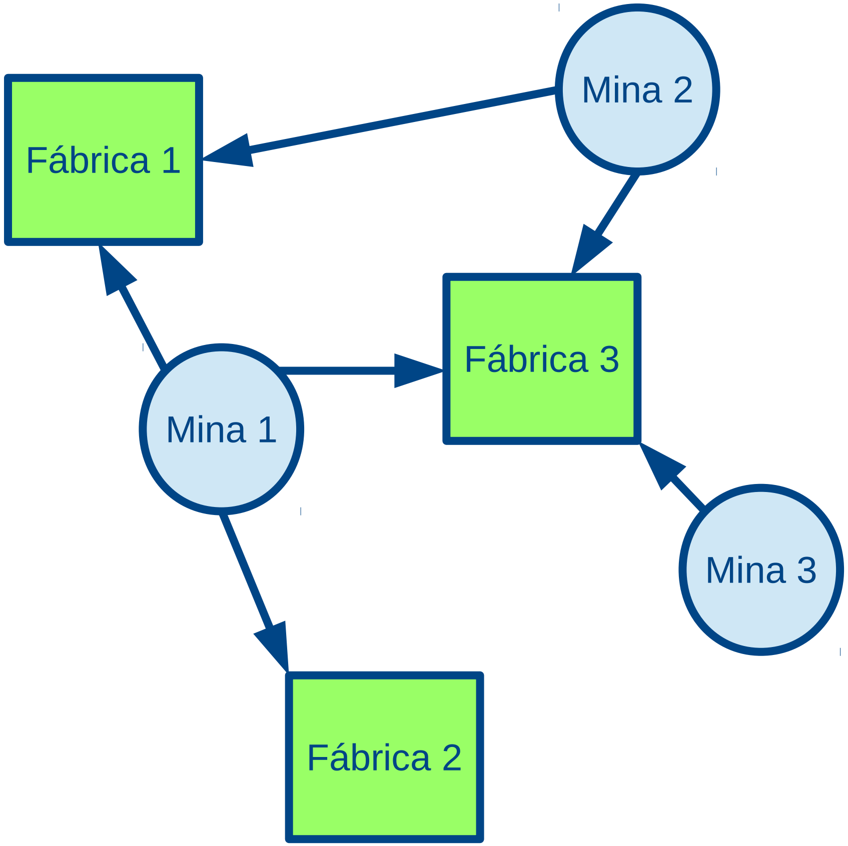
Pesquisa Operacional

Aula 2: Programação linear: modelagem



Professor: Vinicius Mariano Gonçalves

Programação linear

- Problemas do tipo

minimize $c^T x$ sujeito a $Ax \leq b$

- Ou, explicitando os vetores e matrizes

$$min \; [c_1 \; c_2 \ldots \; c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$sujeito\, a \; \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Lembrete

- Problemas de maximização podem ser transformados em problemas de minimização: max $c^T x$ pode ser trocado por min $-c^T x$;

- Se for interessante saber o valor da função objetivo, lembre-se que você calculou $v_{ot} = -c^T x$, então para obter o valor ótimo de $c^T x$ você tem que trocar o sinal;

Lembrete

- Toda desigualdade do tipo

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n \geq b_1$$

pode ser escritas com desigualdades ≤ multiplicando por -1;

$$-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3-...-a_nx_n \leq -b_1$$

- Toda igualdade do tipo

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n = b_1$$

pode ser escritas como duas desigualdades;

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_nx_n \leq b_1$$
$$-a_1x_1-a_2x_2-a_3x_3-...-a_nx_n \leq -b_1$$

Convexidade da Programação Linear

- Função objetivo: $f(x) = c^T x$, convexa, para toda escolha de c;

- Restrições: $g(x) = Ax\text{-}b \leq 0$, convexa (polígono convexo);

- Problemas de programação linear (PL, doravante) são problemas de otimização convexos!

- De fato, todo problema de otimização convexa pode ser aproximado por um PL;

Modelagem em PL

- Saber modelar problemas de otimização como um modelo de PL é uma das técnicas mais aplicáveis de Pesquisa Operacional;

- PL consegue modelar uma ampla gama de problemas, mas tem limitações;

- De toda forma, o aprendizado de modelagens para PL será util para escrever modelos mais complexos no futuro;

Modelagem em PL

- Etapas de modelagem:

Quais são as variáveis de decisão do problema?

Qual é a função objetivo, e como ela pode ser escrita usando as variáveis de decisão?

Quais são as restrições, e como elas podem ser escritas usando as variáveis de decisão?

O problema da plantação

O problema da plantação

- Uma fazenda de 50 alqueires produz soja e milho. Também tem disponível 20000 kg de fertilizante e 15000 kg de pesticida;

- Cada tonelada de soja plantada consome 0.1 alqueires, 50kg de fertilizantes e 10kg de pesticida. Cada tonelada dá um lucro de 380R$;

- Cada tonelada de milho plantado consome 0.2 alqueires, 30kg de fertilizantes e 15kg de pesticida. Cada tonelada dá um lucro de 490R$;

- Quantas toneladas de cada grão deve ser plantada?

O problema da plantação

- Variáveis de decisão: s a quantidades de soja e m a quantidade de milho, ambos em toneladas

$$\max \; 380s + 490m$$

$$\text{sujeito a}$$

$$0.1s + 0.2m \leq 50$$

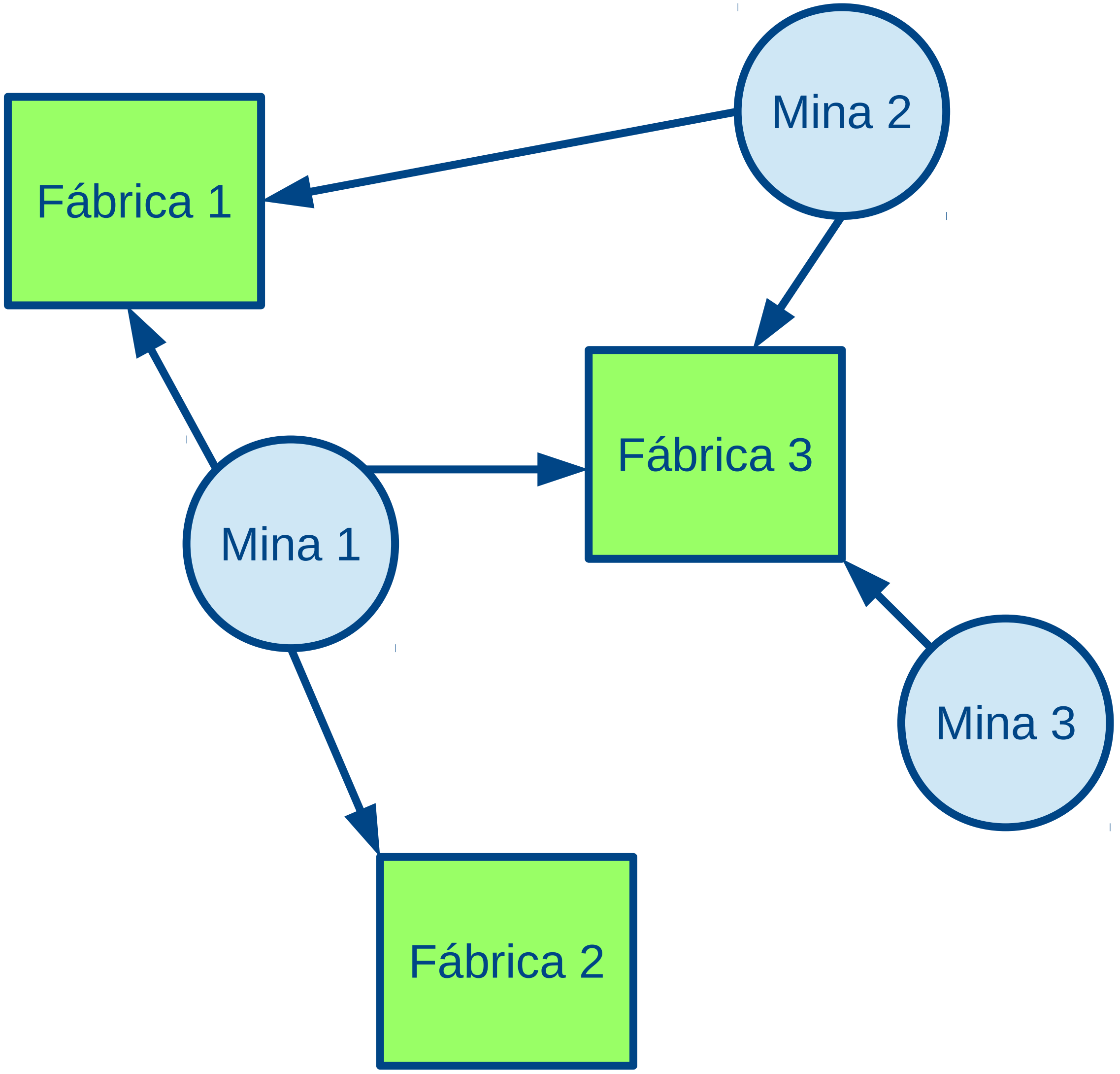
$$50s + 30m \leq 20000$$

$$10s + 15m \leq 15000$$

$$s, m \geq 0$$

>Modelagem em PL

O problema dos produtores/consumidores



O problema dos produtores/consumidores

- Temos N minas (i=1,2,...,N) e M indústrias (j=1,2,...,M);
- Cada mina tem uma produção máxima p_i (em ton) de carvão;
- Cada indústria tem uma demanda mínima d_j (em ton) de carvão;
- Há um custo c_{ij}, em R$/ton, para transportar da mina i para indústria j;
- Como fazer o transporte com o menor custo?

O problema dos produtores/consumidores

- Variáveis de decisão: x_{ij}, quanto será enviado, em ton, da mina i para a indústria j;

$$min \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} x_{ij}$$

$$sujeito\ a$$

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} \leq p_i \ , \ \forall \ i=1,2,\ldots,N$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \geq d_j \ , \ \forall \ j=1,2,\ldots,M$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ \forall \ i=1,2,\ldots,N \ , \ j=1,2,\ldots,M$$

O problema da distribuição de carga

O problema da distribuição de carga

- Em um avião, temos três compartimentos: frontal, central e traseiro. Cada um deles tem uma capacidade em peso e volume de acordo com a tabela a seguir:

	Frontal (1)	Central (2)	Traseiro (3)
Peso (t)	10	16	8
Volume (m^3)	6800	8700	5300

- Temos também três cargas diferentes, com seus pesos, densidades e valores como a seguir:

	Den (m^3/t)	Peso (t)	Valor (R$/t)
Carga 1	480	18	310
Carga 2	650	15	380
Carga 3	580	23	350

O problema da distribuição de carga

- Podemos pegar uma fração de cada carga e colocar em um dos compartimentos;

- Por questão de balanço, o peso em cada compartimento deve ser tal que a proporção com o peso máximo se mantenha;

- Qual a distribuição de carga que maximiza o valor?

O problema da distribuição de carga

- Variável de decisão: x_{ij}, o quanto, em ton, da carga i vai para o compartimento j

$$max\ \ 310\left(x_{11}+x_{12}+x_{13}\right)+380\left(x_{21}+x_{22}+x_{23}\right)+350\left(x_{31}+x_{32}+x_{33}\right)$$

sujeito a

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}\leq 18 \qquad 480x_{11}+650x_{21}+580x_{31}\leq 6800 \qquad x_{11}+x_{21}+x_{31}\leq 10$$

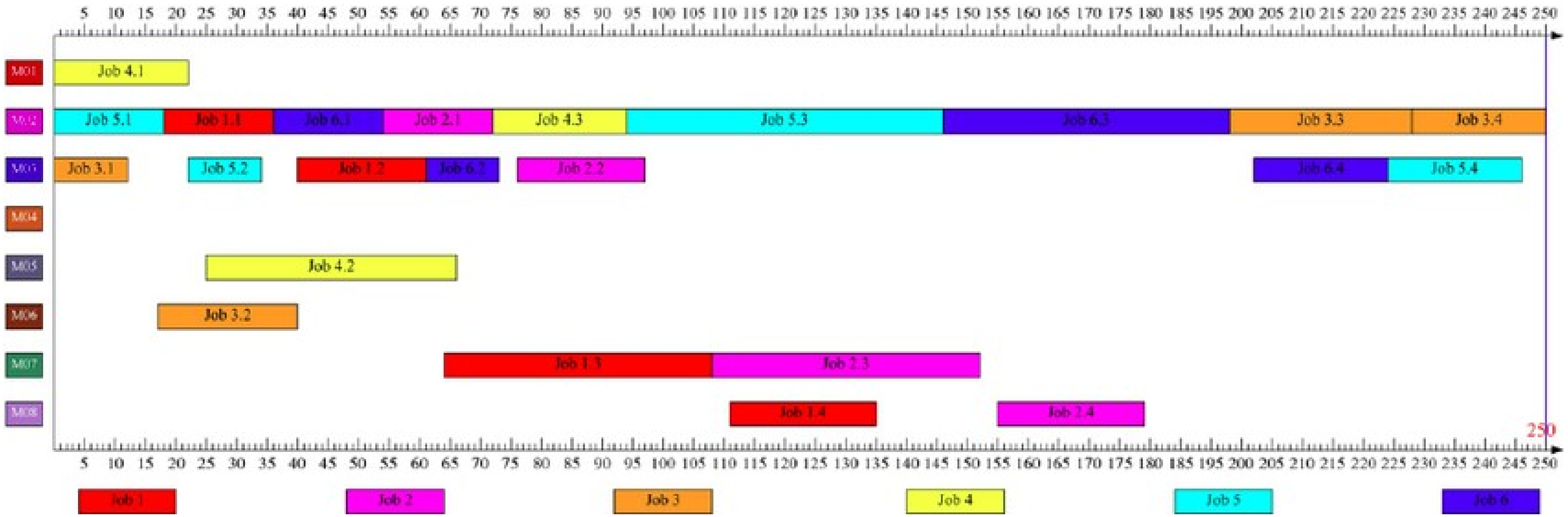
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}\leq 15 \qquad 480x_{12}+650x_{22}+580x_{32}\leq 8700 \qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}\leq 16$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}\leq 23 \qquad 480x_{13}+650x_{23}+580x_{33}\leq 5300 \qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}\leq 8$$

$$\frac{x_{11}+x_{21}+x_{31}}{10}=\frac{x_{12}+x_{22}+x_{32}}{16}=\frac{x_{13}+x_{23}+x_{33}}{8}$$

>Modelagem em PL

O problema do “Makespan”



O problema do "Makespan"

- Temos três trabalhadores, a, b e c, e três trabalhos, A, B e C. Podemos atribuir uma parcela de cada tarefa para cada trabalhador, de modo que um mesmo trabalhador pode se empenhar em mais de uma tarefa e uma tarefa pode ser resolvida por mais de um trabalhador;

- Um ônibus entrega os trabalhadores na empresa as 0h de um dia, e ficará esperando até que todos os trabalhadores tenham terminado o trabalho. O ônibus cobra 50 R$/h que ficará esperando;

O problema do “Makespan”

•Considere a tabela a seguir, que dá a relação (completude da tarefa)/(hora trabalhada) para cada par de trabalhador e tarefa;

	Trab. a	Trab. b	Trab. c
Tarefa A	10%/h	15%/h	8%/h
Tarefa B	12%/h	10%/h	10%/h
Tarefa C	14%/h	8%/h	20%/h

•Como atribuir as tarefas a cada trabalhador de modo a gastar o menos possível com o ônibus, ou equivalentemente, o menor tempo possível para realizar a tarefa (minimizar o makespan)?

>Modelagem em PL

O problema do “Makespan”

	Trab. a	Trab. b	Trab. c
Tarefa A	10%/h	15%/h	8%/h
Tarefa B	12%/h	10%/h	10%/h
Tarefa C	14%/h	8%/h	20%/h

- Seja t_{ij} o tempo que o trabalhador i gasta na tarefa j, e T_i o tempo que o trabalhador i termina de trabalhar. Suponha que o tempo comece em 0;

O problema do “Makespan”

	Trab. a	Trab. b	Trab. c
Tarefa A	10%/h	15%/h	8%/h
Tarefa B	12%/h	10%/h	10%/h
Tarefa C	14%/h	8%/h	20%/h

- Seja t_{ij} o tempo que o trabalhador i gasta na tarefa j, e T_i o tempo que o trabalhador i termina de trabalhar. Suponha que o tempo comece em 0;

$$min \; 50 \, max(T_a, T_b, T_c)$$

$$sujeito \; a$$

$$10 t_{aA} + 15 t_{bA} + 8 t_{cA} = 100 \qquad T_a = t_{aA} + t_{aB} + t_{aC}$$

$$12 t_{aB} + 10 t_{bB} + 10 t_{cB} = 100 \qquad T_b = t_{bA} + t_{bB} + t_{bC}$$

$$14 t_{aC} + 8 t_{bC} + 20 t_{cC} = 100 \qquad T_c = t_{cA} + t_{cB} + t_{cC}$$

Todas as variáveis não negativas

O problema do “Makespan”

- Não é um problema de PL pois a função objetivo não é linear...

$$\boxed{min\ \ 50\, max\left(T_a, T_b, T_c\right)}$$

$$sujeito\ \ a$$

$$10\, t_{aA} + 15\, t_{bA} + 8\, t_{cA} = 100 \qquad T_a = t_{aA} + t_{aB} + t_{aC}$$

$$12\, t_{aB} + 10\, t_{bB} + 10\, t_{cB} = 100 \qquad T_b = t_{bA} + t_{bB} + t_{bC}$$

$$14\, t_{aC} + 8\, t_{bC} + 20\, t_{cC} = 100 \qquad T_c = t_{cA} + t_{cB} + t_{cC}$$

Todas as variáveis não negativas

Técnica de linearização I

- Podemos linearizar de maneira exata qualquer termo de uma função objetivo de minimização da forma

$$h\,max\left(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x\right)$$

em que c_i^T são vetores e $h>0$, ambos constantes. Basta substituir o termo acima na f.obj por uma nova variável V e colocar a restrição

$V \geq h\,max\left(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x\right)$ ou, equivalentemente

$V \geq h c_j^T x \quad j = 1,2,\ldots, m$

Técnica de linearização I

- Isso é possível pois a função $h\,max(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x)$, para h>0, é convexa e linear por partes;

- O termo V não é igual a $h\,max(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x)$, mas sim maior ou igual que. Mas como o problema é de minimização, obviamente na solução ótima teremos igualdade;

Técnica de linearização I

- Não é possível linearizar

$$h\,min\left(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x\right)$$

para h>0 em um problema de minimização, pois a função $h\,min\left(c_1^T x, c_2^T x, \ldots, c_m^T x\right)$, para h>0, não é convexa;

- Trataremos este problema em outra ocasião;

O problema do “Makespan”

- Problema agora é um PL;

$$min\ \ 50T$$

$$sujeito\ \ a$$

$$10t_{aA}+15t_{bA}+8t_{cA}=100$$
$$12t_{aB}+10t_{bB}+10t_{cB}=100$$
$$14t_{aC}+8t_{bC}+20t_{cC}=100$$
$$T\geq T_a\ ,\ T\geq T_b\ ,\ T\geq T_c$$

$$T_a=t_{aA}+t_{aB}+t_{aC}$$
$$T_b=t_{bA}+t_{bB}+t_{bC}$$
$$T_c=t_{cA}+t_{cB}+t_{cC}$$

Todas as variáveis não negativas

>Modelagem em PL

O problema do estoque

O problema do estoque

- Temos uma fazenda que produz um determinado grão, e um armazém que os armazena;
- O planejamento de produção é feito decidindo quanto será produzido (em toneladas) de grãos por mês. Também, para cada mês i, temos uma demanda d_i (em ton), que é sabida a priori;
- O custo para produzir grãos é variável: p_i (R$/t) no mês i, conhecidos a priori;
- Há um estoque ótimo e_{otm} . Desviar, para cima ou para baixo, desse estoque implica pagar por um mês um custo q (R$/t) por tonelada desviada. No final de cada mês, adiciona-se no estoque a quantidade produzida e retira-se a quantidade demandada;

O problema do estoque

- O estoque inicial é e_{init}, a produção máxima por mês x_{max};

- Finalmente, de um mês para o outro 10% da quantidade de grãos é perdida;

- Problema: decidir o quanto será produzido em cada mês, atendendo a demanda e minimizando o custo (produção+estoque);

- Planejamento para N meses;

O problema do estoque

- Variável de decisão: x_i, o quanto será produzido de grãos no mês i (em toneladas) e e_i, o estoque no final do mês i;

$$min \sum_{i=1}^{N} p_i x_i + q|e_i - e_{otm}|$$

$$sujeito\ a$$

$$e_0 = e_{init}$$

$$e_i = 0.9 e_{i-1} + x_i - d_i \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$x_i \leq x_{max} \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

Todas variáveis não negativas;

>Modelagem em PL

O problema do estoque

- Variável de decisão: x_i, o quanto será produzido de grãos no mês i (em toneladas) e e_i, o estoque no final do mês i;

$$min \sum_{i=1}^{N} p_i x_i + \boxed{q|e_i - e_{otm}|}$$

$$sujeito \ a$$

$$e_0 = e_{init}$$

$$e_i = 0.9 e_{i-1} + x_i - d_i \ , \ \forall \ i = 1,2,\ldots, N$$

$$x_i \leq x_{max} \ , \ \forall \ i = 1,2,\ldots, N$$

Todas variáveis não negativas;

- Modelo não linear;

Técnica de linearização II

- Note que $|p| = \max(p,-p)$;

- Então, toda vez que tivermos um termo do tipo $h|c^T x+d|$ na função objetivo de minimização com $h>0$, podemos usar a técnica de linearização I;

O problema do estoque

- Variável de decisão: x_i, o quanto será produzido de grãos no mês i (em toneladas) e e_i, o estoque no final do mês i;

$$min \sum_{i=1}^{N} p_i x_i + q\, y_i$$

$$sujeito\ a$$

$$e_0 = e_{init}$$

$$e_i = 0.9\, e_{i-1} + x_i - d_i \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$x_i \leq x_{max} \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$y_i \geq e_i - e_{opt} \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$y_i \geq e_{opt} - e_i \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

Todas variáveis não negativas;

O problema do estoque

- É possível eliminar as variáveis de estoque e_i. Como isso poderia ser feito?

$$min \sum_{i=1}^{N} p_i x_i + q\, y_i$$

$$sujeito\ \ a$$

$$e_0 = e_{init}$$

$$e_i = 0.9\, e_{i-1} + x_i - d_i \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$x_i \leq x_{max} \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$y_i \geq e_i - e_{opt} \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

$$y_i \geq e_{opt} - e_i \ , \ \forall\ i = 1,2,\ldots,N$$

Todas variáveis não negativas;

O problema da mistura de carvão

O problema da mistura de carvão

- Deseja-se fazer a mistura de N carvões disponíveis, totalizando T toneladas;

- Cada carvão i tem as seguintes propriedades:

Cinza (a_i, em kg/t), Enxofre (b_i, em kg/t), Fe_2O_3 (c_i, em kg/t), Preço (p_i, em R$/t) e CSR ($h_i$, medido em pts/t);

- Temos ainda uma quantidade q_i máxima de cada carvão e limites máximos e mínimos para Cinza, Enxofre e Fe_2O_3 (a_{max},a_{min},b_{max},b_{min},c_{max},c_{min}, respectivamente), todas em kg/t;

- Objetivo: minimizar o custo/benefício=custo/CSR;

O problema da mistura de carvão

- Variáveis de decisão: x_i, quantidade do carvão i em toneladas;

$$min \; \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}$$

$$sujeito\,a \qquad a_{min} \leqslant \frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant a_{max} \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min} \leqslant \frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant b_{max} \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min} \leqslant \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant c_{max}$$

O problema da mistura de carvão

- Não é um problema de PL!

$$min \ \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}$$

$$sujeito\,a \qquad a_{min} \leqslant \frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant a_{max} \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min} \leqslant \frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant b_{max} \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min} \leqslant \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant c_{max}$$

O problema da mistura de carvão

- Não é um problema de PL!

$$min \ \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}$$

$$sujeito\, a \quad a_{min} \leqslant \frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant a_{max} \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min} \leqslant \frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant b_{max} \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min} \leqslant \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant c_{max}$$

O problema da mistura de carvão

- Como os x_i são positivos, $\sum_i x_i$,também o é;
- Podemos então multiplicar os dois lados da equação por $\sum_i x_i$ e obter

$$a_{min} \leqslant \frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant a_{max} \rightarrow a_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i a_i x_i \leqslant a_{max}\left(\sum_i x_i\right)$$

$$b_{min} \leqslant \frac{\sum_i b_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant b_{max} \rightarrow b_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i b_i x_i \leqslant b_{max}\left(\sum_i x_i\right)$$

$$c_{min} \leqslant \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i x_i} \leqslant c_{max} \rightarrow c_{min}\left(\sum_i c_i\right) \leqslant \sum_i c_i x_i \leqslant c_{max}\left(\sum_i c_i\right)$$

O problema da mistura de carvão

$$min \ \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}$$

sujeito a

$$a_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i a_i x_i \leqslant a_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i b_i x_i \leqslant b_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i c_i x_i \leqslant c_{max}\left(\sum_i x_i\right)$$

O problema da mistura de carvão

$$\boxed{\min \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}}$$

sujeito a

$$a_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i a_i x_i \leqslant a_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i b_i x_i \leqslant b_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i c_i x_i \leqslant c_{max}\left(\sum_i x_i\right)$$

Técnica de Linearização III

- Problemas de otimização da forma

$$\min \frac{r^T x + \alpha}{s^T x + \beta}$$
$$\text{sujeito a } Ax \leqslant b$$

são chamados de problemas de programação linear fracionária (PLF, doravante) ;

Técnica de Linearização III

- Se tivermos a garantia que $s^T x + \beta > 0$, podemos transformar o problema em um problema de PL;

- Faça a mudança de variável $y = \dfrac{x}{s^T x + \beta}$ e $z = \dfrac{1}{s^T x + \beta}$

- Então a função objetivo se torna $min\ r^T y + \alpha z$, que é linear;

- Divida ambos os membros de $Ax \leq b$ por $s^T x + \beta$, o que não mudará o sinal da desigualdade pois $s^T x + \beta > 0$. Obtemos então $Ay \leq bz$;

- Finalmente, note que $zx = y$, e portanto $s^T y + \beta z = 1$. Essa igualdade deve ser acrescentada ao PL transformado;

O problema da mistura de carvão

- PLF original

$$\min \frac{r^T x + \alpha}{s^T x + \beta}$$

$$sujeito\ a\ \ Ax \leqslant b$$

- ... transformado em PL

$$\min\ r^T y + \alpha z$$

$$\begin{aligned} sujeito\ a\ \ & Ay \leqslant bz \\ & s^T y + bz = 1 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

- Transformação de Charnes-Cooper;

O problema da mistura de carvão

- Aplique a transformação de Charnes Cooper, pois $\sum_i h_i x_i > 0$

$$\boxed{\min \frac{\sum_i p_i x_i}{\sum_i h_i x_i}}$$

$$\textit{sujeito a} \quad a_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i a_i x_i \leqslant a_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad \sum_i x_i = T$$

$$b_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i b_i x_i \leqslant b_{max}\left(\sum_i x_i\right) \qquad 0 \leqslant x_i \leqslant q_i$$

$$c_{min}\left(\sum_i x_i\right) \leqslant \sum_i c_i x_i \leqslant c_{max}\left(\sum_i x_i\right)$$

O problema da mistura de carvão

- Modelo linear:

$$\min \sum_i p_i y_i$$

$$\text{sujeito a}$$

$$a_{min}\left(\sum_i y_i\right) \leqslant \sum_i a_i y_i \leqslant a_{max}\left(\sum_i y_i\right)$$

$$b_{min}\left(\sum_i y_i\right) \leqslant \sum_i b_i y_i \leqslant b_{max}\left(\sum_i y_i\right)$$

$$c_{min}\left(\sum_i y_i\right) \leqslant \sum_i c_i y_i \leqslant c_{max}\left(\sum_i y_i\right)$$

$$\sum_i y_i = Tz$$

$$0 \leqslant y_i \leqslant q_i z$$

$$\sum_i h_i y_i = 1$$

$$z \geq 0$$

O problema de alocação de trabalhadores

O problema de alocação de trabalhadores

- Temos uma fábrica que deve alocar seus N trabalhadores em dias distintos e turnos distintos.

- A demanda mínima de trabalhadores por dia e turno é descrita por d_{ij}, conhecida a priori, que é a demanda no dia i da semana (i=1=domingo, i=2=segunda, etc...) e no turno j (j=1=madrugada, j=2=dia, j=3=noite);

- Turno fixo: um dado trabalhador só trabalha em um dado turno em toda a semana;

- Se o trabalhador é alocado para um dia, ele trabalha quatro dias consecutivos. Por exemplo, se um trabalhador é alocado na sexta ele irá trabalhar sexta, sábado, domingo e segunda;

O problema de alocação de trabalhadores

- Dependendo da alocação, pode ser que não necessariamente todos os N trabalhadores serão alocados;

- O objetivo então é minimizar o número de trabalhadores alocados;

O problema de alocação de trabalhadores

- Variável de decisão: x_{ij}, o número de trabalhadores que começam a trabalhar no dia i e turno j;

$$min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

$$sujeito\ a$$

$$x_{1j}+x_{7j}+x_{6j}+x_{5j} \geq d_{1j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{2j}+x_{1j}+x_{7j}+x_{6j} \geq d_{2j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{3j}+x_{2j}+x_{1j}+x_{7j} \geq d_{3j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{4j}+x_{3j}+x_{2j}+x_{1j} \geq d_{4j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{5j}+x_{4j}+x_{3j}+x_{2j} \geq d_{5j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{6j}+x_{5j}+x_{4j}+x_{3j} \geq d_{6j}\ ,\ j=1,2,3$$
$$x_{7j}+x_{6j}+x_{5j}+x_{4j} \geq d_{7j}\ ,\ j=1,2,3$$

Todas as variáveis não negativas;

O problema de alocação de trabalhadores

- Qual o principal problema com essa formulação?

$$min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

sujeito a

$$x_{1j}+x_{7j}+x_{6j}+x_{5j} \geq d_{1j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{2j}+x_{1j}+x_{7j}+x_{6j} \geq d_{2j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{3j}+x_{2j}+x_{1j}+x_{7j} \geq d_{3j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{4j}+x_{3j}+x_{2j}+x_{1j} \geq d_{4j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{5j}+x_{4j}+x_{3j}+x_{2j} \geq d_{5j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{6j}+x_{5j}+x_{4j}+x_{3j} \geq d_{6j} \;, \forall \; j=1,2,3$$
$$x_{7j}+x_{6j}+x_{5j}+x_{4j} \geq d_{7j} \;, \forall \; j=1,2,3$$

Todas as variáveis não negativas;

O problema de alocação de trabalhadores

- Qual o principal problema com essa formulação?

R: o número de trabalhadores pode ser um número fracionário...

$$min \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

sujeito a

$$x_{1j}+x_{7j}+x_{6j}+x_{5j} \geq d_{1j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{2j}+x_{1j}+x_{7j}+x_{6j} \geq d_{2j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{3j}+x_{2j}+x_{1j}+x_{7j} \geq d_{3j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{4j}+x_{3j}+x_{2j}+x_{1j} \geq d_{4j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{5j}+x_{4j}+x_{3j}+x_{2j} \geq d_{5j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{6j}+x_{5j}+x_{4j}+x_{3j} \geq d_{6j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

$$x_{7j}+x_{6j}+x_{5j}+x_{4j} \geq d_{7j}\ ,\ \forall\ j=1,2,3$$

Todas as variáveis não negativas;