দ্বাদশ অধ্যায়

সমতলীয় ভেক্টর

পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- AB একটি ভেক্টর হলে একে $\overline{AB}$ বা $\underline{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য একক হলে তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। $\underline{a}$ একটি একক ভেক্টর হলে একে $\underline{a}$ আকারে লেখা হয়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য হলে তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয়। একে $\underline{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- দুটি ভেক্টরের দিক একই এবং তাদের ধারক রেখা একই রেখা বা সমান্তরাল রেখা হলে তাদের সদৃশ ভেক্টর বলে।
- সমজাতীয় দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া না করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে।
- যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই, দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের ধারক রেখা একই হয় বা সমান্তরাল হয় তাহলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
- $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে যদি অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ নির্ণয় করা যায় যাতে $\underline{v} = -\underline{u}$ হয় তাহলে v বা $-\underline{u}$ কে $\underline{u}$ ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর বলে।
- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে এদের যোগফল বা লব্ধিকে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। এটি ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি।
- দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধি বলে।
- দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয় কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সব ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।
- যেকোনো দুটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ এটি ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ এটি ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। এটি ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি।
- m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুটি ভেক্টর হলে,
- $(m + n)\underline{v} = m\underline{v} + n\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
- $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
- **অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা :**

  (i) দুইটি বিন্দু A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ হলে $\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ হয়।

  (ii) A,B,C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c হলে A, B, C সমরেখা হবে যদি ও কেবল যদি $\overline{AC} = k.\overline{AB}$ হয়।

  (iii) A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে, C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে $C = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ হবে। যদি বহির্বিভক্ত হয়, তবে $C = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ হবে।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. AB || DC হলে–

i. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি

ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ iii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

● i ⓖ ii
ⓖ i ও ii ⓘ i, ii ও iii

২. দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে–

i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য

ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য

iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

ক i ● ii গ i ও ii ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা : (i) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিকের বিধি প্রযোজ্য নয়। সুতরাং এটি সঠিক নয়।

(ii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য না হলেও ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য। সুতরাং এটি সঠিক।

(iii) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। সুতরাং এটি সঠিক নয়।

৩. AB = CD এবং AB || CD হলে নিচের কোনটি সঠিক?

● $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

খ $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে m > 1

ⓖ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < 0$

ⓔ $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = 0$ যেখানে $m > 1$

ব্যাখ্যা : $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ দুইটি ভেক্টর এবং $AB = CD$ ও $AB \parallel CD$ হলে অবশ্যই $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

যেমন : একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AD ও BC দুইটি ভেক্টরের জন্য $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

কারণ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও এরা পরস্পর সমান্তরাল।

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৪. C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ $\underline{c} = \frac{\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ ⓛ $\underline{c} = \frac{2\underline{a} + \underline{b}}{5}$

● $\underline{c} = \frac{3\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ ⓔ $\underline{c} = \frac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$

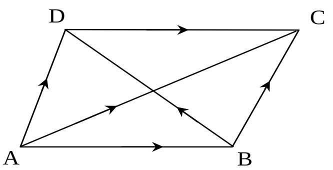
৫. ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ $\overrightarrow{OA} = \underline{a} - \underline{b}$ ⓛ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$

● $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ⓔ $\overrightarrow{OC} = \underline{c} - \underline{b}$

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

সমাধান :



দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুটিকে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে এবং দেখাতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

প্রমাণ : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ....(i)

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ....(ii)

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

আবার, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$ [(ii) নং এর উভয় পাশে $(-\overrightarrow{BD})$ যোগ করে]

$= 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$

$= 2\overrightarrow{AB}$ ....[(i) নং হতে পাই]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$

(খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

সমাধান :

(ক) এখানে, $-(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)(\underline{a}) + (-1)(\underline{b})$

$= -\underline{a} - \underline{b}$ [স্কেলার ও ভেক্টর গুণন অনুসারে]

$\therefore -(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেওয়া আছে,

$\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b})$

[উভয়পক্ষে $(-\underline{b})$ যোগ করে]

বা, $\underline{a} + (1 - 1)\underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৮ ॥ (ক) দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \underline{a} + \underline{a}$

$= 1\underline{a} + 1\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= (1 + 1)\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= 2\underline{a}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেখাও যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

সমাধান : বামপক্ষ $= (m - n)\underline{a}$

$= \{m + (-n)\}a$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= m\underline{a} + (-n\underline{a})$ [$\because (-n)\underline{a} = -n\underline{a}$]

$= m\underline{a} - n\underline{a}$ = ডানপক্ষ

$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(গ) দেখাও যে, $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$

সমাধান : বামপক্ষ $= m(\underline{a} - \underline{b})$

$= m\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$ [সংখ্যা গুণিতকের বণ্টন সূত্র]

$= m\underline{a} - m\underline{b}$ [$\because m(-\underline{b}) = -m\underline{b}$]

= ডানপক্ষ

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ (ক) $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

সমাধান : যেকোনো অশূন্য ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিবেচনা করি।

মনে করি, $\underline{a}, \underline{b}$ সমান্তরাল ভেক্টর। তাহলে $\underline{a}, \underline{b}$ এর ধারক অভিন্ন বা সমান্তরাল এবং $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক অভিন্ন বা বিপরীত।

ধরি, $m = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}$

এখানে, $m > 0$, ফলে $\underline{a}, \underline{b}$ এর ধারক অভিন্ন এবং তাদের দিকও অভিন্ন

তদুপরি, $|m\underline{b}| = m|\underline{b}| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}.|\underline{b}| = |\underline{a}|$

এখন $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক অভিন্ন হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$

এবং $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক বিপরীত হলে, $\underline{a} = -m\underline{b}$ কেননা,

(i) $|m\underline{b}| = |\underline{a}|, |-m\underline{b}| = |m\underline{b}| = |\underline{a}|$

(ii) $m\underline{b}$ বা, $-m\underline{b}$ এর ধারক $\underline{b}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন হলে তা $\underline{a}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন বা সমান্তরাল

(iii) $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিকও অভিন্ন হলে $\underline{a}, m\underline{b}$ এর দিক ও অভিন্ন। অপরদিকে $\underline{a}, \underline{b}$ এর দিক বিপরীত হলে, $\underline{a}, m\underline{b}$ এর দিকও অভিন্ন। সুতরাং $\underline{a} = m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) $\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে, দেখাও যে, $m = n = 0$

সমাধান : যেহেতু $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

সুতরাং $n\underline{b} = -m\underline{a}$

ফলে $m\underline{a}, n\underline{b}$ উভয়ে শূন্য ভেক্টর অথবা $n\underline{b}, m\underline{a}$ এর বিপরীত হতে পারে না।

সুতরাং $m\underline{a} = 0$ এবং $n\underline{b} = 0$

$\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য বলে $m = 0$

এবং $n = 0$

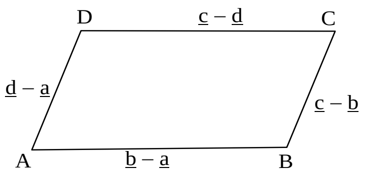
$\therefore m = n = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে, AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

সুতরাং AB ও CD রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল

অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

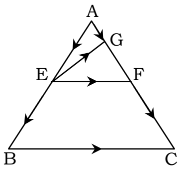
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি

$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

ফলে $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

সমাধান : ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্য বিন্দুগামী।



প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের E, AB -এর মধ্যবিন্দু এবং EF ∥ BC

প্রমাণ করতে হবে যে, F, AC এর মধ্যবিন্দু।

F, AC–এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, G, AC–এর মধ্যবিন্দু

তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EG}$

$\therefore 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{EG}$

বা, $2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EG}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EG}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EG}$

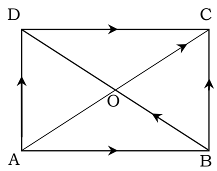
কিন্তু BC ∥ EF

$\therefore$ EG ও EF অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ G ও F অভিন্ন বিন্দু।

অর্থাৎ F, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

সমাধান : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C এবং D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ এবং $\underline{d}$।

AC-এর মধ্যবিন্দু O হওয়ায়, O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$। আবার DB এর মধ্যবিন্দু O হওয়ায় O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$।

উভয়ই একই O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

বা, $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

বা, $\underline{b} + \underline{d} = \underline{a} + \underline{c}$

বা, $(\underline{b} + \underline{d}) - (\underline{a} + \underline{d}) = (\underline{a} + \underline{c}) - (\underline{a} + \underline{d})$

[উভয়পক্ষ থেকে $\underline{a} + \underline{d}$ বিয়োগ করে]

বা, $(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{d}) = (\underline{c} - \underline{d}) + (\underline{a} - \underline{a})$

বা, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

সুতরাং $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

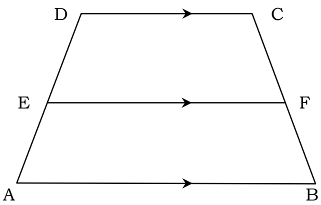
$\therefore$ AB || DC এবং AB = DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয় AD ও BC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। E, F যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF বাহু AB ও CD এর সমান্তরাল এবং EF = $\frac{1}{2}$ (AB + DC)



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূল বিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

তাহলে E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

সুতরাং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{d})$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এবং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

এখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল।

এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$

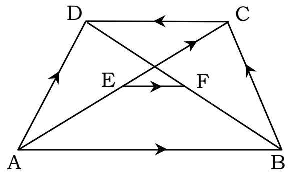
$\therefore EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$

সুতরাং $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ ভেক্টরের সমান্তরাল

এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC সমান্তরাল বাহু (AB > DC) এবং AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখা AB ও DC এর সমান্তরাল এবং EF = $\frac{1}{2}$ (AB – DC)।



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

তাহলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এখন, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

সুতরাং $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{d} - \underline{c})$

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{d} - \underline{c}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$

এখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ ভেক্টর ও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল

এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}|$

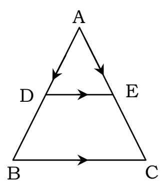
বা, $EF = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}|\right)$

$\therefore EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

সুতরাং EF, AB ও DC এর সমান্তরাল এবং $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

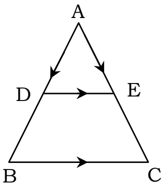
ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC || DE এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

সমাধান :

ক.



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E,

চিত্র অনুযায়ী ΔADE এ $\vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AE}$

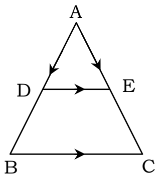
[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ [E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\vec{AC} = 2(\vec{AD} + \vec{DE})$

খ. মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$



প্রমাণ : ভেক্টরের বিয়োগ ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\vec{AE} - \vec{AD} = \vec{DE}$ ....(i)

এবং $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$

কিন্তু $\vec{AC} = 2\vec{AE}$, $\vec{AB} = 2\vec{AD}$

[$\because$ D ও E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore$ $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ থেকে পাই,

$2\vec{AE} - 2\vec{AD} = \vec{BC}$

বা, $2(\vec{AE} - \vec{AD}) = \vec{BC}$

$\therefore$ $2\vec{DE} = \vec{BC}$ [i হতে]

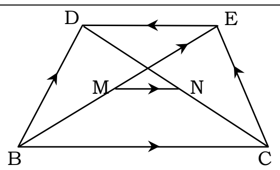
আবার $|\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$

$\therefore$ $DE = \frac{1}{2}BC$

সুতরাং $\vec{DE}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।
কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়

সুতরাং $\vec{DE}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, BCDE ট্রাপিজিয়ামের BC ও DE সমান্তরাল বাহু (BC > DE) এবং BE ও CD কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$



প্রমাণ : মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর সাপেক্ষে B, C, E ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

তাহলে $\vec{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\vec{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

সুতরাং, $MN = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b} + \underline{d} - \underline{c})$

কিন্তু, $\vec{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\vec{DE} = \underline{e} - \underline{d})$

$\therefore$ $MN = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{ED}) = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{DE})$

এখন $\vec{BC}$ ও $\vec{DE}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী।

সুতরাং $\vec{BC} - \vec{DE}$ ভেক্টর $\vec{BC}$ ও $\vec{DE}$ এর সমান্তরাল।

এবং $|\vec{MN}| = \frac{1}{2}|\vec{BC} - \vec{DE}|$

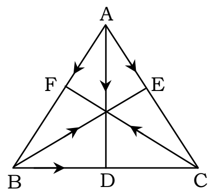
বা, $\vec{MN} = \frac{1}{2}\left(|\vec{BC}| - |\vec{DE}|\right)$

$\therefore$ $MN = \frac{1}{2}(\vec{BC} - \vec{DE})$

সুতরাং, MN, DE ও BC এর সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.



ক. $\vec{AB}$ ভেক্টরকে $\vec{BE}$ ও $\vec{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \underline{0}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

সমাধান :

ক. $\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$ [চিত্রানুযায়ী]

বা, $\vec{AB} = \vec{AE} - \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{BE}$

বা, $\vec{AB} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{CF}) - \vec{BE}$ [$\because$ $\vec{AC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB}$]

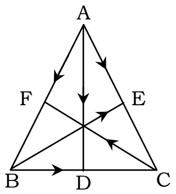
বা, $\vec{AB} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{CF} - \vec{BE}$

বা, $\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{CF} - \vec{BE}$

বা, $\frac{3}{4}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{CF} - \vec{BE}$

$\therefore \vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{CF} - \frac{4}{3}\vec{BE}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{4}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

খ.



ΔABE এ ভেক্টরযোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$

বা, $\vec{AB} + \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ $\quad [\because \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}]$

বা, $\vec{AC} = 2(\vec{AB} + \vec{BE})$ ....(i)

এবং $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$\therefore \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = 2(\vec{AB} + \vec{BE}) - \vec{AB}$

$= \vec{AB} + 2\vec{BE}$ ....(ii)

আবার, ΔABD এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$

এবং $\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AD}$ $\quad [\because \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC}]$

বা, $\vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{BE})$ [(ii) নং হতে]

$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BE}$

$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BE}$

ΔACF এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AF}$

$\therefore \vec{AC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ $[\because \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB}]$

$\therefore \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} - 2(\vec{AB} + \vec{BE})$ [(i) নং হতে]

$= \frac{1}{2}\vec{AB} - 2\vec{AB} - 2\vec{BE} = -\frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{BE}$

এখন, বামপক্ষ $= \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}$

$= \left(\frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BE}\right) + \vec{BE} + \left(-\frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{BE}\right)$

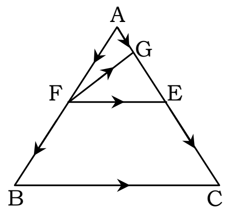
$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{BE} + \vec{BE} - \frac{3}{2}\vec{AB} - 2\vec{BE}$

$= \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{3}{2}\vec{AB} + 2\vec{BE} - 2\vec{BE}$

$= \underline{0}$ = ডানপক্ষ

সুতরাং $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজে F, AB এর মধ্যবিন্দু এবং EF ‖ BC। প্রমাণ করতে হবে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : E, AC এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, G, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী পাই,

$\vec{AG} - \vec{AF} = \vec{FG}$

$\therefore 2(\vec{AG} - \vec{AF}) = 2\vec{FG}$

বা, $2\vec{AG} - 2\vec{AF} = 2\vec{FG}$

কিন্তু $\vec{AC} = 2\vec{AG}$. $\vec{AB} = 2\vec{AF}$

$\therefore \vec{AC} - \vec{AB} = 2\vec{FG}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী

$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$

$\therefore \vec{BC} = 2\vec{FG}$

কিন্তু, BC ‖ FE

অতএব, EG ও FE অভিন্ন রেখা। তাই G ও E অভিন্ন বিন্দু।

অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১. **যেকোনো ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ হলে, এটা ভেক্টর যোগের–**

ⓚ বিনিময় বিধি ● সংযোগ বিধি ⓖ সামান্তরিক বিধি ⓘ ত্রিভুজ বিধি

২. **– ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক এবং ধারকরেখা নেই।**

ⓚ একক ● শূন্য ⓖ সমান ⓘ অবস্থান

৩. **A এবং C বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ হলে, $\vec{CA}$ = কোনটি?**

● $\underline{a} - \underline{b}$ ⓙ $-\underline{a} - \underline{b}$ ⓖ $\underline{a} + \underline{b}$ ⓘ $-\underline{a} + \underline{b}$

৪. **$\vec{AB}$ যেকোনো ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

ⓚ $\vec{AB} = \vec{BA}$ ⓙ $\vec{AB} = |\vec{AB}|$ ● $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$ ⓘ $\vec{AB} = -|\vec{AB}|$

৫. **$P(\underline{m} + \underline{n})$ = কত?**

ⓚ $P\underline{m}\,\underline{n}$ ● $P\underline{m} + P\underline{n}$ ⓖ $P\hat{\underline{m}} + P\hat{\underline{n}}$ ⓘ $P|\underline{m}| + P|\underline{n}|$

৬. **ABCD আয়তক্ষেত্রে–**

i. $\vec{AB} = \vec{DC}$ ii. $\vec{AC} = \vec{BD}$ iii. $\vec{AD} = \vec{BC}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭. $\overrightarrow{AA}$ **একটি–**

i. বিন্দু ভেক্টর ii. এর দৈর্ঘ্য শূন্য

iii. এটি অদিক রাশি

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

৮. **শূন্য ভেক্টরের–**

i. দিক নির্ণয় করা যায় ii. পরমমান শূন্য

iii. ধারক রেখা নেই

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ৯ ও ১০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেৰে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৯. **C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 5 : 3 অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে কোনটি সঠিক?**

(ক) $\underline{c} = \frac{3a-5b}{2}$ ● $\underline{c} = \frac{-3a+5b}{2}$ (গ) $\underline{c} = \frac{3a+5b}{8}$ (ঘ) $\underline{c} = \frac{3a-5b}{8}$

১০. **ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

(ক) $\overrightarrow{OA} = a - b$ (খ) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = AC$ ● $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ (ঘ) $OC = \underline{c} - \underline{b}$

১২·১ : স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৫. **রাশি কত প্রকার?** (সহজ)

● ২ (খ) ৩ (গ) ৪ (ঘ) ৬

১৬. **স্কেলার রাশি প্রকাশের জন্য প্রয়োজন–** (সহজ)

● শুধু মান (খ) শুধু দিক

(গ) মান অথবা দিক (ঘ) মান ও দিক উভয়ই

১৭. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ)

(ক) ভর (খ) আয়তন (গ) তাপমাত্রা ● বল

১৮. **যে রাশির শুধু মান আছে দিক নেই সে রাশিকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) ভেক্টর রাশি ● স্কেলার রাশি (গ) মৌলিক রাশি (ঘ) যৌগিক রাশি

১৯. **যে রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তাকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) স্কেলার রাশি (খ) মৌলিক রাশি ● ভেক্টর রাশি (ঘ) যৌগিক রাশি

২০. **যে ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক ও ধারক রেখা নেই তাকে কী বলে?** (সহজ)

(ক) একক ভেক্টর ● শূন্য ভেক্টর (গ) আয়তন ভেক্টর (ঘ) অবস্থান ভেক্টর

২১. **কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে কী বলে?** (সহজ)

● আদিবিন্দু (খ) অন্তবিন্দু (গ) প্রান্তবিন্দু (ঘ) নির্দেশক

২২. **দিক নির্ভরতা অনুসারে রাশিকে কয়ভাগে ভাগ করা যায়?** (সহজ)

(ক) ৫ (খ) ৪ (গ) ৩ ● ২

২৩. **নিচের কোনটি অদিক রাশি?** (সহজ)

● আয়তন (খ) বল (গ) ওজন (ঘ) সরণ

২৪. **নিচের কোনটি স্কেলার রাশি?** (সহজ)

(ক) সরণ (খ) ত্বরণ (গ) ওজন ● দৈর্ঘ্য

২৫. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ)

(ক) আয়তন (খ) দৈর্ঘ্য ● সরণ (ঘ) সময়

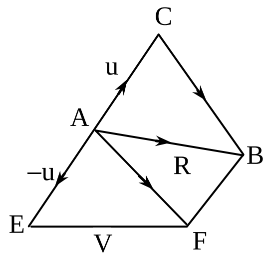
২৬. **কোনো রেখাংশের দুই প্রান্তবিন্দু চিহ্নিত করলে তাকে কী রেখাংশ বলে?** (সহজ)

(ক) অদিক (খ) নির্দিক ● দিক নির্দেশক (ঘ) বিপরীত

২৭. **যেসব রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তাকে কোন রাশি বলে?** (সহজ)

(ক) মৌলিক (খ) যৌগিক ● ভেক্টর (ঘ) স্কেলার

নিচের তথ্যের আলোকে ১১ ও ১২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১১. **ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী $\overrightarrow{AF}$ = ?**

(ক) $\underline{u} - \underline{v}$ ● $\underline{v} - \underline{u}$ (গ) $\underline{u} + \underline{v}$ (ঘ) $2\underline{n} + \underline{v}$

১২. **AEFB চতুর্ভুজ ভেক্টর যোগের কোন বিধি মেনে চলে?**

(ক) ত্রিভুজবিধি (খ) রম্বসবিধি ● সামান্তরিক বিধি (ঘ) বর্গবিধি

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩ ও ১৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দু O এর সাপেৰে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$. AB রেখাংশ C বিন্দুতে 3 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।

১৩. **C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?**

● $3\underline{b} - 2\underline{a}$ (খ) $2\underline{a} - 3\underline{b}$ (গ) $3\underline{b} + 2\underline{a}$ (ঘ) $5\underline{a}$

১৪. **$\overrightarrow{AC}$ = কোনটি**

● $3(\underline{b} - \underline{a})$ (খ) $3(\underline{a} - \underline{b})$ (গ) $3\underline{b} - \underline{a}$ (ঘ) $\underline{a} - 3\underline{b}$

২৮. **AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য A ও B বিন্দুদ্বয়ের দুরত্বের পরিমাণের সমান হলে নিচের কোনটি দ্বারা প্রকাশ করা হয়?** (মধ্যম)

(ক) $|BA|$ ● $|\overrightarrow{AB}|$ (গ) $|AB|$ (ঘ) $|\vec{A}| + |\vec{B}|$

২৯. **নিচের কোনটি স্কেলার রাশি?** (সহজ)

(ক) সরণ (খ) বেগ (গ) ত্বরণ ● দ্রবতি

৩০. **2 টাকা, 3cm, 5 ইত্যাদি কোন জাতীয় রাশি?** (সহজ)

(ক) একক (খ) যৌগিক ● স্কেলার (ঘ) মৌলিক

৩১. **কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য একক হলে, তাকে কী ভেক্টর বলে?** (সহজ)

● একক (খ) সমান্তরাল (গ) বিপরীত (ঘ) শূন্য

৩২. **ভেক্টর রাশির অপর নাম কী?** (সহজ)

(ক) অদিক (খ) নির্দিক (গ) স্কেলার ● সদিক

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩৩. **ভেক্টর রাশি–**

i. এর অপর নাম সদিক রাশি

ii. এর মান ও দিক আছে

iii. এর উদাহরণ– বেগ, বল

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৩৪. **স্কেলার রাশির–**

i. মান আছে কিন্তু দিক নাই

ii. কেবলমাত্র মান আছে

iii. কেবলমাত্র দিক আছে

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১২·২ : ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৩৫. **কোনো ভেক্টর যে অসীম সরলরেখা অংশ বিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের কী বলা হয়?** (সহজ)

(ক) সরলরেখা (খ) সমান্তরাল রেখা (গ) বক্ররেখা ● ধারক রেখা

৩৬. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ এবং $m > 0$ হলে AB ও CD সম্পর্কে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান (খ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীত

(গ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী ● $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী

৩৭. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ কে কী ভেক্টর বলা হয়? (মধ্যম)

(ক) সমান ● সমান্তরাল (গ) অসমান (ঘ) সদৃশ

৩৮. $|\underline{u}|$ একটি শূন্য ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সত্য? (সহজ)

● $|\underline{u}| = 0$ (খ) $|\underline{u}| = 2$ (গ) $o.\underline{u} = 1$ (ঘ) $|\underline{u}| = 1$

৩৯. যদি দুটি ভেক্টরের দৈর্ঘ্য সমান, ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল এবং দিক একই হয় তাকে কী বলে? (মধ্যম)

● সমান ভেক্টর (খ) সদৃশ ভেক্টর (গ) বিপরীত ভেক্টর (ঘ) একক ভেক্টর

৪০. ভেক্টর রাশি প্রকাশের জন্য কী প্রয়োজন? (সহজ)

(ক) শুধু মান (খ) শুধু দিক

(গ) মান অথবা দিক ● মান ও দিক উভয়ই

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

$\overrightarrow{AB}$ একটি দিক রেখাংশ।

ওপরের তথ্যের আলোকে ৪১ – ৪৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪১. রেখাংশের B কে কী বলে? (সহজ)

● অন্তঃবিন্দু (খ) প্রান্তঃবিন্দু (গ) মধ্যবিন্দু (ঘ) পাদবিন্দু

৪২. রেখাংশের আদিবিন্দু কোনটি? (সহজ)

(ক) $\vec{A}$ (খ) $\vec{B}$ ● A (ঘ) B

৪৩. রেখাংশটির মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\vec{A} + \vec{B}$ (খ) $\vec{AB}$ (গ) $\overrightarrow{AB}$ ● $|\overrightarrow{AB}|$

১২·৩ : ভেক্টরের সমতা; বিপরীত ভেক্টর

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৪. ভেক্টর যোগের কোন বিধি অনুসারে $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ হয়? (সহজ)

● বিনিময় (খ) সংযোগ (গ) বর্জন (ঘ) বণ্টন বিধি

৪৫. কোন বিধি অনুসারে $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ হয়? (সহজ)

(ক) বর্জন ● সংযোগ (গ) বণ্টন (ঘ) বিনিময় বিধি

৪৬. কোন বিধি অনুসারে $(\underline{u} + \underline{v}) = (\underline{u} + \underline{w})$ হলে $(\underline{v} + \underline{w})$ হয়? (সহজ)

(ক) বিনিময় (খ) বণ্টন ● বর্জন (ঘ) সংযোগ

৪৭. $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = w$ হলে– (মধ্যম)

(ক) $\underline{u} > \underline{w}$ (খ) $\underline{u} \neq \underline{w}$ ● $\underline{u} = \underline{w}$ (ঘ) $\underline{u} < \underline{w}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৪৮. $\underline{u}, \underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ প্রকাশ করে –

i. যোজন বিধি

ii. বিয়োজন বিধি

iii. গুণন বিধি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) ii ও iii

৪৯. $\underline{u}, \underline{v}\ \underline{w}$ -এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ প্রকাশ করে –

i. যোজন বিধি

ii. বিয়োজন বিধি

iii. সহযোজন বিধি

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫০. একটি ভেক্টর $\underline{u}$, অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান হলে–

i. $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য

ii. $\underline{u}\ \underline{v}$ এর সমান্তরাল

iii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সাথে একই

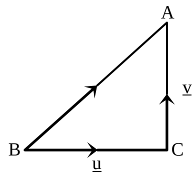
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i (খ) i ও ii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

১২·৪ : ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

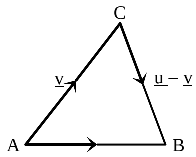
৫১.



চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এর মান ও দিক সূচিত হয় কোন ভেক্টর দ্বারা? (মধ্যম)

(ক) $\underline{u}$ (খ) $\underline{v}$ (গ) $\underline{u} - \underline{v}$ ● $\underline{u} + \underline{v}$

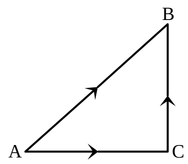
৫২. $\overrightarrow{CB} = \underline{u} - \underline{v}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ = কত?



(মধ্যম)

● $\underline{u}$ (খ) $\underline{v}$ (গ) $\underline{u} - \underline{v}$ (ঘ) $\underline{u} + \underline{v}$

৫৩.

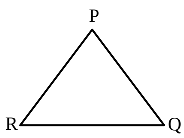


$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ● $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

(গ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (ঘ) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

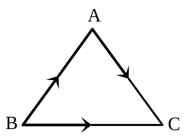
৫৪.



চিত্রে $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PQ}$ = কত? (সহজ)

(ক) $\overrightarrow{PR}$ (খ) $\overrightarrow{PQ}$ ● $\overrightarrow{RQ}$ (ঘ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{RQ}$

৫৫. (সহজ)

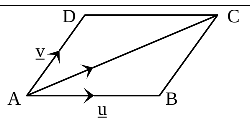


ত্রিভুজ ABC এর জন্য নিচের কোনটি সত্য?

(ক) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ (খ) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$

(গ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 1$ ● $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

৫৬.



ABCD সামান্তরিকের AC ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

(ক) $\underline{u}$ (খ) $\underline{v}$ (গ) $\underline{u}-\underline{v}$ ● $\underline{u}+\underline{v}$

৫৭. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দু সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

● $\overrightarrow{OP}$ (খ) $\overrightarrow{PO}$ (গ) $\overrightarrow{P}$ (ঘ) $\overrightarrow{O}$

৫৮. Δ ABC-এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে CD এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ ● $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ (গ) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$

৫৯. শূন্য ভেক্টর বলতে কী বোঝায়? (সহজ)

● যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য (খ) যে ভেক্টর রাশির মান এক একক
(গ) যে রাশির মান অসীম (ঘ) যে রাশির মান ২

৬০. দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে কী বলা হয়? (সহজ)

(ক) আয়তন (খ) ওজন ● লব্ধি (ঘ) ত্বরণ

৬১. ভেক্টরকে স্কেলার দ্বারা গুণ করলে গুণফল হয়— (মধ্যম)

(ক) শূন্য ● ভেক্টর (গ) ধ্রুবক (ঘ) ফাঁকা

৬২. $\overrightarrow{BA}$ দিক নির্দেশক রেখাংশের মান কত? (সহজ)

● BA (খ) $\overrightarrow{BA}$ (গ) $\overrightarrow{AB}$ (ঘ) AB + BA

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৬৩. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC এর সমান্তরাল রেখা A-কে E বিন্দুতে ছেদ করলে—

i. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$ ii. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

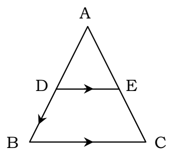
iii. $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii ● i, ii ও iii

৬৪.

i. DE || BC
ii. DE = $\frac{1}{2}$ BC
iii. DE = DA + AE



নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

● i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬৫. যেকোনো ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$-এর জন্য—

i. $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$
ii. a + b + c = a + c + b
iii. $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৬. শূন্য ভেক্টরের –

i. পরমমান শূন্য
ii. দিক অনির্ণেয়
iii. দৈর্ঘ্য শূন্য

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৬৭. ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি অনুসারে যেকোনো r, s, t–এর মধ্যে—

i. $\underline{r}+\underline{s}=\underline{r}+\underline{t}$ হলে $\underline{s}=\underline{t}$
ii. $\underline{s}+\underline{t}=\underline{r}+t$ হলে $\underline{s}=\underline{r}$
iii. $\underline{r}+\underline{s}=t+\underline{s}$ হলে $\underline{r}=\underline{s}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ৬৮ ও ৬৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে,

৬৮. নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ ● $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

(গ) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

৬৯. $|\overrightarrow{DE}|$ = 6 সে. মি. হলে $|\overrightarrow{BC}|$ এর মান কত সে. মি.? (মধ্যম)

(ক) 6 সে. মি. (খ) 9 সে. মি. ● 12 সে. মি. (ঘ) 15 সে. মি.

১২·৫ : ভেক্টরের যোগের বিধিসমূহ

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭০. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ তিনটি ভেক্টর হলে ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি কোনটি? (মধ্যম)

● $\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$ (খ) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$
(গ) $(\underline{u}+\underline{v})(\underline{v}+\underline{w})$ (ঘ) $(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})$

৭১. $\underline{u}=-\underline{v}$ ও $\underline{v}=\underline{w}$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{w}$ (খ) $\underline{u}+\underline{v}=0$ ● $\underline{u}+\underline{w}=0$ (ঘ) $\underline{v}+\underline{w}=0$

৭২. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল না হলে এদের সাথে নিচের কোন ভেক্টরটি অবশ্যই ত্রিভুজ উৎপন্ন করবে? (সহজ)

(ক) $\underline{u}-\underline{v}$ (খ) $\underline{v}-\underline{u}$ (গ) $\underline{uv}$ ● $\underline{u}+\underline{v}$

৭৩. $|\hat{A}|$ = কত? (সহজ)

● 1 (খ) 0 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) 2

৭৪. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ দুটো ভেক্টর হলে— (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$ (খ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
● $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৫. $\underline{u}=\underline{v}$ হলে—

i. $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্যের সমান
ii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সাথে একমুখী
iii. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

৭৬. m ও n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে—

i. $(m-n)\underline{b}=m\underline{b}-n\underline{b}$
ii. $|\underline{a}+\underline{b}|$ = a + b
iii. $m(\underline{a}-\underline{b})=m\underline{a}-m\underline{b}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

(ক) i ও ii ● i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭৭. $m\underline{u}+n\underline{u}$ হলে—

i. $m(\underline{u}-\underline{u})$
ii. $\underline{u}(m+n)$
iii. $(m+n)\underline{u}+\underline{u}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ● ii (গ) iii (ঘ) ii ও iii

৭৮. $m\underline{u}+m\underline{v}-m(\underline{u}-\underline{v})$ সত্য হবে যদি—

i. m-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

ii. v-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

iii. u-এর সকল মানের জন্য সত্য হয়

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i (খ) ii (গ) iii (ঘ) ii ও iii

১২·৬ : ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৭৯. m ও n উভয়ই ঋণাত্মক হলে (m + n) $\underline{v}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরের দিকের সম্পর্ক কী? (মধ্যম)

(ক) সমান্তরাল ● বিপরীত

(গ) সমান্তরাল ও একই দিক (ঘ) একই দিক

৮০. m একটি স্কেলার রাশি এবং $\underline{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর হলে (– m)$\underline{a}$ = কত? (মধ্যম)

● $-m\underline{a}$ (খ) $m\underline{a}$ (গ) $(-\underline{a})(-m)$ (ঘ) $(-m)(-\underline{a})$

৮১. m > n হলে (n – m)$\underline{v}$ ভেক্টরের দিক ও $\underline{v}$ ভেক্টরের মধ্যে সম্পর্ক হবে– (মধ্যম)

(ক) সমান্তরাল (খ) সমান (গ) সমমুখী ● বিপরীত

৮২. ভেক্টর রাশির বর্ণনায়– (সহজ)

(ক) পরিমাণ উলেরখ করতে হয়

(খ) দিক উলেরখ করতে হয়

● পরিমাণ ও দিক উভয়ই উলেরখ করতে হয়

(ঘ) ত্বরণ উলেরখ করতে হয়

১২·৭ : ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টনসূত্র

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৩. m ও n ধনাত্মক হলে (m + n) $\underline{u}$ ভেক্টরটির মান কোনটি? (মধ্যম)

● $|m+n||\underline{u}|$ (খ) $|m+n|\underline{u}$

(গ) $|mn|\underline{u}$ (ঘ) $mn|\underline{u}|$

৮৪. $\overrightarrow{AB}$ = 1 একক হলে তাকে কী ভেক্টর বলা হয়? (সহজ)

● একক (খ) লব্ধি (গ) শূন্য (ঘ) অশূন্য

৮৫. যে ভেক্টরের মান 1 একক তাকে কী বলে? (সহজ)

(ক) শূন্য (খ) লব্ধি ● একক (ঘ) অশূন্য

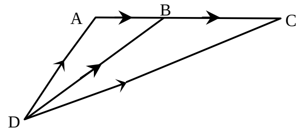
৮৬. m = 0 হলে m$\underline{u}$ = নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\underline{u}$ ● $\underline{0}$ (গ) 0 (ঘ) $m\underline{u}$

১২·৮ : অবস্থান ভেক্টর

সাধারণ বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৮৭.



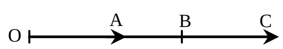
চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

● $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$ (খ) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}$ (গ) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$ (ঘ) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$

৮৮. তিনটি ভেক্টর কিরূ প হলে ত্রিভুজ উৎপন্ন করা সম্ভব? (সহজ)

(ক) সমমুখী (খ) অভিন্ন ● সমান্তরাল (ঘ) অসমান্তরাল

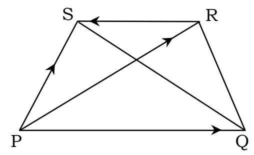
৮৯.



OB = A এবং BC = OB হলে OC কোনটি? (মধ্যম)

(ক) P (খ) $\frac{1}{2}$P ● 2P (ঘ) 4P

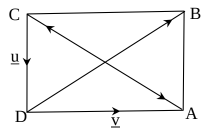
৯০.



চিত্রে $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}$ = কত? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{PQ}$ (খ) $\overrightarrow{PR}$ ● $\overrightarrow{PS}$ (ঘ) $\overrightarrow{QS}$

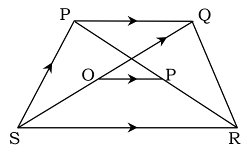
৯১.



চিত্রে $\overrightarrow{CA}$ = কত? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ (খ) $-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$ (গ) $-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$ ● $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$

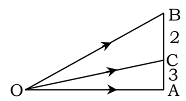
৯২.



PQRS ট্রাপিজিয়ামে $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ কর্ণের মধ্যবিন্দু O ও P হলে, $\overrightarrow{OP}$ = কত? (মধ্যম)

● $\frac{1}{2}$(SR – PQ) (খ) $\frac{1}{2}$(SR + PQ) (গ) $\frac{1}{2}$(SR – OP) (ঘ) $\frac{1}{2}$(OP – PQ)

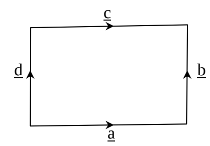
৯৩.



চিত্রে A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c হলে C এর অবস্থান ভেক্টর হবে– (মধ্যম)

(ক) $\frac{2a-3b}{5}$ ● $\frac{2a+3b}{5}$ (গ) $\frac{a-b}{5}$ (ঘ) $\frac{2(a+b)}{5}$

৯৪.



চিত্রানুসারে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● $(\underline{a}+\underline{b})+(\underline{c}+\underline{d})=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})+\underline{d}$

(খ) $(\underline{a}+\underline{b})+(\underline{c}+\underline{d})=(\underline{a}+\underline{d})+(\underline{b}+\underline{c})$

(গ) $(\underline{a}+\underline{b})+(\underline{c}+\underline{d})=(\underline{a}+\underline{d})+\underline{c}+\underline{d}$

(ঘ) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}+\underline{d}$

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

৯৫. $\underline{a}$ যেকোনো অশূন্য ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা m > o হলে–

i. m$\underline{a}$ এর দিক $\underline{a}$ এর দিকের বিপরীত

ii. m $\underline{a}$ ≠ o

iii. m $\underline{a}$ এর দিক a এর দিকের সাথে একমুখী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii ● ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৯৬. BC = QR হলে BC ও QR এর–

i. ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল

ii. দৈর্ঘ্য সমান ও দিক একই

iii. দৈর্ঘ্য অসমান ও দিক বিপরীত

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● i ও ii　　ⓑ i ও iii　　ⓒ ii ও iii　　ⓓ i, ii ও iii

৯৭. $\underline{u}$ কোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে $\underline{a} = m\underline{u}$, $\underline{u}$ এর সমান্তরাল হলে–

i. m > o

ii. m = o

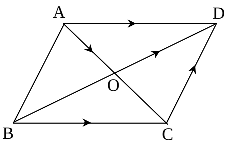
iii. m < o

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓐ i　　ⓑ i ও ii　　ⓒ i ও iii　　● i, ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের চিত্রের আলোকে ৯৮ – ১০০ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

৯৮. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ এর সমান কোনটি? (কঠিন)

ⓐ $\overrightarrow{BC}$　　● $2\overrightarrow{BC}$　　ⓒ $\overrightarrow{AB}$　　ⓓ $2\overrightarrow{AB}$

৯৯. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ এর সমান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

ⓐ $\overrightarrow{BC}$　　ⓑ $2\overrightarrow{BC}$　　ⓒ $\overrightarrow{AB}$　　● $2\overrightarrow{AB}$

১০০. নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

● $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$　　ⓑ $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$　　ⓒ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$　　ⓓ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১০১ – ১০৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.

১০১. AD এর সমান কোনটি ? (সহজ)

● $\underline{b} - \underline{a}$　　ⓑ $\underline{b} + \underline{a}$　　ⓒ $\frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$　　ⓓ $\frac{1}{2}|\underline{b} + \underline{a}|$

১০২. D বিন্দুটি AB-কে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)

১১০. যদি দুটি অশূন্য ভেক্টর সমান হয় তবে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ ভেক্টরদ্বয় অসমান্তরাল　　● ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল

ⓒ ভেক্টরদ্বয় শূন্য　　ⓓ ভেক্টরদ্বয় লম্ব

১১১. $\overrightarrow{AA}$ কী ধরনের ভেক্টর?

● বিন্দু ভেক্টর　　ⓑ একক ভেক্টর

ⓒ স্বাধীন ভেক্টর　　ⓓ সীমাবদ্ধ ভেক্টর

১১২. $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$ কোনটি?

ⓐ $2\underline{b}$　　ⓑ $\underline{b}$　　● $\underline{0}$　　ⓓ $-2b$

১১৩. একটি ভেক্টর a এর অধিক বরাবর একক ভেক্টর কোনটি?

ⓐ $\hat{\mathbf{a}}$　　● $\underline{a}$　　ⓒ $\frac{\hat{a}}{|\mathbf{a}|}$　　ⓓ $\frac{\bar{a}}{a}$

১১৪. ভেক্টরের মূলবিন্দু O হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ $\overline{OA}$　　ⓑ $\underline{a} - \underline{b}$

ⓒ $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{AC}$　　● $\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

১১৫. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরদ্বয় কিরূ প?

ⓐ লম্ব　　ⓑ সমান

ⓒ সমান্তরাল ও দিক একই　　● সমান্তরাল ও দিক বিপরীতমুখী

● $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$　　ⓑ $\frac{m\underline{a} - n\underline{b}}{m - n}$　　ⓒ $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$　　ⓓ $\frac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m + n}$

১০৩. C বিন্দুটি AB-এর মধ্যবিন্দু হলে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

ⓐ $\underline{a} + \underline{b}$　　ⓑ $\underline{a} - \underline{b}$　　● $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$　　ⓓ $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$

নিচের তথ্যের আলোকে ১০৪–১০৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$.

১০৪. AB = কত? (সহজ)

ⓐ $\frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$　　ⓑ $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$　　ⓒ $\underline{a} - \underline{b}$　　● $\underline{b} - \underline{a}$

১০৫. A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি– (সহজ)

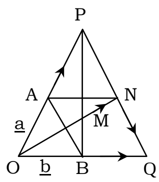
● $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$　　ⓑ $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$　　ⓒ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$　　ⓓ $\overrightarrow{BC} = k.\overrightarrow{AB}$

১০৬. C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে– (সহজ)

● $C = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$　　ⓑ $C = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

ⓒ $C = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$　　ⓓ $C = \frac{1}{2}\underline{b} + \underline{a}$

নিচের চিত্রের আলোকে ১০৭–১০৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{OB}$ এবং N, PQ এর মধ্যবিন্দু।

১০৭. $\overrightarrow{AB}$ = কত? (সহজ)

● $-\underline{a} + \underline{b}$　　ⓑ $\underline{a} - \underline{b}$　　ⓒ $-\underline{a} - \underline{b}$　　ⓓ $\underline{a} + \underline{b}$

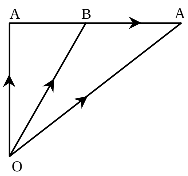
১০৮. $\overrightarrow{AN}$ = কত? (সহজ)

ⓐ $\underline{b}$　　ⓑ $3\underline{b}$　　ⓒ $4\underline{b}$　　● $2\underline{b}$

১০৯. $\overrightarrow{PN}$ = কত? (মধ্যম)

ⓐ $\underline{a} - 2\underline{b}$　　ⓑ $\underline{a} + 2\underline{b}$　　● $-\underline{a} + 2\underline{b}$　　ⓓ $-\underline{a} - 2\underline{b}$

১১৬.



$\overrightarrow{AB}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

ⓐ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$　　● $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$　　ⓒ $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$　　ⓓ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

১১৭. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ = কত?

ⓐ $2\overrightarrow{AB}$　　ⓑ $2\overrightarrow{BA}$　　● 0　　ⓓ 1

১১৮. 5 সে. মি. ধার বিশিষ্ট ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?

ⓐ 25　　ⓑ 30　　ⓒ 125　　● 150

১১৯. A, B ও C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b ও c. C বিন্দুতে AB রেখা 5 : 2 অনুপাতে বর্হির্বিভক্ত হলে C এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

ⓐ $\frac{2b + 5b}{3}$　　ⓑ $\frac{5b + 2a}{3}$

ⓒ $\frac{5a + 2b}{3}$　　● $\frac{5b + 2a}{3}$

১২০. $\underline{a} - 5\underline{b}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল কোনটি?

ⓐ $\underline{a} + 5\underline{b}$　　ⓑ $5\underline{a} - \underline{b}$　　ⓒ $\underline{b} - 5\underline{a}$　　● $2\underline{a} - 10\underline{b}$

১২১. C বিন্দু AB রেখাংশকে 3 : 5 অনুপাতে বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{5\underline{a}-3\underline{b}}{8}$ ● $\frac{5\underline{a}+3\underline{b}}{8}$
(গ) $\frac{5\underline{a}+3\underline{b}}{2}$ (ঘ) $\frac{3\underline{a}+5\underline{b}}{8}$

১২২. $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$ $\underline{v}=\overrightarrow{AC}$ হলে, $\underline{u}-\underline{v}$ = কত?

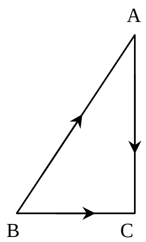
(ক) $\overrightarrow{BA}$ (খ) $\overrightarrow{CA}$ (গ) $\overrightarrow{BC}$ ● $\overrightarrow{CB}$

১২৩. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে

$9\underline{a}-4\underline{b}$ ও $-3\underline{a}-\underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান কত?

(ক) $6\underline{a}-5\underline{b}$ (খ) $12\underline{a}-3\underline{b}$ ● $-12\underline{a}+3\underline{b}$ (ঘ) $12\underline{a}-3\underline{b}$

১২৪.



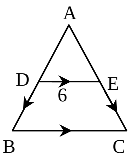
ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে –

i. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}$
ii. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
iii. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$

নিচের কোনটি সঠিক?

● i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

১২৫. ΔABC এর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে D ও E হলে—



i. DE || BC
ii. DE = $\frac{1}{2}$BC
iii. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১২৬. PQ দিক নির্দেশক রেখাংশ –

i. একটি ভেক্টর রাশি
ii. এর দৈর্ঘ্য | $\overrightarrow{PQ}$ |
iii. এর দিক P বিন্দু থেকে Q এর দিকে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii ● i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ১২৭ ও ১২৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

বহুপদী সমাপ্তিসূচক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

১৩৫. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ দুইটি সমান ভেক্টরের ক্ষেত্রে—

i. $|\underline{u}| = |\underline{v}|$
ii. $\underline{u}$ -এর ধারক $\underline{v}$ -এর ধারকের অভিন্ন অথবা সমান্তরাল
iii. $\underline{u}$ -এর দিক $\underline{v}$ -এর দিকের সঙ্গে একমুখী

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● i, ii ও iii

১৩৬. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BO}=\underline{b}$ হলে—

কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ C বিন্দুটি AB কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

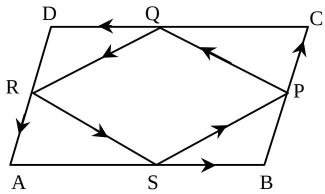
১২৭. নিচের কোনটি $\overrightarrow{AB}$?

● $\underline{b}-\underline{a}$ (খ) $\underline{a}-\underline{b}$ (গ) $\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b})$ (ঘ) $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

১২৮. C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

(ক) $\frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b})$ (খ) $\frac{1}{3}(2\underline{a}-\underline{b})$ ● $\frac{1}{3}(\underline{a}-\underline{b})$ (ঘ) $\frac{1}{3}(\underline{a}+2\underline{b})$

নিম্নোক্ত তথ্যের আলোকে ১২৯ ও ১৩০নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের মধ্যবিন্দু S, P, Q, R এবং AB = $\underline{a}$, BC = $\underline{b}$, CD = $\underline{c}$, DA= $\underline{d}$ ।

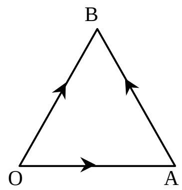
১২৯. RS এর অবস্থান ভেক্টর নিচের কোনটি?

(ক) $\frac{\underline{c}+\underline{d}}{2}$ ● $\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}$ (গ) $\frac{\underline{c}-\underline{d}}{2}$ (ঘ) $\frac{\underline{d}-\underline{c}}{2}$

১৩০. PQRS চতুর্ভুজটি কী?

(ক) আয়তক্ষেত্র (খ) রম্বস ● সামান্তরিক (ঘ) বর্গক্ষেত্র

নিম্নোক্ত তথ্যের আলোকে ১৩১ ও ১৩২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



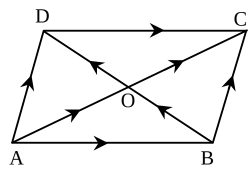
১৩১. O বিন্দুর প্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?

(ক) OA (খ) AO ● $\overrightarrow{OA}$ (ঘ) $\overrightarrow{AO}$

১৩২. $\overrightarrow{AB}$ = কত?

(ক) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (খ) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ ● $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (ঘ) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৩ ও ১৩৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১৩৩. AB কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে কী হয়?

(ক) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$ ● $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ (গ) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$ (ঘ) $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

১৩৪. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ = কত?

● $2\overrightarrow{AB}$ (খ) $2\overrightarrow{BC}$ (গ) $2\overrightarrow{CD}$ (ঘ) $2\overrightarrow{AD}$

i. $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}$ ii. $\overrightarrow{AB}=\underline{a}-\underline{b}$
iii. $\overrightarrow{AB}=-(\underline{b}-\underline{a})$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

● i (খ) ii (গ) i ও iii (ঘ) ii ও iii

অভিন্ন তথ্যভিত্তিক বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

নিচের তথ্যের আলোকে ১৩৭– ১৩৯নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

১৩৭. ABCD সামান্তরিক হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} + \underline{d}$ ● $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$
গ $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$ ঘ $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} + \underline{d}$

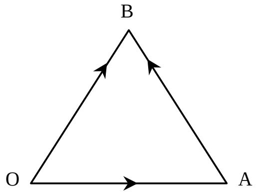
১৩৮. $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হলে ABCD কী? (সহজ)

ক বর্গক্ষেত্র খ ত্রিভুজ ● সামান্তরিক ঘ রম্বস

১৩৯. AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে ABCD কী? (সহজ)

● সামান্তরিক খ বৃত্ত গ রম্বস ঘ রেখা

নিচের চিত্রের আলোকে ১৪০–১৪২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হলে

১৪০. O বিন্দুর প্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

ক OA ● $\overrightarrow{OA}$ গ $\overrightarrow{AO}$ ঘ $\overrightarrow{AB}$

১৪১. $\overrightarrow{AB}$ = কত? (মধ্যম)

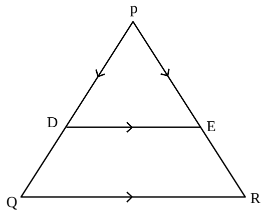
ক $\underline{ab}$ ● $\underline{b} - \underline{a}$ গ $\underline{a} - \underline{b}$ ঘ $\underline{a} + \underline{b}$

১৪২. $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ কোন ধরনের ভেক্টর? (সহজ)

ক শূন্য ● একক গ বিপরীত ঘ লম্বধ

গুরুত্বপূর্ণ সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–১ ▸



ΔPQR–এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

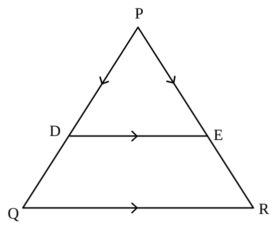
ক. $(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE ∥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, FG ∥ DE ∥ QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$. ৪

১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



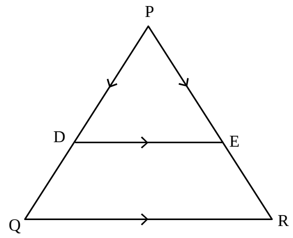
ΔPDE–এ $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$ [ত্রিভুজবিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [যেহেতু, E, PR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ **(Ans.)**

খ. মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো দেখাতে হবে যে, DE || QR এবং $DE = \frac{1}{2}QR$



প্রমাণ : D ও E যথাক্রমে PQ ও PR এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{ER} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPQR–এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ .... (i)

এবং ΔPDE এ ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE} - \overrightarrow{PD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ $[\because \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{PD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$ [(i) হতে]

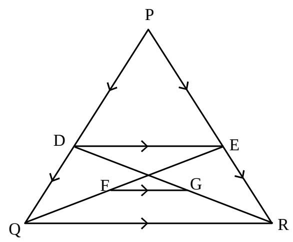
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$\therefore DE = \frac{1}{2}QR$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

কিন্তু DE এবং QR ভিন্ন ভিন্ন রেখা হওয়ায় DE ∥ QR হবে।

$\therefore$ DE ∥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}QR$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, DERQ ট্রাপিজিয়ামের DE ∥ QR এবং QE ও DR কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G। F ও G যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$.

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে D, E, Q ও R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{e}$, $\underline{q}$ ও $\underline{r}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

$\therefore$ F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q})$ [$\because$ F, QE এর মধ্যবিন্দু]

এবং G বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d})$ [$\because$ G, DR এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{q}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d} - \underline{e} - \underline{q})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) - (\underline{e} - \underline{d})\} \therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

DE || QR হওয়ায় $(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{FG}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

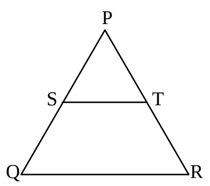
আবার, $\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$

$\therefore |\overrightarrow{FG}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}|(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$

$\therefore FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$

অর্থাৎ FG || DE || QR এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২ ▸



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T.

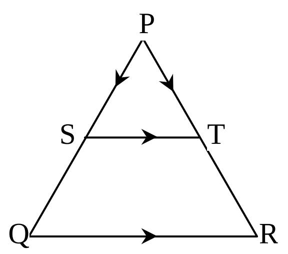
ক. $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || QR এবং $ST = \frac{1}{2}QR$. ৪

গ. ▭ SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || ST || QR এবং $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. ৪

▸◂ ২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔPST এ ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$ .... (i)

আবার, PR বাহুর মধ্যবিন্দু T

$\therefore \overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ .... (ii)

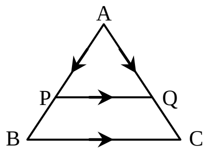
(i) ও (ii) হতে পাই,

$\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. সৃজনশীল ১(গ)নং সমাধানের অনুরূপ।

প্রশ্ন–৩ ▸



চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

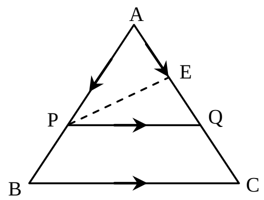
ক. APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি বর্ণনা কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। ৪

▸◂ ৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔAPQ-এ $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{AQ}$ এর আদিবিন্দু একই এবং $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{AQ}$ এর অন্তবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P ও Q যোগ করলে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

খ. দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল PQ, AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ : Q যদি $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু না হয়, তবে ধরি, E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ P, $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AE}$ [$\because \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{PA}$]

$= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু হলে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$]

$\therefore \overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, PE || BC কিন্তু PQ || BC (উদ্দীপক অনুসারে)

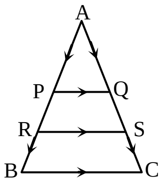
তাহলে $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ রেখাদ্বয় উভয়ে P বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, $\overrightarrow{PE}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ অবশ্যই সমাপাতিত হবে,

তাই E ও Q একই বিন্দু হবে।

অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

গ.



PBCQ ট্রাপিজিয়ামে R ও S যথাক্রমে PB ও QS এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P, B, C ও Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{q}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{p} + \underline{b}}{2}$

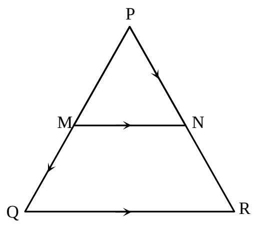
S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{c} + \underline{q}}{2}$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{q}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{p}) = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b}) + \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{p})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PQ})$

$\therefore \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪ ▸



ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N.

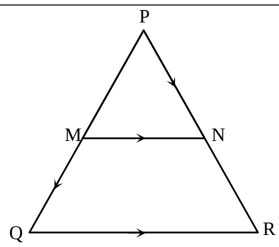
ক. $(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN})$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN ॥ QR এবং $MN = \frac{1}{2}QR$। ৪

গ. QRNM ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE ॥ MN ॥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$। ৪

৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



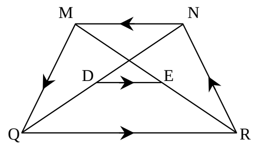
ΔPQR এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N

$\therefore$ ΔPMN–এ $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$

বা, $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ.



মনে করি, QRNM ট্রাপিজিয়ামের QR ও MN সমান্তরাল বাহু এবং MR ও QN কর্ণের মধ্যবিন্দু D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ॥ MN ॥ QR এবং $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$

ধরি, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে R, Q, N, M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{QR} = \underline{b} - \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{MN} = \underline{e} - \underline{d}$

এখন D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

এবং E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e}) - \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e} - \underline{c} - \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{NM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{MN})$

$\therefore \overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{NM}$ সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

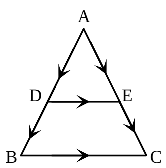
$\therefore |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{MN}|)$

বা, $DE = \frac{1}{2}(QR - MN)$ **(প্রমাণিত)**

$\therefore$ DE, MN ও QR সমান্তরাল।

অর্থাৎ DE ॥ MN ॥ QR **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৫ ▸



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overline{AD} + \overline{DE})$ কে $\overline{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE ॥ BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ ৪

গ. A ও B এর অবস্থান ভেক্টর A ও B এবং AB রেখাংশ

c বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহিঃবিভক্ত হলে, C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ ৪

৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

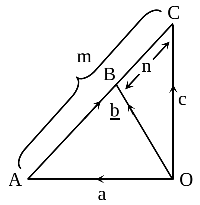
$= \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

খ. সৃজনশীল ১(খ)নং সমাধানের অনুরূপ।

গ. মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.
AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে।



$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{m - n}{n}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{AC - BC}{BC} = \dfrac{m - n}{n}$

বা, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{m - n}{n}$

বা, $BC = \dfrac{n}{m - n}AB$

বা, $\overrightarrow{BC} = \dfrac{n}{m - n}\overrightarrow{AB}$ [$\because \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{b} = \dfrac{n}{m - n}(\underline{b} - \underline{a})$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

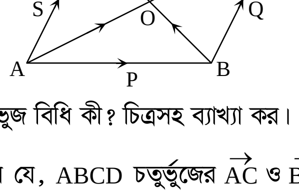
বা, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{b} - n\underline{a}}{m - n} + \underline{b}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{n\underline{b} - n\underline{a} + m\underline{b} - n\underline{b}}{m - n}$

বা, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ বা, $\dfrac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৬ ▸



ক. ভেক্টর ত্রিভুজ বিধি কী? চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। ২

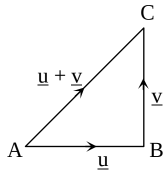
খ. প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হবে। (ভেক্টর বিধি প্রয়োজ্য)। ৪

গ. উদ্দীপকে উল্লিখিত চতুর্ভুজের $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S হলে, প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

৬নং প্রশ্নের সমাধান

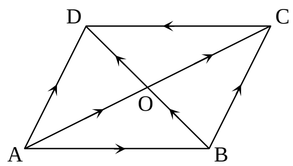
ক. কোন ত্রিভুজের একই ক্রমে গৃহীত দুইটি বাহু দ্বারা দুই ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করে।

মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ যেখানে $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদি বিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদি বিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দুর সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হয়। $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে, $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে বলে উপরিউক্ত যোজন পদ্ধতিতে ত্রিভুজ বিধি বলে।



খ. এখানে ABCD চতুর্ভুজ $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ :



$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এখন $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$]

$= \overrightarrow{BC}$

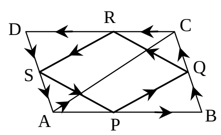
$\therefore |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$

এখন $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ হলে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হবে।

এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AD = BC এবং AD ∥ BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

চিত্র হতে, $\overrightarrow{PQ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$[\because \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}]$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = (\underline{a} + \underline{b})$ $[\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}]$

এবং $\overrightarrow{CA} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\because (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

প্রশ্ন–৭ ▸ তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে অবস্থিত। বাড়ি হতে স্কুলে হেঁটে যেতে 1 ঘণ্টা এবং ছুটির পর সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে 20 মিনিট সময় লাগে।

ক. বাড়ি হতে স্কুলের দূরত্ব ও 3 কিলোমিটার হলে স্কুলে হেঁটে যেতে তোমার গতিবেগ কত? ২

খ. স্কুল থেকে সাইকেলে বাড়ি ফিরে আসতে তোমার গতিবেগ নির্ণয় কর। সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার গতিবেগের কতগুণ? ৪

গ. বাসের গতিবেগ 36 কি.মি./ ঘন্টা হলে বাড়ি হতে স্কুলে যেতে তোমার কত সময় লাগবে? তিন মাধ্যমে তোমার গড় গতিবেগ কত? ৪

৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. বাড়ির অবস্থানকে H দ্বারা এবং স্কুলের অবস্থানকে S দ্বারা চিহ্নিত করলে,

আমার গতিবেগ $\underline{u} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{HS}{\text{সময়}} = \frac{3}{1}$ কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে = 3 কি.মি./ ঘন্টা দক্ষিণ দিকে। **(Ans.)**

খ. মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

মোট সময় = 20 মিনিট

আবার, এক ঘন্টা = 60 মিনিট

20 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 কি.মি.

$\therefore$ 60 " " " $= \frac{3 \times 60}{20}$ কি.মি.

= 9 কি.মি.

$\therefore$ স্কুল থেকে বাড়ি ফেরার সময় আমার গতিবেগ,

$\underline{v}$ = 9 কি. মি./ঘন্টা। **(Ans.)**

এখন সাইকেলের গতিবেগ = 9 কি. মি./ ঘন্টা

= 3×3 কি.মি./ ঘন্টা

= $3 \times$ হাঁটার গতিবেগ ['ক' হতে]

সুতরাং সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার বেগের তিনগুণ। **(Ans.)**

গ. 'ক' হতে মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.

গাড়ির গতিবেগ = 36 কি.মি.

বাসে 45 কি. মি. যায় 1 ঘন্টায়

$\therefore$ 1 " " " $\frac{1}{36}$ "

$\therefore$ 3 " " " $\frac{3}{36}$ "

$[\because \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}]$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS–একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

বা, $\frac{1}{12}$ ঘণ্টায় বা $\frac{60}{12}$ মিনিটে [$\because$ 1 ঘন্টা = 60 মিনিট]

বা 5 মিনিটে।

$\therefore$ বাড়ি হতে বাসে স্কুলে যেতে আমার 5 মিনিট সময় লাগবে। **(Ans.)**

হেঁটে যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা বা 60 মিনিট

সাইকেলে যেতে সময় লাগে 20 মিনিট।

তিন মাধ্যমে যেতে মোট সময় লাগে = (60 + 20 + 5) মিনিট।

= 85 মিনিট

তিন মাধ্যমে অতিক্রান্ত দূরত্ব = (3 + 3 + 3) বা 9 কি.মি.

$\therefore$ তিন মাধ্যমে গড় গতিবেগ $= \frac{9 \text{ কি. মি.}}{85 \text{ মিনিট}} = \frac{9 \text{ কি.মি.}}{\frac{85}{60}\text{ ঘন্টা}}$

$= \frac{9 \times 60}{85}$ কি.মি./ ঘণ্টা

= 6·35 কি.মি./ ঘন্টা (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন–৮ ▸ m ও n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ একটি ভেক্টর। $(m + n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

ক. m ও n এর বিভিন্ন সাংখ্যিক মানের সূত্রটি যাচাই কর। ২

খ. ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক সংক্রান্ত সূত্র হতে এটি প্রমাণ কর। ৪

গ. অপর আরেকটি ভেক্টর u হলে $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ সূত্রটি প্রমাণ কর। ৪

৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

m = 1 এবং n = 2 হলে, বামপক্ষ $= (1 + 2)\,\underline{u}$

$= 3\underline{u}$

ডানপক্ষ $= 1\underline{u} + 2\underline{u} = \underline{u} + 2\underline{u} = 3\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

আবার, m = 2 এবং n = 3 হলে, বামপক্ষ $= (2 + 3)\underline{u}$

$= 5\underline{u}$

ডানপক্ষ $= 2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই করা হলো।

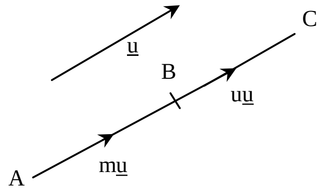
খ. **প্রমাণ :** m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = m|\underline{u}|$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন,

$|\overrightarrow{BC}| = n|\underline{u}|$ হয়।



$\therefore \overrightarrow{BC} = m\underline{u}$

এবং $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m+n)|\underline{u}|$

$\therefore \overrightarrow{AC} = (m+n)\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে m + n) $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m|\,|\underline{u}| + |n|\,|\underline{u}| = (|m| + |n|)\,|\underline{u}|$

[$\because m\underline{u}, n\underline{u}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে]

এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হওয়ায় $|m| + |n| = |m+n|$ সেহেতু এৰেত্রে $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।

সর্বশেষ m এবং n এর মধ্যে $m > 0, n < 0$ হলে

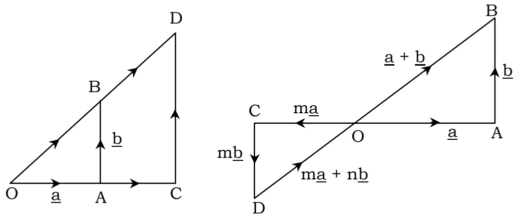
$(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m+n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে

(i) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$

(ii) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্য ও দিকে $(m+n)\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে। **(প্রমাণিত)**

গ.



চিত্র –১ চিত্র –২

মনে করি, $\overrightarrow{OC} = \underline{u}, \overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র –১ এ m ধনাত্মক চিত্র –২ এ m ঋণাত্মক

$\therefore OC = m.\,OA,\ CD = m.\,AB,\ OD = m.\,OB$

এখন, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ বা, $m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore m\underline{u} + m\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৯ **O কে মূলবিন্দু ধরে বিভিন্ন অবস্থানে A, B, C, D ও E পাঁচটি বিন্দু নিই।**

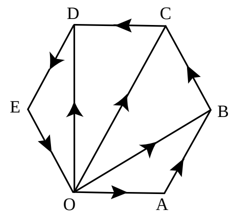
ক. চিত্র এঁকে O বিন্দুর সাপেৰে বিন্দুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত কর। ২

খ. দেখাও যে, $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ৪

৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, OABCDE ষড়ভুজের মূলবিন্দু O মূলবিন্দু O এর সাপেৰে A, B, C, D, E এই পাঁচটি বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{OE} = \underline{e}$



খ. 'ক' হতে, $= \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

এখন, ΔOAB-এ

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a}$

আবার, ΔOBC - এ

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ [[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \underline{c} - \underline{b}$

সুতরাং $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$

$= \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান।

(দেখানো হলো)

গ. $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ['খ' হতে]

এখন, ΔOCD- এ

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \underline{d} - \underline{c}$ ['ক' হতে]

আবার, ΔOAD- এ

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \underline{c} - \underline{d}$ ['ক' হতে]

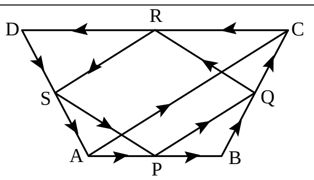
সুতরাং $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{c} + \underline{d} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}$

$= \underline{e} = \overrightarrow{OE}$

বা, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১০ ▸



চিত্রে ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

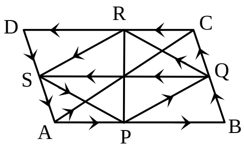
গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

১০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q.
আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

$\therefore \overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ **(দেখানো হলো)**

খ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, BD, DA বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, PQRS সামান্তরিকের $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{SQ}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{q}$ ও $\overrightarrow{OR} = \underline{r}$ ও $\overrightarrow{OS} = \underline{s}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{p}| = |\underline{r}|, |\underline{s}| = |\underline{q}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{SQ}$

আমরা জানি, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{p} + \underline{s} = \underline{q} + \underline{r}$

বা, $\underline{p} - \underline{r} = \underline{q} - \underline{s}$ [উভয়পক্ষে $-\underline{s} - \underline{r}$ যোগ করে]

এখানে, $\underline{p}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক PR

$\therefore \underline{p} - \underline{r}$ এর ধারক PR.

$\underline{q}$ ও $\underline{r}$ এর ধারক QS,

$\therefore \underline{q} - \underline{s}$ এর ধারক QS.

$\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে এদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{p} - \underline{r}$ ও $\underline{q} - \underline{s}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{p} - \underline{r} = 0$ বা $\underline{p} = \underline{r}$ এবং $\underline{q} - \underline{s} = 0$ বা, $\underline{q} = \underline{s}$

$\therefore |\underline{p}| = |\underline{r}|$ এবং $|\underline{q}| = |\underline{s}|$

অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১১ ▸ ABC ত্রিভুজে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F

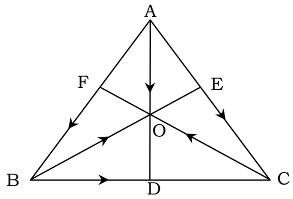
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{AD}$–কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BE}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ ৪

১১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ BOF হতে পাই,

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BF}$

বা, $\frac{2}{3}$ BE + $\frac{2}{3}$CF = $\frac{1}{2}$AB

$\therefore AB = \frac{4}{3}(BE + CF)$

খ. 'ক' এর চিত্রানুসারে Δ BAE হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$ **(Ans.)**

Δ BCE থেকে পাই,

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE}$

$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}.2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

Δ AOB হতে পাই,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}$

বা, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**

গ. ‘ক’ এর চিত্রানুসারে,

মনে করি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

প্রমাণ :

Δ ABD হতে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ .... (i)

ΔACD থেকে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

বা, $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .... (iii)

একইভাবে দেখানো যায় যে,

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ .... (iv)

এবং $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ .... (v)

(iii), (iv) ও (v) যোগ করে পাই,

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2} \times 0$

$= 0$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১২ ▸ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

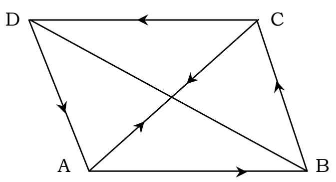
ক. (AB + BC + CD + DA) এর মান কত? ২

খ. দেখাও যে, ADCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাও যে, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$ হবে। ৪

▸◂ ১২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



ΔABC হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (i)

ΔACD হতে পাই,

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$

$= \underline{0}$

$\therefore$ (AB + BC + CD + DA) এর মান 0 **(Ans.)**

খ. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ....(i)

আবার, C ও D-এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$ ....(ii)

কিন্তু প্রদত্ত তথ্যানুসারে, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান হওয়ায় এদের ধারক রেখা পরস্পর সমান্তরাল বা একই হবে।

কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore \overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখা সমান্তরাল।

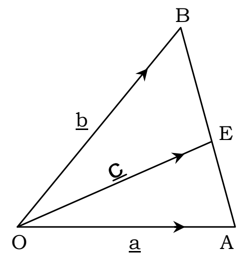
$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

আবার, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

একইভাবে দেখানো যায় যে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ও AD $\parallel$ BC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

গ.



মনে করি, AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দুতে অবস্থান ভেক্টর $= \frac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$

প্রমাণ : AB রেখাংশ E বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{EB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{|\overrightarrow{AE}|+|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|} = 1 + \frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AE}|}$

$= 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$

$\therefore \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{m}{m+n}$

$\therefore \overrightarrow{AE} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}$

AE = $\underline{c} - \underline{a}$ ও AB = $\underline{b} - \underline{a}$

$\therefore \underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a})$

$= \left(\frac{m}{m+n}\right)(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{m+n}\right)\underline{b} + \underline{a}\left(\frac{m}{m+n}\right)$$

$$= \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$$

$\therefore \underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৩ ▸ ABCD সামান্তরিকের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

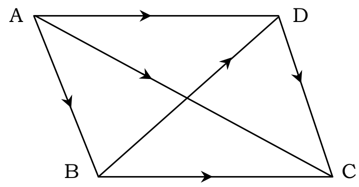
ক. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ ৪

১৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔABD থেকে,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

খ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBDC থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

(i) + (ii) করে পাই,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(প্রমাণিত)**

গ. প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

ΔADC থেকে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ .... (i)

ΔBCD থেকে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$........................... (ii)

(i) – (ii) করে পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

$= 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৪ ▸ ABC ত্রিভুজের BC, CA, ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

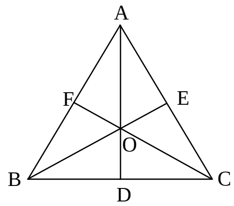
ক. $\overrightarrow{BC}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু ও ছেদবিন্দুতে প্রত্যেক মধ্যমা 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। ৪

গ. EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, EF || PQ || BC ও $PQ = \frac{1}{2}(BC - EF)$ ৪

১৪নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ΔBOC হতে পাই,

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$ **Ans.**

খ. ধরি A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

এখন, BC এর মধ্যবিন্দু D

$\therefore$ D এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

যে বিন্দুটি AD-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর =

$$\frac{2 \times \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) + 1 \times \underline{a}}{2+1}$$

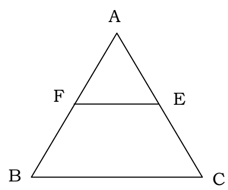
$$= \frac{1}{3}(\underline{a} + \underline{b} + \underline{c})$$

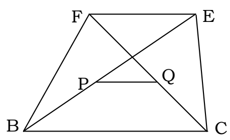
একইভাবে দেখানো যায় যে, বিন্দুটি BE ও CF-কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তার অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{3}(\underline{b} + \underline{c} + \underline{a})$

অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে যে, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$–কে যে বিন্দুগুলো 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে তাদের অবস্থান ভেক্টর একই অর্থাৎ তারা একই বিন্দু।

$\therefore$ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং ছেদবিন্দুতে প্রত্যেকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। **(প্রমাণিত)**

গ.





দেওয়া আছে, EFBC ট্রাপিজিয়ামের BE ও CF বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P,Q যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF || PQ || BC ও $PQ = \frac{1}{2}(BC - EF)$

প্রমাণ : মনে করি, যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেৰে B, C, E ও F ভেক্টরগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{e}$ ও $\underline{f}$

$\therefore \overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}$, $\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f}$

P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f})$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{f}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{f})\}$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$

বা, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{FE}|) = \frac{1}{2}(BC - FE)$

কিন্তু $PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ হওয়ায় $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি – $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF})$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। আবার $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{FE})$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{FE}$ এর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্ন–১৫ ▸ ABCD চতর্ভুজের AB, BC, CD ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S.

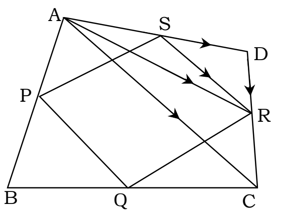
ক. $\overrightarrow{AR}$ কে $\overrightarrow{DA}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ADR থেকে পাই,

$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ **(Ans.)**

খ. 'ক' চিত্র থেকে,

A , C যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

AD ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও R.

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

বা, $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

বা, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে SR ও AC এর ধারক রেখা এক হতে পারে না।

$\therefore SR \parallel AC$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $SR \parallel AC$ **(প্রমাণিত)**

গ. চিত্র 'ক' থেকে

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

AD ও DC এর মধ্যবিন্দু S ও R

$\therefore \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

এবং $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

এখন, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{SR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল কিন্তু স্পষ্টতই SR ও AC এর ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore SR \parallel AC$

একইভাবে দেখানো যায় যে,

$PQ \parallel AC$

অর্থাৎ $SR \parallel PQ$

অনুরূ পভাবে পাই, $PS \parallel QR$

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–১৬ ▸ $\underline{c}$, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ 3টি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং m ও n দুটি স্কেলার গুণিতক।

ক. দেখাও যে, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ ২

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে দেখাও যে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ ৪

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $m = n = \underline{0}$ ৪

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুটি ভেক্টর।

এখন, $\underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 1.\underline{a} + 1.\underline{a} + 1.\underline{b} + 1.\underline{b}$

$= \underline{a}\,(1 + 1) + \underline{b}\,(1 + 1)$

$= 2\underline{a} + 2\underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} + \underline{b} + \underline{b} = 2(\underline{a} + \underline{b})$ **(দেখানো হলো)**

খ. $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b})$

বা, $\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + \{\underline{b} + (-\underline{b})\} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + (\underline{b} - \underline{b}) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

গ. $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হলে $m\underline{a}$, $\underline{b}\,n$ এর বিপরীত ভেক্টর হতে পারে না।

$\therefore m\underline{a} = \underline{0}$ ও $n\underline{b} = \underline{0}$

কিন্তু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অশূন্য ভেক্টর

$\therefore m = \underline{0}$ ও $n = \underline{0}$

$\therefore m = n = \underline{0}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন–১৭ ▸ $\underline{c}$, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর রাশি এবং m, n স্কেলার গুণিতক।

ক. দেখাও যে $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ এবং $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} + m(-\underline{b})$ ৪

গ. দেখাও যে, $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $\underline{a} + \underline{a} = 1\underline{a} + 1\underline{a} = \underline{a}(1 + 1) = 2\underline{a}$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ. $(m - n)\underline{a} = \{m + (-n)\}\underline{a} = m\underline{a} + (-n)\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

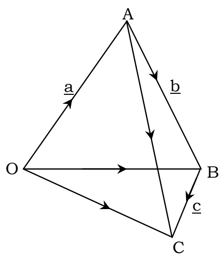
$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

আবার , $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} + m(-\underline{b})$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি,



OABC চতুর্ভুজে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$

$\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \underline{c}$

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$

প্রমাণ :

Δ AOB হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b}$

Δ OBC হতে পাই,

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OC} = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ .... (i)

Δ ABC থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = \underline{b} + \underline{c}$

Δ OAC হতে পাই,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = \overrightarrow{OC}$ .... (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৮ ▸ **m, n স্কেলার এবং** $\underline{a}$, $\underline{b}$ **ভেক্টর।**

ক. প্রমাণ কর যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ ২

খ. $a \neq 0$ ও $b \neq 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $a = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হয়। ৪

গ. $\underline{a} \neq 0$ ও $\underline{b} \neq 0$; $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমান্তরাল এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে দেখাও যে, $m = n = 0$. ৪

১৮নং প্রশ্নের সমাধান

ক. $(m - n)\underline{a} = \{m + (-n)\}\underline{a}$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$

$= m\underline{a} - n\underline{a}$

$\therefore (m-n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(প্রমাণিত)**

খ. মনে করি, $\underline{a} = m\underline{b}$

তাহলে $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল দেখানোই যথেষ্ট হবে।

$\underline{a} = m\underline{b}$ হওয়ায় $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর স্কেলার গুণিতক।

$\therefore$ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক একই যদি $m > 0$ হয় এবং বিপরীতমুখী হবে যদি $m < 0$ হয়। এখন $m \neq 0$ কারণ $m = 0$ হলে $\underline{a} = 0$ হবে যা অসম্ভব এখন, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রে $\underline{a} \parallel \underline{b}$ **(প্রমাণিত)**

গ. দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = 0 - n\underline{b}$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

যদি $m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়,

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ পরস্পর অসমান্তরাল।

$\therefore m \neq 0$ ও $n \neq 0$ হতে পারে না।

$\therefore m = n = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–১৯ ▸ **ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.**

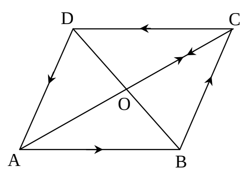
ক. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} =$ কত? ২

খ. যদি AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তবে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. AB ও AC ভেক্টরদ্বয়কে AD ও BD এর সাহায্যে প্রকাশ কর। ৪

১৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



Δ ABC থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .... (i)

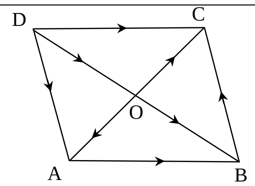
Δ CDA থেকে পাই,

$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$ **(Ans.)**

খ.



দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ....(i)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .... (ii)

(i) + (ii) থেকে $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।
কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

$\therefore \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ ও $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

অনুরূ পভাবে, AD || BC ও AD = BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

গ. ‘খ’ এর চিত্র থেকে, ABCD একটি সামান্তরিক।

ΔABD হতে পাই,

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

এবং Δ ACD থেকে ,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন–২০ ▸ ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং DE = $\frac{1}{2}$BC. ৪

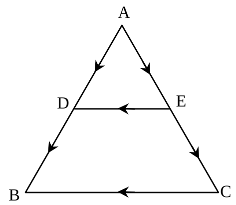
গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের BD ও CE বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং MN = $\frac{1}{2}$ (DE + BC) ৪

২০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. ΔADE-এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

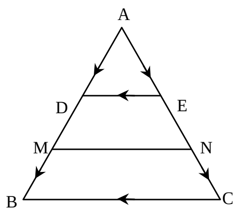
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]



সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

খ. সৃজনশীল ১(খ) নং সমাধানের অনুরূ প।

গ.



DBCE ট্রাপিজিয়ামে M ও N যথাক্রমে BD ও CE-এর মধ্যবিন্দু।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, MN || DE || BC এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BC + DE)

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেৰে D, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{e}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং DE = $\underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [$\because$ M, DB-এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$ [$\because$ N, EC-এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$

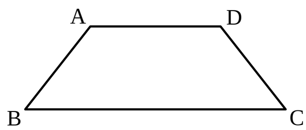
$= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c} - \underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও তাদের সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ MN || BC || DE এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BC + DE) **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২১ ▸



P, Q, R, S বিন্দুগুলো ABCD চতুর্ভুজের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দু।

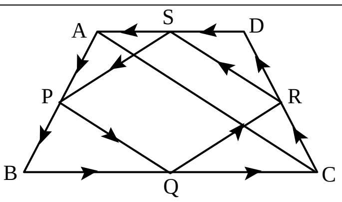
ক. $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, PQ || AC এবং PQ = $\frac{1}{2}$ AC. ৪

২১নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



চিত্র হতে,

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

খ. দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S
প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং DA = $\underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ এবং $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \underline{c} + \underline{d}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

$\therefore (\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}$ [$\because \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$]

$= \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

∴ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR ও PS সমান ও সমান্তরাল।

∴ PQRS একটি সামান্তরিক।**(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, ΔABC এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q ; P,Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQ ∥ AC এবং PQ = $\frac{1}{2}$AC.

প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ....(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BQ}$

এখন (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{BQ}$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ})$

বা, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PQ}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ বা, PQ = $\frac{1}{2}$AC **(প্রমাণিত)**

আবার, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ PQ ∥ AC **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২২ ▸ ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্য বিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S। A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$.

ক. R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. PBDS ট্রাপিজিয়াম–এ PB ও SD এর তীর্যক বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || BD || PS এবং MN = $\frac{1}{2}$(BD + PS). ৪

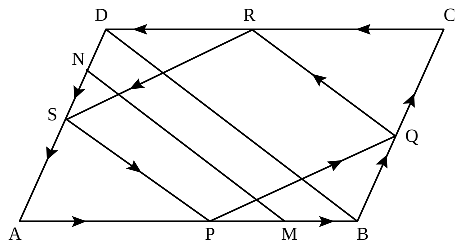
▸◂ ২২নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$ এবং R বিন্দু CD বাহুর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\frac{c + d}{2}$ **(Ans.)**

খ. অনুশীলনী ১২–এর উদাহরণ ৫ দেখ।

গ.



মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD || PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN || BD || PS এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথাক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, PBDS ট্রাপিজিয়ামের BD || PS এবং PB ও SD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N।

M, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, MN || BD || PS এবং MN = $\frac{1}{2}$ (BD + PS)

প্রমাণ : দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ এবং $\underline{d}$। P ও S যথাক্রমে AB ও AD বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ P বিন্দু অবস্থান ভেক্টর $\underline{p} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

S " " " $\underline{s} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

আবার, M ও N যথাক্রমে PB ও DS বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{m} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{b})$

$$= \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{b}}{4} + \frac{\underline{b}}{2}$$

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{n} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{d}) = \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \underline{n} - \underline{m}$

$$= \frac{\underline{d}}{2} + \frac{\underline{a}}{4} + \frac{\underline{d}}{4} - \frac{\underline{a}}{4} - \frac{\underline{b}}{4} - \frac{\underline{b}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{d} - \underline{b}) + \frac{1}{4}(\underline{d} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BD})$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{4}(2\overrightarrow{PS})$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

BD || PS হওয়ায় $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে।

তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে কারণ–

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS})$$

$$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{PS}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{PS}|)$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$$

অর্থাৎ MN || BD || PS এবং $MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৩ ▸ ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD

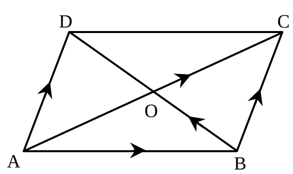
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক। ৪

▸◂ ২৩নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক.



চিত্র হতে পাই,

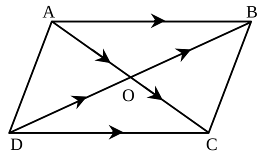
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

এবং $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৪ দেখ।

গ. মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টত : $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

(প্রমাণিত)

প্রশ্ন–২৪ ▸ Δ ABC ও D, E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, Q যথাক্রমে BE ও CD এর মধ্যবিন্দু। কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$

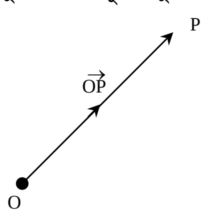
ক. কোনো বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলতে কী বোঝায়? ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, PQ || DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DP || AC এবং $DP = \frac{1}{4}AC$ ৪

▸◂ ২৪নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

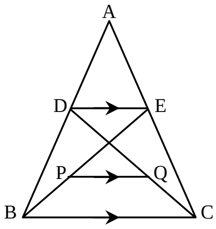
ক. সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।



খ. দেওয়া আছে, ΔABC-এ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$

$\therefore$ BCED একটি ট্রাপিজিয়াম।



আবার, BE ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে PQ || DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$

প্রমাণ : মনে করি কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}$ ও $\underline{e}$

$\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because$ P, BE এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e}) = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$

DE || BC হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে, তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটি ও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল হবে।

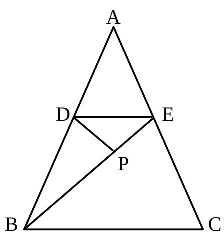
$\therefore$ PQ || DE

আবার, $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}|$

বা $PQ = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|\right) = \frac{1}{2}(BC - DE)$

$\therefore$ PQ || DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(দেখানো হলো)**

গ.



চিত্রে, ABC ত্রিভুজে D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু। P, BE এর মধ্যবিন্দু।

যেকোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$

$\therefore$ D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\}$

$\therefore \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\left\{b + \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})\right\} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(a + c) - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$

$= \frac{1}{4}(\underline{c} - \underline{a}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

সুতরাং $|\overrightarrow{DP}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$

$\therefore DP = \frac{1}{4}AC$ এবং $\overrightarrow{DP}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল।

$\therefore$ DP || AC এবং $DP = \frac{1}{4}AC$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৫ ▸ A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$।

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ২

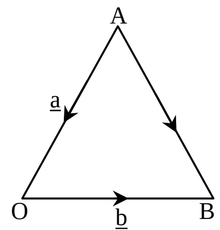
খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। ৪

গ. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

▸◂ ২৫নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. মনে করি, কোনো সমতলে O বিন্দু সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর,

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$



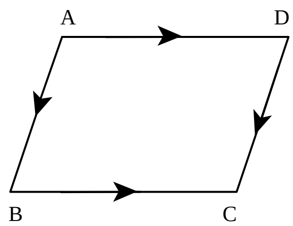
তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ. দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

∴ $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

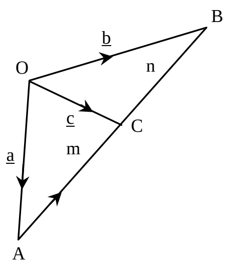
∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ. মনে করি, কোনো মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$। AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$$\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$$



প্রমাণ : $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$

[∵ AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।]

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n}{m}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n + m}{m}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AC + CB}{AC} = \frac{n + m}{m}$

বা, $\frac{AB}{AC} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{m + n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m}{m + n}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\frac{m}{m + n}\right)|\overrightarrow{AB}|$

বা, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{m}{m + n}\right)\overrightarrow{AB}$ [∵ $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m + n}(\underline{b} - \underline{a})$ [∵ $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$]

বা, $\underline{c} = \frac{m}{m + n}(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b} - m\underline{a} - m\underline{a} + n\underline{a}}{m + n}$

∴ $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + m\underline{a}}{m + n}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–২৬ ▸ P, Q, R, S একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D।

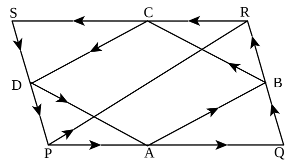
ক. AB এর অবস্থান ভেক্টর PQ ও QR এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

২৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্র হতে,



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

∴ $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right)$

খ. দেওয়া আছে, PQRS চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{b}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{SP} = \underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$ এবং $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \underline{a} + \underline{b}$

এবং $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

∴ $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP}$

$= \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR}$ [∵ $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$]

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

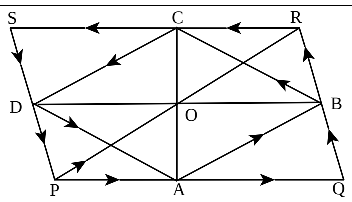
∴ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

∴ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

∴ AB এবং DC সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে BC এবং AD সমান ও সমান্তরাল।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABCD সামান্তরিকের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

$\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|a| = |c|$, $|b| = |d|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

'খ' হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{d} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} - \underline{d}$

[উভয় পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC

$\therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD

$\therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান করে অশূন্য ভেক্টর তাদের ধারকরেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC ও BD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টর অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = 0$

বা, $\underline{a} = \underline{c}$

এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$

$\therefore \underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ ABCD এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৭ ▸ ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD।

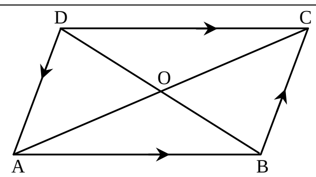
ক. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

গ. AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, APCQ একটি সামান্তরিক। ৪

২৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD যাদের ছেদ বিন্দু O।

ΔABD–এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ....(i)

ΔABC-এ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

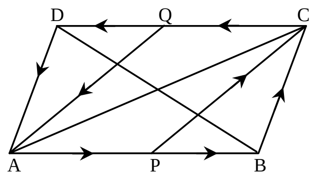
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ....(ii) $\left[\begin{array}{l}\because \text{ABCD সামান্তরিক} \\ \therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\end{array}\right]$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং সমীকরণে $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ ৪ দেখ।

গ.



ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, APCQ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

ΔPBC–এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [$\because$ P, AB এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$ .... (i)

ΔADQ - এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ [$\because$ Q, CD এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}\underline{c} + \underline{d}$

$= \frac{1}{2}\underline{a} + \underline{b}$............ (ii) $\left[\begin{array}{l}\because \text{ABCD সামান্তরিক} \\ \because \underline{a} = \underline{c} \text{ এবং } \underline{b} = \underline{d}\end{array}\right]$

(i) ও (ii) থেকে পাই,

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QA}$

ভেক্টরদ্বয় সমান। অর্থাৎ তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

∴ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা PC || QA

আবার, P, AB এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\underline{a}$ ....(iii)

এবং Q, CD এর মধ্যবিন্দু বলে, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

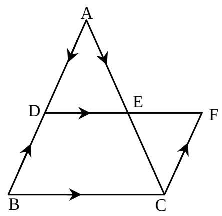
বা, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{c}$

∴ $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\underline{a}$

সুতরাং $\overrightarrow{AP}$ ও $\overrightarrow{CQ}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান ও সমান্তরাল।

∴ APCQ একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–২৮ ▸



উপরের চিত্রে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E এবং BCFD একটি সামান্তরিক।

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং DE $= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ৪

গ. BCFD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{BF}$ ও $\overrightarrow{CD}$ হলে, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ ৪

▸◂ ২৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

ক. ΔADE-এ

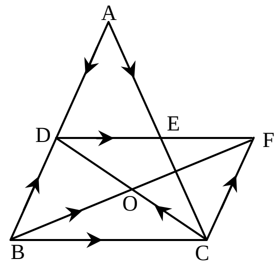
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু]

সুতরাং $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

খ. অনুশীলনী ১২ এর উদাহরণ–৩ দেখ।

গ. এখানে BF ও CD, BCED সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়।



$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে,

ΔBCD –এ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

∴ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (i)

আবার, ΔBDF –এ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$

∴ $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$

[BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DF}$]

$= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ [(i) নং হতে]

∴ $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$ .... (ii)

অতএব, (i) ও (ii) নং সমীকরণ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

আবার, (ii) নং থেকে পাই,

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD}$

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}$ [উভয় পক্ষে $\overrightarrow{CD}$ যোগ করে]

বা, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD}$

∴ $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ .... (iii) [BCFD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CF}$]

আবার, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$ [(iii) নং ব্যবহার করে]

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})$

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD})$ [∵ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$]

বা, $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$

∴ $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$ এবং $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**

সৃজনশীল প্রশ্নব্যাংক উত্তরসহ

প্রশ্ন–২৯ ▸ $\underline{a}$ **একটি অশূন্য ভেক্টর ও m একটি স্কেলার রাশি।**

ক. দেখাও যে, $-(-\underline{a}) = \underline{a}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $(-m)(\underline{a}) = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$ ৪

গ. দেখাও যে, $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ একটি একক ভেক্টর। ৪

প্রশ্ন–৩০ ▸ ABCD একটি সামান্তরিক। এর কর্ণ যথাক্রমে AC ও BD.

ক. দেখাও যে $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ২

খ. $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে প্রমাণ কর যে, APCQ একটি সামান্তরিক। ৪

প্রশ্ন–৩১ ▸ m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ তিনটি ভেক্টর।

ক $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে প্রমাণ কর যে $\underline{v} = \underline{w}$ ২

খ. $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ ৪

গ. $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ ৪

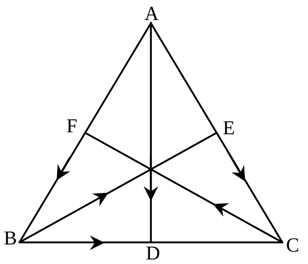
প্রশ্ন–৩২ ▸ ABC ত্রিভুজে BC, CA, ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.

ক. $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$ ৪

প্রশ্ন–৩৩ ▸



ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F।

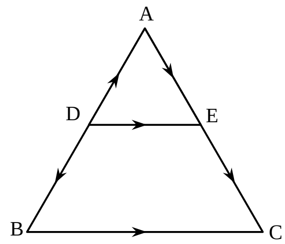
ক. নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে B ও C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{b}$ ও $\underline{c}$ হলে D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. BC ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ ৪

উত্তর : ক. $\frac{b + c}{2}$; খ. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}\right)$

প্রশ্ন–৩৪ ▸



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

গ. A ও B এর অবস্থান ভেক্টর, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এবং AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে বহিঃবিভক্ত হলে C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\underline{c} = \frac{n\underline{a} - m\underline{b}}{n - m}$ ৪

প্রশ্ন–৩৫ ▸ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি ভেক্টর এবং m স্কেলার গুণিতক ।

ক. দেখাও যে $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে যদি ও কেবল যদি $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়। ৪

গ. দেখাও যে, m এর সকল মানের জন্য $m\underline{a} + m\underline{b} = m(\underline{a} + \underline{b})$ সূত্রটি সত্য। ৪

অধ্যায় সমন্বিত সৃজনশীল প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন–৩৬ ▸ ABC ত্রিভুজের উচ্চতা h = 3·5 cm, শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর মধ্যমা AD = 4 সে.মি. এবং ∠B = 60°।

?

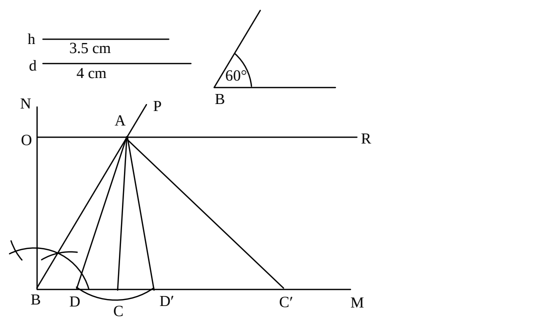
ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ BC এর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। ৪

৩৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক.



অঙ্কনের বিবরণ : ধাপ–১ : যেকোনো BM এর B বিন্দুতে ∠B = 60° এর সমান করে ∠PBM অঙ্কন করি।

ধাপ–২: BM রেখার ওপর B বিন্দুতে লম্ব BN অঙ্কন করি।

ধাপ–৩ : BN রেখা হতে উচ্চতা h = 3·5 cm এর সমান করে BO অংশ কেটে নেই।

ধাপ–৪ : O বিন্দুতে BM এর সমান্তরাল OR অঙ্কন করি যা BP কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

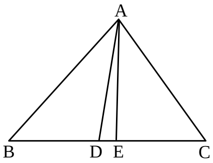
ধাপ–৫ : A বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা AD = d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যা BM কে D ও D′ বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ–৬ : DM হতে BD এর সমান করে DC এবং D′M হতে BD′ এর সমান করে D′C′ অংশ কেটে নেই।

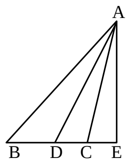
ধাপ–৭ : A, C এবং A,C′ যোগ করি।

তাহলে, ΔABC এবং $\Delta ABC'$-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ.



চিত্র–১



চিত্র–২

অঙ্কন : BC বাহুর উপর (ক) (চিত্র–১) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের (চিত্র–২) (খ) AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE [উভয় চিত্রে]

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে,

আমরা পাই, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$ .... (i)

আবার, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার উপর (চিত্র–১) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের চিত্র–২ উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DE$ .... (ii)

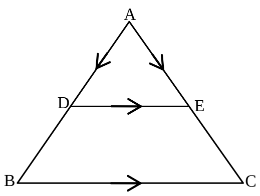
এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.DE - 2CD.DE$

$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE$ [$\because BD = CD$]

$= 2AD^2 + 2BD^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ.



মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = DE$ ....(i)

এবং $\overrightarrow{AC} - AB = BC$ ....(ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

[$\because$ D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

(ii) নং থেকে পাই

$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) হতে]

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

আবার, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল, কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩৭ ▸ ABCD চতুর্ভুজের A(6, – 4), B(2, 2), C(– 2, 2) এবং D (– 6 – 4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক. AC কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

গ. P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || AD || BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$. ৪

৩৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক. AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (-4-2)^2}$ একক

$= \sqrt{8^2 + (-6^2)}$ একক

$= \sqrt{64 + 36}$ একক

$= \sqrt{100}$ একক

$= 10$ একক **(Ans.)**

খ. এখানে, A(6, – 4), B(2, 2), C(– 2, 2) এবং D(– 6, – 4) শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{6 \times 2 + 2 \times 2 + (-2) \times (-4) + (-6) \times (-4) - (-4) \times 2 - 2 \times (-2) - 2 \times (-6) - (-4) \times 6\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{12 + 4 + 8 + 24 + 8 + 4 + 12 + 24)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 96$ বর্গ একক $= 48$ বর্গ একক

যেহেতু ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $a^2 = 48$ বর্গ একক

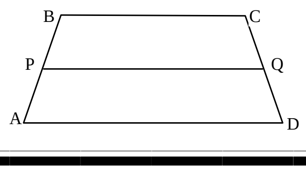
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{48}$ একক

$= 4\sqrt{3}$ একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা $= 4 \times a = 4 \times 4\sqrt{3}$ একক

$= 16\sqrt{3}$ একক **(Ans.)**

গ.



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AB ও CD এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

মনে করি কোনো নির্দিষ্ট মূল বিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$.

তাহলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

Q " " " $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

সুতরাং $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b}) = \frac{1}{2}\{(\underline{a} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$

কিন্তু $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\overrightarrow{CD} = \underline{c} - \underline{b}$

এবং $PQ = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

এখন AD ও BC সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ ভেক্টরটিও তাদের অর্থাৎ BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

সুতরাং $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

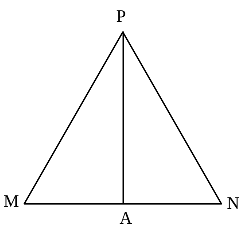
এবং। $|\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$

বা, $PQ = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|)$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

সুতরাং $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩৮ ▸ A



PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে PM = PN এবং PA ⊥ MN.

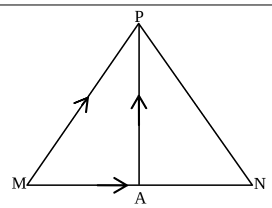
ক. ΔAPM এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{MA}$ এবং $\overrightarrow{MP}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. B, MN রেখার ওপর যেকোনো বিন্দু হলে, দেখাও যে, $PM^2 - PB^2 = MB.BN$. ৪

গ. PMN ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে, $PM^2 = 2R.PA$. ৪

▸◂ ৩৮নং প্রশ্নের সমাধান ▸◂

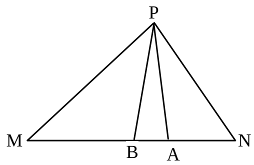
ক.



ΔAPM এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}$ **(Ans.)**

খ.



দেওয়া আছে, ΔPMN এ PM = PN

ভূমি MN এর উপর B যেকোনো বিন্দু।

দেখাতে হবে যে, $PM^2 - PB^2 = MB.BN$.

অঙ্কন : P, B যোগ করি।

প্রমাণ : PBA সমকোণী ত্রিভুজে

$PB^2 = PA^2 + AB^2$ ....(i)

[পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে]

আবার, PMA সমকোণী ত্রিভুজে

$PM^2 = PA^2 + MA^2$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$PM^2 - PB^2 = PA^2 + MA^2 - PA^2 - AB^2$

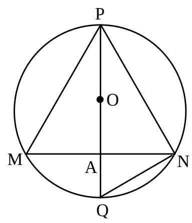
$= MA^2 - AB^2$

$= (MA + AB)(MA - AB)$

$= (AN - AB).MB = MB.BN$ [$\because MA = AN$]

$\therefore PM^2 - PB^2 = MB.BN$. **(দেখানো হলো)**

গ.



দেওয়া আছে PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে PM = PN ও PA ⊥ MN এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R.

প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = 2R.PA$.

অঙ্কন : O, ΔPMN এর পরিকেন্দ্র। O, P যোগ করে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যা পরিধিকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে OP + OQ = 2R বা PQ = 2R. Q, N যোগ করি।

প্রমাণ : ΔPMA এবং ΔPNQ এ

∠PAM = ∠PNQ উভয়ে এক সমকোণ

∠AMP = ∠PQN [একই জ্যা PN এর উপর অবস্থিত]

এবং অবশিষ্ট ∠MPA = অবশিষ্ট ∠QPN

∴ ΔPMA ও ΔPNQ সদৃশকোণী ও সদৃশ

তাহলে, $\frac{PM}{PA} = \frac{PQ}{PN}$

[∵ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূ প বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, PM.PN = PA.PQ

বা, PM.PM = 2R.DA [∵ PM = PN ও PQ = 2R]

∴ $PM^2 = 2R.PA$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৩৯ ▸ ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F এবং শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6), C(– 1, 4).

ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্য প্রমাণ কর যে, EF || BC এবং EF = $\frac{1}{2}$ BC. ৪

গ. ΔABC এর বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর ৰেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

৩৯নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, ΔABC এ AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুযায়ী ΔABE থেকে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ [∵ E, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু]

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}\right) - \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

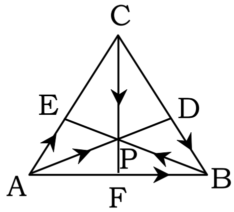
$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

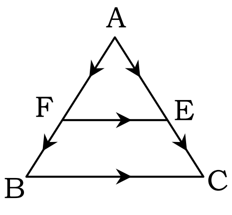
বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}\right)$

∴ $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ **(Ans.)**



খ.



প্রমাণ : E ও F যথাক্রমে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AB}$ এর মধ্যবিন্দু।

∴ $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

∴ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$

ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}\right) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$

∴ $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

আবার, $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা, $EF = \frac{1}{2}$ BC।

সুতরাং EF ও BC ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়।

সুতরাং EF ও BC ভেক্টর রেখাদ্বয় অর্থাৎ EF ও BC সমান্তরাল।

∴ EF || BC এবং $EF = \frac{1}{2}$ BC **(প্রমাণিত)**

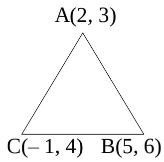
গ. A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2, 3), B(5, 6) এবং C(– 1, 4)

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-5)^2 + (3-6)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক



BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+1)^2 + (6-4)^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$= 2\sqrt{10}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ একক

অর্ধপরিসীমা s $= \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \sqrt{10}}{2} = 6.8647$ একক

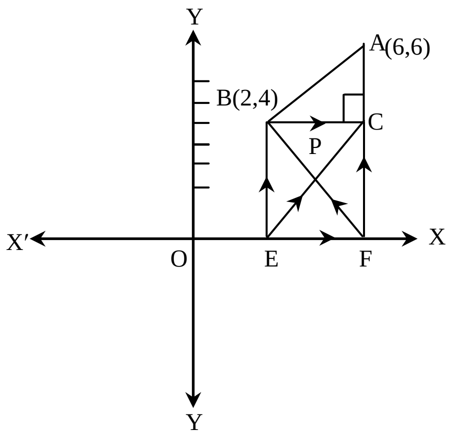
∴ ΔABC এর ৰেত্রফল $= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6.8647)(6.8647 - 3\sqrt{2})(6.8647 - 2\sqrt{10})(6.8647 - \sqrt{10})}$

$= \sqrt{35.9964883} = 5.9997$ বর্গ একক

= 6 বর্গ একক (প্রায়) **(Ans.)**

প্রশ্ন–৪০ ▸



EC ও FB এর মধ্যবিন্দু P এবং B, E, F, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে b, e, f, c।

ক. AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। ২

খ. AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ৰেত্রফল নির্ণয় কর। ৪

গ. অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BEFC একটি সামান্তরিক। ৪

৪০নং প্রশ্নের সমাধান

ক. AB এর দূরত্ব $= \sqrt{(6-2)^2 + (6-4)^2}$ একক

$= \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$ একক

$= \sqrt{16 + 4}$ একক

$= \sqrt{20}$ একক

$= 2\sqrt{5}$ একক **(Ans.)**

খ. AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{y - 6}{6 - 4} = \frac{x - 6}{6 - 2}$

বা, $\frac{y - 6}{2} = \frac{x - 6}{4}$

বা, $y - 6 = \frac{x - 6}{2}$

বা, $2y - 12 = x - 6$

বা, $x - 6 - 2y + 12 = 0$

$\therefore x - 2y + 6 = 0$ **(Ans.)**

C এর ভুজ এবং A এর ভুজ একই

$\therefore$ C এর ভূজ = 6

C এর কোটি এবং B এর কোটি একই

$\therefore$ C এর কোটি = 4

$\therefore$ C এর স্থানাঙ্ক (6, 4)

$\therefore$ AC এর দূরত্ব $= \sqrt{(6 - 6)^2 + (6 - 4)^2}$

$= \sqrt{0 + (2)^2} = 2$

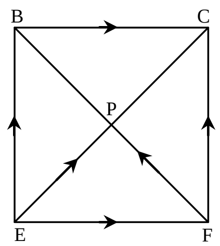
BC এর দূরত্ব $= \sqrt{(2 - 6)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BC$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4$ বর্গ একক

$= 4$ বর্গ একক **(Ans.)**

গ.



P বিন্দুটি EC এবং FB **এর মধ্যবিন্দু**। B, E, F এবং C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}$, $\underline{e}$, $\underline{f}$ এবং $\underline{c}$। অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, BEFC একটি সামান্তরিক।

$\overrightarrow{EC}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{e} + \underline{c}}{2}$

এবং $\overrightarrow{FB}$ বরাবর P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{\underline{f} + \underline{b}}{2}$

যেহেতু, P বিন্দুটি $\overrightarrow{EC}$ এবং $\overrightarrow{FB}$ এর মধ্যবিন্দু

অতএব, $\frac{\underline{e} + \underline{c}}{2} = \frac{\underline{f} + \underline{b}}{2}$

বা, $\underline{c} + \underline{e} = \underline{b} + \underline{f}$

বা, $\underline{b} - \underline{e} = \underline{c} - \underline{f}$

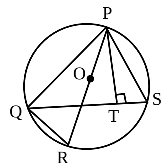
বা, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FC}$ [$\because \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PE} = \underline{b} - \underline{e}$ এবং $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PF} = \underline{c} - \underline{b}$]

আবার, $|\overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{FC}|$

দুইটি ভেক্টর সমান হবে যদি তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হয়। কিন্তু, এক্ষেত্রে $\overrightarrow{EB}$ এবং $\overrightarrow{FC}$ এর ধারক রেখা একই নয়। অতএব, তারা সমান্তরাল অর্থাৎ EB || FC

$\therefore$ BEFC একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন–৪১ ▸



O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস PR = 10 সে. মি. এবং PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D.

?

ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PQ. PS= PR.PT ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

৪১নং প্রশ্নের সমাধান

ক. দেওয়া আছে,

ব্যাস, PR = 10 সে. মি.

ব্যাসার্ধ, $r = \frac{10}{2} = 5$ সে. মি.

আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$= 3.1416 \times 5^2 = 78.54$ বর্গ সে. মি. **(Ans.)**

খ. মনে করি, PQS ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং PR পরিবৃত্তের একটি ব্যাস। ΔPQS এর শীর্ষ বিন্দু P থেকে বিপরীত বাহু QS এর উপর PT লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, PQ.PS = PR.PT

প্রমাণ : একই চাপ PQ এর জন্য $\angle PRQ$ এবং $\angle PST$ বৃত্তাংশস্থিত কোণ। PR বৃত্তের ব্যাস বলে $\angle PQR$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং QS বাহুর উপর PT লম্ব হওয়ায় $\angle PTS$ $\angle PTS$ সমকোণ।

এখন ΔPQR ও ΔPTS এর মধ্যে,

$\angle PRQ = \angle PST$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান]

$\angle PQR = \angle PTS$ [উভয়ই এক সমকোণ]

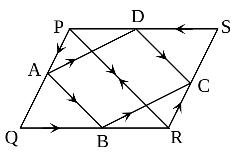
অবশিষ্ট $\angle QPR$ = অবশিষ্ট $\angle TPS$

ΔPQR ও ΔPTS সদৃশকোণী

অর্থাৎ $\frac{PQ}{PT} = \frac{PR}{PS}$

$\therefore$ PQ.PS = PR.PT **(প্রমাণিত)**

গ.



PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C, D।

A, B; B, C; C, D এবং A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

P, R যোগ করি।

তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP}) = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = 0$

বা, $(\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB ও DC সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন–৪২ ▸ (–2, –3) বিন্দুগামী একটি রেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। অপর একটি রেখা R(4, 3) এবং S(3, 0) বিন্দু দিয়ে যায়।

ক. PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. P, Q, R, S বিন্দু চারটি লেখ কাগজে স্থাপন করে দেখাও যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. PQRS এর সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি কী ধরনের হবে তা ভেক্টর পদ্ধতিতে নির্ণয় কর। ৪

৪২নং প্রশ্নের সমাধান

ক. S ঢালবিশিষ্ট এবং (–2, –3) বিন্দুবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ

$y - (-3) = 3\{x - (-2)\}$

বা, $y + 3 = 3(x + 2)$

বা, $y + 3 = 3x + 6$

বা, $y = 3x + 6 - 3$

বা, $y = 3x + 3$

$\therefore y = 3x + 3$

খ. 'ক' হতে পাই,

রেখাটির সমীকরণ $y = 3x + 3$

দেওয়া আছে, রেখাটি x অৰ y অৰকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $y = 3x + 3$ রেখাটি x অৰকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং P বিন্দুর কোটি বা y স্থানাঙ্ক শূন্য।

$\therefore 0 = 3x + 3$

বা, $3x = -3$

বা, $x = -1$

$\therefore x = -1$

সুতরাং P বিন্দুতে স্থানাঙ্ক (–1, 0)

আবার, $y = 3x + 3$ রেখাটি y অৰকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং Q বিন্দুর ভুজ বা x স্থানাঙ্ক শূন্য।

$\therefore y = 3.0 + 3$

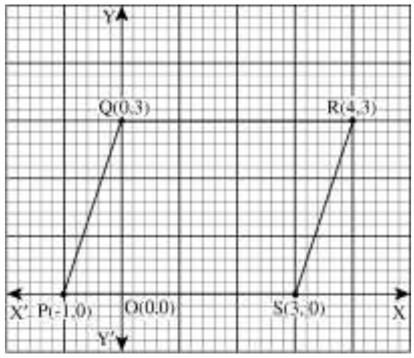
বা, $y = 0 + 3$

$\therefore y = 3$

সুতরাং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0,3)

আবার R এবং S বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 3) এবং (3, 0).

এখন স্থানাঙ্কায়িত লেখ কাগজের প্রতি ছোট পাঁচ ঘরকে এক একক ধরে P(–1, 0), Q(0, 3), R(4, 3) ও S(3, 0) বিন্দু চারটি লেখ এবং কাগজে স্থাপন করি এবং বিন্দুগুলো পর্যায় ক্রমে সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করি। ফলে PQRS চতুর্ভুজটি পাওয়া গেল।

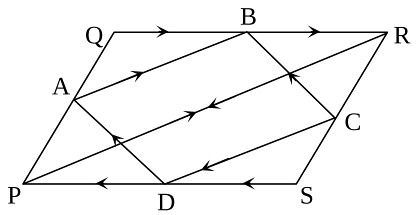


লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, PQRS চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু RS ও QR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

যেহেতু কোনো চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং PQRS একটি সামান্তরিক। **(দেখানো হলো)**

গ.



মনে করি, PQRS চতুর্ভুজের PQ, QR, RS এবং SP বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C, D। A ও B, B ও C, C ও D, D ও A যোগ করা হলো। ফলে ABCD চতুর্ভুজটি উৎপন্ন হলো। ABCD চতুর্ভুজটি কী ধরনের হবে তা ভেক্টর পদ্ধতিতে নির্ণয় করতে হবে।

ধরি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{b}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{c}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = 0$

অর্থা, $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

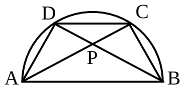
বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore$ AB ও AD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে BC ও AD সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রশ্ন–৪৩ ▸



চিত্রে AB ॥ CD

ক. সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 8 সে.মি. এবং বাহুদ্বয়ে একটি অপরটি অপেক্ষা 8 সে.মি. বড়। ABCD এর ক্ষেত্রফল 128 বর্গ সে.মি. হলে CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. অর্ধবৃত্তের AB ব্যাস এবং AC ও BD দুইটি জ্যা পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$ ৪

গ. মূলবিন্দুর সাপেক্ষে AC বাহুর A ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও $\underline{c}$। P, AC কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। দেখাও যে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\frac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}$ ৪

৪৩নং প্রশ্নের সমাধান

ক. উদ্দীপকে ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। যেহেতু AB ও CD সমান্তরাল। এখানে, বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব h = 8 সে.মি. এবং এর ৰেত্রফল 128 বর্গ সে.মি.।

ধরি, CD বাহুর দৈর্ঘ্য n সে.মি.

যেহেতু, AB > CD

সেহেতু, AB বাহুর দৈর্ঘ্য (x + 8) সে.মি.

$\therefore$ ট্রাপিজিয়ামের ৰেত্রফল = $\left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times h$ বর্গ একক

$= \left(\frac{x + 8 + x}{2}\right) \times 8$ বর্গ একক

$= 8(x + 4)$ বর্গ সে.মি.

শর্তমতে, $8(x + 4) = 128$

বা, $x + 4 = \frac{128}{8}$

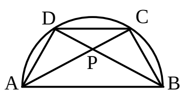
বা, $x + 4 = 16$

বা, $x = 16 - 4$

$\therefore x = 12$

অতএব, CD বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সে.মি.। **(Ans.)**

খ.



দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$।

অঙ্কন : A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔCPD ও ΔAPB–এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC–এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে।]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পৰে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP(CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$;
$\because AP^2 = AD^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = DP(BP + DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

[$\angle ABD = 90°$ বলে ΔABD–এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$
বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

বা, $AP.AC = AB^2 - BD(BD - DP)$

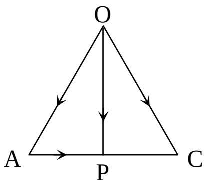
বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore AB^2 = AP.AC + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

গ. মনে করি, মূল বিন্দু O এবং A, C দুইটি বিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$ O, A; O, C যোগ করি। P.AC কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। O, P যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\left(\dfrac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}\right)$

প্রমাণ : যেহেতু P, AC কে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে যেহেতু AP ঃ PC = m : n



বা, $\dfrac{AP}{PC} = \dfrac{m}{n}$

বা, $\dfrac{AP}{PC} + 1 = \dfrac{m}{n} + 1$

বা, $\dfrac{AP + PC}{PC} = \dfrac{m + n}{n}$

বা, $\dfrac{AC}{PC} = \dfrac{m + n}{n}$

বা, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{PC}|} = \dfrac{m + n}{n}$ $\qquad [\because AC = |\overrightarrow{AC}|]$

বা, $|\overrightarrow{AC}| = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) |\overrightarrow{PC}|$

তাহলে, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) \overrightarrow{PC}$

বা, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) \overrightarrow{PC}$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) (\underline{c} - \overrightarrow{OP})$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) \underline{c} - \left(\dfrac{m + n}{n}\right) \overrightarrow{OP}$

বা, $\left(\dfrac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \left(\dfrac{m + n}{n}\right) \underline{c} + \underline{a} - \underline{c}$

বা, $\left(\dfrac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \left(\dfrac{m + n}{n} - 1\right) \underline{c} + \underline{a}$

বা, $\left(\dfrac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \dfrac{m}{n}\ \underline{c} + \underline{a}$

বা, $\left(\dfrac{m + n}{n}\right)\overrightarrow{OP} = \dfrac{m\underline{c} + n\underline{a}}{n}$

বা, $(m + n)\ \overrightarrow{OP} = m\underline{c} + n\underline{a}$

$\therefore \overrightarrow{OP} = \dfrac{m\underline{c} + n\underline{a}}{m + n}$

অর্থাৎ O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{(m\underline{c} + n\underline{a})}{m + n}$

(দেখানো হলো)