তৃতীয় অধ্যায়

জ্যামিতি

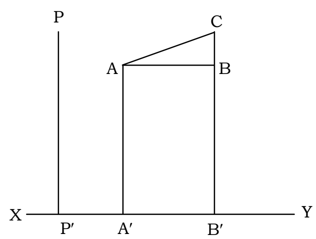
অনুশীলনী ৩.১

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **পিথাগোরাসের উপপাদ্য :** একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
- **বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ :** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বোঝায়।

  মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP′ এবং লম্ব PP′ এর পাদবিন্দু P′ (চিত্রে)।

  সুতরাং, P′ বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।



- **রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ :** ধরি, AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA′ ও BB′। AA′ লম্বের পাদবিন্দু A′ এবং BB′ লম্বের পাদবিন্দু B′। এই A′B′ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

  সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই A′B′ রেখাংশকে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলা হয়।
- **ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য :** এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক কয়েকটি গুরবত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হয়েছে।
- **লক্ষণীয় :**

১. $(\text{অতিভুজ})^২ = (\text{লম্ব})^২ + (\text{ভূমি})^২$; এটি পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

২. ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গ অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের বর্গের সমষ্টির সমান হলে একটি কোণ অবশ্যই সমকোণ হবে।

৩. কোনো রেখার ওপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

৪. কোনো রেখার ওপর ঐ রেখার লম্ব রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। যার দৈর্ঘ্য শূন্য।

৫. কোনো নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের সমান হবে।

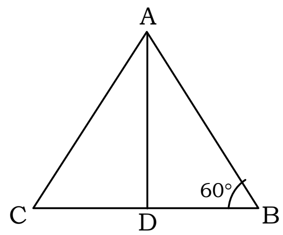
৬. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের প্রয়োজনীয় লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য।

৭. সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B = 60°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔABD-এ $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos 60° = \dfrac{1}{2}\right]$

বা, $AB = 2BD$

এখন, ΔADC-এ $\angle ADC$ সমকোণ।

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

বা, $AC^2 = AD^2 + (BC - BD)^2$

বা, $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BD.BC$

বা, $AC^2 = AD^2 + BD^2 + BC^2 - AB.BC$ $[\because 2BD = AB]$

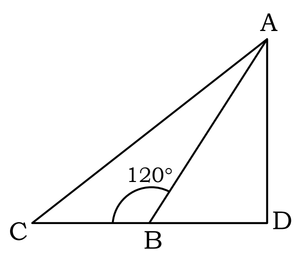
আবার, ΔABD-এ $\angle ADB$ সমকোণ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

অতএব, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 120°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

অঙ্কন : CB এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এর, $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ একটি স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD.$ ....(i)

CD সরলরেখার উপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ

$\therefore \angle ABC + ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

বা, $\angle ABD = 180° - 120°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB।

$\therefore \cos \angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \dfrac{1}{2}AB$

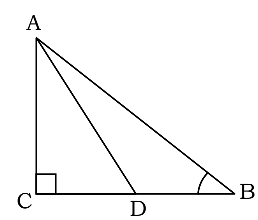
(i) নং-এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.\dfrac{1}{2}AB$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle C = 90°$ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ : ΔABC-এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ AB

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ $[\because BC = BD + CD]$

$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD.BD$

[∵ D, BC এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় BD = CD]

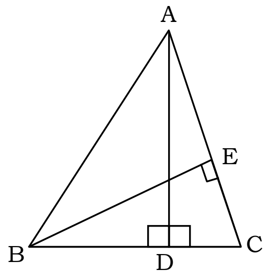
$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [∵ ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ ΔABC-এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, BC.CD = AC.CE

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC-এ AD, BC বাহুর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, BC.CD = AC.CE

প্রমাণ : ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী, $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$= (BC - CD)^2 + AD^2$

$= BC^2 + CD^2 - 2BC.CD + AD^2$

$= BC^2 + (CD^2 + AD^2) - 2BC.CD$

$= BC^2 + AC^2 - 2BC.CD$ .... (i)

[$\because$ ACD সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $AC^2 = CD^2 + AD^2$]

আবার, ΔABE সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = (CA - CE)^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = CA^2 + CE^2 - 2CA.CE + BE^2$

বা, $AB^2 = AC^2 + (CE^2 + BE^2) - 2AC.CE$ [$\because$ AC = CA]

বা, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$ .... (ii)

[$\because$ BCE সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $BC^2 = CE^2 + BE^2$]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$BC^2 + AC^2 - 2BC.CD = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$

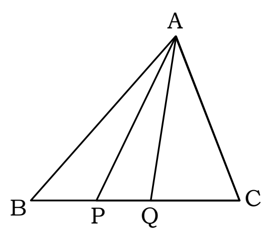
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$

বা, BC.CD = AC.CE [-2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ BC.CD = AC.CE. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। অর্থাৎ BP = PQ = QC; A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔABQ এর মধ্যমা AP [$\because$ BP = PQ]

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ....(i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ [$\because$ PQ = QC]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AP^2 + AC^2 = 2AQ^2 + 2PQ^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

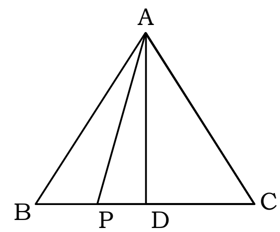
$AB^2 + AC^2 + AQ^2 + AP^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ - AQ^2 + 4PQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ ΔABC এর AB = AC। ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর AB = AC এবং ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন : A হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে AB = AC এবং AD, শীর্ষ A থেকে ভূমি BC এর ওপর লম্ব বলে D, BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, BD = DC

এখন পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

সমকোণী ΔABD-এ, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ ....(i)

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

এবং সমকোণী ΔAPD-এ, $AP^2 = PD^2 + AD^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = BD^2 + AD^2 - PD^2 - AD^2$

$= BD^2 - PD^2$

$= (BD - PD)(BD + PD)$

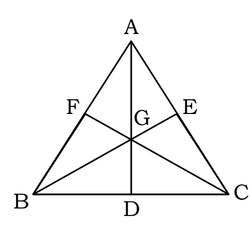
$= BP.(DC + PD)$ [$\because$ BD = DC]

$= BP.PC$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং সমপাত বিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

ΔABC এর BC বাহুর ওপর অঙ্কিত মধ্যমা AD।

$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC$

এবং $GA = 2GD$

বা, $GA = 2(AD - GA) = 2AD - 2GA$

বা, $2AD = GA + 2GA$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $2AD = 3GA$

$\therefore AD = \frac{3}{2} GA$

সুতরাং $AB^2 + CA^2 = 2BD^2 + 2AD^2$

$$= 2\left(\frac{1}{2} BC\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2} GA\right)^2$$

$$\left[\because BD = \frac{1}{2} BC, AD = \frac{3}{2} GA\right]$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4} BC^2 + 2\cdot\frac{9}{4} GA^2$$

$$= \frac{1}{2} BC^2 + \frac{9}{2} GA^2 \text{ .... (i)}$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$AB^2 + BC^2 = \frac{1}{2} CA^2 + \frac{9}{2} GB^2$ ....(ii)

$AC^2 + BC^2 = \frac{1}{2} AB^2 + \frac{9}{2} GC^2$ ....(iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) + \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

বা, $\frac{3}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

বা, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = \frac{2}{3} \times \frac{9}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

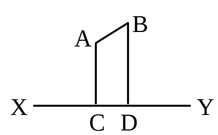
$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **(প্রমাণিত)**

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. 70°-এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

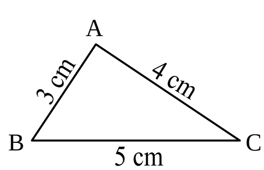
ⓚ 110° ● 55° ⓖ 20° ⓘ 10°

২. চিত্রে লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?



● CD ⓚ AC ⓖ BD ⓘ AB

৩.



চিত্রে $\angle BAC$ এর মান কত?

ⓚ 45° ⓚ 60° ● 90° ⓘ 120°

৪. ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার ছেদবিন্দুকে–বলে।

ⓚ অন্তঃকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র ⓖ পরিকেন্দ্র ⓘ লম্বকেন্দ্র

৫. ΔABC এর $\angle C = 90°$, AC = BC = 3 সে.মি. হলে AB = কত?

ⓚ 3 সে.মি. ● $3\sqrt{2}$ সে.মি. ⓖ 6 সে.মি. ⓘ 18 সে.মি.

৬. ΔDEF এর ক্ষেত্রে–

i. $\angle D = 90°$ হলে, $EF^2 = DE^2 + DF^2$

ii. $\angle D > 90°$ হলে, $EF^2 < DE^2 + DF^2$

iii. $\angle D < 90°$ হলে, $EF^2 < DE^2 + DF^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ⓚ i ও ii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

৭. ΔABC এর ক্ষেত্রে–

i. $\angle C$ স্থূলকোণ হলে $AB^2 > AC^2 + BC^2$

ii. $\angle C$ সমকোণ হলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$

iii. $\angle C$ সমকোণ হলে $AC^2 < AB^2 + BC^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ ii ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপক থেকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ΔABC এর মধ্যমাত্রয় AD = 3 সে.মি. BE = 4 সে.মি., CF = 5 সে.মি. এবং মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

৮. AP এর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

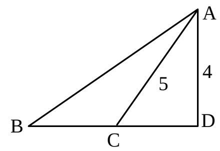
ⓚ $\frac{2}{3}$ ⓚ 1 ⓖ $\frac{3}{2}$ ● 2

৯. $AB^2 + BC^2 + AC^2$ এর মান কত?

ⓚ 37.50 বর্গ সে.মি. ● 66.67 বর্গ সে.মি.

ⓖ 75 বর্গ সে.মি. ⓘ 150 বর্গ সে.মি.

নিচের উদ্দীপক থেকে ১০ ও ১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে, $\angle ACB$ স্থূলকোণ এবং B বাহুর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

১০. ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

● $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$

ⓚ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

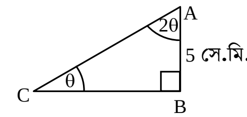
ⓖ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ⓘ $AB^2 > AC^2 + BC^2$

১১. CD এর মান কত?

● 3 ⓚ 4 ⓖ 5 ⓘ 6

নিচের উদ্দীপক থেকে ১২ ও ১৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১২. AC বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

ⓚ 20 সে.মি. ⓚ 15 সে.মি. ● 10 সে.মি. ⓘ 5 সে.মি.

১৩. ABC এর মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত হবে?

ⓚ 50 সে.মি. ⓚ 100 সে.মি. ⓖ 125 সে.মি. ● 150 সে.মি.

নিচের উদ্দীপক থেকে ১৪ ও ১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

7, 8 ও r সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। তাদের কেন্দ্রসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তার পরিসীমা 42 সে.মি.।

১৪. r = কত সে.মি.

ⓚ 1 ⓚ 4 ● 6 ⓘ 9

১৫. উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ⓚ 36 ⓚ 48 ● 84 ⓘ 96

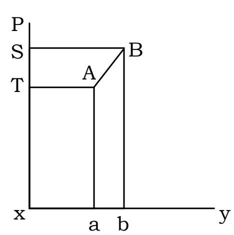
৩·১ : পিথাগোরাস সম্পর্কিত আলোচনা

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৬. কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে বোঝায় সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের– (সহজ)

● পাদবিন্দু ⓚ লম্ববিন্দু ⓖ শীর্ষবিন্দু ⓘ উর্ধ্বরেখা

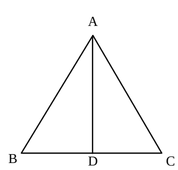
১৭.



চিত্রের xy এর ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

ⓚ PQ ● ab ⓖ ST ⓘ by

১৮.



চিত্রানুযায়ী AB^2 এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $AB^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ● $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

ⓖ $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ⓘ $AC^2 + CD^2 - 2BC.CD$

১৯. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজের কোণগুলো সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের– (সহজ)

● সমবিন্দু ⓚ সমান্তরাল

ⓖ ভূমির সমান্তরাল ⓘ সমান

২০. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র কোনটি? (সহজ)

ⓚ ভরকেন্দ্র ● লম্ববিন্দু ⓖ পরিকেন্দ্র ⓘ বহিঃকেন্দ্র

২১. পাদত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকগুলো যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাকে কী বলা হয়? (সহজ)

ⓚ পরিকেন্দ্র ⓚ বহিঃকেন্দ্র ● অন্তঃকেন্দ্র ⓘ ভরকেন্দ্র

২২. পিথাগোরাস ছিলেন একজন – (সহজ)

ⓚ জ্যোতির্বিদ ● গণিতবিদ ⓖ রসায়নবিদ ⓘ ডাক্তার

২৩. পিথাগোরাসের জন্ম কোথায়? (সহজ)

ⓚ ফ্রান্সে ⓚ ইরাকে ⓖ ব্রিটেনে ● গ্রিসে

২৪. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য কে বর্ণনা করেন? (সহজ)

ⓚ টলেমি ⓚ ব্রহ্মগুপ্ত ⓖ দেকার্তে ● পিথাগোরাস

২৫. সমকোণী ত্রিভুজের গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যটি সম্পর্কে সর্বপ্রথম কাদের ধারণা ছিল? (সহজ)

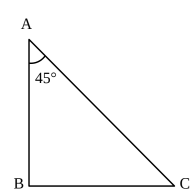
● মিশরীয়দের ⓚ গ্রিকদের

ⓖ ফরাসিদের ⓘ ইতালীয়দের

২৬. একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব 5 মি. ও ভূমি 12 মি. হলে অতিভুজ কত হবে? (মধ্যম)

ⓚ 4 মিটার ⓚ 6 মিটার ⓖ 8 মিটার ● 13 মিটার

২৭.



ΔABC-এ AB = BC হলে, $\angle B$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ 60° ● 90° ⓖ 100° ⓘ 120°

ব্যাখ্যা : ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু অর্থাৎ AB = BC হওয়ায়

$\angle BAC = \angle ACB = 45°$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$

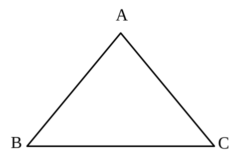
বা, $\angle ABC + 45° + 45° = 180°$

বা, $\angle ABC + 90° = 180°$

বা, $\angle ABC = 180° - 90°$

$\therefore \angle ABC = 90°$

২৮.



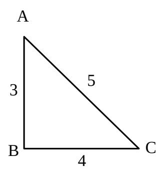
ΔABC-এ $\angle C = 60°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC.BC$
(খ) $AB^2 = AC^2 + BC^2 + AB.BC$
(গ) $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AB.BC$
(ঘ) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

২৯. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক? (মধ্যম)

● 10 (খ) 30 (গ) 64 (ঘ) 100

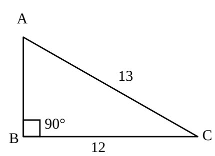
৩০.



উপরের চিত্রে $\angle ABC$ = কত ডিগ্রি? (সহজ)

(ক) 45° (খ) 60° ● 90° (ঘ) 120°

৩১.



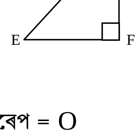
উপরের চিত্রে AB বাহুর দৈর্ঘ্য কত একক? (মধ্যম)

● 5 একক (খ) 25 একক (গ) 64 একক (ঘ) 100 একক

ব্যাখ্যা : $AB^2 = 13^2 - 12^2$
$= 169 - 144$
$= 25$
$\therefore AB = 5$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩২.



ΔDEF এর –

i. DF এর লম্ব অভিক্ষেপ = O

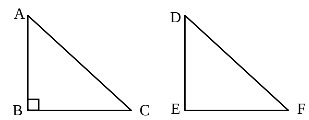
ii. $\angle EDF = 45°$ হলে DF > EF

iii. EF এর লম্ব অভিক্ষেপ = O

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩৩.



ΔABC ও ΔDEF এ AB = DE, BC = EF হলে–

i. <B = এক সমকোণ

ii. ΔABC এ $AC2 = AB^2 + BC^2$

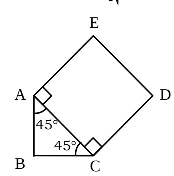
iii. BC = DF

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ৩৪ – ৩৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC এ AB = 8 সে. মি. এবং $\angle BAC = \angle ACB = 45°$।

৩৪. BC = কত সে. মি.? (মধ্যম)

(ক) 4 ● 8 (গ) $8\sqrt{2}$ (ঘ) 16

৩৫. AC = কত সে. মি.? (মধ্যম)

(ক) 8 ● $8\sqrt{2}$ (গ) 64 (ঘ) 128

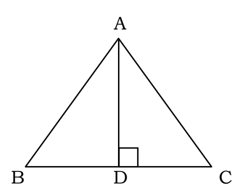
৩৬. ACDE চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.? (সহজ)

(ক) 64 (খ) 96 (গ) 112 ● 128

৩·(খ) : লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection)

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

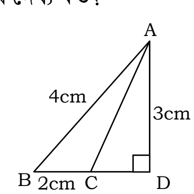
৩৭.



ΔABC এর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) BC (খ) BD ● CD (ঘ) AD

৩৮. চিত্রে AC মধ্যমার দৈর্ঘ্য কত?



(ক) 0.29cm (খ) 0.92 (গ) 1.92cm ● 2.92

ব্যাখ্যা : এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AB^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2)$

বা, $4^2 + 3^2 = 2(4C^2 + 2^2)$

বা, $16 + 9 = 2(AC^2 + 4)$

বা, $2(AC^2 + 4) = 25$

বা, $AC^2 + 4 = \frac{25}{2}$

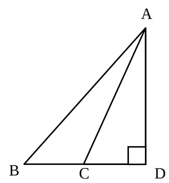
বা, $AC^2 + 4 = 12.5$

বা, $AC^2 = 12{\cdot}5 - 4$

বা, $AC^2 = 8{\cdot}5$

$\therefore$ $AC = 2{\cdot}92$

৩৯. চিত্র অনুযায়ী AB^2–এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)



● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (খ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$
(গ) $AC^2 + BC^2 + 2BC.AC$ (ঘ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.AC$

৪০. ΔABC এর AD, BC এর মধ্যমা হলে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
● $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$
(খ) $AB^2 + AD^2 = 2(AC^2 + BD^2)$
(গ) $AB^2 + AD^2 = 2AC^2 + 2BD^2$
(ঘ) $AB^2 + BC^2 = 2AD^2$

৪১. ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ হলে কোনটি সঠিক? (কঠিন)
(ক) $AB^2 > BC^2 + CA^2$ (খ) $AB^2 < BC^2 + CA^2$
● $AB^2 = BC^2 + CA^2$ (ঘ) $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪২. ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
(ক) $AB^2 > BC^2 + CA^2$ ● $AB^2 < BC^2 + CA^2$
(গ) $AB^2 = BC^2 + CA^2$ (ঘ) $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪৩. ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
● $AB^2 > BC^2 + AC^2$ (খ) $AB^2 = BC^2 + AC^2$
(গ) $AB^2 < BC^2 + AC^2$ (ঘ) $AB^2 + BC^2 + CA^2$

৪৪. সমদ্বিবাহু ΔABC-এ $\angle C = 120°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
(ক) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (খ) $AC^2 = 3BC^2$
● $AB^2 = 3BC^2$ (ঘ) $BC^2 = 3AC^2$

৪৫. ΔABC-এ $\angle C = 120°$ এবং $\angle B = 30°$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
● $AB^2 = 3BC^2$ (খ) $AB^2 = AC^2 + BC^2$
(গ) $AB^2 = 2BC^2$ (ঘ) $AB^2 = \sqrt{3}\,BC^2$

৪৬. ΔABC-এ BC এর মধ্যবিন্দু D, AB = AC এবং AC কে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন, AC = CE হয়। CD = 1 সে.মি. এবং AD = 4 সে.মি. হলে, BE-এর মান কত? (কঠিন)
(ক) 3 সে.মি. (খ) 4 সে.মি. (গ) 5 সে.মি. ● 6 সে.মি.

৪৭. ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
● $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$
(খ) $AB^2 + AP^2 = AC^2 + AQ^2 + 4PQ^2$
(গ) $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + PQ^2$
(ঘ) $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 3PQ^2$

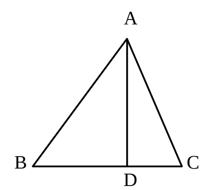
৪৮. কোন ধরনের ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব তার পাদ ত্রিভুজের কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে? (সহজ)
● সূক্ষ্মকোণী (খ) সমকোণী (গ) স্থূলকোণী (ঘ) সরলকোণী

৪৯. কোনো রেখার ওপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর– (সহজ)
(ক) সমান্তরাল (খ) অভিক্ষেপ
(গ) লম্ব ● লম্ব অভিক্ষেপ

৫০. লম্ব রেখার লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য– (সহজ)
● 0 (খ) অসীম (গ) 1 একক (ঘ) 10 একক

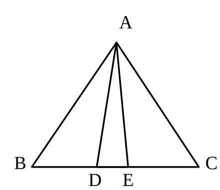
৫১. কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের– (সহজ)
● সমান (খ) সমানুপাতিক
(গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক

৫২.



ΔABC-এ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD বাহু BC বাহুর উপর লম্ব হলে– (কঠিন)
(ক) $AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$
● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$
(গ) $AB^2 - AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$
(ঘ) $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৫৩.



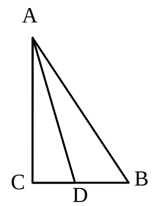
ΔABC-এ AD, BC বাহুর উপর মধ্যমা। $AE \perp BC$ হলে–(কঠিন)
(ক) $AB^2 - AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
(গ) $AB^2 + AC^2 = (AD^2 + BD^2)$
(ঘ) $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 = BD^2$

৫৪. ΔABC-এ $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু E হলে– (কঠিন)
● $AB^2 = AE^2 + 3BE^2$ (খ) $AB^2 = 3AE^2 + BE^2$

(গ) $AB^2 = 3AE^2 - BE^2$ (ঘ) $AB^2 = AE^2 - 3BE^2$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫৫.



i. $AC^2 = AD^2 - CD^2$
ii. $AC^2 = AD^2 - BD^2$
iii. $AC^2 = AB^2 - BC^2$

চিত্রানুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(খ) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫৬. ADC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle D = 90°$ হলে–

i. $AD^2 + CD^2 = AC^2$
ii. $AD^2 = AC^2 - CD^2$
iii. ΔADC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times DC \times AD$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৭. ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 > BC^2 + CA^2$ হলে–

i. $\angle C$ স্থূলকোণ
ii. $\angle A$ সমকোণ
iii. $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

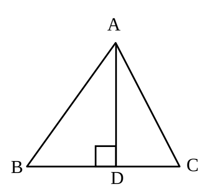
৫৮. ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 = BC^2 + CA^2$ হলে–

i. $\angle A$ স্থূলকোণ
ii. $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ
iii. $\angle C$ সমকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫৯.



ΔABC এর ক্ষেত্রে –

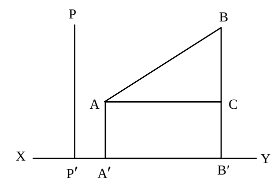
i. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BD.BC$
ii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.DC$
iii. $\angle C = 60°$ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC.BC$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ৬০ – ৬২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৬০. XY রেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) AA′ ● A′B′ (গ) B′C (ঘ) AC

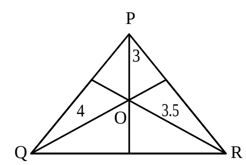
৬১. BB′ রেখার উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

● 0 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) 2

৬২. BB′ রেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) A′B′ (খ) B′C (গ) AA′ ● BC

নিচের চিত্রের আলোকে ৬৩ ও ৬৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



PQR ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 4, 3 ও 3.5 একক এবং তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

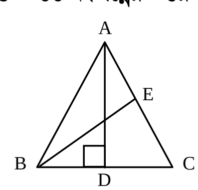
৬৩. OP এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

(ক) 3 একক (খ) $\frac{3}{2}$ একক
● 2 একক (ঘ) $\frac{3}{4}$ একক

৬৪. ত্রিভুজের বাহুগুলোর বর্গের সমষ্টি নিচের কোনটি? (কঠিন)

(ক) 39.69 (খ) 40.57 ● 111.75 (ঘ) 141.29

নিচের চিত্রের আলোকে ৬৫ ও ৬৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ABC ত্রিভুজে AD, BC বাহুর উপর লম্ব। BE, AC বাহুর উপর মধ্যমা।

৬৫. AD = CD হলে AD^2 এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $AB^2 + AC^2$ ● $2AE^2$
(গ) $BD^2 + DC^2$ (ঘ) $CD^2 + AC^2$

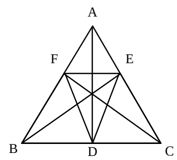
৬৬. AD = CD হলে AB^2 এর মান হবে– (মধ্যম)

● $BD^2 + CD^2$ (খ) $BD^2 + BE^2$
(গ) $BD^2 + AE^2$ (ঘ) $BD^2 + AC^2$

কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬৭.

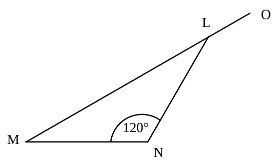


ΔABC এর AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, AC ও AB এর ওপর লম্ব।

ΔABC এর পাদত্রিভুজ কোনটি? (সহজ)

(ক) ΔBDF (খ) ΔCED
(গ) ΔAEF ● ΔDEF

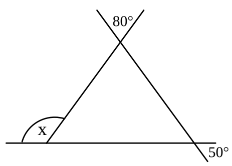
৬৮.



LMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হলে $\angle$ NLO এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 150° (খ) 130° (গ) 120° (ঘ) 30°

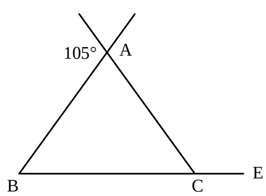
৬৯.



চিত্রে $\angle x$ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 130° (খ) 120° (গ) 105° (ঘ) 100°

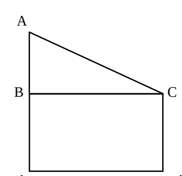
৭০.



ΔABC-এ AB = BC হলে $\angle ACE$ এর মান নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) 150° (খ) 120° ● 105° (ঘ) 100°

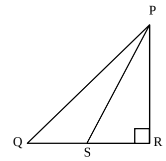
৭১.



AC এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) A′ ● A′B′ (গ) B′ (ঘ) B′C

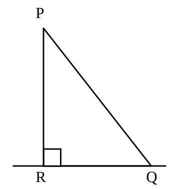
৭২.



চিত্রে QR রেখার উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) QS (খ) QR (গ) PR ● SR

৭৩.



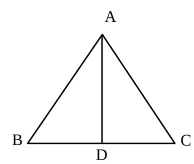
চিত্রে P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) Q ● R (গ) PQ (ঘ) PR

৭৪. **পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার হতে যে উপপাদ্যটি বর্ণিত হয়েছে সেটা কার উপপাদ্য?** (সহজ)

(ক) টলেমির (খ) ব্রহ্মগুপ্তের
● এ্যাপোলোনিয়াসের (ঘ) ফিশারের

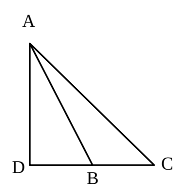
৭৫.



ΔABC-এ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD, BC বাহুর লম্ব হলে– (কঠিন)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$
$AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৭৬.



ΔABC-এ $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং AD, BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব হলে– (কঠিন)

$AB^2 = AC^2 - BC^2 - 2BC.CD$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$
$AB^2 = AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$ $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

৭৭. **ΔABC এর মধ্যমায় G বিন্দুতে মিলিত হলে $AB^2 + BC^2 + CA^2$ = কত ?** (মধ্যম)

(ক) $GA^2 + GB^2 + GC^2$ (খ) $2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
● $3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (ঘ) $\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

৭৮. **ABC ত্রিভুজের মধ্যমা AD = 5 সে.মি. এবং BC = 6 সে.মি. হলে, $AB^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে.মি.?** (মধ্যম)

(ক) 34 বর্গ সে. মি. ● 68 বর্গ সে. মি.

ⓖ 78 বর্গ সে. মি. ⓖh 122 বর্গ সে. মি.

৭৯. সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে 6, 7 ও 8 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক? (মধ্যম)

ক 9 একক ● 10·1 একক

গ 14·2 একক ঘ 14·95 একক

৮০. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যদি p, q, r এবং অতিভুজ d হয়, তাহলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক? (সহজ)

ক $p^2 + q^2 + r^2 = d^2$ খ $p^2 + q^2 + r^2 = 2d^2$

● $2(p^2 + q^2 + r^2) = 3d^2$ ঘ $3(p^2 + q^2 + r^2) = 5d^2$

৮১. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি 25.75 হলে, ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত? (কঠিন)

● 34·34 বর্গ সে.মি. খ 34·94 বর্গ সে.মি.

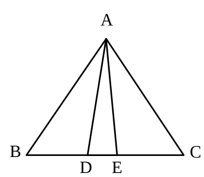
গ 34·43 বর্গ সে.মি. ঘ 43·43 বর্গ সে.মি.

ব্যাখ্যা : $(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4}{3} \times 25{\cdot}75$

$= 34{\cdot}34$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮২.



i. $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$

ii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

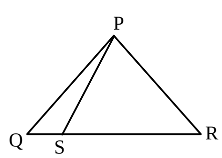
iii. $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + AD^2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii গ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৮৩.

ΔABC–এ



ΔPQR ও ΔPQS-এ

i. $PQ^2 < PS^2 + QS^2$

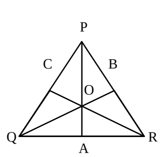
ii. $PR^2 < PQ^2 + QR^2$

iii. $PQ^2 < PR^2 + QR^2$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii ● ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৮৪.



PQR ত্রিভুজে PA, QB ও CR তিনটি মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে–

i. $OA = \frac{3}{2} OP$

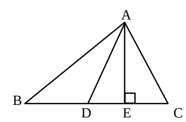
ii. $OQ = \frac{2}{3} QB$

iii. $CO = \frac{1}{3} OR$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৮৫.



ΔABC এ AD মধ্যম হলে–

i. $AB^2 + AC^2 = BE^2 + CE^2$

ii. $AB^2 = AE^2 + (BD + DE)^2$

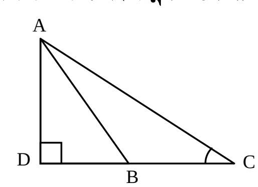
iii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii ● ii ও iii ঘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৬ ও ৮৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



উপরের চিত্রে B, CD এর মধ্যবিন্দু এবং AC = 6.5 সে.মি. এবং BC = 2.5 সে.মি.।

৮৬. AC এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি? (সহজ)

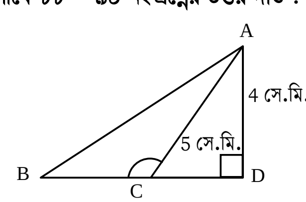
ক BC খ BD গ AD ● CD

৮৭. $AD^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে. মি.? (মধ্যম)

ক 17 .25 বর্গ সে. মি. খ 45.25 বর্গ সে. মি.

● 59.5 বর্গ সে. মি. ঘ 84.5 বর্গ সে. মি.

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৮ – ৯০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে AC = 5 সে. মি. এবং BD = 10 সে. মি.।

৮৮. AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

ক BC ● CD গ AD ঘ AB

৮৯. ∠ACB স্থূলকোণ হলে AB^2 = কত? (মধ্যম)

● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ খ $AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$

(গ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ (ঘ) $AC^2 + BC^2 - 2(BC + CD)$

৯০. AB = কত সে. মি.? (কঠিন)

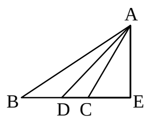
৯১. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 8 সে.মি হলে, ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে.মি?

● 4 (খ) 8 (গ) 12 (ঘ) 16

৯২. পিথাগোরাস কোন দেশের পন্ডিত ছিলেন?

(ক) রাশিয়া (খ) ভারত (গ) জাপান ● গ্রিক

৯৩.



ΔABC এ AD, BC বাহুর মধ্যমা এবং AE,BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব হবে–

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
(খ) $AB^2 - AC^2 = 2(AD^2 - BD^2)$
(গ) $AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2$
(ঘ) $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 + BD^2$

৯৪. বৃত্তের পরিধির কোনো বিন্দুতে কয়টি স্পর্শক আঁকা সম্ভব?

(ক) অসংখ্য ● 1 (গ) 2 (ঘ) 3

৯৫. সমবাহু ত্রিভুজে যেকোনো বাহুর বহিঃস্থ কোণ কত হবে?

(ক) 130° (খ) 100° (গ) 160° ● 120°

৯৬. ΔABC -এ AB = BC হলে কোনটি সঠিক?

(ক) $\angle ABC = \angle ACB$ (খ) $\angle ABC = \angle BCA$
● $\angle ACB = \angle BAC$ (ঘ) $\angle ACB = \angle ABC$

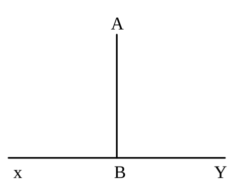
৯৭. ΔABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = স্থূলকোণ, তাহলে কোন সম্পর্কটি সঠিক?

● $BC^2 > AC^2 + AB^2$ (খ) $BC^2 < AC^2 + AB^2$
(গ) $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (ঘ) $AC^2 > AB^2 + BC^2$

৯৮. কোনো নির্দিষ্ট রেখার ওপর লম্ব অভিৰেপের দৈর্ঘ্য কিরূ প হয়?

● একক (খ) দ্বিগুণ (গ) শূন্য (ঘ) অসীম

৯৯.



XY রেখায় AB এর লম্ব অভিৰেপ–

(ক) AB (খ) BX (গ) BY ● শূন্য

১০০. ΔABC-এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (খ) $AB^2 < AC^2 + BC^2$
● $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (ঘ) $AB^2 > 2(AC^2 + BC^2)$

১০১. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে 8 একক ও 6 একক হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?

● 10 (খ) 36 (গ) 64 (ঘ) 100

(ক) $\sqrt{74}$ ● $\sqrt{116}$
(গ) 74 (ঘ) 110

১০২. কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর কোনো বিন্দু হতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে ঐ বিন্দুর কী বলে?

(ক) লম্ব (খ) অভিৰেপ ● লম্ব অভিৰেপ (ঘ) মধ্যমা

১০৩. ΔABC-এর ADমধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে নিচের কোনটি এ্যাপোলিনিয়াসের উপপাদ্য?

(ক) $AB^2 + AC^2 = AD^2$
● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
(গ) $2(AB^2 + AC^2) = AD^2 + BD^2$
(ঘ) $AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2$

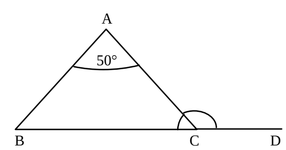
১০৪. ΔABC- এর $\angle C = 60°$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

| $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.AC$ | $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.AC$
| $AB^2 = AC^2 + BC^2 + BC.AC$ ● $AB^2 = AC^2 + BC^2 - BC.AC$

১০৫. ΔABC এর BC বাহুর উপর AD মধ্যমা। BC = 8 সে.মি., AD = 5 সে.মি. হলে, $AB^2 + AC^2$ এর মান কত?

● 82 বর্গ সে.মি. (খ) 41 সে.মি.
(গ) 89 বর্গ সে.মি. (ঘ) 178 বর্গ সে.মি.

১০৬.



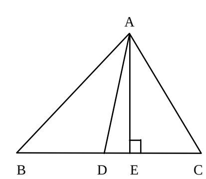
উপরের চিত্রে AB = AC হলে–

i. $\sin\angle ACD = \cos 35°$ ii. $\sin\angle ABC = \cos 25°$
iii. $\cos \angle BAC = \sin 40°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
● i, ii ও iii (ঘ) ii ও iii

১০৭.



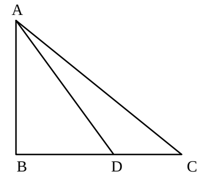
ΔABC এ AD মধ্যমা হলে–

i. $AB^2 = AE^2 + (BD + DE)^2$ ii. A^2 + AC
iii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১০৮ ও ১০৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $AB \perp BC$, D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং BD = 2 সে. মি., AD = 3 সে. মি.।

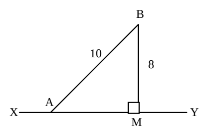
১০৮. BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

(ক) AB ● BC (গ) BD (ঘ) CD

১০৯. $AB^2 + AC^2$= কত বর্গ সে. মি.?

● 26 (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 25

নিচের চিত্রের আলোকে ১১০ – ১১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১০. XY সরলরেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

(ক) XY (খ) BM ● AM (ঘ) AX

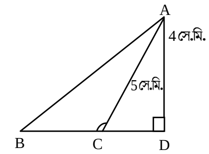
১১১. AM এর দৈর্ঘ্য কত?

● 6 (খ) 8 (গ) 10 (ঘ) 12

১১২. ΔABM এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(ক) 12 ● 24 (গ) 32 (ঘ) 48

নিচের তথ্যের আলোকে ১১৩ – ১১৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে AC = 5 সে. মি. এবং BD = 10 সে. মি.

১১৩. AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

(ক) BC ● CD (গ) AD (ঘ) AB

১১৪. $\angle ACB$ স্থূলকোণ হলে, AB^2 = কত?

● $AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (খ) $AC^2 - BC^2 + 2BC.CD$
(গ) $AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ (ঘ) $AC^2 + BC^2 - 2(BC + CD)$

১১৫. AB = কত সে.মি?

(ক) $\sqrt{74}$ ● $\sqrt{116}$ (গ) 74 (ঘ) 110

ΔABC-এ $\angle C$ স্থূলকোণ এবং AD, BC রেখার উপর লম্ব।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের ১১৬ ও ১১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১১৬. উপরের তথ্যের ভিত্তিতে–

i. $AB^2 > AC^2 + BC^2$
ii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$
iii. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.CD$

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৭. BC এর উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

● CD (খ) AD (গ) AC (ঘ) BD

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।

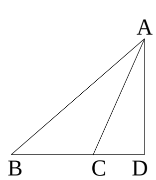
ক. AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$। ৪

গ. ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ

BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করে $BD \perp AD$ আঁকি।

সুতরাং, BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. **প্রমাণ** : BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$ $[\because BD = BC + CD]$

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$

$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

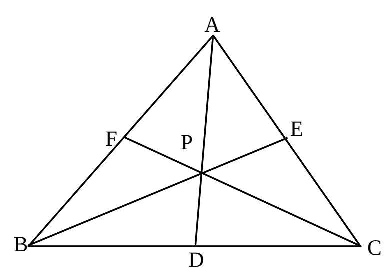
আবার, ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) হতে $AD^2 + CD^2$ এর মান (i) এ

$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (প্রমাণিত)

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA2^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ ....(iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{PD}{AP} = \frac{1}{2}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{PD + AP}{AP} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AP} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AP$

$\therefore 4AD^2 = 9AP^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে, $4BE^2 = 9BP^2$ এবং $4CF^2 = 9\ CP^2$

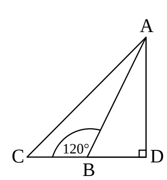
সুতরাং সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9\ AP^2 + 9BP^2 + 9CP^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(PA^2 + PB^2 + PC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২ ▸



উপরের চিত্রে $\angle ABC = 120°$ এবং $AD \perp BC$.

ক. BD ও AB এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

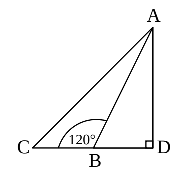
খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর : ৪

$AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$

গ. BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্রে $\angle ABC = 120°$



CD সরলরেখার ওপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ

$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 180°$

বা, $120° + \angle ABD = 180°$

$\therefore \angle ABD = 60°$

এখন সমকোণী ΔABD এর ভূমি = BD এবং অতিভুজ = AB

$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভূজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \frac{BD}{AB}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \frac{AB}{2}$

খ. দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle ABC = 120°$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$

প্রমাণ : আমরা জানি, স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

এখন, ΔABC এ $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ স্থূলকোণ

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ....(i)

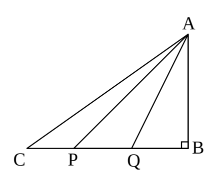
'ক' হতে পাই, $BD = \frac{1}{2}AB$

সমীকরণ (i) এ BD এর মান বসিয়ে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot \frac{1}{2} AB$

বা, $AC^2 - AB^2 = BC^2 + AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ, CP = PQ = QB। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔACQ–এর মধ্যমা AP [$\because$ CP = PQ]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ ....(i)

আবার, ΔAPB এর মধ্যমা AQ [$\because PQ = QB$]

$\therefore AP^2 + AB^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AC^2 + AQ^2 + AP^2 + AB^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩ ▸ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত।

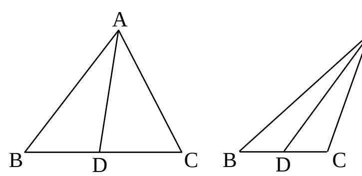
ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি লেখ এবং চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. উদ্দীপকে উলেরখিত তথ্যের ভিত্তিতে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$। ৪

গ. উদ্দীপকের উলেরখিত তথ্যের ভিত্তিতে অঙ্কিত ত্রিভুজটি যদি সমদ্বিবাহু হয় তবে দেখাও যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

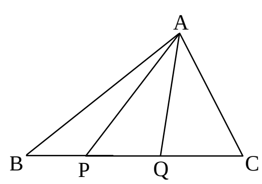
ক. **এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য :** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রদ্বয়ের ৰেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রদ্বয়ের ৰেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রের ৰেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।



ΔABC–এর যেকোনো দুই বাহু AB ও AC অপর বাহু BC এর মধ্যবিন্দু D এবং মধ্যমা AD হলে,

$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$.

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

প্রমাণ : ΔABQ–এর মধ্যমা AP [$\because BP = PQ$]

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ [$\because PQ = QC$]

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ ....(ii)

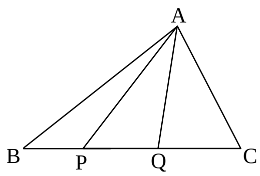
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ $AB = AC$। ভূমি BC–এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন : $AD \perp BC$ টানি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ....(i)

প্রশ্ন–৪ ▸ এ্যাপোলোনিয়াস নামক একজন গণিতবিদ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ওপর ভিত্তি করে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য বর্ণনা করেন।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

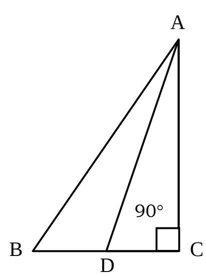
খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং $BD = CD$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. 'খ' নং প্রশ্নের চিত্রের BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো, যেন $CE = CD$ হয়। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. সৃজনশীল প্রশ্ন ৩(ক) সমাধান দেখ।

খ.



যেহেতু, ΔABC এর $\angle C = 90°$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$

$= AC^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.CD$

$= AC^2 + CD^2 + BD^2 + 2BD.BD$ [$\because BD = CD$]

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [$\because AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ ....(i)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

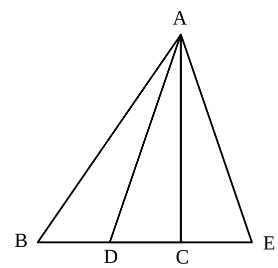
বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD).BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $BD = CD$]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**



ΔABC-এর $BD = CD$ দেওয়া আছে। প্রশ্নানুসারে, $CE = CD$

সুতরাং $BD = CD = CE$

এখন, A, E যোগ করি।

ΔABC-এ $BD = CD$

অর্থাৎ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী–

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + CD^2)$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $CD = CE$

অর্থাৎ AC মধ্যমা

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে–

$AD^2 + AE^2 = 2(AC^2 + CD^2)$

বা, $AD^2 + AE^2 = 2AC^2 + 2CD^2$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

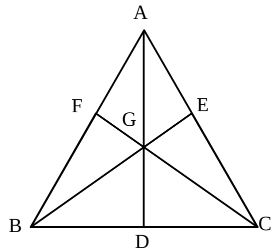
$AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = 2AD^2 + 2CD^2 + 2AC^2 + 2CD^2 - AC^2 - AD^2$

বা, $AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$

$\therefore AB^2 + AE^2 = AD^2 + AC^2 + 4CD^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ ▸



ABC সমবাহু ত্রিভুজের $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$

?

ক. সমবাহু ত্রিভুজ কাকে বলে? সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সমবাহু ত্রিভুজ :** যে ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।

সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°।

খ. যেহেতু $AD \perp BC$

সুতরাং ΔABD ও ΔACD সমকোণী

এখন, সমকোণী ΔABD ও ΔAFD-এ

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [উভয় সমবাহু ত্রিভুজের বাহু]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$

অতএব AD, ΔABC এর একটি মধ্যমা।

অনুরূ পভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

$\therefore$ AD, BE ও CF ΔABC এর মধ্যমা। **(প্রমাণিত)**

গ. **প্রমাণ :** AD, BE ও CF, ΔABC এর মধ্যমা

যেহেতু ΔABC এর AD মধ্যমা।

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ ....(i)

অনুরূ পভাবে, BE মধ্যমা

$\therefore BC^2 + AB^2 = 2CE^2 + 2BE^2$ ....(ii)

এবং CF মধ্যমা

$\therefore AC^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2CF^2$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2BD^2 + 2AD^2 + 2CE^2 + 2BE^2 + 2BF^2 + 2CF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পৰকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে 2BD = BC, 2CE = CA, 2BF = AB]

বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ .... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{GD + AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AG$

$\therefore 4AD = 9AG^2$ [উভয়পৰে বর্গ করে]

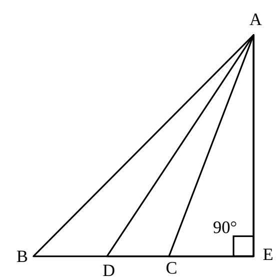
অনুরূ পভাবে $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$

এখন সমীকরণ (iv) থেকে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AG^2 + 9BG^2 + 9CG^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3GA^2 + GB^2 + GC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৬ ▸ জুবায়ের তার স্যারের কাছ থেকে লম্ব অভিৰেপ সম্বন্ধে জানতে চাইলে তার স্যার এভাবে বললেন যে, কোনো একটি রেখার উপর অন্য একটি রেখা অবস্থান করলে প্রথমোক্ত রেখাটির যে ছায়া দ্বিতীয় রেখার উপর পড়ে, লম্বভাবে সে ছায়া দ্বারা প্রথমোক্ত রেখার অবস্থানকৃত অংশই প্রথম রেখার উপর দ্বিতীয় রেখার লম্ব অভিৰেপ।



?

ক. লম্ব অভিৰেপ কী? চিত্রে BC এর উপর AB এর লম্ব অভিৰেপের নাম কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CE.$ ৪

গ. D, BC এর মধ্যবিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **লম্ব অভিৰেপ :** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিৰেপ বলতে সে বিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু বোঝায়।

চিত্রানুযায়ী, BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BE.

খ. **প্রমাণ :** ΔACE এর $\angle E = 90°$

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AC^2 = AE^2 + CE^2$ ....(i)

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$= AE^2 + (BC + CE)^2$

$= AE^2 + BC^2 + CE^2 + 2BC.CE$

$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CE$ [(i) নং থেকে মান বসিয়ে]

(প্রমাণিত)

গ. **প্রমাণ :** D, BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং $BD = CD$

ΔABEএর $\angle E = 90°$ সুতরাং $\angle ABE < 90°$

$\therefore$ $\angle ADB$ হলো স্থূলকোণ।

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$ ....(i)

আবার, ΔADE-এ $\angle E = 90°$

সুতরাং $\angle ADE$ হলো সূক্ষ্মকোণ

এখন সূক্ষ্মকোণী ΔACD-এ

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$ ....(ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE + AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE$

$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE$ [$\because$ BD = CD]

$= 2AD^2 + 2BD^2$

$= 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore$ $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৭ ▸ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং উহাদের উপর অঙ্কিত মধ্যমাগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.

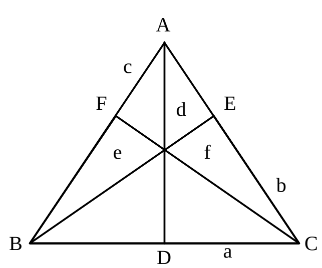
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী চিহ্নিত চিত্র আঁক এবং সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। ৪

▸◂ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔABC এর $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$

এবং BC, CA এবং AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা তিনটি হলো $AD = d$, $BE = e$ এবং $CF = f$.

খ. **প্রমাণ :** ক নং প্রশ্নের চিত্র হতে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}$

বা, $b^2 + c^2 = 2\left(d^2 + \frac{1}{4}a^2\right)$

বা, $b^2 + c^2 = 2d + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2d^2$

বা, $2d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

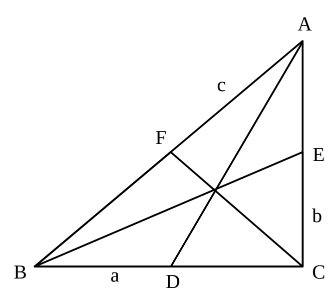
$\therefore$ $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{1}{4}\{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2\}$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2$

বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

$\therefore$ $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ (প্রমাণিত)

গ. ধরি, ত্রিভুজটির $\angle C$ সমকোণ। এমতাবস্থায় চিত্রটি হয়–



$\angle C = 90°$ হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $a^2 + b^2 = c^2$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2$ [উভয়পক্ষে c^2 যোগ করে]

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$

কিন্তু (খ) নং থেকে পাই,

$4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

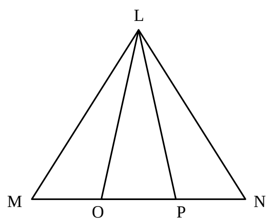
বা, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3.2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর জন্য, 2 (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি) $= 3c^2$, যেখানে $\angle C = 90°$

অর্থাৎ সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৮ ▸



ΔLMN এর LM = LN এবং MO = OP = PN.

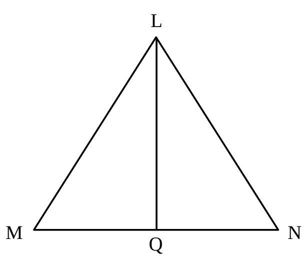
ক. ΔLMN এর MN বাহুর উপর মধ্যমা LQ হলে, দেখাও যে, $MN^2 = 4(LM^2 - LQ^2)$ ২

খ. প্রদত্ত চিত্রের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$ ৪

গ. উদ্দীপকে প্রদত্ত তথ্য হতে প্রমাণ কর যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ ৪

▸◂ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. যেহেতু ΔLMN একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ সুতরাং LQ মধ্যমা MN এর উপর লম্ব হবে।



ΔLQM এ–

$\therefore LQ^2 + QM^2 = LM^2$

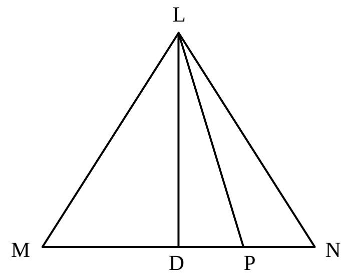
বা, $LQ^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2 = LM^2$ $\left[\because MQ = \frac{MN}{2}\right]$

বা, $\frac{MN^2}{4} = LM^2 - LQ^2$

বা, $MN^2 = 4LM^2 - 4LQ^2$

$= 4(LM^2 - LQ^2)$ **(দেখানো হলো)**

খ.



দেওয়া আছে, LMN সমবাহু ত্রিভুজের MN বাহুর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $LN^2 - LP^2 = MP.NP$

অঙ্কন : L থেকে ভূমি MN এর উপর LD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : LPD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LP^2 = LD^2 + DP^2$.......(i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

আবার, LMD সমকোণী ত্রিভুজে,

$LM^2 = LD^2 + MD^2$ ....(ii)

(ii) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$LM^2 - LP^2 = LD^2 + MD^2 - LD^2 - DP^2$

$= MD^2 - DP^2$

$= (MD + DP)(MD - DP)$

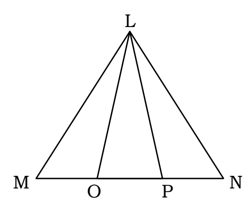
$= MP(DN - DP)$

[$\because$ MD + DP = MP এবং DN = MD]

$= MP.NP$

$\therefore LM^2 - LP^2 = MP.NP$ **(প্রমাণিত)**

গ. **বিশেষ নির্বচন :** দেওয়া আছে, LMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের LM = LN এবং ভূমি MN, P ও O বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$



প্রমাণ : ΔLMP-এ MO = OP

তাহলে, LO, ΔLMP এর মধ্যমা যা MP-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LM^2 + LP^2 = 2LO^2 + 2OP^2$ ....(i)

আবার, LP, ΔLON এর মধ্যমা যা ON-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore LN^2 + LO^2 = 2LP^2 + 2OP^2$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$LM^2 + LN^2 + LP^2 + LO^2 = 2LO^2 + 2LP^2 + 4OP^2$

বা, $LM^2 + LN^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$

$\therefore 2LM^2 = LO^2 + LP^2 + 4OP^2$ [$\because$ LM = LN]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৯ ▸ ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle$ BCA স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC, BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

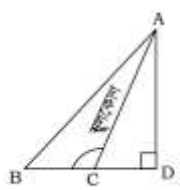
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ উপরের তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ ৪

গ. ΔABC-এ CE $\perp$ AB এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও BC > AC হলে প্রমাণ কর যে, $BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$. ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle$BCA স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB। স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC রেখার উপর AC রেখার লম্ব অভিক্ষেপ CD.

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD-এর $\angle$D = এক সমেকাণ [$\because$ AD $\perp$ BD]

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

$= AD^2 + (BC + CD)^2$

$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$

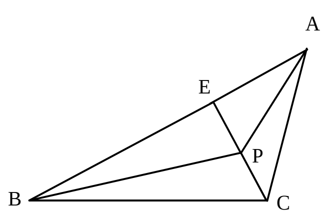
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD$

আবার, ΔACD এর $\angle$D = এক সমকোণ হওয়ায়

$AD^2 + CD^2 = AC^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC-এ CE $\perp$ AB এবং P, CE এর উপর যেকোনো বিন্দু ও BC > AC। প্রমাণ করতে হবে যে, $BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$

প্রমাণ : CE $\perp$ AB বলে $\angle$BEP = $\angle$AEP = এক সমকোণ।

এখন, ΔBPE-এ $\angle$BEP = এক সমকোণ

$\therefore BP^2 = BE^2 + PE^2$

তদ্রূপ $AP^2 = AE^2 + PE^2$

$\therefore BP^2 - AP^2 = BE^2 + PE^2 - AE^2 - PE^2$

$= BE^2 - AE^2$ ....(i)

আবার, ΔBEC-এ $\angle$BEC = এক সমকোণ।

$\therefore BC^2 = BE^2 + CE^2$

তদ্রূপ $AC^2 = AE^2 + CE^2$

$\therefore BC^2 - AC^2 = BE^2 + CE^2 - AE^2 - CE^2$

$= BE^2 - AE^2$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাওয়া যায়,

$BP^2 - AP^2 = BC^2 - AC^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০ ▸ ABC ত্রিভুজের $\angle$C সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC এর বর্ধিতাংশের উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

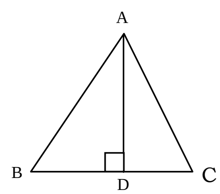
ক. সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ৪

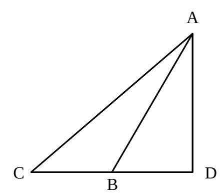
গ. ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$. ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র : ১



চিত্র : ২

ABC ত্রিভুজের $\angle$C সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC বা BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। অতএব BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle$ADB = এক সমকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$

কিন্তু, BD = BC – DC [চিত্র ১]

অথবা, BD = DC – BC [চিত্র ২]

$\therefore BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.CD$

$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$

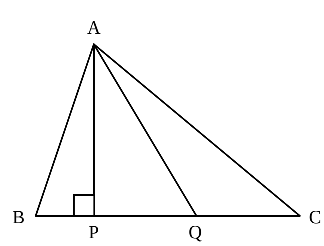
$= AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

আবার, ΔADC এর $\angle$D এক সমকোণ হওয়ায়

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC এর BC বাহু P ও Q সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়েছে। A, P এবং A, Q যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ–এ AP, BQ এর উপর মধ্যমা। $[\because BP = PQ]$

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ....(i)

আবার, ΔAPC–এ AQ, PC এর উপর মধ্যমা $[\because PQ = QC]$

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AP^2$ ....(ii)

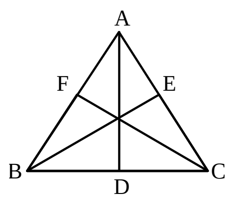
সমীকরণ (i) এবং (ii) নং যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ^2 - AQ^2 + 4PQ$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ ▸



চিত্রে ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমা।

ক. এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

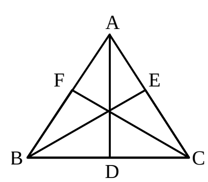
গ. প্রমাণ কর যে, $3(BC^2 + CA^2 + AB^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

▸◂ ১১ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমা এবং $AD \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,
$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ....(i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ....(ii)

$BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2BD^2 + 2CE^2 + 2BF^2$

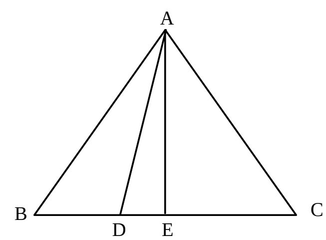
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4BD^2 + 4CE^2 + 4BF^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$ $[\because BD = DC, CE = AE, BF = AF]$

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸



উপরিউক্ত চিত্রে AD মধ্যমা এবং $AE \perp BC$

ক. উক্ত চিত্রের আলোকে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

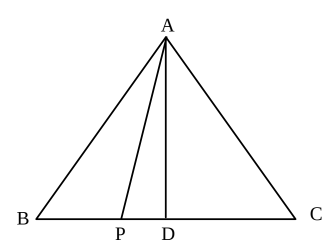
গ. ΔABC-এ $AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং P,BC এর উপর যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

▸◂ ১২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে ΔABC এ AD মধ্যমা এবং $AE \perp BC$। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

খ. অনুশীলনী–৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ। বোর্ড বই পৃষ্ঠা–৬৭।

গ.



দেওয়া আছে, ΔABC–এ$AB = AC$, $AD \perp BC$ এবং ভূমি BC-এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.\ PC$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ = এক সমকোণ এবং AB অতিভুজ [$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (i)

আবার, ΔAPD এর $\angle ADP$ = এক সমকোণ এবং AP অতিভুজ

[$\because$ $AD \perp BC$]

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)BP$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD)\ BP$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ BD = CD]

বা, $AB^2 - AP^2 = PC.BP$

$\therefore$ $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ ΔABC-এর $\angle C$= এক সমকোণ এবং AD মধ্যমা।

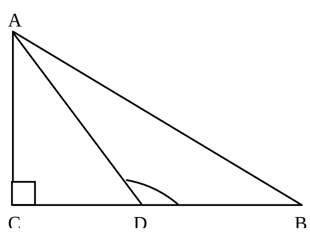
ক. উপরিউক্ত তথ্যের ভিত্তিতে চিহ্নিত চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

গ. ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মাধ্যমা হলে প্রমাণ কর যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ ৪

▸◂ ১৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



খ. ΔABC এর $\angle C = 90°$

অর্থাৎ, সমকোণী ΔABC এর অতিভুজ = AB

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because$ BC = BD + CD]

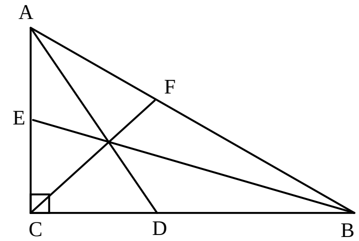
$= AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

$= (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [$\because$ ΔACD এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore$ $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC -এ $\angle C = 90°$

$\therefore$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

এখন, ΔABC এ AD মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$= 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2BC}\right)^2$ [$\because$ $BD = \frac{1}{2}BC$]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD = (AB^2 + AC^2) - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2}$ .... (i)

অনুরূ পভাবে পাই,

$2BE^2 = \frac{(AB^2 + BC^2) - AC^2}{2}$ ....(ii)

$2CF^2 = \frac{(AC^2 + BC^2) - AB^2}{2}$ ....(ii)

(i) + (ii) + (iii) নং হতে পাই,

$2(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

$= \frac{4(AB^2 + BC^2 + AC^2) - (AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + BC^2 + AC^2)}{2}$

$= \frac{3(AB^2 + AB^{2)}}{2}$ [$\because$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$]

$= \frac{3.2AB^2}{2}$

$\therefore$ $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

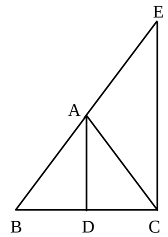
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

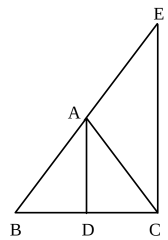
▸◂ ১৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



প্রদত্ত তথ্যানুযায়ী চিত্রটি অঙ্কন করা হলো।

খ. মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখন্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC

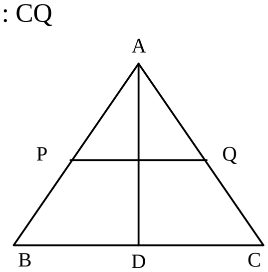


অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. যেহেতু DA ‖ CE এবং BC ও AC	[অঙ্কন]
তাদের ছেদক $\therefore \angle AEC = \angle BAD$	[অনুরূপ কোণ]
এবং $\angle ACE = \angle CAD$	[একান্তর কোণ]
২. কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$	[স্বীকার]
$\angle AEC = \angle ACE$	
$\therefore AC = AE$	
৩. আবার, যেহেতু AD ‖ CE	[উপপাদ্য–১]
$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$	
৪. কিন্তু AE = AC	[ধাপ–২]
$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$	
অর্থাৎ BD : DC = BA : AC **(প্রমাণিত)**	

গ. মনে করি, ΔABC-এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ



প্রমাণ : ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD

$\therefore$ BD : DC = AB : AC .... (i)

আবার, PQ ‖ BC

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$ [উপপাদ্য –১]

বা, $\frac{AP}{BP} + 1 = \frac{AQ}{CQ} + 1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CQ}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, AB : AC = BP : CQ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

BD : DC = BP : CQ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ ΔABC এর $\angle B = 90°$ এবং BC, AC ও AB এ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

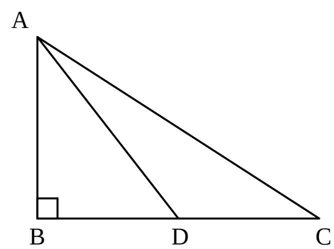
ক. প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ ২

খ. উদ্দীপকের ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে সমান তিনভাগে বিভক্ত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ ৪

গ. উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে, $3(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এর $\angle B = 90°$. BC বাহুর মধ্যবিন্দু D প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$.



প্রমাণ : ΔABD এ, $\angle B = 90°$

$\therefore AD^2 = AB^2 + BD^2$........................ (i)

আবার, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, $\angle B = 90°$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= AB^2 + (2BD)^2$ [D, BC এর মধ্যবিন্দু $\therefore BC = 2BD$)

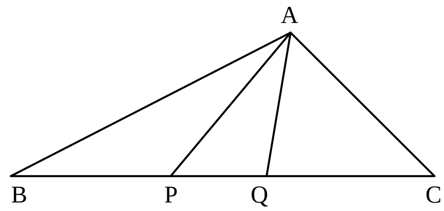
$= AB^2 + 4BD^2$

$= AB^2 + BD^2 + 3BD^2$

$= AD^2 + 3BD^2$ [(i) নং হতে]

$\therefore AC^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

খ.



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে অর্থাৎ $BP = PQ = QC$। A, P এবং A, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ : ΔABQ এর মধ্যমা AP $[\because BP = PQ]$

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2)$ .... (i)

আবার, ΔAPC এর মধ্যমা AQ $[\because PQ = QC]$

$\therefore AP^2 + AC^2 = 2(AQ^2 + PQ^2)$ .... (ii)

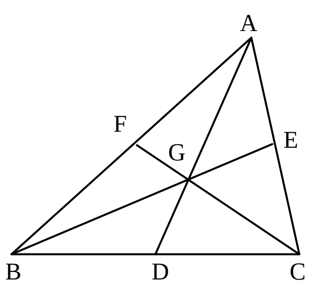
এখন, (i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AQ^2 + AP^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2 - AP^2 - AQ^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ΔABC এর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

প্রমাণ : ΔABC এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

$\therefore$ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$................. (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ .... (ii)

এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ....(iii)

এখন, সমীকরণ (i) , (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2$
$+ 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2$
$+ CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$
$+ 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পৰকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2$
$+ (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$

[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু বলে, $2BD = BC$, $2CE = CA$, $2BF = AB$]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৬ ▸ **ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC এর মধ্যমা।**

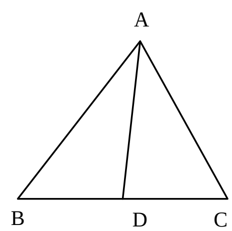
ক. উপরের তথ্যের আলোকে ত্রিভুজ অঙ্কন করে চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ৪

গ. $\angle C = 90°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ ৪

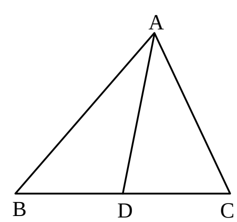
১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC **এর** BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং AD, BC বাহুর মধ্যমা।



খ. অনুশীলনী ৩.১ এর উপপাদ্য ৩·৫ দেখ।

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; AD. BC এর মধ্যমা এবং $\angle C = 90°$

প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ : পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .... (i)

আবার, ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে, $AD^2 = AC^2 + CD^2$

বা, $AD^2 = AC^2 + BD^2$ $[\because D.\ BC$ এর মধ্যবিন্দু$]$

বা, $AC^2 + BD^2 = AD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 - BD^2$

সমীকরণ (i) নং হতে, $AB^2 = AD^2 - BD^2 + BC^2$

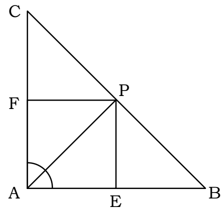
$= AD^2 - BD^2 + (2BD)^2$

$= AD^2 - BD^2 + 4BD^2$

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–১৭ ▸ চিত্রে ΔABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ।



ক. $BC = 28$ সে. মি. হলে, AB এবং AC এর দৈর্ঘ্য কত? ২

খ. $AC = AB = 4.2$ সে. মি. হলে, অতিভুজের দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$. ৪

উত্তর : ক. $AB = AC = 14\sqrt{2}$ সে. মি.
খ. 8.82 বর্গ সে. মি.

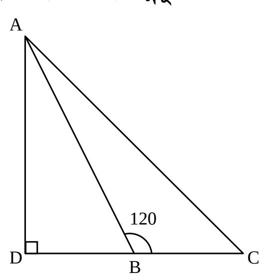
প্রশ্ন–১৮ ▸ ΔABC এ $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব।

ক. প্রদত্ত তথ্যের আলোকে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রদত্ত তথ্যের আলোকে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD.$ ৪

গ. $\angle C$ স্থূলকোণ হলে দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$ ৪

প্রশ্ন–১৯ ▸ নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :



চিত্রে ABC একটি স্থূলকোণ এবং ADC একটি সমকোণ।

ক. $\angle BAD$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\angle ABC$ এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2.AB.BC$ ৪

গ. ΔABC এর $\angle D = 90°$ এবং DC এর মধ্যবিন্দু B হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + 3BC^2$. ৪

উত্তর : ক. 30°।

প্রশ্ন–২০ ▸ ΔPRS এর PO, RS এর উপর একটি মধ্যমা এবং RO = OS.

ক. চিত্র অঙ্কন করে RS এবং এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PR^2 + PS^2 = 2 (PO^2 + RO^2)$ ৪

গ. ΔPRS এর বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যকে a, b, c এবং মধ্যমাত্রয়কে যথাক্রমে d, e, f ধরে দেখাও যে, $4(d^2 + e^2 + f^2) = 3 (a^2 + b^2 + c^2)$ ৪

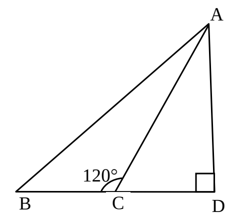
প্রশ্ন–২১ ▸ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC এবং AC কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন AC = CD হয়।

ক. তথ্যানুযায়ী চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রদত্ত তথ্য থেকে প্রমাণ কর যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$ ৪

গ. যদি উদ্দীপকে প্রদত্ত ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল রেখা AB ও AC কে D ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে, $BE^2 - CE^2 = BC.DE$ ৪

প্রশ্ন–২২ ▸



চিত্রে AD, BC এর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব।

ক. $\angle CAD$ এর পরিমাণ নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$ ৪

গ. $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ ৪

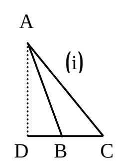
প্রশ্ন–২৩ ▸ ΔABC-এ AB = AC

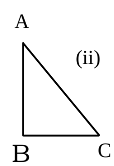
ক. চিত্রটি অঙ্কন কর এবং AC-কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন AC = CD হয় এবং B, D যোগ কর। ২

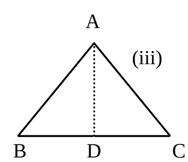
খ. প্রমাণ কর যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$. ৪

গ. $AD \perp BC$ এবং P, BC এর উপর যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AP^2 = BP.PC$ ৪

প্রশ্ন–২৪ ▸







ΔABC এর (i) $\angle B$ স্থূলকোণ, (ii) $\angle B$ সমকোণ, (iii) $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ। প্রমাণ কর যে,

ক. $AC^2 = AB^2 + BC^2$ [যখন $\angle B = 90°$] ২

খ. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ [যখন $\angle B > 90°$] ৪

গ. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ [যখন $\angle B < 90°$] ৪

প্রশ্ন–২৫ ▸ পিথাগোরাস একজন গ্রিক দার্শনিক, বিজ্ঞানী ও ধর্মীয় পন্ডিত ছিলেন। তিনি ত্রিভুজসংক্রান্ত একটি উপপাদ্য প্রতিপাদন করেন যা পিথাগোরাসের সূত্র নামে খ্যাত।

ক. উপপাদ্যটির সাধারণ নির্বচন লেখ এবং চিত্রসহ তথ্যটি সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর। ২

খ. উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ৪

গ. উপপাদ্যটির বিপরীত প্রতিজ্ঞা লেখ এবং প্রমাণ কর। ৪

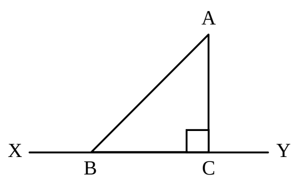
অনুশীলনী ৩.২

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

১. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূ প বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।
২. ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূ প বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।
৩. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ৰেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূ প বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রের ৰেত্রফলের অনুপাতের সমান।
৪. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।
৫. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
৬. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলা হয়। এই বিন্দু ত্রিভুজে পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।
৭. ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র বা লম্ববিন্দু বলা হয়। লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় সংযোজন করে উৎপন্ন ত্রিভুজকে মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ বলা হয়।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

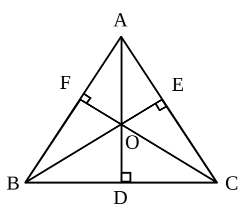
১.



XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিৰেপ নিচের কোনটি?

ক AB ● BC গ AC ঘ XY

২.



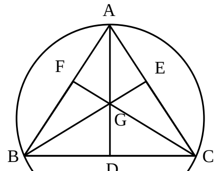
উপরের চিত্রে কোনটি লম্ববিন্দু?

ক D খ E গ F ● O

৩. i. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে
ii. ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে $3 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে
iii. সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূ প বাহুগুলো সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii ● i ও iii ঘ i, ii ও iii



D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে ৪–৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪. **G বিন্দুর নাম কী?**

ক লম্ববিন্দু খ অন্তঃকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র ঘ পরিকেন্দ্র

৫. **ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?**

● পরিবৃত্ত খ অন্তর্বৃত্ত গ বহির্বৃত্ত ঘ নববিন্দু বৃত্ত

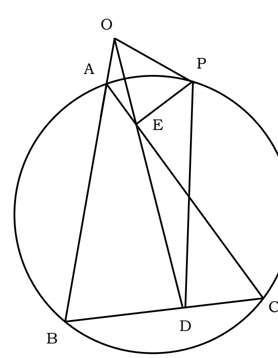
৬. **ΔABC এর ৰেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?**

ক $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

গ $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$ ঘ $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর ওপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর ওপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$.

সমাধান :



P, ΔABC-এর পরিবৃত্তস্থ যেকোনো একটি বিন্দু। $PD \perp BC$ ও $PE \perp CA$ এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PO \perp AB$।

প্রমাণ : আমরা জানি, পরিবৃত্তস্থ কোনো বিন্দু হতে কোনো ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।

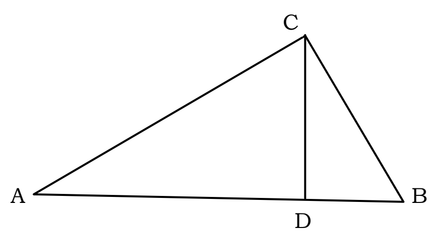
এখানে, $PD \perp BC$ ও $PE \perp CA$ হওয়ায় এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করায় D, E O সমরেখ।

সুতরাং O বিন্দু অবশ্যই P হতে AB এর উপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।

$\therefore PO \perp AB$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$

সমাধান :



মনে করি, ΔABC এ $\angle C = 1$ সমকোণ এবং C বিন্দু থেকে অতিভুজ AB এর উপর CD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.\ BD$

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle C = 90°$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$ ....(i)

আবার, ΔADC-এ $\angle ADC = 90°$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন, ΔADC ও ΔBDC -এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

এবং $\angle CAD = \angle BCD$

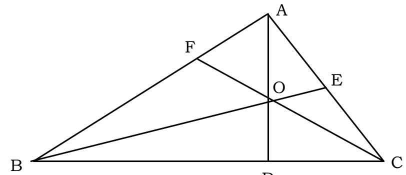
সুতরাং ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী; অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$

$\therefore CD^2 = BD.\ AD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC এর শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর AD, BE, CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF

প্রমাণ : ΔAOE ও ΔAOD এর মধ্যে

$\angle AOE$ = বিপ্রতীপ $\angle BOD$

এবং $\angle AEO = \angle BDO$

[প্রত্যেকে সমকোণ, কারণ $BE \perp AC$ এবং $AD \perp BC$]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, সুতরাং তারা সদৃশ।

$\therefore \frac{AO}{BO} = \frac{OE}{OD}$ [দুটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূ প বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

$\therefore$ AO. OD = BO. OE ....(i) [বজ্রগুণন করে]

আবার, ΔBOF ও ΔCOE এর মধ্যে

$\angle BOF$ = বিপ্রতীপ $\angle COE$

এবং $\angle BFO = \angle CEO = 90°$ [$BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

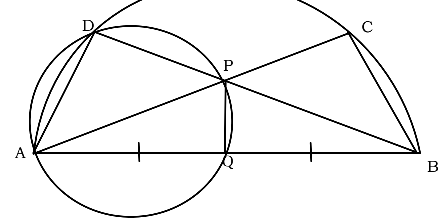
$\therefore$ BO.OE = CO.OF ....(ii) [বজ্রগুণন করে]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

AO. OD = BO. OE = CO.OF **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$

সমাধান :



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$।

অঙ্কন : AB বাহুর উপর P বিন্দু থেকে PQ লম্ব আঁকি। উহা AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও B, C যোগ করি।

প্রমাণ : ADPQ চতুর্ভুজে $\angle D = \angle AQP = 90°$

[$\therefore$ D অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং $PQ \perp AB$]

$\therefore$ ADPQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

উক্ত বৃত্তের AQ ও DP জ্যাদ্বয় বৃত্তের বহিঃস্থ B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

$\therefore$ AB.BQ = BD.BP ....(i)

[কারণ, বৃত্তের জ্যা দুটি বহিঃস্থ কোনো বিন্দুতে ছেদ করলে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান]

আবার, BCPQ চতুর্ভুজে, $\angle C = \angle BQP = 90°$ [C অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং $PQ \perp AB$]

$\therefore$ BCPQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ AB.AQ = AC.AP ....(ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

AB.BQ + AB.AQ = BD.BP + AC.AP

বা, AB (BQ + AQ) = AC.AP + BD.BP

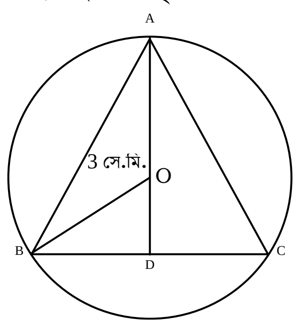
$\therefore$ AB.AB = AC.AP + BD.BP

$\therefore$ AB^2 = AC.AP + BD.BP (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.0 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

মনে করি, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.।



আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান। সুতরাং চিত্রে, AB.AC = 2R.AD

[এখানে AD লম্ব ও 2R পরিবৃত্তের ব্যাস]

AB^2 = 2R.AD............................(i)

ΔABC-এর BO = AO = 3 সে.মি.

AO যোগ করে বর্ধিত করায় AD মধ্যমা।

এখন, যেহেতু BO = AO = 3 সে.মি.

$\therefore$ OD = $\frac{3}{2}$ সে.মি. [$\because$ O সম্পাত বিন্দু]

$\therefore$ AD = AO + OD

= 3 + $\frac{3}{2}$ সে.মি.

[$\because$ মধ্যমাত্রয় সম্পাত বিন্দুতে পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে]

= $\frac{9}{2}$ সে.মি.

এখন, সমীকরণ (i) এ সংশ্লিষ্ট মান বসিয়ে পাই,

AB^2 = 2R.AD

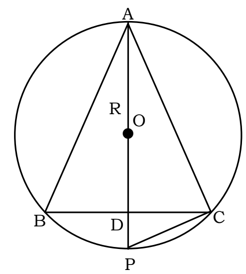
$= 2 \times 3 \times \frac{9}{2} = 27$

$\therefore$ AB = $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ ΔABC এর বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ সে.মি.

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, AB^2 = 2R.AD [ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যে AB = AC]

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A থেকে BC এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, 2R.AD = AB^2

অঙ্কন : O, ΔABC এর পরিকেন্দ্র। A, O যোগ করে P পর্যন্ত বর্ধিত করি, যা পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AO + OP = 2R

বা AP = 2R। C, P যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD এবং ΔACP-এ

$\angle$ADB = $\angle$ACP [উভয়ে এক সমকোণ]

$\angle$ABD = $\angle$APC [একই জ্যা AC এর উপর অবস্থিত]

অবশিষ্ট $\angle$BAD = অবশিষ্ট $\angle$CAP

$\therefore$ ΔABD ও ΔACP সদৃশকোণী ও সদৃশ।

তাহলে, $\frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$ [$\because$ অনুরূ প বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, AB.AC = AD.AP

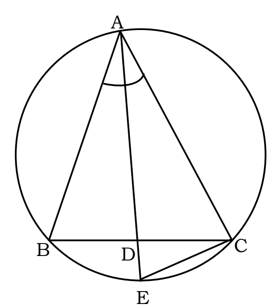
বা, AB.AB = 2R.AD [$\because$AB = AC ও AP = 2R]

$\therefore$ AB^2 = 2R.AD **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ABC ত্রিভুজের $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

দেখাও যে, AD^2 = AB.AC – BD.DC

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle$A-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে D বিন্দুতে এবং ΔABC-এর পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, AD^2 = AB.AC – BD.DC

অঙ্কন : C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD ও ΔAEC এ

$\angle$BAD = $\angle$CAE [স্বীকার]

এবং $\angle$ABD = $\angle$AEC [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলে]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী, অর্থাৎ সদৃশ।

সুতরাং এদের অনুরূ প বাহুগুলো সমানুপাতিক

$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$

বা, $AB.AC = AE.AD$ ....(i)

আবার, ΔABD ও ΔCDE এ

$\angle ABD = \angle CED$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ বলে]

এবং $\angle ADB$ = বিপ্রতীপ $\angle CDE$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী; সুতরাং তারা সদৃশ।

বা, $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DE}$

বা, $AD.DE = BD.DC$ ....(ii)

সমীকরণ (i) হতে, $AB.\ AC = AE.AD$

$= (AD + DE)\ AD$

$= AD.AD + AD.DE$

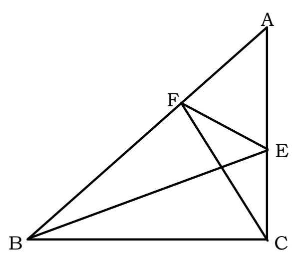
$= AD^2 + AD.DE.$

বা, $AB.AC = AD^2 + BD.DC$ [(ii) হতে মান বসিয়ে]

বা, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ΔABC ও $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$. E ও F যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$

প্রমাণ : $\angle BEC = 90° = <BEB$ [$\because BE \perp AC, CF \perp AB$]

BC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে।

কারণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

$\therefore$ BCEF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

CF বাহুকে বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোন <AEF.

$\therefore$ <AEF = <ABC [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান]

অনুরূ পভাবে <AEF = <ACB [একই কারণে]

ΔABC ও ΔAEF এর মধ্যে

<ABC = <AEF. <ACB = <AFE

এবং <A সাধারণ

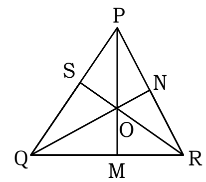
সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

কিন্তু AB ও AE তাদের অনুরূ প বাহু।

$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \frac{AB^2}{AE^2}$

$\therefore \Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ ΔPQR–এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

খ. ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ. দেখাও যে, ΔPQR–এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

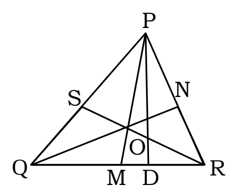
সমাধান :

ক. এখানে PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় বিন্দুতে ছেদ করেছে।

অতএব, O বিন্দুর নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দু PM কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

খ. ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। QR বাহুর উপর PD লম্ব আঁকি।



এখন ΔPQM-এ $\angle PMQ$ স্থূলকোণ

$\therefore PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM$ ....(i)

[স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

আবার, ΔPRM-এ $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore PR^2 = PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$ ....(ii)

[সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM + PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$

$= 2PM^2 + 2QM^2 + 2QM.DM - 2QM.DM$

[মধ্যমা বলে RM = QM]

$= 2(PM^2 + QM^2)$

সুতরাং $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

গ. 'খ' হতে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ ....(i)

$PQ^2 + QR^2 = 2(QN^2 + RN^2)$ ....(ii)

এবং $QR^2 + PR^2 = 2(RS^2 + QS^2)$ ....(iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2PQ^2 + 2QR^2 + 2PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2 + 2QN^2 + 2RN^2$

$+ 2RS^2 + 2QS^2$

বা, $2(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 2(PM^2 + QN^2 + RS^2)$

$+ 2(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$

$+ 4(QM^2 + RN^2 + QS^2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + (2QM)^2$

$+ (2RN)^2 + (2QS)^2$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + QR^2$

$+ PR^2 + PQ^2.$

[$\therefore$ M, N, S যথাক্রমে QR, RP এবং PQ এর মধ্যবিন্দু বলে, $2QM = QR$, $2RN = PR$ এবং $2QS = PQ$]

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ ....(iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{PO}{OM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OM}{PO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OM + PO}{PO} = \frac{1 + 2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PO} = \frac{3}{2}$

বা, $2PM = 3PO$

বা, $4PM^2 = 9PO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপে $4QN^2 = 9QO^2$

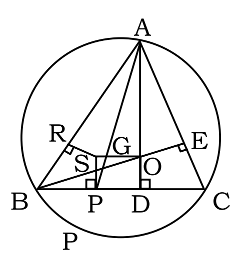
এবং $4RS^2 = 9RO^2$

সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই

$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 9PO^2 + 9QO^2 + 9RO^2$

$\therefore PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(PO^2 + QO^2 + RO^2)$ [3 দ্বারা ভাগ করে] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত।

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b.CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

সমাধান :

ক. আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং S থেকে BC বাহুর উপর লম্ব দূরত্ব SP, O থেকে A এর দূরত্ব S থেকে BC এর দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore OA = 2SP$

এটিই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং BC এর মধ্যবিন্দু D; A, D এবং S, O যোগ করি। S, O রেখাংশ AD কে G বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ এটা প্রমাণ করলেই হবে যে, G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

প্রমাণ : যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$.

AD এবং AP এদের ছেদক হওয়ায় $\angle PAD = \angle SPG$

[একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AGO$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ ও ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ ['ক' হতে]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore AG : GP = 2 : 1$

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore$ G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

$\therefore$ S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(প্রমাণিত)**

গ. ΔABC এর AD, BC এর উপর এবং BE, AC এর উপর লম্ব এবং $BC = a$, $AC = b$। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC.CD = AC.CE$

অর্থাৎ $a.CD = b.CE$

প্রমাণ : $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ হওয়ায় $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ....(i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$ ....(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই

$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

বা, $-2\ BC.CD = -2\ AC.CE$

বা, $BC.CD = AC.CE$ [উভয়পক্ষকে (–2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ a.CD = b.CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের–

ⓚ সমান ⓖ দ্বিগুণ ● অর্ধেক ⓘ এক–চতুর্থাংশ

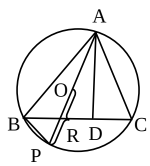
২. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ 9π একক হলে, ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক?

ⓚ 9π ● 18π ⓖ 36π ⓘ 81π

৩. একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সে.মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ৰেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ⓚ $\frac{25\pi}{4}$ ⓖ 20π ⓖ 25π ● 100π

৪. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং AP ব্যাস হলে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য কোনটি?



● AB.AC = 2R.AD ⓖ AB.AD = 2R.AC

ⓖ AB.BP = 2R.AP ⓘ AB.AC = 2R.BP

৫. একটি ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 cm হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ৰেত্রফল কত?

ⓚ 25π ⓖ 50π ● 100π ⓘ 150π

৬. 2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বহিঃস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্ব 6 সে.মি. হলে, ঐ বিন্দু হতে বৃত্তের ওপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত?

ⓚ 6.32 সে.মি. ⓖ 5.91 সে.মি.

● 5.66 সে.মি. ⓘ 4.47 সে.মি.

৭. একটি ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 7 সে.মি. ঐ ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে.মি.?

● 3.5 ⓖ 7 ⓖ 14 ⓘ 49

৮. দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূ প বাহুর বিপরীত কোণগুলোর মধ্যে সম্পর্ক হবে–

ⓚ একটি ছোট ⓖ দুইটি বড়

ⓖ অসমান ● সমান

৯. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ৰেত্রে–

i. অনুরূ প কোণগুলো সমান

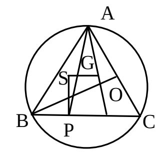
ii. অনুরূ প বাহুগুলো সমানুপাতিক

iii. ত্রিভুজদ্বয় সর্বদা সর্বসম

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii ⓖ ii ও iii ⓖ i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১০.



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, G ভরকেন্দ্র ও O লম্ববিন্দু হলে–

i. AG : GP = 2 : 1

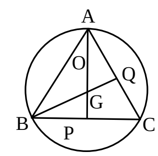
ii. AP : AG = 3 : 1

iii. SP = $\frac{1}{2}$ AO

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓖ ii ও iii ● i ও iii ⓘ i, ii ও iii

১১. চিত্রে ΔABC এর পরিকেন্দ্র O, ভরকেন্দ্র G হলে–



i. AG : $\frac{2}{3}$ AP

ii. BG : GQ = 2 : 1

iii. লম্ব বিন্দু, O এবং G সমরেখ

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓖ i ও iii ● ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

১২. নববিন্দু বৃত্তের ৰেত্রে–

i. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান

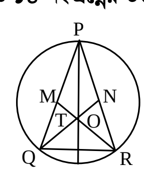
ii. লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্রের সংযোজক রেখার উপর বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত

iii. সর্বমোট নয়টি বিন্দু এই বৃত্তের উপর অবস্থান করে

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓖ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ১৩ ও ১৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



L, M, N বিন্দু তিনটি স্ব–স্ব বাহুর মধ্যবিন্দু।

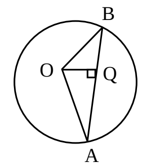
১৩. চিত্রের আলোকে PO : OL নিচের কোনটি?

ⓚ 1 : 1 ● 2 : 1 ⓖ 3 : 1 ⓘ 3 : 2

১৪. ত্রিভুজটি পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে উহার নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হবে?

ⓚ 8 সে.মি. ⓖ 6 সে. মি. ⓖ 3 সে.মি. ● 1.5 সে.মি.

নিচের চিত্রের আলোকে ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে OA = OB = 5 একক OQ = 4 একক।

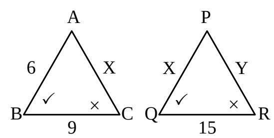
১৫. AB এর দৈর্ঘ্য কত একক?

(ক) 3 ● 6 (গ) $\sqrt{41}$ (ঘ) 41

১৬. ΔOAB এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(ক) 3 (খ) 6 ● 12 (ঘ) 24

নিচের চিত্রের আলোকে ১৭ – ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔABC ও ΔPQR সাদৃশ্য।

১৭. x- এর মান কত?

(ক) 9 ● 10° (গ) 15 (ঘ) 24

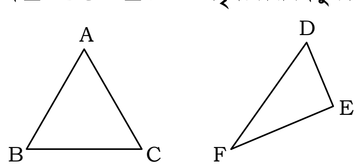
১৮. y এর মান কত?

(ক) $10\frac{2}{3}$ (খ) $12\frac{2}{3}$ (গ) $15\frac{2}{3}$ ● $16\frac{2}{3}$

৩(গ) ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

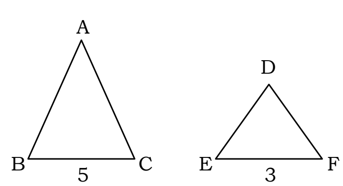
২৪. নিচের চিত্র ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ। (মধ্যম)



(ক) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DF}$ (খ) $\frac{AC}{AB} = \frac{EF}{DE}$

(গ) $\frac{BC}{AC} = \frac{DF}{EF}$ ● $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

২৫. নিচের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে, ΔABC : ΔDEF = কত? (মধ্যম)



(ক) 5 : 3 (খ) 3 : 5 ● 25 : 9 (ঘ) 9 : 25

২৬. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? (সহজ)

● 0 (খ) 1

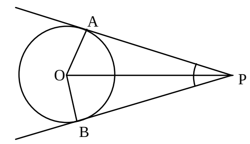
(গ) 10 (ঘ) 11

২৭. একটি ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ 9 সে.মি.। ঐ ত্রিভুজের নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত সে. মি.? (মধ্যম)

১৯. ΔABC ও ΔPQR এ BC : QR = কত?

● 9 : 15 (খ) 15 : 9 (গ) 9 : 25 (ঘ) 25 : 9

নিচের চিত্রের আলোকে ২০ ও ২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ∠AOB = 130°, OP = 5 cm, PA = 4 cm

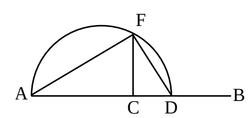
২০. ΔAPB এর মান কত ডিগ্রি?

(ক) 25° (খ) 60° ● 50° (ঘ) 30°

২১. ΔAOP এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

(ক) 9 ● 6 (গ) 18 (ঘ) 3

নিচের চিত্রের আলোকে ২২ ও ২৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



২২. ∠AFD = কত?

(ক) 60° ● 90° (গ) 120° (ঘ) 180°

২৩. ∠ACF = এর মান কত?

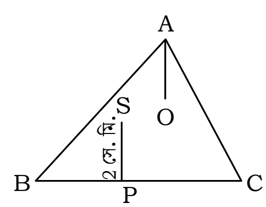
(ক) 70° ● 90° (গ) 145° (ঘ) 180°

● 4.5 (খ) 9 (গ) 18 (ঘ) 81

২৮. একটি ত্রিভুজের নববিন্দুবৃত্তের ক্ষেত্রফল 25π। ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত? (মধ্যম)

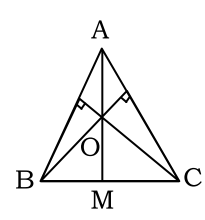
(ক) 25π (খ) 50π ● 100π (ঘ) 525π

২৯. ΔABC এর O লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্র S। SP = 2 সে. মি. হলে, AO = কত সে. মি.? (মধ্যম)



(ক) 1 (খ) 2 ● 4 (ঘ) 6

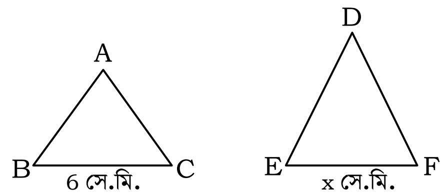
৩০.



O বিন্দুটিকে ΔABC-এর কী বলে? (সহজ)

(ক) বহিঃকেন্দ্র (খ) ভরকেন্দ্র ● লম্ববিন্দু (ঘ) পরিকেন্দ্র

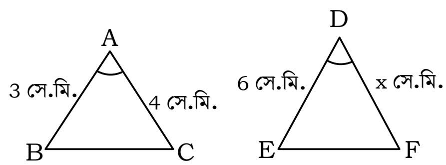
৩১.



ΔABC ও ΔDEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ। ΔABC এর ক্ষেত্রফল 18 বর্গ সে. মি. এবং ΔDEF এর ক্ষেত্রফল 32 বর্গ সে.মি. হলে, x এর মান কত সে.মি. হবে? (কঠিন)

(ক) 5 (খ) 6 (গ) 7 ● 8

৩২.



উপরের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ এবং $\angle A = \angle D$ হলে, x = কত সে. মি.? (কঠিন)

(ক) 4 (খ) 6 ● 8 (ঘ) 10

৩৩. **দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তাদের অনুরূ প বাহুগুলোর কী হবে?** (সহজ)

(ক) সমান ● সমানুপাতিক
(গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক

৩৪. **দুইটি ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হলে, ত্রিভুজ দুইটি কী হবে?** (সহজ)

(ক) সমান ● সদৃশকোণী (গ) সমকোণী (ঘ) সুক্ষ্মকোণী

৩৫. **ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় কত অনুপাতে বিভক্ত হয়?** (সহজ)

● 2 : 1 (খ) 2 : 3 (গ) 3 : 1 (ঘ) 3 : 2

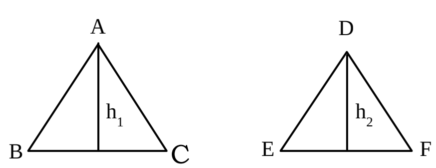
৩৬. **দুইটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে, ক্ষেত্রফল কী হবে?** (সহজ)

(ক) ব্যস্তানুপাতিক (খ) সমান
● সমানুপাতিক (ঘ) অসমান

৩৭. **দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল কী হবে?** (সহজ)

(ক) সমান ● সমানুপাতিক
(গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক

৩৮.



ΔABC ও ΔDEF সদৃশ ত্রিভুজদ্বয়ের BC = EF হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $h_1 = h_2$ (খ) $\frac{h_1}{h_2} = BC$ (গ) $\frac{h_1}{h_2} = 1$ ● $\frac{h_1}{h_2} =$ ধ্রুবক

৩৯. **a : b = c : d হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

● $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (খ) $\frac{a}{b} = cd$ (গ) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$ (ঘ) $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$

৪০. **ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল রেখা যদি AB ও AC কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে তবে নিচের কোনটি হবে?** (কঠিন)

(ক) $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$ (খ) AB.AE = AC.CD
(গ) $\frac{AB}{AD} = AC^2$ ● AB : AD = AC : AE

৪১. **বৃত্তের ক্ষেত্রে পরিসীমাকে কী বলে?** (সহজ)

● পরিধি (খ) ব্যাস (গ) ব্যাসার্ধ (ঘ) জ্যা

৪২. **ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের কতগুণ?** (সহজ)

(ক) সমান (খ) অর্ধেক ● দ্বিগুণ (ঘ) তিনগুণ

৪৩. **ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুকে কী বলা হয়?** (সহজ)

(ক) পরিকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র (গ) অন্তঃকেন্দ্র (ঘ) লম্ববিন্দু

৪৪. **নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরি ব্যাসার্ধের –** (সহজ)

(ক) সমান (খ) দ্বিগুণ (গ) তিনগুণ ● অর্ধেক

৪৫. **ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং $AD \perp BC$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

(ক) $AB.AC = \frac{1}{2} R.AD$ ● AB.AC = 2R.AD
(গ) AB.AC = 3R.AD (ঘ) AB.AC = RAD

৪৬. **ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান–এটি কার উপপাদ্য?** (সহজ)

(ক) টলেমির ● ব্রহ্মগুপ্তের
(গ) পিথাগোরাসের (ঘ) ইউক্লিডের

৪৭. **বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ABCD এবং AC ও BD কর্ণ হলে AC.BD = AB.CD + BC. AD। এটি কার উপপাদ্য?** (সহজ)

● টলেমির (খ) পিথাগোরাসের
(গ) ইউক্লিডের (ঘ) ব্রহ্মগুপ্তের

৪৮. **বৃত্তের দুটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে ছেদবিন্দুর অবস্থান কোথায়?** (মধ্যম)

(ক) বৃত্তের বাইরে (খ) বৃত্তের উপরে
● বৃত্তের মধ্যে (ঘ) বৃত্তের পরিধিতে

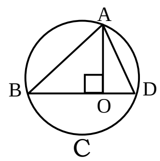
৪৯. **বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা কী?** (সহজ)

(ক) ব্যাসার্ধ (খ) অর্ধব্যাসার্ধ
● ব্যাস (ঘ) কেন্দ্র হতে দূরবর্তী জ্যা

৫০. **বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুটি কর্ণ হলে, টলেমির উপপাদ্য অনুসারে কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

● AC.BD = AB.CD + BC.AD
(খ) AC.BD = AB.BC + CD.AD
(গ) AC.BD = AB.CD + BC.AD
(ঘ) AC.BD = AB.BC – CD.AD

৫১.



AB, AD ও AO এর মান যথাক্রমে 4, 3 ও 2 একক হলে ABCD বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত একক? (মধ্যম)

(ক) 2 ● 3 (গ) 4 (ঘ) 5

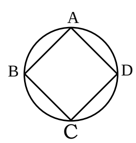
ব্যাখ্যা : ব্রহ্মাগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে,

AB.AD = 2R.AD [R = পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ]

বা, $2R = \dfrac{Ab.AD}{AD}$

বা, $R = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 2} = 3$

৫২.

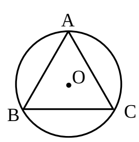


ABCD একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হলে AC.BD = কত? (মধ্যম)

● AB.CD + BC.AD (খ) AC.BD + AB.CD

(গ) AB.CD – BC.AD (ঘ) AC.BC – AB.CD

৫৩.



ΔABC বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে O কে বলা হয়– (মধ্যম)

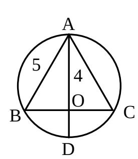
(ক) ভরকেন্দ্র (খ) অন্তঃকেন্দ্র ● পরিকেন্দ্র (ঘ) সমরেখ

৫৪. বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো বর্গের কর্ণদ্বয়ের গুণফল 250 বর্গসেন্টিমিটার হলে এর ক্ষেত্রফল কত? (সহজ)

(ক) 50 বর্গ সে.মি. (খ) 75 বর্গ সে.মি.

(গ) 100 বর্গ সে.মি. ● 125 বর্গ সে.মি.

৫৫.

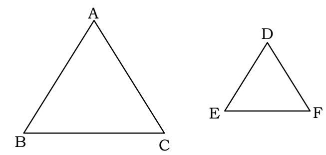


ΔABC সমবাহু হলে OD এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

(ক) 2·25 ● 2·50 (গ) 2·75 (ঘ) 3·50

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫৬.



ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে–

i. অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে

ii. অনুরূপ বাহুগুলোর আনুপাতিক হবে

iii. ক্ষেত্রফলের অনুপাত অনুরূপ বাহুদ্বয়ের বর্গের অনুপাতের সমান হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৭. দুইটি বহুভুজের কোণগুলো সমান হলে–

i. বহুভুজদ্বয় সদৃশকোণী

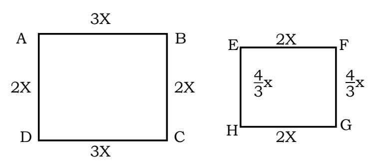
ii. বহুভুজদ্বয় সদৃশ অথবা অসদৃশ

iii. বহুভুজদ্বয় সর্বদা সর্বসম

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫৮.



চিত্রে ABCD ও EFGH দুইটি আয়ত–

i. ABCD ও EFGH পরস্পর সদৃশ

ii. ABCD ও EFGH পরস্পর সদৃশকোণী

iii. তাদের অনুরূপ বাহুর অনুপাত সর্বদা $\dfrac{2}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৫৯. দুইটি ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশকোণী হলে–

i. তারা সদৃশ

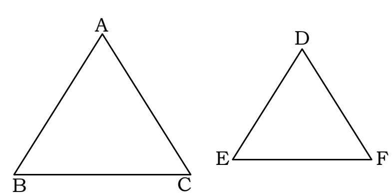
ii. তারা সর্বদা সর্বসম

iii. বাহুগুলোর অনুপাত সমানুপাতিক

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬০.



ΔABC ও ΔDEF পরস্পর সদৃশ হলে–

i. $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : DE^2$

ii. $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

iii. ΔABC ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল সমান

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬১. একটি ত্রিভুজের–

i. পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ

ii. মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে নববিন্দু বলে

iii. শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬২. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের–

i. সমান কোণ দুইটিকে অনুরূ প কোন বলে

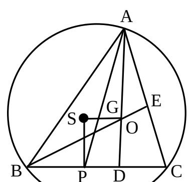
ii. অনুরূ প বাহুগুলো সমান নাও হতে পারে

iii. অনুরূ প কোণের বিপরীত বাহু দুইটি অনুরূ প বাহু

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৩.



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, G ভরকেন্দ্র, O লম্ববিন্দু ও AP, ABC এর মধ্যমা হলে–

i. OA = 2SP

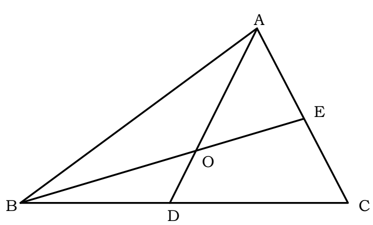
ii. S, G ও O একই সরলরেখায় অবস্থিত

iii. G, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৪.



উপরের চিত্রে, AD ও BE যথাক্রমে BC ও AC এর উপর মধ্যমা হলে–

i. AD = AE

ii. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + DC^2)$

iii. O, ABC এর ভরকেন্দ্র

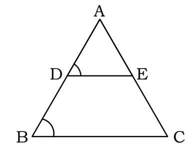
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii ● ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬৫. পাশের চিত্রে AC = 25 সে. মি.

এবং AE = 16 সে. মি.

এবং BC || DE হলে–



i. $\frac{AB}{AD} = \frac{25}{16}$

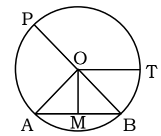
ii. $\frac{AD}{BD} = \frac{16}{9}$

iii. $\frac{AB}{BD} = \frac{5}{3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬৬. OM ⊥ AB হলে–



i. AM = BM

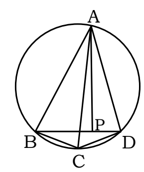
ii. OA = OT

iii. AB = BP

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ ii ও iii

৬৭.



উপরের চিত্র সম্পর্কে সঠিক মন্তব্যগুলো হলো–

i. ΔABP ও ΔACD সদৃশকোণী হলে AC . BP = AB.CD

ii. ΔABC ও ΔAPD সদৃশকোণী হলে AC.BP = AD.PD

iii. AC.BD = AB.CD + BC.AD

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

৬৮. ADC সমকোণী ত্রিভুজে ∠D = 90° হলে–

i. $AD^2 + CD^2 = AC^2$

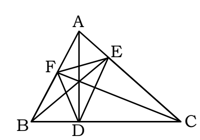
ii. $AD^2 = AC^2 - CD^2$

iii. ΔADC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times DC \times AD$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৯. চিত্রে পাদ ত্রিভুজ হলো–



i. ABC

ii. DEF

iii. BOD

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

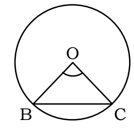
ক i ● ii গ i ও iii ঘ ii ও iii

৭০. নিচের চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ∠BOC = 80° এবং ∠OCB = 50°। ত্রিভুজটি সম্পর্কে ফারহানা আক্তার নিচের মন্তব্যগুলো করলেন–

i. OC = OB

ii. ∠OBC = 50°

iii. BOC একটি সমকোণী ত্রিভুজ

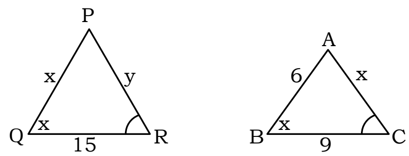


নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রদ্বয়ের আলোকে ৭১ – ৭৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔABC ও ΔPQR সদৃশ।

৭১. x এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 9 ● 10 (গ) 15 (ঘ) 24

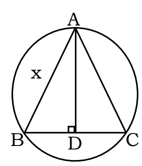
৭২. y এর মান কত? (সহজ)

(ক) $10\frac{2}{3}$ (খ) $12\frac{2}{3}$ (গ) $15\frac{2}{3}$ ● $16\frac{2}{3}$

৭৩. ΔABC ও ΔPQR এর ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত? (মধ্যম)

● 25 : 9 (খ) 16 : 9 (গ) 15 : 9 (ঘ) 10 : 9

নিচের চিত্রের আলোকে ৭৪ – ৭৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে. মি.।

৭৪. AD কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে নিচের কোনটি হবে? (মধ্যম)

● $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (খ) $\frac{3}{4}x^2$ (গ) $\sqrt{3x^2}$ (ঘ) x^2

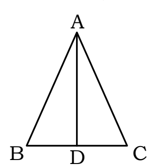
৭৫. x = কত সে. মি.? (কঠিন)

(ক) 1.5 (খ) 3 ● $3\sqrt{3}$ (ঘ) $4\sqrt{2}$

৭৬. AD = কত সে. মি.? (সহজ)

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) 3 ● 4.5 (ঘ) 6

নিচের চিত্রের আলোকে ৭৭ – ৭৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC-এ AB = AC = 6 সে. মি., $\angle ADC$ = 1 সমকোণ এবং BC = 4 সে. মি.।

৭৭. AD এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

● $4\sqrt{2}$ সে. মি. (খ) $3\sqrt{3}$ সে. মি.
(গ) $3\sqrt{2}$ সে. মি. (ঘ) $2\sqrt{3}$ সে. মি.

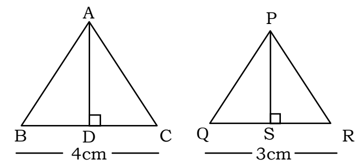
৭৮. ΔABC এর ক্ষেত্রফল কত? (মধ্যম)

(ক) $4\sqrt{2}$ ব. সে. মি. (খ) $6\sqrt{2}$ ব. সে. মি.
● $8\sqrt{2}$ ব. সে. মি. (ঘ) $10\sqrt{2}$ ব. সে. মি.

৭৯. BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল কত? (সহজ)

(ক) 4 ব. সে. মি. (খ) 8 ব. সে. মি.
(গ) 12 ব. সে. মি. ● 16 ব. সে. মি.

ত্রিভুজদ্বয়ের আলোকে ৮০ – ৮২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী

৮০. $\angle B = 60°$ হলে $\angle Q$ = কত? (সহজ)

(ক) 40° ● 60° (গ) 70° (ঘ) 90°

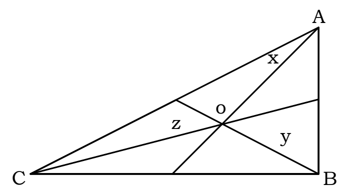
৮১. ΔABC : ΔPQR এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 3 : 4 ● 16 : 9 (গ) 9 : 16 (ঘ) 4 : 3

৮২. ΔABC ও ΔPQR এর AB ও PQ অনুরূপ বাহু হলে AB : PQ এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

(ক) 2.5 : 1.5 (খ) 3 : 4 ● 4 : 3 (ঘ) 5 : 3

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৩ – ৮৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং x, y, z মধ্যমা

৮৩. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র নিচের কোনটি? (সহজ)

(ক) A (খ) C ● O (ঘ) B

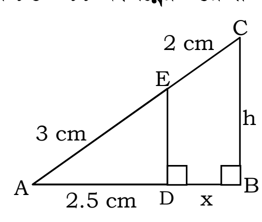
৮৪. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● $z = \frac{3}{2}OC$ (খ) $y = \frac{3}{2}OC$ (গ) $x = \frac{3}{2}OC$ (ঘ) f = e

৮৫. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$
(খ) $2(AB^2 + AC^2 + BC^2) = 3AC^2$
● $2(x^2 + y^2 + z^2) = 3AC^2$
(ঘ) $2(x^2 + y^2 + z^2) = AC^2$

নিচের চিত্রের আলোকে ৮৬ – ৮৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



৮৬. x-এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) 2.5 (খ) 2.67 (গ) 3.76 ● 1.67

৮৭. z এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

● 1.66 (খ) 1.21 (গ) 1.56 (ঘ) 2.66

৮৮. h-এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

(ক) 2.18 (খ) 3.92 (গ) 3.18 ● 2.76

৮৯. ΔABC এর AD ও DE মধ্যদ্বয় পরস্পরকে 0 বিন্দুতে ছেদ করলে AD : AO = কত?

● 3 : 2 (খ) 3 : 1 (গ) 2 : 1 (ঘ) 1 : 2

৯০. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি হলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?

(ক) 2 সে.মি (খ) 4 সে .মি (গ) 8 সে.মি ● 16 সে.মি

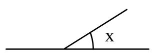
৯১. $\angle ABC$–এ $\angle A$ = এক সমকোণ এবং AD, BC বাহুর উপর D বিন্দুতে লম্ব হলে, নিচের কোনটি সত্য?

● $AB^2 = BC.AD$ (খ) $AB^2 = BC.AB$
(গ) $AB^2 = BC.BD$ (ঘ) $AD^2 = CD.AD$

৯২. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের কিরূ প?

(ক) সমান ● অর্ধেক (গ) দ্বিগুণ (ঘ) চারগুণ

৯৩.



$x = 40°$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

● 70° (খ) 60° (গ) 80° (ঘ) 40°

৯৪. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 cm হলে ঐ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ কত সে. মি.?

(ক) 4 (খ) 8 (গ) 12 ● 16

৯৫. PQR অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজের ভূমি 6cm ও বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 cm হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?

(ক) 48 বর্গ সে. মি. ● 24 বর্গ সে.মি.
(গ) 30 বর্গ সে .মি. (ঘ) 15 বর্গ সে.মি.

৯৬. ΔABC ও ΔDEF এর ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 5cm ও 6 cm এবং 7 cm ও 8 cm হলে $\Delta ABC : \Delta DEF$ এর মান নিচের কোনটি?

(ক) 7 : 3 (খ) 15 : 17 (গ) 15 : 29 ● 15 : 28

৯৭. যেকোনো ত্রিভুজ ABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ হলে–

● $AB^2 > BC^2 + CA^2$ (খ) $AB^2 = BC^2 + CA^2$
(গ) $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ঘ) $AB^2 < BC^2 + CA^2$

৯৮. ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে $AB^2 + BC^2 + CA^2$ = কত?

(ক) $GA^2 + GB^2 + GC^2$ (খ) $2(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
● $3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (ঘ) $\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

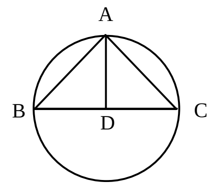
৯৯. নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ–

(ক) ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের সমান
● ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান
(গ) পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখার সমান
(ঘ) পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রের সংযোজক রেখার সমান

১০০. বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো বর্গের কর্ণদ্বয়ের গুণফল 200 বর্গ সে.মি. হলে এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি. হবে?

(ক) 10 (খ) 20 (গ) 50 ● 100

১০১. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?



(ক) $AB.\ AC = \frac{1}{2} R.AD$ ● $AB.AC = 2R.AD$
(গ) $AB.AC = 3R.\ AD$ (ঘ) $AB.AC = 4R.\ AD$

১০২. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু–

● সমরেখ (খ) সমবিন্দু (গ) সমান্তরাল (ঘ) সমতল

১০৩. ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং BC ও EF অনুরূ প বাহু হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : DF^2$
(খ) $\Delta ABC : \Delta DEF = AB^2 : EF^2$
● $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$
(ঘ) $\Delta ABC : \Delta DEF= EF^2 : BC^2$

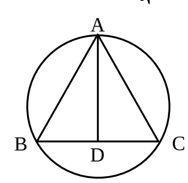
১০৪. কোনো বৃত্তের–

i. একই চাপের উপর কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ
ii. শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়
iii. বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস পরস্পর লম্ব

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও iii (খ) i ও ii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৫ ও ১০৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে ABC সমবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য = 3 সে. মি.। BC এর উপর মধ্যমা AD।

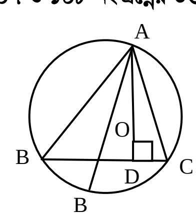
১০৫. AD = কত সে. মি. (প্রায়)?

● 2·6 (খ) 3 (গ) 6·75 (ঘ) 45·65

১০৬. ΔABC এর পরিবৃত্তে ব্যাসার্ধ কত সে. মি.?

● 1·73 (খ) 3 (গ) 5·2 (ঘ) 6·75

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৭ ও ১০৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১০৭. AB. AC = AP. AD নিচের কোন উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

(ক) টলেমি ● ব্রহ্মগুপ্ত
(গ) এ্যাপোলেনিয়াস (ঘ) পিথাগোরাস

১০৮. চিত্রে কয়টি সমকোণী ত্রিভুজ আছে?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 ● 4

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১০৯. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. দুইটি বিন্দুর দুরত্ব নির্ণয়ে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হয়

ii. $y - 2x + 5 = 0$ রেখার ঢাল -2

iii. $3x + 5y = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i (খ) ii ও iii ● i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১০. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য কর–

i. যে কোন দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না

ii. শুধু মাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়

iii. বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শ আঁকা যায়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১১. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে–

i. উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সবৃত্তভূমিক কোণক হবে

ii. ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

iii. উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে 9π বর্গ সে.মি.

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i (খ) ii ● i ও iii (ঘ) ii ও iii

১১২. নিচের তথ্যগুলো লৰ কর –

i. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূ প বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে

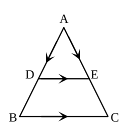
ii. দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূ প বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে

iii. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলেই ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও iii (খ) ii ও iii ● i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

১১৩. চিত্রে ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে –



i. DE ∥ BC হবে

ii. $DE = \frac{1}{2} BC$ হবে

iii. $\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$ হবে

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৪. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4, 5 একক হলে–

i. ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা = 12 একক

ii. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক

iii. ত্রিভুজটি সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 ● 4

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৫. ΔABC এর ক্ষেত্রে $AB^2 > BC^2 + CA^2$ হলে–

i. $\angle C$ স্থূলকোণ

ii. $\angle A$ সমকোণ

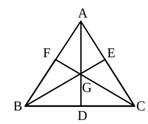
iii. $\angle B$ সূক্ষকোণ

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (গ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ১১৬ ও ১১৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



D,E,F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু হলে–

১১৬. G বিন্দুর নাম কী? (সহজ)

(ক) লম্ববিন্দু (খ) অন্তঃকেন্দ্র (গ) পরিকেন্দ্র ● ভরকেন্দ্র

১১৭. ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে? (মধ্যম)

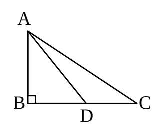
(ক) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

● $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(গ) $AB^2 + AC^2 = 2(GA^2 + GD^2)$

(ঘ) $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

নিচের তথ্য থেকে ১১৮ ও ১১৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $AB \perp BC$। D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং $AD = 2$ সে.মি. $BD = 3$. সে.মি.

১১৮. BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

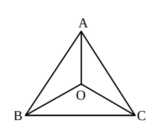
(ক) AB ● BC (গ) BD (ঘ) CD

১১৯. $AB^2 + AC^2$ = কত বর্গ সে.মি.? (মধ্যম)

● 26 (খ) 13 (গ) 5 (ঘ) 35

নিচের তথ্য থেকে ১২০ ও ১২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত।



১২০. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের– (সহজ)

(ক) পরিবৃত্ত ● অন্তর্বৃত্ত (গ) বহির্বৃত্ত (ঘ) বৃত্তে অন্তর্লিখিত

১২১. নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

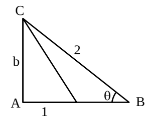
(ক) $OA + OB + OC > AB + BC + AC$

(খ) $OA + OC < BC$

● $OA + OB + OC < AB + BC + AC$

(ঘ) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle O$

নিচের তথ্যের আলোকে ১২২ – ১২৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে BC = AC

১২২. BD এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি? (সহজ)

ⓚ BC ● BD ⓖ CD ⓖh AC

১২৩. AD এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ⓚ 5 ● $\sqrt{5}$ ⓖ 4 ⓖh $\sqrt{2}$

১২৪. AB এর দৈর্ঘ্য কত? (মধ্যম)

ⓚ 3.74 ⓚh 5 ⓖ 5.48 ● 6.48

নিচের তথ্যের আলোকে ১২৫ ও ১২৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

ΔABC এ AB = BC = CA = 5 সে. মি. এবং AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

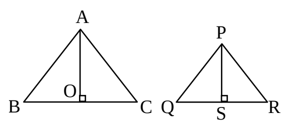
১২৫. ΔABC এর মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি কত সে. মি.? (মধ্যম)

ⓚ 225 ● 75 ⓖ 56 ⓖh 7.5

১২৬. $AD^2 + BD^2$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ50 ⓚh $\sqrt{50}$ ● 25 ⓖh $\sqrt{25}$

নিচের তথ্য থেকে ১২৭ ও ১২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে ΔABC ও ΔPQR সদৃশকোণী এবং BC = 4cm ও QR = 3cm

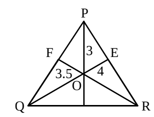
১২৭. $\Delta ABC : \Delta PQR$ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 3 : 4 ⓚh 9 : 16 ● 16 : 9 ⓖh 4 : 3

১২৮. AB ও PQ অনুরূপ বাহু হলে AB : PQ এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 2 : 1 ⓚh3 : 4 ⓖ 3 : 5 ● 4 : 3

নিচের তথ্য থেকে ১২৯ – ১৩১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় 4, 3 এবং 3.5 একক এবং তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। (মধ্যম)

১২৯. OP এর দৈর্ঘ্য কোনটি?

ⓚ 3 একক ● 2 একক ⓖ 1 একক ⓖh $\frac{1}{2}$ একক

১৩০. ত্রিভুজের বাহুগুলো বর্গের সমষ্টি নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ⓚ 49.67 বর্গ একক ⓚh 41.29 বর্গ একক

● 40.57 বর্গ একক ⓖh 39.69 বর্গ একক

১৩১. $\angle P = 90°$ হলে, QR = ? (কঠিন)

● 3.92 একক ⓚh 4.72 একক

ⓖ 4.98 একক ⓖh 5.68 একক

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাত বিভক্ত করে? ২

খ. উদ্দীপকের চিত্রটি অঙ্কন করে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ৪

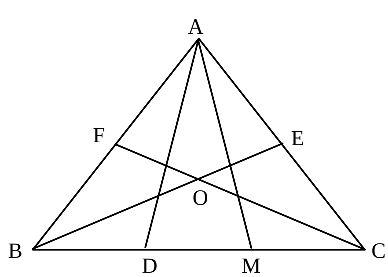
গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO + CO^2)$ ৪

▸◂ ১ নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. O বিন্দুটির নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দু AD কে 2 : 1 অনুপাত বিভক্ত করে।

খ.



ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

অঙ্কন : A হতে BC এর ওপর AM লম্ব টানি।

প্রমাণ : ΔABC এ $\angle ADB$ স্থূলকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DM$ ....(i)

আবার, $\angle ABC$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DM$

$= AD^2 + BD^2 - 2BD.DM$ ....(ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BD.DM - 2BD.DM$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(দেখানো হলো)**

গ. সমাধান 'খ' এর চিত্র হতে পাই,

ΔABC এ AD, BE, CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। O থেকে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্ব যথাক্রমে OA, OB ও OC.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$

প্রমাণ : ΔABC এ AD মধ্যমা

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

[এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ ....(i)

অনুরূপভাবে, $AB^2 + BC^2 = 2BE^2 + 2CE^2$ ....(ii)

এবং $AC^2 + BC^2 = 2CF^2 + 2AF^2$ ....(iii)

সমীকরণ, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2BC^2 + 2AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = 4AB^2 + 4BD^2 + 4BE^2 + 4CE^2 + 4CF^2 + 4AF^2.$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2AF)^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + 4BC^2 + 4AC^2 = BC^2 + AC^2 + AB^2 + 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $4AB^2 + AB^2 + 4BC^2 – BC^2 + 4AC^2 – AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3AB^2 + 3BC^2 + 3AC^2 = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ....(iv)

আবার, O মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দু বলে মধ্যমাত্রয় ভরকেন্দ্র পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore OA = \frac{2}{3} AD$

বা, $AD = \frac{3}{2} OF$

আবার, $OB = \frac{2}{3} BE$

বা, $BE = \frac{3}{2} OB$

এবং $OC = \frac{2}{3} CF$

বা, $CF = \frac{3}{2} OC$

এখন, সমীকরণ (iv) হতে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left\{\left(\frac{3}{2} OA\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OB\right)^2 + \left(\frac{3}{2} OC\right)^2\right\}$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4\left(\frac{9}{4} OA^2 + \frac{9}{4} OB^2 + \frac{9}{4} OC^2\right)$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9(A^2 + OB^2 + OC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং AD ⊥ BC.

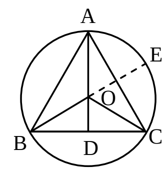
ক. AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

গ. ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, 'O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABC সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত। পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. এবং AD ⊥ BC।



$\therefore AD = OA + OD$

$= OA + \frac{OA}{2}$ [O বিন্দুতে AD, 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়]

$= \left(4 + \frac{4}{2}\right)$ সে. মি.

$= 6$ সে. মি.

নির্ণেয় AD এর দৈর্ঘ্য 6 সে. মি.।

খ. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে পাই, $AB . AC = BE . AD$

বা, $AB^2 = 8 \times 6$ বর্গ সে. মি. [ABC সমবাহু ত্রিভুজ বলে AB = AC এবং BE = 2. OB = 2.4 সে. মি. = 8 সে. মি.]

বা, $AB^2 = 48$ বর্গ সে. মি.

বা, $AB = \sqrt{48}$ সে. মি.

$\therefore AB = 4\sqrt{3}$ সে. মি.

ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{3}$ সে. মি. **(Ans.)**

গ. ‘খ’ হতে,

সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর এক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 4\sqrt{3}$ সে. মি.।

আমরা জানি,

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{3})^2$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 48$ বর্গ সে. মি.

$= 12\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

$= 20.785$ বর্গ সে. মি. (প্রায়)

এবং বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক। (যেখানে r বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

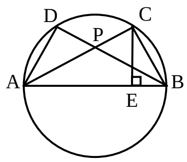
$= 3.1416 \times 4^2$ বর্গ সে. মি. [$\because r = 4$]

$= 3.1416 \times 16$ বর্গ সে. মি.

$= 50.2656$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও বৃত্তক্ষেত্র ABC–এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত $= \frac{20.785}{50.2656} = \frac{1}{2.42} = 1 : 2.42$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩ ▸



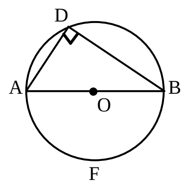
ক. দেখাও যে, $\angle ADB = 90°$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AE.BE = CE^2$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. O কেন্দ্রিক বৃত্তের AB ব্যাস। ব্যাসের যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর F বিন্দু নিই।



এখন AFB চাপের উপর দণ্ডায়মান।

বৃত্তস্থ $\angle ADB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$

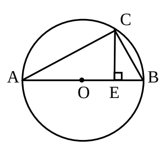
$= \frac{1}{2} \times$ এক সরল কোণ

$= \frac{1}{2} \times 180°$

$= 90°$

$\therefore \angle ADB = 90°$ **(দেখানো হলো)**

খ.



AB ব্যাস $\therefore \angle ACB = 90°$ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং $CE \perp AB$

এখন, ΔACE ও ΔBCE এ

$\angle AEC = \angle BEC$ [সমকোণ]

$\angle CAE = \angle BCE =$ [প্রত্যেক $\angle ACE$ এর পূরক কোণ]

অবশিষ্ট $\angle ACE$ = অবশিষ্ট $\angle CBE$

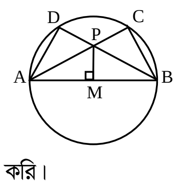
$\therefore \Delta ACE$ ও ΔBCE সদৃশকোণী তাই এরা সদৃশ

$\therefore \frac{CE}{BE} = \frac{AE}{CE}$

বা, $CE.CE = AE.BE$

$\therefore CE^2 = AE.BE$ **(প্রমাণিত)**

গ.



$PM \perp AB$ অঙ্কন করি।

A, M, P, D সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle AMP + \angle ADP = 1$ সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত AMPD বৃত্তের AM ও DP জ্যা বহিঃস্থ B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore AB.BM = BD.BP$...............(i)

আবার, B, M, P, C সমবৃত্তস্থ। কারণ $\angle BMP + \angle PCB = 1$ সমকোণ + 1 সমকোণ = 2 সমকোণ।

উক্ত BMPC বৃত্তের BM ও CP জ্যা বহিঃস্থ A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore AB.BM = AC.AP$...............(ii)

(i) ও (ii)নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

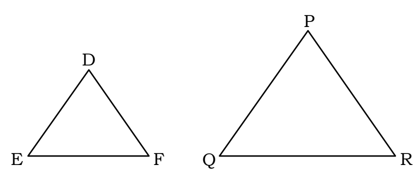
$AB.BM + AB.AM = BD.BP + AC.AP$

বা, $AB(BM + AM) = AC.AP + BD.BP$

বা, $AB.AB = AC.AP + BD.BP$

$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪ ▸



ΔDEF ও ΔPQR সদৃশকোণী।

ক. ত্রিভুজের সদৃশতা বলতে কী বোঝ? ২

খ. ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা PQ ও PR কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ত্রিভুজের সদৃশতার দুইটি ৰেত্র

১. কোণের ৰেত্রে সদৃশতা

২. বাহুর অনুপাতের ৰেত্রে সদৃশতা

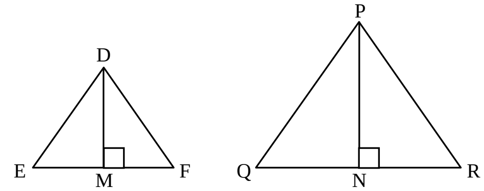
কোণের ৰেত্রে সদৃশতা : ত্রিভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ৰেত্রে সদৃশতা : সমানসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, ত্রিভুজ দুইটির–

a. অনুরূ প কোণগুলো সমান হয় এবং

b. অনুরূ প দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) ত্রিভুজ বলা হয়।

খ.



মনে করি, ΔDEF ও ΔPQR সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূ প বাহু EF ও QR।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$

অঙ্কন : EF ও QR এর উপর যথাক্রমে DM ও PN লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : ΔDEF এর ভূমি = EF এবং উচ্চতা = DM

$\therefore \Delta DEF = \frac{1}{2} \times EF \times DM$

$\left[\because \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}\right]$

আবার, ΔPQR এর ভূমি = QR এবং উচ্চতা = PN

$\therefore \Delta PQR = \frac{1}{2} \times QR \times PN$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{\frac{1}{2} \times EF \times DM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{EF.DM}{QR.PN}$$

আবার, ΔDEM ও ΔPQN-এ

$\angle DME = \angle PNQ$ = এক সমকোণ

$\angle DEM = \angle PQN$

$\angle EDM = \angle QPN$

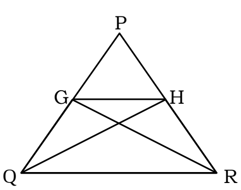
$\therefore \Delta DEM$ ও ΔPQN সদৃশকোণী তাই সদৃশ।

$$\therefore \frac{EF}{QR} = \frac{DM}{PN} = \frac{EF}{QR}$$

$$\therefore \frac{\Delta DEF}{\Delta PQR} = \frac{EF}{QR} \times \frac{EF}{QR} = \frac{EF^2}{QR^2}$$

$\therefore \frac{\Delta DEF}{PQR} = \frac{EF^2}{QR^2}$ (প্রমাণিত)

গ.



মনে করি, PQR ত্রিভুজের QR বাহুর সমান্তরাল GH রেখাংশ PQ ও PR-কে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, PG : GQ = PH : HR

অঙ্কন : G, R ও G, H যোগ করি।

প্রমাণ : ΔPGH এবং ΔGHQ একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{PG}{GQ}$$

আবার, ΔPGH এবং ΔGHR একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR} = \frac{PH}{HR}$$

$\therefore \Delta GHR = \Delta GHQ$

[$\because$ একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত]

$$\therefore \frac{\Delta PGH}{\Delta GHQ} = \frac{\Delta PGH}{\Delta GHR}$$

$$\therefore \frac{PG}{GQ} = \frac{PH}{HR}$$

অর্থাৎ PG : GQ = PH : HR (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৫ ▸ ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

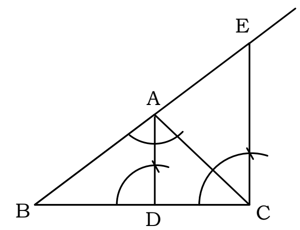
ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, BD : DC = BA : AC ৪

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD : DC = BP : CQ ৪

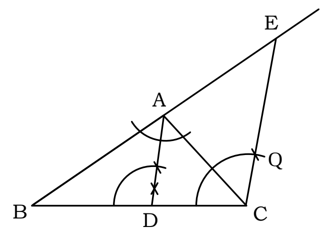
▸◂ ৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে। তথ্য অনুসারে চিত্রটি আঁকা হলো।

খ.



ΔABC–এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BA : AC

প্রমাণ : যেহেতু AD || CE এবং AC তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

আবার, AD || CE এবং BE তাদের ছেদক

$\therefore \angle BAD = \angle AEC$

কিন্তু $\angle BAD = \angle DAC$ [কারণ AD, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

$\therefore \Delta AEC$ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অর্থাৎ AE = AC.

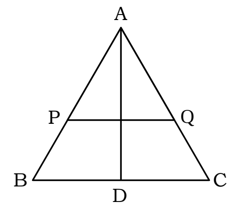
এখন, ΔBCE-এ AD || CE

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$$

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$ [$\because$ AE = AC]

$\therefore$ BD : DC = BA : AC **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC-এ $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD : DC = BP : CQ

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle$A এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে বলে,

BD : DC = AB : AC [খ অনুসারে]

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ .... (i)

যেহেতু PQ || BC

$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$

বা, $\frac{AP + BP}{BP} = \frac{AQ + CQ}{CQ}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{QC}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CQ}$

বা, $\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{CQ}$ [(i) নং হতে]

সুতরাং BD : DC = BP : CQ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৬ ▸ ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব।

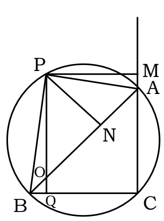
ক. চিত্র এঁকে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের নাম লেখ। ২

খ. PQ ও BN এর ছেদবিন্দু O হলে, প্রমাণ কর যে, PO.OQ = BO.ON ৪

গ. প্রমাণ কর যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। ৪

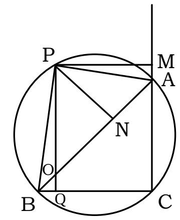
▸◂ ৬নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



চিত্রে, ΔABC-এ পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব। P, A ও P, B যোগ করি। ফলে APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অঙ্কিত হলো।

খ.



উপরিউক্ত চিত্রে PQ এবং BN পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, PO.OQ = BO.ON

প্রমাণ : দেওয়া আছে, PN $\perp$ AB এবং PQ $\perp$ BC

$\therefore \angle$PQB = $\angle$PNB [সমকোণ বলে]

এখন ΔPON এবং ΔBOQ এর মধ্যে $\angle$PNO = $\angle$OQB

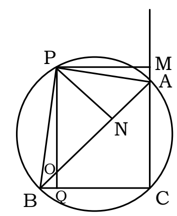
এবং $\angle$PON = $\angle$BOQ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{PN}{BQ} = \frac{PO}{BO} = \frac{ON}{OQ}$

$\therefore$ PO.OQ = BO.ON **(প্রমাণিত)**

গ.



প্রমাণ করতে হবে যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : Q, N; N, M এবং P, B যোগ করি।

প্রমাণ : PNAM চতুর্ভুজে $\angle$PNA + $\angle$PMA = দুই সমকোণ

[$\because$ PN $\perp$ AB এবং PM $\perp$ AM]

$\therefore$ PNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore$ PM চাপের উপর দণ্ডায়মান

বৃত্তস্থ $\angle$PAM = বৃত্তস্থ $\angle$PNM

আবার, PQ $\perp$ BC এবং PN $\perp$ AB

$\therefore \angle$PNB = $\angle$PQB = দুই সমকোণ

$\therefore$ PNQB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore \angle$PNQ + $\angle$PBQ = 180°

বা, $\angle$PNQ = 180° – $\angle$PBQ .... (i)

আবার, APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজটিতে

$\angle$PAC + $\angle$PBC = 180°

বা, $\angle$PAC = 180° – $\angle$PBC = 180° – $\angle$PBQ ... (ii)

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে পাই,

$\angle$PNQ = $\angle$PAC = 180° – $\angle$PAM

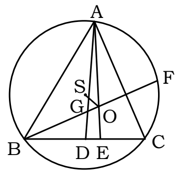
= 180° – $\angle$PNM [$\because \angle$PAM = $\angle$PNM]

$\therefore \angle$PNQ + $\angle$PNM = 180°

$\therefore$ QN ও NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\therefore$ Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৭ ▸ ΔABC এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং BC এর মধ্যবিন্দু D.



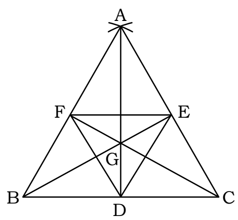
ক. ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে কত অনুপাতে বিভক্ত করে? ২

খ. দেখাও যে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ৪

গ. যদি ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে প্রমাণ কর যে, $AO.OD = BO.OE = CO.OF$ ৪

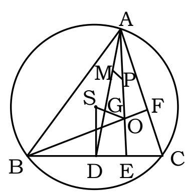
৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্রে G হলো ΔABC এর ভরকেন্দ্র। ভরকেন্দ্র মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

খ.



অঙ্কন : AO এর মধ্যবিন্দু P বিন্দু দিয়ে OS এর সমান্তরাল PM আঁকি, যেন তা AD কে M বিন্দুতে ছেদ করে। S, D যোগ করি।

প্রমাণ : AO এর মধ্যবিন্দু P এবং $MP \parallel OS$

$\therefore$ AG এর মধ্যবিন্দু M অর্থাৎ $AM = MG$

আবার, APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle DGS$ = বিপ্রতীপ $\angle AGO = \angle AMP$

$\angle SDG = \angle MAP$ $[\because SD \parallel AE]$

এবং $SD = \frac{1}{2} AO = AP$

$\therefore$ APM ও DGS ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$\therefore AM = GD$

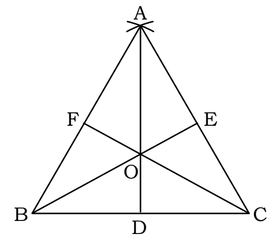
অর্থাৎ $AM = MG = GD$

$\therefore GD = \frac{1}{3} AD$, অর্থাৎ $GD = \frac{1}{2} GA$

যেহেতু AD একটি মধ্যমা এবং G বিন্দু AD মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ G বিন্দুটি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

গ.



প্রমাণ : ΔBOF ও ΔCOE এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ $[\because CF \perp AB, BE \perp AC]$

এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{CO} = \frac{OF}{OE}$

বা, $BO.OE = CO.OF$ .... (i)

আবার, ΔBOD ও ΔAOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ $[\because AD \perp BC, BE \perp AC]$

এবং $\angle BOD = \angle AOE$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{OE}$

বা, $AO.OD = BO.OE$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$AO.OD = BO.OE = CO.OF$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৮ ▸ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় ও বাহুগুলোর মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ক একটি উপপাদ্য রয়েছে। উপপাদ্যটি টলেমির উপপাদ্য নামে পরিচিত।

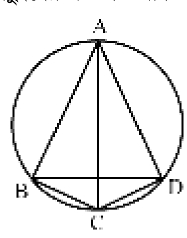
ক. টলেমির উপপাদ্যটি বর্ণনা কর। ২

খ. উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণ কর। ৪

গ. AB ব্যাসের উপর অর্ধবৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

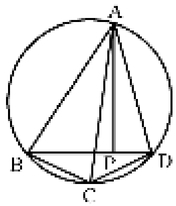
ক. **টলেমির উপপাদ্য :** কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ হলে টলেমির উপপাদ্য অনুসারে,

$AC. BD = AB.CD + BC.AD$

খ.



বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD

অঙ্কন : A বিন্দুতে DA রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কনানুসারে]

প্রত্যেকের সাথে $\angle PAC$ যোগ করলে

$\angle BAC + \angle PAC = \angle PAD + \angle PAC$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABP$ এবং ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$

[যেহেতু সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

অর্থাৎ AC.BP = AB.CD .... (i)

আবার, $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [যেহেতু একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলো সমান]

$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔAPD সদৃশকোণী

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$ [সদৃশকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক]

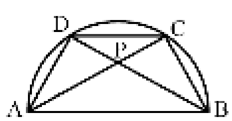
অর্থাৎ AC . PD = AD.BC .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

AB.CD + BC.AD = AC.BP + AC.PD = AC(BP + PD) = AC.BD

অর্থাৎ AC.BD = AB.CD + BC.AD (**প্রমাণিত**)

গ.



অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB–এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC এর উপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$

বা, AP.CP = BP.DP

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$

[উভয় পৰে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP.(AP + CP) = BP.DP + AD^2 + DP^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90^\circ$

$\because AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP(BP+DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

[$\angle ADB = 90^\circ$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 - BD(BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore AB^2 = AC.AP + BD.BP$ (**প্রমাণিত**)

প্রশ্ন–৯ ▸ সূক্ষ্মকোণী ΔABC এর A, B, C শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় পদে ত্রিভুজ DEF উৎপন্ন হয়েছে।

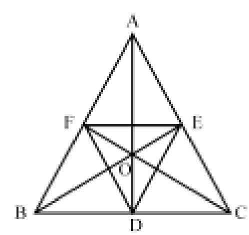
ক. বর্ণনা অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন করে পাদ ত্রিভুজ চিহ্নিত কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF পাদ ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক। ৪

গ. দেখাও যে, পাদত্রিভুজ অঙ্কনের ফলে উৎপন্ন ত্রিভুজগুলো মূল ত্রিভুজের সদৃশ। ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABC–এ AD, BE ও CF যথাক্রমে শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব। D ও E, E ও F এবং F ও D যোগ করায় ΔDEF উৎপন্ন হলো। তাহলে, ΔDEF ই ΔABC ত্রিভুজের পাদ ত্রিভুজ।

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE ও CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ এবং $\angle EFD$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : OECD চতুর্ভুজে $\angle ODC$ + উহার বিপরীত $\angle OEC$ = 2 সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C, E বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OE চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODE = \angle OCE$

আবার, OFBD চতুর্ভুজ $\angle ODB$ + উহার বিপরীত $\angle OFB$ = 2 সমকোণ। কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B, F বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত $\angle ODF = \angle OBF$

ΔABE ও ΔACF থেকে, $\angle OBF$ ও $\angle OCE$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক কোণ।

$\therefore \angle OCE = \angle OBF$

$\therefore \angle ODE = \angle OCE = \angle OBF = \angle ODF$

$\therefore$ AD রেখাংশ $\angle FDE$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিণ্ডক।

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta AEF, \Delta BDF, \Delta CDE$ মূল ΔABC এর সদৃশ।

প্রমাণ : O, D, C, E সমবৃত্ত।

[$\because \angle ODC + \angle OEC = 90° + 90° = 180°$]

$\therefore \angle ODE = \angle OCE$ [একই চাপস্থিত কোণ]

$\therefore \angle EDC = 90° - \angle ODE = 90° - \angle OCE = 90° - \angle FCA$

$= \angle BAC$

[$\because \angle AFC = 90°, \therefore \angle BAC + \angle FCA = 90°$

অর্থাৎ, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$]

আবার, ΔACF-এ $\angle AFC = 90°$ বলে,

$\angle ACF + \angle FAC + 90° = 180°$

বা, $\angle FCA + \angle FAC = 90°$

বা, $\angle FAC = 90° - \angle FCA$

বা, $\angle BAC = 90° - \angle FCA$

$\therefore \angle EDC = \angle BAC$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$\angle DEC = \angle BAC$

এখন, ΔABC ও ΔCDE–এ

$\angle EDC = \angle BAC$ এবং

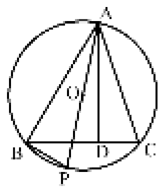
$\angle DEC = \angle ABC$

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, ΔBDF ও ΔAEF ত্রিভুজদ্বয় ও ΔABC–এর সদৃশ।

$\therefore \Delta AEF, \Delta BDF, \Delta CDE$ ও ΔABC পরস্পর সদৃশ। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০ ▸



ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. উপপাদ্যটি প্রমাণ কর। ৪

গ. চিত্র হতে দেখাও যে, AD.BC = AB.DC + BP.AC ৪

▸◂ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. **ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য :** বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদবিন্দু হতে কোনো বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

খ. **অঙ্কন :** B, P যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ AB এর জন্য $\angle ADB$ ও $\angle ACB$ বা, $\angle ACB$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ।

AP বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle APB$ অর্ধঃবৃত্তস্থ কোণ এবং BC বাহুর উপর AD লম্ব হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ।

এখন ΔAPB ও ADC এর মধ্যে $\angle APB = \angle ACD$

[একই বৃত্তাংস্থিত কোণ সমান]

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC$

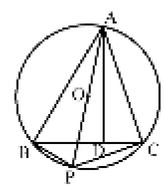
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore \Delta ABP$ ও ΔADC সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AP}{AC}$

সুতরাং AB.AC = AP.BD

গ.



মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABPC চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও PC এবং BP ও AC। AP এবং BC চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AP.BC = AB.PC + BP.AC

অঙ্কন : $\angle BAP$ কে $\angle CAP$ এর ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AC রেখাংশের সাথে $\angle BAP$ এর সমান করে $\angle CAD$ আঁকি যেন AD রেখা BC কর্ণকে D বিন্দুতে ছেদ করে। P, C যোগ করি।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $\angle BAP = \angle CAD$

উভয়পক্ষে $\angle PAD$ যোগ করে পাই,

$\angle BAP + \angle PAD = \angle CAD + \angle PAD$

অর্থাৎ $\angle BAD = \angle PAC$

এখন ΔABD ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle ACD = \angle APC$

$\angle ABC = \angle APC$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACP$

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAPC সদৃশকোণী

$\therefore \dfrac{BD}{PC} = \dfrac{AB}{AP}$

অর্থাৎ AP.BD = AB.PC .... (i)

আবার, ΔABP ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle DAC$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ACD = \angle APB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং ΔABP ও ΔADC সদৃশকোণী।

$\therefore \dfrac{AC}{AP} = \dfrac{DC}{BP}$

অর্থাৎ AP.DC = BP.AC .... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

AP.BD + AP.DC = AB.PC + BP.AC

বা, AP(BD + DC) = AB.PC + BP.AC

বা, AP.BC = AB.PC + BP.AC [যেহেতু BD + DC = BC]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১১ ▸ ΔABC এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

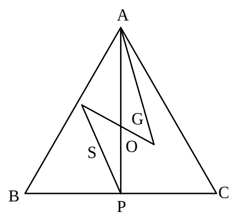
ক. ΔABC অঙ্কন কর এবং OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্কটি লেখ। ২

খ. ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র G হলে দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. ΔABC এর ∠C সমকোণ হলে এবং C থেকে অতিভুজের উপর লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD \cdot BD$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক.

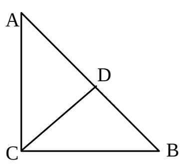


ΔABC–এর S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু এবং AP এর মধ্যমা।

OA ও SP এর মধ্যে সম্পর্কটি হলো: OA = 2SP **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ৩·২ এর উপপাদ্য–৩·১০, পৃষ্ঠা–৭২ দ্রষ্টব্য।

গ.



দেওয়া আছে ΔABC–এর ∠C = 90°। CD, AB এর ওপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.BD$

প্রমাণ : ΔABC-এ ∠C = 90°

∴ ∠ACD + ∠BCD = 90° ....(i)

আবার, ΔADC-এ ∠ADC = 90° [∵ CD ⊥ AB]

∴ ∠CAD + ∠ACD = 90° ....(ii)

[∵ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

∠ACD + ∠BCD = ∠CAD + ∠ACD

∴ ∠BCD = ∠CAD

এখন, ΔADC ও ΔBDC –এ

∠ADC = ∠BDC = 90°

∠CAD = ∠BCD

এবং অবশিষ্ট ∠ACD = অবশিষ্ট ∠CBD

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$$

অর্থাৎ, $CD^2 = AD.BD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸ AB = 6 cm ব্যাস বিশিষ্ট অর্ধ বৃত্তের দুটি জ্যা AC ও BD বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. অর্ধবৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AE. EC = BE.ED ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AE + BD.BE$ ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বৃত্তের ব্যাস, d = 6cm

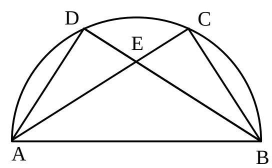
ব্যাসার্ধ, r = 3cm

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$$\therefore \text{অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল} = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 1416 \times 3^2}{2} = 14 \cdot 14 \text{cm}^2 \textbf{ (Ans.)}$$

খ.



এখানে, ABCD একটি অর্ধবৃত্ত এবং AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

AE.EC = BE.ED

অঙ্কন : A, D এবং B , C যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBCE এর মধ্যে

∠AED = ∠BEC [বিপ্রতীপ কোণ]

∠ADE = ∠BCE [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

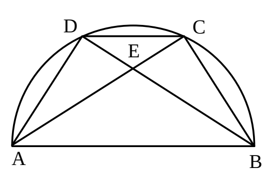
∠DAE = ∠CBE [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

∴ΔADE ও ΔBCE সদৃশ।

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DE}{ED}$$

∴ AE. EC = BE. ED **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB^2 = AC. AE + BD. BE

অঙ্কন : C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCED এ ΔAEB এ

∠EDC = ∠EAB [একই চাপ BC -এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DEC = \angle AEB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE}$$

বা, $AE. CE = BE. DE$

বা, $AE. CE + AE^2 = BE. DE + AE^2$ [উভয়পক্ষে AE^2 যোগ করে]

বা, $AE (CE + AE) = BE.DE + DE^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADE = \angle ADB = 90°$

$\therefore AE^2 = AD^2 + DE^2$]

বা, $AE\ AC = DE (BE + DE) + AD^2$

বা, $AE.AC = DE.BD + AB^2 – BD^2$

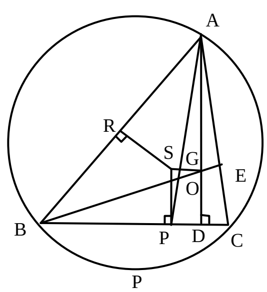
[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ বা, $AD^2 = AB^2 – BD^2$]

বা, $AE.AC = AB^2 – BD(BD – DE)$

বা, $AE.AC = AB^2 – BD. BE$

$\therefore AB^2 = AE.AC + BD. BE$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৩ ▸



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c.

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BP^2 + AP^2)$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্বে OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.

$\therefore OA = 2SP$ .... (i)

ইহাই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ. চিত্রানুসারে ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। AP একটি মধ্যমা। S, O যোগ করি। মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

'ক' থেকে প্রাপ্ত (i) নং সমীকরণ থেকে $OA = 2SP$

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG =$ অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ [(i) নং দ্বারা]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{I}$

$\therefore AG : GP = 2 : 1$

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

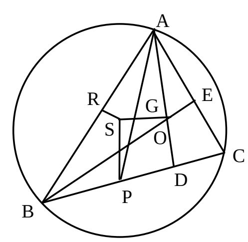
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ S , G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(দেখানো হলো)**

গ. অনু. ৩.১ এর উপপাদ্য ৩.৫ (এ্যাপোলিনিয়াসের উপপাদ্য) দেখ।

বি. দ্র. পাঠ্য বইয়ের D ও E স্থলে P ও D হবে।

প্রশ্ন–১৪ ▸



উপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c[ইস্পাহানী পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, কুমিলরা সেনানিবাস]

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। ৪

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে a.CD = b. CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১(ক) সমাধান দেখ।

খ. অতিরিক্ত সৃজনশীল ১১ (খ) সমাধান দেখ।

গ. আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গৰেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেৰা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিৰেপের অন্তর্গত আয়তৰেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

এখন, $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।

[$\because \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]

এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিৰেপ বলে।

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$ .... (i)

আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিৰেপ।

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.\ CE$

বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$ [উভয় পৰকে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]

বা, $BC.CD = AC.CE$ [উভয় পৰকে (-2) দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ a. CD = b. CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

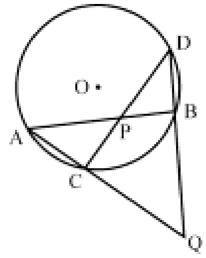
প্রশ্ন–১৫ ▸ 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের কেন্দ্র C। C থেকে 10 সে.মি. দূরে একটি দণ্ডায়মান খুঁটির পাদবিন্দু T।

ক. তথ্যানুযায়ী জ্যামিতিক চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. দণ্ডায়মান পাদবিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁক এবং দেখাও যে, খুঁটিটির পাদবিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দু দুইটি সমান দূরত্বে অবস্থিত। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত বৃত্তের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহু বিবেচনায় এনে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকগুলো যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে প্রমাণ কর যে, তা নতুন একটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে। ৪

প্রশ্ন–১৬ ▸



চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে এবং AC ও BD জ্যা বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু Q এ ছেদ করে।

ক. নববিন্দু বৃত্ত কাকে বলে? ২

খ. চিত্রে AB ও CD জ্যা–এর ৰেত্রে প্রমাণ করে যে, AP.PB = CP.PD ৪

গ. চিত্রে AC ও BD জ্যা–এর ৰেত্রে প্রমাণ কর যে, AQ.CQ = BQ.DQ ৪

প্রশ্ন–১৭ ▸ O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACDB বৃত্তের P বহিঃস্থ একটি বিন্দু হলে, AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের বাইরে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. সংৰিপ্ত বিবরণসহ তথ্যটি জ্যামিতিক চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AP ও PB এর অন্তর্গত আয়তৰেত্র এবং CP ও PD এর অন্তর্গত আয়তৰেত্রের পরস্পর সমান। ৪

গ. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত একটি রেখাংশ বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করলে এবং বৃত্তের একটি ব্যাস RS এর উপর PM লম্ব হলে, $PM^2 = PC.PD + AM.\ MB$ ৪

প্রশ্ন–১৮ ▸ ΔABC–এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলো।

ক. G বিন্দুকে ΔABC এর কী বলা হয়? প্রদত্ত তথ্য অবলম্বনে চিত্র অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AG = 2GD ৪

গ. ABC সমবাহু ত্রিভুজ এবং ইহার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3·0 সে.মি. হলে ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : খ. উপপাদ্য ৩.১ এর অনুরূপ; **গ.** অনুশীলনী–৩.২ এর ১১নং দ্রষ্টব্য।

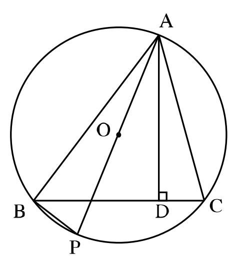
প্রশ্ন–১৯ ▸ ABC ত্রিভুজে শীর্ষ তিনটি থেকে বিপরীত বাহুর ওপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্বত্রয় টানা হলো।

ক. লম্বত্রয় কয়টি বিন্দুতে ছেদ করবে এবং বিন্দুটির নাম কী? অঙ্কন করে দেখাও। ২

খ. দেখাও যে, *BC.CD = AC.CE* ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$ ৪

প্রশ্ন–২০ ▸ ABC ত্রিভুজে AP হলো ত্রিভুজে পরিবৃত্তের একটি ব্যাস এবং AD ⊥ BC.



ক. ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যটি বিবৃত কর। ২

খ. উপপাদ্যটি চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, AP.BC = AB.CP + AC.BP ৪

প্রশ্ন–২১ ▸ একটি বৃত্তের PQRS অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। PR এবং QS এর দুইটি কর্ণ এবং ∠QPR = ∠SPT

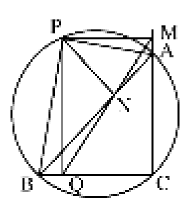
যেখানে PT রেখাংশ QS কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. বর্ণনা মতে চিত্রটি অঙ্কন কর। ২

খ. দেখাও যে, PR.QS – QR.PS = PQ.RS. ৪

গ. বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁক যা বর্ধিত QS-কে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং প্রমাণ কর যে,
$AP^2 = AQ.AS$ ৪

প্রশ্ন–২২ ▸ ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু থেকে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN লম্ব এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব। BC = 8 সে. মি., PA = 5 সে. মি. ও PQ = 7 সে. মি.।



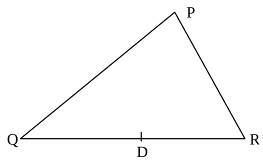
ক. PA ∥ BC হলে, APBC এর ৰেত্রফল কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, Q, M, N সমরেখ। ৪

গ. ΔABC সমবাহু এবং এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২৩ ▸



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।

ক. লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2\,(PD^2 + QD^2)$ ৪

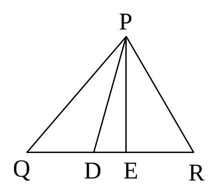
গ. $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ ৪

▸◂ ২৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. **লম্ববিন্দু :** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে লম্ববিন্দু বলা হয়।

ভরকেন্দ্র : ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

খ.



ΔPQR–এ D, QR–এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

অঙ্কন : QR বাহুর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔPQD এর $\angle PDQ$ স্থূলকোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD রেখার লম্ব অভিৰেপ DE। স্থূলকোণের ৰেত্রে, পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ .... (i)

এখানে, ΔPRD এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার ওপর PD রেখার লম্ব অভিৰেপ DE

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ৰেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + RD^2 - 2RD.DE$

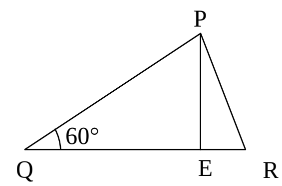
$= 2PD^2 + QD^2 + RD^2 + 2QD.DE - 2RD.DE$

$= 2PD^2 + QD^2 + QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE$ $[\therefore QD = RD]$

$= 2PD^2 + 2QD^2$

$= 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ.



দেওয়া আছে, ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$

অঙ্কন : $PE \perp QR$ টানি।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গৰেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গৰেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেৰা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিৰেপের অন্তর্গত আয়তৰেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

$\therefore$ ΔPQR এর $\angle Q = 60°$, অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং তাহলে QE, QR এর ওপর PQ এর ওপর অভিৰেপ।

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2QR.QE$ .... (i)

সমকোণী ΔPQE-এ লম্ব PE, ভূমি QE এবং অতিভুজ PQ

$\therefore \cos \angle PQD = \dfrac{QE}{PQ}$ $\left[\because \cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right]$

বা, $\cos 60° = \dfrac{QE}{PQ}$ $[\because \angle PQE = 60°]$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{QE}{PQ}$

$\because QE = \dfrac{1}{2}\,.\,PQ$

এখন, (i)–এ QE এর মান বসিয়ে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ\,.\,\dfrac{1}{2}\,QR.$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ\,.\,QR$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৪ ▸ ΔABC–এর $\angle A = 1$ সমকোণ এবং $AB = AC$

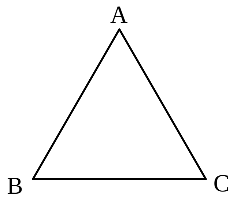
ক. ত্রিভুজটি আঁক। AB ও AC বাহুর বিপরীত কোণ নির্দেশ কর। ২

খ. BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ ৪

গ. A হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব AD হলে, প্রমাণ কর যে, $AD^2 = BD.CD$ ৪

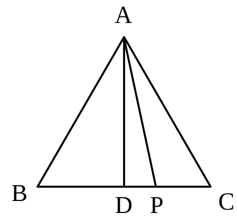
▸◂ ২৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



AB বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ACB$ ও AC বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ABC$

খ.



মনে করি, ΔABC–এ $AB = AC$। BC এর উপর যেকোনো বিন্দু P নিই।

A হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর ছেদবিন্দু হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ΔABC–এ $AB = AC$ এবং $AD \perp BC$

$\therefore BD = CD$

ABD সমকোণী ত্রিভুজে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

আবার, APD সমকোণী ত্রিভুজে

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য]

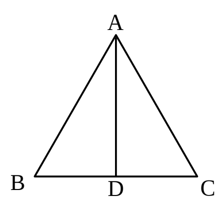
$\therefore AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

$= BD^2 - PD^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

$= BP . PC$

$\therefore AB^2 - AP^2 = BP . PC$ **(প্রমাণিত)**

গ.



ΔABC–এ $\angle A = 90°$. AD, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = BD.CD$

প্রমাণ : $\angle A = 90°$

$\therefore \angle ABD + \angle ACD = 90°$ .... (i)

আবার, ΔADC–এ $\angle ADC = 90°$ [$\because AD \perp BC$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ .... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই

$\angle ABD + \angle ACD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle ABD = \angle CAD$

এখন, ΔABD ও ΔACD–এ

$\angle ADB = \angle ADC = 90°$

$\angle ABD = \angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle ACD$ হবে

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ

$\therefore \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$

বা, $AD^2 = BD.CD$

$\therefore AD^2 = BD.CD$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৫ ▸ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD।

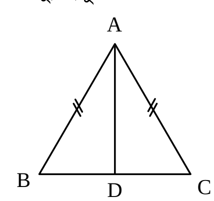
ক. AD কে ত্রিভুজের মধ্যমা বলা যাবে কি? ২

খ. BC এর উপরস্থ P যেকোনো বিন্দু হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP . PC$ ৪

গ. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে দেখাও যে, $AB^2 = 2R . AD$ ৪

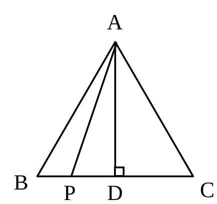
▸◂ ২৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. যেহেতু ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $AB = AC$।



আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে সতুরাং $BD = CD = \frac{1}{2} BC$ অর্থাৎ D, BC এর মধ্যবিন্দু। অতএব AD রেখা অবশ্যই ত্রিভুজের মধ্যমা হবে।

খ. মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। A, P যোগ করি। দেখাতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$



অঙ্কন : A হতে ভূমি BC–এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ : APD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AP^2 = AD^2 + PD^2$ .... (i) [পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী]

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$

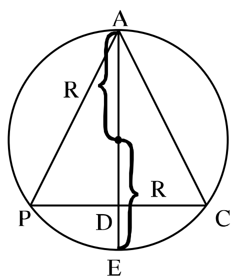
বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$

বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$

বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD)\cdot BP$ [$\because$ BD = CD]

বা, $AB^2 - AP^2 = BP\cdot PC$ [$\because$ CD = BD সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে] **(প্রমাণিত)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : ধরি, সমদ্বিবাহু ΔABC–এ AB = AC। A থেকে BC–এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AD$।

অঙ্কন : AD–কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADC ও ΔACE–এ

$\angle ADC = \angle ACE$ [$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AD, BC এর উপর লম্ব বলে $\angle ADC = 90°$]

$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$ [$\therefore$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE.AD$

বা, $AB^2 = AE.AD$ .... (i) [$\because$ AB = AC]

সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD ও ΔACD এর মধ্যে

অতিভুজ AB = AC [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore$ BD = CD

অর্থাৎ $AD \perp BC$ এবং AD, BC এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ AD, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE, ΔABC–এর পরিব্যাস

AE = 2R [$\because$ R, ΔABC–এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ, $AB^2 = 2R . AD$ **(দেখানো হলো)**