

# Teoria da Decisão - Trabalho Computacional

Ítalo Andrade, João Pedro Araújo, Luiza Abreu e Vinícius Alves

**Abstract**—Neste trabalho, são aplicadas técnicas de tomada de decisão para escolha de uma ação a ser implementada, no contexto de otimização multiobjetivo. A partir de um conjunto de soluções eficientes, são comparados os métodos AHP (*Analytic Hierarchy Process*) e ELECTREE I (*Elimination Et Choix Tra- duisant la Réalité*) para determinar a solução mais adequada, levando em consideração quatro atributos.

**Index Terms**—Redes sem fio, teoria da decisão, otimização.

## I. INTRODUÇÃO

Redes locais sem fio (*wireless local area networks* ou WLAN) são redes de longa distância que utilizam ondas de rádio ao invés de utilizar cabos para realizar uma conexão. Nos últimos anos, houve uma crescente busca por mobilidade digital devido a utilização de dispositivos móveis integrados à internet que otimizam diferentes tipos de tarefas cotidianas. Nos dias atuais, a internet sem fio é essencial para que possamos pedir um *delivery*, chamar um *uber* e até mesmo manter contato com nossos amigos e familiares utilizando as redes sociais. Ambientes que disponibilizam serviço de internet sem fio passaram a ser mais atrativos para receber clientes e o estudo relacionado as redes sem fio passaram a receber maior atenção uma vez que se faz necessário atender aos usuários utilizando redes com baixo custo estrutural e de acesso.

Ao se tratar problemas relacionados a localização de pontos de acesso de redes WLAN, procura-se otimizar o desempenho, uma vez que o alcance do serviço está relacionado ao desempenho da rede, e diminuir o custo estrutural de instalação. A alocação excessiva de pontos de acesso (PAs) acaba gerando um alto custo de instalação muitas vezes desnecessário que poderia ser evitado se houvesse uma análise relacionada a localização ideal dos pontos de acesso que atende aos clientes de maneira satisfatória. A partir de um conjunto de soluções candidatas geradas por um algoritmo de otimização multiobjetivo, as técnicas de auxílio à tomada de decisão multicritério ELECTREE I e AHP são utilizadas para resolver o problema de incomparabilidade entre as ações implementáveis para determinar qual a melhor solução, dados os critérios envolvidos e a relação de importância entre eles.

## II. MÉTODOS DE AUXÍLIO À TOMADA DE DECISÃO

### A. Analytic Hierarchy Process (AHP)

O primeiro método utilizado, o AHP (Processo Hierárquico Analítico) foi proposto em na década de 1970 por Thomas Saaty. Desde então, tem sido usado em todo o mundo em uma ampla variedade de situações de decisão, em áreas como governo, negócios, indústria, saúde, construção naval e educação [4]. O método se sustenta em julgamentos feitos

por pessoas ligadas ao domínio do problema, responsáveis por estabelecer uma relação de importância entre os critérios usados na decisão [5]. A partir desse julgamento, o AHP realiza comparações par a par entre as alternativas, em tentativa de simular o processo de tomada de decisão humano. Assim como outros métodos pertencentes à Escola Americana, o AHP assume que decisor é plenamente racional e capaz de estabelecer sua preferência dado qualquer par de alternativas, bem como capaz de hierarquizar os atributos.

Primeiramente, são construídas matrizes de preferência, a partir da comparação par a par entre as soluções. Também é construída uma matriz de comparações entre critérios, a partir da definição de quais atributos são mais importantes (julgamento dos decisores *experts*). Para cada critério é construída uma matriz. A cada matriz de comparações é relacionado um vetor de prioridades, dado pelo autovetor direito principal:

$$Av = \lambda_{max}v$$

Esse vetor é frequentemente estimado usando a seguinte aproximação: normaliza-se as colunas da matriz de comparações em relação à soma dos elementos da coluna; faz-se a média dos elementos de cada linha após a normalização. A decisão é tomada após comparação das prioridades globais de cada alternativa. A prioridade global de uma alternativa  $a_i$  é dada por:

$$\sum_j^N c_j(a_i) \times P(c_j) \quad (1)$$

em que  $c_j(a_i)$  é a prioridade da alternativa  $a_i$  com relação ao critério  $c_j$ ,  $P(c_j)$  é a prioridade do critério  $c_j$  e  $N$  é o total de critérios.

### B. ELECTRE I

O método ELECTRE I foi proposto por [7], em 1968, e é utilizado como um método de tomada de decisão. Originário da escola francesa, propõe um procedimento para redução do conjunto de alternativas explorando o conceito de dominância. Este conceito é explorado pelo método através da avaliação das opções expostas à tomada de decisão a partir de dois critérios: O índice de concordância, que mede a vantagem relativa de cada alternativa sobre todas as outras e o índice de discordância que, por sua vez, mede a relativa desvantagem.

A metodologia seguida pelo ELECTRE I é apresentada a seguir [5].

- 1) Definição de pesos para cada critério considerado;
- 2) Comparação entre cada solução na qual se irá utilizar o método, a fim de se formar as matrizes  $J$  que contém elementos com as seguintes lógicas:

$$\bullet J^+(a_i, a_k) = j \in J | c_j(a_i) > c_j(a_k)$$

- $J^-(a_i, a_k) = j \in J | c_j(a_i) = c_j(a_k)$
- $J^+(a_i, a_k) = j \in J | c_j(a_i) < c_j(a_k)$

- 3) As relações das matrizes  $J$  são convertidas nas matrizes  $P$  que contém as informações de forma numérica.
- 4) É calculada a matriz de concordância que representa a soma das matrizes  $P^+$  e  $P^-$  divididas pela soma total dos pesos, o que, neste caso, esta soma é igual a 1.
- 5) É calculada a matriz de discordância:

$$D_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{se } J^-(a_i, a_k) = \emptyset \\ 0 & \delta_j \max(c_j(a_k) - c_j(a_i)), j \in J^+ - (a_i, a_k), c.c. \end{cases}$$

- 6) Por fim é feita a sobreclassificação seguindo o seguinte parâmetros:

$$a_i S a_k \Leftrightarrow \begin{cases} C_{ik} \geq \tau_c \\ D_{ik} \leq \tau_d \end{cases}$$

### III. APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

Para a tomada de decisão foram consideradas nove soluções candidatas, que foram obtidas a partir do problema de otimização multiobjetivo com duas funções objetivo: minimização do número de pontos de acesso e minimização da distância total entre cada ponto e os clientes atendidos por ele. A estimativa da fronteira Pareto do problema foi feita a partir da técnica da soma ponderada para resolver o problema multiobjetivo.

$$f(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

Variando os valores de  $w_1$  e  $w_2$ , pode-se obter um conjunto de soluções eficientes para o problema [3]. Após alguns testes, foram escolhidas 17 soluções, obtidas fazendo  $w_1$  variar de 0.1 até 0.9, com passo 0.05. Essas soluções foram escolhidas pois foi percebido que uma variação do peso fina demais, gerando mais soluções eficientes, geram soluções muito próximos umas das outras (redundantes). As soluções candidatas estão ilustradas na figura 1.

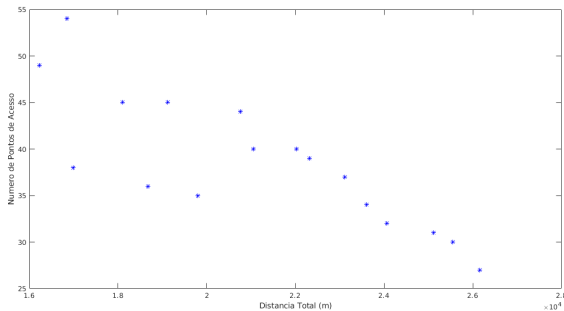


Fig. 1. Fronteira pareto no espaço de objetivos

Além dos dois atributos usados na resolução do problema de otimização, foram considerados mais dois para o problema de tomada decisão. São eles: o fator de cobertura da rede, isto é, a porcentagem de clientes atendidos pelos pontos de acesso e a máxima largura de banda sendo fornecida pelos

pontos. Esses dois atributos são importantes por representarem o alcance da rede na área de instalação e a existência de PA's muito carregados, o que pode gerar problemas de interferência e perda de pacotes. Os valores desses quatro critérios estão listados para as nove soluções candidatas na tabela III.

Num de PA	Distancia total	Fator de Cobertura	Máx largura de banda
27	26158	0.992	50.951
30	25542	0.992	56.205
31	25110	0.984	57.604
32	24058	0.99	67.259
34	23602	0.982	83.027
37	23108	0.992	56.149
39	22321	0.988	52.168
40	22019	0.998	42.681
40	21048	0.99	66.755
44	20754	0.996	47.2
35	19800	0.962	88.064
45	19115	0.978	58.936
36	18677	0.97	56.346
45	18106	0.97	60.11
38	16989	0.952	77.684
54	16849	0.986	66.861
49	16231	0.972	58.826

#### A. AHP

O AHP é um método comparativo que permite transformar avaliações empíricas em modelos matemáticos. Utilizando da Escala Saaty comparamos as importâncias dos critérios definidos, conforme mostra a tabela III-A.

	PA's	Dist	F. Cobertura	Máx banda
PA's	1	5	7	9
Dist	0.2	1	3	7
F.Cobertura	0.142	0.33	1	5
Máx. Banda	0.111	0.33	0.2	1

TABLE I  
TABELA DE CRITÉRIOS AHP

Normalizamos as colunas para os critérios ficarem na mesma escala, como a tabela III-A.

Sol/Crit	PA's	Dist	F. Cobertura	Máx banda
Num PA	0,688	0,750	0,625	0,409
Distância	0,138	0,150	0,268	0,318
F.Cobertura	0,098	0,050	0,089	0,227
Máx. Banda	0,076	0,050	0,018	0,045

TABLE II  
TABELA DE CRITÉRIOS AHP NORMALIZADA

A média das linhas de cada critério nos resulta no vetor prioridade dos critérios em relação ao objetivo:

$$\text{Vetor Prioridade} = [0.618 ; 0.2184 ; 0.1162 ; 0.0474]$$

Com o vetor de prioridades do critério em relação ao objetivo gerado, todas as soluções candidatas sofrem o mesmo processo de normalização dos resultados. A tabela III-A mostra os resultados de prioridade de cada solução após a normalização.

Sol/Crit	PAs	Dist	F. Cobertura	Máx banda
1	0.041	0.072	0.026	0.048
2	0.045	0.071	0.026	0.053
3	0.047	0.069	0.052	0.055
4	0.048	0.066	0.032	0.064
5	0.051	0.065	0.058	0.079
6	0.056	0.064	0.026	0.053
7	0.059	0.062	0.039	0.049
8	0.060	0.061	0.006	0.040
9	0.060	0.058	0.032	0.063
10	0.067	0.057	0.013	0.045
11	0.053	0.055	0.124	0.084
12	0.068	0.053	0.071	0.056
13	0.054	0.051	0.098	0.053
14	0.068	0.050	0.098	0.057
15	0.057	0.047	0.156	0.074
16	0.082	0.046	0.045	0.063
17	0.074	0	0.091	0.056

TABLE III

TABELA SOLUÇÕES/CRITÉRIOS NORMALIZADA AHP

O resultado para tomada de decisão é feito através da soma das multiplicações de prioridade dos critérios, em relação ao objetivo, pelas prioridades dos critérios, em relação a solução. A tabela III-A exibe a prioridade do objetivo em ordem decrescente, isto é, o menor valor tem maior prioridade.

Sol/Crit	PAs	Dist	F. Cobertura	Máx banda	Objetivo
1	0,025	0,016	0,003	0,002	0,047
2	0,028	0,016	0,003	0,003	0,049
3	0,029	0,015	0,006	0,003	0,053
4	0,030	0,015	0,004	0,003	0,052
5	0,032	0,014	0,007	0,004	0,057
6	0,035	0,014	0,003	0,003	0,054
7	0,037	0,014	0,005	0,002	0,057
8	0,038	0,013	0,001	0,002	0,054
9	0,038	0,013	0,004	0,003	0,057
10	0,041	0,013	0,002	0,002	0,058
11	0,033	0,012	0,014	0,004	0,063
12	0,042	0,012	0,008	0,003	0,065
13	0,034	0,011	0,011	0,003	0,059
14	0,042	0,011	0,011	0,003	0,068
15	0,036	0,010	0,018	0,004	0,068
16	0,051	0,010	0,005	0,003	0,069
17	0,046	0,010	0,011	0,003	0,069

TABLE IV

TABELA SOLUÇÕES/RESULTADO AHP

### B. Electre I

O método Electre I foi utilizado para tomada de decisão do problema discutido neste artigo. Para que pudesse ser feita a comparação utilizou-se uma escala para parametrizar os valores de acordo com  $\delta_j = 10$ . A matriz escalada é apresentada em V.

Os pesos utilizados foram os calculados a partir do vetor prioridade do método AHP. Assim, tem-se:

Vetor Prioridade = [0.618 ; 0.2184 ; 0.1162 ; 0.0474]

Sol/Critério	Num de PA	Distancia	F. Cobertura	Máx largura de banda
1	0	10	1.3043	1.8223
2	1.1111	9.3798	1.3043	2.98
3	1.4815	8.944	3.0435	3.2883
4	1.8519	7.8845	1.7391	5.4157
5	2.5926	7.4247	3.4783	8.8901
6	3.7037	6.9274	1.3043	2.9677
7	4.4444	6.135	2.1739	2.0905
8	4.8148	5.8304	0	0
9	4.8148	4.8527	1.7391	5.3047
10	6.2963	4.5559	0.43478	0.99573
11	2.963	3.5954	7.8261	10
12	6.6667	2.9054	4.3478	3.5817
13	3.3333	2.4642	6.087	3.011
14	6.6667	1.8888	6.087	3.8404
15	4.0741	0.76412	10	7.7128
16	10	0.6227	2.6087	5.3281
17	8.1481	0	5.6522	3.5574

TABLE V

TABELA SOLUÇÕES/CRITÉRIOS NA ESCALA DE 0 A 10

O segundo passo do processo faz a comparação das soluções a fim de se construir a matriz  $Z$ . Para simplificação gerou-se as matrizes  $P$  correspondentes e são apresentadas em VI, VII e VIII.

Sol	1	2	3	...	15	16	17
1	0	0,2184	0,2184	...	0,2184	0,2184	0,2184
2	0,6654	0	0,2184	...	0,2184	0,2184	0,2184
3	0,7816	0,7816	0	...	0,2184	0,3346	0,2184
...	...	...	...	...	...	...	...
15	0,7816	0,7816	0,7816	...	0	0,382	0,382
16	0,7816	0,7816	0,6654	...	0,618	0	0,8838
17	0,7816	0,7816	0,7816	...	0,618	0,1162	0

TABLE VI

MATRIZ  $P^+$ 

Sol	1	2	3	...	15	16	17
1	0	0,1162	0	...	0	0	0
2	0,1162	0	0	...	0	0	0
3	0	0	0	...	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...
15	0	0	0	...	0	0	0
16	0	0	0	...	0	0	0
17	0	0	0	...	0	0	0

TABLE VII

MATRIZ  $P^-$ 

Sol	1	2	3	...	15	16	17
1	0	0.6654	0.7816	...	0.7816	0.7816	0.7816
2	0.2184	0	0.7816	...	0.7816	0.7816	0.7816
3	0.2184	0.2184	0	...	0.7816	0.6654	0.7816
...	...	...	...	...	...	...	...
15	0.2184	0.2184	0.2184	...	0	0.6180	0.6180
16	0.2184	0.2184	0.3346	...	0.3820	0	0.1162
17	0.2184	0.2184	0.2184	...	0.3820	0.8838	0

TABLE VIII

MATRIZ  $P^-$ 

A partir das matrizes  $P$  apresentadas e seguindo a metodologia do Electre I, calculou-se as matrizes de concordância,

IX, e discordância, X.

Sol	1	2	3	...	15	16	17
1	$\emptyset$	0.3346	0.2184	...	0.2184	0.2184	0.2184
2	0.7816	$\emptyset$	0.2184	...	0.2184	0.2184	0.2184
3	0.7816	0.7816	$\emptyset$	...	0.2184	0.3346	0.2184
...	...	...	...	...	...	...	...
15	0.7816	0.7816	0.7816	...	$\emptyset$	0.382	0.382
16	0.7816	0.7816	0.6654	...	0.618	$\emptyset$	0.8838
17	0.7816	0.7816	0.7816	...	0.618	0.1162	$\emptyset$

TABLE IX  
MATRIZ CONCORDANCIA

Sol	1	2	3	...	15	16	17
1	$\emptyset$	0.0579	0.087	...	0.4348	0.5000	0.4074
2	0.031	$\emptyset$	0.087	...	0.4348	0.4444	0.3519
3	0.0528	0.0218	$\emptyset$	...	0.3478	0.4259	0.3333
...	...	...	...	...	...	...	...
15	0.4618	0.4308	0.4090	...	$\emptyset$	0.2963	0.2037
16	0.4689	0.4379	0.4161	...	0.3696	$\emptyset$	0.1522
17	0.5000	0.4690	0.4472	...	0.2174	0.0926	$\emptyset$

TABLE X  
MATRIZ DISCORDANCIA

Os limiares de concordância e discordância foram calculados utilizando a ideia de umbral de comparação [8]. Eles podem ser calculados da seguinte maneira:

$$\tau_c = \frac{\sum_i \sum_j c_{ij}}{n(n-1)}$$

$$\tau_d = \frac{\sum_i \sum_j d_{ij}}{n(n-1)}$$

No caso das matrizes calculadas, tiveram-se  $\tau_c = 0.5067$  e  $\tau_d = 0.2285$

#### IV. RESULTADOS

A análise dos resultados gerados pelo método AHP confirmam a prioridade do critério de números de PA's, mas considera de forma relevante os fatores de distância total e fator de cobertura para soluções que apesar do bom número de PA's utilizadas, tem algum desses critérios muito abaixo das soluções candidatas, como a solução 13.

Os resultados obtidos com aplicação do método ELECTRE I foi condizente aos pesos utilizados, pois seu ranking prioriza mais o número de PAs do que os outros critérios, o que justifica o aparecimento das primeiras soluções no topo do ranking. No entanto, o algoritmo faz a sobreclassificação considerando a dominância por uma solução dos critérios em relação a outra e a não dominância de outras soluções em relação a ela mesma, assim, é possível aparecer soluções cujo critério de maior peso não seja crucial para a classificação desta nas primeiras posições. A solução 13, por exemplo, apareceu em primeiro lugar e não possui o menor número de PAs, mas ela possui o saldo de dominância (número de soluções dominadas por ela

menos número de soluções que a dominam) maior do que as demais.

Apesar desta discrepância, os métodos tiveram uma classificação semelhante das soluções.

Sol	Rank AHP	Rank ELECTRE I
1	1	13
2	2	1
3	4	2
4	3	3
5	8	4
6	6	6
7	5	15
8	7	11
9	9	8
10	10	7
11	13	10
12	11	5
13	12	17
14	14	14
15	15	12
16	17	9
17	16	16

TABLE XI  
RESULTADO COMPARATIVO DOS MÉTODOS

#### V. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

A partir da tabela de comparação entre os métodos AHP e ELECTRE, pode-se ver que ambos chegaram em resultados semelhantes. Como o critério de número de PA's recebeu o maior peso, soluções com menos pontos de acesso (soluções 1, 2, 3 e 4) são as preferidas pelos dois métodos. Interessante notar que a solução escolhida como a melhor pelo ELECTRE é a solução 13, com 36 pontos de acesso. Apesar de possuir mais pontos do que a solução 1, por exemplo (9 pontos a mais), a solução 13 é consideravelmente melhor no quesito distância total, com mais de 7000 metros a menos. Pode-se, portanto, considerá-la uma solução muito boa, já que essa diferença pode significar uma qualidade de sinal melhor, o que compensaria a instalação de mais nove pontos de acesso.

O peso dado aos critérios influencia fortemente os resultados. Isso significa que a definição dos critérios, bem como a definição de quais são os mais importantes é parte fundamental do processo de tomada de decisão, processo que não é integralmente matemático e depende da subjetividade dos decisores. Daí a importância do julgamento de de s res que conheçam profundamente o domínio do problema.o

#### REFERENCES

- [1] LIMA, M.; CARRANO, E.; TAKAKAHASHI, R. Planejamento multi-critério deredes wlans uilizando algoritmos genéticos. Technical Report, UFMG, 2010.
- [2] Martins, F. V. C. (2009), Heurísticas Mono e Multiobjetivo para o problema de cobertura e conectividade de redes de Seniores sem Fio planas. Dissertação de mestrado, Dep. de Engenharia Elétrica, UFMG.
- [3] Marler, R. Timothy, and Jasbir S. Arora. "The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights." Structural and multidisciplinary optimization 41.6 (2010): 853-862.
- [4] O que é AHP ou Processo Hierárquico Analítico? disponível em <https://www.fm2s.com.br/o-que-e-ahp/>
- [5] de Souza Batista, LUCAS. Processo Analítico Hierárquico Analytic Hierarchy Process (AHP). Notas de aula.
- [6] de Souza Batista, LUCAS. Teoria da Decisão Métodos Baseados em Relações de Sobreclassificação. Notas de aula.

- [7] ROY, B. Classement et choix en presence de points de vue multiples (la methode ELECTRE). Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, v. 2, n. 1, p. 57-75, 1968.
- [8] Vianna Soares, DALESSANDRO. Auxílio Multicritério À Decisão. Notas de aula.