নবম অধ্যায়

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

অনুশীলনী ৯.১

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

বাস্তব সংখ্যা : সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মূলদ সংখ্যা : p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়।

অমূলদ সংখ্যা : যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকার প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ সে সংখ্যাক অমূলদ সংখ্যা বলে।

পূর্ণসংখ্যা : শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়। পূর্ণসংখ্যার সেটকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যা : 1, 2, 3, 4 .... ইত্যাদি সাধারণত গণনামূলক সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যাকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলা হয়।

স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সূচকীয় রাশি : সূচক ও ভিত্তি সম্বলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

সূচক সম্পর্কিত সূত্র (Laws of Exponent) :

সূত্র ১ : $a \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n.a$

সূত্র ২ : $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

সূত্র ৩ : $a \in R, a \neq 0$ এবং $m, n \in N, m \neq n$ হলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ যখন } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} \text{ যখন } m < n \end{cases}$$

সূত্র ৪ : $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

সূত্র ৫ : $a, b \in R$ এবং $n \in N$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$

সূত্র ৬ : $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ হলে,

(ক) $a^m.a^n = a^{m+n}$

(খ) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(গ) $(a^m)^n = a^{mn}$

(ঘ) $(ab)^n = a^n.b^n$

(ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

সূত্র ৭ : $a < 0$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$, n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

সূত্র ৮ : $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

সূত্র ৯ : যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in Z$ এবং $n, q \in N, n > 1, q > 1$ তবে, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $a > 0$ এবং $n, k \in N, n > 1$ হয়, তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা : $a \in R$ এবং $n \in N, n > 1$ হলে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং বিজোড়।

সংজ্ঞা : $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in \mathbf{N}, n > 1$ হলে (৬) $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}$

সংজ্ঞা : $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ যেখানে, $a > 0, m \in Z, n \in \mathbf{N}, n > 1$

সুতরাং $p \in Z$, $q \in Z$, $n > 1$ যদি এমন হয় যে, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, তবে সূত্র–৯ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

সূত্র ১০ : $a > 0, b > 0$ এবং $r, s \in Q$ হলে,

(ক) $a^r.a^s = a^{r+s}$ (খ) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (গ) $(a^r)^s = a^{rs}$

(ঘ) $(ab)^r = a^rb^r$ (ঙ) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য :

(i) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$, এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = 0$

(ii) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = 1$

(iii) যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = y$

(iv) যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\frac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = b$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$; যেখানে $m, p \in Z$ এবং $n \in N$

সমাধান : $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}^p$ $\quad \left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp}$ $\quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{\frac{mp}{n}}$

$\therefore \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = = a^{\frac{mp}{n}}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$, যেখানে $m, n \in N, m \neq 0, n \neq 0$

সমাধান : মনে করি, $\frac{1}{m} = x$ এবং $\frac{1}{n} = y$

$\therefore mx = 1 \quad \therefore ny = 1$

এখন, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = (a^x)^y$

$= a^{xy}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{\frac{mxny}{mn}} = a^{\frac{1\cdot 1}{mn}}$ [মান বসিয়ে]

$= a^{\frac{1}{mn}}$

সুতরাং $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$; যেখানে $m \in Z, n \in N$

সমাধান : মনে করি, $\frac{m}{n} = x$

এখন, বামপৰ $= (ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^x$ $\quad [\because \frac{m}{n} = x]$

$= a^x.b^x$

$= a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}} =$ ডানপৰ

$\therefore (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ দেখাও যে,

ক. $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b$

সমাধান :

বামপৰ $= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}} = a - b =$ ডানপৰ

$\therefore \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b$ (দেখানো হলো)

খ. $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)$

সমাধান : বামপৰ $= \dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \dfrac{a^3 + 2 + a^{-3} - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1}$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2.a^{\frac{3}{2}}.a^{\frac{-3}{2}} + \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1}$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 1\right)}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1\right)}$

$= a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1 =$ ডানপৰ

$\therefore \dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ সরল কর :

ক. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

সমাধান : $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}}\right\}^{\frac{a}{a+b}} = \left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a+b \times \frac{a}{a+b}}\right\}$

$= x^{\frac{1}{a} \times a} = x^1 = x$ **(Ans.)**

খ. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

সমাধান : $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b} = \dfrac{a.a^{\frac{1}{2}} + ab}{b(a - b^2)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a(a^{\frac{1}{2}} + b)}{b(a - b^2)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a(\sqrt{a} + b)}{b\{(\sqrt{a})^2 - b^2\}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a(\sqrt{a} + b)}{b(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a}{b(\sqrt{a} - b)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{a} - b\sqrt{a}}{b(\sqrt{a} - b)}$

$= \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - b)}{b(\sqrt{a} - b)} = \dfrac{\sqrt{a}}{b}$ **(Ans.)**

গ. $$\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

সমাধান : $$\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{1} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{1}$$

$$= \frac{a+b}{b} \times \frac{a-b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab} \textbf{ (Ans.)}$$

ঘ. $$\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p} + \frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m} + \frac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$$

সমাধান :

$$\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p} + \frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m} + \frac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{b^n}{a^m}+\frac{c^p}{a^m}} + \frac{1}{1+\frac{c^p}{b^n}+\frac{a^m}{b^n}} + \frac{1}{1+\frac{a^m}{c^p}+\frac{b^n}{c^p}}$$

$$= \frac{1}{\frac{a^m+b^n+c^p}{a^m}} + \frac{1}{\frac{b^n+c^p+a^m}{b^n}} + \frac{1}{\frac{c^p+a^m+b^n}{c^p}}$$

$$= \left(1 \times \frac{a^m}{a^m+b^p+c^p}\right) + \left(1 \times \frac{b^n}{a^m+b^n+c^p}\right) + \left(1 \times \frac{c^p}{a^m+b^n+c^p}\right)$$

$$= \frac{a^m}{a^m+b^n+c^p} + \frac{b^n}{a^m+b^n+c^p} + \frac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$$

$$= \frac{a^m+b^n+c^p}{a^m+b^n+c^p} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

ঙ. $$\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$$

সমাধান : $$\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{b}{c}\times\frac{1}{bc}}}{x^{\frac{c}{b}\times\frac{1}{bc}}} \times \frac{x^{\frac{c}{a}\times\frac{1}{ca}}}{x^{\frac{a}{c}\times\frac{1}{ca}}} \times \frac{x^{\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}}}{x^{\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}} = 1 \textbf{ (Ans.)}$$

চ. $$\frac{(a^2-b^{-2})^a\,(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b\,(b+a^{-1})^{a-b}}$$

সমাধান : $$\frac{(a^2-b^{-2})^a\,(b-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b\,(b+a^{-1})^{a-b}}$$

$$= \frac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^b \left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\left\{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right)\right\}^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\right\}^b \left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^b \left(b-\frac{1}{a}\right)^b \left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a+a}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b \left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b+b}}$$

$$= \frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a \left(a-\frac{1}{b}\right)^b}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b \left(b+\frac{1}{a}\right)^a} = \frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^a \left(\frac{ab-1}{b}\right)^b}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^b \left(\frac{ab+1}{a}\right)^a}$$

$$= \left(\frac{ab+1}{b} \times \frac{a}{ab+1}\right)^a \times \left(\frac{ab-1}{b} \times \frac{a}{ab-1}\right)^b$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^a \times \left(\frac{a}{b}\right)^b = \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b} \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ দেখাও যে,

ক. যদি $x = a^{q+r}b^p$, $y = a^{r+p}b^q$, $z = a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q} = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = a^{q+r}b^p$

$y = a^{r+p}b^q$

$z = a^{p+q}b^r$

বামপৰ $= x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q}$

$= (a^{q+r}.b^p)^{q-r}.(a^{r+p}.b^q)^{r-p}.(a^{p+q}.b^r)^{p-q}$

$= a^{(q+r)(q-r)}b^{pq-pr}.a^{(r+p)(r-p)}.b^{qr-pq}.a^{(p+q)(p-q)}.b^{pr-qr}$

$= a^{q^2-r^2}.a^{r^2-p^2}.a^{p^2-q^2}.b^{pq-pr}.b^{qr-pq}.b^{pr-qr}$

$= a^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.b^{pq-pr+qr-pq+pr-qr}$

$= a^0b^0 = 1.1 = 1 =$ ডানপৰ

$\therefore x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q} = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ. যদি $a^p = b$, $b^q = c$ এবং $c^r = a$ হয়, তবে $pqr = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a^p = b$, $b^q = c$ এবং $c^r = a$

এখানে, $a^p = b$

বা, $(c^r)^p = b$

বা, $c^{pr} = b$

বা, $(b^q)^{pr} = b$

বা, $b^{pqr} = b^1$

$\therefore pqr = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ. যদি $a^x = p$, $a^y = q$ এবং $a^2 = (p^yq^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a^x = p$, $a^y = q$ এবং $a^2 = (p^yq^x)^z$

এখানে, $a^2 = (p^y q^x)^z$

বা, $a^2 = \{(a^x)^y (a^y)^x\}^z$

বা, $a^2 = (a^{xy}.a^{xy})^z$

বা, $a^2 = a^{2xyz}$

বা, $2 = 2xyz$

$\therefore xyz = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ ক. যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} = -z\sqrt[3]{c}$

বা, $\left(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(-z\sqrt[3]{c}\right)^3$ [উভয়পৰকে ঘন করে]

বা, $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(y\sqrt[3]{b}\right)^3 + 3.x\sqrt[3]{a}.y\sqrt[3]{b}\left(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}\right) = -z^3c$

বা, $x^3a + y^3b + 3xy\sqrt[3]{ab}\left(-z\sqrt[3]{c}\right) = -z^3c$

বা, $x^3a + y^3b - 3xyz\sqrt[3]{abc} = -z^3c$

বা, $x^3a + y^3b + z^3c = 3xyz\sqrt[3]{abc}$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\sqrt[3]{a.a^2}$ [$\because a^2 = bc$]

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

খ. যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয়পৰকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}x$

বা, $x^3 = 2a + 3x(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = 2a + 3x(c^3)^{\frac{1}{3}}$ [$\because a^2 - b^2 = c^3$]

বা, $x^3 = 2a + 3x.c$

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পৰকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}.a$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3.1.a$

বা, $a^3 = \frac{4 + 1 + 6a}{2}$

বা, $a^3 = 5 + 6a$

$\therefore 2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

ঘ. যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং, $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $(a^2 + 2)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ [উভয়পৰকে ঘন করে]

বা, $(a^2)^3 + 3(a^2)^2 2 + 3.a^2.2^2 + 2^3 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{-\frac{2}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{-\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}\right)$

বা, $a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8 = 3^2 + 3^{-2} + 3^{1+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}(a^2 + 2)$

বা, $a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8 = 9 + \frac{1}{9} + 3(a^2 + 2)$

বা, $a^6 + 6a^4 + 12a^2 + 8 = 9 + \frac{1}{9} + 3a^2 + 6$

বা, $a^6 + 6a^4 + 9a^2 = 7 + \frac{1}{9}$

বা, $(a^3)^2 + 2.a^3.3a + (3a)^2 = \frac{63 + 1}{9}$

বা, $(a^3 + 3a)^2 = \frac{64}{9}$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$ [উভয়পৰকে বর্গমূল করে]

[$\because a \geq 0$ সেহেতু শুধু ধনাত্মক মান নিয়ে]

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

ঙ. যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a^2 = b^3$

বামপৰ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{a^3}{b^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{a^3}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b^2}{b^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ [$\because b^3 = a^2$]

$= (a^{3-2})^{\frac{1}{2}} + (b^{2-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + (b^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ = ডানপৰ

অর্থাৎ $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

চ. যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}.(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3^{\frac{3+2+1}{3}}(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

$\therefore$ $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

[**বি: দ্র:** পাঠ্য বইয়ের প্রশ্নে $3^{-\frac{1}{3}}$ এর স্থলে $3^{\frac{1}{3}}$ হবে]

ছ. যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$$

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$$

$$= \frac{1}{x^b + \frac{1}{x^c} + 1} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^a + \frac{1}{x^b} + 1}$$

[$\because$ $a + b + c = 0$ $\because$ $b + c = -a$]

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b} + 1 + x^b}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c} + x^b + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$$= \frac{x^c + 1 + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = \frac{1 + x^c + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ ক. যদি $a^x = b, b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে xyz = কত ?

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$

এখানে, $c^z = 1$

বা, $(b^y)^z = 1$ [$\because$ $b^y = c$]

বা, $\{(a^x)^y\}^z = 1$ [$\because$ $a^x = b$]

বা, $\{a^{xy}\}^z = 1$

বা, $a^{xyz} = a^\circ$

$\therefore$ $xyz = 0$ **(Ans.)**

খ. যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca$ = কত ?

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x^a = y^b$

$\therefore$ $x = y^{\frac{b}{a}}$

আবার, $z^c = y^b$

$\therefore$ $z = y^{\frac{b}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $y^{\frac{b}{a}}.y.\ y^{\frac{b}{c}} = 1$

বা, $y^{\frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c}} = 1$

বা, $y^{\frac{bc + ac + ab}{ac}} = y^\circ$

বা, $\frac{bc + ac + ab}{ac} = 0$

$\therefore$ $bc + ac + ab = 0$ **(Ans.)**

গ. যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তা হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

সমাধান :

দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore$ $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ সমাধান কর :

(ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

সমাধান :

$3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x+2} + 3^{3x+3} = 36$

বা, $3^{2x}.3^2 + 3^{3x}.3^3 - 36 = 0$

বা, $(3^x)^2.3^2 + (3^x)^3.3^3 - 36 = 0$

বা, $a^2.9 + a^3.27 - 36 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $27a^3 + 9a^2 - 36 = 0$

বা, $9(3a^3 + a^2 - 4) = 0$

বা, $3a^3 - 3 + a^2 - 1 = 0$

বা, $3(a^3 - 1) + a^2 - 1 = 0$

বা, $3(a-1)(a^2 + a + 1) + (a-1)(a+1) = 0$

বা, $(a-1)(3a^2 + 3a + 3 + a + 1) = 0$

বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$

হয়, $a - 1 = 0$ অথবা, $3a^2 + 4a + 4 = 0$

বা, $a = 1$ $\therefore$ $a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.3.4}}{2.3}$

বা, $3^x = 3^0$ [মান বসিয়ে] $= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 48}}{6}$

$\therefore$ $x = 0$ $= \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6}$

এখানে $\sqrt{-32}$ অবাস্তব। সুতরাং এটি গ্রহণযোগ্য নয়।

নির্ণেয় সমাধান $x = 0$

(খ) $5^x + 3^y = 8$

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

সমাধান : $5^x + 3^y = 8$........... (i)

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$....... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$5^x.5^{-1} + 3^y.3^{-1} = 2$

বা, $\frac{5^x}{5} + \frac{3^y}{3} = 2$

বা, $\frac{3.5^x + 5.3^y}{15} = 2$

বা, $3.5^x + 5.3^y = 30$ .... (iii)

(iii) × 1 – (i) × 3 হতে পাই,

$2.3^y = 6$

বা, $3^y = 3$

$\therefore y = 1$

y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$5^x + 3^1 = 8$

বা, $5^x = 8 - 3$

বা, $5^x = 5$

$\therefore x = 1$

নির্ণেয় সমাধান : x = 1, y = 1

(গ) $\mathbf{4^{3y-2} = 16^{x+y}; 3^{x+2y} = 9^{2x+1}}$

সমাধান : $4^{3y-2} = 16^{x+y}$............ (i)

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$.......... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$4^{3y-2} = (4^2)^{x+y}$

বা, $4^{3y-2} = 4^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$

বা, $2x - y + 2 = 0$.......... (iii)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$3^{x+2y} = (3^2)^{2x+1}$

বা, $3^{x+2y} = 3^{4x+2}$

বা, $x + 2y = 4x + 2$

বা, $3x - 2y + 2 = 0$ .... (iv)

(iii) × 2 – (iv) × 1 হতে পাই,

$x + 2 = 0$

$\therefore x = -2$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2(-2) - y + 2 = 0$

বা, $-4 - y + 2 = 0$

বা, $y = -2$

$\therefore y = -2$

নির্ণেয় সমাধান : x = – 2, y = – 2

(ঘ) $\mathbf{2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8}$

$\mathbf{2^{x+2}.2^{y+2} = 16}$

সমাধান :

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$ ....(i)

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$........... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

$2^{2x+1+3y+1} = 2^3$

বা, $2x + 3y + 2 = 3$

বা, $2x + 3y = 3-2$

$\therefore 2x + 3y = 1$ .... (iii)

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$2^{x+2+y+2} = 2^4$

বা, $x + y + 4 = 4$

বা, $x + y = 0$

$\therefore y = -x$ .... (iv)

(iv) এর মান (iii) নং–এ বসিয়ে পাই,

$2x + 3(-x) = 1$

বা, $2x - 3x = 1$

বা, $-x = 1$

$\therefore x = -1$

x এর মান (iv) নং–এ বসিয়ে,

$y = -(-1)$

$\therefore y = 1$

নির্ণেয় সমাধান : x = – 1, y = 1

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}}$ **এর মান কত?**

ⓚ $3^{\frac{1}{9}}$ ● $3^{\frac{2}{9}}$ ⓖ $3^{\frac{1}{3}}$ ⓖh 3

ব্যাখ্যা : $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{93}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{9}}$

$= \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^2}} = 3^{\frac{2}{3}.\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{9}}$

২. $\sqrt[15]{\sqrt[x^{10}]{\sqrt[x^8]{x^4}}}$ **এর সরল মান কোনটি?**

ⓚ x^{15} ⓚh $x^{\frac{1}{15}}$ ● x ⓖh 1

৩. $\mathbf{a^l = b, b^m = c, c^n = a}$ **হলে, lmn এর মান কত?**

ⓚ abc ⓚh $\frac{l}{abc}$ ● l ⓖh $-l$

৪. $\mathbf{a^x = b, b^y = c}$ **এবং** $\mathbf{c^z = a}$ **হলে,** $\mathbf{xyz}$ **= কত?**

ⓚ –1 ⓚh 0 ● 1 ⓖh 2

৫. **যদি** $\mathbf{x, y, z \neq 0, p^x = q^y = r^z}$ **হয় তবে, নিচের কোনটি সঠিক?**

● $q = r^{\frac{z}{y}}$ ⓚh $r = q^{\frac{z}{y}}$ ⓖ $q = r^{\frac{y}{z}}$ ⓖh $p = q^{\frac{z}{y}}$

৬. $\mathbf{a > 0, m \in Z, n \in N}$ **এবং** $\mathbf{n > 1}$ **হলে–**

i. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ ii. $\left(\sqrt[a]{n}\right)^m = \left(\sqrt[a]{m}\right)^m$

iii. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[m]{a^n}$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ⓚh ii ⓖ iii ⓖh i, ii ও iii

৭. **শূন্যের সূচক শূন্য হলে তার মান কত?**

ⓚ 0 ⓛ 1 ⓖ অসীম ● অসংজ্ঞায়িত

৮. $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে, যদি এবং কেবল যদি নিচের কোনটি?

ⓚ $a = x$ ⓛ $a = m$ ● $x = m$ ⓜ $x = \pm m$

নিচের তথ্যের আলোকে ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3}$ .... একটি অসীম ধারা।

৯. নিচের কোন শর্তে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে?

ⓚ $|r| < -1$ ● $|r| < 1$ ⓖ $|r| > 1$ ⓜ $|r| > -1$

১০. z-এর কোন মানের জন্য ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় করা যায়?

ⓚ $z < -2$ এবং $z < 0$ ⓛ $z < -2$ এবং $z > 0$

● $z < -2$ এবং $z > 0$ ⓜ $z > -2$ এবং $z < 0$

৯·১ : মূলদ ও অমূলদ সূচক

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১১. সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেট কোনটি? (সহজ)

ⓚ $\mathbb{N}$ ● $\mathbb{R}$ ⓖ $\mathbb{Z}$ ⓜ Q

১২. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট নির্দেশ করে কোনটি? (সহজ)

ⓚ N ⓛ R ⓖ Q ⓜ Z

ব্যাখ্যা : সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N। সকল বাস্তব সংখ্যার সেট R। সকল মূলদ সংখ্যার সেট, Q।

১৩. $(\sqrt{3})^7$ সূচকীয় রাশির ভিত্তি কত? (সহজ)

ⓚ 7 ⓛ $\sqrt{7}$ ● 3 ⓜ $\sqrt[7]{3}$

১৪. $a \neq 0$ এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে a^n কী নির্দেশ করে? (মধ্যম)

ⓚ a কে n বার যোগ ⓛ a কে n বার বিয়োগ

● a কে n বার গুণ ⓜ a কে n বার ভাগ

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৫. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ এর ক্ষেত্রে–

i. ভিত্তি $\frac{2}{3}$

ii. মান $\frac{16}{181}$

iii. সূচক 4

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓜ i, ii ও iii

১৬. বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে–

i. $\mathbb{N}$ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

ii. $\mathbb{Q}$ সকল মূলদ সংখ্যার সেট

iii. $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখার সেট

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ● ii ও iii ⓜ ii ও iii

১৭. সেট প্রকাশের রীতি অনুযায়ী–

i. Z হলো পূর্ণ সংখ্যার সেট

ii. R হলো বাস্তব সংখ্যার সেট

iii. Q হলো মূলদ সংখ্যার সেট

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓜ i, ii ও iii

৯·২ : সূচক সম্পর্কিত সূত্র

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৮. a^m প্রতীকটিতে a কে কী বলা হয়? (সহজ)

● ভিত্তি ⓛ সূচক ⓖ শক্তি ⓜ অনুপাত

১৯. সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ R ⓛ Z ⓖ Q ● N

২০. $a \in \mathbb{R}$ হলে, a^1 = কত? (সহজ)

● a ⓛ 0 ⓖ $\frac{1}{a}$ ⓜ a^{-1}

২১. $a \in \mathbb{N}$ এবং $n \in \mathbb{R}$ হলে, a^{n+1} = কত? (সহজ)

ⓚ $a^n + a$ ⓛ $a^n - a$ ● $a^n.a$ ⓜ $\frac{a^n}{a}$

২২. $a \in \mathbb{N}$ এবং $m, n \in \mathrm{IN}$ হলে, $a^m.a^n$ = কত? (সহজ)

● a^{m+n} ⓛ $a^{-(m+n)}$ ⓖ a^{m-n} ⓜ $\frac{a^m}{a^n}$

২৩. কোনটি সূচকের মৌলিক সূত্র? (সহজ)

ⓚ $a^1 = a$ ● $a^{m+n} = a^m.a^n$

ⓖ $a^o = 1$ ⓜ $(ab)^n = a^n.a^n$

২৪. যদি $a, b \in N$ এবং $n \in N$ হয় তবে $(a.b)^n$ = কত? (সহজ)

● $a^n.b^n$ ⓛ $a^n.\frac{1}{b^n}$ ⓖ $a^n + b^n$ ⓜ $a^n - b^n$

২৫. $a \in R$ এবং $m, n \in \mathbf{N}$ হলে, $(a^m)^n$ = কত? (সহজ)

● a^{mn} ⓛ a^{m-n} ⓖ $a^m + a^n$ ⓜ $\left(\frac{a}{m}\right)^n$

২৬. $n \in N, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, x কে a এর nতম মূল বলা হবে যদি– (সহজ)

ⓚ $a^x = n$ হয় ⓛ $n^n = 1$ হয়

● $x^n = n$ হয় ⓜ $a^n = 1$ হয়

২৭. 2 এবং – 2 উভয়ই 16 এর কততম মূল? (সহজ)

ⓚ ৩২ তম মূল ⓛ 16 তম মূল ⓖ 8 তম মূল ● 4 তম মূল

২৮. –27 এর ঘনমূল নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ 9 ⓛ 3 ● – 3 ⓜ –9

২৯. 0 এর nতম মূল কত? (সহজ)

ⓚ n ● 0 ⓖ $-\frac{1}{2}$ ⓜ –1

৩০. প্রত্যেক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল রয়েছে। একে নিচের কোন প্রতীকটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়? (সহজ)

● $\sqrt[n]{a}$ ⓛ $\sqrt[a]{n}$ ⓖ $\sqrt{a^n}$ ⓜ a^n

৩১. a ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং n বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, a এর একটি অনন্য ঋণাত্মক nতম মূল রয়েছে। একে কী প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়? (সহজ)

ⓚ $\sqrt[n]{a}$ ⓛ $\sqrt[a]{n}$ ⓖ $\pm\sqrt[n]{a}$ ● $-\sqrt[n]{a}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩২. a, b > o হলে–

i. $a^x = 1$ এবং $x \neq 0$ হলে $a = 1$

ii. $a^x = a^y$ এবং $a \neq 1$ হলে $x = y$

iii. $a^x = b^x$ এবং $x \neq 0$ হলে $x = a$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii ⓑ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

৩৩. $a^x = b^y = c^z$ **হলে–**

i. $a = b^{\frac{y}{x}}$

ii. $b = c^{\frac{z}{y}}$

iii. $c = b^{\frac{y}{z}}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓐ i ও ii ⓑ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৩৪. i. a^m কে a এর m ঘাত বা শক্তি বলে

ii. a^m কে a ঘাত m পড়া হয়

iii. n একটি বাস্তব সংখ্যা

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓑ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

৩৫. i. সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$

ii. সকল মূলদ সংখ্যার সেট Q

iii. সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট Z

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓐ i ও ii ⓑ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৩৬. $a \in R$ এবং $a \neq 0$ হলে –

i. $a^{-n}. a^n = 1$

ii. $a^0 = 0$

iii. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓐ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়।

উপরের তথ্যের আলোকে ৩৭–৩৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৩৭. a **= কত?** (মধ্যম)

ⓐ a = y ⓑ $a = b^y$ ⓖ $a = b^{\frac{x}{y}}$ ● $a = b^{\frac{y}{x}}$

৩৮. c **= কত?** (মধ্যম)

● $c = b^{\frac{y}{z}}$ ⓑ $c = b^{\frac{z}{y}}$ ⓖ $c = b^{\frac{x}{y}}$ ⓓ $c = b^{yz}$

৩৯. $b^2 = ac$ **হলে** b^2 **= নিচের কোনটি?** (কঠিন)

ⓐ $b^2 = b^{\frac{y}{x}}$ ⓑ $b^2 = b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$ ● $b^2 = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$ ⓓ $b^2 = b^{\frac{xy}{yz}}$

৯·৩ : মূল এর ব্যাখ্যা

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪০. $a > o$ **হলে, নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক যেখানে** $a \in \mathbb{N}$ **?** (মধ্যম)

ⓐ $\sqrt[a]{n} > 0$ ⓑ $\sqrt[a]{n} < 0$ ● $\sqrt[n]{a} > 0$ ⓓ $\sqrt[n]{a} \geq 0$

৪১. $a < o$ **এবং** $n \in \mathbb{N}, n > 1$, **n বিজোড় হলে,** $\sqrt[n]{a}$ **কত ?** (মধ্যম)

● $-\sqrt[n]{|a|}$ ⓑ $\sqrt[n]{|a|}$ ⓖ $\pm\sqrt[n]{|a|}$ ⓓ $\sqrt[n]{a}$

৪২. $a > o$ **এবং** $a \neq 1$ **হলে,** $a^x = a^y$ **হবে যদি ও কেবল যদি–** (মধ্যম)

ⓐ $n \neq y$ হয় ● $x = y$ হয় ⓖ $n > y$ হয় ⓓ $x^y = o$ হয়

৪৩. $a > o, b > o$ **এবং** $x \neq o$ **হলে,** $a^x = b^x$ **হবে যদি ও কেবল যদি–** (মধ্যম)

● a = b হয় ⓑ $a^b = o$ হয় ⓖ $a - b < 0$ হয় ⓓ $a \neq b$ হয়

৪৪. নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓐ $\sqrt{4} = -2$ ● $\sqrt{4} = 2$ ⓖ $\sqrt{27} = -3$ ⓓ $\sqrt{36} = -6$

৪৫. যদি $a > 0$ **এবং** $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ **হয় যেখানে** $m, p \in Z$ **এবং** $n, q \in N, n > 1, q > 1$ **তবে নিচের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

ⓐ $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$ ● $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

ⓖ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[q]{a}\right)^n$ ⓓ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[m]{a}$

৪৬. নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● $5^{\sqrt{3}} = 11.665$ ⓑ $\sqrt{4} = \pm 2$

ⓖ $5^{\sqrt{3}} = 12.089$ ⓓ $\sqrt[3]{27} = -3$

৪৭. $a > o$ **হলে, সকল** $x \in R$ **এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক?** (সহজ)

ⓐ $a^x < o$ ● $a^x > o$ ⓖ $a^x \leq o$ ⓓ $a^x = o$

৪৮. যদি $x < y$ **হয় তাহলে** $a > 1$ **এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)

● $a^x < a^y$ ⓑ $a^x > a^y$ ⓖ $a^x = a^y$ ⓓ $a^{xy} = a^y$

৪৯. যদি $x < y$ **হয়, তাহলে** $o < a < 1$ **এর জন্য নিচের কোনটি সত্য?** (কঠিন)

● $a^x > a^y$ ⓑ $a^x < a^y$ ⓖ $a^x \geq a^y$ ⓓ $a^x \leq a^y$

৫০. যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ **এবং** $abc = 1$ **হয় তাহলে** $x + y + z$ **= কত?** (কঠিন)

ⓐ –3 ⓑ –2 ⓖ 1 ● 0

৫১. $a > 0$ **হলে কোনটি সঠিক?** (সহজ)

● $\sqrt[n]{a} > 0$ ⓑ $\sqrt[n]{a} < 0$ ⓖ $\sqrt[n]{a} \geq 0$ ⓓ $\sqrt[n]{a} \leq 0$

৫২. 3 তম মূলকে কী বলা হয়? (সহজ)

ⓐ বর্গ ⓑ বর্গমূল ● ঘনমূল ⓓ দ্বিঘাত

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫৩. সকল $a \in \mathbb{R}$ **এর জন্য**

i. $a^1 = 0$

ii. $a^1 = a$

iii. $a^n = \overbrace{a.a.a.....a}^{n \text{ সংখ্যক}}$ $[n \in \mathbb{N}, n > 1]$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓐ i ও ii ⓑ i ও iii ● ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

৫৪. i. a এর পরমমান |a|

ii. $a < 0$ হলে, $|a| = -a$

iii. $a < 0$ হলে, $|a| = a$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓑ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ **এবং** $abc = 1$

উপরের তথ্যের আলোকে ৫৫– ৫৭নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫৫. নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● $a = b^{\frac{x}{y}}$ ⓑ $c = k^{\frac{1}{z}}$ ⓖ $a = b^{\frac{y}{x}}$ ⓓ abc = k

৫৬. **abc নিচের কোনটির সমান?** (মধ্যম)

ⓚ $ab = c^2$ ⓚ $k + 3$ ● k^{x+y+z} ⓖ $k^{\frac{1}{x}+y+\frac{2}{z}}$

৫৭. **$x + y + z$ = কত?** (সহজ)

ⓚ 1 ● 0 ⓖ $k^2 + 1$ ⓖ $\frac{1}{k}$

$a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$

উপরের তথ্যের আলোকে ৫৮ ও ৫৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৫৮. **n বিজোড় সংখ্যা হলে মূলটি কেমন হবে?** (সহজ)

ⓚ ধনাত্মক ● ঋণাত্মক ⓖ বর্গমূল ⓖ মূলদ

৫৯. **n জোড় সংখ্যা হলে a এর n তম মূল কয়টি?** (মধ্যম)

● 1 ⓚ 16 ⓖ 26 ⓖ ∞

৯.৪ : মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬০. **যদি $a^b = b^a$ হয় তাহলে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}$ এর মান কত?** (কঠিন)

● $a^{\frac{a}{b}-1}$ ⓚ $b^{\frac{a}{b}-1}$ ⓖ $b^{\frac{a}{b}+1}$ ⓖ 1

৬১. **$a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y q^x)^z$ হলে xyz এর মান কত?** (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓚ $\frac{1}{2}$ ● 1 ⓖ 2

৬২. **$a^{\frac{p}{q}}$ = কত?** (সহজ)

● $\sqrt[q]{a^p}$ ⓚ $\sqrt[q]{\frac{1}{a^2}}$ ⓖ $\sqrt[p]{a^q}$ ⓖ $\sqrt[a]{\frac{1}{a^p}}$

৬৩. **যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয় তবে নিচের কোনটি $\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ এর মান?** (কঠিন)

ⓚ $\frac{2}{z}$ ● $\frac{2}{y}$ ⓖ $\frac{y}{z}$ ⓖ $\frac{z}{x}$

৬৪. **$\sqrt[3]{(a^3b^5)^3}$ = কত?** (সহজ)

ⓚ a^9b^5 ⓚ a^8b^3 ● a^3b^5 ⓖ a^5b^3

ব্যাখ্যা : $\sqrt[3]{(a^3a^5)^3} = \{(a^3b^5)^3\}^{\frac{1}{3}}$

$= \{(a^3)^3 (b^5)^3\}^{\frac{1}{3}}$

$= (a^9b^{15})^{\frac{1}{3}}$

$= a^{9\cdot\frac{1}{3}} . b^{15\cdot\frac{1}{3}}$

$= a^3 \cdot b^5$

৬৫. **যদি $(16)^x = (64)^y$ হলে $\frac{x}{y}$ = কত?** (কঠিন)

ⓚ $\frac{2}{3}$ ⓚ $\frac{4}{3}$ ● $\frac{3}{2}$ ⓖ 0

৬৬. **$(16)^{\frac{1}{x}} = (64)^{\frac{1}{y}}$ হলে $\frac{x}{y}$ = কত?** (কঠিন)

● $\frac{2}{3}$ ⓚ $\frac{4}{3}$ ⓖ $\frac{3}{2}$ ⓖ 0

৬৭. **$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ এবং $a = 3b$ হলে b = কত?** (সহজ)

ⓚ 1 ● $\sqrt{3}$ ⓖ 4 ⓖ 9

৬৮. **$(\sqrt{3})^5$ সূচকীয় রাশির নিধান বা ভিত্তি কত?** (মধ্যম)

ⓚ 5 ⓚ $\sqrt{3}$ ⓖ $\frac{5}{2}$ ● 3

৬৯. **$\{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}$ = কত?** (কঠিন)

ⓚ $\frac{1}{x^3} + 1$ ● $1 - \frac{1}{x^3}$ ⓖ $\frac{1}{1 + x^3}$ ⓖ $\frac{2 - x^3}{1 + x^2}$

৭০. **−8 এর ঘনমূল কত?** (মধ্যম)

● −2 ⓚ −1 ⓖ 2 ⓖ 4

৭১. **$\left(\frac{m}{a^n}\right)^p$ = কত? যেখানে, $m, p \in R$ এবং $n \in N$** (সহজ)

● $a^{\frac{mp}{n}}$ ⓚ $a^{\frac{n}{np}}$ ⓖ $a^{\frac{mp}{a}}$ ⓖ $a^{\frac{m}{n}+p}$

৭২. **$\sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}}$ এর সরলমান কত?** (মধ্যম)

ⓚ a^{12} ⓚ a^4 ● a ⓖ 1

ব্যাখ্যা : $\sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}} = \sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6. a^{\frac{4}{2}}}} = \sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6. a^2}}$

$= \sqrt[12]{a^8\sqrt{a^8}} = \sqrt[12]{a^8.a^4} = \sqrt[12]{a^{12}} = a^{\frac{12}{12}} = a$

৭৩. **$a < o$ এবং $n \in N, n > 1$ এবং বিজোড় হলে $a^{\frac{1}{n}}$ = কত?** (মধ্যম)

● $-|a|^{\frac{1}{n}}$ ⓚ $\sqrt[n]{a}$ ⓖ $-|-a|^{\frac{-1}{n}}$ ⓖ $\sqrt[n]{|a|}$

৭৪. **$9^{2m} = 3^{x+1}$ হলে x = কত?** (মধ্যম)

ⓚ $\frac{2}{3}$ ● $\frac{1}{3}$ ⓖ −3 ⓖ $-\frac{2}{3}$

৭৫. **$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ এর মান নিচের কোনটি** (সহজ)

ⓚ $\frac{a^n}{b}$ ⓚ $\frac{a}{b^x}$ ● $\frac{a^n}{b^n}$ ⓖ 1

৭৬. **$(a^m)^n$ এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

ⓚ a^m ⓚ a^{mn} ⓖ 0 ● 1

৭৭. **$-\sqrt[3]{27}$ এর মান নিচের কোনটি?** (সহজ)

ⓚ 9 ⓚ 3 ● −3 ⓖ −9

৭৮. **যদি $a^b = b^a$ হয় তাহলে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}$ এর মান নিচের কোনটি?** (কঠিন)

ⓚ $\frac{a^a}{b^b}$ ⓚ $\frac{a^{ab}}{b^{\frac{a}{b}}}$ ⓖ $\frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}$ ● $a^{\frac{a}{b}-1}$

৭৯. **$a^b = b^a$ হয়ে তবে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}$ কত?**

● $a^{\frac{a}{b}-1}$ ⓚ $b^{\frac{a}{b}-1}$ ⓖ $a^{\frac{a}{b}+1}$ ⓖ $a^{\frac{b}{a}-1}$

৮০. **$\sqrt[3]{-8}$ এর মান কত?**

ⓚ $\pm\sqrt{8}$ ⓚ $\pm\sqrt[3]{8}$ ● $-\sqrt[3]{8}$ ⓖ $-\sqrt{8^3}$

৮১. **$x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হলে, x এর মান কত?**

ⓚ $\frac{2}{3}$ ⓚ $\frac{3}{2}$ ● $\frac{9}{4}$ ⓖ $\frac{27}{8}$

ব্যাখ্যা : $x^{x^{\sqrt{x}}} = (x\sqrt{x})^x$

বা, $(x^x)^{\sqrt{x}} = \left(x.x^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x$

বা, $(x^x)^{\sqrt{x}} = (x^x)^{\frac{3}{2}}$

বা, $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$

$\therefore x = \frac{9}{4}$

৮২. $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$ **এর মান কোনটি?**

ⓚ $a + b$ ● $a - b$ ⓖ $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$ ⓖh $(a-b)^{\frac{1}{3}}$

ব্যাখ্যা : $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3$

$= a - b$

৮৩. $(a^2b^3)^5$ **এর মান নিচের কোনটি?**

● $a^{10}.b^{15}$ ⓚh $a^{25}b^{125}$ ⓖ $(ab)^{30}$ ⓖh a^3b^2

ব্যাখ্যা : $a, b \in R$ এটি $n \in N$ হলে $(a, b)^n = a^n.b^n$

$\therefore (a^2b^3)^5 = (a^2)^5.(b^3)^5$

$= a^{2\times5}.b^{3\times5}$

$= a^{10}.b^{15}$

৮৪. $\left(\frac{a}{b}\right)^a \times \left(\frac{a}{b}\right)^b$ **= কত?**

ⓚ $\left(\frac{a}{b}\right)^{ab}$ ⓚh $\left(2\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ ⓖ $\frac{a^{a-b}}{b}$ ● $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

ব্যাখ্যা : $\left(\frac{a}{b}\right)^a \times \left(\frac{a}{b}\right)^b$

$= \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৫. i. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$; যেখানে $a > o, n \in N$

ii. $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$; যেখানে $a, b \in R, b > 0$ এবং $n \in N$

iii. $(a^m)^n = \frac{a^m}{a^n}$; যেখানে $a \in R$ এবং $n \in N$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

৮৬. i. 2 তম মূলকে বর্গমূল বলে

ii. –27 এর ঘনমূল 3

iii. 0 এর n তম মূল 0

৯৪. যদি $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x+5}$ **এর মান কত?**

ⓚ 25 ● 5 ⓖ $\frac{5}{7}$ ⓖh $\frac{-5}{4}$

৯৫. $y^{y\sqrt{y}} = (y\sqrt{y})^y$ **হয় হবে y এর মান নিচের কোনটি?**

ⓚ $\frac{3}{2}$ ⓚh $\frac{4}{9}$ ⓖ $\frac{7}{4}$ ● $\frac{9}{4}$

৯৬. $\left(\frac{x}{y}\right)^m \times \left(\frac{x}{y}\right)^n$ **এর মান কোনটি?**

ⓚ $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{m}{n}}$ ● $\left(\frac{x}{y}\right)^{m+n}$

ⓖ $\left(\frac{x}{y}\right)^{m-n}$ ⓖh $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-m}$

৯৭. $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ **হলে, x এর মান কত?**

ⓚ 4 ⓚh $\frac{7}{2}$ ⓖ $\frac{8}{3}$ ● $\frac{9}{4}$

৯৮. $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$; $a > 0, a \neq 3$ **ও** $m \neq 0$ **হলে, x এর মান কত?**

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

৮৭. i. $\sqrt{a^2} = a$ যখন $a > 0$

ii. $\sqrt{a^2} = -a$ যখন $a < 0$

iii. $\sqrt[3]{-8} = \pm 2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii ⓚh i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖh i, ii ও iii

৮৮. i. যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = 0$

ii. যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ $x \neq 0$, তাহলে $a = 1$

iii. যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = y$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚh i ও iii

ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ একটি সূচকীয় সমীকরণ এবং $2^x = y$

উপরের তথ্যের আলোকে ৮৯ – ৯১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৮৯. $y^2 - 12y$ **= কত?** (কঠিন)

● –32 ⓚh –36

ⓖ –48 ⓖh – 52

৯০. y-এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 3, 2 ⓚh 1, 4 ● 4, 8 ⓖh –2, 0

৯১. x = কত? (মধ্যম)

● 2, 3 ⓚh 1, 9 ⓖ 3, 4 ⓖh $-2, -\frac{3}{2}$

$x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$

উপরের তথ্যের আলোকে ৯২ ও ৯৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৯২. $\sqrt{x}$ **এর মান কত?** (মধ্যম)

ⓚ $\frac{2}{3}$ ● $\frac{3}{2}$ ⓖ $-\frac{2}{3}$ ⓖh $\frac{5}{2}$

৯৩. x এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

ⓚ $-\frac{2}{3}$ ⓚh $\frac{3}{2}$ ● $\frac{9}{4}$ ⓖh $\frac{29}{8}$

ⓚ $\frac{m}{2}$ ● $\frac{2}{m}$

ⓖ 2m ⓖh 2^m

৯৯. $(2-x)^{\frac{1}{3}}2$ **হলে x এর মান কত?**

ⓚ 6 ● – 6

ⓖ 0 ⓖh – 7

১০০. প্রত্যেক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a এর একটি অনন্য ধনাত্মক x তম মূল রয়েছে। একে নিচের কোন প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যায়?

● $\sqrt[x]{a}$ ⓚh $\sqrt[a]{x}$

ⓖ $\sqrt{a^x}$ ⓖh a^x

১০১. $a \in R$ **এর** $x \in N$ **হলে** a^{x+1} **= কত?**

ⓚ $a^x + a$ ⓚh $a^x - a$

● $a^x.a$ ⓖh $\frac{a^x}{a}$

১০২. $\sqrt[24]{a^8\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}}$ **এর সরল মান কত?**

ⓚ a^{12} ⓚh $a^{\frac{1}{12}}$

● $\sqrt{a}$ ⓘ 1

১০৩. $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ হলে,

i. $a^{\circ} = 1$

ii. $a^{-n} = a^{\frac{1}{n}}$

iii. $(a^m)^n = a^{mn}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ i ও ii ⓑ ii ও iii

● i ও iii ⓓ i, ii ও iii

১০৪. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হলে, নিচের কোন শর্তে এটি সঠিক?

i. $a \in R. a = 0$

ii. $m, n \in N, m > n$

iii. $a \in R, m, n \in N$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ i ও ii ● ii ও iii

ⓒ i ও iii ⓓ i, ii ও iii

যদি $x^n = a$ হয় তবে

উপরের তথ্যের আলোকে ১০৫ ও ১০৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

১০৫. n = 5 হয় হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ $x = a^5$ ⓑ $x = \sqrt{a}$

● $x = \sqrt[5]{a}$ ⓓ $\sqrt[n]{x} = a$

১০৬. উদ্দীপকটি নিচের কোন শর্তে সঠিক হবে?

ⓐ $a \in R, n \in R$ ● $a \in R, n \in N$

ⓒ $n \in N, n \neq 1$ ⓓ $a \in R, n < 1$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$.

ক. যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

▸◂ ১নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. শর্তমতে, $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$

বা, $p^{p\left(1+\frac{1}{2}\right)} = \left(p^{1+\frac{1}{2}}\right)^p$

বা, $p^{p\frac{3}{2}} = p^{\frac{3}{2}p}$

বা, $p^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}p$

বা, $\frac{p^{\frac{3}{2}}}{p} = \frac{3}{2}$

বা, $p^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}$

বা, $p^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$

$\therefore p = \frac{9}{4}$ **(Ans.)**

খ. যেহেতু $a^x = c^z$

বা, $a = c^{\frac{z}{x}}$

আবার, $b^y = c^z$

বা, $b = c^{\frac{z}{y}}$

এখন, $c^2 = ab = c^{\frac{z}{x}}.\, c^{\frac{z}{y}}$

বা, $c^2 = c^{\frac{z}{x}+\frac{z}{y}}$.

বা, $2 = \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$

বা, $z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ (প্রমাণিত)

গ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$

ধরি $a^x = b^y = c^z = k$

$\therefore a^x = k$ বা, $a = k^{\frac{1}{x}}$

$a^x = k$ বা, $b = k^{\frac{1}{y}}$

$c^z = k$ বা, $c = k^{\frac{1}{z}}$

এখন, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}, k^{\frac{1}{y}}, k^{\frac{1}{z}} = k^{\circ}$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^{\circ}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 = 0$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = 0$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনমূলক কাজের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–২ ▸ $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২
খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ ৪
গ. $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$ হলে, দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ ৪

২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $m \in \mathbf{N}$ কে নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $(a^m)^n = a^{mn}$ .... (i) বিবেচনা করি।

(i) এ $n = 1$ বসিয়ে দেখা যায়,

বামপক্ষ $= (a^m)^1 = a^m$

ডানপক্ষ $= a^{m \cdot 1} = a^m$

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য।

খ. $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য। ['ক' হতে পাই]

ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য

অর্থাৎ $(a^m)^k = a^{mk}$........................(ii)

এখন, $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k \cdot (a^m)$ $[\because a^{n+1} = a^n \cdot a]$

$= a^{mk} \cdot a^m$ [(ii) নং হতে]

$= a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্যও (i) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in N$ এর জন্য (i) সত্য। **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' থেকে পাই, $(a^m)^n = a^{mn}$ .... (i)

এখানে, $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$

প্রথমে মনে করি, $n > 0$ এক্ষেত্রে খ থেকে (i) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

এখন মনে করি, $n = 0$ এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^\circ = a^\circ = 1$ এবং $a^{mn} = a^0 = 1$

$\therefore$ (i) নং সত্য।

আবার মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$ যেখানে $k \in \mathbf{N}$

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}$

$\therefore a \neq 0$ এবং $m \in \mathbf{N}$ ও $n \in \mathbf{Z}$ এর জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩ ▸ $a \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ এর জন্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২
খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $m, n \in N$ এর জন্য বাক্যটি সত্য। ৪
গ. (i) $m > 0$ এবং $n < 0$ (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ৪

৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $n = 1$ হলে,

বামপক্ষ $= a^m . a^n = a^m . a^1 = a^m . a = a^{m+1}$

ডানপক্ষ $= a^{m+n} = a^{m+1}$

সুতরাং $n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

খ. 'ক' হতে $m = n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

সুতরাং $m = n = k$ এর জন্য সত্য হবে

$\therefore$ $a^k . a^k = a^{k+k}$

$= a^{2k}$ .... (i)

$m = n = k + 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি

$a^{k+1} . a^{k+1} = a^{k+1+k+1}$

$= a^{2k+2}$

$= a^{2(k+1)}$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে দেখা যায় k এর জন্য বাক্যটি সত্য হলে $k + 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

সুতরাং $m, n \in \mathbf{N}$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য।

অর্থাৎ $a^m . a^k = a^{m+k}$ .... (ii)

তাহলে, $a^m . a^{k+1} = a^m(a^k . a)$ [সূত্র ১]

$= (a^m . a^k)$ a [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k} . a$ [আরোহ কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [১নং সূত্র]

অর্থাৎ $n = k + 1$, এর জন্য (i) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in \mathbf{N}$ এর জন্য (i) সত্য।

$\therefore$ যেকোনো $m, n \in \mathbf{N}$ এর জন্য $a^m . a^n = a^{m+n}$

(দেখানো হলো)

গ. (i) $m > 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $n = -k$ যেখানে $k \in N$

এবং $m \in N$

$a^m . a^n = a^m . a^{-k}$ [প্রতিস্থাপন]

$= a^m . \frac{1}{a^k}$ $[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}]$

$= \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$

কিন্তু, $\frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k}$ $[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}]$

$\therefore$ সকল ক্ষেত্রেই $a^m . a^n = a^{m-k} = a^{m+(-k)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে]

(সত্যতা যাচাই করা হলো)

ii) $m < 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $m = -p, n = -q$ যেখানে $p, q \in N$

$a^m . a^n = a^{-p} . a^{-q}$

$= \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q}$ $[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n}]$

$= \frac{1}{a^{p+q}}$ $[\because a^m \times a^n = a^{m+n}]$

$= a^{-(p+q)} = a^{-p-q} = a^{-p+(-q)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে] **(সত্যতা যাচাই করা হলো)**

প্রশ্ন–৪ ▸ কতিপয় সূচক সমন্বিত রাশি ay^{1-p}, by^{1-q}, cy^{1-r} এবং $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$।

ক. a, b ও c এর মান x, y এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২
খ. $a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
গ. দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$

$\therefore ay^{1-p} = x$

বা, $a = \dfrac{x}{y^{1-p}}$

$\therefore a = xy^{p-1}$

আবার, $by^{1-q} = x$

বা, $b = \dfrac{x}{y^{1-q}} = xy^{q-1}$

এবং $cy^{1-r} = x$

বা, $c = \dfrac{x}{y^{1-r}} = xy^{r-1}$

$\therefore a = xy^{p-1},\ b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$

খ. 'ক' থেকে পাই, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$

$\therefore a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)}.x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)}.x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0.y^0$

$= 1 \times 1 = 1$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই, ডানপক্ষ $= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1$

বামপক্ষ $= \left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{a^3-b^3} \times p^{b^3-c^3} \times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= p^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৫ ▸ $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}}$, $[1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}]^{-1}$ দুইটি রাশি।

ক. প্রথম রাশির সরল মান কত? ২

খ. দেখাও যে, ১ম রাশি × ২য় রাশি $= ax^3$ ৪

গ. ১ রাশি × ২য় রাশি ÷ $[x - \{x^{-1} + (a^{-1} - x)^{-1}\}^{-1}]$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6.a^2}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^8}}$

$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^4)^2}} = \sqrt[12]{a^8.a^4} = \sqrt[12]{a^{8+4}}$

$= \sqrt[12]{a^{12}} = (a^{12})^{\frac{1}{12}} = a$

নির্ণেয় সরল মান a

খ. 'ক' থেকে পাই, $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}} = a$

তাহলে বামপক্ষ = ১ম রাশি × ২য় রাশি

$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}} \times [1 - 1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

$= a \times [1 - 1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

$= a \times \left[1 - 1\left\{1 - \dfrac{1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$

$= a \times \left[1 - 1\left\{\dfrac{1-x^3-1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$

$= a \times \left[1 - 1\left\{\dfrac{-x^3}{1-x^3}\right\}\right]^{-1}$

$= a \times \left[1 - \left(\dfrac{1-x^3}{-x^3}\right)^{-1}\right]^{-1}$

$= a \times \left[1 + \dfrac{1-x^3}{x^3}\right]^{-1} = a \times \left[\dfrac{x^3+1-x^3}{x^3}\right]^{-1}$

$= a \times \left[\dfrac{1}{x^3}\right]^{-1} = ax^3 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ ১ম রামি × ২য় রাশি $= ax^3$ **(দেখানো হলো)**

গ. এখানে, ১ম রাশি × ২য় রাশি ÷ $[x - \{x^{-1} + (a^{-1} - x)^{-1}\}^{-1}]$

$= ax^3 \div \left[x - \left\{\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{a} - x\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]$ ['খ' থেকে]

$= ax^3 \div \left[x - \left\{\dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1-ax}{a}\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]$

$= ax^3 \div \left[x - \left\{\dfrac{1}{x} + \dfrac{a}{1-ax}\right\}^{-1}\right]$

$= ax^3 \div \left[x - \left\{\dfrac{1-ax+ax}{x(1-ax)}\right\}^{-1}\right]$

$= ax^3 \div \left[x - \left\{\dfrac{1}{x-ax^2}\right\}^{-1}\right]$

$= ax^3 \div [x - \{x - ax^2\}]$

$= ax^3 \div [x - x + ax^2]$

$= ax^3 \div ax^2$

$= \dfrac{ax^3}{ax^2} = x$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৬ ▸ $\dfrac{1}{x^b + x^{-c} + 1}$, $\dfrac{1}{x^c + x^{-a} + 1}$ এবং $\dfrac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$ তিনটি সূচকীয় রাশি।

ক. তৃতীয় রাশিটির সরল কর। ২

খ. রাশি তিনটির যোগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(a+b+c) = 0$ হলে রাশি তিনটির যোগফল 1. ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1} = \dfrac{1}{x^a\dfrac{1}{x^b}+1} = \dfrac{1}{\dfrac{x^a.x^b+1+x^b}{x^b}} = \dfrac{x^b}{1+x^b+x^{a+b}}$ **(Ans.)**

খ. রাশি তিনটির যোগফল

$= \dfrac{1}{x^b+x^{-c}+1} + \dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$= \dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \dfrac{1}{x^c+\dfrac{1}{x^a}+1} + \dfrac{1}{x^a\dfrac{1}{x^b}+1}$

$= \dfrac{x^c}{1+x^c+x^b+c} + \dfrac{1}{\dfrac{x^a.x^c+1+x^a}{x^a}} + \dfrac{1}{\dfrac{x^a.x^b+1+x^b}{x^b}}$

$= \dfrac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \dfrac{x^a}{1+x^a+x^{a+c}} + \dfrac{x^b}{1+x^b+x^{a+b}}$ **(Ans.)**

গ. যেহেতু, $a+b+c = 0$

বা, $b+c = -a$

$\therefore$ রাশি তিনটির যোগফল

$= \dfrac{1}{x^b+x^{-c}+1} + \dfrac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \dfrac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^c + \frac{1}{x^a} + 1} + \frac{1}{x^a \frac{1}{x^b} + 1}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^b{+}c} + \frac{1}{\frac{x^a.x^c + 1 + x^a}{x^a}} + \frac{1}{\frac{x^a.x^b + 1 + x^b}{x^b}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^a}{1 + x^a + x^{a+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + x^{a+b}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + x^{-c}}$$

$[\because a + b + c = 0, \because\ a + b = -c]$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{1 + x^b + \frac{1}{x^c}}$$

$$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$$= \frac{1 + x^c + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}}$$

$= 1$

$\therefore a + b + c = 0$ হলে প্রদত্ত রাশি তিনটির যোগফল 1. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৭ ▸ $a, b \in N$ এবং a^n, $n \in N$ হলে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে,

ক. $(a^m)^n = a^{mn}$ — ২

খ. $(a.b)^n = a^n b^n$ — ৪

গ. $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ যেখানে, $a > 0$ — ৪

▸◂ ৭নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. এখানে, $(a^m)^n = a^{mn}$

প্রথম ধাপ : (i) নং এ $n = 1$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= (a^m)^1 = a^m$

ডানপক্ষ $= a^{m.1} = a^m$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) নং বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i)নং বাক্যটি সত্য।

$\therefore (a^m)^k = a^{mk}$

এখন, $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m$

$a^{m(k+1)} = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্য (i) নং বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

খ. এখানে, $(a.b)^n = a^n.b^n$ .... (i)

প্রথম ধাপ : $n = 1$ হলে (i) বাক্যের বামপক্ষ $= (a.b)^1 = a.b$

ডানপক্ষ $= a^1.b^1 = a.b$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ, $(a.b)^k = a^k.b^k$ .... (ii)

এখন, $(a.b)^{k+1} = (a.b)^k.(a.b)^1$

$= a^k.b^k.a^1.b^1$

$= a^{k+1}.b^{k+1}$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ বিধি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $(a.b)^n = a^n.b^n$ **(দেখানো হলো)**

গ. এখানে, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ .... (i)

প্রথম ধাপ : $n = 1$ এর জন্য (i) এর বামপক্ষ $= \left(\frac{1}{a}\right)^1 = \frac{1}{a}$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ : ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{a^k}$

এখন, $n = k + 1$ হলে, $\left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^k \cdot \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^k.a} = \frac{1}{a^{k+1}}$

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \frac{1}{a^{k+1}}$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য সুতরাং $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৮ ▸ $\frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p} + \frac{1}{1 + b^{-n}c^p + b^{-n}a^m} + \frac{1}{1 + c^{-p}a^m + c^{-p}b^n}$

ক. প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশের সরলীকরণ কর। — ২

খ. প্রদত্ত রাশির সরল মান বের কর। — ৪

গ. দেখাও যে, প্রদত্ত রাশির সরল মান $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$ এর সরল মানের সমান। — ৪

▸◂ ৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $= \frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p}$

$= \frac{a^m}{a^m(1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p)}$

$= \frac{a^m}{a^m + a^m.a^{-m}b^n + a^m.a^{-m}.c^p}$

$= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' হতে পাই,

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশের সরল মান $= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p}$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশের সরল মান $= \frac{b^n}{a^m + b^n + c^p}$

এবং তৃতীয় অংশের সরল মান $= \frac{c^p}{a^m + b^n + c^p}$

প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p} + \frac{1}{1 + b^{-n}c^p + b^{-n}a^m} + \frac{1}{1 + c^{-p}a^m + c^{-p}b^n}$$

$$= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p} + \frac{b^n}{a^m + b^n + c^p} + \frac{c^p}{a^m + b^n + c^p}$$

$= \frac{a^m + b^n + c^p}{a^m + b^n + c^p} = 1$ **(Ans.)**

গ. 'খ' হতে পাই প্রদত্ত রাশির সরল মান 1.

এখন, $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$= (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a+b}$

$= x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2}$

$= x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$

$= x^0 = 1$ যা প্রদত্ত রাশির সরল মানের সমান।**(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৯ ▸ $a^x = b^y = c^z$; যেখানে $a \neq b \neq c$.

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ ২

খ. a, b এবং c পরস্পর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ ৪

গ. $abc = 1$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

▸◂ ৯নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে

প্রদত্ত শর্তমতে, $z^y = y^z$ .... (i)

তাহলে, $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = \frac{(y)^{\frac{y}{z}}}{(z)^{\frac{y}{z}}} = \frac{(y)^{\frac{y}{z}}}{(z^y)^{\frac{1}{z}}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{(y^z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{y^{\frac{y}{z}}}{y^1}$

$\therefore \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z}-1}$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$

মনে করি, $a^x = b^y = c^z = k$

তাহলে, $a = k^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

$b = k^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

$c = k^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

এখন যেহেতু a, b এবং c তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$\therefore b^2 = ac$

বা, $\left(k^{\frac{1}{y}}\right)^2 = k^{\frac{1}{x}}.\, k^{\frac{1}{z}}$

বা, $k^{\frac{2}{y}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}$

বা, $\frac{2}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ **(প্রমাণিত)**

গ. প্রদত্ত শর্ত, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ **(প্রমাণিত)**

আবার, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 \cdot \frac{1}{xy}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - 3 \cdot \frac{1}{xyz} + \frac{1}{z^3} = 0$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১০ ▸ $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$.

ক. $a \neq 0$ এবং $x + y + z = 0$ হলে দেখাও যে, $\frac{y}{z} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ ২

খ. দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ ৪

গ. $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $xyz = 1$ হলে দেখাও যে, $6(by^3 + cz^3) = (2a^3 - 5)(3 - x^3)$ ৪

▸◂ ১০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ .... (i)

এবং $x + y + z = 0$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = -(y + z)$

(i) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই,

$-(y + z)\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $-y\sqrt[3]{a} - z\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $y\sqrt[3]{b} - y\sqrt[3]{a} = z\sqrt[3]{a} - z\sqrt[3]{c}$

বা, $y(\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}) = z(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c})$

$\therefore \frac{y}{z} = \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}) = -z\sqrt[3]{c}$ .... (i)

বা, $(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b})^3 = (-z\sqrt[3]{c})^3$ [ঘন করে]

বা, $x^3a + y^3b + 3xy\sqrt[3]{ab}\,(x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b}) = -z^3c$

বা, $x^3a + y^3b + z^3c + 3xy\sqrt[3]{ab}\,(-z\sqrt[3]{c}) = 0$ [(i) থেকে]

বা, $x^3a + y^3b + z^3c + 3xyz\,(-\sqrt[3]{abc}) = 0$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 - 3xyz\sqrt[3]{a.a^2} = 0$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 - 3xyz\sqrt[3]{a^3}$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে,

$a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $a^3 = (2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3 = (2^{\frac{1}{3}})^3 + (2^{-\frac{1}{3}})^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}})$

বা, $a^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^0.a$ [(i) থেকে]

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

বা, $2a^3 = 5 + 6a$

বা, $6a = 2a^3 - 5$

$\therefore a = \frac{2a^3 - 5}{6}$

'খ' নং থেকে পাই,

$ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3a.1$ [$\because$ xyz = 1]

বা, $by^3 + cz^3 = 3a - ax^3$

বা, $by^3 + cz^3 = a(3 - x^3)$

বা, $by^3 + cz^3 = \frac{2a^3 - 5}{6}(3 - x^3)$ $\left[\because a = \frac{2a^3 - 5}{6}\right]$

$\therefore 6(by^3 + cz^3) = (2a^3 - 5)(3 - x^3)$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১১ ▸ $a > 0$ এবং $a \neq 0, x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 = b^3$

ক. দেখাও যে, $a^0 = 1$ ২

খ. যদি $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

▸◂ ১১নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $a^0 = a^{1-1}$

$= a^1.a^{-1}$ [সূচকের মৌলিক সূত্র $a^{m+n} = a^m.a^n$]

$= a.\frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$

$\therefore a^0 = 1$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে,

$x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $x^3 = \{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\}^3$ [ঘন করে]

বা, $x^3 = (a+b) + (a-b) + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\}$

বা, $x^3 = 2a + 3(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$ [(i) থেকে]

বা, $x^3 = 2a + 3x(c^3)^{\frac{1}{3}}$ [$\because a^2 - b^2 = c^3$]

বা, $x^3 = 2a + 3x.c$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{\left(\frac{a^3}{b^3}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{\left(\frac{a^3}{a^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\left(\frac{b^2}{b^3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$ [$\because a^2 = b^3$]

$= (a^{3-2})^{\frac{1}{2}} + (b^{2-3})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸ একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা কর,

$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$; a, b > 0

ক. রাশিটির সাথে b যোগ করে সরলীকরণ কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরলমানটির বর্গ সমান $-2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a - 8 = 0$ ৪

গ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরলমানটি $1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ এর সমান হলে দেখাও যে, $a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ ৪

▸◂ ১২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. প্রদত্ত রাশিটির সাথে b যোগ করলে দাঁড়ায়,

$(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + b$

$= (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2\} + b$

$= (a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3 + b$

$= a - b + b$

$= a$ **(Ans.)**

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত মান a

$\therefore a^2 = -2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.a$ [$\because a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$]

বা, $3a^3 = 9 - 1 - 9a$

$\therefore 3a^3 + 9a - 8 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত মান a

$\therefore a = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [পক্ষান্তর করার পর ঘন করে]

বা, $a^3 - 1 - 3a^2 + 3a = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}.\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 3^2 + 3^1 + 3.3^1.(a-1)$ $\quad [\because a - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}]$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 9 + 3 + 9a - 9$

$\therefore a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$ **এবং** $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$**, দুইটি সমীকরণ**

ক. ১ম সমীকরণটিকে $a^m = a^n$ আকারের প্রকাশ কর। ২

খ. ২য় সমীকরণটি সমাধান কর। ৪

গ. সমীকরণদ্বয়ের কোনো সাধারণ মূল আছে কিনা তা নির্ধারণ কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$

বা, $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{4x+7} = \left\{(64)^{\frac{1}{11}}\right\}^{2x+7}$

বা, $4^{\frac{4x+7}{5}} = 4^{\frac{6x+21}{11}}$

$\therefore a^m = a^n$ আকারে দেখানো হলো।

খ. $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$

বা, $\sqrt{y-2} - \sqrt{y-9} = 1$ $\quad [2x^2 + 5x = y$ ধরে]

বা, $\sqrt{y-2} = 1 + \sqrt{y-9}$

বা, $(\sqrt{y-2})^2 = (1 + \sqrt{y-9})^2$ [বর্গ করে]

বা, $y - 2 = 1 + 2.1\sqrt{y-9} + y - 9$

বা, $y - 2 - y + 9 - 1 = 2\sqrt{y-9}$

বা, $6 = 2\sqrt{y-9}$

বা, $\sqrt{y-9} = 3$

বা, $(\sqrt{y-9})^2 = 9$

বা, $y - 9 = 9$

$\therefore y = 18$

বা, $2x^2 + 5x = 18$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $2x^2 + 5x - 18 = 0$

বা, $2x^2 + 9x - 4x - 18 = 0$

বা, $x(2x+9) - 2(2x+9) = 0$

বা, $(2x+9)(x-2) = 0$

বা, $2x = -9$ অথবা $x - 2 = 0$

বা, $x = \frac{-9}{2}$ বা, $x = 2$

নির্ণেয় সমাধান $x = 2, \frac{-9}{2}$

গ. 'ক' হতে পাই, $4^{\frac{4x+7}{5}} = 4^{\frac{6x+21}{11}}$

বা, $\frac{4x+7}{5} = \frac{6x+21}{11}$

বা, $44x + 77 = 30x + 105$

বা, $44x - 30x = 105 - 77$

বা, $14x = 28$

$\therefore x = \frac{28}{14}$

$= 2$

নির্ণেয় সমাধান $x = 2$

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের মধ্যে একটি সাধারণ মূল আছে এবং তা হচ্ছে $x = 2$

প্রশ্ন–১৪ ▸

ক. যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে xyz = কত? ২

খ. যদি $x^x = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab+bc+ca$ = কত? ৪

গ. যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তাহলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত? ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^x = b$ ....(1)

$b^y = b$ ....(2)

$c^z = 1$ ....(3)

(i) হতে পাই, $a^x = b$

বা, $(a^x)^y = (b)^y$

বা, $(a^x)^y = (b)^y$

বা, $a^{xy} = c$ [(2) হতে]

বা, $a^{xy} = c^z$

বা, $a^{xyz} = a^{\circ}$

$\therefore xyz = 0$

খ. দেওয়া আছে, $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$

ধরি, $x^a = b^b = z^c = k$

$\therefore x^a = k$

$x = k^{\frac{1}{a}}$ ....(1)

$y^b = k$

বা, $y = k^{\frac{1}{b}}$ ....(2)

$z^c = k$

বা, $z = k^{\frac{1}{c}}$ ....(3)

$(1) \times (2) \times (3)$ হতে পাই

$xyz = k^{\frac{1}{a}}.k^{\frac{1}{b}}.k^{\frac{1}{c}}$

বা, $1 = k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

বা, $k^{\circ} = k^{\frac{ab+bc+ca}{abc}}$

বা, $0 = \frac{ab+bc+ca}{abc}$

$\therefore ab + bc + ca = 0$

গ. দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

প্রশ্ন–১৫ ▸ একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা করি, $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

ক. রাশিটিকে সরলীকরণ কর। ২

খ. প্রদত্ত রাশিটি $2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে তবে দেখাও যে, $2x^3 - 6x = 58.$ ৪

গ. প্রদত্ত রাশিটি $(a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ তবে দেখাও যে, $2x^3 - 6cx = 4a$ এবং a ও c এর কোন মানের জন্য খ ও গ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ একই সমীকরণ নির্দেশ করে। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপকে প্রদত্ত রাশিটি হলো, $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left\{x^{\frac{1}{a} \times \frac{(a-b)\,(a+b)}{(a-b)}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= x^{\frac{1}{a} \times (a+b) \times \frac{a}{a+b}}$

$= x$ **(Ans.)**

খ. প্রদত্ত রাশিটি, $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$; দেখাতে হবে যে, $2x^3 - 6x = 5$

অনুশীলনী ৯.১ এর ৭(গ) প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

গ. প্রদত্ত রাশি, $x = (a + b)^{\frac{1}{3}} + (a - b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$, দেখাতে হবে যে, $2x^3 - 6cx = 4a$

এরপর : অনুশীলনী ৯.১ এর ৭(খ) প্রশ্নোত্তর দ্রষ্টব্য।

'খ' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ $2x^3 - 6x = 5$ ও $2x^3 - 6cx = 4a$ সমীকরণ একই হবে যদি $c = 1$ এবং $4a = 5$ বা, $a = \frac{5}{4}$ হয়। **(Ans).**

প্রশ্ন–১৬ ▸ $\left.\begin{matrix} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{matrix}\right\}$ **এবং** $\left.\begin{matrix} y^x = 4 \\ y^2 = 2^x \end{matrix}\right\}$, **$y \neq 1$ দুইটি দুই চলকবিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ।**

ক. সূচক সমীকরণ কাকে বলে? ২

খ. প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, দ্বিতীয় সমীকরণ জোটের সমাধান প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধানের সমান। ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. **সূচক সমীকরণ :** সূচক ও ভিত্তি সম্বলিত সমীকরণকে সূচক সমীকরণ বলে। যেমন : $\left.\begin{matrix} y^x = 4 \\ y^2 = 2^x \end{matrix}\right\}, y \neq 1$

খ. দেওয়া আছে, প্রথম সমীকরণ জোট,

$y^x = x^2$ .... (i)

$x^{2x} = y^4$ .... (ii)

(ii) নং হতে পাই,

$x^{2x} = y^4$

বা, $(x^2)^x = y^4$

বা, $(y^x)^x = y^4$ [(i) নং হতে x^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $y^{x^2} = y^4$

বা, $x^2 = 4$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore x = \pm 2$

যখন, $x = 2$

তখন $y^2 = 2^2$

বা, $y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

আবার, যখন, $x = -2$

তখন, $y^{-2} = (-2)^2$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$ [$\because a^{-m} = \frac{1}{a^m}$]

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right) \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

গ. দেওয়া আছে, দ্বিতীয় সমীকরণ জোট,

$y^x = 4$ .... (iii)

$y^2 = 2^x$ .... (iv)

(iv) নং হতে পাই,

$y^2 = 2^x$

বা, $(y^2)^x = (2^x)^x$ [উভয়পক্ষের ঘাত x এ উন্নীত করে]

বা, $y^{2x} = 2^{x^2}$

বা, $(y^x)^2 = 2^{x^2}$

বা, $(4)^2 = 2^{x^2}$ [(iii) নং হতে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $16 = 2^{x^2}$

বা, $2^{x^2} = 2^4$

বা, $x^2 = 4$ [$a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore x = \pm 2$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন, $x = 2$, তখন $y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

আবার যখন, $x = -2$ তখন

$y^{-2} = 4$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{2}$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 2), (2, -2), \left(-2, \frac{1}{2}\right)\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

সুতরাং, দ্বিতীয় সমীকরণ জোটের সমাধান প্রথম সমীকরণ জোটের সমাধানের সমান। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}, b \geq 0.$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$. ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ, $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$.

বা, $b^2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}} - 2$

$= \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}$

$= \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$\therefore b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. 'ক' হতে পাই, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [$\because b \geq 0$ যেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $b^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\therefore (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$]

বা, $b^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.b$ [$\because (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$]

বা, $b^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3b$

বা, $b^3 + 3b = \frac{8}{3}$

$\therefore 3b^3 + 9b = 8$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

[$\because (x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$]

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3 \cdot 2^0 \cdot a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4 + 1 + 6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore 2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৮ ▸ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয়, তাহলে–

ক. $p + q + r = 3$ হলে দেখাও যে, $\sqrt[3]{abc} = x$ ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r-1}.b^{r-p-1}.c^{p-q-1} = x^{-3}$ যখন $p + q + r = 3$ ৪

গ. $p + q + r = 3$, $pq + qr + rp = 3$ হলে $\left(\frac{a^{-2}b^{-2}c^{-2}}{a^{p+1}b^{q+1}c^{r+1}}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$

এবং $c = xy^{r-1}$

$\therefore abc = xy^{p-1}.xy^{q-1}.xy^{r-1}$

$= x^{1+1+1}.y^{p+q+r-1-1-1}$

$= x^3.y^{(p+q+r)-3}$

$= x^3.y^{3-3}$ [$p + q + r = 3$]

$= x^3.y^0$

$= x^3.1$

$= x^3$

বা, $abc = x^3$

$\therefore \sqrt[3]{abc} = x$ **(দেখানো হলো)**

খ. বামপক্ষ $= a^{q-r-1}.b^{r-p-1}.c^{p-q-1}$

$= (xy^{p-1})^{q-r-1}.(xy^{q-1})^{r-p-1}.(xy^{r-1})^{p-q-1}$

$= x^{q-r-1}.y^{(p-1)(q-r-1)}.x^{r-p-1}.y^{(q-1)(r-p-1)}.x^{p-q-1}.y^{(r-1)(p-q-1)}$

$= x^{q-r-1+r-p-1+p-q-1}.y^{(p-1)(q-r-1)+(q-1)(r-p-1)+(r-1)(p-q-1)}$

$= x^{-3}.y^{pq-pr-p-q+r+1+qr-pq-q-r+p+1+pr-qr-r-p+q+1}$

$= x^{-3}.y^{3-(p+q+r)}$ [$\because p + q + r = 3$]

$= x^{-3}.y^{3-3} = x^{-3}.y^0$

$= x^{-3} =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $p + q + r = 3$

$pq + qr + rp = 3$

প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^{-2}b^{-2}c^{-2}}{a^{p+1}b^{q+1}c^{r+1}}$

$= \frac{(xy^{p-1})^{-2}\cdot(xy^{q-1})^{-2}\cdot(xy^{r-1})^{-2}}{(xy^{p-1})^{p+1}\cdot(xy^{q-1})^{q+1}\cdot(xy^{r-1})^{r+1}}$

$= \frac{x^{-2}.y^{-2p+2}.x^{-2}.y^{-2q+2}.x^{-2}.y^{-2r+2}}{x^{p+1}.y^{p^2-1}.x^{q+1}y^{q^2-1}.x^{r+1}.y^{r^2-1}}$

$= x^{-2-2-2-p-1-q-1-r-1}.y^{-2p+2-2q+2-2r+2-p^2+1-q^2+1-r^2+1}$

$= x^{-9-(p+q+r)}.y^{9-2(p+q+r)-(p^2+q^2+r^2)}$

$= x^{-9-3}.y^{9-2.3-\{(p+q+r)^2-2(pq+qr+rp)\}}$ [$\because p + q + r = 3$]

$= x^{-12}.y^{9-6-\{(3)^2-2.3\}}$ [$\because p + q + r = 3$ এবং $pq + r + rp = 3$]

$= x^{-12}.y^{3-(9-6)}$

$= x^{-12}.y^0$

$= x^{-12}$

$\therefore \frac{a^{-2}.b^{-2}.c^{-2}}{a^{p+1}.b^{q+1}.c^{r+1}} = x^{-12}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১৯ ▸ $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}$, $\left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}$ $\left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z}$, $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x}$

ক. ১ম ও ৪র্থ রাশির মান নির্ণয় কর। ২

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}.\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z}.\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = 1$ ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

১ম রাশি $= \left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}$

$= (p^{a-b})^{a^2+ab+b^2}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$= p^{a^3-b^3}$ **(Ans.)**

এবং ৪র্থ রাশি $= \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} = \left\{\frac{p^{x^2+2xy+y^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$

$= p^{(x^2+2xy-xy+y^2)(x-y)}$

$= p^{(x^2+xy+y^2)(x-y)}$

$= p^{x^3-y^3}$ **(Ans.)**

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= (p^{a-b})^{(a^2+ab+b^2)} \times (p^{b-c})^{(b^2+bc+c^2)} \times (p^{c-a})^{(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\, p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}\, p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{a^3-b^3} \times p^{b^3-c^3} \times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= p^0$

$= 1$ **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে পাই, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} = p^{x^3-y^3}$

অনুরূপভাবে, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} = p^{y^3-z^3}$

এবং $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = p^{z^3-x^3}$

$\therefore \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \times \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \times \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x}$

$= p^{x^3-y^3} \times p^{y^3-z^3} \times p^{z^3-x^3}$

$= p^{x^3-y^3+y^3-z^3+z^3-x^3} = p^0 = 1$

অর্থাৎ $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{z-x} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২০ ▸ যদি $a^x = b^y = c^z$, যেমন $a \neq b \neq c$ এবং $9^{2R} = 3^{R+1}$ হলে,

ক. R এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. x = 2 এবং y = 3 হয় তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

গ. abc = 1 হলে দেখাও যে, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ এবং $x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = (3xyz)^{-1}$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $9^{2R} = 3^{R+1}$

বা, $(3^2)^{2R} = 3^{R+1}$

বা, $3^{4R} = 3^{R+1}$

বা, $4R = R + 1$

বা, $3R = 1$

$\therefore R = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^x$

এখানে, x = 2, y = 3 হলে পাই, $a^2 = b^3$

$\therefore a = b^{3/2}, b = a^{2/3}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{a}{a^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ [মান বসিয়ে]

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{b^{\frac{1}{3}}}$

$= \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$ যেখানে, $a \neq b \neq c$

ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

$\therefore a^x = k$ $\quad b^y = k$ $\quad c^z = k$

$\therefore a = k^{\frac{1}{x}}$ $\quad \therefore b = k^{\frac{1}{y}}$ $\quad \therefore c = k^{\frac{1}{z}}$

এখন, abc = 1

বা, $k^{\frac{1}{x}} \cdot k^{\frac{1}{y}} \cdot k^{\frac{1}{z}} = 1$ [মান বসিয়ে]

বা, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = k^0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$ **(দেখানো হয়েছে)**

আবার, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + 3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{-1}{z^3}$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3\frac{1}{xy}\left(\frac{-1}{z}\right) = -\frac{1}{z^3}$ $\left[\because \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}\right]$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

$\therefore x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} = 3(xyz)^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২১ ▸ $a^x = b^x = c^z$, যেখানে, a, b ও c ধনাত্মক ও পরস্পর অসমান এবং x, y, z ∈ N.

ক. $9^{2x} = 3^{x+1}$ হলে x এর মান কত? ২

খ. $b^2 = ac$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^{-1} + z^{-1} = 2y^{-1}$ ৪

গ. abc = 1 হলে, দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $9^{2x} = 3^{x+1}$

বা, $(3^2)^{2x} = 3^{x+1}$

বা, $3^{4x} = 3^{x+1}$

বা, $4x = x + 1$

বা, $4x - x = 1$

বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ. অনু–৯ এর উদাহরণ ১১ নং দ্রষ্টব্য। পৃষ্ঠা–১৮৪।

গ. ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

এখানে, $a^x = k$

$\therefore a = k^{\frac{1}{x}}$ অনুরূপভাবে, $b = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}$

বা, $1 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ [$\because$ abc = 1]

বা, $k^0 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 0$ (দেখানো হয়েছে)

এখন, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^3 = \left(\frac{-1}{z}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+3.\frac{1}{x}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{z^3}$ [(i) ব্যবহার করে]

বা, $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{xyz} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ **(দেখানো হলো)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–২২ ▸ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}, b > 0$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}, b > 0$ ২

খ. প্রমান কর যে, $3b^2 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

প্রশ্ন–২৩ ▸ (i) $3^x - 9^y$ (ii) $5^{x+y+1} = 25^{xy}$ (iii) $8y^x - y^{2x} = 16, 2^x = y^2$

ক. (i) হতে x কে y এর মাধ্যমে দেখাও। ২

খ. (i) ও (i) হতে (x, y) নির্ণয় কর। ৪

গ. (iii) নং কে সমাধান করে দ্বিচলক দ্বিঘাত কিনা তা বুঝিয়ে দাও। ৪

উত্তর : ক. $x = 2y$;

খ. $(2, 1), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right)$;

গ. $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}^{-\sqrt{2}}\right)$, দ্বিচলক দ্বিঘাত।

প্রশ্ন–২৪ ▸ $\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$: x.y > 0 একটি সূচকীয় রাশি। এর সাহায্যে নিচের সমস্যাগুলোর সমাধান কর।

ক. রাশিটির সাথে y যোগ করলে সরল ফল কত হবে? ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত সরল মানটির বর্গ সমান $3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{-2}{3}} - 2$ হলে দেখাও যে, $3x^3 + 9x = 8$ ৪

গ. 'ক' হতে প্রাপ্ত সরল মানটি $1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হলে দেখাও যে, $x^3 - 3x^2 - 6x = 4.$ ৪

উত্তর : ক. সৃজনশীল প্রশ্ন ১৪ এর অনুরূ প।

প্রশ্ন–২৫ ▸ $a = xy^{p-1}; b = xy^{q-1}; c = xy^{r-1}$

ক. $p + q + r = 3$ হলে abc = কত? ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = 1$ ৪

গ. $p + q + r = 3, pq + qr + rp = 3$ হলে, $a^{p+1}.b^{q+1}.c^{r+1}$ = কত? ৪

উত্তর : ক. $abc = x^3$; খ. x^6

প্রশ্ন–২৬ ▸ $y = 2^x$ এবং $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ হলে

ক. প্রমাণ কর $y^2 - 12y + 32 = 0$ ২

খ. x ও y –এর মান বের কর। ৪

গ. $4a - 3^{a-\frac{1}{2}} = 3^{a+\frac{1}{2}} - 2^{2a-1}$ হলে, দেখাও যে, $a = \frac{3}{x}$ অথবা $a = \frac{x}{2}$ ৪

উত্তর : খ. $(x, y) = (3, 8), (2, 4)$

প্রশ্ন–২৭ ▸ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 + 2 + 3^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{2}{3}}, b > 0$

ক. দ্বিতীয় শর্ত থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$ ৪

গ. প্রথম শর্ত থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$ ৪

প্রশ্ন–২৮ ▸ $a^m.a^n = (a^m)^n$ এবং $m, n \neq 0$

ক. দেখাও যে, $m + n - mn = 0$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ ৪

গ. দেখাও যে, $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে যদি ও কেবল যদি $m = n = 2$ হয়। ৪

প্রশ্ন–২৯ ▸ $a^b = b^a, a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$

ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ ৪

গ. $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^z = (p^yq^x)^z$ হয় তবে $xyz = 1$ প্রমাণ কর। ৪

প্রশ্ন–৩০ ▸ $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $z^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ যেখানে, $z \geq 0$।

ক. $p + q + r = 3$ হলে abc = কত? ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r}. b^{r-p}. c^{p-q} = 1.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $3z^3 + 9z - 8 = 0$ ৪

উত্তর : ক. x^3

অনুশীলনী ৯.২

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

■ **লগারিদম :** *Logos* এবং *arithmas* নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে লগারিদম শব্দটির উৎপত্তি। Logos অর্থ আলোচনা এবং arithmas অর্থ সংখ্যা অর্থাৎ, বিশেষ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

সংজ্ঞা : যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ, $x = \log_a b$

অতএব, $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

বিপরীতক্রমে, যদি $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ হবে।

এৰেত্রে b সংখ্যাটিকে ভিত্তি a এর সাপেৰে x এর প্রতিলগ (*anti*-log *arithm*) বলে এবং আমরা লিখি $b = anti \log_a x$

যদি $\log a = n$ হয়, তবে a কে n এর প্রতিলগ বলা হয় অর্থাৎ, $\log a = n$ হলে $a = anti \log n$.

■ **লগারিদমের সূত্রাবলি**

১. $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$ ২. $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$ ৫. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

৩. $\log_a(M)^N = N \log_a M$ ৪. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

■ **পরমমান :** একটি রাশি ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত মানকে ঐ রাশির পরমমান বলা হয়। যেমন : যে কোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক। x এর পরমমানকে |x|দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরমমান নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

$$|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

যেমন: $|0| = 0, |3| = 3, |-3| = -(-3) = 3$

পরমমান ফাংশন : যদি $x \in R$ হয়, তবে

$$= \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

$y = f(x) = |x|$ কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন = R এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty]$

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় :

যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়। সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝাবে।

অতএব $y = f(x)$ ফাংশনের (x,y) ক্রমোজোড়গুলোর x এর এর মনকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে।

বিকল্প পদ্ধতিতে ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় :

সাধারণভাবে ডোমেন নির্ণয় অধিকতর সহজ। কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন।

অর্থাৎ, মূল ফাংশনের ডোমেন = বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ

আবার, মূল ফাংশনের রেঞ্জ = বিপরীত ফাংশনের ডোমেন।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ **এর সরলমান কোনটি?**

ⓚ 0 ⓛ 1 ⓜ a ● x

২. যদি a, b, p > 0 এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে–

i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c}$ এর মান 2

iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓛ ii ও iii ● i ও iii ⓝ i, ii ও iii

৩ – ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

৩. কোনটি সঠিক?

ⓚ $a = b^{\frac{y}{z}}$ ⓛ $a = c^{\frac{z}{y}}$ ● $a = c^{\frac{z}{x}}$ ⓝ $a \neq \frac{b^2}{c}$

ব্যাখ্যা : $a^x = c^z \quad \therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

নোট : $a \neq \frac{b^2}{c}$ সম্পকটিও সত্য; কারণ, a, $\frac{b^2}{c}$ এর সমান নয়।

৪. নিচের কোনটি ac এর সমান?

● $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$ ⓛ $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{z}{y}}$ ⓜ $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ ⓝ $b^{\frac{z}{y}+\frac{y}{z}}$

৫. $\mathbf{b^2 = ac}$ **হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

● $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ ⓦ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$

ⓖ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ ⓖ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)=0$

সমাধান :

বামপক্ষ $=\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$=\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}.\frac{b^n}{c^n}.\frac{c^n}{a^n}\right)$

$=\log_k 1 = 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)=0$

সমাধান :

বামপক্ষ $=\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)$

$=(\log_k a+\log_k b)(\log_k a-\log_k b)+$
$(\log_k b+\log_k c)(\log_k b-\log_k c)+$
$(\log_k c+\log_k a)(\log_k c-\log_k a)$

$=(\log_k a)^2-(\log_k b)^2+(\log_k b)^2-$
$(\log_k c)^2+(\log_k c)^2-(\log_k a)^2$

$=0=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a=8$

সমাধান :

বামপক্ষ $=\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a$

$=\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{b})^2\times\log_{\sqrt{b}}(\sqrt{c})^2\times\log_{\sqrt{c}}(\sqrt{a})^2$

$=2\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times 2\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times 2\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\left(\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}\right)$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{a}$

$=8.1$ $[\because \log_a a=1]$

$=8=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^b}\right)=b$

সমাধান :

বামপক্ষ $=\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^b}\right)$

$=\log_a\log_a\left(a^{b}\right)\log_a a$ $[\because \log_a x^r = r\log_a x]$

$=\log_a(a^b)\log_a a\times 1$ $[\because \log_a a=1]$

$=b\log_a a\times 1$

$=b\times 1$

$=b$

$=$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ (ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c}=\frac{\log_k b}{c-a}=\frac{\log_k c}{a-b}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $a^ab^bc^c=1$

সমাধান :

মনে করি, $\frac{\log_k a}{b-c}=\frac{\log_k b}{c-a}=\frac{\log_k c}{a-b}=p$

$\therefore \log_k a=p(b-c)$

বা, $a\log_k a=pa(b-c)$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log_k a^a=p(ab-ac)$ ...... (i)

বা, $\log_k b=p(c-a)$

$\therefore b\log_k b=pb(c-a)$ [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log_k b^b=p(bc-ab)$ .... (ii)

$\log_k c=p(a-b)$

$\therefore c\log_k c=pc(a-b)$ [উভয়পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log_k c^c=p(ac-bc)$ .... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) হতে পাই,

বা, $\log_k a^a+\log_k b^b+\log_k c^c=p(ab-ca+bc-ab+ca-bc)$

বা, $\log_k a^ab^bc^c=0$

$\therefore a^ab^bc^c=k^0=1$ **(দেখানো হলো)**

(খ) **যদি** $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}$ **হয়, তবে দেখাও যে,**

১. $a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$

সমাধান :

মনে করি, $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=p$

তাহলে, $\frac{\log_k a}{y-z}=p$

বা, $\log_k a=p(y-z)$

বা, $(y+z)\log_k a=p(y-z)(y+z)$

বা, $\log_k a^{y+z}=p(y^2-z^2)$... ... ... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x}=p$

বা, $\log_k b=p(z-x)$

বা, $(z+x)\log_k b=p(z-x)(z+x)$

বা, $\log_k b^{z+x}=p(z^2-x^2)$ .... (ii)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y}=p$

বা, $\log_k c=p(x-y)$

বা, $(x+y)\log_k c=p(x-y)(x+y)$

বা, $\log_k c^{x+y}=p(x^2-y^2)$ .... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) হতে পাই,

বা, $\log_k a^{y+z}\log_k b^{z+x}\log_k c^{x+y}=p(y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2)$

বা, $\log_k(a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x-y})=p.0$

বা, $\log_k(a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y})=0$

বা, $\log_k(a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y})=\log_k 1$

$\therefore a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$ **(দেখানো হলো)**

২. $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}=1$

সমাধান :

মনে করি, $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = p$

তাহলে, $\frac{\log_k a}{y-z} = p$

বা, $\log_k a = p(y-z)$

বা, $(y^2 + yz + z^2)\log_k a = p(y-z)(y^2 + yz + z^2)$

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} = p(y^3 - z^3)$ .... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x} = p$

বা, $\log_k b = p(z-x)$

বা, $(z^2 + zx + x^2)\log_k b = p(z-x)(z^2 + zx + x^2)$

বা, $\log_k b^{z^2+zx+x^2} = p(z^3 - x^3)$ .... (ii)

এবং $\frac{\log_k{}^c}{x-y} = p$

বা, $\log_k{}^c = p(x-y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2)\log_k c = p(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$\therefore \log_k c^{x^2+xy+y^2} = p(x^3 - y^3)$ .... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) হতে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2}$

$= p(y^3 - z^3) + p(z^3 - x^3) + p(x^3 - y^3)$

বা, $\log k(a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+zy+y^2}) = p(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)$

বা, $\log_k(a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}) = p.0 = 0$

বা, $\log_k(a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}) = \log_k 1$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1+x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1+x) = \log_k x^2$

বা, $1 + x = x^2$

বা, $x^2 - x = 1$

বা, $(x)^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

বা, $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ অথবা, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

এখানে $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ x এর ঋণাত্মক মানের জন্য logx এর কোনো মান নেই।

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) দেখাও যে, $\log = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 2\log(x - \sqrt{x^2-1})$

সমাধান :

বামপৰ $= \log\frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}$

$= \log\frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1})}{(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1})}$

[লব ও হরকে $(x - \sqrt{x^{2-1}}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \log\frac{(x - \sqrt{x^2-1})^2}{x^2 - \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$= \log\frac{(x - \sqrt{x^2-1})^2}{x^2 - x^2 + 1}$

$= \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2$

$= 2\log\left(x - \sqrt{x^{-2}-1}\right)$

= ডানপৰ **(দেখানো হলো)**

(ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = a^2$

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$ [উভয় পাশে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $2x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$

$\therefore x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

(চ) যদি $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$ এবং $xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $xy^{a-1} = p$

বা, $\log_k xy^{a-1} = \log_k p$ [উভয় পাশে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $\log_k x + \log_k y^{a-1} = \log_k p$

$\therefore \log_k x + (a-1)\log_k y = \log_k p$ .... (i)

আবার, $xy^{b-1} = q$

বা, $\log_k xy^{b-1} = \log_k q$

বা, $\log_k x + \log_k y^{b-1} = \log_k q$

বা, $\log_k x + (b-1)\log_k y = \log_k q$ .... (ii)

এবং, $xy^{c-1} = r$

বা, $\log_k xy^{c-1} = \log_k r$

বা, $\log_k x + \log_k y^{c-1} = \log_k r$

$\therefore \log_k x + (c-1)\log_k y = \log_k r$ .... (iii)

এখন, বামপক্ষ $= (b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r$

$= (b-c)\{\log_k x + (a-1)\log_k y\} + (c-a)\{\log_k x + (b-1)\log_k y\} + (a-b)\{\log_k x + (c-1)\log_k y\}$

$= (b-c)\log_k x + (b-c)(a-1)\log_k y + (c-a)\log_k x + (c-a)(b-1)\log_k y + (a-b)\log_k x + (a-b)(c-1)\log_k y$

$= (b-c)\log_k x + (c-a)\log_k x + (a-b)\log_k x + (b-c)(a-1)\log_k y + (c-a)(b-1)\log_k y + (a-b)(c-1)\log_k y$

$= (b-c+c-a+a-b)\log_k x + (ab-b-ac+c+bc-c-ab+a+ac-a-bc+b)\log_k y$

$= 0 \times \log_k x + 0 \times \log_k y$

$= 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ছ) যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

সমাধান : $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = p$ (ধরি)

তাহলে, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = p$

বা, $ab\log_k(ab) = p(a+b)$

বা, $\log_k(ab) = \frac{p(a+b)}{ab}$

$\therefore \log_k a + \log_k b = \frac{p(a+b)}{ab}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k b + \log_k c = \frac{p(b+c)}{bc}$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $\log_k c + \log_k a = \frac{p(c+a)}{ca}$ .... (iii)

এখন (i) + (ii) + (iii) করে পাই,

$\log_k a + \log_k b + \log_k b + \log_k c + \log_k c + \log_k a = \frac{p(a+b)}{ab} + \frac{p(b+c)}{bc} + \frac{p(c+a)}{ca}$

বা, $2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = \frac{p(ca+bc)+p(ab+ca)+p(bc+ab)}{abc}$

বা, $2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = \frac{p(ca+bc+ab+ca+bc+ab)}{abc}$

বা, $2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = \frac{p(2ab+2bc+2ca)}{abc}$

বা, $2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = \frac{2p(ab+bc+ca)}{abc}$

বা, $\log_k a + \log_k b + \log_k c = \frac{p(ab+bc+ca)}{abc}$ ... (iv)

এখন,(iv) নং থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$\log_k a + \log_k b + \log_k c - \log_k a - \log_k b = \frac{p(ab+bc+ca)}{abc} - \frac{p(a+b)}{ab}$

বা, $\log_k c = \frac{p(ab+bc+ca) - p(ca+bc)}{abc}$

বা, $\log_k c = \frac{p(ab+bc+ca-ca-bc)}{abc}$

বা, $\log_k c = \frac{pab}{abc}$

বা, $\log_k c = \frac{p}{c}$

বা, $c\log_k c = p$

$\therefore \log_k c^c = p$ .... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে অনুরূপভাবে পাই,

$\therefore \log_k a^a = p$ .... (vi)

আবার, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে অনুরূপভাবে পাই,

$\therefore \log_k b^b = p$ .... (vii)

এখন (v), (vi) ও (vii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$\log_k c^c = \log_k a^a = \log_k b^b$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

(জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^z = y^z z^y = z^x x^z$

সমাধান :

মনে করি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = p$

তাহলে, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = p$

বা, $x(y+z-x) = p\log_k x$

বা, $y+z-x = \frac{p\log_k x}{x}$ .... (i)

আবার, $\frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = p$

বা, $(z+x-y) = \frac{p\log_k y}{y}$ .... (ii)

এবং $\frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = p$

বা, $x+y-z = \frac{p\log_k z}{z}$ .... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$y+z-x+z+x-y+x+y-z = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z}$

বা, $x+y+z = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z}$ ...(iv)

এখন (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$(x+y+z)-(y+z-x) = \left(\frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z}\right) - \frac{p\log_k x}{x}$

বা, $x+y+z-y-z+x = \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z}$

বা, $2x = \frac{pz\log_k y + py\log_k z}{yz}$

বা, $2xyz = p\log_k y^z + p\log_k z^y$

বা, $2xyz = p(\log_k y^z + \log_k z^y)$

বা, $\frac{2xyz}{p} = \log_k y^z + \log_k z^y$

$\therefore \frac{2xyz}{p} = \log_k(y^z.z^y)$ .... (v)

আবার, (iv)−(ii) থেকে পাই,

$x + y + z - z - x + y = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z} - \frac{p\log_k y}{y}$

বা, $2y = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k z}{z}$

বা, $2y = \frac{pz\log_k x + px\log_k z}{zx}$

বা, $2xyz = p(\log_k x^z + \log_k z^x)$

বা, $\frac{2xyz}{p} = \log_k x^z + \log_k z^x$

$\therefore \frac{2xyz}{p} = \log_k(x^z.z^x)$ .... (vi)

আবার, (iv) − (iii) নং থেকে পাই,

$x + y + z - x - y + z = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y} + \frac{p\log_k z}{z} - \frac{p\log_k z}{z}$

বা, $2z = \frac{p\log_k x}{x} + \frac{p\log_k y}{y}$

বা, $2z = \frac{py\log_k x + px\log_k y}{xy}$

বা, $2xyz = p\left(\log_k x^y + \log_k y^x\right)$

বা, $\frac{2xyz}{p} = \log_k x^y + \log_k y^x$

$\therefore \frac{2xyz}{p} = \log_k\left(x^y.y^x\right)$ .... (vii)

এখন, (v), (vi) ও (vii) নং তুলনা করে পাই,

$\log_k(y^z.z^y) = \log_k(x^z.z^x) = \log_k(x^y.y^x)$

বা, $y^z.z^y = x^z.z^x = x^y y^x$

বা, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ **(দেখানো হলো)**

[*বি: দ্র:* পাঠ্যবইয়ে $x^y y^z$ এর পরিবর্তে $x^y y^x$ হবে]

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ 'লগ সারণি' (মাধ্যমিক বীজগণিত দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(ক) $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ যেখানে $\pi \approx 3.1416$, $g = 981$ এবং $l = 25.5$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

বা, $p = 2 \times 3.1416 \times \sqrt{\frac{25.5}{981}}$

বা, $p = 6.2832 \times \sqrt{\frac{25.5}{981}}$

বা, $\log p = \log\left(6.2832 \times \sqrt{\frac{25.5}{981}}\right)$

বা, $\log p = \log 6.2832 \times \left(\frac{25.5}{981}\right)^{\frac{1}{2}}$

বা, $\log p = \log 6.2832 \times \frac{1}{2}(\log 25.5 - \log 981)$ .. (i)

এখন, log সারণি হতে পাই,

$\log p = 0.79818 + \frac{1}{2}(1.40654 - 2.99167)$

বা, $\log p = 0.79818 + 0.70327 - 1.495835$

বা, $\log p = 1.50145 - 1.495835$

বা, $\log p = 0.005615$

বা, $p = anti\log 0.005615$

$\therefore P = 1.01302$

সুতরাং $P = 1.01302$ (প্রায়) **(Ans.)**

(খ) $p = 10000 \times e^{0.05t}$ যেখানে $e = 2.718$ এবং $t = 13.86$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = 10000 \times e^{0.05t}$

বা, $p = 10000 \times (2.718)^{0.05 \times 13.86}$

বা, $\log p = \log \{10000 \times (2.718)^{0.05 \times 13.86}$

বা, $\log p = \log 10000 + \log (2.718)^{0.05 \times 13.86}$

বা, $\log p = \log 10000 + (0.05 \times 13.86)\log 2.718$

বা, $\log p = 4 + 0.693 \times 0.4342495$ [log সারণি হতে]

বা, $\log p = 4 + 0.300934903$

বা, $\log p = 4.300934903$

বা, $p = antilog\ 4.300934903$

সুতরাং $p = 19995.62$ (প্রায়) [atilog সারণি হতে] **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ $lnP \approx 2.3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে lnP এর আসন্ন মান নির্ণয় কর, যখন – (ক) $P = 10000$; (খ) $P = 0.00le^2$ (গ) $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

(ক) $p = 10000$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = 10000$

বা, $\log p = \log 10000$

বা, $\log p = 4$ [log সারণি হতে]

এখন, $lnp = 2.3026 \times 4 = 9.2104$ (প্রায়) **(Ans.)**

(খ) $p = 0.00le^2$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = 0.00le^2$

বা, $\log p = \log 0.001e^2$

বা, $\log p = \log 0.001 + 2\log 2.718$ $[\because e \approx 2.718]$

বা, $\log p = -3 + 2 \times 0.434249452$ [log সারণি হতে]

বা, $\log p = -3 + 0.868498904$

$\therefore \log p = -2.131501095$

$\therefore lnp = 2.3026 \times (-2.131501095)$

$= -4.90799$ (প্রায়) **(Ans.)**

(গ) $p = 10^{100} \times \sqrt{e}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $p = 10^{100} \times \sqrt{e}$

বা, $\log p = \log(10^{100} \times \sqrt{e})$

বা, $\log p = \log 10^{100} + \log\sqrt{e}$

বা, $\log p = 100\log 10 + \log e^{\frac{1}{2}}$

বা, $\log p = 100\log 10 + \frac{1}{2}\log e$

বা, $\log p = 100\log 10 + \frac{1}{2}\log 2.718$

বা, $\log p = 100 \times 1 + \frac{1}{2} \times 0.434249452$ [log সারণি হতে]

বা, $\log p = 100 + 0.217124726$

$\therefore \log p = 100.217124726$

$\therefore ln\, p = 2.3026 \times 100.217124726$

$= 230.76$ (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ লেখচিত্র অঙ্কন কর :

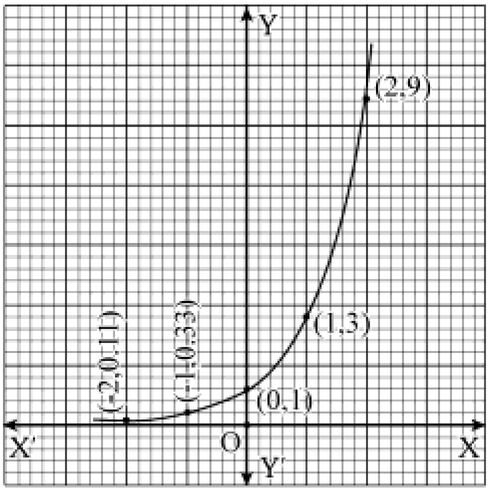
(ক) $y = 3^x$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = 3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–2	–1	0	1	2
y	0.11	0.33	1	3	9

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। x অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, 0.11), (–1, 0.33), (0, 1), (1, 3), (2, 9) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি।



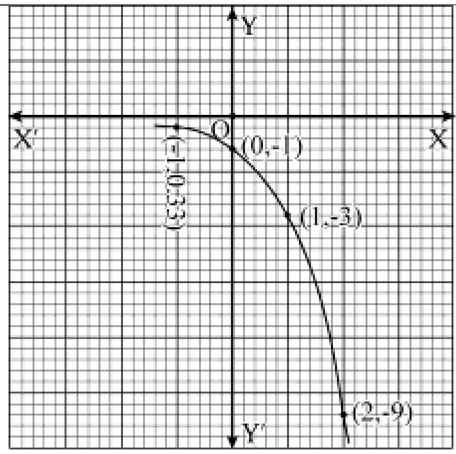
(খ) $y = -3^x$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = -3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–1	0	1	2
y	–0.33	–1	–3	–9

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। x অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–1, –0.33), (0, –1), (1, –3), (2, – 9) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



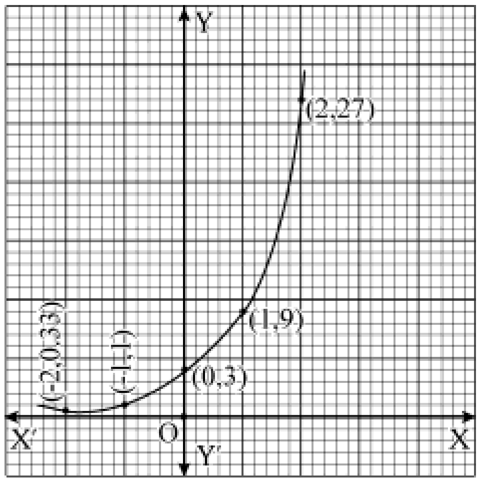
(গ) $y = 3^{x+1}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = 3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–2	–1	0	1	2
y	0.33	1	3	9	27

ছক কাগজে XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। x অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, 0.33), (–1, 1), (0, 3), (1, 9) ও (2, 27) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



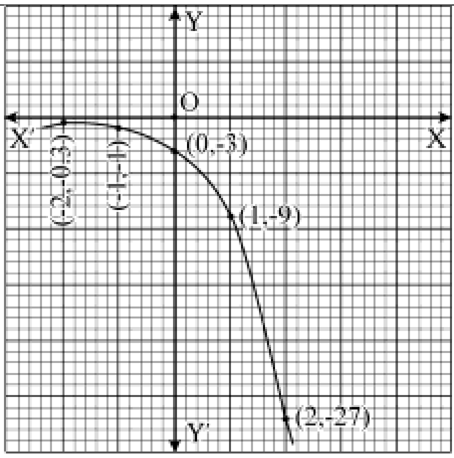
(ঘ) $y = -3^{x+1}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = -3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–2	–1	0	1	2
y	–0.33	–1	–3	–9	–27

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। x অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ ঘরের দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, –0.33), (–1, –1), (0, –3), (1, –9), (2, –27) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



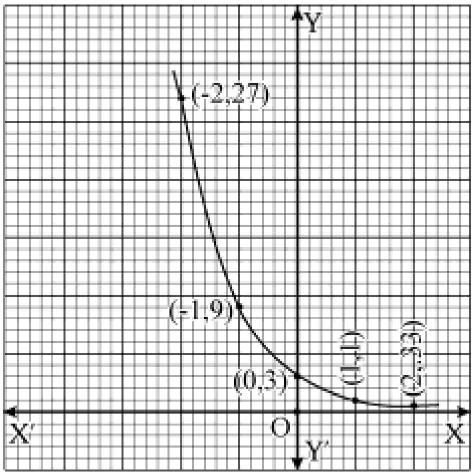
(ঙ) $\mathbf{y = 3^{-x+1}}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = 3^{-x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–2	–1	0	1	2
y	27	9	3	1	0.33

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। x অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অৰ বরাবর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, 27), (–1, 9), (0, 3), (1, 1), (2, 0.33) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে লেখচিত্র অঙ্কন করি।



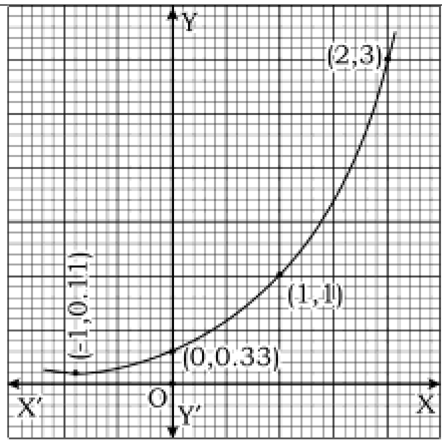
(চ) $\mathbf{y = 3^{x-1}}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $y = 3^{x-1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–1	0	1	2
y	0.11	0.33	1	3

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ আঁকি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দশ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–1, 0.11), (0, 0.33), (1, 1), (2, 3) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লেখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $\mathbf{y = 1 - 2^x}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^x$

বা, $2^x = 1 - y$

বা, $1 - y = 2^x$

বা, $\log_2(1 - y) = x$

বা, $x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2 1 + \log_2(1 - y)$ $[\because \log_2 1 = 0]$

বা, $x = \log_2 (1\cdot1 - y) = \log_2 (1 - y)$

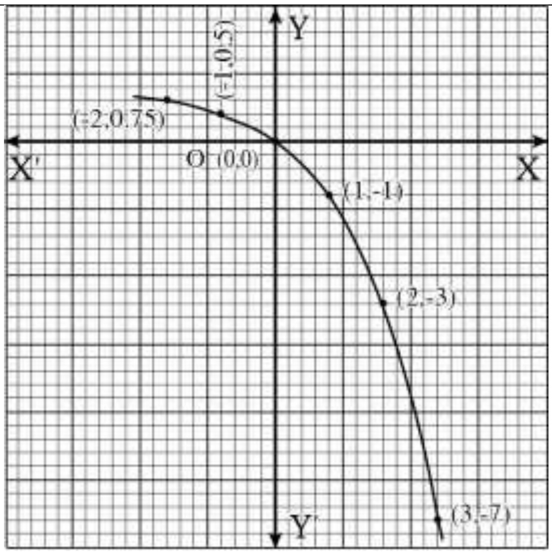
বা, $f^{-1}(y) = \log_2(1 - y)$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 (1 - x)$

লেখচিত্র অঙ্কন : $y = 1 - 2^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	–2	–1	0	1	2	3
y	0·75	0·5	0	–1	–3	3, –7

ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অৰ এবং YOY′ বরাবর y অৰ এবং 0 মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের চার বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, 0·75), (–1, 0·5), (0, 0), (1, –7), (2, –3)(3, –7) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে,



যখন $x = 0$ তখন $y = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, কাজেই লেখ রেখাটি $(0, 0)$ বিন্দুগামী।

যখন $x \to \infty$ তখন $y \to 1$

যখন, $x \to -\infty$ তখন $y \to -\infty$

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = (\infty, -\infty)$

ও রেঞ্জ, $R_f = (1 - \infty)$ **(Ans.)**

(খ) $\mathbf{y = \log_{10}x}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন, $y = \log_{10}x$

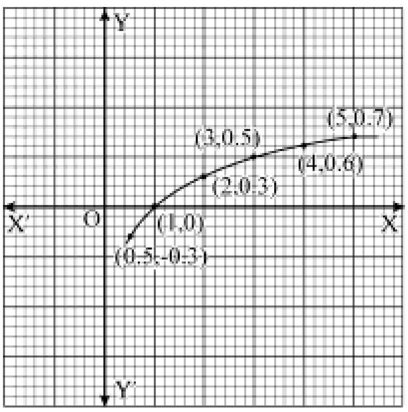
$$\therefore x = 10^y$$

$$\text{বা, } f^{-1}(y) = 10^y$$

$$\therefore f^{-1}(x) = 10^x$$

লেখচিত্র অঙ্কন : প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	0.5	1	2	3	4	5
y	–0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7



মনে করি, ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অক্ষ এবং YOY′ বরাবর y অক্ষ আঁকি এবং 0 মূলবিন্দু। ছক কাগজের x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অক্ষ বরাবর প্রতি দশ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (0.5, –0.3), (1, 0), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.6), (5, 0.7) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

যেহেতু লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয় এবং শূন্যতে অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = (0, \infty)$

আবার, লেখচিত্র হতে দেখা যায়,

যখন, $x \to 0$ তখন $y \to \infty$

যখন, $x \to \infty$ তখন $y \to \infty$

$\therefore$ রেঞ্জ, $R_f = (-\infty + \infty)$

(গ) $\mathbf{y = x^2, x > 0}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন, $y = x^2, x > 0$

ধরি, $y = f(x) = x^2$

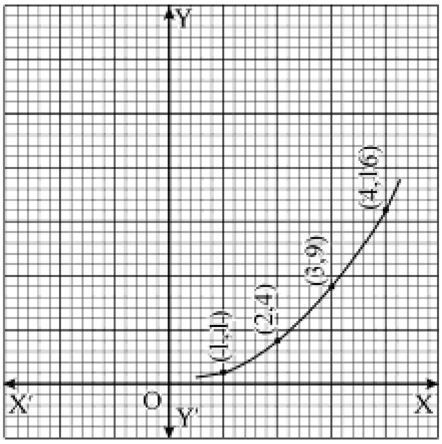
বা, $x = \sqrt{y}$; [$x > 0$ হওয়ায় ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়।]

বা, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

বা, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

লেখচিত্র অঙ্কন : প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16



মনে করি, ছক কাগজের XOX′ বরাবর x অক্ষ এবং YOY′ বরাবর y অক্ষ আঁকি এবং 0 মূলবিন্দু। x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

যেহেতু $y = x^2$, $x > 0$ সেহেতু 0 ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = (0, +\infty)$ এবং

রেঞ্জ $R_f = (0, +\infty)$

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ $f(x) = \ln(x - 2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর :

সমাধান :

আমরা জানি, লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ $f(x) = \ln(x - 2)$ এর মান বাস্তব হবে যদি

$$x - 2 > 0$$

বা, $x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$ **(Ans.)**

আবার, ধরি, $y = f(x) = \ln(x - 2)$

বা, $e^y = x - 2$

বা, $x - 2 = e^y$

বা, $x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব।

ফলে, $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ, $R_f = R$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $f(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{1-x}{1+x} > 0$ যদি

(i) $1 - x > 0$ এবং $1 + x > 0$ হয়।

অথবা, (ii) $1 - x < 0$ এবং $1 + x < 0$ হয়।

বা, $1 > x$ এবং $x > -1$

বা, $x < 1$ এবং $x > -1$

বা, $x > -1$ এবং $x < 1$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x > -1\} \cap \{x : x < 1\}$

$= \{-1, \infty\} \cap \{-\infty, 1\} = (-1, 1)$

(ii) বা, $1 < x$ এবং $x < -1$

বা, $x < -1$ এবং $x > 1$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\} = \Phi$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, D_f = (i) ও (ii) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-1, 1) \cup \Phi = (-1, 1)$

রেঞ্জ, $y = ln\frac{1-x}{1+x}$

বা, $e^y = \frac{1-x}{1+x}$

বা, $1 - x = e^y + xe^y$

বা, $xe^y + e^y = 1 - x$

বা, $xe^y + x = 1 - e^y$

বা, $x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, R_f = **R**.

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ডোমেন, রেঞ্জ উলেরখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

ক. $f(x) = |x|$ যখন $-5 \leq x \leq 5$

সমাধান :

$f(x) = |x|$ যখন $-5 \leq x \leq 5$

$$= \begin{cases} +x, & 0 \leq x \leq 5 \\ -x, & -5 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ডোমেন : এখানে $-5 \leq x \leq 5$ সীমার মধ্যে x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতিচ্ছবি রয়েছে।

ফাংশনের ডোমেন হলো $D_f = [-5, 5]$

রেঞ্জ : $-5 \leq x \leq 5$ সীমার মধ্যে x এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয় মানের জন্য $f(x)$ ধনাত্মক, আর $x = 0$ হলে $f(0) = 0$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = [0, 5]$

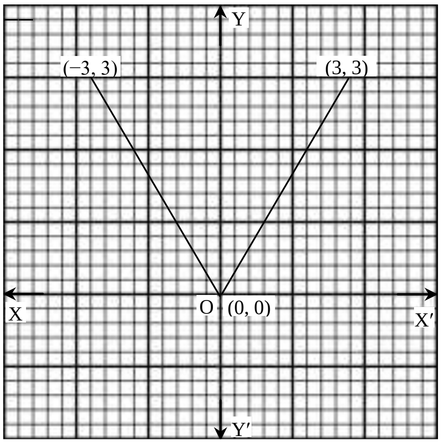
$f(x) = |x|$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

মনে করি, $y = f(x) = |x|$

-5 থেকে 5 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশিরষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো –

x	−3	0	3
y	3	0	3

এখন ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর 2 বর্গঘর = 1 একক এবং Y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।



খ. $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \leq x \leq 2$

সমাধান : এখানে, $-2 \leqslant x \leqslant 2$ সীমার মধ্যে x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ প্রতিচ্ছবি রয়েছে।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন, $D_f = [-2, 2]$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 0 + |0| = 0$

যখন $x = -2$ তখন $f(-2) = -2 + |-2| = -2 + 2 = 0$

যখন $x = 2$ তখন $f(2) = 2 + |2| = 2 + 2 = 4$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = [0, 4]$

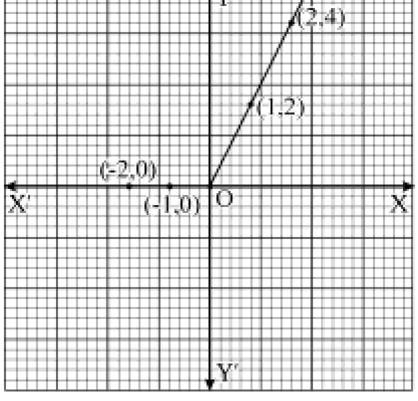
লেখচিত্র অঙ্কন :

প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \leq x \leq 2$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	−2	−1	0	1	2
y	0	0	0	2	4

ছক কাগজে XOX′ বরাবর x অক্ষ এবং YOY′ বরাবর y অক্ষ এবং 0 মূলবিন্দু। ক্ষুদ্রতম বর্গের চার বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (−2, 0), (−1, 0), (0, 0), (1, 2), (2, 4) বিন্দুগুলো স্থাপন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



(গ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান : প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$

এখানে, x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতিচ্ছবি রয়েছে বলে ফাংশনের ডোমেন হলো বাস্তব সংখ্যার সেট R

$\therefore$ ডোমেন, $D_f = R$

যখন, $x = 0$ তখন $f(x) = 0$

যখন, $x > 0$ তখন $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

যখন, $x < 0$ তখন $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ হলো, $R_f = \{-1, 0, 1\}$ যেখানে কেবল তিনটি উপাদান রয়েছে।

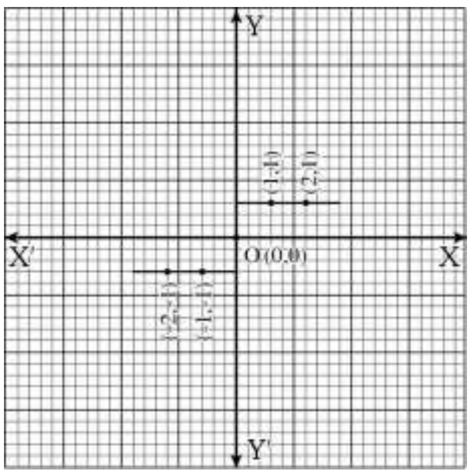
লেখচিত্র অঙ্কন :

ধরি, $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \text{ যখন } x \neq 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি।

x	–2	–1	0	1	2
y	–1	–1	0	1	1

ছক কাগজে XOX′ বরাবর x অক্ষ এবং YOY′ y অক্ষ এবং 0 মূলবিন্দু। ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি, (–2, –1), (–1, –1), (0, 0), (1, 1), (2, 1) বিন্দুগুলো স্থাপন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ দেওয়া আছে,

$\mathbf{2^{2x}.2^{y-1} = 64}$ **............................... (i)**

এবং $\mathbf{6x.\dfrac{6^{y-2}}{3} = 72}$ **..................... (ii)**

ক. (i) ও (ii) কে x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ. x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°। তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উলেরখ কর এবং এর ৰেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64$ .... (i)

এবং $6^x.\dfrac{6^y - 2}{3} = 72$ .... (ii)

(i) হতে পাই, $2^{2x+y-1} = 2^6$

বা, $2x + y - 1 = 6$

বা, $2x + y = 6 + 1$

$\therefore 2x + y = 7$

(ii) হতে পাই, $6^{x+y-2} = 72 \times 3$

বা, $6^{x+y-2} = 216$

বা, $6^{x+y-2} = 6^3$

বা, $x + y - 2 = 3$

$\therefore x + y = 5$

$\therefore$ সরলীকৃত সমীকরণদ্বয় হলো, $2x + y = 7$

$x + y = 5$

খ. ‘ক’ হতে পাই, $2x + y = 7$ .... (iii)

$x + y = 5$ .... (iv)

(iii) হতে (iv) বিয়োগ করে পাই, $2x + y - x - y = 7 - 5$

$\therefore x = 2$

x এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2 + y = 5$

$\therefore y = 3$

নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, 3)$

শুদ্ধি পরীৰা :

$x = 2, y = 3$ হলে (iii) নং সমীকরণের বামপৰ $= 2 \times 2 + 3 = 7$

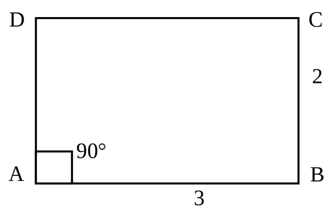
= ডানপৰ

আবার, $x = 2, y = 3$ হলে (iv) সমীকরণের বামপৰ $= 2 + 3 = 5$

= ডানপৰ

$\therefore$ প্রাপ্ত সমাধান সঠিক।

গ.



এখানে, ABCD চতুর্ভূর্জের দুইটি সন্নিহিত বাহু

$AB = y = 3$

$AD = x = 2$

যেহেতু $AB \neq AD$ এবং $AB = DC, AD = BC$

সুতরাং ABCD চতুর্ভুজটি একটি আয়ত।

$\therefore$ ৰেত্রফল $= xy = 2 \times 3$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক **(Ans.)**

এবং বর্গের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{AB^2 + BC^2}$ একক

$= \sqrt{3^2 + 2^2}$ একক

$= \sqrt{9 + 4}$ একক $= \sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ দেওয়া আছে, $\mathbf{\dfrac{\log (1 + x)}{\log x} = 2}$

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলক সংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত কর।

খ. প্রাপ্ত সমীকরণটিকে সমাধান কর এবং দেখাও যে, x এর কেবল একটি বীজ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

গ. প্রমাণ কর যে, মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেৰা 1 (এক) বেশি এবং তাদের লেখচিত্র পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

বা, $2 \log x = \log(1 + x)$

বা, $\log x^2 = \log(1 + x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

নির্ণেয় দ্বিতীয় সমীকরণ, $x^2 - x - 1 = 0$

খ. 'ক' থেকে পাই, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x = \frac{(-1)^2 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1(-1)}}{21} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

শুদ্ধি পরীৰা : $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ হলে,

বামপৰ $= \frac{\log(1+x)}{\log x} = \frac{\log\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

$= 2$ (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$=$ ডানপৰ

আবার, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ হলে,

বামপৰ $= \frac{\log\left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$

এর বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব নয়। কারণ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ ঋণাত্মক।

আবার ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদমের সম্ভব মান নেই। সুতরাং x এর মান কেবল একটি মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' হতে পাই, মূলদ্বয় যথাক্রমে,

$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ এবং $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .... (i)

$\therefore x_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 5 + 2\sqrt{5})$

$= \frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{5}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x_1^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = x_1 + 1$

আবার, $x_2^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{5} + 5)$

$= \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

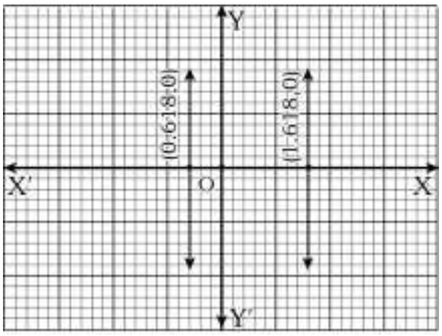
$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$\therefore x_2^2 = 1 + x_2$

সুতরাং মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেৰা 1 বেশি **(প্রমাণিত)**

এখন, $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$ এবং $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618$

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, (1.618, 0) এবং (–0.618, 0) বিন্দু দিয়ে y অৰের সমান্তরাল করে লেখরেখা দুইটি অঙ্কন করি।



লেখ হতে দেখা যায় রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ দেওয়া আছে, $y = 2^x$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক–এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

সমাধান :

ক. দেওয়া আছে, $y = 2^x$ যখন $x = 0$ তখন $y = 2^0 = 1$

আবার, x এর ঋণাত্মক যে কোনো মানের জন্য y এর মান কোনো সময় (0) শূন্যের খুবই কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু শূন্য হয় না।

অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to 0^+$

একইভাবে, x এর যে কোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরে) বৃদ্ধি পেতে থাকবে বা ∞ দিকে ধাবিত হবে।

অর্থাৎ, $x \to -\infty, y \to -\infty$

সুতরাং ডোমেন, $D_f = (-\infty, \infty)$

এবং রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

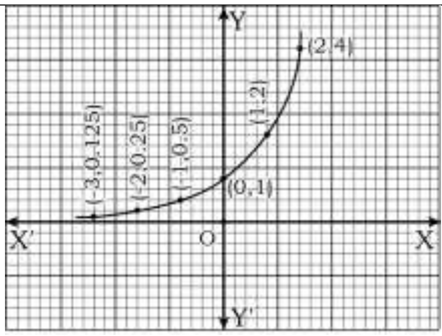
খ. $y = 2^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

প্রদত্ত ফাংশন $y = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর নিম্নরূ প তালিকা তৈরি করি।

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	0.125	0.25	0.5	1	2	4

ছক কাগজে XOX′ বরাবর x অৰ ও YOY′ বরাবর y অৰ এবং মূলবিন্দু O। ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি চার বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–3, 0.125), (–2, 0.25), (–2, 0.5), (0, 1), (1, 2), (2, 4) বিন্দুগুলো স্থাপন করে সাবলীলভাবে যোগ করে, $y = 2^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



$y = 2^x$ এর বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নরূপ :

(i) লেখচিত্রটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী

(ii) লেখচিত্রটি ঊর্ধ্বগামী; x এর মান বাড়ার সাথে সাথে 2^x এর মানও বাড়বে।

(iii) $x \to -\infty$ হলে $y = 2^x \to 0^+$

(iv) x এর যে কোন মানের জন্য y ধনাত্মক।

গ. দেওয়া আছে, $y = 2^x$

বা, $x = \log_2 y$

আমরা জানি, $y = f(x)$ হলে, $f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2 y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন, $f(x) = \log_2 x$

ধরি, $x_1 \in R$ এবং $x_2 \in R$

তাহলে, $f^{-1}(x_1) = \log_2 x_1$

এবং $f^{-1}(x_2) = \log_2 x_2$

এখন, $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$

বা, $x_1 = x_2$

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনটি এক-এক।

বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে অর্থাৎ $y = \log_2 x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করাই যথেষ্ট।

যেহেতু $y = \log_2 x$ হলে $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন।

$y = x$ রেখার সাপেৰে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে, যা $y = x$ রেখার সাপেৰে সদৃশ।

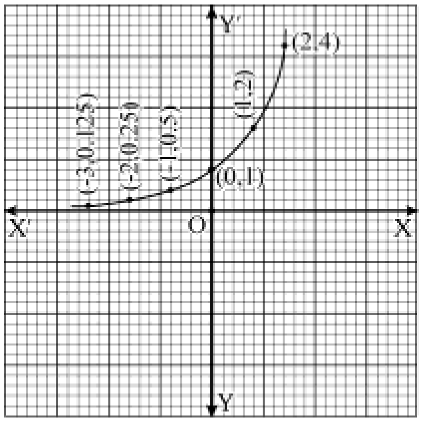
আবার, $2^0 = 1$ কাজেই $y = \log_2 1 = 0$

সুতরাং রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

যখন $x \to -\infty$ তখন $y \to 0$

$\therefore y = \log_2 x$ রেখাটি বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

নিচে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।



গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. $\log_{\sqrt{2}} 16\sqrt{2}$ = কত?

(ক) $2\sqrt{2}$ (খ) 4 (গ) 8 ● 9

২. $M = 1 + \log_p qr$ হলে, p^M = কত?

(ক) $p + qr$ (খ) $1 + qr$ ● pqr (ঘ) qr

৩. $a^x = y$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\log_a x = y$ (খ) $\log y = x$ ● $\log_a y = x$ (ঘ) $x \log a = y$

৪. $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)$ এর মান কত?

(ক) 5 (খ) -5 (গ) 2 ● -2

৫. যদি $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয় তবে–

i. $\log_b^p = \log_a^p \times \log_b^a$ ii. $\log_b \sqrt[4]{b} = \frac{1}{4}$

iii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log\sqrt{c} = \frac{1}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬. $\log_a \log_a \log_a (a^a)^a$ এর মান কত?

(ক) 0 ● 1 (গ) a (ঘ) -1

৭. $\log_4{}^2 + \log_6{}^{\sqrt{6}}$ = কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ ● 1 (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) -2

৮. $p = \log_a b + \log_c c$ হয় তবে $1 + p$ = কত?

(ক) 1 (খ) $1 + bc$

● $\log_a abc$ (ঘ) $abc \log_a 1$

৯. যদি $a^x = b$ হয়, যখন $a > 0, n \in N$; তখন–

i. $\log_a b = x$ ii. $\log_a a^b = b$

iii. $\log_a b = \log_5 b \log_a 5$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১০. 400 এর–

i. মান $(2\sqrt{5})^4$ এর সমান ii. লগ 4 হলে ভিত্তি $2\sqrt{5}$

iii. $2\sqrt{5}$ ভিত্তিক লগ 4

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

অতিরিক্ত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৯·৬ : লগারিদম

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১১. ধনাত্মক সংখ্যার N এর সাধারণ লগারিদমকে কয়টি অংশের সমষ্টি দিয়ে প্রকাশ করা যায়? (সহজ)

ⓚ একটি ● দুইটি ⓖ তিনটি ⓘ চারটি

১২. $a > 0$ এবং $a \neq 1$ যদি $a^x = y$ হয় তবে x কে বলা হয় y এর a ভিত্তিক— (সহজ)

● লগারিদম ⓚ সূচক ⓖ ঘাত ⓘ অংশক

১৩. $a > 0$ এবং $a\neq1$ এবং $y > 0$ হলে y এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে নিচের কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়? (সহজ)

ⓚ $\log a$ ⓚ $\log_y a$ ● $\log_a y$ ⓘ $\log_e y$

১৪. $\log_a y = x$ যদি ও কেবল যদি— (সহজ)

● $a^x = y$ হয় ⓚ $a^o = x$ হয় ⓖ $a^y = x$ হয় ⓘ $a^{\frac{1}{x}} = y$ হয়

১৫. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓚ –1 ● –2 ⓘ –3

১৬. $\log_{64}256$ এর মান কত? (কঠিন)

● $\frac{4}{3}$ ⓚ $\frac{2}{3}$ ⓖ $\frac{3}{4}$ ⓘ $\frac{1}{2}$

১৭. $\log_{10}1000$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ 2 ● 3 ⓖ 4 ⓘ 1.001

১৮. স্বাভাবিক লগারিদম $\log_e y$ কে নিচের কোন প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়? (সহজ)

● ln y ⓚ y ln y ⓖ $ly\frac{1}{y}$ ⓘ log y

১৯. প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যার লগারিদমের কয়টি অংশ থাকে? (সহজ)

● দুইটি ⓚ তিনটি ⓖ চারটি ⓘ পাঁচটি

২০. $\log_3 \frac{1}{81}$= এর মান কোনটি? (কঠিন)

ⓚ –1 ⓚ –2 ⓖ –3 ● –4

ব্যাখ্যা : $\log_3 \frac{1}{81} = \log_3 \frac{1}{3^4} = \log_3 3^{-4} = -4\log_3 3 = 4\cdot1 = -4$

২১. b = anti $\log_3 x$ কি নির্দেশ করে? (মধ্যম)

● b সংখ্যাটিকে ভিত্তি ধরে a এর সাপেৰে x এর প্রতিলগ
ⓚ a সংখ্যাটিকে ভিত্তি ধরে x এর সাপেৰে b এর প্রতিলগ
ⓖ x সংখ্যাটিকে ভিত্তি ধরে b এর সাপেৰে a এর প্রতিলগ
ⓘ x সংখ্যাটিকে ভিত্তি ধরে a এর সাপেৰে b এর প্রতিলগ

২২. $a > 0, a \neq 1$ হলে, $a^x = b$ এর ৰেত্রে x কে কী বলা হয়? (মধ্যম)

● b এর a ভিত্তিক লগারিদম ⓚ a এর b ভিত্তিক লগারিদম
ⓖ a এর n ভিত্তিক লগারিদম ⓘ b এর e ভিত্তিক লগারিদম

ব্যাখ্যা : $a^x = b$ যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম $a^x = b$বা $x = \log_a b$

২৩. $\log_a b = x$ হলে নিচের কোনটি সত্য? (সহজ)

● $a^x = b$ ⓚ $a^o = b$ ⓖ $x^a = b$ ⓘ $x^o = b$

২৪. $\log_{16}256$ এর মান কোনটি? (কঠিন)

ⓚ 1 ● 2 ⓖ 3 ⓘ 4

ব্যাখ্যা : $\log_{16}256 = \log_{16}16^2 = 2\log_{16}16 = 2\cdot1 = 2$

২৫. $4^x = 16$ হলে x এর মান কত? (সহজ)

ⓚ 1 ● 2 ⓖ 4 ⓘ 8

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

২৬. a, m, n, x চলক হলে—

i. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ হবে, যদি $m < n$ হয়
ii. x (R, a (0 হলে, a(n = বয় াাভ(১ ,ধহ)
iii. $\log_{\sqrt{8}} x = 1\frac{1}{3}$ হলে, $x = 4$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

২৭. i. e ভিত্তিক লগারিদম হলো স্বাভাবিক লগারিদম
ii. ব্যবহারিক গণিতে সাধারণত e ভিত্তিক লগারিদম ব্যবহৃত হয়
iii. ব্রিগসিয়ান লগারিদম 10 ভিত্তিক লগারিদম

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ● i ও iii ⓖ ii ও iii ⓘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ২৮–৩১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$$\frac{\log a}{y-z} = \frac{\log b}{z-x} = \frac{\log c}{x-y} = k$$

২৮. $\log a^x$ এর মান কত? (মধ্যম)

● $k(xy - zx)$ ⓚ $k(zx - xy)$
ⓖ $k(yz - zx)$ ⓘ $k(xy - yz)$

২৯. $\log a^x + \log b^y + \log c^z$ = কত? (মধ্যম)

● 0 ⓚ xyz ⓖ –1 ⓘ $\log_a abc$

৩০. $a^x.b^y.c^z$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓚ 2 ● 1 ⓘ k

৩১. x = a, y = b এবং z = c হলে $\log a^x + \log b^y + \log c^z$ = কত? (সহজ)

ⓚ –1 ● 0 ⓖ 1 ⓘ অসংজ্ঞায়িত

৯·৭ : লগারিদমের সূত্রাবলী

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩২. যদি $a\neq 1$ হয়, তবে $a^1 = a$ তাহলে, $\log_a a$ = কত? (সহজ)

● 1 ⓚ 0 ⓖ 3 ⓘ $\frac{1}{a}$

৩৩. $\log_a b \times \log_b a = 1$ হলে, $\log_a p$ = কত? (কঠিন)

● $\frac{\log_b p}{\log_b a}$ ⓚ $\log_p(ab)$ ⓖ $\log_b p$ ⓘ $\log_a\left(\frac{1}{p}\right)$

৩৪. $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b$ = কত? (কঠিন)

ⓚ loga ⓚ logb ● $\log_a b$ ⓘ $\log_b a$

৩৫. যেখানে $10^x = y$ এবং $y > 0$ হলে, y এর সাধারণ লগারিদম নিচের কোনটি? (সহজ)

ⓚ $x = \log\left(\frac{1}{y}\right)$ ⓚ $x = \log_{10}x$

ⓖ $x = \log_k y$ ● $x = \log_{10} y$

৩৬. সাধারণ লগারিদম $\log_{10}y$ কে সচরাচর ভিত্তি 10 উহ্য রেখে নিচের কোনটি প্রকাশ করা হয়? (সহজ)

ⓚ $\log\frac{1}{y}$ ⓚ $\log\frac{1}{x}$ ⓖ $\log x$ ● $\log y$

৩৭. যদি $\log a = n$ হয় তবে a কে n এর কী বলা হয়? (সহজ)

ⓚ লগ তালিকা ⓚ প্রতিলগ ⓖ *Anti* log ● খ + গ

৩৮. $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ⓚ –1 ● 0 ⓖ 1 ⓖ 2

৩৯. $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^b}\right)$ এর মান কত? (কঠিন)

ⓚ a ● b ⓖ 1 ⓖ a^{a^b}

৪০. $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$ হলে x এর মান কোনটি? (কঠিন)

ⓚ 2 ⓚ 8 ⓖ 16 ● 32

ব্যাখ্যা : $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

বা, $x = (\sqrt{8})^{\frac{10}{3}} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} = 2^5 = 32$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪১. i. $\log_2 8 = 3$
ii. $\log_3 81 = 4$
iii. $\log_4 16 = 2$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৪২. যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়, তবে–
i. $\log_a 1 = 0$
ii. $\log_a a = 1$
iii. $\log_a 1 = 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

৪৩. i. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 35$
ii. $\log_5 64 = 6\log_5 2$
iii. $\frac{1}{3}\log_7 64 = \log_7 4$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ⓚ i ও ii ● ii ও iii ⓖ i ও iii ⓖ i, ii ও iii

৪৪. $a > 0, a \neq 1$ হলে–
i. $\log_a M^r = r\log_a M$
ii. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
iii. $\log_a M = \log_b M \times \log_a N$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৫ – ৪৭ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি ফাংশন $f(x) = \frac{x}{|x|}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং $x \in IR$

৪৫. $f(0)$ = কত? (সহজ)

ⓚ 0 ⓚ 1 ● অসংজ্ঞায়িত ⓖ $\sqrt{2}$

৪৬. $f(x)$ এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

ⓚ IR ⓚ ϕ ⓖ $IR = \{1\}$ ● $IR - \{0\}$

৪৭. $f(x)$ এর রেঞ্জ কত? (কঠিন)

ⓚ {1} ⓚ {–1} ● {–1, 1} ⓖ ϕ

নিচের তথ্যের আলোকে ৪৮ – ৫০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$\log_a abc = x, \log_b abc = y, \log_c abc = z$

৪৮. $\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ 0 ⓚ 1 ⓖ $\frac{1}{y}$ ● $-\frac{1}{y}$

৪৯. যদি xyz = 1 হয়, তবে xy + yz + zx = কত? (কঠিন)

ⓚ 0 ● 1 ⓖ $\log_a abc$ ⓖ abc

৫০. $\frac{1}{1+x}$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ $1 + \log_a bc$ ⓚ $\log_a bc$ ⓖ 0 ● $\log_a a^2bc$

৯·৭ : সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৫১. $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^b}\right)$ এর মান কত? (কঠিন)

ⓚ a ● b ⓖ 1 ⓖ a^{a^b}

৫২. $\log_{2\sqrt{5}} 400 = x$ হলে x এর মান কত? (কঠিন)

ⓚ –1 ⓚ 1 ⓖ 2 ● 4

৫৩. logarithm শব্দটি এসেছে কোন শব্দ থেকে? (সহজ)

ⓚ ল্যাটিন ⓚ পর্তুগিজ ● গ্রিক ⓖ ফরাসি

৫৪. $\log_2 64$ = কত? (মধ্যম)

ⓚ 2 ● 6 ⓖ 8 ⓖ 64

৫৫. $\log_8 64$ = কত? (মধ্যম)

● 2 ⓚ 4 ⓖ 8 ⓖ 16

৫৬. $\log_a(M \times N)$ = কত? (সহজ)

● $\log_a M + \log_a N$ ⓚ $\log_M a + \log_a N$
ⓖ $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)$ ⓖ $\log_a M - \log_a N$

৫৭. $y = 2^x$ এই ফাংশনের রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

● $(0, \infty)$ ⓚ $(-\infty, \infty)$
ⓖ $(-\infty, 0)$ ⓖ R

৫৮. $y = 2^x$ রেখাটি– (মধ্যম)

ⓚ মূলবিন্দুগামী ● (0, 1) বিন্দুগামী
ⓖ (0, 2) বিন্দুগামী ⓖ (0, 3) বিন্দুগামী

৫৯. নিচের কোনটি লগারিদমিক ফাংশন? (সহজ)

ⓚ $y = 2^x$ ⓚ $y = x^2 + 3x + 2$
● $y = ln\frac{2+x}{2-x}$ ⓖ $y = 2^{2x}$

৬০. $y = 3^x$ এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

ⓚ $(-\infty, 0)$ ⓚ $(0, \infty)$
ⓖ $[0, \infty)$ ● $(-\infty, \infty)$

৬১. $y = 3^x$ এর বিপরীত ফাংশনের ডোমেন কত?

ⓚ $(-\infty, \infty)$ ● $(0, \infty)$ ⓖ $(0, -\infty]$ ⓖ $(0, 1]$

৬২. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ একটি– (সহজ)

● ফাংশন　　　　Ⓚ সূচক ফাংশন

Ⓖ লগারিদমিক ফাংশন　　　　Ⓖ বিপরীত ফাংশন

৬৩. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

ক $I\!R$　খ $I\!R - 204$　● $I\!R - \{0\}$　ঘ $(-\infty, 0]$

৬৪. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ এর রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

ক $I\!R$　খ $I\!R - \{0\}$　গ $\{1, 1\}$　● $\{-1, 1\}$

৬৫. $y = ln\frac{a+x}{a-x}$ ফাংশনটির রেঞ্জ কত? (কঠিন)

ক $I\!R - \{a\}$　খ $I\!R$　● $I\!R - \{a\}$　ঘ $I\!N$

৬৬. $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}}$; $-2 < x < 0$ এই ফাংশনের ডোমেন কত? (মধ্যম)

ক $(-1, 0)$　খ $(-1, 0]$　● $(-2, 0)$　ঘ $(2, 0)$

৬৭. $y = a^x$, $a > 1$ তবে এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

ক $(-\infty, \infty]$　খ $(-\infty, 0]$　গ $(0, \infty)$　● $(-\infty, \infty)$

৬৮. $\log_x x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$ = কত? (মধ্যম)

ক $\frac{3}{2}$　খ $\frac{5}{6}$　গ $\frac{4}{6}$　● $\frac{11}{6}$

৬৯. $\log_{\sqrt{2}} x = 10$ হলে, x = কত? (মধ্যম)

● 32　খ 23　গ $\frac{10}{3}$　ঘ $\frac{3}{10}$

৭০. পরমমান ফাংশন $f(x) = |x|$ এর ডোমেন কত? (সহজ)

● $I\!R$　খ $\varnothing$　গ $\{0\}$　ঘ $(0, \infty)$

৭১. পরমমান ফাংশন $f(x) = |x|$ এর রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

ক $(-\infty, \infty)$　খ $(0, \infty)$　গ $(\infty, 0)$　● $[0, \infty)$

৭২. $y = ln\frac{5+x}{5-x}$ ফাংশনটিতে $x \to 5$ হলে, y এর মান কত? (সহজ)

ক 0　● ∞　গ 1　ঘ 10

৭৩. নিচের কোনটি x- কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়?

ক $b = \log_a x$　　খ $b = \log_x b$

● $x = \log_a b$　　ঘ $b = \log_b a$

৭৪. $y = 3^x$ এর রেঞ্জ কত?

ক $(-\infty, 0)$　● (০, ()　গ (০, (()　ঘ (((, ()

৭৫. $y = 3^x$ এর বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ কত?

ক $(0\ \infty)$　খ $(-\infty$, ০)　● $(-\infty, \infty)$　ঘ $(-1.\ 1)$

৭৬. $y = 1n\frac{a+x}{a-x}$ ফাংশনটির ডোমেন কত?

ক $(-1, 1)$　খ $(-\infty, \infty)$　● $(-a\ \ a)$　ঘ $(a, -a)$

৭৭. $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x \le 2$ এর ডোমেন কত?

● $(-2, 2)$　খ $(0, -2)$　গ $(0\ 2)$　ঘ $(0.\ 3)$

৭৮. $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x \le 2$ এর রেঞ্জ কত?

ক $(2, 2)$　খ $(0, 2)$　গ $(0, 3)$　● $(0, 4)$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৯. $a > 0$ হওয়ায় সকল $x \in I\!R$ এর জন্য $a^x > 0$ এবং $y \le 0$ হলে–

i. y এর a ভিত্তিক কোনো লগারিদম নেই

ii. y এর a ভিত্তিক লগারিদম আছে

iii. a এর y ভিত্তিক লগারিদম নেই

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i　খ ii　গ i ও iii　ঘ i ও iii

৮০. $\log_a y = x$ যদি ও কেবল যদি $a^x = y$ হয়–

i. $\log_a(a^x) = x$

ii. $a\log_a y = y$

iii. $a\log_a y = xy\overset{\underline{1}}{x}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii　● i ও iii　গ ii ও iii　ঘ i, ii ও iii

৮১. $x > 0$, $y > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে, $x = y$ হবে যদি–

i. $\log_a x > 0$

ii. $\log_a x = \log_a y$

iii. $\log_a y > 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii　খ i ও iii　গ ii ও iii　● i, ii ও iii

৮২. $P = \log_a bc$ হলে $1 - p$ = কত?

i. $1 - \log_a bc$

ii. $\log_a a - \log_a bc$

iii. $\log_a\left(\frac{a}{bc}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii　খ i ও iii　গ ii ও iii　● i, ii ও iii

৮৩. i. $\log_a PQ = \log_a P + \log_a Q$

ii. $\log_a PQ = \log_a P.\log_a Q$

iii. $\log_a\left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P + \log_a\left(\frac{1}{Q}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii　খ ii ও iii　● i ও iii　ঘ i, ii ও iii

৮৪. i. $\log_5 12 = 2\log_5 2\sqrt{3}$

ii. $\log_5 3\ \log_3 5 = 1$

iii. $x_{logay} = y_{logax}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii　খ i ও iii　গ ii ও iii　ঘ i, ii ও iii

৮৫. $y = f(x) = e^{-x}$; $2 < e < 3$

i. এক্ষেত্রে $x \to \infty$ হলে, $y \to 0^+$ হয়

ii. এটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী

iii. $x \to -\infty$ হলে, $y \to \infty$ হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii　খ i ও iii　গ ii ও iii　● i, ii ও iii

৮৬. $a, b > 0$ এবং $a \neq b$ হলে–

i. $(a^p)^{qr} = a$ হলে, $pqr = 1$

ii. $(a^{xy})(a^{xy})^{z^2} = a^2$ হলে, $xyz = 1$

iii. $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii　খ ii ও iii　● i ও iii　ঘ i, ii ও iii

৮৭. $f(x) = 2^x$ হলে–

i. $f(x)$ এর ডোমেন $= (-\infty, \infty)$

ii. $f(x)$ এর রেঞ্জ $= (0, \infty)$

iii. $f^{-1}(x) = \log_2 x$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৮৮ ও ৮৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$y = x^2; x > 0$

৮৮. ফাংশনটির ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $\mathbb{R}$ ● $(0, \infty)$ (গ) $\mathbb{R} - \{0\}$ (ঘ) $\mathbb{N}$

৮৯. ফাংশনটির রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

● $(0, \infty)$ (খ) $\mathbb{R} - \{0\}$ (গ) $\mathbb{R} - \{2\}$ (ঘ) $(-\infty, 9[$

$f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x < 2$

উপরের বর্ণনা হতে ৯০ – ৯২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৯০. ফাংশনটি একটি– (সহজ)

(ক) লগারিদমিক ফাংশন ● পরমমান ফাংশন
(গ) সূচক ফাংশন (ঘ) বিপরীত ফাংশন

৯১. প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $(-2, 2)$ (খ) $[-2, 2]$ (গ) $(-2, 2]$ ● $[-2, 2)$

৯২. প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

(ক) $(0,4)$ (খ) $(0, 4]$ (গ) $\{0, 4\}$ ● $(0, 4)$

$$\frac{\log_k a}{y - z} = \frac{\log_k b}{z - x} = \frac{\log_k c}{x - y}$$

উপরের রাশি হতে ৯৩ – ৯৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৯৩. $a^x b^y c^z$ = কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) xyz ● 1 (ঘ) $\frac{1}{xyz}$

৯৪. $a^{y^2 + yz + z^2} . a^{z^2 + zx + x^2} . a^{x^2 + xy + y^2}$ = কত? (কঠিন)

(ক) 0 ● 1 (গ) $\log_k a$ (ঘ) ∞

৯৫. $a^{y+z} . b^{z+x} . c^{x+y}$ = কত? (কঠিন)

(ক) 0 (খ) $z - x$ (গ) $y^2 - z^2$ ● 1

নির্বাচিত বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৯৬. $y = 1n\,(x - 2)$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $(x - 2)^c = y$ ● $e^y = x - 2$
(গ) $e^{x-2} = y$ (ঘ) $e^{-y} = x - 2$

৯৭. log 0 এর মান কত?

(ক) 0 ● নাই (গ) ∞ (ঘ) 1

৯৮. $F(x) = 2x$ এ $x \to \infty$ হলে $y = F(x)$ এর মানের ৰেত্রে কোনটি সঠিক?

● $y \to \infty$ (খ) $y \to 0$ (গ) $y = 0$ (ঘ) $y \to \infty$

৯৯. $y = 1 - 3^{-x}$ বিপরীত ফাংশন কোনটি?

(ক) $\log_3 (1 - y)$ ● $\log_3 \left(\frac{1}{1 - x}\right)$
(গ) $1 - 3^x$ (ঘ) $3^x - 1$

১০০. যদি $a > 1$ এবং $0 < x < 1$ হয় তবে–

● $\log_a x < 0$ (খ) $\log_a x > 0$
(গ) $\log_a x = 0$ (ঘ) $\log_a a = 0$

১০১. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনের রেঞ্জ কত?

● $\{-1, 1\}$ (খ) $\{0, 1\}$ (গ) $\{0, -1\}$ (ঘ) $\{0, 0\}$

১০২. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ এবং x বাস্তব সংখ্যা হলে, f(0) = কত?

(ক) 0 (খ) 1 ● অসংজ্ঞায়িত (ঘ) –1

১০৩. $\frac{\log_k (1 + 3x)}{\log_k{}^x} = 2$ হলে এর দ্বিঘাত সমীকরণ নিচের কোনটি?

(ক) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (খ) $x^2 - 3x + 1 = 0$
(গ) $x^2 + 3x - 1 = 0$ ● $x^2 - 3x - 1 = 0$

১০৪. $\log_{10} (999 + x) = 3$ হলে, x এর মান কত?

(ক) 0 ● 1 (গ) 2 (ঘ) 3

১০৫. $a > 0, a \ne 1$ হলে–

i. $\log_a M^r = r\log_a M$
ii. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
iii. $\log_a \frac{M}{N} = \frac{\log_a M}{\log_a N}$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১০৬. $f(x) = 2^x$

i. f(x) এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$
ii. f (x) এর রেঞ্জ $(0, \infty)$
iii. $f^{-1}(x) = \text{lgo}_2 x$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১০৭. $f(x) = 3^x$

i. একটি সূচক ফাংশন
ii. একটি এক–এক ফাংশন
iii. এর বিপরীত ফাংশন $\log_3 x$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii ● i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১০৮ – ১১১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$f(x) = 3x^2$ একটি সূচকীয় ফাংশন, যেখানে $x \in R$

১০৮. $f^{-1}(3)$ = কত?

(ক) 0 ● 1 (গ) 3 (ঘ) 9

১০৯. উপরোক্ত ফাংশনটির ডোমেন কত?

● $[0, \infty]$ (খ) $[-\infty, 0]$ (গ) N (ঘ) R

১১০. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশনের ডোমেন কত?

● $[0, \infty]$ (খ) $[0, \infty]$ (গ) $[-\infty, \infty]$ (ঘ) d

১১১. ফাংশনটির রেঞ্জ হয়?

(ক) $[-\infty, 0]$ (খ) $[-\infty, \infty]$ (গ) R ● R_+

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১১২. নিচের সমীকরণগুলো লৰ কর :

i. $16^x = 4^{x+2}$
ii. $2^x = 8$
iii. $\sqrt{x - 4 + 2} = \sqrt{x + 12}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১১৩. i. $3x^2 = 3^4$ হলে $x = \pm 2$

ii. $2^2 = 9$ হলে, $y = \pm 3$

iii. $2.3^y = 18$ হলে, $y = 2$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৪. i. $a^m.a^n = a^{m+n}$

ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iii. $(a^m)^n = a^{mn}$ যেখানে $a \neq 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৫. i. $a \neq 0$ হলে $a^\circ = 1$

ii. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ iii. $a^n = \frac{1}{a^{-(-n)}}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১১৬. i. $\log_a a = 1, a > 0, a \neq 1$

ii. $\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l = \left(\frac{a^n}{a^m}\right)^l$

iii. $\log_a 1 = 0, a > 0, a \neq 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii ● i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

১১৭. $a > 0, a \neq 1$ হলে—

i. $\log_a M^r = r \log_a M$ ii. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

iii. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৮. i. $x \neq 0, a > 0, b > 0$ এবং $a^x = b^x$ হলে $a = b$

ii. $a^m = a^n$ এবং $a \neq 0$ হলে $m = n$

iii$\log_b a \times \log_a b = 1$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ● i, ii ও iii

১১৯. i. $(aP)^{ar} = a$ হলে $pqr = 0$

ii. $\{(a^{xy})(a^{xy})\}^z = a^2$ হলে $xyz = 1$

iii. $\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii ● ii ও iii ঘ i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্য থেকে ১২০ ও ১২১ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

১২০. $\frac{b^{2x}}{a^{2x}}$ **= কত?** (মধ্যম)

ক a ● a^2 গ $\sqrt{a}$ ঘ $\frac{1}{a^2}$

১২১. $\log_k a$ **এর মান নিচের কোনটি—** (কঠিন)

ক $\log_k\left(\frac{a}{b}\right)$ খ $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)$

গ $x\log_k\left(\frac{a}{b}\right)$ ● $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right)$

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸ $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, z = xy^{c-1}$

ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = b^{\frac{a}{b}-1}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p} = 0$ ৪

গ. $(b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^b = b^a$

দেখাতে হবে যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(b^a)^{\frac{1}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{(a^b)^{\frac{1}{b}}}$ [$\because a^b = b^a$]

$= \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a^1} = a^{\frac{a}{b}-1}$ = (ডানপক্ষ)

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ **= (দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

বামপক্ষ $= (b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p}$

$= (a + b)\log\frac{p}{q} + (b + c)\log\frac{q}{r} + (c + a)\log\frac{r}{q}$

$= (a + b)\log\frac{xy^{a-1}}{xy^{b-1}} + (b + c)\log\frac{xy^{b-1}}{xy^{c-1}} + (c + a)\log\frac{xy^{c-1}}{xy^{a-1}}$

$= (a + b)\log\frac{y^{a-1}}{y^{b-1}} + (b + c)\log\frac{y^{b-1}}{y^{c-1}} + (c + a)\log\frac{y^{c-1}}{y^{a-1}}$

$= (a + b)\log y^{a-1-b+1} + (b + c)\log y^{b-1-c+1} + (c + a)\log y^{c-1-a+1}$

$= (a + b)\log y^{a-b} + (b + c)\log y^{b-c} + (c + a)\log y^{c-a}$

$= (a + b)(a - b)\log y + (b + c)(b - c)\log y + (c + a)(c - a)\log y$

$= (a^2 - b^2)\log y + (b^2 - c^2)\log y + (c^2 - a^2)\log y$

$= (a^2 - b^2 + b^2 - c^2 + c^2 - a^2)\log y$

$= 0 \times \log y = 0$ = (ডানপক্ষ)

$\therefore (b + a)\log\frac{p}{q} + (c + b)\log\frac{q}{r} + (a + c)\log\frac{r}{p} = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$

$(b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $= (b - c)\log p + (c - a)\log q + (a - b)\log r$

$= (b - c)\log(xy^{a-1}) + (c - a)\log(xy^{b-1}) + (a - b)(xy^{c-1})$

$= (b - c)\log x + (b - c)\log y^{a-1} + (c - a)\log x + (c-a)\log y^{b-1} + (a - b)\log x + (a - b)\log^{c-1}$

$= (b-c)\log x + (b-c)(a-1)\log y + (c-a)\log x + (c-a)$
$(b-1)\log y + (a-1)\log x + (a-b)(c-1)\log y$
$= (b-c+c-a+a-b)\log x + \{(b-c)(a-1)$
$+ (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\}\log y$
$= 0 \times \log x + \{(b-c)(a-1)$
$+ (c-a)(b-1) + (a-b)(c-1)\}\log y$
$= 0 + \{(ab-ca-b+c) + (bc-ab-c+a)$
$+ (ca-bc-a+b)\}\log y$
$= (ab-ca-b+c+bc-ab-c+a+ca-bc-a+b)\log y$
$= 0 \times \log y = 0$

নির্ণেয় মান 0

প্রশ্ন–২ ▸ যদি $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ হয়, তবে–

ক. অনুপাতগুলোর মান k ধরে, $\log a^a$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = a^a.b^b.c^c$. ৪

▸◂ ২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. ধরি, $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$

$\therefore \log a = k(b-c)$

বা, $a\log a = ka(b-c)$; [উভয় পৰকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log a^a = ka(b-c)$ .... (i)

খ. এখন, $\log b = k(c-a)$

বা, $b\log a = kb(c-a)$; [উভয় পৰকে b দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log b^b = kb(c-a)$ .... (ii)

এবং $\log c = k(a-b)$

বা, $c\log c = kc(a-b)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log a^a + \log b^b + \log c^c = k(ab-ac+bc-ab+ac-bc)$

বা, $\log(a^ab^bc^c) = k\,0 = 0$

$\therefore a^ab^bc^c = 1$ **(Ans.)**

গ. 'ক' থেকে পাই, $\log a = k(b-c)$

বা, $(b^2+bc+c^2)\log a = k(b-c)(b^2+bc+ca)$

বা, $\log a^{b^2+bc+c^2} = k(b^3-c^3)$ .... (i)

'খ' থেকে পাই, $\log b = k(c-a)$

বা, $(c^2+ca+a^2)\log b = k(c-a)(c^2+ca+a^2)$

বা, $\log b^{c^2+ca+a^2} = k(c^3-a^3)$ .... (ii)

এবং, $\log c = k(a-b)$

বা, $(a^2+ab+b^2)\log c = k\,9a-b)(a^2+ab+b^2)$

বা, $\log c^{a^2+ab+b^2} = k(a^3-b^3)$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log a^{b^2+bc+c^2} + \log b^{c^2+ca+a^2} + \log c^{a^2+ab+b^2} = k(b^3-c^3) + k(c^3-a^3) + k(a^3-b^3)$

বা, $\log(a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2}) = 0$

বা, $\log(a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = \log 1$

বা, $a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = 1$

$\therefore a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = a^a.b^b.c^c$ ['খ' হতে] (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৩ ▸ যদি $x = 1 + \log_a bc$, $y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$ হয়, তবে–

ক. দেখাও যে, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ ৪

▸◂ ৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

$a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. 'ক' হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$............. (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$............ (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$.............. (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

বা, $\frac{yz+zx+xy}{xyz} = 1$

$\therefore xyz = zy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x - 1 = \log_a bc$

বা, $a^{x-1} = bc$ .... (i)

আবার, $y = 1 + \log_b ca$

বা, $y - 1 = \log_b ca$

বা, $b^{y-1} = ca$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $c^{z-1} = ab$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = bc.ca.ab$

বা, $a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = a^2.b^2.c^2$

বা, $\frac{a^{x-1}}{a^2}.\frac{b^{y-1}}{b^2}.\frac{c^{z-1}}{c^2} = 1$

বা, $a^{x-1-2}.b^{y-1-2}.c^{z-1-2} = 1$

$\therefore a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৪ ▸ নিচের ছকটি লৰ কর :

x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

ক. ছকটি কোন ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়। ২

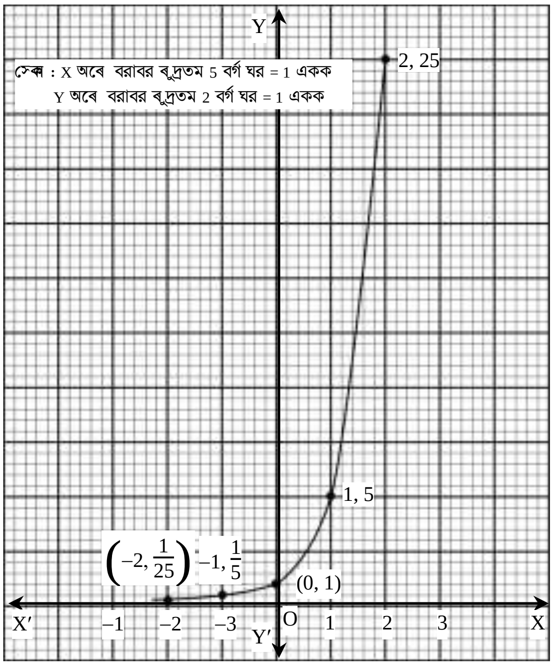
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির প্রকৃতি বর্ণনা কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ছকটিতে বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5^x$ ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x–বাস্তব সংখ্যা।

খ. ছক কাগজে সুবিধামত x-অৰ বরাবর XOX' এবং y-অৰ বরাবর YOY' আঁকি। x-অৰ বরাবর 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অৰ বরাবর 2 বর্গ ঘর = 1 একক বিবেচনা করে (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে ফাংশনটির লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো :



গ. লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, যখন $x = 0$

তখন $y = 5^0 = 1$ কাজেই লেখটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী।

আবার x এরে ঋণাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে শূন্যের খুবই কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু 0 হয় না অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to 0^+$.

x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান অসীমের কাছাকাছি অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$.

আবার, ফাংশনটি $f(x) = a^x$ আকারের যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 0$। সুতরাং $y = 5^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(-\infty, \infty)$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(0, \infty)$।

প্রশ্ন–৫ ▸ $y = 2^{-x}$ একটি ফাংশন যেখানে $-3 \leq x \leq 3$

ক. প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশনটির কয়েকটি মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশনটিও নির্ণয় কর। ৪

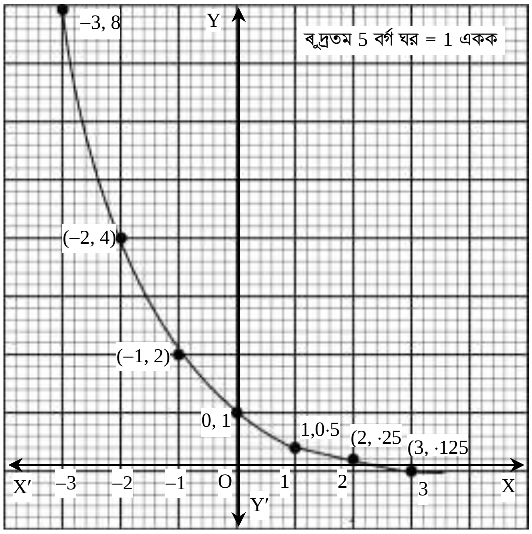
৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

x এর -3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো–

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

খ. ছক কাগজের সুবিধামত x–অৰ XOX' এবং YOY' আঁকি। x- অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অৰ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখা পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ. লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, x এর ধনাত্মক মান বৃদ্ধির জন্য ফাংশটির মান ক্রমশ: শূন্যের কাছাকাছি পৌঁছায় কিন্তু শূন্য হয় না। $x = 0$ হলে ফাংশনটির মান, $y = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$ কাজেই ফাংশনটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী। আবার, x এর উচ্চতর ঋণাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায়। সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশটির ডোমেন = $[-3, 3]$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ = $\left[\frac{1}{8}, 8\right]$

বিপরীত ফাংশন নির্ণয় :

$y = f(x) = 2^{-x}$

এখন, $y = 2^{-x}$

বা, $\log_2 y = -x$

বা, $x = -\log_2 y$

বা, $x = \log_2 y^{-1}$

$\therefore x = \log_2 \frac{1}{y}$

বিপরীত ফাংশন, $f^{-1} : y \to x$ যখন $x = \log_2 \frac{1}{y}$

বা, $f^{-1} : y \to \log_2 \frac{1}{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} : x \to \log_2 \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$

প্রশ্ন–৬ ▸ $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ একটি ফাংশন।

?
ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্যে x ও y এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন নির্ণয় কর। ৪
গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

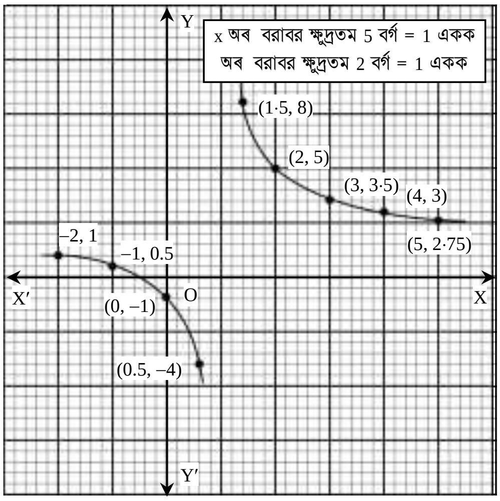
৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	–2	–1	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y	1	0.5	–1	–4	অসংজ্ঞায়িত	8	5	3·5	3	2·75

খ. 'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x–অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।



∵ ফাংশনটি $x = 1$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত

ডোমেন $D = \mathbb{R} - \{1\}$

গ. ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

এখন, $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

বা, $y(x - 1) = 2x + 1$

বা, $yx - 2x + y + 1$

বা, $x(y - 2) = y + 1$

$\therefore x = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

বা, $f^{-1} : y \to \dfrac{y + 1}{y - 2}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1} : x \to \dfrac{x + 1}{x - 2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}; x \neq 2$

প্রশ্ন–৭ ▸ $y = \ln\dfrac{5 + x}{5 - x}$ একটি লগারিদম ফাংশন।

?
ক. ফাংশনটি যে শর্তের জন্য অসংজ্ঞায়িত সেসব শর্ত নির্ণয় কর। ২
খ. ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ৪
গ. ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় এবং বিপরীত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $x = 5$ এর জন্য ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত। আবার, লগারিদম ফাংশন ঋণাত্মক মানের জন্যও অসংজ্ঞায়িত। তাই $\dfrac{5 + x}{5 - x} < 0$ ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

খ. ধরি, $y = f(x) = \ln\dfrac{5 + x}{5 - x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{5 + x}{5 - x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\}$ এবং $\{x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap (x : x > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন,

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

গ. ধরি, $y = f(x) = \ln\dfrac{5 + x}{5 - x}$

বা, $e^y = \dfrac{5 + x}{5 - x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

$\therefore x = \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

বা, $f^{-1} : y \to \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \to \dfrac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

সুতরাং, বিপরীত ফাংশনের ডোমেন হবে ফাংশনটি রেঞ্জ এবং রেঞ্জ হবে ফাংশনটির ডোমেন।

$\therefore Df^{-1} = \mathbb{R}$ এবং $Rf^{-1} = (-5, 5)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ $f(x) = e^{-x}$ একটি ফাংশন।

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য একটি সারণি তৈরি কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

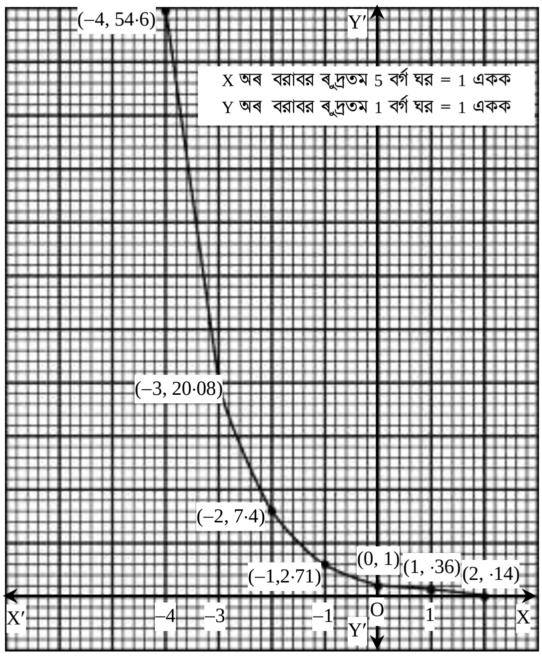
ক. ধরি, $y = f(x) = e^{-x}$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	0·14	0·36	1	2·71	7·4	20·08	54·6

খ. এখন, 'ক' এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X–অক্ষ XOX′ এবং Y–অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সাবলীল বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ. x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

∴ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং x যখন $+\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান হ্রাসের সাথে সাথে $f(x)$ এর মান অসীমের দিকে বৃদ্ধি পায়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

'ক' হতে পাই, $y = e^{-x}$

বা, $\log_e y = -x$

বা, $x = -\log_e y$

বা, $x = \log_e y^{-1}$

বা, $x = \log_e \frac{1}{y}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \log_e \frac{1}{y}$

বা, $f^{-1} : y \to \log_e \frac{1}{y}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \to \log_e \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_e \frac{1}{x}$

প্রশ্ন–৯ ▸ $\frac{\log_k p}{y - z} = \frac{\log_k q}{z - x} = \frac{\log_k r}{x - y}$

ক. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ ২

খ. $p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ ৪

গ. $p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{x^2+xy+y^2} = 1$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\frac{\log_k p}{y - z} = \frac{\log_k q}{z - x} = \frac{\log_k r}{x - y} = c$

$\therefore \log_k p = c(y - z)$ ....(i)

$\log_k q = c(z - x)$ .... (ii)

$\log_k r = c(x - y)$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$\log_k p + \log_k q + \log_k r = c(y - z + z - x + x - y)$

বা, $\log_k pqr = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore pqr = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ. সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে $(y + z)$, $(z + x)$ ও $(x + y)$ দ্বারা গুণ করার পর যোগ করে পাই,

$(y + z)\log_k p + (z + x)\log_k q + (x + y)\log_k r =$
$c\{(y + z)(y - z) + (z + x)(z - x) + (x + y)(x - y)\}$

বা, $\log_k p^{(y+z)} + \log_k q^{(z+x)} + \log_k r^{(x+y)} = c\{y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2\}$

বা, $\log_k(p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y}) = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ. সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে $(y^2 + yz + z^2)$, $(z^2 + zx + x^2)$ ও $(x^2 + xy + y^2)$ দ্বারা গুণ করার পর যোগ করে পাই,

$(y^2 + yz + z^2)\log_k p + (z^2 + zx + x^2)\log_k q +$
$(x^2 + xy + y^2)\log_k r = c\{(y - z)(y^2 + yz + z^2) +$
$(z - x)(z^2 + zx + x^2) + (x - y)(x^2 + xy + y^2)\}$

বা, $\log_k p^{(y^2+yz+z^2)} + \log_k q^{(z^2+zx+x^2)} + \log_k r^{(x^2+xy+y^2)}$

$= c\{y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3\}$

বা, $\log_k(p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{z^2+xy+y^2}) = c.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{z^2+xy+y^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০ ▸ দেওয়া আছে, $y = 1 - 2^{-x}$

ক. প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে তা এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর। ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. এখানে, $y = 1 - 2^{-x}$

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

রেঞ্জ : $y = 1 - 2^{-x}$

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $-x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2(1 - y)^{-1}$

$\therefore x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য লগারিদম সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{1}{1-y} > 0$ যদি $1 - y > 0$ হয়।

বা, $1 > y$

$\therefore y < 1$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = (-\infty, 1)$

খ. **লেখচিত্র অঙ্কন :** প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^{-x}$

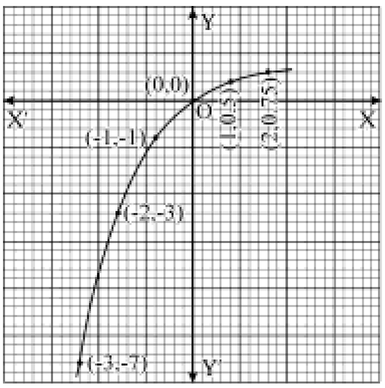
প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানের একটি তালিকা প্রস্তুত করি :

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	–7	–3	–1	0	0.5	0.75

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়।

x-অক্ষ : প্রতি 4 বর্গ = 1 একক ধরে

y-অক্ষ : প্রতি 4 বর্গ = 1 একক ধরে



বৈশিষ্ট্য :

১. রেখাটি মূলবিন্দুগামী।

২. ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

৩. ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = (-\infty, 1)$

গ. **বিপরীত ফাংশন নির্ণয় :**

এখানে, $y = 1 - 2^{-x} = f(x)$ (ধরি)

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $-x = \log_2(1 - y)$

বা, $x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

$y = f(x)$ হলে $f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$

$\therefore f^{-1}(x_1) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_1}\right)$

এবং $f^{-1}(x_2) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_2}\right)$

এখন, $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2\left(\frac{1}{1-x_1}\right) = \log_2\left(\frac{1}{1-x_2}\right)$

বা, $\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2}$

বা, $1 - x_1 = 1 - x_2$

বা, $-x_1 = -x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

যেহেতু $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ফাংশনটি একটি এক-এক ফাংশন।

প্রশ্ন–১১ ▸ a, b, c ∈ $\mathbb{R}$; যেখানে $b = (1 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}})$ এবং $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$

ক. দেখাও যে, $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ ২

খ. দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ ৪

গ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান বের কর। ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বামপক্ষ $= \log_a\log_a\log_a a^{a^{a^b}} = \log_a\log_a a^{a^b}\log_a a$

$= \log_a\log_a a^{a^b}.1 = \log_a a^b\log_a a$

$= \log_a a^b.1 = b\log_a a = b.1 = b =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right) = b$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $b = 1 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$ .... (i)

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $b^3 - 1 - 3b^2 + 3b = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}\right)$

বা, $b^3 - 1 - 3b^2 + 3b = 3 + 3^2 + 3.3^1.(b-1)$ [(i) থেকে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b} = p$ (ধরি)

তাহলে, $\log_k a = p(b-c)$ .... (i)

$\log_k b = p(c-a)$ .... (ii)

$\log_k c = p(a-b)$ .... (iii)

(i) × a + (ii) × b + (iii) × c করে পাই,

$a\log_k a + b\log_k b + c\log_k c = p\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}$

বা, $\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = p\,(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

বা, $\log_k\left(a^a.b^b.c^c\right) = p.0 = 0 = \log_k 1$

$\therefore a^a.b^b.c^c = 1$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–১২ ▸ a, b, c > 0 এবং a, b, c ≠ 1

ক. $\log_a(abc) = x$ হলে, a = কত? ২

খ. দেখাও যে, $\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ ৪

গ. যদি $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$ এবং $r = \log_c(ab)$ হয় তবে দেখাও যে, $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} = 1$ ৪

১২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\log_a(abc) = x$

বা, $a^x = abc$

বা, $\frac{a^x}{a} = bc$

বা, $a^{x-1} = bc$

$\therefore a = (bc)^{\frac{1}{x-1}}$

খ. 'ক' হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$

ধরি, $\log_b(abc) = y$ এবং $\log_c(abc) = z$

বা, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$\therefore \frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $p = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$ এবং $r = \log_c(ab)$

$\therefore 1 + p = \log_a a + \log_a(bc) = \log_a(abc)$

$1 + q = \log_b b + \log_b(ca) = \log_b(abc)$

$1 + r = \log_c c + \log_c(ab) = \log_c(abc)$

আবার, 'খ' হতে পাই,

$\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = 1$

$\therefore \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $y = ln\,\frac{5+x}{5-x}$ হয়, তবে ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ –এ

$x - 1 = 0$ বা, $x = 1$ বসালে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$

আবার ধরি, $y = \frac{2x+1}{x-1}$

বা, $2x + 1 = xy - y$

বা, $2x - xy = -1 - y$

বা, $x(2-y) = -(1+y)$

বা, $x = \frac{-(y+1)}{-(y-2)}$

$\therefore x = \frac{y+1}{y-2}$ .... (i)

(i)–এ $y = 2$ বসালে x এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{2\}$

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{1\}$, রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

খ. সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{-1}(x)) = x$

$f(y) = x$ .... (i) [যেহেতু $f^{-1}(x) = y$]

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

বা, $f(y) = \frac{2y+1}{y-1}$

বা, $x = \frac{2y+1}{y-1}$

বা, $2y + 1 = xy - x$

বা, $2y - xy = -1 - x$

বা, $y\,(2-x) = -(1+x)$

বা, $y = \frac{-(x+1)}{-(x-2)}$

বা, $y = \frac{x+1}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$x - 2 = 0$ বা, $x = 2$ বসালে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ ডোমেন $f^{-1} = \mathbb{R} - \{2\}$ **(Ans.)**

আবার ধরি, $y = \frac{x+1}{x-2}$

বা, $xy - 2y = x + 1$

বা, $xy - x = 2y + 1$

বা, $x(y-1) = 2y + 1$

$\therefore x = \frac{2y+1}{y-1}$

$y = 1$ বসালে x এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ রেঞ্জ $f^{-1} = \mathbb{R} - \{1\}$ **(Ans.)**

গ. যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত $\therefore$ $\frac{5+x}{5-x} > 0$

যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

হতে $x > -5$ এবং $5 > x$

বা, $-5 < x$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap \{x : x < 5\}$

$= \{-5, \infty\} \cap \{\infty, 5\}$

$= \{-5, 5\}$

(ii) হতে $x < -5$ এবং $5 < x$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x < 5\}$

$= \Phi$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন D_f = (i) ও (ii) ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= \{-5, 5\} \cup \Phi$

$= \{-5, 5\}$

রেঞ্জ : $y = ln\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $xe^y + x = 5e^y - 5$

$\therefore x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

প্রশ্ন–১৪ ▸ $\mathbf{\frac{\log_k 1 + x}{\log_k x} = 2}$

ক. প্রমাণ কর যে, $x^2 - x - 1 = 0$ ২

খ. দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ এবং log এর ভিত্তি 2 ধরে উপরিউক্ত সমীকরণের সত্যতা যাচাই কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1+x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1+x) = \log_k x^2$

বা, $1 + x = x^2$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ. 'ক' থেকে পাই, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $(x)^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

বা, $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

হয়, $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ অথবা, $x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ বা, $x = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\therefore x = -\frac{-\sqrt{5}+1}{2} = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$

এখানে, $x = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ x এর ঋণাত্মক মানের জন্য $\log x$ এর মান সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

প্রশ্নমতে, $k = 2$ [$\because$ ভিত্তি = 2]

বামপক্ষ $= \frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = \frac{\log_2(1+x)}{\log_2 x}$

$= \frac{\log_2 10 \times \log_{10}(1+x)}{\log_2 10 \times \log_{10} x} = \frac{\log(1+x)}{\log x}$

$= \frac{\log\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\log 2.618}{\log 1.618} = 2.000006$

= 2 ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৫ ▸ $\mathbf{a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}}$

ক. যদি $x = 0$ হয় তবে প্রমাণ কর $2\log_k a = 0$ ২

খ. দেখাও যে, $(1+x)\log_k a = x\log_k b$ ৪

গ. দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $a^{3-0}b^{5.0} = a^{5+0}b^{3.0}$ [$\because x = 0$]

বা, $a^3b^0 = a^5b^0$

বা, $a^3 = a^5$

বা, $\frac{a^5}{a^3} = 1$

বা, $a^2 = 1$

বা, $\log_k a^2 = \log_k 1$

$\therefore 2\log_k a = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ. দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $(b^x)^2 = (a^{1+x})^2$

বা, $b^x = a^{1+x}$

বা, $\log_k b^x = \log_k a^{1+x}$

বা, $x\log_k b = (1 + x) \log_k a$

$\therefore (1 + x)\log_k a = x\log_k b$ **(দেখানো হলো)**

গ. 'খ' নং থেকে, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^{2x}.a^2$

বা, $\dfrac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2x} = a^2$

বা, $\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$

বা, $2x \log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$

$\therefore x\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৬ ▸ $x = 1 + \log_a bc,\ y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$

ক. দেখাও যে, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ — ২

খ. প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$ — ৪

গ. দেখাও যে, $a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ — ৪

▸◂ ১৬নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ **(দেখানো হলো)**

খ. 'ক' হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

বা, $1 = \dfrac{xy + yz + zx}{xyz}$

$\therefore xyz = xy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x - 1 = \log_a bc$

বা, $a^{x-1} = bc$ .... (i)

আবার, $y = 1 + \log_b ca$

বা, $y - 1 = \log_b ca$

$\therefore b^{y-1} = ca$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $c^{z-1} = ab$ ...... (iii)

(i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = bc.ab.ca$

বা, $a^{x-1}.b^{y-1}.c^{z-1} = a^2b^2c^2$

বা, $\dfrac{a^{x-1}}{a^2}\cdot\dfrac{b^{y-1}}{b^2}\cdot\dfrac{c^{z-1}}{c^2} = 1$

$\therefore a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৭ ▸ $y = 2^{\frac{x}{2}}$ একটি সূচক ফাংশন এবং $-3 \le x \le 3$

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। — ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। — ৪

গ. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। — ৪

▸◂ ১৭নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

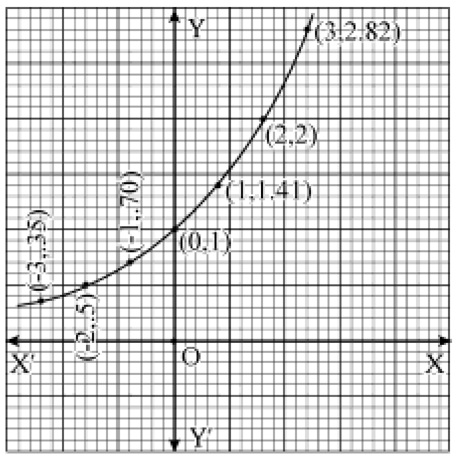
ক. ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর কয়েকটি নির্দিষ্ট মানের জন্য y-এর আসন্ন অনুসঙ্গী মান নির্ণয় করি এবং ছকে লিখি :

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0·35	0·5	0·70	1	1·41	2	2·82

খ. 'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামতো x অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর 4 ক্ষুদ্রতম বর্গ = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিচে দেখানো হলো –



গ. দেওয়া আছে, $y = 2^{\frac{x}{2}}$

ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $y = f(x)$ এর মান সংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এখন,

$f(x) = y$

বা, $f^{-1}(y) = x$ .... (i)

এবং $y = 2^{\frac{x}{2}}$

বা, $\log_2 y = \frac{x}{2}$

বা, $x = 2\log_2 y$ .... (ii)

শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার লগারিদম সংজ্ঞায়িত হয়।

সুতরাং y-এর ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য x-এর বাস্তব মান আছে।

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = \{x \in R : x > 0\}$

প্রশ্ন–১৮ ▸ $p^2 + q^2 = 9pq$

ক. দেখাও যে, $\log(p^2 + q^2) = 2\log 3 + \log p + \log q$. ২

খ. দেখাও যে, $\log(p^4 + q^4) = \log 79 + 2(\log p + \log q)$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $2\log(p - q) = \log 7 + \log p + \log q$ ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

সমীকরণের উভয় পার্শ্বে log নিয়ে পাই,

$$\log(p^2 + q^2) = \log 9pq$$
$$= \log 9 + \log p + \log q$$
$$= \log 3^2 + \log p + \log q$$

$\therefore \log(p^2 + q^2) = 2\log 3 + \log p + \log q$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $(p^2 + q^2)^2 = (9pq)^2$ [বর্গ করে]

বা, $p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = 81p^2q^2$

বা, $p^4 + q^4 = 79p^2q^2$

বা, $\log(p^4 + q^4) = \log(79p^2q^2)$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

$$= \log 79 + \log(pq)^2$$
$$= \log 79 + 2\log(pq)$$

$\therefore \log(p^4 + q^4) = \log 79 + 2(\log p + \log q)$ **(দেখানো হলো)**

গ. দেওয়া আছে, $p^2 + q^2 = 9pq$

বা, $p^2 - 2pq + q^2 = 9pq - 2pq$

বা, $(p - q)^2 = 7pq$

বা, $\log(p - q)^2 = \log 7pq$ [উভয় দিকে log নিয়ে]

বা, $2\log(p - q) = \log 7 + \log pq$

বা, $2\log(p - q) = \log 7 + \log p + \log q$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৯ ▸ $\dfrac{\log k^p}{y - z} = \dfrac{\log k^q}{z - x} = \dfrac{\log k^r}{x - y}$

ক. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ ২

খ. $p^{y+z}.\, q^{z+x}.\, y^{x+y} = 1$ ৪

গ. $p^{y^2+yz+z^2} \times q^{z^2+zx+x^2} \times r^{x^2+xy+y^2} = 1$ ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ধরি, $\dfrac{\log k^p}{y - z} = \dfrac{\log k^q}{z - x} = \dfrac{\log k^r}{x - y} = T$

$\therefore \log_k p = T(y - z)$ .... (i)

$\log_k q = T(z - x)$ .... (ii)

$\log_k r = T(x - y)$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log_k p + \log_k q + \log_k r = T(y - z + z - x + x - y)$

বা, $\log_k(pqr) = T \times 0$

বা, $\log_k(pqr) = 0$

বা, $\log_k(pqr) = \log_k 1$

$\therefore pqr = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ. 'ক' অংশ হতে প্রাপ্ত, $\log_k p = T(y - z)$

বা, $p = k^{T(y - z)}$

বা, $p^{y+z} = k^{T(y-z)(y+z)}$

$\therefore p^{y+z} = k^{T(y^2 - z^2)}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $q^{z+x} = k^{T(z^2 - x^2)}$ ....(ii)

এবং $r^{x+y} = k^{T(x^2 - y^2)}$ .... (iii)

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = k^{T(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)}$

$= k^{T.O} = k^0 = 1$

$\therefore p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ **(প্রমাণিত)**

গ. 'ক' অংশ হতে পাই, $\log_k p = T(y - z)$

বা, $p = k^{T(y-z)}$ [লগের সংজ্ঞা হতে]

বা, $p^{y^2+yz+z^2} = k^{T(y-z)(y^2+yz+z^2)}$

$\therefore p^{y^2+yz+z^2} = k^{T(y^3 - z^3)}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $q^{z^2+zx+x^2} = k^{T(z^3 - x^3)}$ .... (ii)

এবং $r^{x^2+xy+y^2} = k^{T(z^3 - x^3)}$ .... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) গুণ করে পাই,

$p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.\, r^{x^2+xy+y^2} = k^{T(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)}$

$= k^{T.0} = k^0 = 1$

$\therefore p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.\, r^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২০ ▸ $p = x^a, q = x^b, r = x^c$ **এবং** $a + b + c = 0$

ক. $(pqr)^2$ এর মান বের কর। ২

খ. দেখাও যে, $\left(\dfrac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{1 + p + q^{-1}} + \frac{1}{1 + q + r} - \frac{1}{1 + r + p^{-1}} = 1$$ ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $p = x^a, q = x^b, r = x^c$ এবং $a + b + c = 0$

$\therefore (pqr)^2 = (x^a.x^b.x^c)^2 = (x^{a+b+c})^2 = (x^0)^2 = (1)^2 = 1$

$\therefore (pqr)^2 = 1$ **(Ans.)**

খ. বামপক্ষ $= \left(\dfrac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= (x^{a-b})^{a^2+ab+b^2} \times (x^{b-c})^{b^2+bc+c^2} \times (x^{c-a})^{c^2+ca+a^2}$

$= x^{(a^3 - b^3)} \times x^{(b^3 - c^3)} \times x^{(c^3 - a^3)}$

$= x^{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{p}{q^{-1}}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{q}{r^{-1}}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{r}{q^{-1}}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

গ. $\frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}}$

$= \frac{1}{1+x^a+x^{-b}} + \frac{1}{1+x^b+x^{-c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{-a}}$

$= \frac{1}{x^b+x^{-c}+1} + \frac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \frac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$= \frac{1}{x^b+\frac{1}{x^c}+1} + \frac{1}{x^c+x^{-a}+1} + \frac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{x^a+\frac{1}{x^b}+1}$ $[\because a+b+c=0$

$\therefore b+c=-a]$

$= \frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c}+x^b+1}$

$= \frac{x^c}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{1}{1+x^c+b^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1+x^c+b^{b+c}}$

$= \frac{x^c+1+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}} = \frac{1+x^c+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}} = 1$

$\therefore \frac{1}{1+p+q^{-1}} + \frac{1}{1+q+r^{-1}} + \frac{1}{1+r+p^{-1}} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২১ ▶ $f(x) = \log(1+x) - 2\log(x)$

ক. দেখাও যে, $\log_a x^m = m\log_a x$ ২

খ. $f(x) = 0$ হলে, দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ৪

গ. D_f এবং R_f নির্ণয় কর। ৪

▶◀ ২১নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. ধরি, $\log_a x = p$

বা, $x = a^p$

বা, $x^m = a^{mp}$

বা, $\log_a x^m = \log_a a^{mp}$

বা, $\log_a x^m = mp \times \log_a a$

বা, $\log_a x^m = mp$

$\therefore \log_a x^m = m\log_a x$ **[দেখানো হলো]**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = \log(1+x) - 2\log(x)$

$= \log(1+x) - \log x^2$

$= \log\frac{1+x}{x^2}$

এখন $f(x) = 0$ হলে,

বা, $\log\left(\frac{1+x}{x^2}\right) = 0 = \log 1$

বা, $\frac{1+x}{x^2} = 1$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x^2 - 2x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = 0$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

বা, $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ [ঋণাত্মক মান বর্জন করে]

$\therefore x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

গ. $f(x) = \log(1+x) - 2\log(x)$

$\log(1+x)$ ফাংশনটি $1 + x > 0$ বা, $x > -1$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।

আবার, $\log x$ ফাংশনটি $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত

$\therefore f(x) = \log(1+x) - 2\log(x)$ ফাংশনটি $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ **(Ans.)**

$\therefore f(x) = \log\frac{1+x}{x^2}$ এর রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২২ ▶ দেওয়া আছে, $y = 3^x$ এবং $\frac{\log(1+y)}{\log y} = 2$

?

ক. $y = 3^x$ এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ২

খ. $y = 3^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, y এর কেবল একটি মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ৪

▶◀ ২২নং প্রশ্নের সমাধান ▶◀

ক. দেওয়া আছে, $y = 3^x$

x -এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y বাস্তব হবে।

সুতরাং ডোমেন = $\mathbb{R}$ **(Ans.)**

আবার, $y = 3^x$

বা, $\log y = \log 3^x$

বা, $\log y = x \log 3$

$\therefore x = \frac{\log y}{\log 3}$

এখানে y- এর মান অঋণাত্মক হলেই কেবল x এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে।

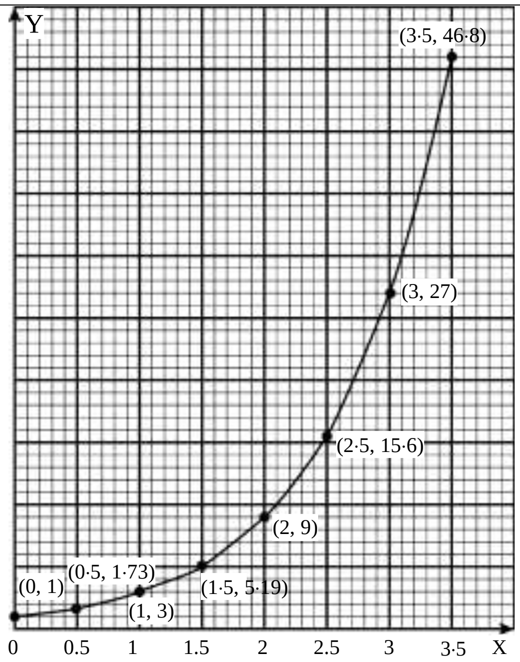
$\therefore$ রেঞ্জ = $\{x : x \in \mathbb{R}$ এবং $x > 0\}$ **(Ans.)**

খ. ধরি, $x = (x) = 3x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	0	0·5	1	1·5	2	2·5	3	3·5
y	1	1·73	3	5·19	9	15·6	27	46·8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ YOY′ এবং Y অক্ষ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



গ. দেওয়া আছে, $\frac{\log (1 + y)}{\log y} = 2$

বা, $\log (1 + y) = 2 \log y$

বা, $\log (1 + y) = \log y^2$

বা, $1 + y = y^2$

বা, $y^2 - y - 1= 0$

বা, $4y^2 - 4y + 1 - 5 = 0$

বা, $(2y - 1)^2 = 5$

বা, $2y - 1 = \pm\sqrt{5}$

$\therefore y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু y ঋণাত্মক হলে logy অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore$ y এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ y এর কেবল একটি মান সমীকরণকে সিদ্ধ করে **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৩ $f(x) = -5^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$ হলে,

ক. দেখাও $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$ যখন $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$ ২

খ. f(x) এর বিপরীত ফাংশনকে $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. লেখচিত্রের মাধ্যমে ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

২৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেখাতে হবে, $\frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^{b-a}}$

বামপক্ষ $= \frac{3^a}{3^b} = \frac{1}{3^b.3^{-a}} = \frac{1}{3^{b-a}}$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, $f(x) = -5^{-x} + 1$

বা, $y = f(x) = -5^{-x} + 1$

বা, $5^{-x} = 1 - y$

বা, $\log 5^{-x} = \log(1 - y)$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

বা, $-x\log 5 = \log(1 - y)$

বা, $-1 = \frac{\log(1 - y)}{\log 5}$

বা, $x = -\frac{\log(1 - y)}{\log 5}$

$\therefore f^{-1}(y) = -\frac{\log(1 - y)}{\log 5}$

$\therefore$ y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে,

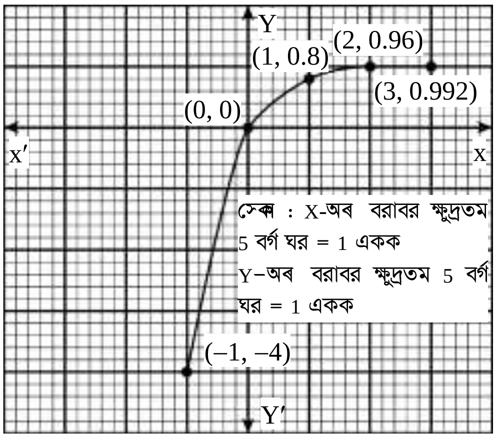
$f^{-1}(x) = -\frac{\log(1 - x)}{\log 5}$ **(Ans.)**

গ. প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = -5^{-x} + 1$

ধরি, $y = f(x) = -5^{-x} + 1$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর প্রতিরূপী মান নিচের ছকে দেওয়া হলো :

x	–1	0	1	2	3
y	–4	0	0.8	0.96	0·992



লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, x এর মান যত বৃদ্ধি পায়, y এর মান ততই 1 এর কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু 1 হয় না। অর্থাৎ $x \to \infty$, $y \to \infty$ তখন $y \to 1$। x এর মান যতই ঋণাত্মক দিকে বৃদ্ধি পায়, y এর মান ততই হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমান্বয়ে $-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to -\infty$, $y \to -\infty$

ডোমেন $D_r = (-\infty, \infty)$; রেঞ্জ $R_r = (-\infty, 1)$ **(Ans.)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–২৪ ▸ নিচের সমীকরণগুলো লক্ষ কর :

(i) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(ii) $5^x + 5^{2-x} = 26$

(iii) $\frac{\log_k(3 + x)}{(\log_k x)}$

ক. (i) নং সমীকরণের নিশ্চায়ক বের কর। ২

খ. (ii) নং সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

গ. (iii) নং সমীকরণ দ্বারা প্রমাণ কর যে, $x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ ৪

উত্তর : ক. 1; খ. 0, 2

প্রশ্ন–২৫ ▸ $\frac{ab \log_k(ab)}{a + b} = \frac{bc \log_k(bc)}{b + c} = \frac{ca \log_k(ca)}{c + a} = m$

ক. $\log_k(ab)$ এবং $\log_k(bc)$ এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $c^c = k^m$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^a = b^b = c^c$ ৪

উত্তর : ক. $\frac{m(a + b)}{ab}$, $\frac{m(b + c)}{bc}$

প্রশ্ন–২৬ ▸ $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$.

ক. প্রথম শর্তে a = 3 ও b = 81 হলে, x এর মান কত হবে? ২

খ. প্রদত্ত শর্তের সাহায্যে xyz এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = c^{\frac{1}{c}}$ এবং 'খ' নং হতে প্রাপ্ত মানের জন্য প্রমাণ কর $a + b + c = 0$। ৪

উত্তর : ক. 4; খ. 1

প্রশ্ন–২৭ ▸ $\log_4 x = a$ এবং $\log_2 y = b$

ক. x এবং y এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. xy এবং $\frac{x}{y}$ কে 2 এর শক্তিরূপে প্রকাশ কর। ৪

গ. যদি $xy = 128$ এবং $\frac{x}{y} = 4$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। ৪

উত্তর : ক. 2^{2a}, 2^b; খ. $xy = 2^{2a + b}$, $\frac{x}{y} = 2^{2a-b}$; গ. $\frac{9}{4}$, $\frac{5}{2}$

প্রশ্ন–২৮ ▸ $y = \log_e x$ একটি লগারিদমিক ফাংশন।

ক. x ও y এর মানের একটি টেবিল তৈরি কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ৪

গ. দেখাও যে, ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন = e^x। এই ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

প্রশ্ন–২৯ ▸ $\frac{\log_k a}{b - c} = \frac{\log_k b}{c - a} = \frac{\log_k c}{a - b}$

ক. abc এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a^a.b^b.c^c = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^{(b + c)}.b^{(c + a)}.c^{(a + b)} = 1$ ৪

উত্তর : ক. 1

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–৩০ ▸ $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$ এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$.

ক. $Q = 1$ হলে, দেখাও যে, $b = c$. ২

খ. দেখাও যে,
$P^{a+b-c}.\ Q^{b+c-a}.\ R^{c+a-b} = 1.$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে,
$(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0.$ ৪

▸◂ ৩০নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $Q = \frac{x^b}{x^c} = x^{b-c}$

যদি $Q = 1$ হয়,

$1 = x^{b-c}$

বা, $x^\circ = x^{b-c}$

বা, $0 = b - c$

$\therefore\ b = c$ (দেখানো হলো)

খ. দেওয়া আছে, $p^{a+b-c}.\ Q^{b+c-a}.\ R^{c+a-b}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c}.\ (x^{b-c})^{b+c-a}.\ (x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{a^2+ab-ac-ab-b^2+bc}.\ x^{b^2+bc-ab-bc-c^2+ac}.\ x^{c^2+ac-bc-ac-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc}.\ x^{b^2-ab-c^2+ac}.\ x^{c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^\circ = 1$

$\therefore\ p^{a+b-c}.\ Q^{b+c-a}.\ R^{c+a-b} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. $(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k \frac{x^a}{x^b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k \frac{x^b}{x^c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k \frac{x^c}{x^a}$

$= (a^2 + ab + b^2) \log_k x^{a-b} + (b^2 + bc + c^2) \log_k x^{b-c} + (c^2 + ca + a^2) \log_k x^{c-a}$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \log_k x + (b^2 + bc + c^2)(b - c) \log_k x + (c^2 + ca + a^2)(c - a) \log_k x$

$= (a^3 - b^3) \log_k x + (b^3 - c^3) \log_k x + (c^3 - a^3) \log_k x$

$= (a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3) \log_k x$

$= 0.\log_k x$

$= 0$

$\therefore (a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q + (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–৩১ ▸ $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $C = xy^{r-1}$

ক. a^{q-r} এর সরল মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1$ ৪

গ. সরল কর : $(q - r) \log a + (r - p) \log b + (p - q) \log c$ ৪

▸◂ ৩১নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}$

$\therefore\ a^{q-r} = (xy^{p-1})^{q-r} = x^{q-r}.y^{pq-q-pr+r}$ **(Ans.)**

খ. বামপৰ $= a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$ .... (i)

$= x^{q-r}.(y^{p-1})^{q-r}.x^{r-p}.(y^{q-1})^{r-p}.(x^{p-q})(y^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-q-rp+r}.y^{qr-r-pq+p}.y^{rp-p-qr+q}$

$= x^0.y^{pq-q-rp+r+qr-r-pq+p+rp-p-qr+q}$

$= x^0.y^0 = 1.1 = 1 =$ ডানপৰ

$\therefore\ x^{a-r}\, b^{r-p}C^{p-q} = 1$ (দেখানো হলো)

গ. $(q - r) \log a + (r - p) \log b + (p - q) \log c$

$= (q - r) \log xy^{p-1} + (r - p) \log xy^{q-1} + (p - q) \log xy^{r-1}$

$= \log(xy^{p-1})^{q-r} + \log(xy^{q-1})^{r-p} + \log(xy^{r-1})^{p-q}$

$= \log\{(xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}\}$

$= \log 1$ [(i) এর সাহায্যে]

$= 0$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩২ ▸ $x = \log_a y$ যেখানে $a > 0,\ a \neq 1$

ক. $\left\{\left(\frac{1}{2^x}\right)^{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\right\}^{\frac{x}{x-y}}$ এর মান কত? ২

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে, দেখাও যে, $2y^3 - 6y - 5 = 0$ ৪

গ. x এর কোন মানের জন্য $\frac{\log_{10}(1 + x)}{\log_{10} x} = 2$ হবে? ৪

▸◂ ৩২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. $\left\{\left(\frac{1}{2^x}\right)^{\frac{x^2-y^2}{x+y}}\right\}^{\frac{x}{x-y}} = \left\{\left(\frac{1}{2^x}\right)^{\frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)}}\right\}^{\frac{x}{x-y}}$

$= \left(\frac{1}{2^x}\right)^{\frac{(x-y)x}{x-y}} = \left(\frac{1}{2^x}\right)^x = 2^1 = 2$ **(Ans.)**

খ. $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ .... (i)

বা, $y^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $y^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $y^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^0.y$ [(i) থেকে]

বা, $y^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3y$

বা, $2y^3 = 4 + 1 + 6y$

$\therefore\ 2y^3 - 6y - 5 = 0$ (দেখানো হলো)

গ. $\frac{\log_{10}(1 + x)}{\log_{10} x} = 2$

বা, $2\log_{10} x = \log_{10}(1 + x)$

বা, $\log_{10} x^2 = \log_{10}(1 + x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

কিন্তু ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\log_{10}x > 0$

$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–৩৩ ▸ $a \neq 0$, এবং $m, n \in Z$ এবং ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটি সত্য।

ক. দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $m < 0$ এবং $n < 0$ ২

খ. $\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 2\log_k(x - \sqrt{x^2-1})$ ৪

▸◂ ৩৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $m < 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $m = -q$ এবং $n = -r$, যেখানে, $q, r \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে বামপক্ষ $= (a^m)^n = (a^{-q})^{-r}$

$= \frac{1}{(a^{-q})^r} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^q}\right)^r} = \frac{1}{\frac{1}{a^{qr}}}$

$= a^{qr} = a^{(-q)(-r)} = a^{mn} =$ ডানপক্ষ

$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$ **(দেখানো হলো)**

খ. প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$

$= \frac{\left(x^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{1}{bc}}}{\left(x^{\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}}} \times \frac{\left(x^{\frac{c}{a}}\right)^{\frac{1}{ca}}}{\left(x^{\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}}} \times \frac{\left(x^{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{1}{ab}}}{\left(x^{\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}}}$

$= \frac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}} \times \frac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}} = 1$ **(Ans.)**

গ. বামপক্ষ $= \log_k \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

$= \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1})}{(x + \sqrt{x^2-1})(x - \sqrt{x^2-1})}$

$= \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^2}{x^2 - (\sqrt{x^2-1})^2} = \log_k \frac{(x - \sqrt{x^2-1})^2}{x^2 - x^2 + 1}$

$= \log_k (x - \sqrt{x^2-1})^2 = 2\log_k (x - \sqrt{x^2-1})$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৪ ▸ $f(x) = \ln(x - 4)$

ক. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন বের কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

▸◂ ৩৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(x - 4)$

ধরি, $y = f(x) = \ln(x - 4)$

$\therefore y = f(x)$ এবং $y = \ln(x - 4)$

বা, $x = f^{-1}(y)$ বা, $e^y = x - 4$ .... (i)

$\therefore x = e^y + 4$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে $f^{-1}(y) = e^y + 4$

$\therefore f^{-1}(x) = e^x + 4$

খ. যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x - 4 > 0$

বা, $x > 4$

বা, $\{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$

$= (4, \infty)$

সংখ্যারেখা : (O, $x > 4$)

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (4, \infty)$

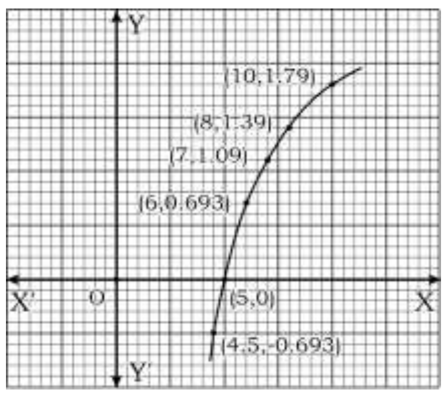
আবার 'ক' হতে পাই, $x = e^y + 4$ যা $y \in \mathbb{R}$ এর জন্য $x \in$ বা, হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

গ. প্রদত্ত ফাংশন, $y = f(x) = \ln(x - 4)$

ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি :

x	4	4.5	5	6	7	8	10
y	$-\infty$	–0.693	0	0.693	1.09	1.39	1.79



মনে করি, ছক কাগজের XOX′ বরাবর x-অক্ষ, YOY′ বরাবর y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। x-অক্ষে প্রতি ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ = 1 একক এবং y অক্ষে প্রতি ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ = 1 একক ধরে ছকে প্রাপ্ত (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যুক্ত করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

প্রশ্ন–৩৫ ▸ $A = \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$B = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{\frac{2}{3}} + 2$ এবং $a \geq 0$

$P = \log_a(bc),\ q = \log_b(ca),\ r = \log_c(ab)$ হলে,

ক. দেখাও যে, $A = 1$ ২

খ. $B = 0$ হলে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} = 1$ ৪

৩৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. অনুশীলনী–৯.১ এর পৃষ্ঠা–১৮৪, উদাহরণ–১২ দ্রষ্টব্য।

খ. দেওয়া আছে, $B = a^2 - 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} + 2$ এবং $B = 0$

অর্থাৎ $a^2 + 2 + 3^{\frac{2}{3}} - 3^{-\frac{2}{3}} = 0$

বা, $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}$ $\left[3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয়পৰে বর্গমূল এবং $\because a \geq 0$ ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয়পৰকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)]$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^0.a$

$[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0$ এবং $3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

গ. অনুশীলনী– ৯.২ পৃষ্ঠা–১৯২, উদাহরণ–১০ নং দ্রষ্টব্য।

প্রশ্ন–৩৬ ▸ যদি $a > 0$ এবং $x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$ এবং $a = \sqrt{b^3}$ হয় তবে,

ক. সমাধান কর : $\log_{10}\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 2$ ২

খ. যদি $a^2 - b^2 = c^3$ তাহলে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর : $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ ৪

৩৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\log_{10}\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 2$

বা, $\left[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}\right] = 10^2$ $[\because \log_a x = b$ হলে $x = a^b]$

বা, $98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 2$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 4$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$

বা, $x(x-8) - 4(x-8) = 0$

$\therefore (x-4)(x-8) = 0$

$\therefore x = 4$ অথবা 8

নির্ণেয় সমাধান, $x = 4$ অথবা 8

খ. দেওয়া আছে, $a^2 - b^2 = c^3$ এবং $x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$

বামপৰ $= x^3 - 3cx - 2a$

$= \left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right)^3 + 3.c\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right) - 2a$

$\left[\because x = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{(a-b)}\right]$

$= \left(\sqrt[3]{a+b}\right)^3 + 3.\sqrt[3]{a+b}.\sqrt[3]{a-b}\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right)$

$+ \left(\sqrt[3]{a-b}\right)^3 - 3.c\left(\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}\right) - 2a$

$= a + b + 3.\sqrt[3]{a^2 - b^2}.x + a - b - 3cx - 2a$

$= 2a + 3\sqrt[3]{c^3}.x - 3cx - 2a = 3cx - 3cx = 0 =$ ডানপৰ

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ. প্রমাণ করতে হবে, $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$

বামপৰ $= \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{a^3}.\frac{1}{\sqrt{b^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{b^3}}$ $\left[\because a = \sqrt{b^3}\ \therefore a^2 = b^3\right]$

$= \frac{a\sqrt{a}}{a} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}} =$ ডানপৰ

$\therefore \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩৭ ▸ $\frac{\log_e(1+x)}{\log_e x} = 2$ একটি লগারিদমিক সমীকরণ।

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলক সংবলিত একটি বীজগাণিতিক দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূ পে প্রকাশ কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরনটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর। ৪

গ. যদি $a^{3-x}\,b^{5x} = a^{5+x}\,b^{3x}$ হয় তবে দেখাও যে,

$x\log_e\left(\frac{b}{a}\right) = \log_e a$ ৪

৩৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\frac{\log_e(1+x)}{\log_e x} = 2$

বা, $2\log_e x = \log_e(1+x)$ [আড় গুনন করে]

বা, $\log_e x^2 = \log_e(1+x)$

বা, $x^2 = 1 + x$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$

ইহাই নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূ প।

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ,

$x^2 - x - 1 = 0$ যেখানে, $a = 1, b = -1$ এবং $c = -1$।

এখানে নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac = (-1) - \{4.1.(-1)\}$

$= 1 + 4 = 5 > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়।

∴ সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় :

ধরি, $y = x^2 - x - 1$.................... (i)

(i) নং সমীকরণে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান নিচের ছকে নির্ণয় করি।

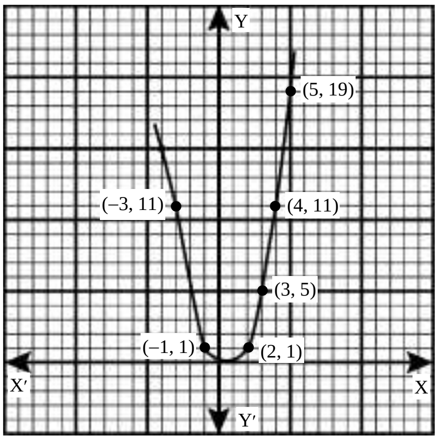
x	–3	(1	2	3	4	5
y	11	1	1	5	11	19

এখানে, লেখের কয়েকটি বিন্দু হলো–

(–3, 11), (–1, 1), 2, 1), (3, 5), (4, 11) ও (6, 29)

এখন, ছক কাগজের XOX′ বরাবর X- অৰ, YOY′ বরাবর Y–অৰ এবং O মূলবিন্দু।

উভয় অৰে ৰুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং যোগ করি।



অঙ্কিত লেখটি X- অৰকে x = 1·6 এবং

x = –0·6 বিন্দুতে ছেদ করেছে।

নির্ণেয় সমাধান : x = –0·6, 1·6

গ. দেওয়া আছে, $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$ [উভয়পৰকে $a^{3-x}.\ b^{3x}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$ [উভয়পৰকে a^{2x} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\log_e \frac{b^{2x}}{a^{2x}} = \log_e a^2$ [উভয়পৰে $\log_e$ নিয়ে]

বা, $\log_e \left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_e a^2$

বা, $2x \log_e \left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_e{}^a$

$\therefore x \log_e \left(\frac{b}{a}\right) = \log_e a$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৮ ▸ নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

(i) $a^m.a^n = (a^m)^n$ একটি সূচকীয় সমীকরণ।

(ii) $A = \left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n$ একটি দ্বিপদী রাশি এবং উক্ত রাশির বিস্তৃতিতে চতুর্থ পদ x মুক্ত বিবেচনা করা হলো।

ক. প্রমাণ কর যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0$ ২

খ. উদ্দীপকের বিস্তৃতি থেকে n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x^3 এর সহগ 144 হলে, দেখাও যে, $k = \pm 2$ ৪

৩৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $a^m \cdot a^n = (a^m)^n$

বা, $a^{m+n} = a^{mn}$

$\therefore m + n = mn$

বামপৰ $= m(n-2) + n(m-2)$

$= mn - 2m + mn - 2n$

$= 2mn - 2(m+n)$

$= 2mn - 2mn\ [\because m + n = mn]$

$= 0 =$ ডানপৰ

∴ বামপৰ = ডানপৰ

অর্থাৎ, $m(n-2) + n(m-2) = 0$ **(প্রমাণিত)**

খ. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\left(\frac{k}{x^2}\right) + {}^nC_2\, x^{n-2}\left(\frac{k}{x^2}\right)^2 + {}^nC_3\, x^{n-3}\left(\frac{k}{x^2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^n + nx^{n-1} \cdot \frac{k}{x^2} + {}^nC_2\, x^{n-2} \cdot \frac{k^2}{x^4} + {}^nC_3\, x^{n-3} \cdot \frac{k^3}{x^6} + \ldots\ldots$$

$$= x^n + nx^{n-3}k + {}^nC_2\, x^{n-6}k^2 + {}^nC_3\, x^{n-9}k^3 + \ldots\ldots\ldots$$

বিস্তৃতিটির ৪র্থ পদ ${}^nC_3\, x^{n-9}k^3$

রাশিটি x মুক্ত বলে

$x^{n-9} = x^0$

বা, $n - 9 = 0$

$\therefore n = 9$ **(Ans.)**

গ. 'খ' অংশ হতে প্রাপ্ত, n = 9, বিস্তৃতিটিতে বসিয়ে পাই,

$$\left(x + \frac{k}{x^2}\right)^9 = x^9 + {}^9c_1x^{9-3}k + {}^9c_2x^{9-6}k^2 + {}^9c_3x^{9-9}k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^9 + {}^9c_1x^6k + {}^9c_2x^3k^2 + {}^9c_3k^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে, ${}^9c_2k^2 = 144$

বা, $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}k^2 = 144$

বা, $\frac{72}{2}k^2 = 144$

বা, $36k^2 = 144$

বা, $k^2 = \frac{144}{36}$

বা, $k^2 = 4$

$\therefore k = \pm 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৩৯ ▸ $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$ এবং $g(y) = 2^{2y} - 3.2^{y+2} + 32.$

ক. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর। ২

খ. g(y) = 0 হলে y এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. f(x) কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৩৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) - 3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{27} + \frac{2}{9} + 1}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3} = \frac{\frac{-1+6+27}{27}}{\frac{1+6-27}{9}}$$

$$= \frac{\frac{32}{27}}{\frac{-20}{9}} = \frac{32}{27} \times \frac{9}{-20}$$

$$= -\frac{8}{15}$$ **(Ans.)**

খ. দেওয়া আছে,

$g(y) = 2^{2y} - 3\cdot 2^{y+2} + 32$

এখন, $g(y) = 0$

বা, $2^{2y} - 3\cdot 2^{y+2} + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3\cdot 2^y . 2^2 + 32 = 0$

বা, $2^{2y} - 3\cdot 2^y \cdot 4 + 32 = 0$

বা, $(2^y)^2 - 12\cdot 2^y + 32 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$ [$2^y = x$ ধরে]

বা, $x^2 - 8x - 4x + 32 = 0$

বা, $x(x - 8) - 4(x - 8) = 0$

বা, $(x - 8)(x - 4) = 0$

হয়, $x - 8 = 0$ অথবা, $x - 4 = 0$

বা, $x = 8$ বা, $x = 4$

বা, $2^y = 2^3$ বা, $2^y = 2^2$

$\therefore y = 3$ $\therefore y = 2$

$\therefore$ y এর মান 2, 3 **(Ans.)**

গ. দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

$$= \frac{x(x^2 - 2x - 3) + 4x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + \frac{4x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + \frac{4(x^2 - 2x - 3) + 11x + 13}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + 4 + \frac{11x + 13}{x^2 - 2x - 3}$$

$$= x + 4 + \frac{11x + 13}{(x+1)(x-3)}$$

এখানে, $\frac{11x + 13}{(x+1)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{11x + 13}{(x+1)(x-3)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$ ....(i)

(i) নং সমীকরণের উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$11x + 13 \equiv A(x - 3) + B(x + 1)$ ....(ii)

(ii) নং সমীকরণে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$33 + 13 = 4B$

বা, $4B = 46$

$\therefore B = \frac{23}{2}$

আবার, (ii) নং সমীকরণ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$-11 + 13 = -4A$

বা, $-4A = 2$

$\therefore A = -\frac{1}{2}$

A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{11x + 13}{(x+1)(x-3)} = \frac{23}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ,

$f(x) = x + 4 + \frac{23}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}$ **(Ans.)**