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + cx(x - 2)$ .....(ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন সমীকরণ (ii) এর উভয়পৰে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0^2 + 0 - 1 = A(0 - 2)(0 + 3) + B.0(0 + 3) + c.0(0 - 2)$

বা, $- 1 = A(- 2).3 + 0 + 0$

বা, $- 1 = - 6A$

বা, $A = \frac{1}{6}$

আবার সমীকরণ (ii) এর উভয়পৰে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 + 2 - 1 = A(2-2)(2+3) + B.2(2+3) + c.2(2-2)$

বা, $4 + 2 - 1 = 0 + 10B + 0$

বা, $5 = 0 + 10B$

$\therefore B = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পৰে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 + (-3) - 1 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3)(-3+3) + c(-3)(-3-2).$

বা, $9 - 3 - 1 = 0 + 0 + 15c$

বা, $5 = 15c$

$\therefore c = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

এখন, A, B ও C এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}.$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–৩ ▸ $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ একটি বহুপদী।

ক. $F(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x) = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ৩ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. এখানে, ভাজ্য $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

ভাজক = $(2x + 1)$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$f(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6.\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{4}{4} - \frac{6}{2} + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 3 + 4$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 2$$

$$= \frac{1 - 6 + 32}{16}$$

$$= \frac{27}{16}$$

নির্ণেয় ভাগশেষ $\frac{27}{16}$.

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

এখানে, ধ্রুবক সংখ্যা = 4

সুতাং ধ্রুবকপদের উৎপাদকসমূহের সেট হতে পারে ±1, ±2, ±4

$x = -1$ বসিয়ে পাই,

$f(-1) = (-4)^4 + 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 6(-1) + 4$

$= 1 - 3 + 4 - 6 + 4$

$= 9 - 9$

$= 0$

$\therefore (x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $f(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$= x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4$

$= x^3(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 4(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

$= (x + 1)\{x^2(x + 2) + 2(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$

শর্তমতে, $f(x) = 0$

$\therefore (x + 1)(x + 2)(x^2 + 2) = 0$

বা, $x + 1 = 0$

বা, $x = -1$

অথবা, $x + 2 = 0$

বা, $x = -2$

অথবা, $x^2 + 2 = 0$

বা, $x = \sqrt{-2}$

যা গ্রহণযোগ্য নয়

নির্ণেয় মান $x = -1, -2$.

গ. $$\frac{x}{f(x)} = \frac{x}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4}$$

$$= \frac{x}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$$ ['খ' হতে প্রাপ্ত]

মনে করি,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x^2+1} \text{ ....(i)}$$

বা, $$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x^2+2)} = \frac{A(x+1)(x^2+2) + B(x+1)(x^2+2) + C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x^2+2)}$$

এখন উভয়পৰকে $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$x = A(x+1)(x^2+2) + B(x+1)(x^2+2) + C(x + 1)(x + 2)$ ..... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পৰ হতে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B$ ....(iii)

$0 = 2A + B + C$ ....(iv)

$1 = 2A + 2B + 3C$ ....(v)

সমীকরণ (iv) কে (iii) দ্বারা বিয়োগ করে পাই,

$A + C = 0$ ....(vi)

এখন সমীকরণ (iii) কে 2 দ্বারা গুন করে (v) কে বিয়োগ করে পাই,

$3c = 1$

বা, $c = \frac{1}{3}$

c এর মান সমীকরণ (vi)–এ বসিয়ে পাই,

$A + \frac{1}{3} = 0$

$\therefore A = -\frac{1}{3}$

A এর মান সমীকরণ (iii)–এ বসিয়ে পাই,

$-\frac{1}{3} + B = 0$

$\therefore B = \frac{1}{3}$

এখন, সমীকরণ (i)–এ A, B ও C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{x^4+3x^3+4x^2+6x+4} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+2}$$

$$= \frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{3(x+2)} - \frac{1}{3(x^2+2)}$$

$$= \frac{1}{3(x+2)} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x^2+2)} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন–৪ ▸ $\boldsymbol{f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8}$ **এবং** $\boldsymbol{P(x) = \dfrac{x+3}{x^2+8x+15}}$

ক. $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$ যেখানে $x \neq y$. ৪

▸◂ ৪ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$\therefore f(-2) = (-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) + 8$

$= -8 + 20 - 12 + 8$

$= 8$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{x+3}{x^2+8x+15}$

$$= \frac{x+3}{x^2+5x+3x+15}$$

$$= \frac{x+3}{(x+5)(x+3)} = \frac{1}{x+5}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ. ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে,

$f(a)$ কে $(a - x)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$f(x) = x^2 + 5x^2 + 6x + 8$

এবং $f(a)$ কে $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$f(P) = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

শর্তানুসারে, $f(x) = f(y)$

বা, $x^3 + 5x^2 + 6x + 8 = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

বা, $x^3 - y^3 + 5(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 5(x + y)(x - y) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5x + 5y + 6) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6) = 0$

কিন্তু, $x - y \neq 0$

$\therefore x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$ [যেখানে $x \neq y$] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ ▸ $\boldsymbol{f(y) = \dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}}$

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $f(y) = 0$ হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(y)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ৫ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $f(y) = \dfrac{y^3 - 2y2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{27} - 2.\frac{1}{9} + 1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3} = \frac{\frac{-1-6+27}{27}}{\frac{1+6-27}{9}}$$

$$= \frac{20}{27} \times \frac{9}{(-20)} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

খ. যদি $f(y) = 0$ হয়,

$\therefore \dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = 0$

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

ধরি, $g(y) = y^3 - 2y^2 + 1$

$\therefore g(1) = (1)^3 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore (y - 1)$, g(y) এর একটি উৎপাদক।

বা, $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$

বা, $y^3 - y^2 - y^2 + y - y + 1 = 0$

বা, $y^2(y - 1) - y(y - 1) - 1(y - 1) = 0$

বা, $(y - 1)(y^2 - y) = 0$

হয়, $y - 1 = 0$ | অথবা, $y^2 - y - 1 = 0$

$\therefore y = 1$

এখানে, সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = -1, c = -1$

$$\therefore y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1(-1)}}{2.1}$$

$\therefore$ y এর মানগুলো হলো: $1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

গ. রাশিটি : $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3}$

এখন, $\dfrac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = \dfrac{y(y^2 - 2y - 3) + 3y + 1}{y^2 - 2y - 3}$

$$= y + \frac{3y+1}{(y-3)(y+1)}$$

$\therefore \dfrac{3y+1}{(y-3)(y+1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\dfrac{3y+1}{(y-3)(y+1)} \equiv \dfrac{A}{y-3} + \dfrac{B}{y+1}$ .... (i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষে $(y - 3)(y + 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই –

$3y + 1 \equiv A(y + 1) + B(y - 3)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$3(-1) + 1 = A(-1 + 1) + B(-1 - 3)$

বা, $-3 + 1 = A.0 - 4B$

বা, $-2 \quad -4B$

$\therefore B = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $y = 3$ বসিয়ে পাই,

$3.3 + 1 = A(3 + 1) + B(3 - 3)$

বা, $9 + 1 = 4.A + B.0$

বা, $10 = 4A$

$\therefore A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই –

$$\frac{3y + 1}{(y-3)(y+1)} = \frac{\frac{5}{2}}{y-3} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ : $\frac{y^3 - 2y^2 + 1}{y^2 - 2y - 3} = y + \frac{\frac{5}{2}}{y-3} + \frac{\frac{1}{2}}{y+1}$

$= y + \frac{5}{2(y-3)} + \frac{1}{2(y+1)}$

প্রশ্ন–৬ ▸ চলক x এর তিনটি বহুপদী $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k$,

$N(x) = x^2 - 4x - 7$ এবং $D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

ক. $D(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{N(x)}{D(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $x = -1$ বসালে $D(-1) = 0$ হয়।

অতএব, $(x + 1)$, $D(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore D(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$

$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$

$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x - 4)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x + k$

যেহেতু $(3x + 2)$ বা, $3\left(x + \frac{2}{3}\right)$ বা, $3\left\{x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক; সেহেতু উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

এখানে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + k$

$= -18\left(\frac{8}{27}\right) + 15\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3} + k$

$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} + \frac{2}{3} + k$

$= \frac{-16 + 20 + 2 + 3k}{3} = \frac{6 + 3k}{3}$

শর্তানুসারে, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $\frac{6 + 3k}{3} = 0$

বা, $6 + 3k = 0 \therefore k = -2$

গ. দেওয়া আছে, $N(x) = x^2 - 4x - 7$

'ক' থেকে পাই,

$D(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 4)$

$\therefore \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$

$\therefore \frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

মনে করি, $\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4}$........ (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x + 2)(x - 4) + B(x + 1)(x - 4) + C(x + 1)(x + 2)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$1 + 4 - 7 = A(-1 + 2)(-1 - 4)$

বা, $-2 = A(-5) \therefore A = \frac{2}{5}$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$4 + 8 - 7 = B(-2 + 1)(-2 - 4)$

বা, $5 = B(-1)(-6) \therefore B = \frac{5}{6}$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$16 - 16 - 7 = C(4 + 1)(4 + 2)$

বা, $-7 = C(5)(6) \therefore C = -\frac{7}{30}$

এখন A, B, C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x + 1)(x + 2)(x - 4)} \equiv \frac{2}{5(x + 1)} + \frac{5}{6(x + 2)} - \frac{7}{30(x - 4)};$$

এটিই প্রদত্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

প্রশ্ন–৭ ▸ শিক্ষক ছাত্রদের $F(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ লিখতে বললেন কিন্তু ভুল করে জামাল $f(x) = x^3 + 2x^3 - 1$ এবং দিদার $P(x) = x^2 + 2x - 3$ লিখল।

ক. $f(x)$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর। ২

খ. $F(x)$ বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. জামালের লেখাকে লব এবং দিদারের লেখাকে হর ধরে রাশিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ৭ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. এখানে, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

অতএব, $x + 1$ | $x^3 + 2x^2 - 1$ | $x^2 + x - 1$

$x^3 + x^2$

$x^2 - 1$

$x^2 + x$

$-x - 1$

$-x - 1$

0

$x + 1$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 0. **(Ans.)**

খ. $F(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

বহুপদীটির মুখ্য সহগ 1 এবং ধ্রুবক পদ -8

ধ্রুবক পদের উৎপাদক সমূহের সেট $= \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$

$F(1) = 1^3 - 1^2 - 10.1 - 8 = -18 \neq 0$

$F(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x^2 - 10x - 8$

$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$

$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$
$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$
$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$
$= (x + 1)(x - 4)(x + 2)$

বহুপদী F(x) এর উৎপাদক $(x + 1)(x + 2)(x - 4)$ **(Ans.)**

গ. রাশিটি $= \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$

এখন, $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = x + \dfrac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$

এখানে, $\dfrac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\dfrac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)} \equiv \dfrac{A}{X + 3} + \dfrac{B}{x - 1}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে $(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x - 1 \equiv A(x - 1) + B(x + 3)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$3.1 - 1 = A(1 - 1) + B(1 + 3)$

বা, $3 - 1 = A \times 0 + B.4$

বা, $2 = 4B$

$\therefore B = \dfrac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষকে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3) - 1 = A(-3 - 1) + B(-3 + 3)$

বা, $-9 - 1 = A(-4) + B \times 0$

বা, $-10 = 4A$

$\therefore A = \dfrac{5}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x - 1}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{x + 3} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ, $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন-৮ ▸ x, y, z এর একটি বহুপদী হলো :

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. F(p, q, r) নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এটি একটি চক্র-ক্রমিক প্রতিসম রাশি। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ ৪

গ. যদি, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$ হয় তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$। ৪

▸◂ ৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(p, q, r) = p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এখন, $F(q, r, p) = q^3 + r^3 + p^3 - 3pqr$
$= p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

এবং, $F(q, p, r) = q^3 + p^3 + r^3 - 3qpr$
$= p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$

$\therefore F(p, q, r) = F(q, r, p) = F(q, p, r)$

অর্থাৎ, F(p, q, r) একটি চক্র-ক্রমিক প্রতিসম রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. 'ক' হতে পাই, $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$
$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$
$= (a + b + c)\{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c)$
$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c)$
$= (a + b + c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
$= \frac{1}{2}(a + b + c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$
$= \frac{1}{2}(a + b + c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2)$
$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

(দেখানো হলো)

গ. 'খ' হতে পাই,

$F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

দেওয়া আছে, $a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$

$\therefore a + b + c = y + z - x + z + x - y + x + y - z = x + y + z$

এখন, $(a - b)^2 = (y + z - x - z - x + y)^2$
$= (2y - 2x)^2$
$= \{-2(x - y)\}^2$
$= 4(x - y)^2$

$(b - c)^2 = (z + x - y - x - y + z)^2$
$= (2z - 2y)^2$
$= \{-2(y - z)\}^2$
$= 4(y - z)^2$

এবং $(c - a)^2 = (x + y - z - y - z + x)^2$
$= (2x - 2z)^2$
$= (-2(z - x)\}^2$
$= 4(z - x)^2$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$
$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{4(x - y)^2 + 4(y - z)^2 + 4(z - x)^2\}$
$= 4 \times \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$
$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$
$= 4F(x, y, z)$

অর্থাৎ, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-৯ ▸ $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $Q(x) = 6x^2 + 7x + a$

ক. Q(x) বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a = 2$ হলে দেখাও যে, $c = 2b$. ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত b ও c এর মান ব্যবহার করে $\dfrac{x}{P(x)}$ কে

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

$Q(x) = 6x^2 + 7x + a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$।

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে

এখন, $Q\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{1}{2}\right) + a$

$= 6 \times \frac{1}{4} - \frac{7}{2} + a$

$= \frac{3}{2} - \frac{7}{2} + a$

$= \frac{3 - 7 + 2a}{2}$

$= \frac{2a - 4}{2}$

$= \frac{2(a - 2)}{2}$

$= a - 2$

শর্তমতে, $a - 2 = 0$ $\therefore a = 2$

নির্ণেয় মান $a = 2$

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$

$Q(x) = 6x^2 + 7x + 2$ $[\because a = 2]$

এবং $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $Q(x)$

এখন, $Q(x) = 6x^2 + 7x + 2$

$= 6x^2 + 4x + 3x + 2$

$= 2x(3x + 2) + 1(3x + 2)$

$= (3x + 2)(2x + 1)$

সুতরাং $(3x + 2)$ এবং $(2x + 1)$ রাশিদ্বয় হবে $P(x)$ বহুপদীর দুটি উৎপাদক।

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ এবং $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

এখন, $P\left(-\frac{2}{3}\right) = 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 15\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + b\left(-\frac{2}{3}\right) + c$

$= 18 \times \left(-\frac{8}{27}\right) + 15 \times \frac{4}{9} - \frac{2b}{3} + c$

$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} - \frac{2b}{3} + c$

$= \frac{-16 + 20 - 2b + 3c}{3}$

$= \frac{4 - 2b + 3c}{3}$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c$

$= 18 \times \left(-\frac{1}{8}\right) + 15 \times \frac{1}{4} - \frac{b}{2} + c$

$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{b}{2} + c$

$= \frac{-9 + 15 - 2b + 4c}{4}$

$= \frac{6 - 2b + 4c}{4}$

শর্তানুসারে, $\frac{4 - 2b + 3c}{3} = 0$ এবং $\frac{6 - 2b + 4c}{4} = 0$

অর্থাৎ, $4 - 2b + 3c = 0$ .... (i)

$6 - 2b + 4c = 0$ ....(ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$4 - 2b + 3c - 6 + 2b - 4c = 0$

বা, $-c - 2 = 0$

$\therefore c = -2$

সমীকরণ (i) –এ $c = -2$ বসিয়ে পাই,

$4 - 2b + 3(-2) = 0$

বা, $4 - 2b - 6 = 0$

বা, $-2b - 2 = 0$

বা, $-2b = 2$

$\therefore b = -1$

সুতরাং, $c = 2b$

গ. 'খ' হতে পাই, $b = -1, c = -2$

দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 + bx + c$

$= 18x^3 + 15x^2 - x - 2$ $[\because b = -1, c = -2]$

$= 18x^3 + 21x^2 + 6x - 6x^2 - 7x - 2$

$= 3x(6x^2 + 7x + 2) - 1(6x^2 + 7x + 2)$

$= (6x^2 + 7x + 2)(3x - 1)$

$= (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$

সুতরাং $\frac{x}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $\frac{x}{(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)} \equiv \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 2} + \frac{C}{3x - 1}$ .... (iii)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x = A(3x + 2)(3x - 1) + B(2x + 1)(3x - 1) + C(2x + 1)(3x + 2)$ .... (iv)

এখানে, সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$-\frac{1}{2} = A\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\} + B\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right\} + C\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right\}\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\right\}$

বা, $-\frac{1}{2} = A\left(-\frac{3}{2} + 2\right)\left(-\frac{3}{2} - 1\right) + B(-1 + 1)\left(-\frac{3}{2} - 1\right) + C(-1 + 1)\left(-\frac{3}{2} + 2\right)$

বা, $-\frac{1}{2} = A\,\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) + B.0.\left(-\frac{5}{2}\right) + C.0.\frac{1}{2}$

বা, $-\frac{1}{2} = A.\left(-\frac{5}{4}\right) + 0 + 0$

বা, $-\frac{5}{4}.A = -\frac{1}{2}$

বা, $A = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)$

$\therefore A = \frac{2}{5}$

আবার সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = -\frac{2}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$-\frac{2}{3} = A\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\right\}\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1\right\} + B\left\{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right\}\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-1\right\} + C\left\{2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right\}\left\{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\right\}$$

বা, $-\frac{2}{3} = A(-2+2)(-2-1) + B\left(-\frac{4}{3}+1\right)(-2-1) + C\left(-\frac{4}{3}+1\right)(-2+2)$

বা, $-\frac{2}{3} = A.0(-3) + B\left(-\frac{1}{3}\right)(-3) + C\left(-\frac{1}{3}\right).0$

বা, $-\frac{2}{3} = 0 + B.1 + 0$

$\therefore B = -\frac{2}{3}$

পুনরায়, সমীকরণ (iv) এর উভয়পক্ষে $x = \frac{1}{3}$ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{3} = A.\left(3.\frac{1}{3}+2\right)\left(3.\frac{1}{3}-1\right) + B.\left(2.\frac{1}{3}+1\right)\left(3.\frac{1}{3}-1\right) + C.\left(2.\frac{1}{3}+1\right)\left(3.\frac{1}{3}+2\right)$$

বা, $\frac{1}{3} = A.(1+2)(1-1) + B\left(\frac{2}{3}+1\right)(1-1) + C\left(\frac{2}{3}+1\right)(1+2)$

বা, $\frac{1}{3} = A.3.0 + B.\frac{5}{3}.0 + C.\frac{5}{3}.3$

বা, $\frac{1}{3} = 0 + 0 + C.5$

$\therefore C = \frac{1}{15}$

A, B, C এর মান সমীকরণ (iii)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(2x+1)(3x+2)(3x-1)} = \frac{\frac{2}{5}}{2x+1} + \frac{\frac{-2}{3}}{3x+2} + \frac{\frac{1}{15}}{3x-1}$$

$= \frac{2}{5(2x+1)} - \frac{2}{3(3x+2)} + \frac{1}{15(3x-1)}$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–১০ ▸ $f(x) = x^2 - 7x - 6$ ও $g(x) = 2x^2 + x - a$ দুইটি বহুপদী।

ক. $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হলে, $f(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদকটি নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{g(x)}{f(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ১০ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 7x - 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 - 7(-1) - 6$
$= -1 + 7 - 6$
$= 7 - 7 = 0$

$\therefore x - (-1)$ বা $(x + 1)$, f(x) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - 7x - 6 = x^3 + x^2 - x^2 - x - 6x - 6$
$= x^2(x+1) - x(x+1) - 6(x+1)$
$= (x+1)(x^2 - x - 6)$
$= (x+1)(x^2 - 3x + 2x - 6)$
$= (x+1)\{(x(x-3) + 2(x-3)\}$
$= (x+1)(x-3)(x+2)$
$= (x-3)(x+1)(x+2)$

এটিই f(x) এর উৎপাদকে বিশেরষিত রূ প।

খ. এখানে, $g(x) = 2x^2 + x - a$ এবং $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - a$

বা, $0 = 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - a$

বা, $0 = 1 - a$

$\therefore a = 1$

অতএব, $g(x) = 2x^2 + x - 1$
$= 2x^2 + 2x - x - 1$
$= 2x(x+1) - 1(x+1)$
$= (x+1)(2x-1)$

'ক' হতে পাই, $f(x) = (x-3)(x+1)(x+2)$

অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, f(x) ও g(x) বহুপদীদ্বয়ের একটি সাধারণ উৎপাদক হলো (x + 1)

গ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 - 7x - 6} = \frac{(x+1)(2x-1)}{(x-3)(x+1)(x+2)} = \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

মনে করি, $\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$

বা, $\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)} \equiv \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$

বা, $2x - 1 \equiv A(x-3) + B(x+2)$.................. (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে x = –2 বসিয়ে পাই,

$2(-2) - 1 = A(-2-3) + (-2+2)$

বা, $-4 - 1 = A(-5) + B.0$

বা, $-5 = -5A$

$\therefore A = 1$

আবার, সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষে x = 3 বসিয়ে পাই

$2 \times 3 - 1 = A(3-3) + B(3+2)$

বা, $6 - 1 = A.0 + B \times 5$

বা, $5 = 5B$

$\therefore B = 1$

$\therefore \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

অতএব, $\frac{g(x)}{f(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ হলো $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$

প্রশ্ন–১১ ▸ $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ একটি বহুপদী।

ক. $P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$P(x)$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6$

$= 8 + 8 - 10 - 6$

$= 0$

নির্ণেয় ভাগশেষ 0.

খ. মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

এখানে ধ্রুবব সংখ্যা $= -6$

সুতরাং উৎপাদনসমূহের সেট হতে পারে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$x = -3$ বসিয়ে পাই,

$P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^3 + 5 - 5(-3) - 6$

$= -27 + 18 + 15 - 6$

$= -33 + 33$

$= 0$

$\therefore (x + 3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6$

$= x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x^2 - x - 2)$

$= (x + 3)(x^2 - 2x + x - 2)$

$= (x + 3)\{x(x - 2) + 1(x - 2)\}$

$= (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$

নির্ণেয় উৎপাদক $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$

গ. $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$P(a) = a^3 + 2a^2 - 5a - 6$

এবং $P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে

$P(b) = b^3 + 2b^2 - 5b - 6$

শর্তানুসারে, $a^3 + 2a^2 - 5a - 6 = b^3 + 2b^2 - 5b - 6$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 - 5a + 5b - 6 + 6 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 - 5a + 5b = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 2(a + b)(a - b) - 5(a - b) = 0$

বা, $(a - b)\{a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b - 5\} = 0$

বা, $a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ $[\because a - b \neq 0]$

$\therefore a^2 + b^2 + ab + 2a + 2b - 5 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১২ ▸ $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে $P(b)$ নির্ণেয় কর। ২

খ. রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. রাশিটির প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি $= bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

শর্তমতে, $P(a) = bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$\therefore P(b) = bc(b^2 - c^2) + bc(c^2 - b^2) - b^2(b^2 - b^2)$

$= bc(b^2 - c^2) - bc(b^2 - c^2) - 0$

$= 0$

নির্ণেয় $P(b) = 0$.

খ. প্রদত্ত রাশি, $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= bc(b^2 - c^2) + c^3a - ca^3 + a^3b - ab^3$

$= bc(b^2 - c^2) + a^3b - ca^3 - ab^3 + c^3a$

$= bc(b^2 - c^2) + a^3(b - c) - a(b^3 - c^3)$

$= bc(b + c)(b - c) + a^3(b - c) - a(b - c)(b^2 + bc + c^2)$

$= (b - c)\{(bc(b + c) + a^3 - a(b^2 + bc + c^2)\}$

$= (b - c)(b^2c + bc^2 + a^3 - ab^2 - abc - c^2a)$

$= (b - c)(a^3 - ab^2 - c^2a + bc^2 - abc + b^2c)$

$= (b - c)\{a(a^2 - b^2) - c^2(a - b) - bc(a - b)\}$

$= (b - c)(a - b)\{a(a + b) - c^2 - bc\}$

$= (b - c)(a - b)(a^2 + ab - c^2 - bc)$

$= (b - c)(a - b)(-bc + ab - c^2 + a^2)$

$= (b - c)(a - b)\{-b(c - a) - (c^2 - a^2)\}$

$= (b - c)(a - b)\{-b(c - a) - (c + a)(c - a)\}$

$= (b - c)(a - b)(c - a)(-b - c - a)$

$= (b - c)(a - b)(c - a)\{-(a + b + c)\}$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

গ. ‘ক’ হতে প্রাপ্ত $P(b) = 0$

$\therefore (a - b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

এখানে, প্রদত্ত রাশিটি চক্র–ক্রমিক তাই $(b - c)$ এবং $(c - a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার, প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a - b)(b - c)(c - a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র–ক্রমিক এবং একমাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে।

অর্থাৎ, তা $k(a + b + c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুববক।

$\therefore bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= K(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ ....(i)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

$\therefore$ (i) নং এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই,

$2(1 - 4) + 0(4 - 0) + 0(0 - 1) = k(0 - 1)(1 - 2)(2 - 0)(0 + 1 + 2)$

বা, $-6 + 0 + 0 = k(-1)(-1)(2)(3)$

বা, $-6 = 6K$

$\therefore k = -1$

সমীকরণ (i)–এ $K = -1$ বসিয়ে পাই,

$bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ একটি বীজগাণিতিক রাশি এবং $\dfrac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)}$, $\dfrac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)}$, $\dfrac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}$ তিনটি মূলদ ভগ্নাংশ।

ক. দেখাও যে, বীজগাণিতিক রাশিটি অপ্রতিসম। ২
খ. বীজগাণিতিক রাশিটি উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ৪
গ. মূলদ ভগ্নাংশ তিনটির যোগের সরলমান নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি $= a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

রাশিটিতে a ও b এর স্থান বিনিময় করে পাই,

$b^2(a-c) + a^2(c-b) + c^2(b-a)$

যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

$\therefore$ প্রদত্ত বীজগাণিতিক রাশিটি অপ্রতিসম। **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত রাশি, $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

$= a^2(b-c) + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2$

$= a^2(b-c) + b^2c - bc^2 - ab^2 + c^2a$

$= a^2(b-c) + bc(b-c) - a(b^2 - c^2)$

$= a^2(b-c) + bc(b-c) - a(b+c)(b-c)$

$= (b-c)\{a^2 + bc - a(b+c)\}$

$= (b-c)(a^2 + bc - ab - ca)$

$= (b-c)(a^2 - ab - ca + bc)$

$= (b-c)\{a(a-b) - c(a-b)\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$

$= (b-c)(a-b)\{-(c-a)\}$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

গ. $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

$= \dfrac{-(1-a^3)}{-(a-b)(c-a)} + \dfrac{-(1-b^3)}{-(b-c)(a-b)} + \dfrac{-(1-c^3)}{-(c-a)(b-c)}$

$= \dfrac{1-a^3}{(a-b)(c-a)} + \dfrac{1-b^3}{(b-c)(a-b)} + \dfrac{1-c^3}{(c-a)(b-c)}$

$= \dfrac{(1-a^3)(b-c) + (1-b^3)(c-a) + (1-c^3)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{1(b-c) - a^3(b-c) + 1(c-a) - b^3(c-a) + 1(a-b) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{1(b-c+c-a+a-b) - \{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$[\because a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(a+b+c]$

$= \dfrac{0 - \{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= a + b + c$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ $\dfrac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$ **একটি ভগ্নাংশ।**

ক. প্রদত্ত ভগ্নাংশটি কোন ধরনের ভগ্নাংশ? ২
খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশেরষণ কর এবং ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশের আকারে লেখ। ৪
গ. প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব x^3 এবং হর $x^4 + 3x^2 + 2$ উভয়েই x চলকের বহুপদী।

এখানে, লব x^3 এর মাত্রা 3 এবং হর $x^4 + 3x^2 + 2$ এর মাত্রা 4।

যেহেতু প্রদত্ত ভগ্নাংশের লব এর মাত্রা হর এর মাত্রা অপেৰা ছোট

সুতরাং, $\dfrac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ. প্রদত্ত ভগ্নাংশের হর $= x^4 + 3x^2 + 2$

$= x^4 + 2x^2 + x^2 + 2$

$= x^2(x^2 + 2) + 1(x^2 + 2)$

$= (x^2 + 2)(x^2 + 1)$ **(Ans.)**

আবার, $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} \equiv \dfrac{Ax + B}{x^2 + 2} + \dfrac{(Cx + D)}{x^2 + 1}$

গ. 'খ' অংশ হতে প্রাপ্ত $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} \equiv \dfrac{Ax + B}{x^2 + 2} + \dfrac{(Cx + D)}{x^2 + 1}$ ......(i)

মনে করি, $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} \equiv \dfrac{Ax + B}{x^2 + 2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + 1}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয় পৰকে $(x^2+2)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2)$

$\equiv Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D$

$\equiv (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A + 2C)x + (B + 2D)$...... (ii)

সমীকরণ (ii) এর x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 1$.............. (iii)

$B + D = 0$.............. (iv)

$A + 2C = 0$............. (v)

$B + 2D = 0$.............(vi)

সমীকরণ (iv) ও (vi) হতে পাই, $B = 0$ এবং $D = 0$

সমীকরণ (v) নং হতে পাই,

$A + C + C = 0$

বা, $1 + C = 0$ $\quad [\because A + C = 1]$

$\therefore C = -1$

$C = -1$ হলে সমীকরণ (iii) হতে পাই,

$A - 1 = 1$

$\therefore A = 2$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$

$= \dfrac{2.x + 0}{x^2 + 2} + \dfrac{-1.x + 0}{x^2 + 1}$

$= \dfrac{2x}{x^2 + 2} - \dfrac{x}{x^2 + 1}$ এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–১৫ ▸ $\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} = \dfrac{3}{abc}$

এবং $P(x) = \dfrac{2}{1 + x^2} + \dfrac{4}{1 + x^4} + \dfrac{8}{1 + x^8} + \dfrac{16}{x^{16} - 1}$

ক. P(x) এর ৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি কত? ২
খ. $\dfrac{1}{1 + x} + P(x)$ কে সরল কর। ৪
গ. দেখাও যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = \dfrac{2}{1 + x^2} + \dfrac{4}{1 + x^4} + \dfrac{8}{1 + x^8} + \dfrac{16}{x^{16} - 1}$

৩য় ও ৪র্থ পদের সমষ্টি

$= \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

$= \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$= \frac{8x^8 - 8 + 16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$= \frac{8x^8 + 8}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$= \frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)} = \frac{8}{(x^8-1)}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{1+x} + P(x)$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{x^8-1}$ [ক হতে]

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \left(\frac{4x^4 - 4 + 8}{(x^4+1)(x^4-1)}\right)$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \left(\frac{2x^2 - 2 + 4}{(x^2+1)(x^2-1)}\right)$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{x^2-1}$

$= \frac{x - 1 + 2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

[$\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$]

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ac + ab}{abc} = 0$

$\therefore ab + bc + ca = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = 0$ | $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 = 0$ | $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$	বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$	বা, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$
বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$	বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a}$
$\therefore a = b$	$\therefore b = c$	$\therefore c = a$

$\therefore a = b = c$

$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হলে $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন–১৬ ▸ $P(x) = x^{16} - 1$ এবং $G(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

ক. দেখাও যে, $(x + 1)$ ও $(x - 1)$ উভয়ই $F(x)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $G(x) + \frac{16}{F(x)} = -\frac{1}{1-x}$ ৪

গ. মনে করি, $G(x) = x^n + a^n$ যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $G(x) = (x + a) Q(x)$ হয়। ৪

▸◂ ১৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $F(x) = x^{16} - 1$

$(x + 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক হলে $F(-1) = 0$ হবে।

$\therefore F(-1) = (-1)^{16} - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

$\therefore (x + 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক।

আবার, $(x - 1)$, $F(x)$ এর উৎপাদক হলে $F(1) = 0$ হবে।

$\therefore F(1) = (1)^{16} - 1$

$= 1 - 1$

$= 0$

$\therefore (x + 1)$, $F(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$(x + 1)$ ও $(x - 1)$ উভয়ই $F(x)$ এর উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

খ. বামপৰ $= G(x) + \frac{16}{F(x)}$

অনুশীলনী ২ এর ১২(d) নং সমাধান দেখ।

$\therefore G(x) + \frac{16}{F(x)} = -\frac{1}{1-x}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $G(x) = x^n + a^n$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

এখানে, $G(-a) = (-a)^n + a^n$

$= (-1)^n a^n + a^n$

$= -a^n + a^n$ [$\because$ n বিজোড় হলে $(-1)^n = -1$]

$= 0$

$\therefore \{x - (-a)\}$ অর্থাৎ $(x + a)$, $a(x)$ এর একটি উৎপাদক।

(দেখানো হলো)

দেওয়া আছে, $a(x) = (x + a) Q(x)$ ....(i)

এখানে $G(x)$ এর x চলকের মাত্রা n.

$(x + a)$ এ চলকের মাত্রা 1.

$\therefore s(x)$ এ x চলকের মাত্রা হবে $(n - 1)$

আবার, $G(x) = x^n + a^n$

$= (x - a)\,[x^{n-1}a.x^{n-2} + a^2x^{n-3} - .... (-1)^{n-2}.\ a^{n-2}.\ x + (-1)^{n-1}\ a^{n-1}]$ ....(ii)

$[\because x^n + y^n = (x + y)\ \{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 .... + (-1)^{n-2}xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1}\}]$

সমীকরণ (i) ও (ii) সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2\,x^{n-3}, a^3x^{n-4} + ...+(-1)^{n-1}a^{n-1}.$

(Ans.)

প্রশ্ন-১৭ ▸ $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(a, b, c)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ৪

গ. $F(a, b, c) = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ ৪

▸◂ ১৭ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$ রাশিটিতে a এর পরিবর্তে b, b এর পরিবর্তে c এবং c এর পরিবর্তে a বসালে আমরা পাই,

$F(b, c, a) = (b + c + a)(bc + ca + ab) - bca$

$= (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

$= F(a, b, c)$

$\therefore F(a, b, c)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$F(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$

$= a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a - abc$

$= a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + bc^2 + ac^2$

$= a^2b + ca^2 + ab^2 + abc + b^2c + bc^2 + abc + ac^2$

$= a^2(b + c) + ab(b + c) + bc(b + c) + ac(b + c)$

$= (b + c)(a^2 + ab + bc + ac)$

$= (b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\}$

$= (b + c)(a + b)(a + c)$

$= (a + b)(b + c)(c + a)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = 0$

অর্থাৎ, $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$

$\therefore (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

এখন, $(a + b + c)^3$

$= (a + b + c)^3 - 3abc + 3abc$

$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$ $[\because abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)]$

$= (a + b + c)\{(a + b + c)^2 - 3(ab + bc+ ca)\} + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca - 3ab - 3bc - 3ca) + 3abc$

$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc.$

$= a^3 + b^3 + c^3$

$\therefore (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-১৮ ▸ $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$ এবং $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$.

ক. $\{P(-1) + Q(-1)\}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. x এর কোন কোন মানের জন্য $P(x) = 0$ হবে, যেখানে $P(-7) = 0$ ৪

গ. $(x - 1)$ যথাক্রমে $P(x)$ এবং $Q(x)$ উভয়ের উৎপাদক হলে, প্রমাণ কর যে, $a + b + 17 = 0$ ৪

▸◂ ১৮ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 7(-1)^2 - (-1) + a$

$= -1 + 7 + 1 + a$

$= 7 + a$

এবং $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$

$\therefore Q(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + 5(-1)^2 + 8(-1) + b$

$= 1 + 4 + 5 - 8 + b$

$= 2 + b$

$\therefore P(-1) + Q(-1) = 7 + a + 2 + b$

$= a + b + 9$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$\therefore P(-7) = (-7)^3 + 7(-7)^2 - (-7) + a$

$= -343 + 343 + 7 + a$

$= 7 + a$

যেহেতু $P(-7) = 0$

বা, $7 + a = 0$

$\therefore a = -7$

$P(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7$

$= x^2(x + 7) - 1(x + 7)$

$= (x^2 - 1)(x + 7)$

$= (x + 1)(x - 1)(x + 7)$

দেওয়া আছে, $P(x) = 0$ হবে

$\therefore (x + 1)(x - 1)(x + 7) = 0$

বা, $x = -1$ অথবা $x = 1$ অথবা $x = -7$

$\therefore x = -1$ অথবা $x = 1$ অথবা $x = 7$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 7x^2 - x + a$

$(x - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(1) = 0$ হবে।

$\therefore P(1) = (1)^3 + 7(1)^2 - 1 + a$

বা, $0 = 1 + 7 - 1 + a$

বা, $0 = 7 + a$

বা, $7 + a = 0$

$\therefore a = -7$

আবার, $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 8x + b$

$(x - 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $Q(1) = 0$ হবে,

$\therefore Q(1) = (1)^4 - 4(1)^3 + 5(1)^2 + 8(1) + b$

বা, $0 = 1 - 4 + 5 + 8 + b$

বা, $0 = 10 + b$

বা, $10 + b = 0$

$\therefore b = -10$

এখন, $a + b + 17 = -7 - 10 + 17 = 0$

$\therefore a + b + 17 = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৯ ▸ যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়,

ক. দেখাও যে, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$ ২

খ. দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ এবং $a = b = c$ ৪

গ. যদি $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ হয়, তবে প্রমাণ কর $a = b = c$ ৪

▸◂ ১৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

(দেখানো হলো)

খ. 'ক' হতে পাই, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore bc + ca + ab = 0$ (দেখানো হলো)

যেহেতু দুই বা ততোধিক বর্গের যোগফল শূন্য হলে, প্রত্যেক বর্গের যোগফল আলাদাভাবে শূন্য হয়,

সুতরাং $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = 0$

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$\therefore b = c$

$\therefore a = b = c$ (দেখানো হলো)

গ. দেওয়া আছে, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$

বা, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{c}}\right)^3 - 3.\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.\frac{1}{\sqrt[3]{b}}.\frac{1}{\sqrt[3]{c}} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)$

$\left\{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right) = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2+\left(\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 0$

$\therefore \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 0$

বা, $a^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$

$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}-\frac{1}{c^{\frac{1}{3}}}\right)^2 = 0$

বা, $c^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$

$\therefore c = b$

$\therefore a = b = c$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২০ ▸ x চলকের দুইটি বহুপদী $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - a$ এবং $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

ক. $Q\left(\frac{1}{2}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $x + 2$, $P(x)$ এর উৎপাদক হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(x)$ ও $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ২০ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

$\therefore Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$= 2.\frac{1}{8} - 7.\frac{1}{4} + 7.\frac{1}{2} - 2$

$= \frac{1}{4} - \frac{7}{4} + \frac{7}{2} - 2$

$= \frac{1 - 7 + 14 - 8}{4}$

$= \frac{15 - 15}{4} = 0$ **(Ans.)**

খ. $x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে $P(-2) = 0$ হবে,

এখন, $P(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) - a$

$= 2(-8) + 3.4 + 6 - a$

$= -16 + 12 + 6 - a$

$= 2 - a$

এখন, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2$

নির্ণেয় a এর মান 2.

গ. মনে করি, $x + b$, $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক।

যখন $b \neq 0$

তাহলে, $P(-b) = 2(-b)^3 + 3(-b)^2 - 3(-b) - 2$

$= -2b^3 + 3b^2 + 3b - 2$

$Q(-b) = 2(-b)^3 - 7(-b)^2 + 7(-b) - 2$

$= -2b^3 - 7b^2 - 7b - 2$

প্রশ্নমতে, $-2b^3 + 3b^2 + 3b - 2 = 0$ .... (i)

এবং $-2b^3 - 7b^2 - 7b - 2 = 0$ .... (ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$3b^2 + 7b^2 + 3b + 7b = 0$

বা, $10b^2 + 10b = 0$

বা, $10b(b + 1) = 0$

কিন্তু $b \neq 0$

$b + 1 = 0$

বা, $b = -1$

$\therefore$ $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক $(x - 1)$

প্রশ্ন–২১ ▸ x, y ও z চলকের একটি সমমাত্রিক বহুপদী হলো,

$$\mathbf{F(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}}$$

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z) = 0$ হলে দেখাও যে, $x = y = z$ এবং $xy + yz + zx = 0$ ৪

গ. $xy + yz + zx = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = 0$ ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(x, y, z) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}$

$F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি হবে যদি এবং কেবল যদি $F(x, y, z) = F(y, z, x)$ হয়।

এখন, $F(y, z, x) = \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{yzx}$

$= \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz}$

$= F(x, y, z)$

অর্থাৎ $F(x, y, z)$ চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = 0$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 0$

$\therefore xy + yz + zx = 0$

অথবা, $\left\{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2\right\} = 0$

কিন্তু কতকগুলো বর্গরাশির সমষ্টি শূন্য হলে তারা প্রত্যেকে আলাদাভাবে শূন্য হবে।

$\therefore \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 = 0$	এবং $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$	বা, $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$	বা, $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = 0$
বা, $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$	বা, $\frac{1}{y} = \frac{1}{z}$	বা, $\frac{1}{z} = \frac{1}{x}$
$\therefore x = y$	$\therefore y = z$	$\therefore z = x$

$\therefore x = y = z$ **(দেখানো হলো)**

গ. $xy + yz + zx = 0$

বা, $xy + yz = -zx$

বা, $y^2 + xy + yz = y^2 - zx$

বা, $y(x + y + z) = y^2 - zx$

$\therefore \frac{1}{y^2 - zx} = \frac{1}{y(x + y + z)}$

আবার, $xy + yz + zx = 0$

বা, $yz + zx = -xy$

বা, $z^2 + yz + zx = z^2 - xy$

বা, $z(z + y + x) = z^2 - xy$

বা, $z(x + y + z) = z^2 - xy$

$\therefore \frac{1}{z^2 - xy} = \frac{1}{z(x + y + z)}$

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{x^2 - yz} = \frac{1}{x(x + y + z)}$

এখন, $\frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = \frac{1}{x(x+y+z)} + \frac{1}{y(x+y+z)} + \frac{1}{z(x+y+z)}$

$= \frac{0}{xyz(x + y + z)} = 0$

$\therefore \frac{1}{x^2 - yz} + \frac{1}{y^2 - zx} + \frac{1}{z^2 - xy} = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২২ ▸ $\mathbf{F(a, b, c) = \frac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}}$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(a, b, c)$ এর সরলফল নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $F(a, b, c) = 0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $F(a, b, c) = \frac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)}$

$\therefore F(b, c, a) = \frac{b^3 - 1}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 - 1}{(c - a)(c - b)} + \frac{a^3 - 1}{(a - b)(a - c)}$

$= F(a, b, c)$

আবার $F(c, b, a) = \frac{c^3 - 1}{(c-b)(c-a)} + \frac{b^3 - 1}{(b-a)(b-c)} + \frac{a^3 - 1}{(a-c)(a-b)}$

$= F(a, b, c)$

$\therefore$ F(a, b, c) একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. $F(a,b,c) = \frac{a^3-1}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3-1}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

$= \frac{a^3-1}{-(a-b)(c-a)} + \frac{b^3-1}{-(b-c)(a-b)} + \frac{c^3-1}{-(c-a)(b-c)}$

$= \frac{(a^3-1)(b-c) + (b^3-1)(c-a) + (c^3-1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)\} - \{(b-c) + (c-a) + (a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= a + b + c$ **(Ans.)**

গ. $F(a, b, c) = 0$ এবং $F(a, b, c) = a + b + c$

$\therefore a + b + c = 0$ বা $a + b = -c$

এখন, $a^3 + b^3 + c^3$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3$

$= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3$

$= -c^3 + 3abc + c^3$

$= 3abc$

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৩ ▸ $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

ক. দেখাও যে, F(a, b, c) একটি চক্র–ক্রমিক সমমাত্রিক। ২

খ. F(a, b, c) কে উৎপাদকের বিশেরষণ কর। ৪

গ. F(a, b, c) = 0 হলে, দেখাও যে, a + b + c = 0 এবং a = b = c ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. F(a, b, c) এর প্রত্যেক পদের মাত্রা 3

F(a, b, c) একটি সমমাত্রিক বহুপদী।

এখন, F(a, b, c) তে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$F(b, c, a) = b^3 + c^3 + a^3 - 3bca$; যা F(a, b, c) এর সমান।

$\therefore$ F(a, b, c) রাশিটি চক্র–ক্রমিক সমমাত্রিক। **(দেখানো হলো)**

খ. $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$

$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - 3abc$

$= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} - 3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca\}$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

$F(a,b,c) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, F(a, b, c) = 0

$\therefore a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$

$\therefore a + b + c = 0$ **(দেখানো হলো)**

অথবা, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

কিন্তু এরা বর্গরাশি বলে প্রত্যেকে অঋণাত্মক, যেহেতু তাদের সমষ্টি 0, সুতরাং তাদের প্রত্যেকের মান শূন্য হবে।

$\therefore (a-b)^2 = 0$

বা, $a - b = 0$

বা, $a = b$

আবার, $(b-c)^2 = 0$

বা, $b - c = 0$

বা, $b = c$

$\therefore a = b = c$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৪ ▸ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$ এবং $g(y) = z^{2y} - 3\cdot2^{y+2} + 32$

ক. f(1) এবং f(– 1) নির্ণয় কর। ২

খ. g(y) = 0 হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. f(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $f(1) = \frac{1^3 - 2.1^2 + 1}{1^2 - 2.1 - 3} = \frac{0}{1-5} = 0$

$f(-1) = \frac{(-1)^3 - 2(-1)^2 + 1}{(-1)^2 - 2(-1) - 3} = \frac{-1-2+1}{1+2-3} = \frac{-2}{0}$

কিন্তু $\frac{-2}{0}$ অসংজ্ঞায়িত। এক্ষেত্রে এর কোনো মান নেই। **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $g(y) = 2^{2y} - 3\cdot2^{y+2} + 32$

বা, $2^{2y} - 3.2^{y+2} + 32 = 0$ $[\because g(y) = 0]$

বা, $2^{2y} - 3.2^y.2^2 + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3.2^y.4 + 32 = 0$

বা, $(2^y)^2 - 12.2^y + 32 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$ [ধরি $2^y = x$]

বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$

বা, $(x-8)(x-4) = 0$

হয়, $x - 8 = 0$	অথবা $x - 4 = 0$
বা, $x = 8$	বা, $x = 4$
বা, $2^y = 2^3$	বা, $2^y = 2^2$
$\therefore y = 3$	$\therefore y = 2$

নির্ণেয় মান y = 2, 3

গ. $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$= \frac{x(x^2 - 2x - 3) + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$= x + \frac{3x + 1}{x^2 - 3x + x - 3}$

$= x + \frac{3x + 1}{x(x-3) + 1(x-3)}$

$= x + \frac{3x+1}{(x-3)(x+1)}$ ....(i)

মনে করি, $\frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$ … … ...(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 1 \equiv A(x+1) + B(x-3)$ … … … …… … (iii)

সমীকরণ (iii) –এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$3 \times (-1) + 1 = A(-1+1) + B(-1-3)$

বা, $-2 = B \times (-4)$

বা, $B = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

আবার, সমীকরণ (iii) –এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 \times 3 + 1 = A(3+1) + B(3-3)$

বা, $10 = A \times 4$

বা, $A = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

সমীকরণ (ii) –এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x+1}{(x-3)(x+1)} = \frac{\frac{5}{2}}{x-3} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1}$$

$$= \frac{5}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3} = x + \frac{5}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন–২৫ ▸ $F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

ক. দেখাও যে, F(a, b, c) একটি সমমাত্রিক চক্র–ক্রমিক। ২

খ. F(a, b, c) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. F(a, b, c) = 0 হলে প্রমাণ কর যে, ab + bc + ca = 0 অথবা a = b = c ৪

▸◂ ২৫ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. F(a, b, c) এর প্রত্যেকটি পদের মাত্রা 3। সুতরাং এটি সমমাত্রিক।

আবার, $F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

এতে a এর স্থলে b, b এর স্থলে c এবং c এর স্থলে a বসিয়ে পাই,

$F(a, b, c) = \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{3}{bca} = F(a, b, c)$

$\therefore$ F(b, c, a) চক্র–ক্রমিক রাশি।

F(a, b, c) একটি সমমাত্রিক চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $F(a, b, c) = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

$= \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$

$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} - \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\right\}$

$= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca}\right)$ **(Ans.)**

গ. আবার, F(a, b, c) = 0

$\therefore \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$\therefore \frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

বা, bc + ca + ab = 0

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

কিন্তু এরা বর্গরাশি বলে প্রত্যেকেই অঋণাত্মক, তাদের মান শূন্য বলে প্রত্যেকের মান শূন্য হবে,

$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

$\therefore$ a = b

আবার $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$\therefore$ b = c

সুতরাং a = b = c **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৬ ▸ $F(a, b, c) = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ এবং $F'(a, b, c) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

ক. দেখাও যে, F(a, b, c) = 3(a – b)(b – c)(c – a) ২

খ. F′(a, b, c) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. সরল কর $\frac{a^2 + (b-c)^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2 + (c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2 + (a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$। ৪

▸◂ ২৬ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $F(a, b, c) = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

মনে করি, a – b = x

b – c = y

এবং c – a = z

$\therefore$ x + y + z = 0

এখন, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \times (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

$\therefore (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

(দেখানো হলো)

খ. $F'(a, b, c) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= a(b^2 - c^2) + bc^2 - a^2b + ca^2 - b^2c$

$= a(b^2 - c^2) - bc(b-c) - a^2(b-c)$

$= (b-c)\{a(b+c) - bc - a^2\}$

$= (b-c)\{ab + ac - bc - a^2\}$

$= (b-c)\{c(a-b) - a(a-b)\}$

$= (b-c)(a-b)(c-a)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^2+(b-c)^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2+(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2+(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{a^2+(b-c)^2\}(b-c)+\{b^2+(c-a)^2\}(c-a)+\{c^2+(a-b)^2\}(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{a^2(b-c)+(b-c)^3+b^2(c-a)+(c-a)^3+c^2(a-b)+(a-b)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}+\{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ [ক থেকে]

$= \frac{\{a^2(b-c)+b^2c-ab^2+c^2a-c^2b\}+3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)\}+3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{(b-c)\}\{a^2+bc-ab-ac\}+3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{\{(b-c)\}a(a-b)-c(a-b)\}+3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{-(b-c)(a-b)(c-a)+3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৭ ▸ $\phi(a) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

ক. প্রমাণ কর যে, $a-b$, $\phi(a)$ এর একটি উৎপাদক। ২

খ. $\phi(a)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ৪

গ. সরল কর : $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\phi(a) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$\therefore \phi(b) = b^2(b-c)+b^2(c-b)+c^2(b-b)$

$= b^3-b^2c+b^2c-b^3+0=0$

যেহেতু $\phi(b)=0$, সেহেতু $(a-b)$, $\phi(a)$ এর একটি উৎপাদক।

(প্রমাণিত)

খ. $\phi(a) = a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$= a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$= a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^2+bc-a(b+c)\}$

$= (b-c)\{a^2+bc-ab-ac\}$

$= (b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$= (b-c)(a-b)(a-c)$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত রাশি,

$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$= \frac{a}{-(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{-(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$= \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$ [‘খ’ হতে]

$= 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৮ ▸ চলক x এর তিনটি রাশি $(x+3), (x^2-9), x^3$

ক. উপরিউক্ত রাশিসমূহ হতে ১ম ও ২য় রাশি দ্বারা একটি প্রকৃত এবং ২য় ও ৩য় রাশি দ্বারা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ তৈরি কর। ২

খ. অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি থেকে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ পৃথক কর। ৪

গ. ‘খ’ হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, প্রথম রাশি $= x+3$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2-9 = (x+3)(x-3)$

এবং তৃতীয় রাশি $= x^3$

এখন, $\frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$; যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

এবং $\frac{x^3}{x^2-9}$, যা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ. ‘ক’ হতে প্রাপ্ত অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\frac{x^3}{x^2-9}$

এখন, $\frac{x^3}{x^2-9} = \frac{x^3-9x+9x}{x^2-9}$

$= \frac{x(x^2-9)+9x}{x^2-9}$

$= \frac{x(x^2-9)}{(x^2-9)} + \frac{9x}{x^2-9}$

$= x + \frac{9x}{x^2-9} = x + \frac{9x}{(x+3)(x-3)}$

এখানে $\frac{9x}{(x+3)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

গ. ‘খ’ হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\frac{9x}{(x+3)(x-3)}$

মনে করি, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$ .... (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x+3)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$9x \equiv A(x-3)+B(x+3)$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$9 \times 3 = A(3-3)+B(3+3)$

বা, $27 = A \times 0 + B \times 6$

বা, $27 = 6B$

$\therefore B = \frac{9}{2}$

আবার, সমীকরণ (ii)–এ $x = -3$ বসিয়ে পাই

$9(-3) = A(-3-3)+B(-3+3)$

বা, $-27 = -6A + B \times 0$

$\therefore A = \frac{9}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{\frac{9}{2}}{x+3} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3}$

$\therefore \frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{9}{2(x+3)} + \frac{9}{2(x-3)}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২৯ ▸ $5x^3 + 6x^2 - 32x + 6$ একটি x চলকের বিন্দু।

ক. বহুপদটিকে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদকে এবং পদটিতে x এর ঘাত কত? ২

খ. P(x) কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. P(x) কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষকে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে বের কর এবং দেখাও যে, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ। ৪

▸◂ ২৯ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. বহু পদটিকে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদ 6 এবং ঐ পদে x এর ঘাত 0.

খ.

$$\begin{array}{r|l|l} x-2 & 5x^3 + 6x^2 - 32x + 6 & 5x^2 + 16x \\ & 5x^3 - 10x^2 & \\ \hline & 16x^2 - 32x & \\ & 16x^2 - 32x & \\ \hline & 6 & \end{array}$$

নির্ণেয় ভাগফল $5x^2 + 16x$.

গ. ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে P(x) কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে P(2).

$\therefore P(2) = 5.2^3 + 6.2^2 - 32.2 + 6$
$= 40 + 24 - 64 + 6$
$= 70 - 64 = 6$

এখানে, ভাজক = $x - 2$
ভাগফল = $5x^2 + 16x$
ভাজ্য = $5x^3 + 16x^2 - 32x + 6$ এবং ভাগশেষ = 6

সুতরাং, ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ
$= (x - 2)(5x^2 + 16x) + 6$
$= 5x^3 + 16x^2 - 10x^2 - 32x + 6$
$= 5x^3 + 6x^2 - 32x + 6$
= ভাজ্য

∴ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩০ ▸ $P(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 10$ হয়, তাহলে–

ক. $P\left(\frac{1}{m}\right)$ নির্ণয় কর। [যখন r = 0] ২

খ. P(x) এর সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

গ. P(x) কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7 = 0$ ৪

▸◂ ৩০ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 10$

$\therefore P\left(\frac{1}{m}\right) = \left(\frac{1}{m}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 7\cdot\frac{1}{m} + 10$

$= \frac{1}{m^3} + \frac{6}{m^2} + \frac{7}{m} + 10$

$= \frac{1 + 6m + 7m^2 + 10m^3}{m^3}$

$= \frac{10m^3 + 7m^2 + 6m + 1}{m^3}$ **(Ans.)**

খ. $P(-5) = (-5)^3 + 6(-5)^2 + 7(-5) + 10$
$= -125 + 150 - 35 + 10$
$= 0$

∴ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $(x + 5)$, P(x) এর একটি উৎপাদক হবে।

$\therefore x^3 + 6x^2 + 7x + 10$
$= x^3 + 5x^2 + x^2 + 5x + 2x + 10$
$= x^2(x + 5) + x(x + 5) + 2(x + 5)$
$= (x + 5)(x^2 + x + 2)$
$= (x + 5)(x^2 + 2x + x + 2)$
$= (x + 5)\{x(x + 2) + 1(x + 2)\}$
$= (x + 5)(x + 2)(x + 1)$

∴ P(x) এর সাধারণ উৎপাদক $(x + 5)(x + 2)(x + 1)$ **(Ans.)**

গ. P(x) কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,
$P(a) = a^3 + 6a^2 + 7a + 10$
P(x) কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,
$P(b) = b^3 + 6b^2 + 7b + 10$
শর্তানুসারে, $a^3 + 6a^2 + 7a + 10 = b^3 + 6b^2 + 7b + 10$
বা, $a^3 - b^3 + 6(a^2 - b^2) + 7(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7) = 0$
$\therefore a^2 + b^2 + ab + 6a + 6b + 7 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩১ ▸ $P(x) = \frac{x\ \ 1}{x^2 - 7x + 12}$, $g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}$।

ক. $P(-2)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $g(x) = 2^{\frac{1}{3}}$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

▸◂ ৩১ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12}$

$\therefore P(-2) = \frac{-2 + 1}{(-2)^2 - 7(-2) + 12}$

$= \frac{-1}{4 + 14 + 12} = -\frac{1}{30}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x + 1}{x^2 - 4x - 3x + 12}$

$= \frac{x + 1}{x(x - 4) - 3(x - 4)}$

$= \frac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)}$

$\frac{x + 1}{x^2 - 7x + 12} = \frac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)}$

ধরি, $\frac{x + 1}{(x - 4)(x - 3)} \equiv \frac{A}{x - 4} \equiv \frac{B}{x - 3}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x - 4)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 1 \equiv A(x - 3) + B(x - 4)$ ....(ii)

x = 3 হলে,

$3 + 1 = -B$

$\therefore B = -4$

$x = 4$ হলে,

$4 + 1 = A$

$\therefore A = 5$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) -এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+1}{(x-4)(x-3)} = \frac{5}{x-4} - \frac{4}{x-3}$$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}$

আবার, $g(x) = 2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore (1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $\left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $(1 + x + 1 - x) + 3(1 + x)^{\frac{1}{3}}(1 - x)^{\frac{1}{3}}\left\{(1 + x)^{\frac{1}{3}} + (1 - x)^{\frac{1}{3}}\right\} = 2$

বা, $2 + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 2$

বা, $3(1 - x)^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $3(1 - x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $1 - x = 0$

$\therefore x = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩২ ▸ দেওয়া আছে,

$P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$Q(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + k$

$R(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

ক. $R(x)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ২

খ. $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক $3x + 2$ হলে, k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

▸◂ ৩২ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. মনে করি, $f(x) = x^2 - x^2 - 10x - 8$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\} = x + 1$

অর্থাৎ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 - x^2 - 10x - 8$

$= x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x - 8x - 8$

$= x^2(x + 1) - 2x(x + 1) - 8(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 - 2x - 8)$

$= (x + 1)(x^2 - 4x + 2x - 8)$

$= (x + 1)\{x(x - 4) + 2(x - 4)\}$

$= (x + 1)(x - 4)(x + 2)$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$Q(x)$ এর একটি উৎপাদক $(3x + 2)$ অর্থাৎ $\left\{x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right\}$

$Q(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + k$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore Q\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

বা, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 + 7\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 17\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 17\left(-\frac{2}{3}\right) + k = 0$

বা, $\frac{16}{81} - \frac{7 \times 8}{27} + 17 \times \frac{4}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$

বা, $\frac{16}{81} - \frac{56}{27} + \frac{68}{9} - \frac{34}{3} + k = 0$

বা, $\frac{16 - 168 + 612 - 918 + 81k}{81} = 0$

বা, $-458 + 81k = 0$

$\therefore k = 5\frac{53}{81}$

নির্ণেয় k এর মান $5\frac{53}{81}$

গ. $\frac{x^2}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে

দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6$

$= 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ বা $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

তাহলে, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$

$= x^2(x + 1) + 5x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + 5x + 6)$

$= (x + 1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$

$= (x + 1)\{x(x + 3) + 2(x + 3)\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) –এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 = A(-1 + 2)(-1 + 3) + B(-1 + 1)(-1 + 3)$
$+ C(-1 + 1)(-1 + 2)$

বা, $1 = A(1)(2)$

বা, $2A = 1$

$\therefore A = \frac{1}{2}$

সমীকরণ (ii) –এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$(-2)^2 = A(-2 + 2)(-2 + 3) + B(-2 + 1)(-2 + 3) + C(-2 + 1)(-2 + 2)$

বা, $4 = B(-1)(1)$

বা, $-B = 4$

$\therefore B = -4$

সমীকরণ (ii) নং এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = A(-3 + 2)(-3 + 3) + B(-3 + 1)(-3 + 3) + C(-3 + 1)(-3 + 2)$

বা, $9 = C(-2)(-1)$

বা, $2C = 9$

$\therefore C = \frac{9}{2}$

A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-4}{x+2} + \frac{\frac{9}{2}}{x+3}$$

$\therefore \frac{x^2}{P(x)} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{4}{x+2} + \frac{9}{2(x+3)}$ এটিই নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(Ans.)

প্রশ্ন–৩৩ ▸ $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ একটি বহুপদী।

ক. $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ হয় তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ২

খ. উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে $P(a)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি $a \neq b$ এবং $P(a) = P(b)$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ ৪

▸◂ ৩৩ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$P(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a)$

$P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$x = -4$ হলে, $P(-4) = (-4)^3 + 5(-4)^2 + 6(-4) + 8$

$= -64 + 80 - 24 + 8$

$= -88 + 88$

$= 0$

$\therefore (x + 4)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$= x^3 + 4x^2 + x^2 + 4x + 2x + 8$

$= x^2(x + 4) + x(x + 4) + 2(x + 4)$

$= (x + 4)(x^2 + x + 2)$ **(Ans.)**

গ. এখানে, $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$\therefore P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

এবং $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

$\therefore P(a) = P(b)$

বা, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5a^2 - 5b^2 + 6a - 6b + 8 - 8 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$

বা, $(a - b)\{a^2 + ab + b^2 + 5(a + b) + 6\} = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6) = 0$

হয়, $(a - b) = 0$ অথবা, $(a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6) = 0$

কিন্তু, $a - b \neq 0$

$\therefore a \neq b$

$\therefore a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6 = 0$

বা, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৪ ▸ i) $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$

ii) $R = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

এবং iii) $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

ক. $(x - 2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয় তবে a এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $R = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$ ৪

গ. (iii) এর প্রত্যেকটি অনুপাতের মান k ধরে প্রমাণ কর যে, $(a + b + c)(x + y + z) = ax + by + cz$ ৪

▸◂ ৩৪ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$

$(x - 2)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2) = 5.2^3 + 6.2^2 - a.2 + 6$

বা, $P(2) = 40 + 24 + 6 - 2a$

বা, $P(2) = 70 - 2a$

শর্তমতে, $P(2) = 6$

বা, $70 - 2a = 6$

বা, $70 - 6 = 2a$

বা, $64 = 2a$

বা, $a = \frac{64}{2}$

$\therefore a = 32$

নির্ণেয় a এর মান 32

খ. দেওয়া আছে, $R = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$\therefore$ হয় $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং,

$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$ | $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$ | এবং $\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$	বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$	বা, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$
বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$	বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = 0$
$\therefore a = b$	$\therefore b = c$	$\therefore c = a$

$\therefore a = b = c$

সুতরাং, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{3}{abc}$ হলে, $ab + bc + ca = 0$ অথবা $a = b = c$

(প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

$\therefore \frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c} = k$ (ধরি)

$\therefore \frac{x^2 - yz}{a} = k$

অর্থাৎ $\frac{x^2 - yz}{k} = a$ ....(i)

আবার, $\frac{y^2 - zx}{b} = k$

$\therefore \frac{y^2 - zx}{k} = b$ ....(ii)

এবং $\frac{z^2 - xy}{c} = k$

$\therefore \frac{z^2 - xy}{k} = c$ ....(iii)

এখন, বামপক্ষ = $(a + b + c)(x + y + z)$

$= \left(\frac{x^2 - yz}{k} + \frac{y^2 - zx}{k} + \frac{z^2 - xy}{k}\right)(x + y + z)$ [(i), (ii) ও (iii) নং থেকে]

$= \left(\frac{x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy}{k}\right)(x + y + z)$

$= \frac{1}{k}(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{k}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$= \frac{1}{k}(x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz)$

$= \frac{1}{k}\{x(x^2 - yz) + y(y^2 - zx) + z(z^2 - xy)\}$

$= x\frac{(x^2 - yz)}{k} + y\frac{(y^2 - zx)}{k} + z\frac{(z^2 - xy)}{k}$

$= ax + by + cz$ [(i), (ii) ও (iii) নং হতে]

= ডানপক্ষ

$\therefore (a + b + c)(x + y + z) = ax + by + cz$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩৫ ▸ $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$ **একটি ভগ্নাংশ।**

ক. হরকে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. ভগ্নাংশটির লবকে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে, যেখানে $a \neq b$ তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$ ৪

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $f(x) = x^2 + 2x - 3$

ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে আমরা জানি, $f(x) = x^2 + 2x - 3$ কে $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(3)$

$\therefore f(3) = 3^2 + 2.3 - 3$

$= 9 + 6 - 3$

$= 12$

হরকে $(x - 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে 12 **(Ans.)**

খ. ধরি, ভগ্নাংশটির লব $P(x) = x^3 + 2x^2 + 1$

'ক' হতে পাই, $P(x)$ কে $(x - a)$ এবং $(x - b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে যথাক্রমে $P(a)$ এবং $P(b)$

$\therefore P(a) = a^3 + 2a^2 + 1$

এবং $P(b) = b^3 + 2b^2 + 1$

প্রশ্নমতে, $P(a) = P(b)$

বা, $a^3 + 2a^2 + 1 = b^3 + 2b^2 + 1$

বা, $a^3 - b^3 + 2a^2 - 2b^2 + 1 - 1 = 0$

বা, $a^3 - b^3 + 2(a^2 - b^2) = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + \{2(a + b)(a - b)\} = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b) = 0$

হয়, $a - b = 0$ অথবা, $a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$

কিন্তু $a - b \neq 0 \because a \neq b$

$\therefore a^2 + ab + b^2 + 2a + 2b = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x \;\; 3} = \frac{x(x^2 + 2x - 3) + 3x + 1}{(x^2 + 2x - 3)} = x + \frac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)}$

এখানে, $\frac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)} \equiv \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1}$ ....(i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে $(x + 3)(x - 1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x + 1 \equiv A(x - 1) + B(x + 3)$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$3{\cdot}1 + 1 = A(1 - 1) + B(1 + 3)$

বা, $3 + 1 = A \times 0 + B.4$

বা, $4 = 4B$

$\therefore B = 1$

আবার, সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3) + 1 = A(-3 - 1) + B(-3 + 3)$

বা, $-9 + 1 = A(-4) + B \times 0$

বা, $-8 = -4A$

$\therefore A = 2$

A ও B এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x + 1}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x - 1}$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ,

$\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3}$

প্রশ্ন–৩৬ ▸ $P(x) = x^2 - 9x - 6$, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

ক. $P(x)$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে বের কর। ২

খ. $Q(x)$ কে উৎপাদক উপপাদ্য ব্যবহার করে উৎপাদকে

বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = x^2 - 9x - 6$

$P(x)$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(-2)$.

এখন $P(-2) = (-2)^2 - 9(-2) - 6$

$= 4 + 18 - 6$

$= 16$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $Q(x) = x^3 + x^2 - 6x$

$= x(x^2 + x - 6)$

ধরি, $R(x) = x^2 + x - 6$

$R(x)$ এর মুখ্য সহগ 1 এবং ধ্রুবক পদ $- 6$

$- 6$ এর উৎপাদকসমূহের সেট $= \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$

$\therefore R(1) = 1^2 + 1 - 6 = -4 \neq 0$

$R(-1) = (-1)^2 - 1 - 6 = -6 \neq 0$

$R(2) = 2^2 + 2 - 6 = 0$

$\therefore (x - 2)$, $R(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^2 + x - 6$

$= x^2 - 2x + 3x - 6$

$= x(x - 2) + 3(x - 2)$

$= (x - 2)(x + 3)$

$\therefore Q(x) = xR(x)$

$= x(x - 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

গ. $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x^3 + x^2 - 6x}$

'খ' হতে পাই, $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$

ধরি, $\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$ ....(i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$ ...(ii)

এখন (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$

বা, $- 6A = - 6$

$\therefore A = 1$

আবার সমীকরণ (ii) উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$4 - 18 - 6 = 0 + B . 2(5) + 0$

বা, $- 20 = 10B$

$\therefore B = - 2$

সমীকরণ (ii) এর উভয়পক্ষে $x = - 3$ বসিয়ে পাই,

$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান সমীকরণ (i) –এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩৭ ▸ $\mathbf{F(x, y, z) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3}$

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $x - y = \frac{1}{p}$, $y - z = \frac{1}{q}$, $z - x = \frac{1}{r}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $pq + qr + rp = 0$ অথবা $p = q = r$ ৪

৩৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

এখন, $F(y, z, x) = (y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3$

$= (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

$= F(x, y, z)$

আবার, $F(z, x, y) = (z - x)^3 + (x - y)^3 + (y - z)^3$

$= (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

$= F(x, y, z)$

$\therefore F(x, y, z) = F(y, z , x) = F(z, x, y)$

অতএব, $F(x, y, z)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$F(x, y, z) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

$= (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

$= (x - y)^3 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^2 + z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3$

$= (x - y)^3 + 3z(x^2 - y^2) - 3z^2(x - y) - (x^3 - y^3)$

$= (x - y)^3 + 3z(x + y)(x - y) - 3z^2 (x - y) - (x - y) (x^2 + xy + y^2)$

$= (x - y)\{(x - y)^2 + 3z(x + y) - 3z^2 - (x^2 + xy + y^2)\}$

$= (x - y)(x^2 - 2xy + y^2 + 3zx + 3yz - 3z^2 - x^2 - xy - y^2)$

$= (x - y) \{3z(y - z) - 3x(y - z)\}$

$= 3(x - y)(y - z)(z - x)$ **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $x - y = \frac{1}{p}$

$y - z = \frac{1}{q}$

এবং $z - x = \frac{1}{r}$

'খ' হতে পাই,

$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$

বা, $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 - 3(x - y)(y - z)(z - x) = 0$

বা, $\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \left(\frac{1}{q}\right)^3 + \left(\frac{1}{r}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right\} = 0$

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0$

বা, $\frac{qr + rp + pq}{pqr} = 0$

বা, $qr + rp + pq = 0$

$\therefore pq + qr + rp = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 = 0$ **(প্রমাণিত)**

[যেহেতু কতকগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি 0 হলে তারা পৃথক পৃথকভাবে 0 হয়]

$\therefore \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = 0$, $\frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 0$ এবং $\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 0$

বা, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ বা, $\frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ বা, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q}$

$\therefore p = q$ $\therefore q = r$ $\therefore r = p$

সুতরাং $pq + qr + rp = 0$ অথবা $p = q = r$ **(প্রমাণিত)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–৩৮ ▸ চলক x একটি বহুপদী $P(a) = 2a^3 + 2a^2 + 3a + 1$ হলে,

ক. বহুপদী বলতে কী বোঝ? ২

খ. প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2a + 1)$ ৪

গ. বহুপদীটিকে $(2a + 1)$ দ্বারা ভাগশেষ কত হবে? ৪

উত্তর : গ. $-\frac{1}{4}$

প্রশ্ন–৩৯ ▸ $P(x) = 2x^2 + 3$ এবং $g(x) = y^2 - 5y + 4$

ক. $P(5)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $g(y)$ কে $(y - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $P(5)$ এর সমান হলে y-এর মান কত? ৪

গ. $\frac{5x - 7}{(x-1)(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে আংশিক ভগ্নাংশে বিভিন্ন রাশি 'খ' থেকে প্রাপ্ত 'y' এর মানের সমান হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : (ক) $P(5) = 53$; (খ) $y = 4$, $x = 2.05$

প্রশ্ন–৪০ ▸ চলক x এর চারটি রাশি হলো, $(x + 3)(x^2 - 9)(x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$ ।

ক. রাশিগুলো হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ ও একটি অপ্রকৃত মূলদ ও ভগ্নাংশ তৈরি কর। ২

খ. $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূ পে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রথম দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টির সরলমান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. $\frac{x - 3}{x^2 - 3x + 9}$ প্রকৃত, $\frac{(x - 3)(I^2 + 9)}{x^2 - 3x + 9}$ অপ্রকৃত;

খ. $x + \frac{9}{x - 3}$; গ. $\frac{x^3 - 2x^2 + 9x - 17}{x^4 - 81}$

প্রশ্ন–৪১ ▸ $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$Q(x) = x$ এবং $R(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$

ক. $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ২

খ. $\frac{Q(x)}{R(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

গ. $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$ হলে দেখাও যে, $4P(a, b, c) = P(x, y, z)$ ৪

উত্তর : ক. $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$;

খ. $\frac{1}{5(x - 1)} - \frac{x - 4}{5(x^2 + 4)}$

প্রশ্ন–৪২ ▸ $\frac{y^2 + y - 1}{y^3 + y^2 - 6y}$ একটি বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ।

ক. যুক্তিসহ ভগ্নাংশটির প্রকৃতি ব্যাখ্যা কর। ২

খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশেরষণ কর এবং হরকে $y + 3$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর। ৪

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

উত্তর : খ. 0

গ. $\frac{y^2 + y - 1}{y^3 + y^2 - 6y} = \frac{1}{6y} + \frac{1}{2(y - 2)} + \frac{1}{3(y + 3)}$

প্রশ্ন–৪৩ ▸ $\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$

ক. ভগ্নাংশটি প্রকৃত না অপ্রকৃত তা নির্ধারণ কর। ২

খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশেরষণ কর এবং ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফলরূ পে প্রকাশ কর। ৪

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

উত্তর : ক. সম্পৃক্ত; খ. $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$, $x + \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 3)}$;

গ. $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} = x + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3}$

প্রশ্ন–৪৪ ▸ $F(a, b, c) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $F(a, b, c) = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ ৪

গ. $a - b = \frac{1}{x}$, $b - c = \frac{1}{y}$ এবং $c - a = \frac{1}{z}$ হলে দেখাও যে, $xy + yz + zx = 0$ অথবা, $x = y = z$ ৪

প্রশ্ন–৪৫ ▸ $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

ক. $P(x)$ এর মাত্রা, ধ্রবব পদ, মুখ্য পদ ও মুখ্য সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. $x - 1$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ নির্ণয় কর। দেখাও যে, $x + 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

গ. দেখাও যে, $(x - r)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $(rx - 1)$; $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। ৪

উত্তর : ক. $5, a, ax^5, a$; খ. $2(a + b + c)$

প্রশ্ন–৪৬ ▸ $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

ক. প্রমাণ কর যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. দেখাও যে, $F(a, b, c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$ ৪

গ. $F\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = 0$ হলে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$ ৪

প্রশ্ন–৪৭ ▸ $F(a, b, c) = (a + b)(b + c)(c + a)$ এবং $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$ হলে–

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্র–ক্রমিক রাশি। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $F(a, b, c) = 0$ ৪

গ. দেখাও যে, $(a + b + c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$ ৪

প্রশ্ন–৪৮ ▸ $P(x) = 5x^2 - 2xy - 3y^2$ হয় তবে–

ক. রাশিটির পদ ও প্রত্যেক পদের মাত্রা নির্ণয় কর। ২

খ. $P(2, 1)$ নির্ণয় কর। ৪

গ. রাশিটিকে উৎপাদকে বিশেরষণ কর। ৪

উত্তর : ক. 3, 2; খ. $P(2, 1) = 13$; গ. $(x - y)(5x + 3y)$

প্রশ্ন–৪৯ ▸ x, y ও z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

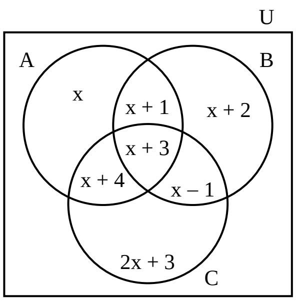
ক. F(a, b, c) নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এটি একটি চক্র–ক্রমিক ও প্রতিসম রাশি। ২

খ. দেখাও যে, $F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$ ৪

গ. যদি $a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$ ৪

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–৫০ ▸



ক. $P(x) = 2x^2 + 3x$ হলে, $P(-2)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $x = 2$ হলে দেখাও যে, $P(B) \neq P(A' \cap B)$। ৪

গ. $f(x) = n(C \cap A' \cap B')$ হলে দেখাও যে, $f(x)$ এক–এক ফাংশন ও $f^{-1}(3) = 0$. ৪

৫০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $P(x) = 2x^2 + 3x$

$$\therefore P(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2)$$
$$= 2 \cdot 4 - 6$$
$$= 8 - 6$$
$$= 2 \textbf{ Ans.}$$

খ. ভেনচিত্র থেকে, $B = (x - 1, x + 1, x + 2, x + 3)$

$x = 2$ হলে, $B = \{1, 3, 4, 5\}$

$\therefore P(B) = \{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \phi\}$

ভেনচিত্র থেকে, $A' \cap B = (x + 2, x - 1)$

$x = 2$ হলে, $A' \cap B = \{4, 1\}$

$\therefore P(A' \cap B) = \{\{4\}, \{1\}, \{4, 1\}, \phi\}$

$\therefore P(B) \neq P(A' \cap B)$ (দেখানো হলো)

গ. ভেনচিত্র হতে পাই, $n(C \cap A' \cap B') = 2x + 3$

ধরি, $f(x) = 2x + 3 = y$

বা, $2x = y - 3$

বা, $x = \frac{y-3}{2} = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$\therefore f^{-1}(3) = 0$ (দেখানো হলো)

আবার, ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f

$f(x)$ ফাংশন এক এক হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

তাহলে, $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore f(x)$ এক এক ফাংশন। (দেখানো হলো)