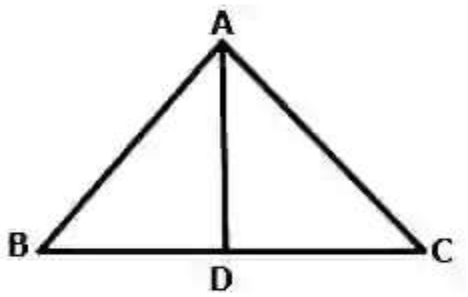
পিথাগোরাসের উপপাদ্য এর মাধমে প্রমাণ

১. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $AB^2+BC^2+CA^2=4AD^2$

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। AD, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $AB^2+BC^2+CA^2=4AD^2$

প্রমাণঃ

ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ

অর্থাৎ, AB=BC=CA……(i)

AD, BC এর উপর লম্ব

তাহলে, BD=DC, বা, BD=DC= ½BC [সমবাহু ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখন্ডিত করে]

শর্তমতে, △ABD ও △ADC দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে △ABD হতে পাই,

$AB^2=AD^2+BD^2$

বা, $AB^2-BD^2=AD^2$

বা, $AB^2-(\frac{1}{2}BC)^2=AD^2$

বা, $AB^2-\frac{1}{4}BC^2=AD^2$

বা, $BC^2-\frac{1}{4}BC^2=AD^2$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $\frac{4BC^2-BC^2}{4}=AD^2$

বা, $4BC^2-BC^2=4AD^2$

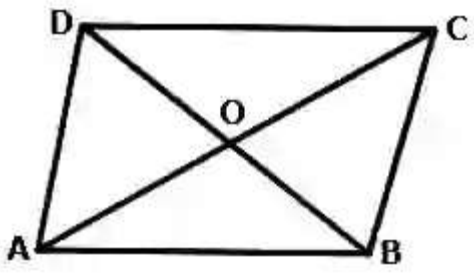
বা, $3BC^2=4AD^2$

বা, $AB^2+BC^2+CA^2=4AD^2$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

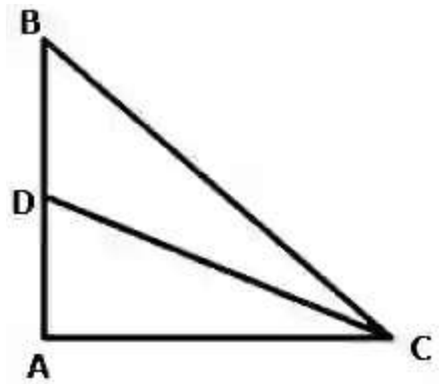
∴ $AB^2+BC^2+CA^2=4AD^2$ (প্রমাণিত)

২. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ
মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ AC ও BD পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে।প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$.
প্রমাণঃ
AC ও BD পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ
অতএব, $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle AOD=90^0$
তাহলে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $\triangle AOB$ হতে পাই,
$AB^2=AO^2+BO^2$.............(i)
একইভাবে পাই,
$CD^2=DO^2+CO^2$.............(ii)
$AD^2= AO^2+DO^2$............(iii)
$BC^2= BO^2+CO^2$............(iv)
(i)+(ii) করে,
$AB^2+CD^2=AO^2+BO^2+DO^2+CO^2$
$=(AO^2+DO^2)+(BO^2+CO^2)$
$=AD^2+BC^2$ [(iii) ও (iv) হতে মান বসিয়ে]
$\therefore AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$ (প্রমাণিত)
৩. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ এবং CD এর মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, $BC^2=CD^2+3AD^2$
সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ
মনে করি, ABC ত্রিভুজের $\angle A$=এক সমকোণ এবং CD এর মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2=CD^2+3AD^2$
প্রমাণঃ
$\angle A$=এক সমকোণ
$\triangle$ ABC-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$BC^2=AC^2+AB^2$.........(i)

একইভাবে, △ADC-এ

$CD^2=AD^2+AC^2$

বা, $AC^2=CD^2-AD^2$………(ii)

যেহেতু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ মধ্যমা।

সেহেতু AD=BD, বা, $AD=\frac{1}{2}AB$, বা, AB=2AD……(iii)

এখন, (iii) ও (ii) হতে মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

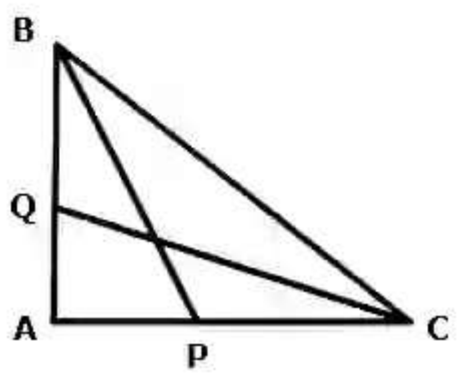
$BC^2=CD^2-AD^2+(2AD)^2$

বা, $BC^2=CD^2-AD^2+4AD^2$

বা, $BC^2=CD^2+3AD^2$ (প্রমাণিত)

৪. ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ BP ও CQ দুইটি মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, $5BC^2=4(BP^2+CQ^2)$

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

মনে করি, ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ BP ও CQ দুইটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $5BC^2=4(BP^2+CQ^2)$

প্রমাণঃ

△ABC এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BC^2=AB^2+AC^2$……..(i)

△ABP-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BP^2=AB^2+AP^2$

বা, $BP^2=AB^2+(\frac{1}{2}AC)^2$ [BP মধ্যমা বলে]

বা, $BP^2=AB^2+\frac{1}{4}AC^2$

বা, $4BP^2=4AB^2+AC^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]……….(ii)

△ ACQ-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$CQ^2=AC^2+AQ^2$

বা, $CQ^2=AC^2+(\frac{1}{2}AB)^2$ [CQ মধ্যমা বলে]

বা, $CQ^2=AC^2+\frac{1}{4}AB^2$

বা, $4CQ^2=4AC^2+AB^2$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]……….(iii)

(ii)+(iii) করে পাই,

$4BP^2+4CQ^2=4AB^2+AC^2+4AC^2+AB^2$

বা, $4(BP^2+CQ^2)=5AB^2+5AC^2$

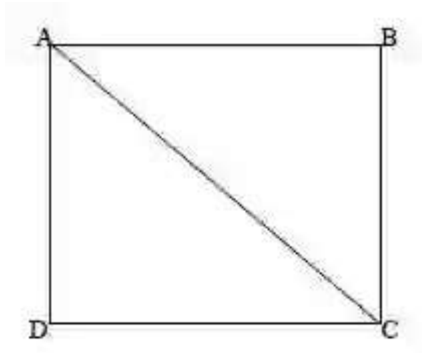
বা, $4(BP^2+CQ^2)=5(AB^2+AC)^2$

বা, $4(BP^2+CQ^2)=5BC^2$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $5BC^2=4(BP^2+CQ^2)$ [প্রমাণিত]

৫. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঐ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

মনে করি, ABCD একটি বর্গের একটি কর্ণ AC. প্রমাণ করতে হবে যে AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD বর্গক্ষেত্ররের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

প্রমাণঃ

AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AC^2

এবং ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $a^2=AB^2=BC^2=CD^2=AD^2$ [বর্গের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং এর দৈর্ঘ্য a ধরে]

এখন, $\angle ADC=90^0$ [বর্গের প্রত্যেক কোণ সমকোণ]

তাহলে, $\triangle$ADC-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

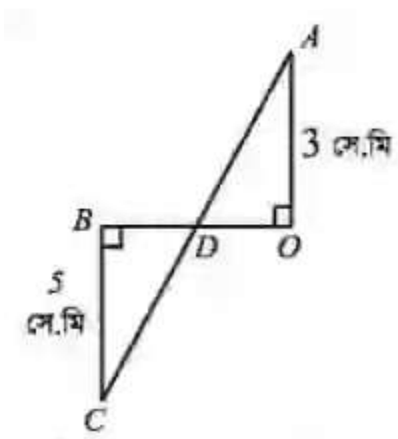
$AC^2=AD^2+DC^2$

বা, $AC^2=a^2+a^2$

বা, $AC^2=2a^2$

বা, AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল=প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (প্রমাণিত)

৬. চিত্রে OB=4 সেমি হলে BD এবং AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।



সমাধানঃ

ধরি, BD=x

$\therefore$ DO=4-x

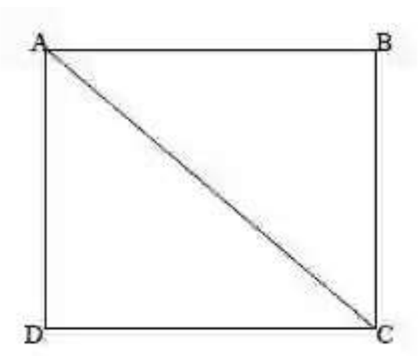
চিত্রে, $\triangle$CBD ও $\triangle$ADO-এ

$\angle CBD=\angle AOD=90^0$

$\angle BDC = \angle ADO$ [বিপ্রতীপ কোণ]
$\therefore \angle BCD = \angle DAO$
তাহলে, $\triangle CBD$ ও $\triangle ADO$ সদৃশ।
অতএব,
$$\frac{BC}{AO} = \frac{BD}{DO}$$
বা, BC.DO=AO.BD
বা, 5.(4-x)=3.x
বা, 20-5x=3x
বা, 20=3x+5x
বা, 8x=20
বা, x= 20/8
বা, x= 5/2
বা, BD=2.5 cm
∴ DO=4-2.5=1.5 cm
$\triangle CBD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$CD^2=CB^2+BD^2$
বা, $CD^2 =5^2+(2.5)^2$
বা, $CD^2 =25+6.25$
বা, $CD^2=31.25$
বা, CD=5.590
$\triangle ADO$ -এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$AD^2=AO^2+DO^2$
বা, $AD^2=3^2+(1.5)^2$
বা, $AD^2=9+2.25$
বা, $AD^2=11.25$
বা, AD=3.35
∴ CD+AD=5.590+3.354=8.944
বা, AC=8.944 cm
∴ BD=2.5 cm
AC=8.944 cm

৭. প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র এর কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। এর একটি কর্ণ AC. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2=½AC^2$

প্রমাণঃ

△ABC-এ ∠B=এক সমকোণ [বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]

∴ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AC^2=AB^2+BC^2$

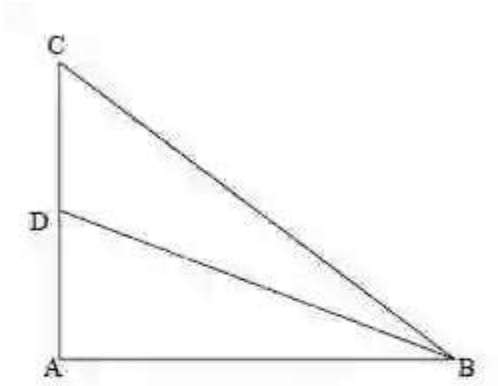
বা, $AC^2=AB^2+AB^2$ [বর্গের সকল বাহু সমান]

বা, $AC^2=2AB^2$

বা, $AB^2= ½AC^2$ [প্রমাণিত]

৮. ABC ত্রিভুজের ∠A= এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2+AD^2=BD^2+AC^2$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের ∠A= এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2+AD^2=BD^2+AC^2$.

প্রমাণঃ

△ABC -এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$BC^2=AB^2+AC^2$

△ADB -এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2+AD^2=BD^2$

বা, $AD^2=BD^2-AB^2$

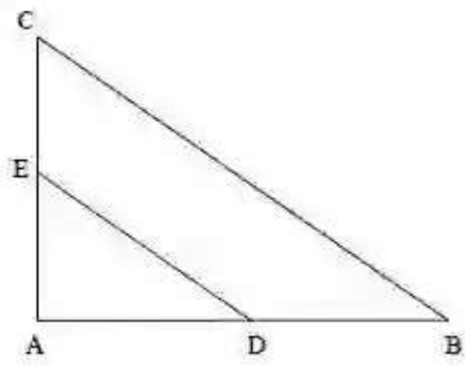
তাহলে,

$BC^2+AD^2= AB^2+AC^2+ BD^2-AB^2$

বা, $BC^2+AD^2=BD^2+AC^2$ [প্রমাণিত]

৯. ABC ত্রিভুজের ∠A= এক সমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $DE^2=CE^2+BD^2$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle A$= এক সমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE^2=CE^2+BD^2$.

প্রমাণঃ

এখানে, AD=BD এবং AE=CE [D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

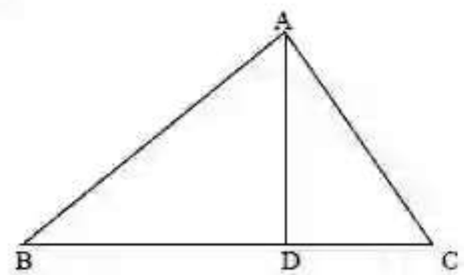
$\triangle ADE$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$DE^2=AE^2+AD^2$

বা, $DE^2=CE^2+BD^2$ [প্রমাণিত]

১০. $\triangle ABC$ এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB>AC. প্রমাণ কর যে, $AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB>AC. প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2-AC^2=BD^2-CD^2$.

প্রমাণঃ

$\triangle ABC$ এ BC এর উপর লম্ব AD

$\therefore \triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।

$\triangle ABD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2=BD^2+AD^2$.......(i)

$\triangle ADC$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AC^2=AD^2+DC^2$......(ii)

(i)-(ii) করে পাই,

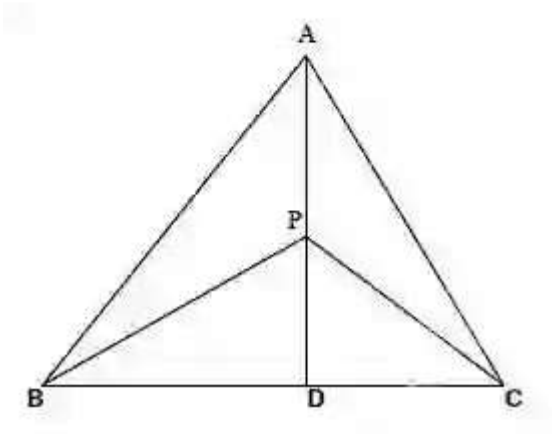
$AB^2-AC^2= BD^2+AD^2-(AD^2+DC^2)$

বা, $AB^2-AC^2= BD^2+AD^2-AD^2-DC^2$

বা, $AB^2-AC^2= BD^2-DC^2$ [প্রমাণিত]

১১. $\triangle ABC$ এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB>AC. প্রমাণ কর যে, $PB^2-PC^2=AB^2-AC^2$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ

দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB>AC.
প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2-PC^2=AB^2-AC^2$.

প্রমাণঃ

যেহেতু $AD \perp BC$ সেহেতু $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BPD$, $\triangle CPD$ প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ।
$\triangle ABD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$AB^2=BD^2+AD^2$
$\triangle ACD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$AC^2=AD^2+CD^2$
$\therefore AB^2-AC^2= BD^2+AD^2- AD^2-CD^2=BD^2-CD^2$……(i)
$\triangle BPD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$PB^2=PD^2+BD^2$
$\triangle PCD$-এ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
$PC^2=PD^2+CD^2$
$PB^2-PC^2= PD^2+BD^2- PD^2-CD^2=BD^2-CD^2$……(ii)
(i) ও (ii) তুলনা করে পাই,
$PB^2-PC^2=AB^2-AC^2$ [প্রমাণিত]