Análisis numérico
Proyecto final
Resolución de la ecuación de Laplace en 2D.

Jean Pierre Pacheco Avila

May 27, 2015

1 Introducción

La ecuacion de Laplace es una ecuación en derivadas parciales y puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

o también:

$$\bigtriangledown^2 u = 0$$

donde $\bigtriangledown^2$ es el operador de Laplace o laplaciano. Esta ecuación es de suma importancia ya que aparece en distintas ramas tales como astronomía, la electroestática, mecánica de fluidos, etc. Recibe el nombre en honor al físico y matemático Pierre-Simon Laplace.

2 Método de diferencias finitas

Para reesolver la ecuación necesitamos encontrar la función $u(x, y)$ que satisfaga la igualdad. Pero nosotros queremos resolverla de forma numérica, y además en esta ecuación aparecen las segundas derivadas, por lo que se usará el método de diferencias finitas para aproximar la solución.
Dado que nuestro dominio en este caso es un conjunto $D \subset R^2$, y el método de diferencias finitas requiere o hace uso de una partición del dominio, en este caso, necesitamos particionar tanto al eje X como al eje Y, por lo que la partición de nuestro dominio se verá como un rectangulo cuadriculado.

Si la longitud de las particiones en X e Y son $\triangle x$ y $\triangle y$ respectivamente, entonces podemos escribir la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

como sigue, usando la formula de diferencias finitas para aproximar la segunda derivada de u en cada punto (x_j, y_i) dentro de nuestro dominio obtenemos:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\triangle x)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\triangle y)^2} = 0$$

Si suponemos que $\triangle x = \triangle y$ entonces obtenemos la siguiente ecuacion:

$$-4u_{i,j} - u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

donde

$$u_{i,j} = u(x_j, y_i)$$

Así, obtendremos una ecuación por cada punto dentro del dominio discretizado, es decir, una ecuación para cada punto en nuestro rectángulo.

Si despejamos $u_{i,j}$ obtendremos:

$$u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4}$$

Lo cuál indica que el valor de la función $u(xj, yi)$ es un promedio de los puntos a su alrededor. Pero para encontrar todos estos valores debemos resolver un sistema de ecuaciones, un sistema de nxn donde $n = \#particionesenx * \#numerodeparticioneseny$

Un gráfico para una solución a la ecuación de Laplace en 2D es la siguiente:

3 Gráfico

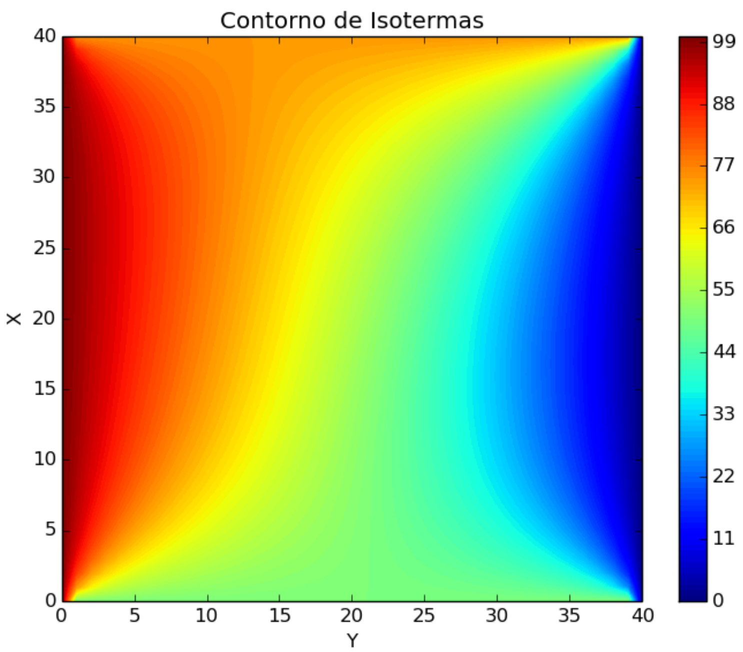

Figure 1: Ejemplo