

# **Structure-Preserving Generative Models : Extreme Values, Order Statistics, and Diffusion Fine-Tuning**

by

**Jean Pachebat**

A thesis submitted in partial fulfillment  
of the requirements for the degree of  
Docteur de l’Institut Polytechnique de Paris

in

École Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH)  
Institut Polytechnique de Paris

28 novembre 2025

# **Abstract**

This thesis addresses [research problem].

[Brief context and motivation]

[Methodology summary]

[Key findings/results]

[Main conclusions and contributions]

[Impact/implications]

# Acknowledgments

I would like to express my sincere gratitude to...

[Supervisor(s)]

[Committee members]

[Colleagues and collaborators]

[Funding sources]

[Family and friends]

[Any other contributors]

# Table des matières

<b>Abstract</b>	i
<b>Acknowledgments</b>	ii
<b>List of Figures</b>	v
<b>List of Tables</b>	vi
<b>1 Introduction</b>	1
1.1 Context and Motivation . . . . .	1
1.2 Three Structural Regimes . . . . .	1
1.2.1 Extreme Values and Tail Dependence . . . . .	1
1.2.2 Order Statistics and Ranking Constraints . . . . .	1
1.2.3 Reward-Tilted Distributions and Model Fine-Tuning . . . . .	1
1.3 Generative Modeling Background . . . . .	1
1.3.1 Generative Adversarial Networks . . . . .	1
1.3.2 Diffusion and Score-Based Models . . . . .	1
1.3.3 Universal Approximation and Its Limits . . . . .	1
1.4 Contributions of This Thesis . . . . .	1
1.4.1 Heavy-Tailed GANs for Extreme Value Generation . . . . .	1
1.4.2 Generative Neural Order Statistics . . . . .	1
1.4.3 Gradient-Free Fine-Tuning of Diffusion Models . . . . .	1
1.5 Organization of the Manuscript . . . . .	1
<b>2 Introduction (Version française)</b>	2
2.1 Contexte et Motivation . . . . .	3
2.2 Trois Régimes Structurels . . . . .	3
2.2.1 Valeurs Extrêmes et Dépendance de Queue . . . . .	3
2.2.2 Statistiques d'Ordre et Contraintes de Rang . . . . .	3
2.2.3 Distributions Tilted et Réglage Fin de Modèles . . . . .	3
2.3 Contexte en Modélisation Générative . . . . .	3
2.3.1 Réseaux Antagonistes Génératifs (GANs) . . . . .	3

2.3.2	Modèles de Diffusion et Score . . . . .	3
2.3.3	Approximation Universelle et ses Limites . . . . .	3
2.4	Contributions de cette Thèse . . . . .	3
2.4.1	GANs à Queues Lourdes pour la Génération de Valeurs Extrêmes	3
2.4.2	Statistiques d'Ordre Génératives par Réseaux de Neurones . . .	3
2.4.3	Réglage Fin de Modèles de Diffusion sans Gradient . . . . .	3
2.5	Organisation du Manuscrit . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Heavy-Tailed GANs for Extreme Value Generation</b>	<b>4</b>
3.1	Introduction . . . . .	4
3.2	Background on Extreme Value Theory . . . . .	4
3.3	Heavy-Tailed GANs . . . . .	4
3.4	Approximation Theory . . . . .	4
3.5	Algorithm . . . . .	4
3.6	Experiments . . . . .	4
3.7	Conclusion . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Generative Neural Order Statistics</b>	<b>5</b>
4.1	Introduction . . . . .	5
4.2	Background on Order Statistics . . . . .	5
4.3	Neural Network Approximation of Order Statistics . . . . .	5
4.4	Practical Considerations . . . . .	5
4.5	Experiments . . . . .	5
4.6	Conclusion . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Gradient-Free Fine-Tuning of Diffusion Models</b>	<b>6</b>
5.1	Introduction . . . . .	6
5.2	Background on Diffusion Models . . . . .	6
5.3	The Fine-Tuning Challenge . . . . .	6
5.4	Iterative Tilting . . . . .	6
5.5	Theoretical Analysis . . . . .	6
5.6	Algorithm . . . . .	6
5.7	Experiments . . . . .	6
5.8	Conclusion . . . . .	6
<b>Supplementary Material</b>		<b>7</b>
.1	Additional Figures . . . . .	7
.2	Additional Tables . . . . .	7
.3	Research Instruments . . . . .	7

# Table des figures

# Liste des tableaux

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Context and Motivation

### 1.2 Three Structural Regimes

#### 1.2.1 Extreme Values and Tail Dependence

#### 1.2.2 Order Statistics and Ranking Constraints

#### 1.2.3 Reward-Tilted Distributions and Model Fine-Tuning

### 1.3 Generative Modeling Background

#### 1.3.1 Generative Adversarial Networks

#### 1.3.2 Diffusion and Score-Based Models

#### 1.3.3 Universal Approximation and Its Limits

### 1.4 Contributions of This Thesis

#### 1.4.1 Heavy-Tailed GANs for Extreme Value Generation

#### 1.4.2 Generative Neural Order Statistics

#### 1.4.3 Gradient-Free Fine-Tuning of Diffusion Models

### 1.5 Organization of the Manuscript



# Chapitre 2

## Introduction (Version française)

### 2.1 Contexte et Motivation

### 2.2 Trois Régimes Structurels

#### 2.2.1 Valeurs Extrêmes et Dépendance de Queue

#### 2.2.2 Statistiques d'Ordre et Contraintes de Rang

#### 2.2.3 Distributions Tilted et Réglage Fin de Modèles

### 2.3 Contexte en Modélisation Générative

#### 2.3.1 Réseaux Antagonistes Génératifs (GANs)

#### 2.3.2 Modèles de Diffusion et Score

#### 2.3.3 Approximation Universelle et ses Limites

### 2.4 Contributions de cette Thèse

#### 2.4.1 GANs à Queues Lourdes pour la Génération de Valeurs Extrêmes

#### 2.4.2 Statistiques d'Ordre Génératives par Réseaux de Neurones

#### 2.4.3 Réglage Fin de Modèles de Diffusion sans Gradient

### 2.5 Organisation du Manuscrit

# Chapter 3

## Heavy-Tailed GANs for Extreme Value Generation

3.1 Introduction

3.2 Background on Extreme Value Theory

3.3 Heavy-Tailed GANs

3.4 Approximation Theory

3.5 Algorithm

3.6 Experiments

3.7 Conclusion

# **Chapter 4**

## **Generative Neural Order Statistics**

**4.1 Introduction**

**4.2 Background on Order Statistics**

**4.3 Neural Network Approximation of Order Statistics**

**4.4 Practical Considerations**

**4.5 Experiments**

**4.6 Conclusion**

# Chapter 5

## Gradient-Free Fine-Tuning of Diffusion Models

5.1 Introduction

5.2 Background on Diffusion Models

5.3 The Fine-Tuning Challenge

5.4 Iterative Tilting

5.5 Theoretical Analysis

5.6 Algorithm

5.7 Experiments

5.8 Conclusion

# **Supplementary Material**

**.1 Additional Figures**

**.2 Additional Tables**

**.3 Research Instruments**