Pontificia Universidad JAVERIANA Bogotá

Análisis Numérico
Interpolación
Eddy Herrera Daza

Información

PROBLEMA:

Dados $\{(x_i, y_i)\}$ $\in \mathbb{R}^2$ para $i = 1,2, \ldots n$ entonces determinar $\approx f(x)$ para determinar (estimación numérica) $f(x_k)$ donde no se conoce su valor

nodos (no repetidos)

Determinar una aproximación $\approx f(x)$, que pase exactamente por una serie de puntos dados (función de **interpolación**)	Determinar o estimar $\approx f(x)$ que se adapte lo mejor posible a una serie o a una nube de puntos (función de **ajuste de curva** o regresión).

grado menor

Entradas x_i → modelo → Salidas y_i ↔ y_i observad

La finalidad del cálculo de las funciones de interpolación se centra en la necesidad de obtener valores intermedios (interpolación) o de valores fuera del intervalo para el que se dispone de datos (extrapolación).

Aplicaciones

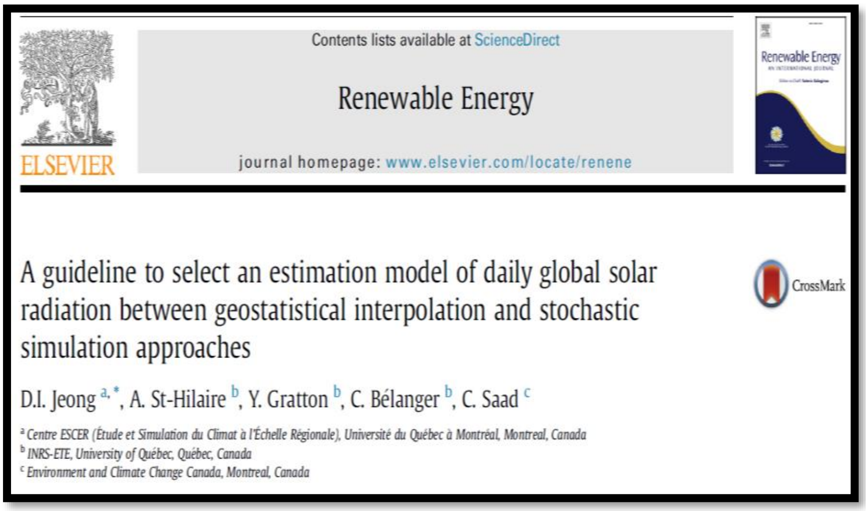
Fourier

x= posición
x= tiempo

y observando

Problema

Teniendo en cuenta que, los instrumentos medición de la irradiación solar son relativamente costosos y difíciles de gestionar, en comparación con los instrumentos utilizados para las de variables meteorológicas comunes, tales como temperatura del aire, precipitación, y humedad relativa. Por lo tanto, las estaciones meteorológicas para las mediciones de RSG son generalmente menos abundantes que las estaciones para las variables meteorológicas. Además, los datos de observados de RSG son generalmente series de tiempo cortas (ventana de tiempo) y tienen grandes vacíos (NAN) de valores faltantes; o se miden a resoluciones de tiempo gruesas. En este sentido, la interpolación en este caso espacial sirve para estimar RSG en puntos (estaciones) donde no se tiene medida o extender la estimación en el tiempo con la información antecedente (extrapolación).


Contents lists available at ScienceDirect

Renewable Energy

journal homepage: www.elsevier.com/locate/renene

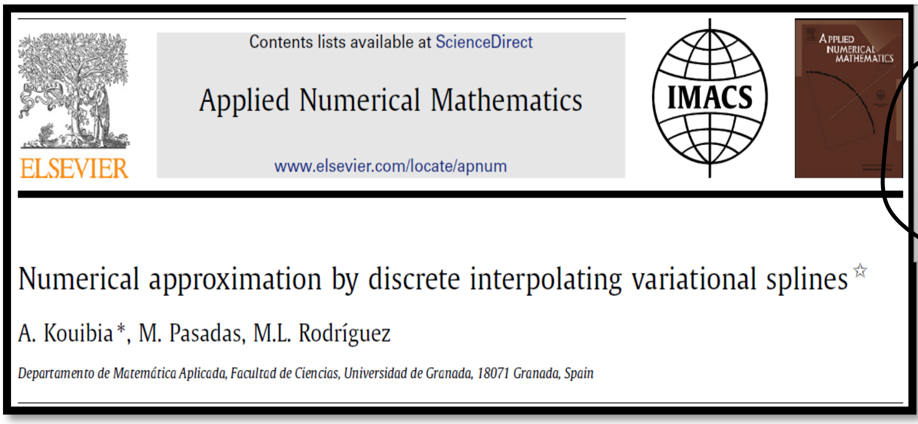
A guideline to select an estimation model of daily global solar radiation between geostatistical interpolation and stochastic simulation approaches

D.I. Jeong [a,*], A. St-Hilaire [b], Y. Gratton [b], C. Bélanger [b], C. Saad [c]

[a] Centre ESCER (Étude et Simulation du Climat à l'Échelle Régionale), Université du Québec à Montréal, Montreal, Canada
[b] INRS-ETE, University of Québec, Québec, Canada
[c] Environment and Climate Change Canada, Montreal, Canada

La interpolación resulta una herramienta práctica para resolver un problema en la estimación de la Radiación Solar Global (RSG) en una superficie horizontal de la tierra

$\mathbb{R}^2$


Contents lists available at ScienceDirect

Applied Numerical Mathematics

www.elsevier.com/locate/apnum

Numerical approximation by discrete interpolating variational splines ☆

A. Kouibia *, M. Pasadas, M.L. Rodríguez

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain

Obtener una aproximación de curvas y superficies paramétricas mediante un nuevo tipo funciones splines de algún conjunto de datos de Lagrange o Hermite

$\mathbb{R}^3$

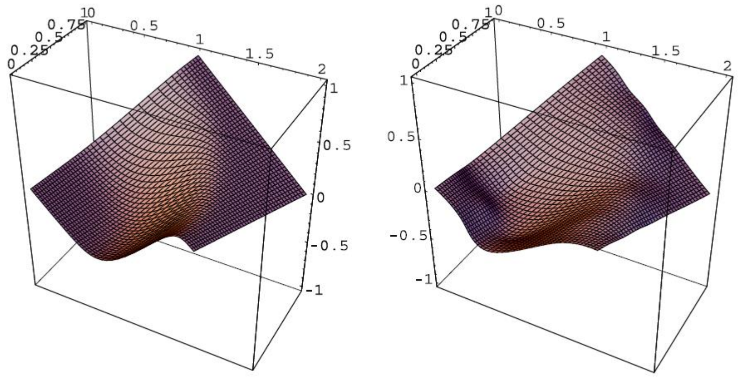


Fig. 2. From left to right, the graph of the parametric original surface, the graph of its interpolating one defined by a discrete interpolating variational spline s_τ^{dh} from $np = 25$ uniform interpolating points and $nt = 9 \times 9$ partition of $[0, 1] \times [0, 1]$.

Otra aplicación clásica de la interpolación consiste en estimar los valores de una función tabulada en puntos que no figuran en la tabla. Como ejemplo típico de tabla citemos la campana de Gauss o distribución normal. También se puede usar la interpolación para deducir fórmulas de integración aproximada y métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.

LA INTERPOLACIÓN LINEAL EN LA DISTRIBUCIÓN T: valores y errores

LINEAR INTERPOLATION IN THE T DISTRIBUTION: Values and Errors

José Gregorio Páez Veracierta

Universidad de Oriente, Núcleo de Bolívar, Unidad de Estudios Básicos, Calle San Simón, La sabanita, Ciudad Bolívar, estado Bolívar, Venezuela.

RESUMEN  $\leftarrow \int e^{-x^2} dx$: No tiene integral analítico

Esta investigación intenta validar el uso del método de interpolación lineal en la determinación, en aula, de valores de probabilidad bajo las curvas de distribución t de student, comparando los resultados reales con los resultados producto de la interpolación. Tal comparación lleva al autor a una tabla de errores porcentuales sobre la cual concluye que la aplicación de la interpolación lineal no es conveniente para ciertos valores en la tabla. Esta conclusión lleva a plantear una nueva tabla t, de valores reales, y a recomendar su uso en el aula, específicamente en la temática de inferencia estadística, mejorando así la exactitud en los cálculos.

Tabla 1. Valores t de la función densidad.

GRADOS DE LIBERTAD	Sig. 0,09 (Conf. 91%)	Sig. 0,08 (Conf. 92%)	Sig. 0,07 (Conf. 93%)	Sig. 0,06 (Conf. 94%)	Sig. 0,04 (Conf. 96%)	Sig. 0,03 (Conf. 97%)
1	7,02636623	7,91581509	9,05788668	10,57889499	15,89454484	21,20494879
2	3,10397669	3,31976405	3,57824664	3,89642536	4,84873221	5,64277835
3	2,47080680	2,60542682	2,76259896	2,95051047	3,48190876	3,89604593
4	2,22609956	2,33287256	2,45589199	2,60076199	2,99852787	3,29762973
5	2,09783667	2,19095826	2,29739233	2,42158471	2,75650852	3,00287497
6	2,01920079	2,10430612	2,20105893	2,31326330	2,61224185	2,82892786
7	1,96615295	2,04601110	2,13645290	2,24087929	2,51675242	2,71457301
8	1,92798552	2,00415154	2,09016601	2,18915480	2,44898499	2,63381437
9	1,89922181	1,97265265	2,05539486	2,15037527	2,39844098	2,57380398
10	1,87677438	1,94809946	2,02832701	2,12023353	2,35931462	2,52748424
11	1,85877196	1,92842682	2,00666275	2,09613884	2,32813983	2,49066393

Métodos de Interpolación

Interpolación Polinómica

Dados (x_i, y_i) n+1 puntos o nodos, obtener el polinomio (interpolación) de grado menor o igual que n que pasa por n+1 puntos. El problema de la interpolación consiste en estimar el valor de una función $\boldsymbol{f(x)} = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ en un punto a partir de valores conocidos en los puntos dados o en vecindades.

Teorema de Aproximación
Supóngase que f este definida y sea continua en $[a,b]$. $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, P(x)$ Polinomio con la propiedad de que $|f(x) - P(x)| < \varepsilon; \forall\, x \epsilon [a,b]$.

Teorema de Unicidad
Sea $\{x_k\}$ n+1 valores distintos (nodos) y sea f una función cuyos valores en esos puntos.
$\exists$ un único $P(x)$ de grado menor o igual a n con la propiedad:
$f(x_k) = P(x_k)\ \forall\, k = 0,1,2, \dots, n$

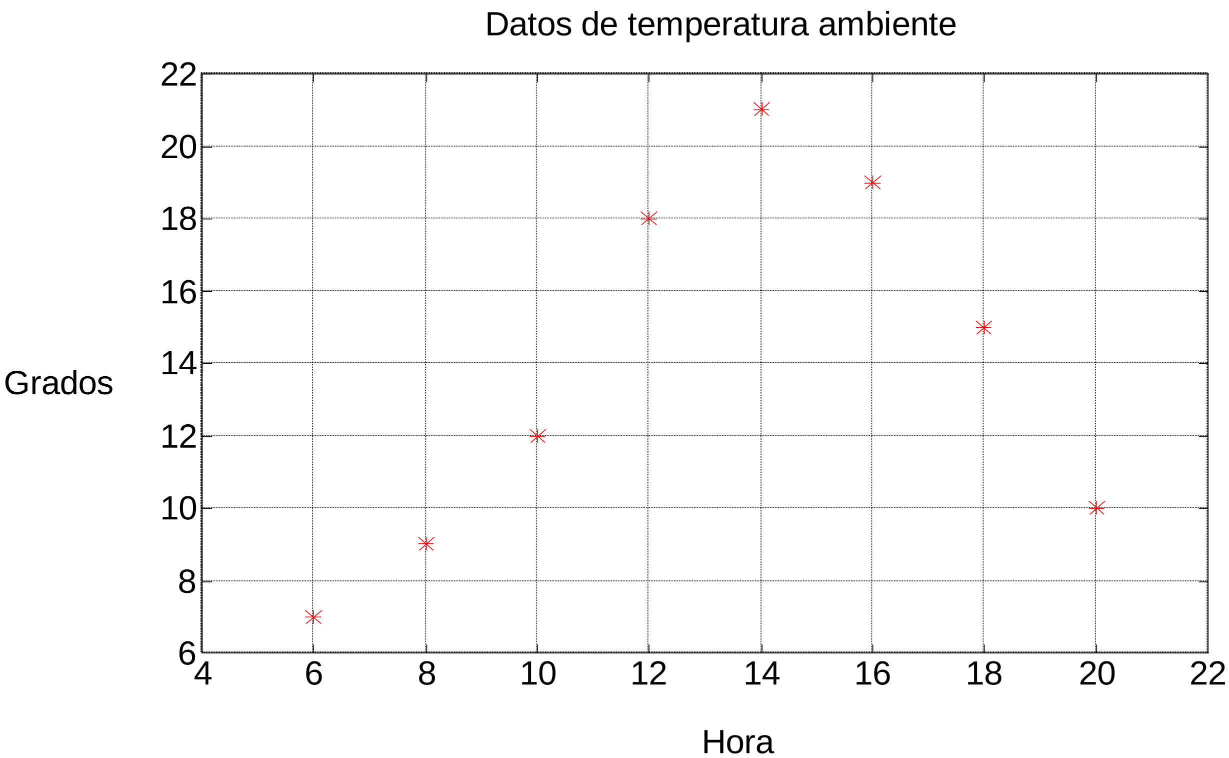
$$\begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2 & 1 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes se conoce con el nombre de matriz de Van der Monde. Desde el punto de vista numérico este método no es recomendable debido al mal condicionamiento
Las desventajas de estas técnicas son básicamente dos:
1. el alto costo computacional cuando el número de puntos a interpolar es grande.
2. la excesiva variación del polinomio interpolante principalmente en los extremos del intervalo que contiene los valores de las abscisas.

Ejemplo

Supóngase que se ha medido la temperatura del ambiente a distintas horas en una misma zona
Los siguientes datos son los datos de un día

Hora	6	8	10	12	14	16	18	20
Grados	7	9	12	18	21	19	15	10



En objetivo es determinar un polinomio $P(x) \approx T(t)$ que permita estimar la temperatura en el mismo lugar a una hora del día donde no se tiene medida

La función $T(t)$ es la verdadera función que describe la temperatura en la zona en un instante de tiempo de ese día. Para estimar la temperatura en un instante t que no aparece en la tabla, aproximaremos la función $T(t)$ mediante polinomios de interpolación. Estos polinomios se determinan exigiendo que coincidan con $T(t)$ en alguno de los valores tabulados.

Aunque hay uno y sólo un polinomio de *n*-ésimo grado que se ajusta a *n* + 1 puntos, existe una gran variedad de formas matemáticas en las cuales puede expresarse este polinomio.

Interpolación lineal

La ecuación general de la recta es $P_1(x) = a_0 + a_1x$. Exigiendo que pase por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) obtenemos un sistema de ecuaciones lineales

$$a_0 + a_1x_0 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 = y_1$$

En nuestro ejemplo tenemos el sistema, si tomamos las temperaturas de las 12 h y las 14h.

$$a_0 + 12a_1 = 18$$
$$a_0 + 14a_1 = 21$$

Donde la solución es $a_0 = 0$ y $a_1 = 3/2$.

Interpolación cuadrática

Tomando un polinomio de mayor grado, podemos imponer más condiciones para tener en cuenta la evolución de la temperatura alrededor del intervalo [12,14].

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

El polinomio de grado dos que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se determina análogamente resolviendo el sistema.

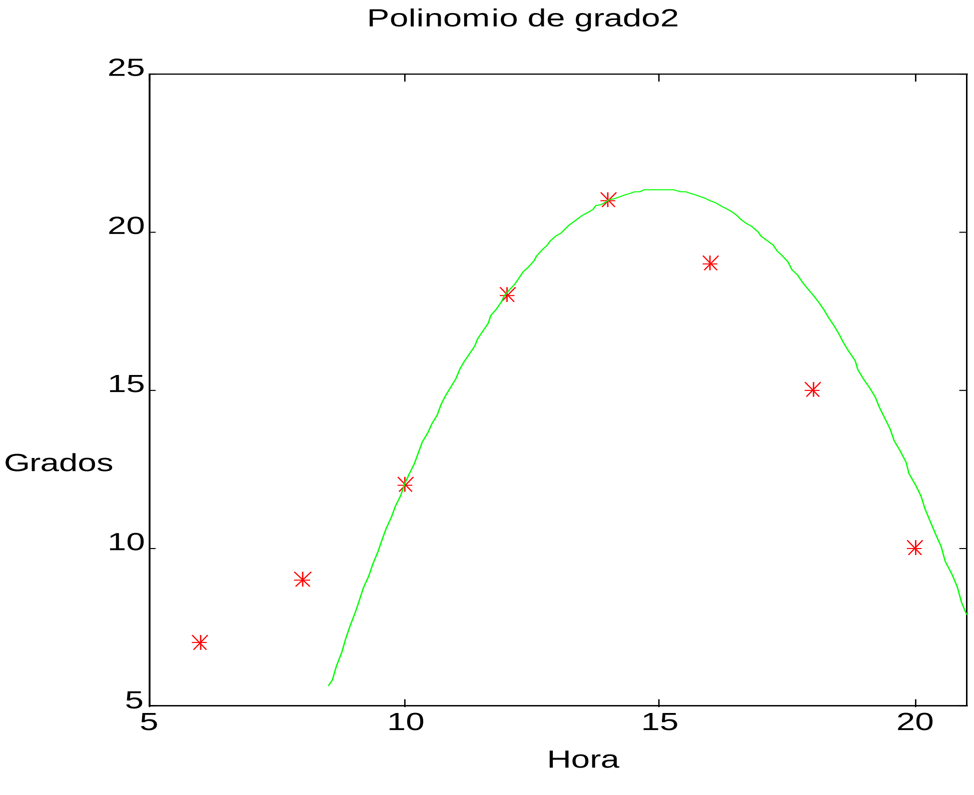
$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2$$

Hay que tener en cuenta que la solución de un sistema lineal de orden n tiene un costo (número de operaciones=eficiencia) $O(n^3)$, mientras que, como veremos enseguida, el polinomio de interpolación puede obtenerse con $O(n^2)$ operaciones.

Ejemplo: Dados (10,12), (12,18) y (14,21) queda un sistema cuya expresión matricial es:

$$\boldsymbol{AX = T}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 14 & 196 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 21 \end{pmatrix}$$



La matriz de este sistema anterior se denomina matriz *de* ***Van der Monde***. Esta matriz es regular si los x_i son todos distintos, pero es mal **condicionada** para tamaños relativamente pequeños.

Para determinar la sensibilidad de la solución a pequeños cambios en las entradas del sistema, recordemos que **El número de condición de una matriz:** cond(A) mide la sensibilidad de la solución de un sistema de ecuaciones lineales a errores en los datos. Es un indicativo de la exactitud de los resultados de la inversión de la matriz y la solución de la ecuación lineal y en este caso cond(A)>1 lo que indica que el método anterior para solucionar el problema no es el adecuado.

Desplazamiento del Origen

El mal condicionamiento de la anterior matriz se debe, en parte, a la inadecuada elección de los polinomios elegidos como base para expresar $P_2(x)$ alrededor solo del origen.
Por ejemplo, si desplazamos el origen a x_1, el mismo polinomio es ahora una combinación lineal de potencias de x-x_1 :

$$\mathbf{P_2(x) = b_0 + b_1(x-x_1) + b_2(x-x_1)^2}$$

La condición $P_2(x_1) = y_1$ proporciona directamente el valor de b_0 y queda un sistema de menor tamaño y mejor condicionado que el anterior. Esta mejora no es definitiva, pues la matriz del nuevo sistema es parecida a la de Van der Monde y para mayor grado reaparecerá el mal condicionamiento. En el ejemplo, el sistema queda

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el polinomio es de la forma:

$$\mathbf{P_2(x) = 18 + 9/4(x-12) - 3/8(x-12)^2}$$

Interpolación de Lagrange

La obtención del polinomio de interpolación en forma normal requiere la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, cuyo costo aritmético es del orden de n^3, siendo n el número de nodos. Para reducir el costo podemos tomar una base del espacio de polinomios más adecuada, en la que sea más cómodo imponer las condiciones de interpolación. Esta base, formada por polinomios $L_{in}(x)$, i=0, ..., n, dependientes de las abscisas x_0, x_1, ..., x_n, de los nodos considerados, que es el caso de los polinomios de ***L' Lagrange*** permiten obtener una expresión explícita del polinomio de interpolación.

Existencia del polinomio de interpolación.

Sea $L_{in}(x)$ un polinomio de grado n, que se anule en todos los puntos x_j, j = 0, 1, ..., n, salvo en el i-ésimo, donde vale 1; es decir, tal que

$$L_i(x_j) = 0 \ \text{ si } j \neq i$$

$$\text{y } L_i(x_i) = 1$$

La existencia de este polinomio se deriva del resultado anterior, pero puede obtenerse directamente, sin necesidad de resolver un sistema, gracias a la siguiente fórmula debida a Lagrange

$$L_{in}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

Es inmediato comprobar entonces que el polinomio

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{j \neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} y_k .$$

Donde,

$$P_n(x_i) = y_i,\ i=0,1,2\ldots,n.$$

La unicidad se puede garantizar utilizando el hecho de que un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces. Si dos polinomios de grado $\leq n$ interpolan n+1 puntos, su diferencia se anula en dichos puntos, por lo que sólo puede ser el polinomio idénticamente nulo.

Ejemplo:

Combinando las dos últimas fórmulas, obtenemos una expresión explícita del polinomio de interpolación. El polinomio $P_2(x)$ del ejemplo tiene, según Lagrange, la siguiente expresión:

$$P_2(x) = 12\frac{(x-12)(x-14)}{(10-12)(10-14)} + 18\frac{(x-10)(x-14)}{(12-10)(12-14)} + 21\frac{(x-10)(x-12)}{(14-10)(14-12)}$$

Las operaciones que nos hemos ahorrado en su determinación, hemos de pagarlas al evaluar el polinomio en un punto concreto (**del orden de n^2 operaciones por cada evaluación**). Además, los productos a efectuar pueden causar *overflow* y la fórmula no es estable numéricamente.
Cambiaremos los polinomios de Lagrange $L_{in}(x)$ por otra base que nos proporcione mejores propiedades numéricas, a costa de perder la expresión explícita cómoda del polinomio de interpolación.

Polinomio de Interpolación de Newton

Numéricamente es mucho más útil la forma de *Newton* del polinomio de interpolación. Aunque no tiene expresión explícita, su obtención es más estable que por los métodos anteriores, su evaluación no presenta los inconvenientes de los polinomios de Lagrange, y sobre todo, se puede **actualizar fácilmente** si se añaden nuevos nodos de interpolación (actualización)

Recordando la técnica de **desplazamiento del origen,** consideramos como base los polinomios: $x-x_0$, $(x-x_0)(x-x_1)$, ..., $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$. El polinomio de interpolación correspondiente tendrá ahora la expresión

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

Imponiendo las condiciones de interpolación, podemos determinar los coeficientes de este polinomio.

$P_n(x_0) = y_0 = c_0$
$P_n(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1-x_0)$
$P_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_2-x_0) + c_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$
$\cdots$
$P_n(x_n) = y_n = c_0 + c_1(x_n-x_0) + c_2(x_n-x_0)(x_n-x_1) + \cdots + c_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})$

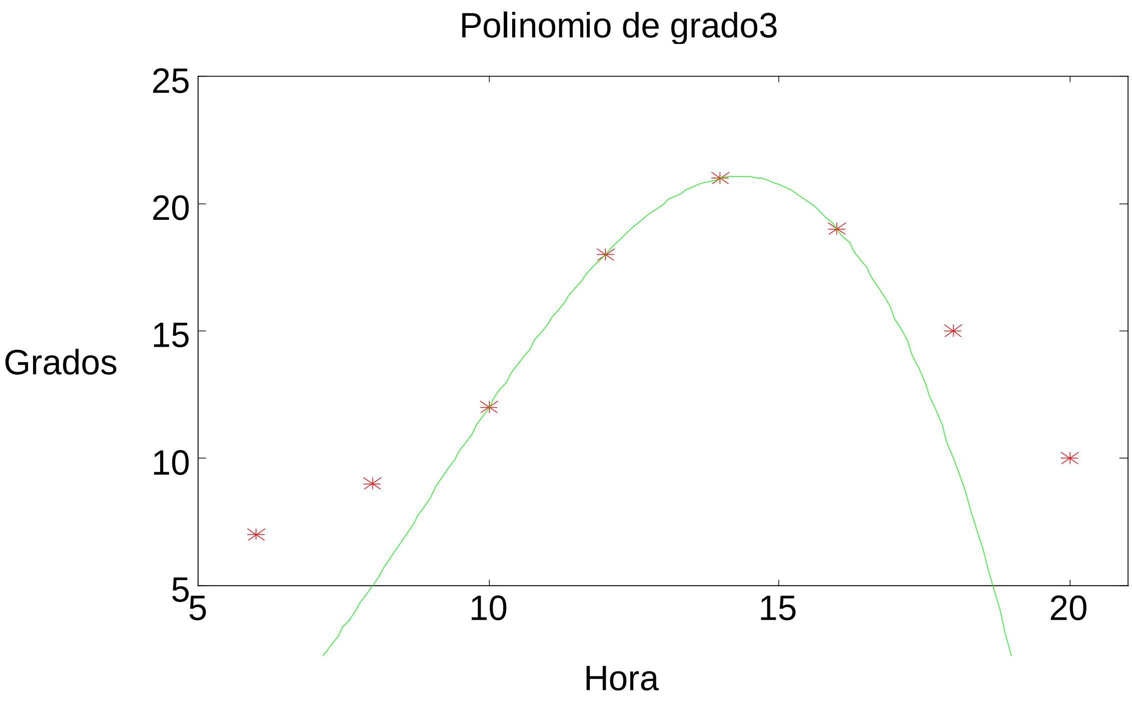
El sistema lineal obtenido tiene una matriz análoga a la de **Van der Monde**, pero con la ventaja de ser una matriz **triangular inferior**. Los coeficientes pueden determinarse con menos operaciones (del orden de n^2, en lugar de n^3).
Otra similitud con la matriz de Van der Monde, es que el elemento (i, j) es el valor del j-ésimo polinomio de la base en el (i-1)-ésimo punto de interpolación.

Ejemplo
Para estimar la temperatura a las 13 h. mediante un polinomio de grado 3, tomamos los 4 puntos más próximos, que son (12,18), (14,21), (10,12) y (16,19). Imponiendo al polinomio que pase por estos puntos, queda el sistema

$P_3(12) = 18 = c_0$
$P_3(14) = 21 = c_0 + 2c_1$
$P_3(10) = 12 = c_0 + 2c_1 + 8c_2$
$P_3(16) = 19 = c_0 + 4c_1 + 8c_2 + 48c_3$

Resolviendo este sencillo sistema triangular obtenemos los coeficientes del polinomio buscado. La ecuación del polinomio de grado 3 de la tabla anterior es

$$P_3(x) = 18 + 1.5(x-12) - 0.375(x-12)(x-14) - 0.0417(x-12)(x-14)(x-10)$$



Una importante consecuencia de la forma de los polinomios de la base considerada es que la **adición de nuevos puntos no afecta a los coeficientes previamente calculados**. De este modo, podemos ir añadiendo puntos uno a uno y obtener polinomios de interpolación de grado creciente sin tener que recalcular los anteriores, una característica que en otros métodos no es posible.

Método de Diferencias Divididas

Denotemos por $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ el coeficiente de x^k en el polinomio de interpolación de grado k. Por la forma de los polinomios de Newton, tenemos que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = c_k$$

De la primera ecuación del sistema se obtiene

$$c_0 = f[x_0] = y_0$$

Y de la segunda

$$c_1 = f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Esta expresión se denomina cociente de diferencias o diferencias divididas de primer orden y proporciona el valor de c_1 en función de los puntos de interpolación.
Los restantes coeficientes del polinomio de interpolación se obtienen análogamente a partir de diferencias divididas de mayor orden.
Así, por ejemplo, c_2 viene dado por el cociente en diferencias de orden 2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Diferencias divididas de orden superior nos proporcionarán de modo análogo los coeficientes de polinomios de mayor grado. En general, el coeficiente c_k viene dado por una diferencia dividida de orden k

$$f[x_0, x_1, \ldots x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots x_k] - f[x_0, x_1, \ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Esta expresión muestra que las diferencias divididas de orden k dependen de diferencias divididas de primer orden k-1. (En el caso k=1 consideramos $f[x_i] = y_i$ como una diferencia de orden 0). Estas dependencias determinarán el orden de las operaciones en el algoritmo de cálculo de los polinomios de interpolación.

A modo de justificación de las anteriores fórmulas, consideraremos la obtención de c_2.

El polinomio de interpolación de grado 1, es decir la recta que pasa por los puntos: (x_0, y_0) y (x_1, y_1) puede expresarse como

$$P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0) =$$

$$= f[x_0] + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(f[x_1] - f[x_0]) = q + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(r - q)$$

Donde q es el polinomio de grado cero (constante) que interpola (x_0, y_0) y r el polinomio del mismo grado que pasa por (x_1, y_1). En este caso particular, $q \equiv y_0$ y $p \equiv y_1$. Apliquemos esta idea a la obtención del polinomio $P_2(x)$.

Para ello, sea ahora q el polinomio (de grado 1) que interpola (x_0, y_0) y (x_1, y_1), y r el polinomio que interpola (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Consideremos el polinomio

$$p(x) = q + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}(r - q)$$

Este polinomio, de grado no mayor que 2, pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como se comprueba sin más que sustituir x por la abscisa correspondiente y tener en cuenta la definición de p y q.

Por tanto p(x) es el polinomio de interpolación de grado 2 buscado, $P_2(x)$. Su coeficiente director es el coeficiente de mayor grado de r-q, dividido por x_2-x_0. Como q y r son en este caso rectas, sus coeficientes directores son las pendientes, que son los correspondientes cocientes de diferencias primeras. En definitiva,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

Las fórmulas de las diferencias divididas de mayor orden se demuestran análogamente, por inducción. En la práctica, los cálculos se disponen en una tabla de diferencias divididas, colocando en la primera columna los valores de la función o diferencias divididas de orden 0, en la segunda columna las diferencias divididas de primer orden, en la tercera columna las de orden 2, y así sucesivamente.

La tabla queda de la forma siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
y_0 = f[x_0] & & & \\
y_1 = f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
y_2 = f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
y_3 = f[x_3] & f[x_2, x_3] & f[x_1, x_2, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

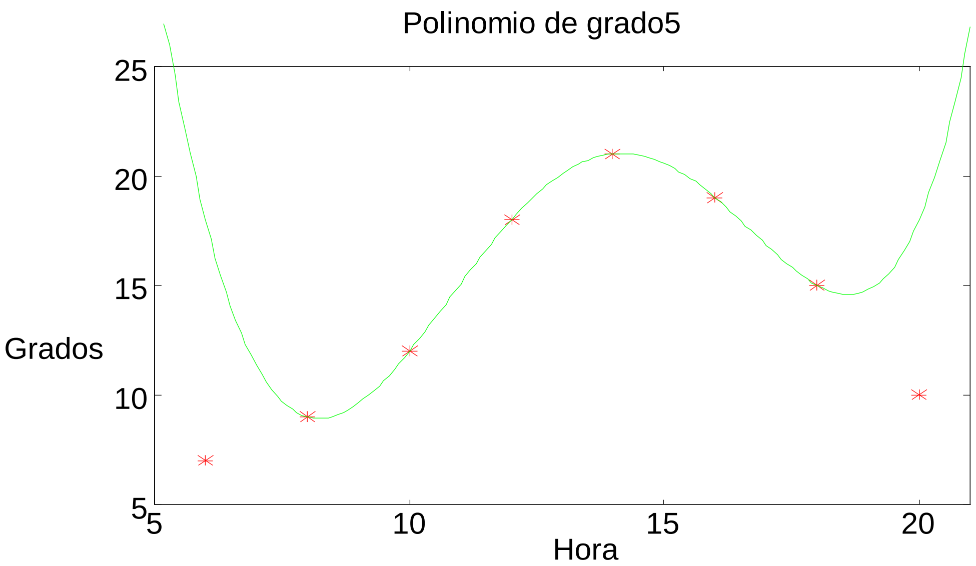
x	0	1	3
y	1	3	-1

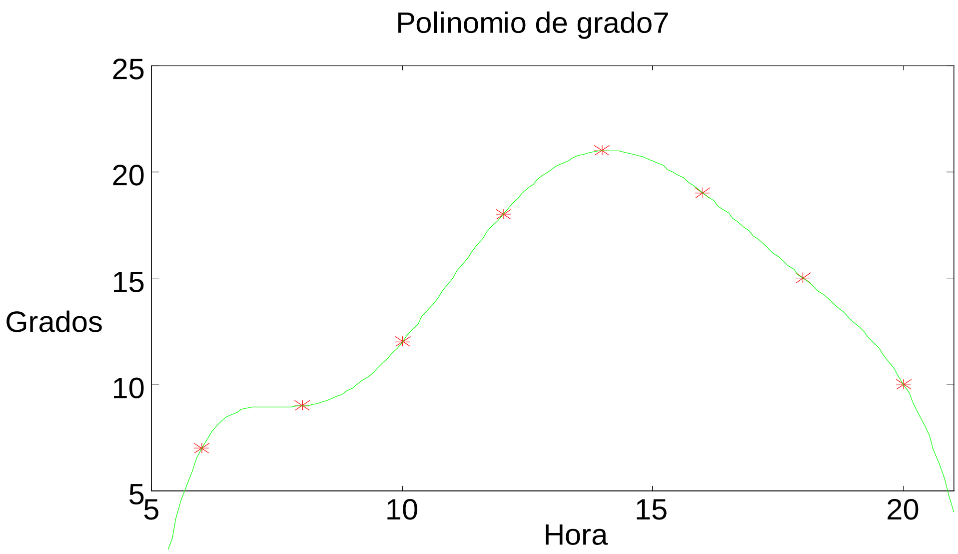
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$		
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 3$	$f[x_0, x_1] = \frac{3-1}{1} = 2$	
$x_2 = 3$	$f[x_2] = -1$	$f[x_1, x_2] = \frac{-1-3}{3-1} = -2$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-2-2}{3-0} = \frac{-4}{3}$

Luego, la matriz de salida de las diferencias es:

A =

18	0	0	0	0	0	0	0
21	1.5000	0	0	0	0	0	0
12	2.2500	-0.3750	0	0	0	0	0
19	1.1667	-0.5417	0.0417	0	0	0	0
9	1.2500	-0.0417	-0.0833	0	0	0	0
15	0.6000	-0.3250	-0.0354	0	0	0	0
7	0.6667	-0.0333	-0.0292	0	0	0	0
10	0.2143	-0.2262	-0.0161	0	0	0	0





Una vez obtenidos estos coeficientes, nos preguntamos cómo evaluar los polinomios de interpolación en un punto dado $x = a$. La forma más eficiente desde el punto de vista numérico es mediante la **expresión anidada del polinomio** (Horner):

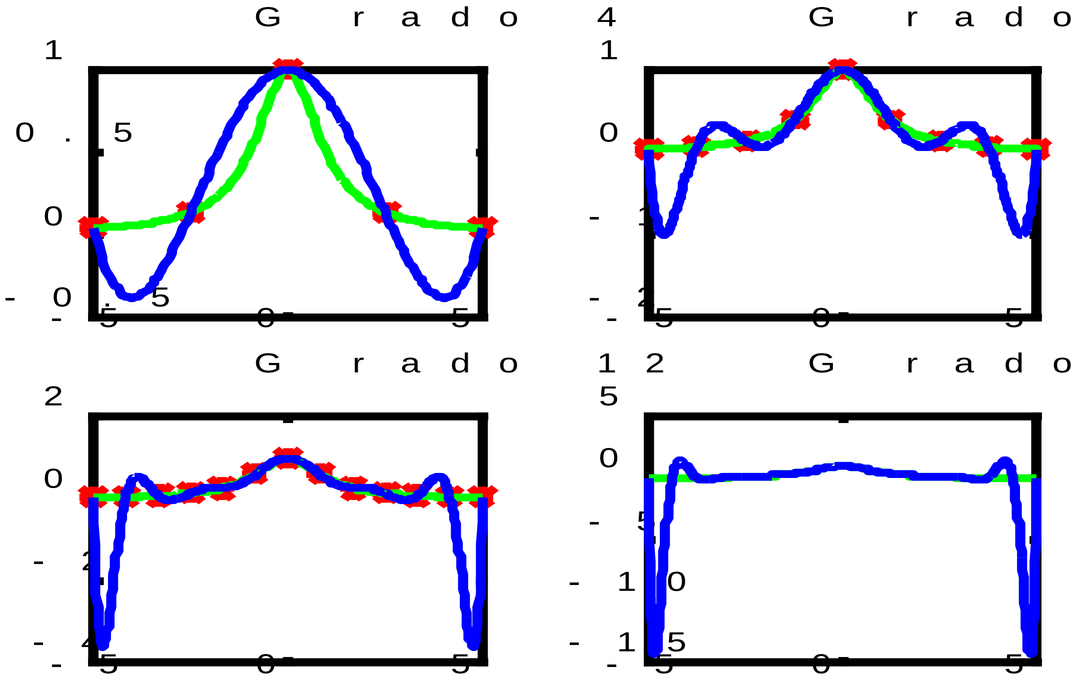
$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) =$$
$$= (\cdots((c_n(x-x_{n-1}) + c_{n-1})(x-x_{n-2}) + c_{n-2})(x-x_{n-3}) + \cdots + c_1)(x-x_0) + c_0$$

Las operaciones se efectúan teniendo en cuenta la precedencia establecida mediante los paréntesis, o sea, comenzando con los más interiores.

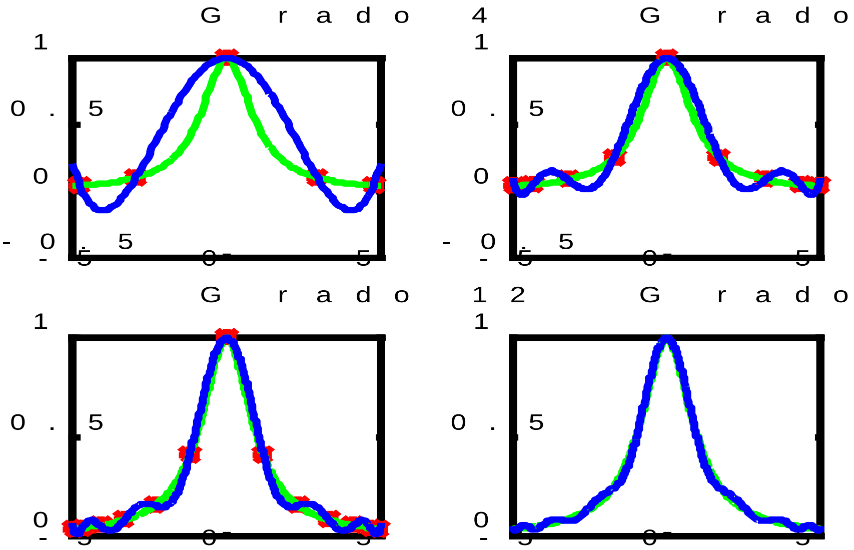
Ejemplo

Consideremos la función de valor real dada por $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$ conocida como la función de *Runge* en el intervalo [-1,1]:

Los polinomios que interpolan sus valores en puntos equi-espaciados de este intervalo se desvían bastante de la función, sobre todo cerca de los extremos, como se observan en la siguiente figura



Observamos que el error máximo en el intervalo aumenta con el grado del polinomio interpolante. Para minimizar el error es conveniente tomar nodos de interpolación especiales, en lugar de los nodos equiespaciados considerados hasta ahora.



Los llamados **nodos de Chebyshev** hacen mínimo, en un intervalo dado, el valor máximo del polinomio $(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ que aparece en la expresión del error. Para el caso particular del intervalo [−1,1], estos nodos son

$$x_i = \cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+2}\pi\right), \qquad i = 0,1,2,\ldots,n.$$

En las gráficas se aprecia la reducción del error al interpolar la función de Runge en los nodos de Chebyshev.

Consideraciones en la Interpolación Polinómica

a. La interpolación polinómica no debe utilizarse para datos con error de medida (incertidumbre). Si los errores de medida son inevitables debemos recurrir a métodos como los mínimos cuadrados.
b. Cuando una función tiene características muy diferentes a los polinomios, la interpolación polinómica puede resultar inadecuada. Por ejemplo, funciones de crecimiento o funciones logísticas. En este caso, como hemos visto con el ejemplo de Runge, el aumento del grado empeora el resultado en vez de mejorarlo.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede explorar otra alternativa que consiste en interpolar mediante funciones definidas por intervalos. En cada intervalo, la función interpolante es un polinomio de grado bajo, normalmente de 1 a 3. Estas funciones se denominan *splines* y el método, interpolación segmentaria.

INTERPOLACIÓN DE SPLINES

Esta interpolación es usada con gran frecuencia en el diseño por computadora, por ejemplo, de tipos de letra.

La idea central es que en vez de usar un solo polinomio para interpolar los datos, podemos usar segmentos de polinomios y unirlos adecuadamente para formar nuestra interpolación. Cabe mencionar que entre todas, las splines cúbicas han resultado ser las más adecuadas para aplicaciones como la mencionada anteriormente.

Así pues, podemos decir de manera informal, que una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido en un intervalo y que se unen entre si bajo ciertas condiciones de continuidad.

Definición

Dada un conjunto de datos $[(x_0, y_0); \ldots (x_n, y_n)]$. **Dado** k un número entero positivo, una función de interpolación splines de grado k, para la tabla de datos, es una **función** $s(x)$ tal que:

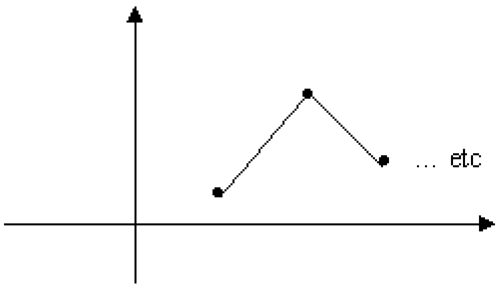
- ❖ $s(x_i) = y_i$, para toda i.
- ❖ $s(x$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- ❖ $s(x$ tiene derivada continua hasta de orden $k-1$ en $[x_0, x_n]$.

Por ejemplo, una función spline de grado 1 que interpole los datos es simplemente unir cada uno de los puntos mediante segmentos de recta, como sigue:

Definición

Dada un conjunto de datos $[(x_0, y_0); \ldots (x_n, y_n)]$. **Dado** k un número entero positivo, una función de interpolación splines de grado k, para la tabla de datos, es una **función** $s(x)$ tal que:

- ❖ $s(x_i) = y_i$, para toda i.
- ❖ $s(x$ es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- ❖ $s(x$ tiene derivada continua hasta de orden $k-1$ en $[x_0, x_n]$.



Claramente esta función cumple con las condiciones de la spline de grado 1. Así, tenemos que para este caso:

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & si \quad x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x) & s \quad x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \\ s_n(x) & si \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Donde:

i) $s_j(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1

ii) $s(x)$ tiene derivada continua de orden k-1=0.

iii) $s(x_j)=y_j$, para $j=0,1,\ldots,n$.

Por lo tanto, la spline de grado 1 queda definida como:

$$s(x)=\begin{cases} y_0+f[x_1,x_0](x-x_0) & si \quad x\in[x_0,x_1] \\ y_1+f[x_2,x_1](x-x_1) & si \quad x\in[x_1,x_2] \\ & \vdots \\ y_{n-1}+f[x_n,x_{n-1}](x-x_{n-1}) & si \quad x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

Donde la diferencia dividida de Newton es:
$f[x_i,x_j]$

Ejemplo
Consideremos los siguientes datos, obtener splines de grado 2:

x	3	4.5	7	9
y	2.5	1	2.5	0.5

Y procedamos a calcular la interpolación por splines de grado 2. Primero que nada, vemos que se forman tres intervalos :

$$[3,4.5]$$
$$[4.5,7]$$
$$[7,9]$$

En cada uno de estos intervalos, debemos definir una función polinomial de grado 2, como sigue:

$$s(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1 & si \quad x\in[3,4.5] \\ a_2x^2+b_2x+c_2 & si \quad x\in[4.5,7] \\ a_3x^2+b_3x+c_3 & si \quad x\in[7,9] \end{cases}$$

Primero, hacemos que la spline pase por los puntos de la tabla de datos. Es decir, se debe cumplir que:

$s(3)=2.5$, $s(4.5)=1$, $s(7)=2.5$, $s(9)=0.5$

Así, se forman las siguientes ecuaciones:

$s(3) = 2.5 \Rightarrow 9a_1 + 3b_1 + c_1 = 2.5$

$$s(4.5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (4.5)^2 a_1 + 4.5b_1 + c_1 = 1 \\ (4.5)^2 a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$s(7) = 2.5 \Rightarrow \begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\ 49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \end{cases}$$

$$s(9) = 0.5 \Rightarrow 81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5$$

Hasta aquí, tenemos un total de 6 ecuaciones vs. 9 incógnitas. El siguiente paso es manejar la existencia de las derivadas continuas. En el caso de las splines de grado 2, necesitamos que la spline tenga derivada continua de orden k-1=1, es decir, primera derivada continua.
Calculamos primero la primera derivada:

$$s'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & si \quad x \in [3,4.5] \\ 2a_2x + b_2 & si \quad x \in [4.5,7] \\ 2a_3x + b_3 & si \quad x \in [7,9] \end{cases}$$

Vemos que esta derivada está formada por segmentos de rectas, que pudieran presentar discontinuidad en los cambios de intervalo. Es decir, las posibles discontinuidades son $x = 4.5$ y $x = 7$. Por lo tanto para que la derivada sea continua, se debe cumplir que:

$$2a_1(4.5) + b_1 = 2a_2(4.5) + b_2$$

Tambien, debe cumplirse que:

$$2a_2(7) + b_2 = 2a_3(7) + b_3$$

Así, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 9 incógnitas; esto nos da un grado de libertad para elegir alguna de las incógnitas. Elegimos por simple conveniencia $a_1 = 0$. De esta forma, tenemos un total de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas.

$$\begin{aligned}
&3b_1 + c_1 = 2.5 \\
&4.5b_1 + c_1 = 1 \\
&20.25a_2 + 4.5b_2 + c_2 = 1 \\
&49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2.5 \\
&49a_3 + 7b_3 + c_3 = 2.5 \\
&81a_3 + 9b_3 + c_3 = 0.5 \\
&b_1 = 9a_2 + b_2 \\
&14a_2 + b_2 = 14a_3 + b_3
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

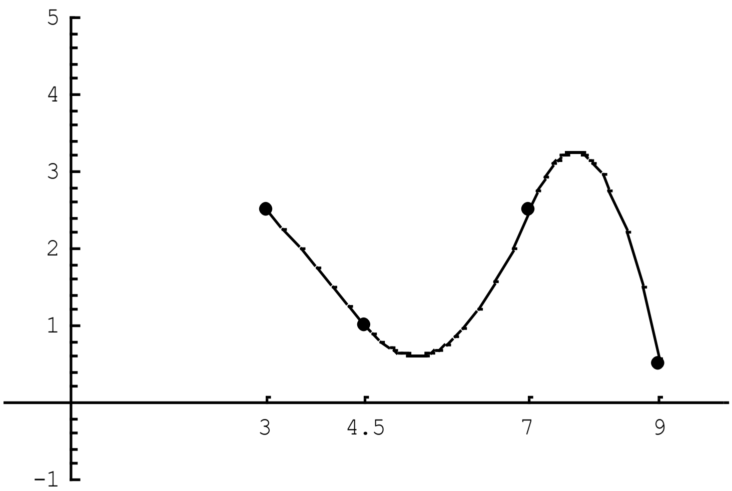
Donde, la solución es:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -1 \\
c_1 &= 5.5 \\
a_2 &= 0.64 \\
b_2 &= -6.76 \\
c_2 &= 18.46 \\
a_3 &= -1.6 \\
b_3 &= 24.6 \\
c_3 &= -91.3
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores obtenemos la función spline cuadrática que interpola la tabla de datos dada:

$$s(x)=\begin{cases} -x+5.5 & si \quad x\in[3,4.5] \\ 0.64x^2-6.76x+18.46 & si \quad x\in[4.5,7] \\ -1.6x^2+24.6x-91.3 & si \quad x\in[7,9] \end{cases}$$

La gráfica que se muestra a continuación contiene tanto los puntos iniciales de la tabla de datos, así como la spline cuadrática.



Funciones Spli

Una spline cúbica que interpola los datos $s(x)$ definida como sigue:

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x) & si \quad x\in[x_0,x_1] \\ s_1(x) & si \quad x\in[x_1,x_2] \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & si \quad x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}$$

Ejemplo

Interpolar los siguientes datos mediante una spline cúbica:

x	2	3	5
y	−1	2	−7

Definimos un polinomio cúbico en cada uno de los intervalos que se forman:

$$s(x)=\begin{cases} a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1 & si \quad x\in[2,3] \\ a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2 & si \quad x\in[3,5] \end{cases}$$

A continuación, hacemos que se cumpla la condición de que la spline debe pasar por los puntos dados en la tabla.

$$s(2) = -1 \Rightarrow 8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1$$
$$s(3) = 2 \Rightarrow 27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2$$
$$s(5) = -7 \Rightarrow 125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7$$

Ahora calculamos la primera derivada de:

$$s'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & si \quad x \in [2,3] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las splines cuadráticas, se presentan ecuaciones que pueden presentar discontinuidad en los cambios de intervalo; las posibles discontinuidades son los puntos donde se cambia de intervalo, en este caso x=3. Para evitar esta discontinuidad, evaluamos en los dos polinomios e igualamos:

$$3a_1(3)^2 + 2b_1(3) + c_1 = 3a_2(3)^2 + 2b_2(3) + c_2$$

Análogamente procedemos con la segunda derivada:

$$s''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & si \quad x \in [2,3] \\ 6a_2x + 2b_2 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

La segunda derivada:

$$6a_1(3) + 2b_1 = 6a_2(3) + 2b_2$$

En este punto contamos con 6 ecuaciones y 8 incógnitas, por lo tanto tenemos 2 grados de libertad; en general, se agregan las siguientes 2 condiciones:

$$s''(x_0) = 0$$
$$s''(x_n) = 0$$

De lo cual vamos a obtener:

$$s''(2) = 0 \Rightarrow 6a_1(2) + 2b_1 = 0$$

$$s''(5) = 0 \Rightarrow 6a_2(5) + 2b_2 = 0$$

Con lo cual, hemos completado un juego de 8 ecuaciones vs. 8 incógnitas, el cual es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&8a_1 + 4b_1 + 2c_1 + d_1 = -1 \\
&27a_1 + 9b_1 + 3c_1 + d_1 = 2 \\
&27a_2 + 9b_2 + 3c_2 + d_2 = 2 \\
&125a_2 + 25b_2 + 5c_2 + d_2 = -7 \\
&27a_1 + 6b_1 + c_1 = 27a_2 + 6b_2 + c_2 \\
&18a_1 + 2b_1 = 18a_2 + 2b_2 \\
&12a_1 + 2b_1 = 0 \\
&30a_2 + 2b_2 = 0
\end{aligned}$$

Cuya forma matricial es la siguiente:

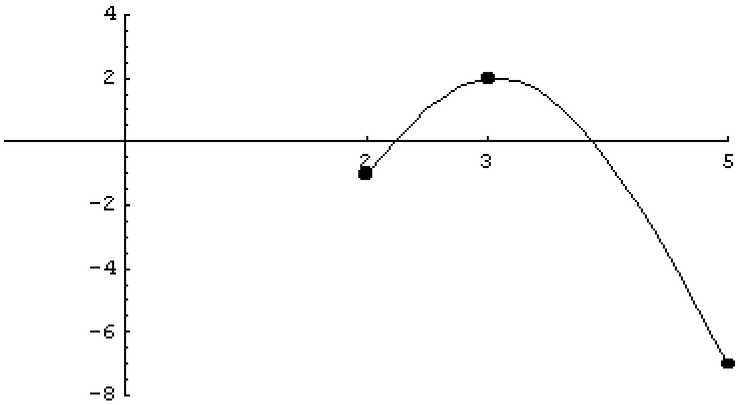
$$\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 125 & 25 & 5 & 1 \\ 27 & 6 & 1 & 0 & -27 & -6 & -1 & 0 \\ 18 & 2 & 0 & 0 & -18 & -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= -1.25 \\
b_1 &= 7.5 \\
c_1 &= -10.75 \\
d_1 &= 0.5 \\
a_2 &= 0.625 \\
b_2 &= -9.375 \\
c_2 &= 39.875 \\
d_2 &= -50.125
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en nuestra función inicial, vemos que la spline cúbica para la tabla de datos dada, queda definida como sigue:

$$s(x) = \begin{cases} -1.25x^3 + 7.5x^2 - 10.75x + 0.5 & si \quad x \in [2,3] \\ 0.625x^3 - 9.375x^2 + 39.875x - 50.125 & si \quad x \in [3,5] \end{cases}$$

La gráfica correspondiente.



Prácticamente ni se nota que se trata de dos polinomios diferentes! Esto es debido a las condiciones que se impusieron sobre las derivadas de la función.

Error en la Interpolación

Una estimación del error se puede obtener si conocemos alguna información acerca de la función f y sus derivadas.

Error de Interpolación Polinómica

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y sea $f \in C^{n+1} \in [a,b]$ entonces, $\forall\ x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b)$con:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

Lo anterior representa el error cometido al evaluar $f(x)$ mediante el polinomio $P_n(x)$

Donde ξ está en el menor intervalo que contiene $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

Observe que la estructura del polinomio de aproximación es similar a la expansión de la serie de **Taylor** en el sentido de que se van agregando términos en forma secuencial, para mostrar el comportamiento de orden superior de la función. Estos términos son diferencias divididas finitas y, así, representan aproximaciones de las derivadas de orden superior. En consecuencia, como ocurrió con la serie de Taylor, si la función verdadera es un polinomio de *n*-ésimo grado, entonces el polinomio de interpolación de *n*-ésimo grado basado en *n* + 1 puntos darán resultados exactos.

También, como en el caso de la serie de Taylor, es posible obtener una formulación para el **error de truncamiento**. Recuerde que el error de truncamiento en la serie de Taylor se expresa en forma general:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Para que esta fórmula sea útil, la función en turno debe ser conocida y diferenciable. Por lo común éste no es el caso. Por fortuna, hay una formulación alternativa que no requiere del conocimiento previo de la función. Utilizándose una diferencia dividida finita para aproximar la (n + 1)-ésima derivada

$$\boldsymbol{R_n = f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}$$

Donde, $f(x_0, x_1, \dots, x_{n)}$ es la (n + 1)-ésima diferencia dividida finita.
Debido a que $f(x)$ no se conoce, no permite obtener el error. Sin embargo, si se tiene un dato más, $f(x_{n+1})$, puede usarse para estimar el error como sigue:

$$\boldsymbol{Rn = f\,[x_{n+1},\ x_n,\ x_{n-1},\ .\ .\ .,\ x_0]\ (x - x_0)\ (x - x_1)\cdot\ \cdot\ \cdot(x - x_n)}$$

Una consecuencia práctica de la forma del error es que hemos de tomar puntos próximos al punto x en que hemos de evaluar el polinomio. Normalmente, comenzamos con un polinomio de grado bajo, por ejemplo, la recta que pase por los dos puntos más próximos a x, y vamos añadiendo puntos por orden de proximidad y calculando polinomios de mayor grado, hasta alcanzar la precisión deseada.

Tenga en cuenta, que la derivada que aparece en la expresión anterior puede aproximarse a su vez por un cociente en diferencias, pues se tiene que

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}$$

Luego, para cierto η en el menor intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$.
Esta expresión sugiere una regla práctica para decidir qué polinomio interpola mejor cuando se tiene n+1 puntos:
Si en la tabla de diferencias divididas, los valores de la columna k, por ejemplo, son aproximadamente iguales y los de la columna k+1 son aproximadamente cero, el polinomio interpolador más adecuado es de grado k. La razón es que el error viene dado por diferencias divididas de la columna siguiente, k+1, que suponemos casi nulas.
Los productos que aparecen en la fórmula del error nos indican que éste puede ser muy grande si hay muchos puntos o si x no está muy próximo a ellos. Cuando x no está en el menor intervalo determinado por los nodos, estamos extrapolando, en lugar de interpolando

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ y sea $f \in C^{n+1} \in [a,b]$ entonces, $\forall\, x \in [a,b]\ \exists \xi(x) \in (a,b)$con:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Lo anterior representa el error cometido al evaluar $f(x)$ mediante el polinomio $P_n(x)$. Donde ξ está en el menor intervalo que contiene $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

EN OTRAS PALABRAS

También, como en el caso de la serie de Taylor, es posible obtener una formulación para el error de truncamiento. Recuerde que el error de truncamiento en la serie de Taylor se expresa en forma general:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Para que esta fórmula sea útil, la función en turno debe ser conocida y diferenciable

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_n}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|;\ \ x \in [a,b].$$

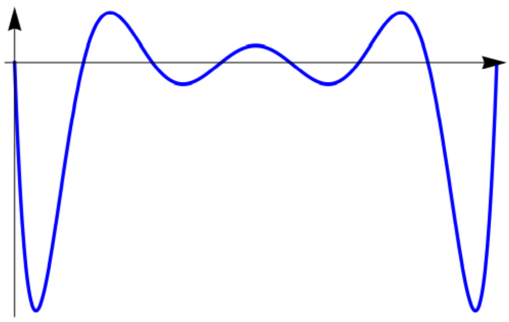
Que PASA SI NO SE CONOCE LA DERIVADA

Tenga en cuenta, que la derivada que aparece en la expresión anterior puede aproximarse a su vez por un cociente en diferencias, pues se tiene que

$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}]$ ES UNA APROXIMACION DE $\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$

Error con NODOS IGUALMENTE ESPACIADOS

Función $(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$



NOTA:

Georg Faber (1912) demostró que, para cada juego de nodos, existe una función continua para la cual los polinomios interpolantes no convergen uniformemente a f y también, para cada función continua existe un juego de nodos donde los polinomios interpolantes si convergen de manera uniforme. Aún en este último caso, los nodos no siempre fáciles de obtener.

ERROR EN INTERPOLACIÓN LINEAL CON NODOS IGUALMENTE ESPACIADOS.

Si tenemos dos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ con $x_0 < x_1$, el error es $f(x) - P_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2} f''(\xi(x))$. ¿Cuál es el error máximo si x está entre x_0 y x_1 y si f'' permanece acotada en $[x_0, x_1]$?.

$$|f(x) - P_1(x)| \le M_2 \frac{(x_1-x_0)^2}{8}.$$

INTERPOLACION CUADRATICA

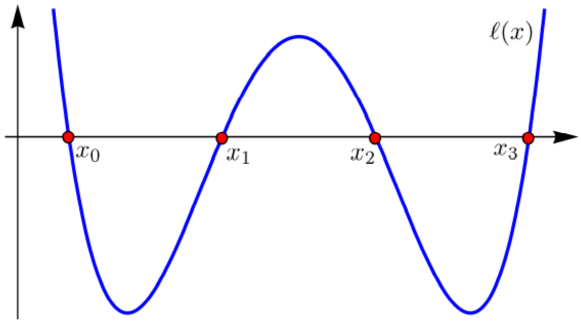
Si interpolamos con tres puntos ($n = 2$) igualmente espaciados x_0, $x_1 = x + h$ y $x_2 = x_0 + 2h$; entonces si $x \in [x_0, x_2]$ y si $|f'''(x)| \leq M_3$ en $[a, b]$, la estimación general del error es,

$$\begin{aligned} |f(x) - P_2(x)| &\leq \frac{M_3}{3!}|(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \\ &\leq \frac{M_3}{6}|(x - x_0)(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h)| \end{aligned}$$

$$|f(x) - P_2(x)| \leq \frac{M_3 h^3}{9\sqrt{3}}, \quad x \in [x_0, x_2].$$

INTERPOLACION CUBICA

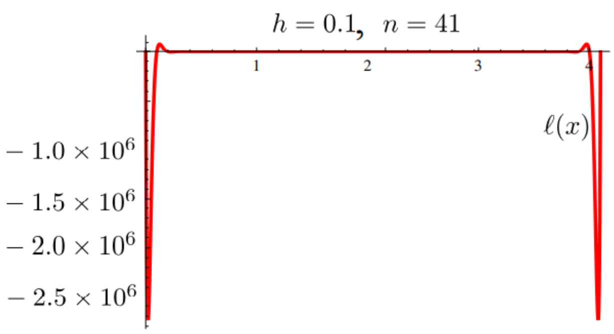
$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{M_4 h^4}{24}, \quad x \in [x_0, x_3]$$



$\ell(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

NOTA.

El comportamiento de la función: $(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$



TEOREMA:

la sucesión de polinomios interpolantes $\{P_n(x)\}$ podría converger a *f(X)* (sin importar si los nodos son o no igualmente espaciados); esto depende del comportamiento de la derivada *k−ésima* de *f*: La sucesión {Pn(x)} converge a *f* uniformente en [a,b] (que contiene a los nodos) si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(b-a)^k}{k!} M_k = 0$$

EN GENERAL

Supongamos que se tienen n+1 son nodos distintos de un intervalo finito [a,b]. Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolante. Si la n+1 derivada esta acotada por M para x en [a,b], se tiene que para $x* \in [a,b]$:

$$|f(x^*) - P_n(x^*)| \leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

EJEMPLO

cuando se realiza interpolación lineal para la función senx EL ERROR ES:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.002, x_2 = 0.004$$

$$|\operatorname{sen} x - P_1(x)| \leq 1 \cdot \left|\frac{(0.002)^2}{8}\right| = 0.5 \times 10^{-6}$$

cuando se realiza interpolación CUADRATICA para la función senx EL ERROR ES:

$$x_0 = 0, x_1 = 0.002, x_2 = 0.004$$

$$|\operatorname{sen} x - P_2(x)| \leq \frac{1 \cdot (0.01)^3}{9\sqrt{3}} \approx 6.415 \times 10^{-8},$$

Ejercicios

1. Dados los $n+1$ puntos distintos (x_i, y_i) el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es único

2. Construya un polinomio de gradi tres que pase por:
   $(0,10), (1,15), (2,5)$ y que la tangente sea igual a 1 en x_0

3. Construya un polinomio del menor grado que interpole una función $f(x)$ en los siguientes datos:
   $f(1) = 2; f(2) = 6; f'(1) = 3; f'(2) = 7; f''(2) = 8$

4. Con la función $f(x) = lnx$ construya la interpolación de diferencias divididas en $x_0 = 1; x_1 = 2$ y estime el error en $[1,2]$

6. Sea $f(x) = tanx$ utilice la partición de la forma $x_i = \delta k$ para implementar una interpolación para n=10 puntos y encuentre el valor δ que minimice el error

7. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo de $[0,1]$ utilice el método de lagrange y determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^{-5}. Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso? Verifique su respuesta

8 Sea $f(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$. Considere el conjunto de puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0,1,2,3}$ con $x_i = i \cdot \pi/2$. Estime el error *general* cometido al aproximar $f(3\pi/4)$ con $P_3(3\pi/4)$.

9 Sea $f(x) = \frac{x^6}{84} - \frac{3\cos(2x)}{8}$. Considere el conjunto de puntos $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=0,1,2,3}$ con $x_i = i \cdot 0.2$. Estime el error *general* cometido al aproximar $f(0.65)$ con $P_3(0.65)$.

10 Consideremos la siguiente tabla de datos,

x	$f(x)$
0.2	1.2
0.3	5.3
0.4	9.4
0.5	10.5

Calcule la forma modificada y la forma baricéntrica de Lagrange e interpole $f(0.35)$. **Ayuda:** Estas fórmulas permiten reutilizar los cálculos!

11. Considere la siguiente función de x, construya una tabla de la forma x, f(x) utilizando interpolación, cuál es el error cometido en x=2.5?

$$f(x) = \int_5^{\infty} \frac{e^{-t}}{t-x}\,dt, \quad \text{con} \quad -1 \le x \le 1$$

12.

Evaluar el error general, cuando se realiza interpolación cuadrática para la función senx en:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0.01,\ x_2 = 0.02, \ldots$$

13.

Escala de gravamen del Impuesto a la renta

Base imponible	Cuota íntegra	Tipo
4.410.000	1.165.978	38,86%
4.830.000	1.329.190	41,02%
5.250.000	1.501.474	43,18%
5.670.000	1.682.830	

La cuota íntegra del Impuesto sobre la Renta se determina aplicando una fórmula basada en la interpolación lineal. Un contribuyente tiene una base imponible de 5 millones. Para calcular lo que tiene que pagar a Hacienda efectúa las siguientes operaciones, consultando la escala de gravamen anterior:

Base	5.000.000		Cuota
Hasta	4.830.000		1.329.190
Resto....	170.000	al 41,02%	69.734
		SUMA	1.398.924

El tipo marginal del 41,02% que aparece en la escala de gravamen es precisamente el cociente de las diferencias entre las cuotas íntegras y las bases imponibles más próximas en la escala a los 5 millones.

$$\frac{1.501.474 - 1.329.190}{5.250.000 - 4.830.000} = 0.4102$$

La fórmula aplicada es, en definitiva,

Cuota = 1.329.190 + 0,4102(Base−4.830.000)

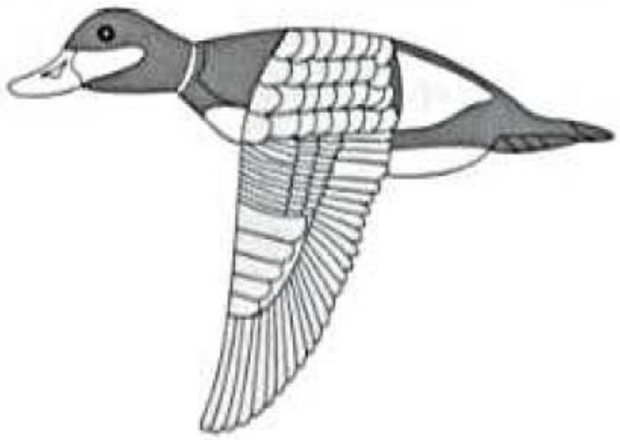
Para las bases comprendidas en el intervalo [4.830.000,5.250.000].

En particular, para una base imponible de 5.250.000 es indiferente aplicar la fórmula anterior o tomar directamente el valor de la tabla. En términos matemáticos esto equivale a decir que la Cuota es una función continua de la Base imponible.
El Impuesto sobre la Renta es progresivo, es decir, que el tipo de la imposición aumenta con la base imponible, como se comprueba observando la escala de gravamen. Así, el tipo medio correspondiente a 4.830.000 es el 27,52% y el de 5.250.000 es el 28,60%.

El contribuyente se siente perjudicado por el hecho de que al Resto de su Base imponible (170.000) se le aplica el mismo tipo marginal (41,02%) que, a otro contribuyente con una Base de 5.250.000, alegando que debe aplicársele el correspondiente a la base más próxima en la escala (4.830.000) que es del 38,86. Hacienda, por su parte, rechaza estos argumentos y efectúa la liquidación según sus normas. El sujeto del impuesto interpone recurso (tutela) ante el Tribunal competente, que considera en parte sus alegaciones. El fallo establece que en todo caso se debería aplicar un tipo marginal intermedio.

Como experto en temas fiscales debes elaborar un informe para que Hacienda conozca las diferencias entre el actual sistema impositivo y los posibles métodos de determinar la imposición correspondiente a la base de 5 millones por interpolación de segundo y tercer grado en la escala de gravamen.
¿En cada grado debe añadirse la base más próxima a 5 millones?

14. Dada la siguiente figura de un patito. Aplicar varios metodos que aproximen el perfil



15. Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0,1]$ tabular varios puntos y luego interpolar con el método de Lagrange, utilizando d=8 o mayores cifras decimales en cada entrada para determinar el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^{-6}