INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Impulsowe portfele inwestycyjne: modelowanie rynku, zabezpieczanie, optymalizacja

Jan Palczewski

Rozprawa doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Łukasza Stettnera

Warszawa, 12 kwietnia 2005

Prace nad rozprawą wspomagane były przez granty PBZ-KBN-016-P03-1999 i KBN-1-P03A-012-28.

Spis treści

Wstęp

Począwszy od słynnego modelu Blacka-Scholesa w matematyce finansowej są powszechnie stosowane strategie ciągłe, tzn. strategie inwestycyjne, które powodują zmianę portfela aktywów w każdym momencie. Jest to dalekie uproszczenie, co pokazała praca Cvitanić'a, Shreve'a i Sonera [5], w której udowodniono, że optymalną ceną zabezpieczenia opcji kupna na aktywo przy proporcjonalnych kosztach transakcji w modelu Blacka-Scholesa jest zakup tego aktywa w momencie wystawienia opcji, czyli zastosowanie strategii trywialnej. Remedium na to można szukać w modelach z czasem dyskretnym. Kolejne transakcje są oddzielone od siebie o ustalony okres i znacznie lepiej oddają zachowanie rzeczywistego rynku. Jednak liczba transakcji w ograniczonym okresie jest ograniczona z góry. Tej wady pozbawione jest podejście impulsowe, które tworzy niejako pomost pomiędzy modelami ciągłymi i dyskretnymi. Tutaj rynek funkcjonuje w sposób ciągły, pozwalając na dokonanie transakcji w dowolnym momencie. Inwestor działa impulsowo, jego decyzje transakcyjne tworzą zbiór izolowanych punktów na osi czasu. W każdym ograniczonym okresie dochodzi do skończonej liczby działań na rynku. Impulsowe strategie inwestycyjne są uogólnieniem strategii dyskretnych, pozbawionych wad tych ostatnich. Co więcej, wydaja się one bardzo dobrze pasować do tego, co obserwujemy w rzeczywistości. Niniejsza rozprawa poświęcona jest różnym aspektom strategii impulsowych, począwszy od budowy modeli, przez wycenę instrumentów pochodnych, znajdowanie strategii zabezpieczających, aż do tzw. optymalizacji portfelowej.

W rozdziale 1 prezentuję nowatorski sposób modelowania rynku, zaproponowany w pracy Jouini, Napp [12]. O ile powszechnie dzieli się model na dwie części: model cen akcji i sposoby inwestowania, czyli dostępne strategie inwestycyjne, to tutaj połączone jest to w jedno. Z każdą strategią inwestycyjną możemy związać strumienie pieniężne, skierowane od lub do inwestora. Te strumienie, zwane przepływami, są tym, co w ostatecznym rozrachunku inwestora interesuje. Dlatego zapominamy o strategii i rynku, na którym inwestujemy, i pozostawiamy reprezentację pod postacią zbiorów przepływów. Przepływy te mają przypisane losowe momenty, w których następują. Ten zbiór przepływów i momentów ich wystąpienia dla ustalonej strategii inwestycyjnej nazywany jest możliwością inwestycyjną. Rzeczywistość finansową opisujemy przez podanie wszystkich możliwości inwestycyjnych dostępnych dla inwestora. To podejście pozwala na ujęcie ogromnego bogactwa rynku, jednoczesne rozważanie wielu "niedoskonałości", jak koszty transakcji, ograniczenia na skład portfela, brak rachunku bankowego itp. Ponadto zbiór aktywów może zawierać obligacje z możliwością bankructwa, akcje płacące dywidendy i wiele innych.

Powyższe intuicje wymagają jeszcze ścisłego, matematycznego sformalizowania: skonstruowania przestrzeni, której elementami są możliwości inwestycyjne. Ponadto, w celu dalszych badań należy jeszcze wprowadzić pojęcie uczciwości rynku, które w dużym stopniu zależy od wyboru przestrzeni. W pracy [12] Jouini i Napp konstruują model, w którym przepływy mogą zachodzić w momentach stopu o przeliczalnej liczbie wartości. Dowodzą następnie, że uczciwość rynku jest równoważna istnieniu deflatora dla rynku, analogu gęstości miary martyngałowej. Uogólnienie tych wyników na ogólne momenty stopu, czyli dowolną strategię impulsową, miało miejsce w opublikowanej już pracy autora [21], (patrz podrozdział 1.3). Twierdzenie o równoważności uczciwości rynku i istnieniu deflatora zostało dowiedzione przy technicznym "warunku ruletki", analogicznym do tego w pracy [12]. Bazując na pracy Jouini, Napp, Schachermayer [13] udaje się pozbyć tego warunku.

W istniejącej literaturze brakowało rozważań nad "poprawną" definicją uczciwości rynku, czyli definicją, która jest spójna matematycznie i odpowiada intuicjom. W podrozdziale 1.2 podejmuję ten temat. Okazuje się, że modele prezentowane w pracach Jouini, Napp [12], Napp [20], Jouini, Napp, Schachermayer [13] mają poważne wady. Wynikiem tych rozważań jest powstanie dodatkowych modeli, zaprezentowanych w podrozdziałach 1.4 i 1.5.

Rozdział 1 kończy się rozważaniami na temat wyceny instrumentów pochodnych i związku deflatorów z tym zagadnieniem. Przedstawione rezultaty są podobne do tych z pracy Napp [20], lecz dowody są krótsze i bardziej elementarne.

Rozdział 2 prezentuje tematykę całkowicie nową, nigdzie dotychczas w literaturze nie poruszaną. Zawiera materiały przeznaczone do publikacji w najbliższej przyszłości. Poświecony jest zagadnieniu wyceny opcji amerykańskich w modelach podobnych do opisywanych powyżej. W powszechnym podejściu dana strategia zabezpiecza wypłatę amerykańską, jeśli w każdym momencie stopu wartość portfela jest nie mniejsza niż żądana wypłata. Modele z przepływami nie dają informacji o tym, jaka jest wartość portfela w danym momencie. Sprawdzenie wartości portfela jest równoważne z jego sprzedażą, likwidacją. Stąd konieczność skonstruowania modelu, który posiadając wszystkie zalety modeli z przepływami, umożliwiałby rozważanie opcji amerykańskich.

Niech $\big(A(t)\big)_{t\in[0,T]}$, $T>0$, opisuje wypłatę amerykańską. Na rynku Blacka-Scholesa cena zabezpieczenia takiej opcji jest równa

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}}\big\{\text{cena zabezpieczenia wypłaty europejskiej } A(\tau) \text{ o dacie zapadalności } \tau\big\},$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest zbiorem momentów stopu o wartościach w $[0,T]$. A zatem zabezpieczanie wypłaty amerykańskiej redukuje się do zabezpieczenia odpowiedniej wypłaty europejskiej, czyli dowolność momentu wykonania nie powoduje wzrostu ceny. Podrozdział 2.3 poświęcony jest udowodnieniu, że podobna własność jest prawdziwa w skonstruowanym modelu, jeśli na rynku nie ma kosztów transakcji. A zatem ograniczenia na zawartość portfela, dywidendy i inne niedoskonałości rynku nie wpływają na tą własność. Wskazuje to na szczególne znaczenie kosztów transakcji w modelowaniu rynków finansowych.

Dalsza część pracy poświęcona jest optymalizacji portfela papierów wartościowych przy wykorzystaniu techniki sterowania impulsowego. W tą tematykę wprowadził mnie prof. Jerzy Zabczyk, któremu należą się wyrazy najgłębszej wdzięczności. Owocem współpracy z prof. Zabczykiem jest praca [23]. Zainspirowała ona rozważania rozdziału 4, które składają się na pracę [22], napisaną wspólnie z prof. Łukaszem Stettnerem.

Zagadnienia optymalizacji w finansach interesowały naukowców i praktyków od wielu lat. W 1952 roku Harry Markowitz [18] rozwinął teorię statycznej optymalizacji, tzw. analizy portfelowej. Pojęcie statyczny odnosiło się do tego, że portfel inwestycji nie ulegał zmianie od początku inwestycji aż do jej końca, ustalonego momentu $T>0$. Celem było znalezienie w momencie zerowym takiego portfela, który spełniałby zadane kryterium optymalizacyjne bazujące na stopie zwrotu i ryzyku ponoszonym w okresie trwania inwestycji. W latach 1969-71 zagadnienie optymalizacji portfelowej doczekało się wersji dynamicznej, tzn. takiej, gdy portfel może się zmieniać w każdym momencie w czasie inwestycji (patrz np. Merton [19]). Otworzyło to drogę do wielu interesujących zagadnień portfelowych. Uogólnieniem zadania Markowitza jest maksymalizacja oczekiwanej użyteczności wartości portfela na końcu okresu inwestycji. Użyteczność to inaczej miara zadowolenia z posiadanych dóbr. Innym problemem, inspirowanym długoterminowymi działaniami inwestorów, jest szukanie strategii inwestowania i konsumowania, najlepszej w sensie uzyskanej użyteczności. Ogromną rolę odegrało tu podejście martyngałowe i tzw. metody dualne. Metody te przestają się sprawdzać, gdy dopuścimy istnienie kosztów transakcji. Szczególnych trudności przysparza struktura kosztów ze składnikiem stałym. Eliminuje ona strategie polegające na ciągłej poprawie portfela, gdyż koszty takiego postępowania byłyby nieskończone. Stąd odwołanie się do strategii o charakterze impulsowym. Eastham i Hastings [10] prezentują zastosowanie metodologii impulsowego sterowania stochastycznego (patrz Bensoussan, Lions [1]) do rozwiązania problemu optymalnego inwestowania i konsumpcji przy stałych i proporcjonalnych kosztach transakcji. Specyfiką optymalizacji w finansach jest to, że zwykle koszty impulsów nie wchodzą bezpośrednio jako składnik w optymalizowanej wielkości, lecz są niejako schowane w strukturze dostępnych strategii inwestycyjnych. Przyczynia się to do znacznego utrudnienia rozważanych zagadnień i często do niemożliwości bezpośredniego zastosowania istniejących twierdzeń (patrz np. twierdzenie 4.10).

W rozdziale 4 przedstawiony jest problem optymalnego inwestowania w celu maksymalizacji średniej użyteczności portfela, a dokładniej

$$\mathbb{E}\int_0^\infty e^{-\alpha t}F\big(N(t),S(t)\big)dt,$$

gdzie $S(t)$ jest wielowymiarowym procesem cen, $N(t)$ jest liczbą akcji każdego z papierów wartościowych w portfelu, czyli jego składem, α jest stopą dyskonta, zaś F jest funkcją mierzącą użyteczność lub zadowolenie z portfela. Transakcje są obarczone kosztami o dość ogólnej formie, np. sumą kosztów proporcjonalnych i stałych. Ponadto zakładamy, że istnieje dodatkowy proces $X(t)$, który jest obserwowany przez inwestora i reprezentuje zewnętrzne czynniki ekonomiczne. Czynniki te wpływają na dynamikę cen akcji, lecz same nie opisują kwotowań instrumentów, w które można inwestować. Mogą to być wskaźniki inflacji, długu publicznego, bezrobocia, konsumpcji różnych dóbr, kwotowań niedostępnych instrumentów finansowych (np. obligacji stałokuponowych na rynku międzybankowym) itp. Czynnikiem koniecznym, by stosować teorię sterowania impulsowego jest markowski charakter modelu. Żądamy więc, by proces $\big(S(t),X(t)\big)$ był procesem Markowa. Widać zatem, że proces $X(t)$ odgrywa rolę znaczną, zwiększając możliwości modelowania cen akcji. Ponadto, pozwala lepiej specyfikować w szczegółach i później kalibrować model do rynku. Dokładniejsze rozważania na ten temat znajdują się w pracy Bieleckiego i Pliski [4].

Oryginalność rozdziału 4 polega na zastosowaniu technik punktu stałego i przestrzeni Banacha do wykazania istnienia i formy strategii optymalnej wspomnianego problemu optymalizacyjnego dla szerokiej klasy funkcji użyteczności F i struktury kosztów transakcji. Publikowane prace z dziedziny optymalizacji w finansach, takie jak Eastham, Hastings [10], Korn [16], Pliska [24], Bielecki, Pliska [4], stosowały techniki różniczkowe, które nie pozwalały na uzyskanie wyników w takiej ogólności.

Na podkreślenie zasługuje fakt, że uzyskane wyniki pokrywają przypadek nieograniczonej funkcji F przy dość słabych założeniach dotyczących modelu. Dowodem na to są podane w podrozdziale 4.5 przykłady obejmujące większość pojawiających się w literaturze modeli.

Podziękowania. Chciałbym gorąco podziękować wszystkim, którzy przyczynili się do powstania tej pracy. W szczególności składam podziękowania promotorowi prof. Łukaszowi Stettnerowi oraz prof. Jerzemu Zabczykowi, którzy poświęcili mi wiele swojego czasu. Wiele zawdzięczam też prof. Tomaszowi Bojdeckiemu, którego wykłady rozbudziły we mnie zainteresowania probabilistyką. Nie może tutaj także zabraknąć wyrazów wdzięczności do prof. E. Jouiniego i prof. W. Schachermayera za uwagi dotyczące pracy [21], które były impulsem do dużej części rozważań przedstawionych w rozdziale 1.

Rozdział 1

Modelowanie rynku za pomocą przepływów pieniężnych

W modelowaniu rynków finansowych szeroko stosowane jest podejście, polegające na wzorowaniu się na funkcjonowaniu lub też postrzeganiu tego rynku przez inwestorów. Skupia się ono z jednej strony na jak najlepszym oddaniu dynamiki cen akcji, zaś z drugiej – na określeniu dostępnych możliwości inwestycyjnych. Podział ten jest podyktowany spojrzeniem inwestora: widzi on rynek, przez który rozumie ewolucję cen akcji, i swoje możliwości inwestowania. Ta dwudzielność spojrzenia, tak naturalna, stwarza znaczne problemy, gdy chcemy rozważać koszty transakcji, ograniczenia na skład portfela i inne tzw. niedoskonałości rynku. Co więcej, łączne rozważanie kilku niedoskonałości jest praktycznie niemożliwe. Aby posunąć się do przodu, trzeba dokonać rewizji podstaw modelowania. Zamiast podziału na strategie i ceny akcji, dokonujemy ich połączenia. Wynik strategii inwestycyjnej opisywany jest przy pomocy przepływów pieniężnych. Jeśli kupimy jedną akcję za 5 PLN w momencie 1, zaś sprzedamy ją za 6 PLN w momencie 3, to z naszego punktu widzenia odbyły się dwa przepływy pieniężne: jeden, ujemny, gdy płaciliśmy za akcję, drugi, dodatni, gdy ją sprzedaliśmy. Zanotujemy to w następujący sposób:

$$-5\delta_1 + 6\delta_3.$$

Podobnie, jeśli $\big(S(t)\big)_{t\in\mathbb{R}_+}$ opisuje losową ewolucję cen akcji, to

$$-S(\tau)\delta_\tau + S(\sigma)\delta_\sigma,$$

gdzie $\tau \leq \sigma$ są momentami stopu, reprezentuje przepływy pieniężne związane z zakupem jednej akcji w momencie τ i jej sprzedażą w momencie σ. Dalsze przykłady to

$$-2S(1)\delta_1 + S(2)\delta_2 + 1_A S(3)\delta_3 + 1_{A^c} S(4)\delta_4,$$

gdzie A jest zdarzeniem losowym, lub

$$\theta\big(- S(\tau)\delta_\tau + S(\sigma)\delta_\sigma\big),$$

gdzie θ jest zmienną losową. Każdy sposób inwestowania opisany jest za pomocą przepływów, które generuje. Nie ma informacji o użytej strategii, czy procesie cen. Aby dodatkowo umotywować to twierdzenie, rozważmy następujące możliwości inwestowania:

$$-S^1(0)\delta_0 + S^1(1)\delta_1, \qquad \frac{S^1(1)}{S^2(1)}\big(- S^2(1)\delta_1 + S^2(2)\delta_2\big).$$

Jeśli zdecydujemy się na wykorzystanie obu możliwości, to przepływy finansowe związane z naszym postępowaniem zredukują się do

$$-S^1(0)\delta_0 + \frac{S^1(1)S^2(2)}{S^2(1)}\delta_2.$$

Zatraciliśmy zatem informację o tym, jak inwestowaliśmy.

Rynek finansowy opiszemy tylko za pomocą możliwości inwestycyjnych, wyrażonych przez przepływy finansowe. Niech $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}\big)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją, która spełnia normalne warunki prawostronnej ciągłości i zupełności. Przez $L^0(\Omega, \mathcal{F}_t)$ oznaczmy przestrzeń zmiennych losowych rzeczywistych $\mathcal{F}_t$-mierzalnych. Niech $\mathcal{D}(I)$, $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, będzie zbiorem wyrażeń postaci

$$\gamma_1\delta_{\tau_1} + \gamma_2\delta_{\tau_2} + \cdots + \gamma_n\delta_{\tau_n},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_i})$, zaś τ_i jest momentem stopu o wartościach w I, $i = 1, \ldots, n$. Zbiór czasów I może być odcinkiem $[0, T]$, całą półprostą $\mathbb{R}_+$ lub dowolnym innym zbiorem, np. $I = \mathbb{Q}$. Jeśli nie będzie to powodować niejasności, zamiast $\mathcal{D}(I)$ będziemy pisać $\mathcal{D}$.

DEFINICJA 1.1. **Rynkiem** nazywamy podzbiór $J \subseteq \mathcal{D}$, który jest dodatnim, wypukłym stożkiem, tzn.

i) $x_1 + x_2 \in J$, jeśli $x_1, x_2 \in J$,

ii) $\alpha x \in J$, jeśli $x \in J$, $\alpha \geq 0$.

Elementy J nazywane są **możliwościami inwestycyjnymi**, ponieważ wyrażają przepływy pieniężne związane z dostępnymi strategiami inwestowania. Warunek wypukłości J oddaje możliwość skorzystania na raz z wielu możliwości inwestycyjnych dostępnych na rynku, jak zilustrowaliśmy powyżej. Zakładamy nieskończoną podzielność inwestycji, czyli warunek, że J jest dodatnim stożkiem. Jest to założenie techniczne, powszechnie stosowane w matematyce finansowej.

Zwróćmy uwagę, że rozważane możliwości inwestycyjne, czy też strategie inwestycyjne, które za nimi stoją, mają **charakter impulsowy**. Jest to cecha rzeczywistych rynków, na których nie można dokonywać transakcji w sposób ciągły, lecz poszczególne transakcje są od siebie odległe w czasie.

Przedstawimy szereg przykładów zbiorów możliwości inwestycyjnych reprezentujących rynek.

Rynek doskonały

Niech $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ będzie d-wymiarowym adaptowanym procesem stochastycznym o ściśle dodatnich trajektoriach. Opisuje on ewolucję cen d aktywów. Rozważmy możliwości inwestycyjne postaci

$$\theta\big(-S^i(\tau)\delta_\tau + S^i(\sigma)\delta_\sigma\big), \quad i = 1, \ldots, d,$$

gdzie $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma})$, zaś τ, σ są momentami stopu. Rynek $J(S)$ jest generowany przez powyższe możliwości inwestycyjne, czyli składa się ze wszystkich ich kombinacji liniowych o nieujemnych współczynnikach. Nie zakładamy, że $\tau \leq \sigma$, jednak przyjęcie takiego warunku nie zmieniłoby zbioru $J(S)$.

Ograniczenia na skład portfela

Rozważmy proces cen $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ jak powyżej. Dodatni wypukły stożek $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ujmuje ograniczenia na skład portfela. W przypadku rynku bez ograniczeń $C = \mathbb{R}^d$, natomiast $C = [0,\infty)^d$ odpowiada brakowi krótkiej sprzedaży. Rynek $J_{Con}(S, C)$ jest generowany przez możliwości inwestycyjne

$$\sum_{i=1}^{d} \theta^i \big(- S^i(\tau)\delta_\tau + S^i(\sigma)\delta_\sigma \big),$$

gdzie $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}; C)$, zaś τ, σ są momentami stopu.

Proporcjonalne koszty transakcji

Zaproponowane podejście do modelowania rynków finansowych pozwala na uwzględnienie uogólnionych kosztów proporcjonalnych. Ze względu na konieczność zapisania zbioru przepływów pieniężnych związanych z możliwościami inwestycyjnymi jako stożka, nie możemy rozważać kosztów stałych. Koszty proporcjonalne zakodowane są w dwóch d-wymiarowych adaptowanych procesach cen $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ i $\big(S'(t)\big)_{t\geq 0}$, które spełniają warunek

$$\mathbb{P}\big(0 \leq S^i(t) \leq S'^i(t)\ \forall t \geq 0\big) = 1, \quad i = 1, \ldots d.$$

Wartość S' rozumiemy jako cenę, po której możemy dokonać zakupu waloru, zaś S - jako cenę, po której możemy sprzedać walor. Zatem rynek $J_{cost}(S, S')$ jest generowany przez

$$\theta\big(- S'^i(\tau)\delta_\tau + S^i(\sigma)\delta_\sigma \big), \quad i = 1, \ldots, d,$$
$$\theta\big(S^i(\tau)\delta_\tau - S'^i(\sigma)\delta_\sigma \big), \quad i = 1, \ldots, d,$$

gdzie $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\tau; [0,\infty))$, zaś τ, σ są momentami stopu spełniającymi nierówność $\tau \leq \sigma$ p.n. Pierwsza z zaprezentowanych inwestycji polega na zakupie i późniejszej sprzedaży waloru, zaś druga na krótkiej sprzedaży i późniejszym odkupieniu waloru.

Proporcjonalne koszty z ograniczeniami na zawartość portfela

Zaprezentujemy, jak w prosty sposób opisać rynek, który będzie zawierał obie przedstawione wyżej niedoskonałości. Niech zatem C, S, S' będą dane jak wyżej. Wtedy rynek $J_{con,cost}(S, S', C)$ dany jest jako najmniejszy dodatni wypukły stożek generowany przez możliwości inwestycyjne

$$\sum_{i=1}^{d} \Big(\theta^i 1_{\theta^i \geq 0} \big(- S'^i(\tau)\delta_\tau + S^i(\sigma)\delta_\sigma \big) - \theta^i 1_{\theta^i < 0} \big(S^i(\tau)\delta_\tau - S'^i(\sigma)\delta_\sigma \big) \Big),$$

gdzie $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\tau; C)$, zaś τ, σ są momentami stopu, spełniającymi $\tau \leq \sigma$ p.n.

Dotychczas nie narzuciliśmy żadnych technicznych ograniczeń na możliwości inwestycyjne, nie zakładaliśmy nawet całkowalności. W następnym podrozdziale zajmiemy się sprecyzowaniem założeń i zastanowimy się nad pojęciem uczciwości rynku. Pokażemy, że uczciwość rynku w ogromnym stopniu zależy od przyjętych założeń, w szczególności od topologii zadanej na przestrzeni możliwości inwestycyjnych.

1.1. Arbitraż

Podstawowy rezultat w matematyce finansowej, czasami nazywany podstawowym twierdzeniem wyceny, mówi, że uczciwość rynku doskonałego związanego z wielowymiarowym procesem cen $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ jest tożsama istnieniu równoważnej miary martyngałowej. Wciąż jednak pozostaje określenie, czym jest uczciwość rynku. Zależy to od warunków narzuconych na proces cen i dopuszczalne strategie inwestycyjne. Załóżmy, że proces cen jest cádlág i jest całkowalny z p-tą potęgą, $p \geq 1$. Określmy horyzont czasowy T i połóżmy

$$K = \{\int_0^T h(t)dS(t) : \quad h(t) \text{ - ograniczony, prognozowalny proces prosty}\}.$$

Prognozowalnym procesem prostym nazwiemy proces postaci

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t),$$

dla $N \in \mathbb{N}$, momentów $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_N \leq T$ i wektora $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1})$, odpowiednio $\mathcal{F}_{t_i}$-mierzalnych zmiennych losowych, dla których całka w definicji K jest dobrze określona.

Rynek uznamy za uczciwy, jeśli $\overline{K - B_+} \cap L^p(\Omega, \mathcal{F}_T) = \{0\}$, gdzie $B_+ = L^p_+(\Omega, \mathcal{F}_T) \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Uczciwość ta jest równoważna istnieniu równoważnej miary martyngałowej o gęstości całkowalnej z q-tą potęgą, przy czym p i q są liczbami sprzężonymi (patrz praca Strickera [31]).

Natomiast Delbaen i Schachermayer [7] definiują zbiór strategii

$$\mathcal{H} = \left\{ h : \quad \begin{array}{l} h(t) \text{ - ograniczony, } S\text{-całkowalny proces, } \lim\limits_{T\to\infty} \int_0^T h(t)dS(t) \text{ istnieje p.n.} \\ \int_0^T h(t)dS(t) > a \text{ p.n. dla } T \geq 0 \end{array} \right\}$$

dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$ i kładą

$$K = \Big\{ \int_0^\infty h(t)dS(t) : \quad h(t) \in \mathcal{H} \Big\}.$$

Zakładają również, że proces cen $S(t)$ jest lokalnie ograniczonym semi-martyngałem. Dowodzą wtedy, że uczciwość rynku, zapisana jako $\overline{C} \cap L^\infty_0(\Omega, \mathcal{F}) = \{0\}$, gdzie domknięcie jest w topologii L^∞, zaś $C = (K - L^0_+(\Omega, \mathcal{F})) \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$, jest tożsama istnieniu równoważnej miary probabilistycznej, przy której proces cen jest martyngałem lokalnym.

Jeszcze inaczej prezentują się wyniki w czasie dyskretnym. Widzimy zatem, że na postać uczciwości rynku mają znaczny wpływ zarówno założenia dotyczące rozważanych strategii inwestycyjnych, jak i procesu cen. Stricker ograniczał się do strategii prostych, natomiast Delbaen i Schachermayer dopuścili strategie dowolne, lecz musieli wtedy dodatkowo wprowadzić ograniczenie na minimalną wartość bogactwa portfela. Także ich wyniki są różne. W jednym przypadku istnieje miara martyngałowa, zaś w drugim taka, przy której proces cen jest tylko martyngałem lokalnym.

Naszym celem w bieżącym podrozdziale będzie rozszerzenie powyższych pomysłów na przypadek rynków opisanych przez przepływy pieniężne. Zajmowali się tym już Jouini, Napp [12] oraz Jouini, Napp, Schachermayer [13].

DEFINICJA 1.2. Modelem rynku jest para (Γ, τ), gdzie Γ jest podprzestrzenią liniową $\mathcal{D}$, a τ jest lokalnie wypukłą topologią na Γ.

Niech J będzie rynkiem zanurzonym w modelu (Γ, τ). Połóżmy

$$\Gamma_+ = \Big\{ \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i} \in \Gamma : \quad \gamma_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, N \Big\}.$$

Naturalne pojęcie braku arbitrażu można zapisać jako

(NA) $J \cap \Gamma_+ = \{0\}$.

Łatwo zauważyć, że NA jest równoważne $(J - \Gamma_+) \cap \Gamma_+ = \{0\}$. Podobnie jak w powyższych przykładach, to pojęcie jest niewystarczające. Proponujemy silniejszą własność, zwaną **uogólnionym brakiem arbitrażu** (ang. no free lunch)

(NFL) $\overline{J - \Gamma_+} \cap \Gamma_+ = \{0\}$, gdzie domknięcie jest dokonywane w topologii τ.

W warunku występuje wyrażenie $J - \Gamma_+$. Zauważmy, że $-\Gamma_+$ reprezentuje wszystkie możliwe strategie konsumpcji. Zatem przed dokonaniem domknięcia rozszerzamy możliwości inwestycyjne o konsumpcję.

Topologia τ odgrywa kluczową rolę w definicji uogólnionego arbitrażu. Przy niektórych topologiach rynek może spełniać warunek NFL, zaś przy innych nie. Poprzemy to przykładami, które pojawią się w następnych podrozdziałach. A zatem wybranie właściwej topologii wydaje się ważnym zagadnieniem. Dobrym wyznacznikiem jakości topologii jest jej zgodność z intuicjami, które wypływają z zachowania rynków finansowych. Problemem tym zajmiemy się w następnym podrozdziale.

Teraz skupimy się na sformułowaniu analogu fundamentalnego twierdzenia wyceny. Pokażemy, że brak uogólnionego arbitrażu jest równoważny istnieniu funkcjonału liniowego y na Γ, który oddziela rynek J od zbioru strategii arbitrażowych Γ_+, tzn. y jest niedodatni na J i ściśle dodatni dla $x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$. Głównym narzędziem, które będziemy wykorzystywać jest słynne twierdzenie Yana, a dokładniej jego wersja z pracy [13], którą musimy nieznacznie uogólnić.

Niech (X, τ_X) będzie lokalnie wypukłą liniową przestrzenią topologiczną. Przez Y oznaczmy przestrzeń liniową do niej dualną. Załóżmy, że Y rozdziela punkty X, tzn. dla dowolnych różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieje $y \in Y$, taki że $\langle x_1, y \rangle_{\langle X,Y \rangle} \neq \langle x_2, y \rangle_{\langle X,Y \rangle}$. Jest to równoważne warunkowi mówiącemu, że dla dowolnego $x \in X$, $x \neq 0$, istnieje $y \in Y$ spełniający $\langle x_1, y \rangle_{\langle X,Y \rangle} \neq 0$. Załóżmy, że model (Γ, τ) ma takie zanurzenie w (X, τ_X), że obraz Γ jest podprzestrzenią liniową X, zaś obraz topologii τ jest zgodny z τ_X na Γ. Możemy zatem traktować Γ jako podprzestrzeń X. W przestrzeni dualnej Y wyróżniamy dwa zbiory. Przestrzeń funkcjonałów nieujemnych na Γ_+ oznaczona jest przez $Y_+^{\Gamma_+}$, tj. $y \in Y_+^{\Gamma_+} \equiv \forall x \in \Gamma_+ \ \langle x, y \rangle_{\langle X,Y \rangle} \geq 0$. Natomiast przez $Y_{++}^{\Gamma_+}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałów dodatnich na Γ_+, tj. $y \in Y_{++}^{\Gamma_+} \equiv \forall x \in \Gamma_+ \setminus \{0\} \ \langle x, y \rangle_{\langle X,Y \rangle} > 0$.

Sformułujemy dwa podstawowe założenia dotyczące przestrzeni X, Y, Γ:

Założenie C. Dla każdego ciągu $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in Y$ istnieje ciąg ściśle dodatnich liczb $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, taki że $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ zbiega w Y względem topologii $\sigma(Y, X)$.

Założenie L. Dla dowolnej rodziny $(y_\alpha)_{\alpha \in I} \subset Y_+^{\Gamma_+}$ istnieje przeliczalny podzbiór $(y_{\alpha_n})_{n=1}^{\infty}$, taki że jeśli $x \in \Gamma_+$ i $\langle x, y_\alpha \rangle > 0$ dla pewnego $\alpha \in I$, to istnieje n, takie że $\langle x, y_{\alpha_n} \rangle > 0$.

TWIERDZENIE 1.3. Załóżmy, że założenia C i L są spełnione. Dla dowolnego rynku J zawartego w modelu (Γ, τ) warunek braku uogólnionego arbitrażu jest równoważny istnieniu funkcjonału $y \in Y_{++}^{\Gamma_+}$ spełniającego

$$y\big|_J \leq 0.$$

Dowód. Oznaczmy $C = \overline{J - \Gamma_+}$, gdzie domknięcie wykonane jest w topologii τ. Udowodnimy najpierw prawą implikację. Wiemy, że $C \cap \Gamma_+ = \{0\}$. Łatwo widzimy, że $\overline{C} \cap \Gamma_+ = \{0\}$, gdy domknięcie bierzemy w przestrzeni (X, τ_X). Na mocy twierdzenia Hahna-Banacha o oddzielaniu (patrz [8] V.2.12), dla dowolnego $x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ istnieje ciągły funkcjonał liniowy $y_x \in Y$ na (X, τ), taki że $\langle x, y_x \rangle > 1$ i $y_x|_C \leq 1$. Co więcej, $y_x|_C \leq 0$, ponieważ C jest dodatnim stożkiem. Z faktu, że $C \supseteq -\Gamma_+$, wynika, że $y_x|_{-\Gamma_+} \leq 0$, czyli $y_x|_{\Gamma_+} \geq 0$ i $y_x \in Y_+^{\Gamma_+}$.

Rozważmy rodzinę $(y_x)_{x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}}$. Na mocy założenia L możemy znaleźć przeliczalną rodzinę $(y_{x_n})_{n=1}^{\infty}$, taką że dla dowolnego $x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ istnieje y_{x_n} spełniające $\langle x, y_{x_n} \rangle > 0$. Założenie C daje nam ciąg ściśle dodatnich liczb α_n o tej własności, że $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_{x_n} \to y$ w topologii $\sigma(Y, X)$. Oczywiście $y \in Y_{++}^{\Gamma_+}$ i $y|_C \leq 0$, co kończy tą część dowodu.

Implikacja przeciwna jest natychmiastowa. Najpierw zauważamy, że $y\big|_J \leq 0$ i $y \in Y_{++}^{\Gamma_+}$ daje nam $y\big|_C \leq 0$. Weźmy dowolne $x \in \Gamma_+ \cap C$. Z faktu, że $x \in C$ dostajemy $\langle x, y \rangle \leq 0$. Lecz $x \in \Gamma_+$, a więc $\langle x, y \rangle \geq 0$. Łącząc oba wyniki dostajemy $\langle x, y \rangle = 0$, skąd $x = 0$. ■

Funkcjonał, którego istnienie pokazaliśmy w powyższym twierdzeniu, nazywamy **deflatorem** dla rynku J. Twierdzenie 1.3 dowodzi, że zbiór potencjalnych deflatorów $Y_{++}^{\Gamma_+}$ może służyć jako równoważne wprowadzenie topologii na przestrzeni Γ. W następnym podrozdziale skupimy się na analizie topologii z perspektywy zbioru deflatorów.

1.2. Topologie

Bieżący podrozdział poświęcimy na badanie własności różnych topologii z punktu widzenia pojęcia uogólnionego arbitrażu z nimi związanego. Dla uproszczenia notacji przyjmiemy, że zbiór momentów transakcji $I = \mathbb{R}_+$. Ograniczymy się do takich modeli rynku, dla których przestrzeń sprzężona Y, lub inaczej przestrzeń deflatorów, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni procesów mierzalnych $L^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}; \mathbb{R})$ z dualnością zadaną wzorem

$$\langle x, y \rangle = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y(\tau_i), \tag{1.1}$$

gdzie $x = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i}$ jest pewnym elementem Γ, zaś $y = \big(y(t)\big)_{t \geq 0}$ jest procesem mierzalnym. Jest to najszersza możliwa przestrzeń deflatorów, które pozwalają na stosowanie teorii procesów stochastycznych do ich analizy. Ponadto wszystkie dotychchczas rozważane modele z przepływami (patrz Jouini, Napp [12], Jouini, Napp, Schachermayer [13] i Palczewski [21]) mają powyższą strukturę.

Zauważmy, że model (Γ, τ) i przestrzeń Y musi być tak dobrana, aby wyrażenie (1.1) było dobrze zdefiniowane. Jeśli spełnione jest założenie

(S1) $\{\delta_\tau :\ \tau \text{ jest ograniczonym momentem stopu}\} \subseteq \Gamma$

to zmienne $y(\tau)$, dla ograniczonych momentów stopu τ, $y \in Y$, są całkowalne. Możemy więc skonstruować opcjonalną projekcję ${}^o y$ procesu y na mocy twierdzenia 5.1 z monografii He, Wang, Yan [11]. Weźmy $x = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i} \in \Gamma$ i zauważmy

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y(\tau_i) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}\left(\gamma_i y(\tau_i) \,|\, \mathcal{F}_{\tau_i}\right) \\ &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \mathbb{E}\left(y(\tau_i) \,|\, \mathcal{F}_{\tau_i}\right) = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i {}^o y(\tau_i). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zatem, gdy spełnione jest założenie S1, to Y możemy traktować jako podprzestrzeń przestrzeni procesów opcjonalnych.

Udowodnimy dalsze własności zbioru deflatorów. Oznaczmy

$$\tilde{\Gamma} = \Big\{ \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i} \in \mathcal{D} : \quad \gamma_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_i}), \quad i = 1, \ldots, N \Big\}.$$

LEMAT 1.4. Niech $\Gamma = \tilde{\Gamma}$. Dla dowolnego momentu stopu τ

i) ${}^o y(\tau) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R})$ dla $y \in Y$,

ii) ${}^o y(\tau) > 0$ p.n. dla $y \in Y_{++}^{\Gamma+}$.

Dowód. i) Oczywiście $\{\gamma \delta_\tau : \quad \gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R})\} \subseteq \Gamma$. Zatem ${}^o y(\tau)\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R})$ dla dowolnego $\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R})$, czyli ${}^o y(\tau)$ jest ograniczona. Załóżmy przeciwnie, że ${}^o y(\tau)$ nie jest ograniczona. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że dodatnia część ${}^o y(\tau)$ jest nieograniczona. Połóżmy $A_n = \{n \leq {}^o y(\tau) < n+1\}$, $p_n = \mathbb{P}(A_n)$, $a_n = \frac{1}{n^2 p_n}$ i zdefiniujmy $\gamma^* = \sum_{n=1}^\infty 1_{A_n} a_n$. Ponieważ $\sum_{n=1}^\infty a_n p_n = \sum_{n=1}^\infty n^{-2} < \infty$, dostajemy $\gamma^* \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R})$, lecz $\mathbb{E}\, \gamma^* {}^o y(\tau) \geq \sum_{n=1}^\infty n a_n p_n = \sum_{n=1}^\infty n^{-1} = \infty$, co prowadzi do sprzeczności.

ii) Weźmy $x = 1_A \delta_\tau$, gdzie $A = \{{}^o y(\tau) \leq 0\}$ i załóżmy, że $\mathbb{P}(A) > 0$. Ponieważ $x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$, dostajemy $\mathbb{E}\, {}^o y(\tau) 1_A > 0$. Jednak, $\mathbb{E}\, {}^o y(\tau) 1_A \leq 0$ z wyboru A, co daje sprzeczność. ∎

Zastanówmy się teraz, czy proste zbiory funkcjonałów, takie jak wszystkie lewostronnie ciągłe lub wszystkie prawostronnie ciągłe adaptowane procesy ograniczone, są dobrymi przykładami przestrzeni Y, tzn. czy topologia, którą wyznaczają, jest zgodna z intuicjami. Dla naszych rozważań potrzebny będzie prosty lemat, którego dowód można znaleźć w pracy Jouini, Napp [12].

LEMAT 1.5. Niech $\big(S(t)\big)_{t \geq 0}$ będzie d-wymiarowym procesem spełniającym $S(\tau) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau)$ dla dowolnego ograniczonego momentu stopu τ. Na rynku doskonałym $J(S)$ nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje deflator $y \in Y_{++}^{\Gamma+}$, taki że $\big({}^o y(t) S(t)\big)_{t \geq 0}$ jest martyngałem.

W tym celu rozważmy rynek doskonały $J(S)$ dla procesu cen $\big(S(t)\big)_{t \geq 0}$ spełniającego $S(\tau) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau)$ dla dowolnego ograniczonego momentu stopu τ. Łatwo można dowieść (patrz [12]), że $J(S)$ spełnia założenie uogólnionego arbitraży wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje deflator $y \in Y_{++}^{\Gamma+}$ taki, że $\big({}^o y(t) S(t)\big)_{t \geq 0}$ jest martyngałem.

Lewostronna ciągłość. Podamy przykład procesu cen S, dla którego rynek $J(S)$ jest intuicyjnie pozbawiony arbitrażu, lecz dla żadnego adaptowanego, ograniczonego procesu y o lewostronnie ciągłych trajektoriach $y(t)S(t)$ nie jest martyngałem. Weźmy jako $S(t)$ całkowicie nieciągły proces Levyego ze skokami większymi co do wartości bezwzględnej niż $\epsilon > 0$ i załóżmy, że filtracja $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ jest przez niego generowana. Niech τ będzie momentem pierwszego skoku. Ograniczenie dolne na wielkość skoków gwarantuje nam, że moment τ będzie dobrze określony i większy od zera p.n. Filtracja jest trywialna aż do momentu $\tau-$, czyli każdy adaptowany proces musi być stały na $[0, \tau)$. Z lewostronnej ciągłości y dostajemy, że y jest stały na $[0, \tau]$. Z warunku martyngałowości wynika, że $\mathbb{E}\, S(\tau) y(\tau) = S(0) y(0)$, co w połączeniu z własnością $y(\tau) = y(0)$, daje $\mathbb{E}\, S(\tau) = S(0)$. A zatem w tym modelu rynek $J(S)$ jest pozbawiony uogólnionego arbitrażu tylko wtedy, gdy proces $S(t)$ jest martyngałem.

Prawostronna ciągłość. Pokażemy, że przestrzeń Y składająca się ze wszystkich adaptowanych ograniczonych procesów prawostronnie ciągłych jest zbyt duża, tzn. generuje zbyt słabą topologię na

Γ, by objąć intuicyjne rozumienie uczciwości rynku. Rozważmy proces cen $S(t) = 1 + 1_{t\geq 1}$. Wtedy $y(t) = 1 - \frac{1}{2}1_{t\geq 1}$ jest deflatorem dla rynku $J(S)$. Zatem

$$\phi_n = -S\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\delta_{1-\frac{1}{n}} + S(1)\delta_1 \in J(S)$$

nie zbiega do δ_1. Rozważmy teraz rynek $J(S')$, gdzie $S'(t) = 1 + 1_{t>1}$ (S' jest lewostronnie ciągły w 1). Jest to symetryczny odpowiednik powyższego przykładu. Wtedy ciąg

$$\Psi_n = -S'(1)\delta_1 + S'\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\delta_{1+\frac{1}{n}}$$

zbiega do δ_1, możliwości arbitrażu. Jest to przypadek niesymetrii, który jest niekorzystny i niewytłumaczalny z finansowego punktu widzenia, a jest powodowany zbytnim bogactwem zbioru Y.

Ciągłość. Połączeniem powyższych przypadków jest rozważanie Y jako zbioru wszystkich ciągłych, ograniczonych, mierzalnych procesów. Projekcja procesu ciągłego jest procesem cádlág (patrz lemat VI.7.8 w książce Rogersa, Williamsa [26]), jednak rzut Y nie wypełnia całej przestrzeni ograniczonych procesów cádlág. A zatem topologia generowana przez Y jest bogatsza niż w przypadku procesów prawostronnie ciągłych i uboższa niż w przypadku procesów lewostronnie ciągłych. Nie przejawia ponadto podanych powyżej wad.

Powyższe, wstępne rozważania pokazują, że znalezienie dobrej topologii, gdy patrzymy z punktu widzenia przestrzeni funkcjonałów Y, nie jest łatwe. W dwóch pierwszych, narzucających sie przykładach wykazaliśmy ich niedoskonałości, natomiast w trzecim trudno przekonać się o jego intuicyjnej poprawności. Zastanowimy się teraz nad własnościami, których powinniśmy wymagać od topologii τ określonej na Γ, zapisanymi w języku zbieżności.

(CV) Dla dowolnego monotonicznego ciągu momentów stopu $\sigma_n \to \sigma$ p.n. i dowolnego ciągu zmiennych losowych Z_n zbieżnego do Z w $L^1(\Omega, \mathcal{F})$, takich że $(Z_n\delta_{\sigma_n}) \subseteq \Gamma$ i $Z\delta_\sigma \in \Gamma$,

$$Z_n\delta_{\sigma_n} \to Z\delta_\sigma$$

w topologii τ, co jest równoważne

$$\mathbb{E}\, Z_n y(\sigma_n) \to \mathbb{E}\, Z y(\sigma)$$

dla każdego $y \in Y$.

(R) Zbiór funkcjonałów liniowych Y może być reprezentowany jako rodzina adaptowanych procesów cádlág .

Założenie R jest techniczne. Znaczenie CV stanie się jasne, gdy przedstawimy przykład. Załóżmy, że ciąg możliwości inwestycyjnych

$$\Phi_n = -Z_n\delta_{\sigma_n} + \tilde{Z}\delta_\sigma$$

jest zawarty w Γ, Z_n zmierza do Z w $L^1(\Omega, \mathcal{F})$, σ_n zbiega do σ. Intuicyjnie, Φ_n dąży do $(\tilde{Z} - Z)\delta_\sigma$. Założenie CV uściśla właśnie tę intuicję.

LEMAT 1.6. Jeśli spełnione są założenia CV i R, $\Gamma = \tilde{\Gamma}$, to dowolny proces $y \in Y$ jest ograniczony na przedziale $[0, \eta]$, gdzie η jest dowolnym momentem stopu.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez sprzeczność. Załóżmy, że proces y jest nieograniczony na pewnym przedziale $[0,\eta]$. Ponieważ y jest procesem cádlág, to losowe momenty dojścia $\sigma_n = \inf\{t \leq \eta : \quad y(t) \geq n\} \wedge \eta$, gdzie $\inf \emptyset = \infty$, są momentami stopu tworzącymi niemalejący ciąg. Ponadto, $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$ jest momentem stopu. Niech $a_n = \mathbb{P}(y_{\sigma_n} \geq n)$. Proces y jest nieograniczony na $[0,\eta]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy dwa przypadki:

1) $a_n \to 0$

   Weźmy $Z_n = 1_{y_{\sigma_n} \geq n}(a_n\sqrt{n})^{-1}$. Oczywiście $\mathbb{E}\, Z_n = n^{-1/2}$, więc $Z_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{\sigma_n}, \mathbb{P})$ i $Z_n \to 0$ w $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\sigma, \mathbb{P})$. Jednak $\langle y, Z_n\delta_{\sigma_n}\rangle = \mathbb{E}\, Z_n y(\sigma_n) \geq \sqrt{n} \to \infty$, co przeczy CV.

2) $a_n > \epsilon > 0$

   Weźmy $Z_n = 1$ i obliczmy $\langle y, Z_n\delta_{\sigma_n}\rangle = \mathbb{E}\, y(\sigma_n) \geq \epsilon n \to \infty$ oraz $\langle y, \delta_\sigma\rangle = \mathbb{E}\, y(\sigma) < \infty$. To także przeczy CV.

∎

Ustosunkujemy się teraz do rozważanych wcześniej zbiorów Y. Powinno to rzucić więcej światła na założenia CV i R.

LEMAT 1.7. Załóżmy, że $\Gamma = \tilde{\Gamma}$ i topologia generowana jest przez przestrzeń funkcjonałów liniowych Y będącą przestrzenią mierzalnych, ograniczonych i ciągłych procesów. Wtedy spełnione są założenia R i CV.

Dowód. Przestrzeń Y może zostać zastąpiona przestrzenią Y^* opcjonalnych projekcji procesów z Y. Jak wspomnieliśmy, opcjonalna projekcja procesów ciągłych jest cádlág, czyli spełniony jest warunek R. Aby wykazać CV rozważmy ciąg Z_n, σ_n jak w definicji. Z ciągłości $y(\sigma_n)$ zbiega punktowo do zmiennej losowej $y(\sigma)$. Ograniczoność y pozwala zastosować twierdzenie o zbieżności zmajoryzowanej

$$\mathbb{E}\, Z_n y(\sigma_n) \to \mathbb{E}\, Z y(\sigma).$$

∎

LEMAT 1.8. Załóżmy, że $\Gamma = \tilde{\Gamma}$, zaś topologia jest generowana przez przestrzeń funkcjonałów będących przestrzenią funkcji ograniczonych, adaptowanych i cádlág . Wtedy nie jest spełnione założenie CV.

Dowód. Wskażemy ciągi Z_n, σ_n i $y \in Y$, takie że warunek CV nie będzie spełniony. Niech $y(t) = 1_{t\geq\eta}$ dla pewnego prognozowalnego momentu stopu η. Weźmy $Z_n = Z = 1$ i niemalejący ciąg momentów stopu σ_n zbieżny do η, $\sigma_n < \eta$. Wtedy $\mathbb{E}\, Z_n y(\sigma_n) = 0$, lecz $\mathbb{E}\, Z y(\eta) = 1$. ∎

Podobnie możemy pokazać, że zbiór Y procesów lewostronnie ciągłych, adaptowanych i ograniczonych generuje topologię na $\tilde{\Gamma}$ nie spełniającą założenia CV. Jeśli porzucimy założenie o ograniczoności procesów w Y, to topologia ulegnie wzbogaceniu, a zbiór ciągów zbieżnych uszczupleniu. Takie modele nie będą również spełniały założenia CV.

Na koniec rozważmy istniejące modele. W pracy Jouini, Napp, Schachermayer [13] autorzy rozważają dużą grupę modeli. Niestety, skupiają się tylko na dwóch różnych zbiorach Y: procesów adaptowanych, prawo- i lewostronnie ciągłych. Jak pokazaliśmy powyżej, nie mają one dobrych własności finansowych. W pracy Palczewskiego [21] zbudowany został model, który spełnia założenie CV, gdy momenty stopu zbiegają dostatecznie szybko.

Poniżej przedstawimy trzy modele, które spełniają założenia twierdzenia 1.3 i posiadają dobre własności finansowe.

1.3. Lipschitzowskie deflatory

Praca Jouini, Napp [12] wprowadziła pomysł modelowania rynków za pomocą przypływów pieniężnych w sposób przedstawiony w tym rozdziale. Niestety, autorom udało się stworzyć model, który pozwalał na transakcje tylko w deterministycznych momentach. To podejście zostało rozszerzone w pracy Napp [20], gdzie transakcje mogły odbywać się w momentach stopu o przeliczalnej liczbie wartości. Uogólnieniem tego wyniku była praca Palczewskiego [21], w której zbudowano model zezwalający na transakcje w dowolnych momentach stopu. Wszystkie powyższe podejścia wymagały niestety technicznego założenia nakładanego na rynek J, aby udowodnić twierdzenie 1.3. Nie były natomiast konieczne założenia C i L. Poniżej przedstawimy konstrukcję modelu z pracy autora [21] i pokażemy, jak wzorując się na artykule Jouini, Napp, Schachermayer [13] pozbyć się technicznego założenia. Ważną cechą tego modelu jest to, że spełnia on założenia twierdzenia 1.3 przy topologii normowej, co nie miało miejsca w przypadku modeli zaprezentowanych we wspomnianej pracy [13].

Konstrukcja przestrzeni

Definiujemy przestrzeń liniową M

$$M = \{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{t_i} : \quad \text{dla pewnych } N \in \mathbb{N}, (\alpha_i) \subset \mathbb{R}, (t_i) \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Wprowadzimy na niej normę. Niech $\mathcal{A}$ będzie zbiorem funkcji Lipschitzowskich z wykładnikiem 1 i ograniczonych przez 1, tj.

$$\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}_+ \ |f(t)| \le 1\,, |f(t) - f(s)| \le |t - s|\}\,.$$

Definiujemy funkcjonał na M wzorem

$$\|\mu\|_M = \sup \left\{ \Big| \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\alpha_i \Big| : \quad f \in \mathcal{A} \right\},$$

dla $\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{t_i} \in M$. Jeśli potraktujemy M jako przestrzeń miar, gdzie δ_t jest miarą skupioną w $\{t\}$, to $\| \cdot \|_M$ jest normą Fortet-Mouriera, równoważną słabej zbieżności miar. A zatem

LEMAT 1.9. $(M, \| \cdot \|_M)$ jest przestrzenią z normą.

Obliczymy teraz normy prostych elementów.

LEMAT 1.10. Niech $\alpha, \beta \ge 0$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, $t \neq s$.

(1) $\|\alpha\delta_t + \beta\delta_s\|_M = \alpha + \beta$

(2) $$\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M = \begin{cases} |\alpha - \beta| + |t - s|(\alpha \wedge \beta) & |t - s| \le 2 \\ \alpha + \beta & |t - s| > 2 \end{cases}$$

Dowód. Część (1) jest oczywista, gdy weźmiemy $f = 1 \in \mathcal{A}$. Dowód (2) jest bardziej złożony. Oznaczmy $\epsilon = |t - s|$. Jeśli $\epsilon > 2$, to istnieje funkcja $f \in \mathcal{A}$, taka że $f(t) = 1$ i $f(s) = -1$. Realizuje ona supremum w definicji normy i daje $\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M = \alpha + \beta$.

Niech $\epsilon \le 2$. Załóżmy, że $\alpha \ge \beta$. Podamy równoważną charakteryzację normy $\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M$, zauważając, że interesują nas tylko wartości funkcji z $\mathcal{A}$ w punktach s, t. Weźmy zbiór $\tilde{\mathcal{A}} = \{(a,b) : |a| \le 1,\ |b| \le 1,\ |a-b| \le \epsilon\}$. Wtedy $\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M = \sup_{(a,b)\in\tilde{\mathcal{A}}} |a\alpha - b\beta|$. Funkcja $b \mapsto a_0\alpha - b\beta$ jest malejąca, więc

$$\begin{aligned} F(a_0) &:= \sup_{(a_0,b)\in\tilde{\mathcal{A}}} |a_0\alpha - b\beta| \\ &= \max\Big(\big|a_0\alpha - \big((a_0-\epsilon)\vee -1\big)\beta\big|, \big|a_0\alpha - \big((a_0+\epsilon)\wedge 1\big)\beta\big|\Big). \end{aligned}$$

Stąd $\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M = \sup_{a\in[-1,1]} F(a)$ i dostajemy $\|\alpha\delta_t - \beta\delta_s\|_M = \alpha - \beta + \epsilon\beta$. ■

Zauważmy, że wielopunktowa wersja (1) z powyższego lematu ma identyczny dowód. Pozwoli ona wykazać, że M nie jest przestrzenią zupełną. Weźmy ciąg $\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\delta_{2i}$. Spełnia on warunek Cauchy'ego: $\|\mu_n - \mu_m\|_M = \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{2^i}$ dla $n > m$, lecz jego granica nie leży w M.

DEFINICJA 1.11. $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ jest uzupełnieniem przestrzeni $(M, \|\cdot\|_M)$.

Oznaczmy przez $\mathcal{M}'$ przestrzeń funkcjonałów liniowych ciągłych na $\mathcal{M}$. Pokażemy, że jest ona tożsama z przestrzenią funkcji lipschitzowskich i ograniczonych z dualnością daną wzorem

$$\langle f, \mu\rangle = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(t_i),$$

gdzie $\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\delta_{t_i} \in \mathcal{M}$, zaś f jest funkcją lipschitzowską, ograniczoną.

LEMAT 1.12. Niech $\mu^* \in \mathcal{M}'$. Funkcja $f(t) = \langle \mu^*, \delta_t\rangle$ jest ograniczona i lipschitzowska ze stałą C, tzn. istnieje stała C, taka że $|f(t)| \le C$ i $|f(t) - f(s)| \le C|t-s|$. W szczególności, powyższe oszacowanie zachodzi dla $C = \|\mu^*\|_{\mathcal{M}'}$.

Dowód. Aby dowieść ograniczoności, wykorzystamy ciągłość μ^*. Dla $t \in \mathbb{R}_+$

$$|f(t)| = |\langle \mu^*, \delta_t\rangle| \le \|\mu^*\|_{\mathcal{M}'} \|\delta_t\|_{\mathcal{M}} = \|\mu^*\|_{\mathcal{M}'}\,.$$

Ustalmy $t, s \in \mathbb{R}_+$. W podobny sposób dostajemy

$$|f(t) - f(s)| = |\langle \mu^*, \delta_t - \delta_s\rangle| \le \|\mu^*\|_{\mathcal{M}'} \|\delta_t - \delta_s\|_{\mathcal{M}}\,.$$

Na mocy lematu 1.10 otrzymujemy $\|\delta_t - \delta_s\|_{\mathcal{M}} = |t-s| \wedge 2 \le |t-s|$, co kończy dowód z $C = \|\mu^*\|_{\mathcal{M}'}$. ■

LEMAT 1.13. Niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną i lipschitzowską, czyli $|f(t)| \le C$ i $|f(t) - f(s)| \le C|t-s|$ dla pewnej stałej C. Istnieje wtedy dokładnie jeden funkcjonał liniowy ciągły $\mu^* \in \mathcal{M}'$, taki że $\langle \mu^*, \delta_t\rangle = f(t)$. Ponadto, $\|\mu^*\|_{\mathcal{M}'} \le C$.

Dowód. Na początek zauważmy, że możemy ograniczyć się do przypadku $C = 1$. Rozważmy funkcję $\tilde{f}(t) = \frac{f(t)}{C}$, która jest ograniczona przez 1 i spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. Niech $\tilde{\mu}^*$ będzie funkcjonałem liniowym związanym z $\tilde{f}(t)$. Wtedy $\mu^* = C\tilde{\mu}^*$ jest funkcjonałem liniowym, takim że $\langle \mu^*, \delta_t\rangle = f(t)$ i $\|\mu^*\|_{\mathcal{M}'} \le C$. Z jedyności $\tilde{\mu}^*$ dostajemy jedyność μ^*.

Załóżmy teraz, że $C = 1$. Zdefiniujmy μ^* na przestrzeni rozpiętej przez $(\delta_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (tj. przestrzeni M) jako $\langle\mu^*, \delta_t\rangle = f(t)$. Pokażemy, że μ^* jest liniowy i ciągły na tej przestrzeni. Liniowość jest oczywista. Aby wykazać ciągłość zauważmy, że f jest elementem $\mathcal{A}$, czyli dla dowolnego $\mu \in M$

$$|\langle\mu^*, \mu\rangle| = |\sum_{t\in\mathbb{R}_+} \mu(t)f(t)| \le \sup_{h\in\mathcal{A}} |\sum_{t\in\mathbb{R}_+} \mu(t)h(t)| = \|\mu\|_M.$$

Zatem $\|\mu^*\|_{M'} \le 1$. Rozszerzamy μ^* na całą przestrzeń $\mathcal{M}$ jako ciągły funkcjonał liniowy z normą 1. To rozszerzenie jest jednoznaczne, gdyż $\mathcal{M}$ jest uzupełnieniem M. ■

Wprowadzimy teraz przestrzeń zmiennych losowych o wartościach w przestrzeni Banacha $\mathcal{M}$, całkowalnych w sensie Bochnera. Dla jasności przedstawimy zarys konstrukcji, którą znaleźć można w monografiach Danforda, Schwarza [8] lub Yosidy [32]. Funkcja $X : \Omega \to \mathcal{M}$ jest zmienną losową prostą, jeśli jest mierzalna i ma skończoną liczbę wartości, tzn. istnieje $N \in \mathbb{N}$, ciąg $(\mu_n)_{n=1,\dots,N} \subset \mathcal{M}$ oraz N rozłącznych mierzalnych zbiorów $(A_n)_{n=1,\dots,N}$, takich że $A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{n=1}^N A_n = \Omega$ i $X = \sum_{n=1}^N \mu_n 1_{A_n}$. Funkcję X nazwiemy silnie mierzalną, jeśli istnieje ciąg zmiennych losowych prostych zbieżnych do X w normie $\mathcal{M}$ dla prawie każdego $\omega \in \Omega$. Przestrzeń zmiennych silnie mierzalnych, dla których skończona jest wartość oczekiwana $\mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{M}}$, oznaczamy przez $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$. Jest ona przestrzenią Banacha z normą

$$\|X\|_{L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})} = \mathbb{E}\|X\|_{\mathcal{M}}$$

LEMAT 1.14. Jeśli τ jest nieujemną zmienną losową, $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$, to $Y\delta_\tau \in L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$.

Dowód. Wskażemy ciąg zmiennych losowych prostych $X_n \in L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$ zbieżny do $Y\delta_\tau$. Niech Y_n będzie ciągiem zmiennych losowych prostych zbieżnych do Y p.n. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$ i połóżmy $A_k = \left\{\tau \in [\frac{kn}{n^2}, \frac{(k+1)n}{n^2})\right\}$ dla $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$. Niech

$$X_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} Y_n 1_{A_k} \delta_{\frac{kn}{n^2}}.$$

Wtedy X_n zbiega do $Y\delta_\tau$ p.n. na mocy lematu 1.10. ■

Korzystając z pracy Schwartza ([28]) konstruujemy przestrzeń dualną do $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$. Funkcja $\Phi : \Omega \to \mathcal{M}'$, gdzie $\mathcal{M}'$ jest przestrzenią sprzężoną do $\mathcal{M}$, nazywa się *-słabo mierzalna, jeśli dla każdego $x \in \mathcal{M}$ funkcja $\omega \mapsto \langle\Phi(\omega), x\rangle$ jest mierzalna jako funkcja z Ω do $\mathbb{R}$. Niech $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{M}')$ będzie przestrzenią wszystkich *-słabo mierzalnych funkcji Φ, dla których

$$\inf\{K \ge 0 : \|\Phi\|_{\mathcal{M}'} \le K \text{ p.n.}\} < \infty.$$

Wprowadzamy relację równoważności w zbiorze $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{M}')$: $\Phi \sim \Psi$, gdy $\forall x \in \mathcal{M}\ \langle\Phi, x\rangle = \langle\Psi, x\rangle$ p.n. Połóżmy

$$L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}') = \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{M}')/\sim$$

i zdefiniujmy funkcjonał

$$\|\Phi\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')} = \inf_{\phi\sim\Phi} \|\phi\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{M}')} = \inf\{K \ge 0 : \|\Phi\|_{\mathcal{M}'} \le K \text{ p.n.}\}.$$

TWIERDZENIE 1.15. ([28]) Przestrzeń $(L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}'), \|\cdot\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')})$ jest przestrzenią Banacha. Jest ona przestrzenią sprzężoną do $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$ z dualnością zadaną wzorem:

$$L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M}) \ni X \mapsto \langle \Psi, X \rangle_{\langle L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}'), L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})\rangle} = \mathbb{E}\, \langle \Psi, X \rangle_{\langle \mathcal{M}', \mathcal{M}\rangle},$$

gdzie $\Psi \in L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$.

Przestrzeń $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ może być postrzegana jako przestrzeń mierzalnych procesów stochastycznych $y : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ (tzn. mierzalnych jako funkcja dwóch zmiennych), ograniczonych i lipschitzowsko ciągłych. Na elementach postaci $X = \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i}$ dualność jest dana wzorem

$$\langle y, X \rangle = \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i).$$

TWIERDZENIE 1.16. Element $\Psi \in L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ może być postrzegany jako mierzalny proces stochastyczny $y(t)(\omega) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ zadany przez $y(t) = \langle \delta_t, \Psi \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle}$, jednoznaczny z dokładnością do nieodróżnialności, o trajektoriach ograniczonych przez $\|\Psi\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')}$ i lipschitzowsko ciągłych ze stałą $\|\Psi\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')}$ dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$.

Dowód. Najpierw pokażemy, że $\Psi \in L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ definiuje proces y o podanych własnościach. Zauważmy najpierw, że zmienna losowa $y(t)$ zdefiniowana w twierdzeniu jest mierzalna dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$, ponieważ Ψ jest *-słabo mierzalne. Dla dowolnego $\omega \in \Omega$ funkcja $t \to \langle \delta_t, \Psi(\omega) \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle}$ spełnia warunek Lipschitza i jest ograniczona przez stałą $\|\Psi(\omega)\|_{\mathcal{M}}$. Stąd $y(t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest procesem mierzalnym (patrz np. Uwaga 1.14 w Karatzas [14]).

Weźmy Φ, inny element z klasy abstrakcji Ψ i zdefiniujmy $z(t) = \langle \delta_t, \Phi \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle}$. Wiemy, że dla dowolnego $\mu \in \mathcal{M}$ mamy $\langle \mu, \Psi \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle} = \langle \mu, \Phi \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle}$ p.n., więc $z(t)$ jest modyfikacją $y(t)$, lecz dla procesów ciągłych jest to równoważne nieodróżnialności.

Ostatnie stwierdzenie wynika z definicji normy $\|\cdot\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')}$.

Teraz wykażemy przeciwną implikację. Niech $y(t, \omega)$ będzie procesem spełniającym warunki twierdzenia. Pokażemy, że jednoznacznie definiuje on funkcjonał liniowy na $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$. Niech H będzie podprzestrzenią liniową $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$ rozpiętą przez zmienne losowe postaci $1_A \delta_t$, $A \in \mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy funkcjonał liniowy Ψ na H wzorem: $\langle 1_A \delta_t, \Psi \rangle = \mathbb{E}\, 1_A y(t)$. Liniowość jest oczywista, pozostaje tylko wykazać ciągłość. Weźmy $Y \in H$. Możemy zapisać Y w postaci $Y = \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k} \delta_{t_k}$ dla pewnych K, $A_k \in \mathcal{F}_{t_k}$, $t_k \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, K$. Zatem

$$\begin{aligned} \Psi(Y) &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \langle 1_{A_k} \delta_{t_k}, \Psi \rangle = \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbb{E}\left(1_{A_k} y(t_k)\right) \\ &= \mathbb{E} \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k} y(t_k) = \int_\Omega \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) y(t_k)(\omega) d\mathbb{P}(\omega). \end{aligned}$$

Dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$, $y(t)(\omega)$ jako funkcja $t \in \mathbb{R}_+$ jest lipschitzowsko ciągła z pewną stałą L i ograniczona przez L. Ustalmy $\omega \in \Omega$. Na mocy lematu 1.13 $y(t)(\omega)$ definiuje funkcjonał liniowy ciągły na $\mathcal{M}$ z normą L. Ponieważ $\sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) \delta_{t_k} \in \mathcal{M}$ dostajemy

$$\left| \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) y(t_k)(\omega) \right| \le L \left\| \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) \delta_{t_k} \right\|_{\mathcal{M}} = L \|Y(\omega)\|_{\mathcal{M}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\left|\langle Y,\Psi\rangle\right| &= \left|\int_\Omega \sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) y(t_k)(\omega) d\mathbb{P}(\omega)\right| \leq \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^K \alpha_k 1_{A_k}(\omega) y(t_k)(\omega)\right| d\mathbb{P}(\omega)\\ &\leq \int_\Omega L\|Y(\omega)\|_{\mathcal{M}} d\mathbb{P}(\omega) = L\|Y\|_{L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})}\end{aligned}$$

Rozszerzamy teraz Ψ na całą przestrzeń $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})$ jako funkcjonał liniowy ciągły (Yosida [32], twierdzenie IV.5.1). Zauważmy, że $\langle 1_A\delta_\tau,\Psi\rangle = \mathbb{E}\,1_A y(\tau)$ dla dowolnego momentu stopu τ i zbioru $A \in \mathcal{F}_\tau$. Niech τ_n będzie ciągiem momentów stopu o skończonej liczbie wartości zbiegających do τ prawie na pewno. Na mocy lematu 1.10 $1_A\delta_{\tau_n} \xrightarrow{\mathcal{M}} 1_A\delta_\tau$ p.n. i z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej $1_A\delta_{\tau_n} \to 1_A\delta_\tau$ w $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})$. Stąd $\langle 1_A\delta_{\tau_n},\Psi\rangle \to \langle 1_A\delta_\tau,\Psi\rangle$. Z drugiej strony $\mathbb{E}\,1_A y(\tau_n) \to \mathbb{E}\,1_A y(\tau)$ z twierdzenia z zbieżności zmajoryzowanej ($y(t)$ jest ograniczone przez L). Czyli $\langle 1_A\delta_\tau,\Psi\rangle = \mathbb{E}\,1_A y(\tau)$. Identyczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla dowolnego $\Theta \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_\tau,\mathbb{P})$ mamy $\langle\Theta\,\delta_\tau,\Psi\rangle = \mathbb{E}\,\Theta y(\tau)$. ■

Dowód własności C i L

Powróćmy do notacji z podrozdziału 1.1. Połóżmy $X = L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})$, $Y = L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')$. Rozważmy model (Γ,τ), gdzie

$$\Gamma = \Big\{\sum_{i=1}^N \gamma_i\delta_{\tau_i} \in \mathcal{D}: \quad \gamma_i \in L^1(\Omega,\mathcal{F}_{\tau_i}), \quad i=1,\ldots,N\Big\} \subseteq L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M}),$$

zaś τ jest indukowaną topologią z $L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M})$. Na mocy twierdzenia 1.16 przestrzeń Y możemy identyfikować ze zbiorem procesów mierzalnych, ograniczonych i lipschitzowsko ciągłych. Dla $\mu = \sum_{i=1}^N \gamma_i\delta_{\tau_i} \in \Gamma$ i $y \in L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')$

$$\langle\mu,y\rangle_{\langle L^1_{\mathbb{P}}(\Omega,\mathcal{M}),L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')\rangle} = \mathbb{E}\sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i) = \mathbb{E}\sum_{i=1}^N \gamma_i{}^o y(\tau_i).$$

Wykażemy teraz, że spełnione są założenia twierdzenia 1.3. Zauważmy, że z faktu, że X i Y są przestrzeniami Banacha w dualności normowej wynika, że X jest przestrzenią lokalnie wypukłą, zaś Y oddziela punkty X. Założenie C jest bezpośrednim wnioskiem z tego, że topologia $\sigma(Y,X)$ jest równoważna topologii zadanej przez normę $\|\cdot\|_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')}$: jeśli weźmiemy $\alpha_n = \|y_n\|^{-1}_{L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')}2^{-n}$, to ciąg

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_n y_n\right)_{n>0}$$

jest ciągiem Cauchy'ego w $L^\infty_*(\Omega,\mathcal{M}')$ i tym samym jest zbieżny. Wystarczy zatem udowodnić

TWIERDZENIE 1.17. Model (Γ,τ) spełnia warunek L.

Dowód. W dowodzie wykorzystamy pomysły z pracy Jouini, Napp, Schachermayer [13]. Niech $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \subset Y_+^{\Gamma+}$ będzie daną rodziną funkcjonałów. Skonstruujemy ciąg $(\alpha_n) \subset I$, o którym później pokażemy, że spełnia warunki założenia L. W dowodzie będziemy szeroko używać opcjonalnych projekcji procesów, które będziemy oznaczać ${}^o y$. Przypomnijmy, że ${}^o y$ jest procesem cádlág dla $y \in Y$.

Zauważmy także, że $y \in Y_+^{\Gamma_+}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ${}^o y(t) \geq 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ (patrz dowód lematu 1.4). Niech $(U_i)_{n=1}^{\infty}$ będzie rodziną wszystkich otwartych przedziałów w $\mathbb{R}_+$ z wymiernymi końcami. Kładziemy

$$A_{i,\alpha} = \{\omega : \quad {}^o y_\alpha(t)(\omega) > 0 \; \forall t \in U_i\}, \quad i \in \mathbb{N}, \, \alpha \in I.$$

Ustalmy $i \in \mathbb{N}$. Możemy znaleźć ciąg (niekoniecznie jedyny) $(\alpha_n(i))_{n=1}^{\infty} \subset I$, taki że $A_{i,\alpha} \subseteq A_i$ p.n. dla dowolnego $\alpha \in I$, gdzie $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i,\alpha_n(i)}$. Jednym ze sposobów na otrzymanie tego ciągu $\alpha_n(i)$ jest iteracyjna konstrukcja: gdy już znajdziemy go dla $n < N$, kładziemy

$$\alpha_N(i) \in \big\{\alpha : \quad \mathbb{P}(A_{i,\alpha} \setminus B_N(i)) \geq \sup_{\alpha' \in I} \mathbb{P}(A_{i,\alpha'} \setminus B_N(i)) - 2^{-N}\big\},$$

gdzie $B_N(i) = \bigcup_{i=1}^{N-1} A_{i,\alpha_n(i)}$. Definiujemy

$$\begin{aligned}
S_\alpha &= \{(t,\omega) : \quad {}^o y_\alpha(t)(\omega) > 0\}, \quad \alpha \in I, \\
S_\alpha(\omega) &= \{t : \quad {}^o y_\alpha(t)(\omega) > 0\}, \quad \alpha \in I, \\
L_\alpha(\omega) &= \{t : \quad \exists \epsilon > 0 \quad {}^o y_\alpha(s)(\omega) > 0 \text{ dla } s \in (t, t+\epsilon) \text{ oraz } {}^o y_\alpha(t)(\omega) = 0\}, \quad \alpha \in I
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
S &= \{(t,\omega) : \quad \exists n, i \quad {}^o y_{\alpha_n(i)}(t)(\omega) > 0\}, \\
S(\omega) &= \{t : \quad \exists n, i \quad {}^o y_{\alpha_n(i)}(t)(\omega) > 0\}, \\
L(\omega) &= \bigcup_{n,i \in \mathbb{N}} L_{\alpha_n(i)}(\omega).
\end{aligned}$$

Z konstrukcji $(\alpha_n(i))_{n=1}^{\infty}$ dostajemy, że $\mathbb{P}(\omega : \quad S_\alpha(\omega) \supseteq U_i, \quad S(\omega) \supsetneq U_i) = 0$ dla każdego $\alpha \in I$, $i \in \mathbb{N}$. Stąd $S_\alpha(\omega) \setminus S(\omega) \subseteq L(\omega)$ p.n. Musimy znaleźć przeliczalny zbiór funkcjonałów, który pokryje zbiór L. Pokażemy, że $L = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times L(\omega)$ jest zbiorem opcjonalnym. Oczywiście $L = \bigcup_{n,i \in \mathbb{N}} L_{\alpha_n(i)}$, gdzie $L_\alpha = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times L_\alpha(\omega)$. Wystarczy więc wykazać, że L_α jest zbiorem opcjonalnym. Momenty kolejnych skoków procesu ${}^o y_\alpha$ z 0 do jakiegoś dodatniego poziomu są dobrze zdefiniowanymi momentami stopu (prawostronna ciągłość gwarantuje, że są dodatnie odległości pomiędzy kolejnymi skokami. Wykresy momentów stopu są zbiorami opcjonalnymi, więc L_α jako suma przeliczalnej rodziny zbiorów opcjonalnych jest zbiorem opcjonalnym. Podobnie, L jako suma przeliczalnej podrodziny $(L_\alpha)_{\alpha \in I}$ jest zbiorem opcjonalnym. Ponadto, $L(\omega)$ jest przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}_+$. Jeśli L jest nieodróżnialny od zbioru pustego, to nic nie musimy robić. W przeciwnym przypadku, na mocy twierdzenia o opcjonalnym podziale (VI.5.1 w monografii Davis, Williams [26]) istnieje ciąg momentów stopu T_k, taki że

$$L = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(\omega, T_k(\omega)) : \quad T_k < \infty\}$$

z dokładnością do nieodróżnialności. Postępujemy identycznie jak w konstrukcji $A_{i,\alpha}$ i A_i, aby dostać

$$B_{k,\alpha} = \{\omega : \quad T_k(\omega) < \infty \text{ oraz } {}^o y_\alpha(T_k)(\omega) > 0\}$$

i ciąg $(\beta_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający $B_{k,\alpha} \subseteq B_k$ p.n. dla dowolnego $\alpha \in I$, gdzie $B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{k,\beta_n(k)}$.

Łatwo sprawdzamy, że rodzina $(y_{\alpha_n(i)})_{i,n \in \mathbb{N}} \cup (y_{\beta_n(k)})_{k,n \in \mathbb{N}}$ spełnia założenia warunku L. Weźmy $x \in \Gamma_+$ i $\alpha \in I$, takie że $\langle x, y_\alpha \rangle > 0$. Pokażemy, że $\langle x, y_{\alpha_n(i)} \rangle > 0$ dla pewnych n, i. Zapisujemy

x w postaci $x = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i}$, dla pewnych $N \in \mathbb{N}$, $\gamma_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_i}, \mathbb{R}_+)$ i momentów stopu τ_i. Bezpośrednio z definicji

$$\langle x, y_\alpha \rangle = \mathbb{E} \langle x, y_\alpha \rangle_{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}' \rangle} = \mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y_\alpha(\tau_i).$$

Zatem, wystarczy udowodnić, że jeśli $\langle \gamma\delta_\tau, y_\alpha \rangle > 0$ dla $\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbb{R}_+)$ i pewnego $\alpha \in I$, to $\langle \gamma\delta_\tau, y_{\alpha_n(i)} \rangle > 0$ dla pewnego n, i. Połóżmy $D = \{(t,\omega) : \quad \gamma(\omega) > 0, \quad \tau(\omega) = t\}$. Warunek $\langle \gamma\delta_\tau, y_\alpha \rangle = \mathbb{E}\, \gamma y_\alpha(\tau) > 0$ gwarantuje nam, że $S_\alpha \cap D$ nie jest zbiorem nieodróżnialnym od zbioru pustego. Stąd $(S \cup L) \cap D$ jest nieodróżnialny od zbioru pustego. Istnieją więc n, i, takie że $(S_{\alpha_n(i)} \cup L_{\alpha_n(i)}) \cap D$ jest nieodróżnialny od zbioru pustego i $\mathbb{E}\, \gamma y_{\alpha_n(i)}(\tau) > 0$. ■

Możemy zatem sformułować twierdzenie 1.3 w języku procesów stochastycznych.

TWIERDZENIE 1.18. Na rynku J nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces $y(t)(\omega)$ i stała M spełniające

i) $y(t)$ jest procesem mierzalnym,
ii) $\mathbb{P}(|y(t)| \leq M \ \forall t \in I) = 1$,
iii) $\mathbb{P}(|y(t) - y(s)| \leq M|t-s|) = 1$ (lipschitzowska ciągłość),
iv) $\mathbb{P}({}^o y(t) > 0 \ \forall t \in I) = 1$,
v) $\mathbb{E} \sum_{i=1}^{N} \gamma_i y(\tau_i) \leq 0$ dla dowolnego $\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \delta_{\tau_i} \in J$.

Warunkowa własność Lipschitza

Przestrzeń Γ nie oddziela punktów w $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$, tzn. dwa różne elementy $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ mogą działać na Γ w ten sam sposób. Jest to spowodowane tym, że mogą istnieć dwa funkcjonały w $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ o tej samej opcjonalnej projekcji. A jak już pokazaliśmy, działanie funkcjonału na Γ zależne jest tylko od jego opcjonalnej projekcji. Powinniśmy zatem przyjrzeć się własnościom opcjonalnych projekcji lipschitzowsko ciągłych i ograniczonych procesów mierzalnych. Sformułujemy warunki konieczne, by dany adaptowany proces był opcjonalną projekcją elementu $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$.

DEFINICJA 1.19. Adaptowany proces $(X_t)_{t \in I}$ o trajektoriach cádlág nazywany jest **warunkowo lipschitzowskim** ze stałą K, jeśli istnieje wersja cádlág procesu $(\mathbb{E}(X_s \,|\, \mathcal{F}_t))_{s \geq t}$, która spełnia warunek Lipschitza ze stałą K niezależną od wyboru $t \in I$.

Wszystkie wersje cádlág procesu $(\mathbb{E}(X_s \,|\, \mathcal{F}_t))_{s \geq t}$ rozważanego w powyższej definicji są nieodróżnialne. Proces spełnia warunek Lipschitza, jeśli prawie wszystkie trajektorie są funkcjami lipschitzowskimi.

Zakładamy, że wszystkie procesy są zdefiniowane dla $t \in I$, gdzie $I = [0, T]$ or $I = [0, \infty)$.

LEMAT 1.20. Jeżeli (X_t) jest procesem mierzalnym o trajektoriach spełniających warunek Lipschitza ze stałą K oraz $X_0 \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$, to jego opcjonalna projekcja $({}^o X_t)$ jest warunkowo lipschitzowska ze stałą K.

Dowód. Ustalmy $t \in I$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}({}^o X_{s_2} \,|\, \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}({}^o X_{s_1} \,|\, \mathcal{F}_t)\right| &= \left|\mathbb{E}(X_{s_2} \,|\, \mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X_{s_1} \,|\, \mathcal{F}_t)\right| = \left|\mathbb{E}(X_{s_2} - X_{s_1} \,|\, \mathcal{F}_t)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(|X_{s_2} - X_{s_1}| \,\big|\, \mathcal{F}_t\right) \leq K|s_2 - s_1|. \end{aligned}$$

■

TWIERDZENIE 1.21. Niech $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ będzie adaptowanym procesem cádlág, warunkowo lipschitzowskim ze stałą K, o trajektoriach ograniczonych przez K. Istnieje wtedy mierzalny proces $(X_t)_{t\in[0,T]}$, taki że

i) (X_t) jest ograniczony przez KT,

ii) (X_t) spełnia warunek Lipschitza ze stałą K,

iii) (Z_t) jest nieodróżnialny od ${}^oX_t$.

Dowód. Zdefiniujmy

$$D^n = \left\{ \frac{i}{2^n}T : \quad i = 0, \ldots, 2^n \right\},$$
$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D^n.$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ skonstruujemy ograniczony i lipschitzowski proces X_t^n określony na D i taki że $\mathbb{E}\,(X_t^n \,|\, \mathcal{F}_t) = Z_t$ p.n. dla $t \in D^n$. Znajdziemy następnie podciąg X^n zbiegający prawie wszędzie na $D \times \Omega$ do X i taki że $\mathbb{E}\,(X_t \,|\, \mathcal{F}_t) = Z_t$ p.n. dla $t \in D$ oraz X ograniczony i lipschitzowski. Następnie rozszerzymy X na cały odcinek $[0,T]$ przez ciągłość i pokażemy, że Z_t jest nieodróżnialny od ${}^oX_t$.

Rozpocznijmy zatem od konstrukcji X_n. W tym celu wykorzystamy prosty lemat

LEMAT 1.22. Niech $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ będą dwoma σ-ciałami. Dla dowolnych zmiennych losowych $Z_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_1)$, $Z_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_2)$ spełniających $|\mathbb{E}\,(Z_2 \,|\, \mathcal{G}_1) - Z_1| \le K$ możemy znaleźć zmienną losową $H \in L^1(\Omega, \mathcal{G}_2)$, taką że $|H - Z_2| \le K$ oraz $Z_1 = \mathbb{E}\,(H \,|\, \mathcal{G}_1)$.

Dowód lematu. Weźmy $H = Z_2 - \big(\mathbb{E}\,(Z_2 \,|\, \mathcal{G}_1) - Z_1\big)$. ∎

Oznaczmy punkty w D^n przez rosnący ciąg $(t_i)_{i=0,\ldots,2^n} \subseteq D^n$. Kładziemy $X_T^n = Z_T$. Na mocy powyższego lematu indukcyjnie obliczamy $X^n_{t_{2^n-1}}, X^n_{t_{2^n-2}}, \ldots, X_0^n$:

$$X^n_{t_{i-1}} = X^n_{t_i} - \big(\mathbb{E}\,(X^n_{t_i} \,|\, \mathcal{F}_{t_{i-1}}) - Z_{t_{i-1}}\big), \quad i = 2^n, 2^n - 1, \ldots, 1.$$

Rozszerzamy X^n do całego D przez liniową interpolację. Otrzymany proces jest mierzalny, ograniczony przez KT i spełnia warunek Lipschitza ze stałą K.

Znajdziemy teraz podciąg X^n zbiegający prawie wszędzie na $D \times \Omega$ do procesu X spełniającego $\mathbb{E}\,(X_t \,|\, \mathcal{F}_t) = Z_t$ p.n. dla $t \in D$. Ustalmy dowolną miarę probabilistyczną μ na D kładącą niezerową masę na każdym z punktów D i rozważmy przestrzeń $L^2(D \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$. Wszystkie procesy X^n są elementami tej przestrzeni, ponieważ są ograniczone przez KT.

LEMAT 1.23. Istnieje $X \in L^2(D \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$ i ciąg $H^n \in \operatorname{conv}(X^n, X^{n+1}, \ldots)$ zbieżny do X p.n.

Dowód lematu. Lemat ten wykorzystywany jest w wielu pracach. Pełny jego dowód znajduje się w pracy Delbaena i Schachermayera [7]. My przedstawimy tylko szkic. Na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu, kula o promieniu KT jest słabo zwarta w $L^2(D \times \Omega, \mu \otimes \mathbb{P})$, czyli istnieje podciąg X_{n_k} zbieżny słabo do pewnego X. Następnie z twierdzenia Hahna-Banacha o oddzielaniu dostajemy, że X należy do domknięcia otoczki wypukłej $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a także do otoczki wypukłej $(X_n)_{n\ge N}$ dla dowolnego N. Stąd istnieje ciąg $H^n \in \operatorname{conv}(X^n, X^{n+1}, \ldots)$ zbiegający do X p.n. (wzięty jako podciąg ciągu zbieżnego w L^2). ∎

Wszystkie elementy $\mathrm{conv}(X^n, X^{n+1}, \dots)$ są ograniczone przez KT i spełniają warunek Lipschitza ze stałą K. Te własności zachowuje też punktowa granica. Ponadto, na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej

$$\mathbb{E}\left(X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_t^n \,|\, \mathcal{F}_t\right) = Z_t, \quad t \in D.$$

Rozszerzamy X do całego odcinka $[0, T]$ przez ciągłość. Wtedy $({}^o X_t) = (Z_t)$ z dokładnością do nieodróżnialności na mocy prawostronnej ciągłości (Z_t) i równości $\mathbb{E}\left(X_t \,|\, \mathcal{F}_t\right) = Z_t$ na gęstym podzbiorze $[0, T]$. ■

Powyższe twierdzenie, ze względu na wzrost ograniczenia na trajektorie procesu wraz z T, pozwala na zastosowanie dla skończonego horyzontu czasowego.

TWIERDZENIE 1.24. Załóżmy, że $I = [0, T], \quad T < \infty$. Na rynku J nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces adaptowany $(y(t))_{t\in[0,T]}$ o trajektoriach cádlág i stała M, takie że

i) $\mathbb{P}(0 < y(t) \leq M \; \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$,

ii) $y(t)$ jest warunkowo lipschitzowski,

iii) $\mathbb{E} \sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i) \leq 0$ dla dowolnego $\sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i} \in J$.

1.4. Ciągłe deflatory

Poniższy model, podobnie jak następny, będzie prezentował drogę konstrukcji zapowiedzianą w podrozdziale 1.2. Ustalmy przestrzeń

$$X = \Gamma = \Big\{ \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i} \in \mathcal{D} : \quad \gamma_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_{\tau_i}), \quad i = 1, \dots, N \Big\}$$

i określmy na niej topologię τ poprzez podanie zbioru funkcjonałów liniowych. Niech Y będzie przestrzenią wszystkich ograniczonych, mierzalnych procesów o ciągłych trajektoriach. Dualność zadajemy wzorem

$$\langle x, y \rangle_{\langle X,Y\rangle} = \mathbb{E} \sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i).$$

Przyjmujemy $\tau = \sigma(X, Y)$. Wykażemy, że model (Γ, τ) spełnia założenia twierdzenia 1.3.

TWIERDZENIE 1.25. Model (Γ, τ) spełnia założenia twierdzenia 1.3, tzn.

i) Y separuje punkty Γ,

ii) τ jest lokalnie wypukłą topologią,

iii) spełnione są założenia C i L.

Dowód. Wykażemy najpierw i). Zauważmy, że elementy Y działają na $x \in \Gamma$ w ten sam sposób, co elementy $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$. Ponadto, Y zawiera $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$, ponieważ procesy lipschitzowskie są ciągłe. Wykazaliśmy, że $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ oddziela punkty Γ, więc przestrzeń Y też. Na mocy lematu V.3.3 z monografii Dunforda, Schwarza [8] wynika, że topologia $\sigma(\Gamma, Y)$ jest lokalnie wypukła. Założenia L dowodzimy w podobny sposób jak w twierdzeniu 1.17 biorąc opcjonalne projekcje elementów z Y. Wykazanie założenia C wymaga spojrzenia na Y jako na podprzestrzeń $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P} \otimes |\cdot|)$. Topologia L^∞ na Y jest silniejsza niż $\sigma(Y, X)$: jeśli $\|y_n - y\|_{L^\infty} \to 0$, to $\mathbb{E}\,\gamma y_n(\sigma) \to \mathbb{E}\,\gamma y(\sigma)$ dla dowolnego momentu stopu σ i $\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\sigma, \mathbb{R})$ na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej (majorantą jest γM dla pewnej stałej M). A zatem założenie C jest spełnione, gdyż jest ono trywialnie spełnione w przestrzeni Banacha $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mathbb{P} \otimes |\cdot|)$. ■

Jako wniosek z twierdzenia 1.3 dostajemy

LEMAT 1.26. Na rynku J nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces mierzalny $y(t)(\omega)$ i stała M, takie że

i) $\mathbb{P}(|y(t)| \le M \;\forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
ii) prawie wszystkie trajektorie $y(t)$ są ciągłe,
iii) $\mathbb{P}({}^o y(t) > 0 \;\forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
iv) $\mathbb{E}\,\sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i) \le 0$ dla dowolnej inwestycji $\sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i} \in J$.

Jeśli filtracja jest quasi-lewostronnie ciągła, tzn. $\mathcal{F}_\sigma = \mathcal{F}_{\sigma-}$ dla dowolnego prognozowalnego momentu stopu σ, to możemy ograniczyć przestrzeń Y do procesów adaptowanych, ciągłych.

LEMAT 1.27. Załóżmy, że filtracja jest quasi-lewostronnie ciągła. Na rynku J nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces adaptowany $y(t)(\omega)$ o ciągłych trajektoriach i stała M, takie że

i) $\mathbb{P}(0 < y(t) \le M \;\forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
ii) $\mathbb{E}\,\sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i) \le 0$ dla dowolnej inwestycji $\sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i} \in J$.

Dowód. Lewa implikacja jest oczywista na mocy lematu 1.26. Wykażemy teraz implikację w drugą stronę. Na mocy lematu 1.26 istnieje proces $g \in Y$. Niech $y = {}^o g$ będzie opcjonalną projekcją g, zaś $z = {}^p g$ – prognozowalną projekcją. Wtedy proces y jest cádlág , zaś proces z jest cáglád, czyli lewostronnie ciągły z prawostronnymi granicami (patrz podrozdział VI.7 w Rogers, Williams [26]). Zauważmy, że dla dowolnego prognozowalnego momentu stopu σ

$$y_\sigma 1_{\sigma<\infty} = \mathbb{E}\,(g_\sigma 1_{\sigma<\infty} \,|\, \mathcal{F}_\sigma) = \mathbb{E}\,(g_\sigma 1_{\sigma<\infty} \,|\, \mathcal{F}_{\sigma-}).$$

Zatem y jest także projekcją prognozowalną. Jednak zarówno projekcja opcjonalna jak i projekcja prognozowalna jest zdefiniowana z dokładnością do nieodróżnialności. Stąd proces y jest nieodróżnialny od z, czyli jest procesem ciągłym. ■

1.5. Dobry zbiór deflatorów

Niech

$$\Gamma = \{\Phi \in \tilde{\Gamma} : \quad \Phi \text{ ma reprezentację } \sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i}, \text{ gdzie } \tau_i\text{– ograniczony moment stopu}\}.$$

Ustalmy na Γ najmniejszą topologię τ spełniającą założenia R i CV. Przyjęliśmy, że założenie CV jest koniecznym elementem dobrego modelu. Tutaj wybieramy najmniejszą topologię spełniającą to założenie lub, inaczej, najmniejszy zbiór funkcjonałów Y. Na mocy założenia R wiemy, że Y jest podprzestrzenią adaptowanych procesów cádlág . Zwróćmy uwagę, że zbiór Y składa się ze wszystkich adaptowanych procesów cádlág , które spełniają warunek CV tzn.

$$\mathbb{E}\, Z_n y(\sigma_n) \to \mathbb{E}\, Z y(\sigma)$$

dla ciągów Z_n i σ_n jak w definicji CV. Ze względu na definicję Γ rozważamy jedynie ograniczone momenty σ_n. Z dowodu lematu 1.6 wynika, że każdy proces $y \in Y$ jest ograniczony na zbiorach zwartych (w tym przypadku wystarczy, by Γ była jak powyżej).

Udowodnimy, że model (Γ, τ) spełnia założenia twierdzenia 1.3. Głównym problemem będzie wykazanie założenia C.

TWIERDZENIE 1.28. Na rynku J nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje proces stochastyczny y spełniający następujące warunki

i) y jest adaptowany i cádlág,
ii) y spełnia warunek CV,
iii) $\mathbb{P}(y(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+) = 1$,
iv) $\mathbb{E} \sum_{i=1}^N \gamma_i y(\tau_i) \leq 0$ dla dowolnej inwestycji $\sum_{i=1}^N \gamma_i \delta_{\tau_i} \in J$.

Dowód. Równoważność zaprezentowana w twierdzeniu jest bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 1.3. Musimy zatem udowodnić założenia tego twierdzenia. Kładziemy $X = \Gamma$. Zauważmy najpierw, że przestrzeń $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ jest zawarta w Y (ograniczone i lipschitzowskie procesy są ciągłe, więc spełniają warunek CV na mocy lematu 1.7) oraz $L^\infty_*(\Omega, \mathcal{M}')$ oddziela punkty Γ, czyli Y również oddziela punkty Γ. Zatem topologia $\tau = \sigma(X, Y)$ jest lokalnie wypukła.

Założenie L dowodzimy identycznie jak w twierdzeniu 1.17 pomijając jedynie operację opcjonalnej projekcji, gdyż opcjonalna projekcja procesu adaptowanego jest nieodróżnialna od niego samego.

Wykazanie założenia C wymaga lokalizacji. Niech $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną procesów w Y. Skonstruujemy ciąg dodatnich liczb α_n o tej własności, że szereg $\sum_{i=1}^N \alpha_i y_i$ jest zbieżny w (Γ, τ). Jak wspomnieliśmy, dowolny $y \in Y$ jest jednostajnie ograniczony przez stałą na każdym przedziale $[0, T]$, $T \geq 0$. Połóżmy $y_n^T(t) = y_n(t) 1_{t\leq T}$, $n \in \mathbb{N}$. Rodzina $(y_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$ może być traktowana jako podzbiór $L^\infty(\Omega \times [0,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), \mathbb{P} \otimes |\cdot|)$. Na mocy zupełności tej przestrzeni konstruujemy ciąg liczb dodatnich $(\alpha_n^T)_{n\in\mathbb{N}}$, taki że $\sum_{i=1}^N \alpha_i^T y_i^T$ zbiega do pewnego y^T, gdy $N \to \infty$. Oczywiście y^T jest procesem adaptowanym i cádlág jako jednostajna granica.

Do znalezienia globalnego ciągu (α_n) użyjemy metody przekątniowej. Zauważmy najpierw, że jeśli $T > S$, to szereg $\sum_{i=1}^N \alpha_i^T y_i^S$ jest zbieżny w $L^\infty(\Omega \times [0,S], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,S]), \mathbb{P} \otimes |\cdot|)$. Prowadzi nas to do spostrzeżenia, że właściwym kandydatem na ciąg jest $\alpha_n = \alpha_n^n$, $n \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez z_n sumy częściowe: $z_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Ciąg $z_n(t) 1_{t\leq T}$ jest zbieżny w $L^\infty(\Omega \times [0,T], \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), \mathbb{P} \otimes |\cdot|)$. Niech z^T będzie jego granicą, która z definicji przestrzeni i ciągłości procesów $z_n(t)$ jest zadana z dokładnością do nieodróżnialności. Oczywiście, $(z^T(t) 1_{t\leq S})$ jest nieodróżnialne od $(z^S(t))$ dla $0 \leq S \leq T$. Zatem istnieje dokładnie jeden proces z, taki że $(z^T(t))$ jest nieodróżnialny od $(z(t) 1_{t\leq T})$. Musimy jeszcze pokazać, że $z \in Y$. Warunki adaptowalności i cádlág są trywialnie spełnione. Musimy skoncentrować się jedynie na CV. Weźmy ciągi (Z_n), (σ_n) jak w definicji CV, przy czym, jak zaznaczyliśmy przed twierdzeniem, momenty σ_n, σ są ograniczone. Co więcej są one ograniczone przez wspólną stałą. Jeśli ciąg jest niemalejący, to stałą tą wyznacza σ. Jeśli jest nierosnący, to stałą wyznacza σ_1. Oznaczmy ją przez T. Z warunku, że z^T jest jednostajnie ograniczony dostajemy

$$\mathbb{E}\, z(\sigma_n) Z_n = \mathbb{E}\, z^T(\sigma_n) Z_n \to \mathbb{E}\, z^T(\sigma) Z = \mathbb{E}\, z(\sigma) Z,$$

Podobnie wykorzystujemy ograniczoność z^T dla $T \geq 0$ do wykazania, że z_n zbiega do z w topologii τ. Wystarczy zauważyć, że $\mathbb{E}\, z_n(\sigma)\gamma = \mathbb{E}\, z(\sigma)\gamma$ dla dowolnego ograniczonego momentu stopu σ i $\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\sigma, \mathbb{P})$, co jest wnioskiem z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej (ograniczeniem jest γM dla pewnego $M \in \mathbb{R}_+$). To kończy dowód warunku C. ■

1.6. Wycena

Dotychczas zajmowaliśmy się budowaniem modeli i analizowaniem ich z punktu widzenia finansowego. Głównym problemem, z którym się borykaliśmy, było wykazanie założeń twierdzenia 1.3, które dawało warunek równoważny brakowi uogólnionego arbitrażu, wyrażony w języku funkcjonałów liniowych na przestrzeni (Γ, τ). W rozważanych przykładach funkcjonały te zadane były przez procesy stochastyczne. Tutaj pokażemy, dlaczego procesy te są ważne i jak związane są z wyceną instrumentów pochodnych.

Ustalmy model (Γ, τ), w którym przestrzeń funkcjonałów liniowych ciągłych może być reprezentowana przez przestrzeń Y procesów stochastycznych z dualnością (1.1). Będziemy zakładać, że zbiór Γ jest dostatecznie bogaty, aby rozważać w nim instrumenty, które wprowadzimy poniżej. Możemy za Γ wziąć przestrzeń liniową generowaną przez $\gamma\delta_\eta$, gdzie η jest (ograniczonym) momentem stopu, zaś $\gamma \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$. Ustalmy także rynek J, na którym nie ma możliwości uogólnionego arbitrażu. Oznaczmy przez $\mathcal{G}_J$ zbiór wszystkich deflatorów dla rynku J, czyli

$$y \in \mathcal{G}_J \qquad \Longleftrightarrow \qquad y \in Y^{\Gamma+}_{++}, \quad y\big|_J \leq 0.$$

Zauważmy, że zbiór ten jest wypukłym ściśle dodatnim stożkiem, tzn. jeśli $y_1, y_2 \in \mathcal{G}_J$, to $y_1 + y_2 \in \mathcal{G}_J$ oraz $\alpha y_1 \in \mathcal{G}_J$ dla $\alpha > 0$.

DEFINICJA 1.29. Instrumentem pochodnym (opcją) nazywamy parę (Z, η), gdzie η jest momentem stopu, zaś $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\eta; \mathbb{R}_+)$ jest nieujemną zmienną losową.

Jest to nieznaczna modyfikacja powszechnie używanego pojęcia; pozwalamy mianowicie, by moment wykonania był momentem stopu, a nie deterministyczną chwilą. Ponadto, dalsze rozumowania możemy także przeprowadzić dla instrumentów pochodnych będących sumą skończonej liczby instrumentów zdefiniowanych powyżej. Pozwala to na rozszerzenie zakresu wycenianych opcji poza opcje europejskie do np. obligacji komercyjnych i wielu innych skomplikowanych kontraktów. Zauważmy także, że nasza definicja instrumentu pochodnego obejmuje opcje zależne od trajektorii, czyli opcje azjatyckie i barierowe. Wyceną opcji amerykańskich zajmiemy się w następnym rozdziale, gdyż zagadnienie to okaże się bardzo skomplikowane.

Spośród wielu metod wyceny opcji skupimy się na dwóch: wycenie arbitrażowej i cenie zabezpieczenia. Znacznie szersze rozważania dotyczące tej tematyki można znaleźć w pracy Napp [20]. Jednak zaprezentowane tutaj dowody są bardziej elementarne i krótsze. Ponadto zajmujemy się przypadkiem dowolnego modelu (Γ, τ), a nie ustalonego, jak w pracy [20].

Będziemy zakładać, że $\mathcal{F}_0$ jest uzupełnieniem trywialnego σ-ciała, czyli cena opcji w momencie 0 jest liczbą.

Wycena arbitrażowa

Naturalnym podejściem do wyceny instrumentu pochodnego jest podejście wykorzystujące pojęcie arbitrażu. Mówimy, że cena C jest uczciwą ceną opcji, jeśli rozszerzenie rynku o dodatkowe możliwości inwestycyjne związane z kupnem lub sprzedażą opcji nie prowadzi do powstania uogólnionego arbitrażu. Wykażemy, że zbiór uczciwych cen jest przedziałem i scharakteryzujemy go za pomocą zbioru deflatorów $\mathcal{G}_J$.

Z opcją (Z, η) o cenie $C \in \mathbb{R}$ zwiążemy inwestycje, polegające na zakupie lub sprzedaży tej opcji. Połóżmy

$$\Psi^{(\xi,C,\eta,Z)} = \xi(C\delta_0 - Z\delta_\eta), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Inwestycja $\Psi^{(-1,C,\tau,Z)}$ reprezentuje zakup jednej opcji (Z, η) w momencie 0 za cenę C. Sprzedaż to $\Psi^{(1,C,\eta,Z)}$. Notacja ta pozwala na sformułowanie definicji uczciwej ceny.

DEFINICJA 1.30. Cenę C nazywamy **uczciwą**, jeśli rynek J^{opc} generowany przez J i inwestycje $\Psi^{(\pm 1,C,\eta,Z)}$ spełnia warunek braku uogólnionego arbitrażu.

Jeśli zatem C jest uczciwą ceną, to na mocy twierdzenia 1.3 istnieje proces deflatora, czyli zbiór $\mathcal{G}_{J^{opc}}$ jest niepusty. Oczywiście $\mathcal{G}_{J^{opc}} \subseteq \mathcal{G}_J$. Zauważmy, że dla każdego $y \in \mathcal{G}_{J^{opc}}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\{Cy(0) - Zy(\eta)\right\} \leq 0 \\ &\mathbb{E}\left\{-Cy(0) + Zy(\eta)\right\} \leq 0, \end{aligned}$$

co daje $\mathbb{E}\left\{Cy(0) - Zy(\eta)\right\} = 0$. Zatem C jest uczciwą ceną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $y \in \mathcal{G}_J$, taki że $C = \mathbb{E}\{y(\eta)Z\} / \mathbb{E}\, y(0)$.

LEMAT 1.31. Jeśli $C_1 \leq C_2$ są uczciwymi cenami opcji (Z, η), to każda cena z przedziału $[C_1, C_2]$ jest uczciwa.

Dowód. Niech y^1, y^2 będą deflatorami dla cen C_1 i C_2. Ustalmy liczbę $C \in [C_1, C_2]$. Niech $a \in [0, 1]$ będzie liczbą spełniającą $C = aC_1 + (1 - a)C_2$. Połóżmy $y(t) = a\frac{y^1(t)}{\mathbb{E}\, y^1(0)} + (1 - a)\frac{y^2(t)}{\mathbb{E}\, y^2(0)}$. Wtedy $C = \frac{\mathbb{E}\{y(\eta)Z\}}{\mathbb{E}\, y(0)}$. Z wypukłości $\mathcal{G}_J$ mamy $y \in \mathcal{G}_J$. ∎

Powyższy lemat pozwala na uzyskanie przedziału uczciwych cen. Niestety nie możemy nic powiedzieć o jego końcach, tzn. czy prowadzą one do uogólnionego arbitrażu, czy nie.

WNIOSEK 1.32. Niech

$$C^h = \sup_{y \in \mathcal{G}_J} \frac{\mathbb{E}\{y(\eta)Z\}}{\mathbb{E}\, y(0)}, \qquad C^l = \inf_{y \in \mathcal{G}_J} \frac{\mathbb{E}\{y(\eta)Z\}}{\mathbb{E}\, y(0)}.$$

Każda cena z przedziału otwartego (C^l, C^h) jest uczciwa, a każda cena spoza przedziału domkniętego $[C^l, C^h]$ jest nieuczciwa.

Dowód. Dla każdego $C \in (C^l, C^h)$ możemy znaleźć ceny uczciwe $C_1 \leq C \leq C_2$. Lemat 1.31 stwierdza, że C jest uczciwą ceną. Druga część wniosku jest oczywista. ∎

Cena zabezpieczenia

Wystawca opcji zainteresowany jest wiedzą, czy cena, którą zaproponował, pozwoli mu na znalezienie strategii zabezpieczającej wypłatę. Pytać się może także o istnienie minimalnej ceny zabezpieczającej. Wykażemy, że taka minimalna cena istnieje i jest równa wartości C^h z wniosku 1.32. Dla wygody zapisu oznaczmy $\Psi^C = \Psi^{(-1,C,\eta,Z)}$ dla ustalonej opcji (Z, η).

DEFINICJA 1.33. Liczba C jest **ceną zabezpieczenia** opcji (Z, η), jeśli $\Psi^C \in \overline{J - \Gamma_+}$, gdzie domknięcie jest w topologii τ.

Istnieje więc ciąg $\Psi_n \in J - \Gamma_+$ zbieżny do Ψ^C. Każdy element Ψ_n jest inwestycją dostępną na rynku J pomniejszoną o pewną konsumpcję. Istnieje więc ciąg inwestycji z konsumpcją zbieżny do Ψ^C, czyli zabezpieczający opcję. Zauważmy, że wyrażenie $\overline{J - \Gamma_+}$ występuje także w definicji uogólnionego arbitrażu.

Poruszyliśmy już temat istnienia minimalnej ceny zabezpieczającej. Połóżmy

$$h = \inf\{b \geq 0 : \quad b \text{ jest ceną zabezpieczenia}\}.$$

Wykażemy, że h jest ceną zabezpieczenia. Niech b_n będzie ciągiem cen zabezpieczenia zbieżnym do h. Wtedy $\left(\Psi^{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do Ψ^h w (Γ, τ). Z $\Psi^{b_n} \in \overline{J - \Gamma_+}$ dostajemy $\Psi^h \in \overline{J - \Gamma_+}$. Minimalną cenę zabezpieczenia będziemy nazywać ceną sprzedającego i oznaczać C^s. Okazuje się, że jest ona równa C^h z wniosku 1.32.

TWIERDZENIE 1.34. $C^s = C^h$

Dowód. Udowodnimy najpierw, że $C^s \geq C^h$. Z faktu, że C^s jest ceną zabezpieczenia wynika, że $\Psi^{C^s} \in \overline{J - \Gamma_+}$. Czyli dla każdego deflatora $y \in \mathcal{G}_J$ mamy $\mathbb{E}\{Zy(\eta)\} - C^s\,\mathbb{E}\,y(0) \leq 0$. Stąd

$$C^s \geq \frac{\mathbb{E}\{Zy(\eta)\}}{\mathbb{E}\,y(0)} \qquad \text{dla dowolnego } y \in \mathcal{G}_J,$$

co daje $C^s \geq \sup_{y\in\mathcal{G}_J} \frac{\mathbb{E}\{Zy(\eta\}}{\mathbb{E}\,y(0)} = C^h$.

Jeśli $C^h = \infty$, to $C^s = \infty$. Możemy założyć, że $C^h < \infty$. Pokażemy, że C^h jest ceną zabezpieczenia. Przeprowadzimy rozumowanie przez sprzeczność. Przypuśćmy, że C^h nie jest ceną zabezpieczenia, czyli $\Psi^{C^h} \notin \overline{J - \Gamma_+}$. Z twierdzenia Hahna-Banacha o oddzielaniu istnieje $h \in Y_+^{\Gamma_+}$ (patrz dowód twierdzenia 1.3), taki że

$$\mathbb{E}\{Zh(\eta)\} - C^h\,\mathbb{E}\,h(0) > 1, \qquad h|_J \leq 0. \tag{1.3}$$

Definicja C^h gwarantuje istnienie deflatora $y \in \mathcal{G}_J$, takiego że $C^h - \frac{1}{2} \leq \frac{\mathbb{E}\{Zy(\eta)\}}{\mathbb{E}\,y(0)}$. Niech $\tilde{y}(t) = \frac{y(t)}{\mathbb{E}\,y(0)} + h(t)$. Oczywiście $\tilde{y} \in Y_{++}^{\Gamma_+}$ i $\tilde{y} \in \mathcal{G}_J$. Ponadto,

$$C^h \geq \frac{\mathbb{E}\{Z\tilde{y}(\eta)\}}{\mathbb{E}\,\tilde{y}(0)}.$$

Z drugiej strony, z (1.3) dostajemy

$$\begin{aligned}
C^h\mathbb{E}\,\tilde{y}(0) &= C^h + C^h\mathbb{E}\,h(0) \\
&= (C^h - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + C^h\mathbb{E}\,h(0) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\{Zy(\eta)\}}{\mathbb{E}\,y(0)} + \frac{1}{2} + C^h\mathbb{E}\,h(0) \\
&< \frac{\mathbb{E}\{Zy(\eta)\}}{\mathbb{E}\,y(0)} + \frac{1}{2} + \mathbb{E}\{Zh(\eta)\} - 1 \\
&= \mathbb{E}\{Z\tilde{y}(\eta)\} + \frac{1}{2} - 1 \\
&< \mathbb{E}\{Z\tilde{y}(\eta)\} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Łącząc dwie otrzymane nierówności dostajemy sprzeczność:

$$\mathbb{E}\{Z\tilde{y}(\eta)\} \leq C^h\mathbb{E}\,\tilde{y}(0) < \mathbb{E}\{Z\tilde{y}(\eta)\} - \frac{1}{2}.$$

∎

Rozdział 2

Modelowanie i wycena opcji amerykańskich

Niech $I \subseteq \mathbb{R}_+$ będzie dowolnym zbiorem momentów. Rodzinę zmiennych losowych $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ nazywamy opcją amerykańską ze zbiorem momentów wykonania I. Jeśli właściciel tej opcji zdecyduje się na jej wykonanie w momencie losowym τ, to jego wypłata wyniesie $A(\tau)$. Opcja amerykańska tym różni się od rozważanych w poprzednim rozdziale opcji typu europejskiego, że nie specyfikuje momentu wykonania, pozostawiając dowolność jej posiadaczowi. Powoduje to znaczne komplikacje przy wycenie i zabezpieczaniu tego typu instrumentów. Jednak przy powszechnie stosowanym podejściu z procesami cen i strategiami inwestycyjnymi (patrz np. Karatzas, Schreve [15]) nie ma przynajmniej kłopotu z określeniem, co rozumiemy przez strategię zabezpieczającą. Portfel zbudowany zgodnie z taką strategią musi w każdym momencie stopu τ majoryzować wypłatę, tzn. posiadać bogactwo nie mniejsze niż $A(\tau)$ w przypadku modeli bez kosztów transakcji lub zawierać określoną liczbę każdego z instrumentów podstawowych w przypadku modeli z kosztami transakcji. Rozważmy model bez ograniczeń i kosztów transakcji, z rachunkiem bankowym o zerowej stopie procentowej i oznaczmy przez $\mathbb{Q}$ zbiór miar martyngałowych dla procesów cen. Wtedy cena zabezpieczenia opcji amerykańskiej wynosi

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} \sup_{\mathbb{P}\in\mathbb{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} A(\tau),$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest zbiorem momentów stopu o wartościach w I. Zauważmy zatem, że jeśli istnieje moment $\tau \in \mathcal{S}$ realizujący supremum, to cena opcji amerykańskiej jest równa cenie opcji europejskiej o wypłacie $A(\tau)$ w momencie τ. Nic zatem nie kosztuje to, że właściciel opcji może zażądać jej wykonania w innym momencie.

W bieżącym rozdziale zajmiemy się zbudowaniem modelu na bazie przepływów pozwalającego na rozważanie opcji amerykańskich oraz określeniem warunków dostatecznych, by w modelu tym wycena opcji amerykańskich polegała na wycenie kontraktu europejskiego o optymalnym momencie wykonania. Pokażemy, że brak kosztów transakcji gwarantuje już tą własność. Nie wpływa na nią istnienie innych niedoskonałości rynku, jak wypukłe ograniczenia na zawartość portfela, możliwość bankructwa firm i wystawców obligacji itp.

W modelach z przepływami, rozważanych w poprzednim rozdziale, nie istnieje pojęcie składu portfela w dowolnym momencie. Możliwości inwestycyjne zdradzają tylko przepływy pieniężne, które wynikają z zastosowanej strategii. Nie można zatem bezpośrednio przenieść zaprezentowanego powyżej pojęcia strategii zabezpieczającej. Zamiast tego, musimy stworzyć całkiem nowe podejście, które odpowiadałoby obserwacjom prawdziwego rynku i wpisywało się w możliwości modeli z przepływami. Załóżmy, że zbiór momentów wykonania I jest przeliczalny. Strategia zabezpieczająca opcję amerykańską $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ musi zapewnić wypłatę $A(t)$, jeśli posiadacz opcji wykona ją w momencie $t \in I$. Aby to osiągnąć rozważmy rodzinę inwestycji $\big(\Pi(t)\big)_{t\in I}$. Inwestycja $\Pi(t)$ odpowiada sposobowi postępowania, gdy inwestor zdecyduje się na wykonanie opcji w momencie $t \in I$. Strategie $\Pi(s)$ i $\Pi(t)$ nie mogą być jednak dowolne. Muszą się one pokrywać na przedziale $[0, t \wedge s)$. Algorytm inwestowania jest następujący: w każdym punkcie $s \in I$ sprawdzamy, czy inwestor chce wykonać opcję. Jeśli nie, to postępujemy zgodnie z dowolną strategią $\Pi(t)$ dla $t > s$. Jeśli tak, to kontynuujemy inwestowanie zgodnie z $\Pi(s)$, co, między innymi, zapewni wypłacenie inwestorowi $A(s)$. Rozumując analogicznie do wyceny opcji europejskich, strategia $\Pi = \big(\Pi(t)\big)_{t\in I}$ zabezpieczająca wypłatę $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ ma postać

$$\Pi(t) = -C\delta_0 + A(t)\delta_t, \quad t \in I.$$

Liczbę C nazwiemy ceną zabezpieczenia.

2.1. Model rynku amerykańskiego

Uściślimy teraz sposób zapisu inwestycji na rynku amerykańskim. Ustalmy model (Γ, τ). Załóżmy, że ma on zanurzenie w przestrzeni Banacha X, czyli Γ jest podprzestrzenią liniową X, zaś τ jest obcięciem topologii normowej do Γ. Przykładem jest model z podrozdziału 1.3. Niech I będzie dowolnym, co najwyżej przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}_+$. Ustalmy ciąg liczb dodatnich $\big(a(t)\big)_{t\in I}$ o sumie 1. Niech $\mathcal{N} = L^1(I, 2^I, \mu; X)$, gdzie μ jest miarą probabilistyczną $\mu(\{t\}) = a(t)$, $t \in I$, będzie przestrzenią całkowalnych w sensie Bochnera funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha X. Przestrzeń $\mathcal{N}$ jest zatem przestrzenią Banacha. Ze względu na wyjątkowo prostą formę I możemy definicje i fakty dotyczące przestrzeni $\mathcal{N}$ sformułować prosto i bezpośrednio dowieść. Przestrzeń $\mathcal{N}$ składa się z tych funkcji $\sigma : I \to X$, dla których $\|\sigma\|_{\mathcal{N}} < \infty$, gdzie

$$\|\sigma\|_{\mathcal{N}} = \sum_{t\in I} a(t)\|\sigma(t)\|_X.$$

Zauważmy, że jeśli ciąg σ_n dąży do σ w $\mathcal{N}$, to $\sigma_n(t)$ dąży do $\sigma(t)$ w X dla każdego $t \in I$. Przestrzeń sprzężona $\mathcal{N}^*$ skonstruowana jest w pracy Schwarza [28] (konstrukcja ta wspomniana jest w podrozdziale 1.3), lecz ze względu na prostotę $\mathcal{N}$ pozwolimy sobie na przedstawienie jej tutaj wraz z dowodem. Wcześniej jednak wprowadzimy notację, którą będziemy stosować w poniższym lemacie i w dalszej części rozdziału. Dla $\gamma \in X$, $t \in I$ wyrażenie

$$\gamma\zeta(t)$$

symbolizuje element $\sigma \in \mathcal{N}$, taki że $\sigma(s) = 0$, $s \neq t$ i $\sigma(t) = \gamma$. Ponadto przez Y oznaczamy przestrzeń dualną do X.

LEMAT 2.1. Przestrzeń $\mathcal{N}^*$ możemy utożsamiać ze zbiorem

$$\Big\{(\Phi(t))_{t\in I} \in Y^I : \quad \sup_{t\in I} \frac{1}{a(t)}\|\Phi(t)\|_Y < \infty\Big\}$$

z dualnością zadaną wzorem

$$\langle \Phi, \sigma\rangle_{\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{N}\rangle} = \sum_{t\in I} \langle \Phi(t), \sigma(t)\rangle_{\langle Y, X\rangle}, \quad \Phi \in \mathcal{N}^*, \quad \sigma \in \mathcal{N}.$$

Dowód. Niech $\sigma^* \in \mathcal{N}^*$. Zdefiniujmy $\Phi(t) \in Y$ przez

$$\langle \Phi(t), \gamma \rangle_{\langle Y,X \rangle} = \langle \sigma^*, \gamma\zeta(t) \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle} \quad \text{dla dowolnego } \gamma \in X.$$

Funkcjonał $\Phi(t) \in Y$, $t \in I$, jest jednoznacznie określony przez σ^*. Oznaczmy

$$M = \sup_{t \in I} a(t)^{-1} \|\Phi(t)\|_Y.$$

Wykażemy, że $\|\sigma^*\|_{\mathcal{N}^*} = M$. Zaczniemy od nierówności $M \le \|\sigma^*\|_{\mathcal{N}^*}$. Ustalmy $\epsilon > 0$, $t \in I$. Weźmy $\gamma \in X$ o normie 1 i taki że

$$\langle \Phi(t), \gamma \rangle_{\langle Y,X \rangle} \ge \|\Phi(t)\|_Y - a(t)\epsilon.$$

Niech $\sigma = a(t)^{-1}\gamma\zeta(t)$. Zauważmy, że $\|\sigma\|_{\mathcal{N}} = 1$ oraz

$$\|\sigma^*\|_{\mathcal{N}^*} \ge \left|\langle \sigma^*, \sigma \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle}\right| = \left|\langle \Phi(t), \frac{1}{a(t)}\gamma \rangle_{\langle Y,X \rangle}\right| \ge \frac{1}{a(t)}\|\Phi(t)\|_Y - \epsilon$$

Z dowolności ϵ, t dostajemy $\|\sigma^*\|_{\mathcal{N}^*} \ge a(t)^{-1}\|\Phi(t)\|_Y$, $t \in I$, czyli

$$\|\sigma^*\|_{\mathcal{N}^*} \ge M.$$

Aby uzyskać przeciwną nierówność rozważmy $\sigma \in \mathcal{N}$ z normą 1. Niech $\{q_1, q_2, \ldots\}$ będzie ciągiem wyczerpującym zbiór I. Niech $\sigma_n = \sum_{i=1}^n \sigma(q_i)\zeta(q_i)$ będzie obcięciem σ do n pierwszych współrzędnych. Wtedy

$$\begin{aligned}
\langle \sigma^*, \sigma_n \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle} &= \sum_{i=1}^n \langle \Phi(q_i), \sigma(q_i) \rangle_{\langle Y,X \rangle} \le \sum_{i=1}^n \|\Phi(q_i)\|_Y \|\sigma(q_i)\|_X \\
&\le \sup_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{a(q_i)} \|\Phi(q_i)\|_Y \sum_{i=1}^n a(q_i)\|\sigma(q_i)\|_X \\
&\le M \sum_{i=1}^n a(q_i)\|\sigma(q_i)\|_X.
\end{aligned}$$

Ponieważ σ_n zbiega do σ w $\mathcal{N}$, gdy $n \to \infty$, mamy

$$\langle \sigma^*, \sigma \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle} \le M\|\sigma\|_{\mathcal{N}} = M.$$

Wykażemy teraz przeciwną implikację. Weźmy $(\Phi(t))_{t \in I} \subseteq Y$ spełniające

$$M = \sup_{t \in I} a(t)^{-1}\|\Phi(t)\|_Y < \infty.$$

Zauważmy, że rodzina $\gamma\zeta(t)$, $\gamma \in X, t \in I$ stanowi bazę $\mathcal{N}$. Wystarczy zatem zdefiniować funkcjonał liniowy σ^* na tej bazie:

$$\langle \sigma^*, \gamma\zeta(t) \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle} = \langle \Phi(t), \gamma \rangle_{\langle Y,X \rangle}.$$

Pokażemy, że jest on ciągły. Wtedy jego rozszerzenie do całego $\mathcal{N}$ jest jedyne. Dla dowolnego $\gamma \in X$ i $t \in I$

$$\begin{aligned}
\langle \sigma^*, \gamma\zeta(t) \rangle_{\langle \mathcal{N}^*,\mathcal{N} \rangle} &= \langle \Phi(t), \gamma \rangle_{\langle Y,X \rangle} \le \|\Phi(t)\|_Y \|\gamma\|_X \\
&= \frac{1}{a(t)}\|\Phi(t)\|_Y \, a(t)\|\gamma\|_X \le M\|\gamma\zeta(t)\|_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

■

Zdefiniujemy teraz rynek amerykański i pojęcie uogólnionego arbitrażu. Niech

$$\Sigma = \big\{\sigma \in \mathcal{N}: \quad \sigma(t) \in \Gamma, \quad \sigma(s)\big|_{[0,s)} = \sigma(t)\big|_{[0,s)} \quad \forall t,s \in I, \quad s < t\big\}.$$

Czyli $\sigma \in \Sigma$, jeśli $\sigma(s)$ i $\sigma(t)$ reprezentują możliwości inwestycyjne identyczne na przedziale $[0,s)$ dla dowolnych $s,t \in I$, $s < t$. Zbiór Σ pełni taką samą rolę dla rynku amerykańskiego, jak zbiór Γ dla europejskiego.

PRZYKŁAD 2.1 (Model ilustracyjny). Weźmy $I = \{0,1,2,3\}$,

$$X = L^1(\Omega,\mathcal{F}_0) \times L^1(\Omega,\mathcal{F}_1) \times L^1(\Omega,\mathcal{F}_2) \times L^1(\Omega,\mathcal{F}_3),$$

gdzie $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ jest filtracją. Na X ustalmy normę l^1, tzn. norma $(\gamma_0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \in X$ wynosi $\|\gamma_0\| + \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\| + \|\gamma_3\|$. Przyjmujemy $\Gamma = X$, czyli każda możliwość inwestycyjna może mieć przepływy tylko w momentach z I i jest postaci

$$\gamma_0\delta_0 + \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3.$$

Przestrzeń $\mathcal{N}$ jest identyczna z X^I z normą

$$\|\sigma\|_{\mathcal{N}} = \|\sigma(0)\|_X + \|\sigma(1)\|_X + \|\sigma(2)\|_X + \|\sigma(3)\|_X.$$

Dla dalszych rozważań przyjmijmy następującą reprezentację elementów $\sigma \in \mathcal{N}$:

$$\sigma(i) = \gamma_0^i\delta_0 + \gamma_1^i\delta_1 + \gamma_2^i\delta_2 + \gamma_3^i\delta_3, \quad i \in I.$$

Zbiór Σ składa się wtedy z elementów $\sigma \in \mathcal{N}$, które spełniają warunki

- $\gamma_0^1 = \gamma_0^2 = \gamma_0^3$,
- $\gamma_1^2 = \gamma_1^3$,

czyli np. strategie $\sigma(2)$ i $\sigma(3)$ zgadzają się na przedziale $[0,2)$, tzn. w punktach 0 i 1.

Na powyższym prostym przykładzie możemy wskazać intuicje stojące za podaną formą amerykańskich możliwości inwestycyjnych Σ. Rozważmy strategię σ zabezpieczającą wypłatę amerykańską. W momencie $t = 0$ inwestor może zażądać realizacji opcji lub zdecydować się na oczekiwanie. Jeśli inwestor zażąda wypłaty, to postępujemy zgodnie ze strategią $\sigma(0)$. W przeciwnym przypadku rozpoczynamy inwestowanie zgodnie ze strategią $\sigma(1)$ lub $\sigma(2)$ lub $\sigma(3)$, bo wszystkie one są identyczne w $t = 0$. W momencie $t = 1$ patrzymy, czy inwestor żąda wypłaty. Jeśli tak, to strategia $\sigma(1)$ pozwoli na spełnienie tego żądania i odtąd postępujemy zgodnie z jej wytycznymi. Jeśli nie, to postępujemy zgodnie ze strategią $\sigma(2)$ lub $\sigma(3)$, bo obie są identyczne w $t = 1$. Analogicznie robimy dla $t = 2,3$.

Musimy jeszcze nadmienić, że w rzeczywistości równość przepływów dwóch możliwości inwestycyjnych na przedziale $[0,t)$ nie gwarantuje tego, że strategie inwestycyjne, które je wygenerowały, są identyczne na tym przedziale, gdyż wszelkie przepływy możemy niwelować inwestycjami w obligacje lub rachunek bankowy doprowadzając do tego, że sumarycznie na przedziale $[0,t)$ nie będą one widoczne i ujawnią się dopiero później. Stąd postać Σ jest tylko koniecznym warunkiem powyższej interpretacji strategii, który będzie jednak wystarczający do bieżących rozważań. W dalszej części rozdziału uściślimy jeszcze postać możliwości inwestycyjnych na rynku amerykańskim.

□

DEFINICJA 2.2. Rynkiem amerykańskim nazywamy podzbiór $J \subseteq \Sigma$, który

- jest dodatnim wypukłym stożkiem,
- (COH1) dla dowolnego $\sigma \in J$, $t \in I$ istnieje $\tilde{\sigma} \in J$, taka że $\tilde{\sigma}(s) = \sigma(t)$, $s \in I$.

Warunek (COH1) gwarantuje, że dla dowolnej możliwości inwestycyjnej $\sigma \in J$ i dowolnego $t \in I$ istnieje strategia $\tilde{\sigma} \in J$ o każdej współrzędnej równej $\sigma(t)$, czyli o strategii niezależnej od momentu $s \in I$.

Strategia $\sigma \in \Sigma$ daje możliwość arbitrażu, jeśli $\sigma(t)$ gwarantuje arbitraż w sensie europejskim dla pewnego $t \in I$, tzn. $\sigma(t) \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$. Naturalnym zbiorem możliwości arbitrażowych jest zatem

$$\Sigma_A = \{\sigma \in \Sigma : \quad \exists\, t \in I \quad \sigma(t) \in \Gamma_+ \setminus \{0\}\}.$$

Ze względów technicznych ograniczymy się jednak do zbioru mniejszego. Jak się okaże, nie ma to wpływu na ocenę uczciwości rynku (patrz lemat 2.3).

$$\Sigma_+ = \{\sigma \in \Sigma : \quad \forall\, t \in I \quad \sigma(t) \in \Gamma_+\}.$$

Powodem wprowadzenia zbioru Σ_+ jest to, że $\Sigma_- = -\Sigma_+$ odpowiada konsumpcji, co będzie grało ważną rolę w dalszych rozważaniach.

Powiemy, że rynek pozbawiony jest możliwości **uogólnionego arbitrażu**, jeśli

(NFL) $\overline{J - \Sigma_+} \cap \Sigma_+ = \{0\}$, gdzie domknięcie brane jest w topologii normowej $\mathcal{N}$.

Założenie (COH1) w definicji rynku pozwoli pokazać, że powyższy warunek jest równoważny warunkowi $\overline{J - \Sigma_+} \cap \Sigma_A = \emptyset$, gdzie za zbiór strategii arbitrażowych bierzemy Σ_A. Zauważmy, że zbiór Σ_A jest znacznie większy od $\Sigma_+ \setminus \{0\}$.

LEMAT 2.3. Niech J będzie rynkiem amerykańskim, $C = \overline{J - \Sigma_+}$. Wtedy

i) C spełnia (COH1),

ii) $C \cap \Sigma_+ \neq \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \cap \Sigma_A \neq \emptyset$

Dowód. Zauważmy, że $J - \Sigma_+$ spełnia (COH1). Musimy jedynie wykazać, że zachowane jest to po domknięciu. Ustalmy $t \in I$, $\sigma \in C$. Chcemy pokazać, że $\sum_{s \in I} \sigma(t)\zeta(s) \in C$. Niech $\sigma_n \in J - \Sigma_+$ będzie ciągiem zbieżnym do σ, a zatem $\sigma_n(t)$ zbiega do $\sigma(t)$ w X. Wiemy także, że $\sum_{s \in I} \sigma_n(t)\zeta(s) \in J - \Sigma_+$ oraz $\sum_{s \in I} \sigma_n(t)\zeta(s) \to \sum_{s \in I} \sigma(t)\zeta(s)$ w $\mathcal{N}$, co kończy dowód i).

Ponieważ $\Sigma_+ \setminus \{0\} \subseteq \Sigma_A$, to wystarczy pokazać, że $C \cap \Sigma_+ = \{0\}$ implikuje $C \cap \Sigma_A = \emptyset$. Przypuśćmy przeciwnie. Załóżmy, że istnieje $\sigma \in C \cap \Sigma_A$, czyli $\sigma(t) \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$ dla pewnego $t \in I$. Na mocy i) istnieje $\tilde{\sigma} \in C$ postaci

$$\tilde{\sigma} = \sum_{s \in I} \sigma(t)\zeta(s),$$

co przeczy założeniu $C \cap \Sigma_+ = \{0\}$. ■

Zajmiemy się teraz znalezieniem warunku równoważnego do (NFL) w duchu twierdzenia 1.3. Założymy najpierw, że model (Γ, τ) wraz z zanurzeniem w przestrzeń Banacha X spełnia warunki C i L twierdzenia 1.3. Przypomnijmy oznaczenia: Y jest przestrzenią dualną do X, a przestrzeń funkcjonałów nieujemnych na Γ_+ jest oznaczona przez $Y_+^{\Gamma_+}$, tj. $y \in Y_+^{\Gamma_+} \equiv \forall x \in \Gamma_+ \ \langle x, y \rangle_{\langle X,Y \rangle} \geq 0$.

Natomiast przez $Y_{++}^{\Gamma_+}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałów dodatnich na Γ_+, tj. $y \in Y_{++}^{\Gamma_+} \equiv \forall x \in \Gamma_+ \setminus \{0\}\ \langle x, y\rangle_{\langle X,Y\rangle} > 0$. Podobne oznaczenia wprowadzimy dla modelu amerykańskiego. Niech

$$\Sigma_* = \{\sigma \in \mathcal{N} : \quad \forall\, t \in I \quad \sigma(t) \in \Gamma_+\}.$$

Zauważmy, że Σ_* jest zbiorem większym od Σ_+, dokładniej $\Sigma_+ = \Sigma_* \cap \Sigma$. Przestrzeń funkcjonałów nieujemnych na Σ_* oznaczana jest przez $Y_+^{\Sigma_*}$, tj. $\Phi \in Y_+^{\Sigma_*} \equiv \forall \sigma \in \Sigma_*\ \langle \sigma, \Phi\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} \geq 0$. Postać Σ_* pozwala wnioskować, że

$$Y_+^{\Sigma_*} = \{\Phi \in \mathcal{N}^* : \quad \Phi(t) \in Y_+^{\Gamma_+} \quad \forall t \in I\}.$$

Przez $Y_{++}^{\Sigma_*}$ oznaczamy przestrzeń funkcjonałów dodatnich na Σ_*, tj. $\Phi \in Y_{++}^{\Sigma_*} \equiv \forall \sigma \in \Sigma_* \setminus \{0\}\ \langle \sigma, \Phi\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} > 0$. Podobnie jak powyżej dostajemy

$$Y_{++}^{\Sigma_*} = \{\Phi \in \mathcal{N}^* : \quad \Phi(t) \in Y_{++}^{\Gamma_+} \quad \forall t \in I\}.$$

TWIERDZENIE 2.4.

i) $\overline{J - \Sigma_*} \cap \Sigma_* = \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{J - \Sigma_+} \cap \Sigma_+ = \{0\}$.

ii) Warunek (NFL) dla rynku J jest równoważny istnieniu dodatniego funkcjonału $\Phi \in Y_{++}^{\Sigma_*}$, takiego że $\Phi\big|_J \leq 0$.

Dowód. Dowód i) jest podobny do dowodu lematu 2.3, jednak dla przejrzystości przeprowadzimy go tutaj w całości. Niech $C = J - \Sigma_+$, $D = J - \Sigma_*$. Zauważmy, że $\Sigma_+ \subseteq \Sigma_*$ i $C \subseteq D$, czyli jeśli $\overline{D} \cap \Sigma_* = \{0\}$, to $\overline{C} \cap \Sigma_+ = \{0\}$. Przypuśćmy teraz, że istnieje $\sigma \in \overline{D} \cap \Sigma_* \setminus \{0\}$, tzn. istnieje $t \in I$, takie że $\sigma(t) \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$. Wykażemy, że wtedy również $\overline{C} \cap \Sigma_+$ zawiera niezerowy element. Niech $\sigma_n \in D$ będzie ciągiem zbieżnym do σ. Na mocy założenia (COH1) $\tilde{\sigma}_n = \sum_{s\in I} \sigma_n(t)\zeta(s) \in C$. Ciąg ten zbiega do $\tilde{\sigma} = \sum_{s\in I} \sigma(t)\zeta(s)$, czyli $\tilde{\sigma} \in \overline{C}$. Ponadto $\tilde{\sigma} \in \Sigma_+ \setminus \{0\}$, co kończy dowód i).

Teza ii) jest wnioskiem z twierdzenia 1.3. Wystarczy zatem wykazać założenia tego twierdzenia. Warunek C jest spełniony, gdyż $\mathcal{N}^*$ jest przestrzenią Banacha. Jedynie założenie L wymaga więcej uwagi. Niech $\big(\Phi_\alpha\big)_{\alpha\in F} \subseteq Y_+^{\Sigma_*}$ będzie rodziną funkcjonałów liniowych. Wykażemy, że istnieje przeliczalna podrodzina $(\Phi_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ o tej własności, że jeśli dla pewnego $\sigma \in \Sigma_*$ i $\alpha \in F$ zachodzi $\langle \sigma, \Phi_\alpha\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} > 0$, to $\langle \sigma, \Phi_{\alpha_n}\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} > 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnijmy, że $\Phi \in Y_+^{\Sigma_*}$ jest równoważne $\Phi(t)\big|_{\Gamma_+} \geq 0$, czyli $\Phi(t) \in Y_+^{\Gamma_+}$ dla dowolnego $t \in I$. Na mocy założenia dla rynku europejskiego, dla dowolnego $t \in I$ istnieje przeliczalna rodzina $\big(\alpha_n^t\big)_{n=1}^\infty \subseteq F$ o tej własności, że jeśli $x \in \Gamma_+$ i $\langle x, \Phi_\alpha\rangle_{\langle X,Y\rangle} > 0$ dla pewnego $\alpha \in F$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$, takie że $\langle x, \Phi_{\alpha_n^t}\rangle_{\langle X,Y\rangle} > 0$. Zatem przeliczalna rodzina $(\Phi_{\alpha_n^t})_{n\in\mathbb{N},t\in I}$ spełnia wymogi warunku L. Weźmy dowolne $\sigma \in \Sigma_*$, takie że $\langle \sigma, \Phi_\alpha\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} > 0$ dla pewnego $\alpha \in F$. Zatem $\sigma \neq 0$ i $\langle \sigma(t), \Phi_\alpha(t)\rangle_{\langle X,Y\rangle} > 0$ dla pewnego $t \in I$. Możemy więc znaleźć $n \in \mathbb{N}$, dla którego

$$\langle \sigma(t), \Phi_{\alpha_n^t}(t)\rangle_{\langle X,Y\rangle} > 0.$$

Ponadto

$$\langle \sigma(s), \Phi_{\alpha_m^s}(t)\rangle_{\langle X,Y\rangle} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } m \in \mathbb{N},\, s \in I,$$

czyli $\langle \sigma, \Phi_{\alpha_n^t}\rangle_{\langle \mathcal{N},\mathcal{N}^*\rangle} > 0$. ■

Przeliczalny model

Ważnym przykładem przestrzeni X, Y, na bazie których budujemy model rynku amerykańskiego, są przestrzenie, które pozwalają na dokonywanie transakcji tylko w przeliczalnej liczbie momentów. Niech $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}_+$ będzie co najwyżej przeliczalnym zbiorem, przy czym $0 \in \mathcal{T}$. Zakładamy ponadto, że $I \subseteq \mathcal{T}$. Ustalmy $p \geq 1$ i połóżmy $X = L^1\big(\mathcal{T}, 2^{\mathcal{T}}, \nu; L^p(\Omega, \mathcal{F})\big)$, gdzie ν jest miarą liczącą, czyli dla $\gamma \in X$

$$\|\gamma\|_X = \sum_{t \in \mathcal{T}} \left(\mathbb{E}\,|\gamma(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Stąd dostajemy, że $Y = X^* = L^\infty\big(\mathcal{T}, 2^\nu, \nu; L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\big)$, $1/p + 1/q = 1$, z normą

$$\|y\|_Y = \sup\{\|y(t)\|_q : \quad t \in \mathcal{T}\}.$$

Przestrzeń $\mathcal{N}$ możemy zapisać jako $\mathcal{N} = L^1\big(I \times \mathcal{T}, 2^I \otimes 2^{\mathcal{T}}, \mu \otimes \nu; L^p(\Omega, \mathcal{F})\big)$. Wynika stąd niezmiernie ważna obserwacja. Jeśli $\gamma_n \to \gamma$ w X, to $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ w $L^p(\Omega, \mathcal{F})$, $t \in \mathcal{T}$. Jeśli $\sigma_n \to \sigma$ w $\mathcal{N}$, to $\sigma_n(s)(t) \to \sigma(s)(t)$ w $L^p(\Omega, \mathcal{F})$, $s \in I$, $t \in \mathcal{T}$. Zauważmy także, że skonstruowany powyżej model ilustracyjny jest szczególnym przypadkiem modelu przeliczalnego z $I = \mathcal{T} = \{0, 1, 2, 3\}$ i $p = 1$.

2.2. Rynek europejski vs. rynek amerykański

Z rynkiem amerykańskim można w bardzo naturalny sposób związać rynek europejski.

DEFINICJA 2.5. Rynkiem europejskim j związanym z rynkiem amerykańskim J ($j \sim J$) nazywamy zbiór

$$j = \{\sigma(t) : \quad \sigma \in J, \quad t \in I\} \subseteq \Gamma.$$

Zdefiniowany powyżej zbiór j jest rzeczywiście rynkiem w myśl definicji 1.1. Zawiera on wszystkie możliwości inwestycyjne dostępne dla gracza rynku amerykańskiego. Można go traktować jako podzbiór rynku amerykańskiego, gdyż na mocy (COH1) zbiór $J \cap \Sigma_H$ jest izometryczny z j, gdzie

$$\Sigma_H = \{\sigma \in \Sigma : \quad \sigma(t) = \sigma(s) \quad \forall t, s \in I\}$$

jest zbiorem tych inwestycji amerykańskich, które są identyczne dla wszystkich $s \in I$. Przypomnijmy, że warunek braku uogólnionego arbitrażu (NFL) dla rynku europejskiego ma postać

$$\overline{j - \Gamma_+} \cap \Gamma_+ = \{0\},$$

gdzie domknięcie brane jest w normie przestrzeni X. Możemy zatem sformułować lemat mówiący o tym, że brak uogólnionego arbitrażu na rynku amerykańskim jest równoważny brakowi uogólnionego arbitrażu na rynku europejskim z nim związanym. Jest to fakt podstawowej wagi dla spójności i poprawności modelu amerykańskiego.

LEMAT 2.6. Załóżmy, że $j \sim J$.

$$\overline{j - \Gamma_+} \cap \Gamma_+ = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{J - \Sigma_+} \cap \Sigma_+ = \{0\}.$$

Ponadto

$$\overline{J - \Sigma_+} \cap \Sigma_+ = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{J \cap \Sigma_H - \Sigma_+} \cap \Sigma_+ = \{0\}.$$

Dowód. Rynek j jest izometryczny z podzbiorem rynku J, dokładnie z $J \cap \Sigma_H$, więc istnienie uogólnionego arbitrażu na j implikuje, że taka możliwość istnieje też na J. Udowodnijmy teraz przeciwną implikację. Przypuśćmy, że istnieje możliwość uogólnionego arbitrażu na J, czyli istnieje ciąg inwestycji amerykańskich $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq J$ zbiegających do $\sigma \in \Sigma_+ \setminus \{0\}$. Z definicji Σ_+ istnieje $t \in I$, takie że $\sigma(t) \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$. Zbieżność w $\mathcal{N}$ implikuje zbieżność każdej współrzędnej w X, bo I jest zbiorem przeliczalnym. Zatem $\sigma_n(t) \to \sigma(t)$ w X, co dowodzi istnienia możliwości uogólnionego arbitrażu. ■

2.3. Wycena opcji amerykańskich

Od tego miejsca będziemy zakładać, że przestrzeń $X = L^1_{\mathbb{P}}(\Omega, \mathcal{M})$ i $\mathcal{N}$ jest rynkiem amerykańskim związanym z tą przestrzenią lub $X = L^1\big(\mathcal{T}, 2^{\mathcal{T}}, \nu; L^p(\Omega, \mathcal{F})\big)$ i $\mathcal{N}$ jest tzw. rynkiem przeliczalnym dla dowolnego $p \geq 1$. Będziemy też zakładać, że rozważany rynek amerykański J jest pozbawiony możliwości uogólnionego arbitrażu. Przez j będziemy oznaczać związany z J rynek europejski. Podamy definicje funkcjonałów cen zabezpieczenia opcji europejskich i amerykańskich, rozszerzając podejście z podrozdziału 1.6. Najpierw wprowadzimy notację

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{\tau - \text{ moment stopu}: \quad \tau \in I \text{ p.n.}\}, \\ \mathcal{S}^t &= \{\tau \in \mathcal{S}: \quad \tau \geq t \text{ p.n.}\}, \quad t \in I. \end{aligned}$$

Opcją europejską nazwiemy parę (A, η), gdzie $A \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$ jest wypłatą, $\eta \in \mathcal{S}$ jest momentem wykonania oraz $A\delta_\eta \in \Gamma$. Ten ostatni warunek nakłada dodatkowe ograniczenie na zmienną A, zależne od przestrzeni Γ, np. $A \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$ dla ustalonego $p \geq 1$ w przypadku rynku przeliczalnego. Nie wymagamy, aby wypłata była zmienną dodatnią, co było konieczne w dowodzie twierdzenia 1.34.

DEFINICJA 2.7. Europejskim funkcjonałem ceny w momencie 0 nazywamy

$$\Pi_0^e(A, \eta) = \inf\{c \in \mathbb{R}: \quad -c\delta_0 + A\delta_\eta \in \overline{j - \Gamma_+}\},$$

gdzie domknięcie bierzemy w normie X.

Przypomnijmy, że $\Pi_0^e(A, \tau)$ jest minimalną ceną zabezpieczenia.

DEFINICJA 2.8. Opcją amerykańską nazywamy rodzinę $\big(A(t)\big)_{t\in I}$, gdzie $A(\eta)\delta_\eta \in \Gamma$ dla dowolnego momentu stopu $\eta \in \mathcal{S}$.

Tutaj, podobnie jak dla opcji europejskiej, warunek $A(\eta)\delta_\eta \in \Gamma$ nakłada ograniczenia związane z mierzalnością i całkowalnością, tzn. $A(\eta) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$ dla ustalonego $p \geq 1$. Ponadto, w zależności od Γ ograniczenia te mogą obejmować więcej warunków.

DEFINICJA 2.9. Amerykańskim funkcjonałem ceny w momencie 0 nazywamy

$$\Pi_0^a(A) = \inf\{c \in \mathbb{R}: \quad \sum_{t\in I} \big(-c\delta_0 + A(t)\delta_t\big)\zeta(t) \in \overline{J - \Sigma_+}\},$$

gdzie domknięcie bierzemy w normie $\mathcal{N}$.

Tutaj podobnie jak w przypadku europejskim, $\Pi_0^a(A)$ jest ceną zabezpieczenia tzn.

$$\sum_{t\in I} \big(-\Pi_0^a(A) + A(t)\delta_t\big)\zeta(t) \in \overline{J - \Sigma_+}.$$

Zakładaliśmy, że filtracja jest trywialna w 0, czyli zarówno europejska jak i amerykańska cena zabezpieczenia są liczbami. Mogą one być ujemne, bo dopuszczamy ujemne wypłaty.

Ze względów arbitrażowych cena opcji amerykańskiej musi być nie mniejsza niż cena każdej z wypłat europejskich $\big(A(\eta),\eta\big)$, $\eta \in \mathcal{S}$. Wykażemy teraz, że jest to prawdziwy fakt w naszym modelu. W tym celu wprowadzimy dodatkowe założenie, które gwarantuje odpowiednie mieszanie strategii, naturalne z punktu widzenia gracza rynkowego.

(COH2) Dla dowolnych $t_1 < t_2 \in I$, $B \in \mathcal{F}_{t_1}$ i $\sigma \in J$

$$\sum_{t \neq t_1} \sigma(t)\zeta(t) + \big(1_B\sigma(t_1) + 1_{B^c}\sigma(t_2)\big)\zeta(t_1) \in J.$$

Czyli dowolną możliwość inwestycyjną $\sigma \in J$ możemy zmodyfikować zmieniając $\sigma(t_1)$ na $\sigma(t_2)$ na $\mathcal{F}_{t_1}$-mierzalnym zdarzeniu, jeśli tylko $t_1 < t_2$. Zauważmy, że dowolna taka zmiana nie wyprowadza nas ze zbioru Σ.

LEMAT 2.10. Niech $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ będzie opcją amerykańską, zaś rynek J spełnia założenie (COH2). Wtedy

$$\sup_{\eta\in\mathcal{S}} \Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big) \le \Pi_0^a(A).$$

Dowód. Pokażemy, że $\Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big) \le \Pi_0^a(A)$ dla dowolnego $\eta \in \mathcal{S}$. Zaczniemy od przypadku, gdy η przyjmuje dwie wartości, łatwo rozszerzymy do dowolnej skończonej liczby wartości, by w końcu w granicy dostać dla dowolnego $\eta \in \mathcal{S}$, który, przypomnijmy, ma przeliczalną liczbę wartości. Oznaczmy $c = \Pi_0^a(A)$ i weźmy ciąg $\sigma_n \in J - \Sigma_+$ zbieżny do $\sum_{t\in I} \zeta(t)\big(-c\delta_0 + A(t)\delta_t\big)$. Oznaczmy wartości przyjmowane przez η przez $t_1 \le t_2$. Zdefiniujmy $B = \{\eta = t_1\}$ oraz $\gamma_n = 1_B\sigma_n(t_1) + 1_{B^c}\sigma_n(t_2)$. Na mocy założenia (COH2) mamy $\gamma_n \in j$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$\gamma_n \to -c\delta_0 + 1_B A(t_1)\delta_{t_1} + 1_{B^c}A(t_2)\delta_{t_2},$$

więc $c \ge \Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big)$. Podobnie pokazujemy tą nierówność dla η o dowolnej skończonej liczbie wartości.

Weźmy $\eta \in \mathcal{S}$ o przeliczalnej i nieskończonej liczbie wartości $\{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$. Niech $q_n^* = \max(q_1,\ldots,q_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Konstruujemy ciąg momentów stopu $\eta_n \in \mathcal{S}$, które są obcięciem η do n pierwszych wartości. Całą masę z pozostałych wartości przenosimy na q_n^*:

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\eta=q_i} q_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} 1_{\eta=q_i} q_n^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Możemy skorzystać z poprzednich wyników, gdyż η_n ma skończoną liczbę wartości. Mamy więc $\Pi_0^e\big(A(\eta_n),\eta_n\big) \le \Pi_0^a(A)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Połóżmy $A_n = A(\eta_n)1_{\eta\neq q_1,\ldots q_n}$ i zauważmy, że A_n jest $\mathcal{F}_{\eta_n}$-mierzalna oraz $\Pi_0^e\big(A_n,\eta_n\big) \le \Pi_0^e\big(A(\eta_n),\eta_n\big)$. Niech $a_n = \Pi_0^e\big(A_n,\eta_n\big)$. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący i ograniczony z góry, gdyż $A_n = A_{n+1}$ na $\operatorname{supp} A_n$. A zatem istnieje granica a, która spełnia

$$-a_n\delta_0 + A_n\delta_{\eta_n} \to -a\delta_0 + A(\eta)\delta_\eta \qquad \text{w } X.$$

Zbieżność ta jest wynikiem tego, że (A_n) jest majoryzowany przez $A(\eta)$ (jest obcięciem $A(\eta)$ do podzbiorów Ω). Zatem $-a\delta_0 + A(\eta)\delta_\eta \in j$ oraz $a \ge \Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big)$. Oczywiście $a \le \Pi_0^a(A)$, gdyz $a_n \le \Pi_0^a(A)$. Stąd

$$\Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big) \le \Pi_0^a(A).$$

■

Nasze dalsze badania skupią się na tym, aby podać warunki dostateczne, by zachodziła równość

$$\sup_{\eta \in \mathcal{S}} \Pi_0^e\big(A(\eta), \eta\big) = \Pi_0^a(A).$$

Rynek rozszerzony

Ograniczymy się teraz tylko do rozważania rynku przeliczalnego $\mathcal{N}$ dla $p \geq 1$. Wprowadzimy amerykańskie i europejskie funkcjonały ceny dla dowolnych $t \in I$. Będzie to wymagało rozszerzenia istniejącego modelu rynku, gdyż obecny model nie pozwala na wyróżnienie tych inwestycji, które zaczynają się po ustalonym momencie t. To, że inwestycja ma zerowe przepływy przed t nie znaczy wcale, że decyzja o jej rozpoczęciu nie została podjęta przed t. Wyobraźmy sobie, że w momencie $s < t$ pożyczamy z banku pieniądze i inwestujemy je w akcje. W t sprzedajemy akcje i oddajemy pożyczkę. Jedyny przepływ pieniężny dokonany został w t, lecz już dużo wcześniej rozpoczęliśmy inwestycję.

Dla każdego momentu $t \in I^* = I \cup \{0\}$ określimy, jakie inwestycje rozpoczynają się po t.

DEFINICJA 2.11. Rodzinę $\big(J^s\big)_{s \in I^*}$ nazywamy **amerykańskim rozszerzonym rynkiem**, jeśli

i) J^s jest rynkiem amerykańskim dla $s \in I^*$,

ii) $J^t \subseteq J^s$ dla $s, t \in I^*$, $s \leq t$,

iii) $\bigcup_{s \in I^*} J^s = J^0 = J$,

iv) $\sigma(t)\big|_{[0,s)} = 0 \quad \forall \sigma \in J^s, \quad \forall t \in I^*$,

v) J^s spełnia założenie (COH2), $s \in I^*$,

vi) (COH3) $\forall s, \tilde{s}, t \in I^* \quad s \leq t \quad \forall \sigma, \tilde{\sigma} \in J^t$

$$\sigma + \big(\tilde{\sigma}(\tilde{s}) - \sigma(s)\big)\zeta(s) \in J^t.$$

Zauważmy, że decyzja, czy zastosować strategię $\sigma(s)$ dla $s < t$ jest podjęta przed t. Zatem współrzędne o numerach mniejszych od t są niezależne od siebie i mogą być zmieniane niezależnie od pozostałych współrzędnych. Wynika to z definicji przestrzeni Σ. Warunek (COH3) jest zatem tylko rozszerzeniem warunku (COH1) i jest odpowiedzialny za mieszanie strategii.

Z rozszerzonym rynkiem amerykańskim wiążemy odpowiedni rozszerzony rynek europejski. Rodzina $\big(J^s\big)_{s \in I^*}$ definiuje rodzinę rynków europejskich $\big(j^s\big)_{s \in I^*}$. Na rozszerzonych rynkach definiujemy zbiory strategii arbitrażowych

$$\Sigma_+^s = \{\sigma \in \Sigma_+ : \quad \sigma(t)\big|_{[0,s)} = 0 \quad \forall t \in I\},$$
$$\Gamma_+^s = \{\gamma \in \gamma_+ : \quad \gamma\big|_{[0,s)} = 0\}.$$

Zauważmy, że rodzina $\big(J^s - \Sigma_+^s\big)_{s \in I^*}$ spełnia warunki i) – vi) definicji 2.11. Ponadto rynkiem związanym z $J^s - \Sigma_+^s$ jest $j^s - \Gamma_+^s$.

DEFINICJA 2.12. Europejskim funkcjonałem ceny w chwili $s \in I^*$ opcji (A, η) dla $\eta \in \mathcal{S}^s$, nazywamy

$$\Pi_s^e(A, \eta) = \operatorname{essinf}\big\{C \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s) : \quad -C\delta_s + A\delta_\eta \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}\big\},$$

stosując konwencję $\operatorname{essinf} \emptyset = \infty$.

DEFINICJA 2.13. **Amerykańskim funkcjonałem ceny** w chwili $s \in I^*$ opcji $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ nazywamy

$$\Pi_s^a(A) = \operatorname{essinf}\Big\{C \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s) : \sum_{t\in I\cap[s,\infty)} \big(-C\delta_s + A(t)\delta_t\big)\zeta(t) \in \overline{J^s - \Sigma_+^s}\Big\}$$

stosując konwencję $\operatorname{essinf}\emptyset = \infty$.

W dalszym ciągu rozdziału będziemy zakładać, że spełniony jest warunek

(BND) cena $\Pi_s^e(A, \eta)$ jest nieskończona albo należy do $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$ dla każdej opcji europejskiej (A, η) i $s \in I$, takiego że $s \le \eta$ p.n.

Całkowalność ceny nie jest ograniczająca, ponieważ zapewnia ona, że nie można wziąć nieskończonego (w sensie przestrzeni L^p) kredytu pod zastaw skończonej przyszłej wypłaty. Wykażemy teraz, że $\Pi_s^e(A, \eta)$ jest ceną zabezpieczenia opcji (A, η). Najpierw udowodnimy pomocniczy lemat

LEMAT 2.14. Dla dowolnych $\gamma_1, \gamma_2 \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}$, $B \in \mathcal{F}_s$

$$1_B\gamma_1 + 1_{B^c}\gamma_2 \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}.$$

Dowód. Z definicji związanego rynku europejskiego wynika, że

$$\sigma_1 = \sum_{t\in I}\gamma_1\zeta(t) \in \overline{J^s - \Sigma_+^s} \qquad \text{oraz} \qquad \sigma_2 = \sum_{t\in I}\gamma_2\zeta(t) \in \overline{J^s - \Sigma_+^s}.$$

Na mocy (COH3)

$$\sigma_3 = \sum_{t\neq s}\gamma_2\zeta(t) + \gamma_1\zeta(s) \in \overline{J^s - \Sigma_+^s}.$$

Na mocy (COH2)

$$\sigma = \sum_{t\neq s}\gamma_2\zeta(t) + \big(1_B\gamma_1 + 1_{B^c}\gamma_2\big)\zeta(s) \in \overline{J^s - \Sigma_+^s}.$$

Zatem $\sigma(s) \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}$. ■

LEMAT 2.15. Niech $s \in I^*$ i niech (A, η) będzie opcją europejską, której moment wykonania spełnia warunek $\eta \in \mathcal{S}^s$. Cena $\Pi_s^e(A, \eta)$, jeśli jest skończona, jest ceną zabezpieczenia, tzn.

$$-\Pi_s^e(A, \tau)\delta_s + A\delta_\eta \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}.$$

Dowód. W dowodzie wykorzystujemy fakt, że rodzina

$$\mathcal{A} = \big\{C \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s) : \quad -C\delta_s + A\delta_\eta \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}\big\}$$

jest scentrowana w dół. Aby to udowodnić, weźmy $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ i połóżmy $C = \min(C_1, C_2)$. Na mocy lematu 2.14

$$1_{C_1\le C_2}\big(-C_1\delta_s + A\delta_\eta\big) + 1_{C_2<C_1}\big(-C_2\delta_s + A\delta_\eta\big) \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}.$$

Zatem $C \in \mathcal{A}$.

Istnieje zatem ciąg nierosnący $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ zbieżny punktowo do $C = \operatorname{essinf}\mathcal{A}$. Z ograniczoności (z góry C_1, z dołu C), zbieżność ta zachodzi również w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P})$. Czyli $-C_n\delta_s + A\delta_\eta$ zbiega w X do $-C\delta_s + A\delta_\eta$, co dowodzi, że $C \in \mathcal{A}$, czyli jest ceną zabezpieczenia. ■

Można także pokazać, że $\Pi_s^a(A)$ jest ceną zabezpieczenia opcji amerykańskiej, lecz nie będziemy potrzebowali tego faktu w dalszych rozważaniach.

Brak kosztów transakcji

Na rynku zupełnym dowodzi się, że cena opcji amerykańskiej jest równa $\sup_{\eta\in\mathcal{S}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} A(\eta)$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest jedyną miarą martyngałową dla zdyskontowanych procesów cen. Tutaj wykażemy analogiczną własność

$$\sup_{\tau\in\mathcal{S}} \Pi_0^e\big(A(\tau),\tau\big) = \Pi_0^a(A)$$

pod warunkiem, że na rynku nie ma kosztów transakcji. Nasze rozumowanie jest podobne do wyprowadzenia ceny opcji amerykańskiej w zupełnym modelu z czasem dyskretnym.

DEFINICJA 2.16. Rozszerzony rynek amerykański $(J^s)_{s\in I^*}$ spełnia **założenie NTC** (brak kosztów transakcji), jeśli dla każdego $t,s\in I^*$, $t\geq s$ oraz $\sigma\in\overline{J^s-\Sigma_+^s}$ istnieją $\sigma_1\in\overline{J^s-\Sigma_+^s}$ i $\sigma_2\in\overline{J^t-\Sigma_+^t}$, takie że

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2 \qquad \text{oraz} \qquad \sigma_1(r)\big|_{(t,\infty)}=0 \quad \forall r\in I^*.$$

Własność NTC od razu wymusza podobne zachowanie związanego rozszerzonego rynku europejskiego: dla dowolnych $t,s\in I^*$, $t\geq s$ i $\gamma\in\overline{j^s-\Gamma_+^s}$ istnieją $\gamma_1\in\overline{j^s-\Gamma_+^s}$ i $\gamma_2\in\overline{j^t-\Gamma_+^t}$ takie że

$$\gamma=\gamma_1+\gamma_2 \qquad \text{oraz} \qquad \gamma_1\big|_{(t,\infty)}=0.$$

TWIERDZENIE 2.17. Jeśli I jest zbiorem skończonym i rynek amerykański $\big(J^s\big)_{s\in I^*}$ spełnia NTC, to

$$\Pi_0^a(A)=\sup_{\eta\in\mathcal{S}}\Pi_0^e\big(A(\eta),\eta\big)$$

dla dowolnej opcji amerykańskiej $\big(A(s)\big)_{s\in I}$.

Dowód tego twierdzenia składa się kilku lematów. Jeśli nie zostało to zaznaczone, to w lematach tych nie będziemy wymagać, by I było zbiorem skończonym.

LEMAT 2.18. Niech $s\in I$ i $\eta\in\mathcal{S}^s$. Załóżmy, że rodzina zmiennych losowych $(\xi_k)_{k\in\theta}\subseteq L^p(\Omega,\mathcal{F}_\eta)$ jest scentrowana w górę. Jeśli $\operatorname{esssup}_{k\in\theta}\xi_k\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_\eta)$ i cena $\Pi_s^e(\operatorname{esssup}_{k\in\theta}\xi_k,\eta)$ jest skończona, to

$$\Pi_s^e(\operatorname*{esssup}_{k\in\theta}\xi_k,\eta)=\operatorname*{esssup}_{k\in\theta}\Pi_s^e(\xi_k,\eta).$$

Dowód. Przypomnijmy, że Π_s^e jest przekształceniem niemalejącym, tzn. jeśli $\xi,\xi'\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_\eta)$, $\xi\leq\xi'$ p.n., to $\Pi_s^e(\xi,\eta)\leq\Pi_s^e(\xi',\eta)$ p.n. Oznaczmy $\xi^*=\operatorname{esssup}_{k\in\theta}\xi_k$. Zauważmy, że $\xi_k\leq\xi^*$, $k\in\theta$. Monotoniczność Π_s^e daje

$$\Pi_s^e(\xi_k,\eta)\leq\Pi_s^e(\xi^*,\eta) \text{ p.n.},$$

czyli

$$\operatorname*{esssup}_{k\in\theta}\Pi_s^e(\xi_k,\eta)\leq\Pi_s^e(\xi^*,\eta) \text{ p.n.}$$

Wiemy zatem, że $\operatorname{esssup}_{k\in\theta}\Pi_s^e(\xi_k,\eta)\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_s)$.

Wykażemy teraz, że

$$\Pi_s^e(\xi^*,\eta)\leq\operatorname*{esssup}_{k\in\theta}\Pi_s^e(\xi_k,\eta) \text{ p.n.}$$

Z faktu, że rodzina $(\xi_k)_{k\in\theta}$ jest scentrowana w górę wynika istnienie ciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\theta$, takiego że $\xi_{k_n}\nearrow\xi^*$ punktowo i w $L^p(\Omega,\mathcal{F}_\eta)$ z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Stąd $C_n=\Pi_s^e(\xi_{k_n},\eta)$

jest niemalejącym ciągiem zmiennych losowych majoryzowanych przez $\operatorname{esssup}_{k\in\theta}\Pi^e_s(\xi_k,\eta)$. A zatem C_n jest zbieżny punktowo i, na mocy twierdzenia o zbieżności majoryzowanej, w $L^p(\Omega,\mathcal{F}_s)$. Dostajemy

$$-C_n\delta_s+\xi_{k_n}\delta_\eta\to-\big(\lim_{n\to\infty}C_n\big)\delta_s+\xi^*\delta_\eta \quad \text{w } X.$$

Czyli

$$\Pi^e_s(\xi^*,\eta)\le\lim_{n\to\infty}C_n\le\operatorname*{esssup}_{k\in\theta}\Pi^e_s(\xi_k,\eta).$$

∎

LEMAT 2.19. Załóżmy, że rozszerzony rynek amerykański spełnia założenie NTC. Dla $s,t\in I^*$, $t\le s$, $\eta\in\mathcal{S}^t$ i $A\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_\eta)$, takich że $\Pi^e_t(A,\eta)$ jest skończone,

$$\Pi^e_t\big(A,\eta\big)=\Pi^e_t\big(1_{\eta<s}A+\Pi^e_s(1_{\eta\ge s}A,\eta\vee s),\eta\wedge s\big).$$

Dowód. Oznaczmy $C=\Pi^e_t\big(A,\eta\big)$. Na mocy definicji ceny zabezpieczenia, z warunku, że C jest skończone wynika, że $C\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_t)$. Na mocy lematu 2.15 mamy $-C\delta_t+A\delta_\eta\in\overline{j^s-\Gamma^s_+}$. Na mocy założenia NTC istnieje $W\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_s)$, takie że $-C\delta_t+A\delta_\eta=\gamma_1+\gamma_2$, gdzie

$$\begin{aligned}\gamma_1&=-C\delta_t+1_{\eta<s}A\delta_\eta+1_{\eta\ge s}W\delta_s &&\in\overline{j^t-\Gamma^t_+},\\ \gamma_2&=1_{\eta\ge s}\big(-W\delta_s+A\delta_\eta\big) &&\in\overline{j^s-\Gamma^s_+}.\end{aligned}$$

Stąd $W\ge\Pi^e_s\big(1_{\eta\ge s}A,\eta\vee s\big)$. Możemy zatem wziąć $W=\Pi^e_s\big(1_{\eta\ge s}A,\eta\vee s\big)$. Z lematu 2.14 wynika, że $\Pi^e_s\big(1_{\eta\ge s}A,\eta\vee s\big)=1_{\eta\ge s}\Pi^e_s\big(1_{\eta\ge s}A,\eta\vee s\big)$.

Z definicji funkcjonału ceny i z postaci γ_1 mamy

$$C\ge\Pi^e_t\big(1_{\eta<s}A+1_{\eta\ge s}W,\eta\wedge s\big).$$

Oznaczmy

$$C_1=\Pi^e_t\big(1_{\eta<s}A+1_{\eta\ge s}W,\eta\wedge s\big)$$

i zauważmy, że

$$\big(-C_1\delta_t+1_{\eta<s}A\delta_\eta+1_{\eta\ge s}W\delta_s\big)+1_{\eta\ge s}\big(-W\delta_s+A\delta_\eta\big)=-C_1\delta_t+A\delta_\eta,$$

co dowodzi $C_1=C$, z definicji C. ∎

LEMAT 2.20. Załóżmy, że rozszerzony rynek amerykański spełnia założenie NTC. Dla $s,t\in I^*$, $t\le s$ i opcji amerykańskiej $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ połóżmy

$$\begin{aligned}\hat{A}(r)&\equiv Y(r),\quad r<s,\\ \hat{A}(s)&=\operatorname*{esssup}_{\eta\in\mathcal{S}^s}\Pi^e_s\big(A(\eta),\eta\big).\end{aligned}$$

Jeśli $\hat{A}(s)\in L^p(\Omega,\mathcal{F}_s)$ i $\Pi^e_s\big(\hat{A}(\vartheta),\vartheta\big)<\infty$ dla $\vartheta\in\mathcal{S}^t,\vartheta\le s$, to

$$\operatorname*{esssup}_{\eta\in\mathcal{S}^t}\Pi^e_t\big(A(\eta),\eta\big)=\operatorname*{esssup}_{\vartheta\in\mathcal{S}^t,\vartheta\le s}\Pi^e_s\big(\hat{A}(\vartheta),\vartheta\big).$$

Dowód. Ustalmy $\eta \in \mathcal{S}^t$ i oznaczmy $C = \Pi_t^e\big(A(\eta), \eta\big)$. Z lematu 2.19 wynika, że

$$C = \Pi_t^e\Big(1_{\eta<s}A(\eta) + \Pi_s^e\big(1_{\eta\geq s}A(\eta), \eta \vee s\big), \eta \wedge s\Big).$$

Wiemy, że $\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$, bo $\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big) \leq \hat{A}(s)$. Z lematu 2.14 wynika, że

$$\Pi_s^e\big(1_{\eta\geq s}A(\eta), \eta \vee s\big) = 1_{\eta\geq s}\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big).$$

Zatem $C \leq \Pi_t^e\big(\hat{A}(\eta), \eta\big)$, co daje nam nierówność w jedną stronę:

$$\operatorname*{esssup}_{\eta\in\mathcal{S}^t} \Pi_t^e\big(A(\eta), \eta\big) \leq \operatorname*{esssup}_{\vartheta\in\mathcal{S}^t, \vartheta\leq s} \Pi_s^e\big(\hat{A}(\vartheta)\big).$$

Do dowodu nierówności w drugą stronę ustalmy $\vartheta \in \mathcal{S}^t$, $\vartheta \leq s$ i rozważmy rodzinę momentów stopu $\theta = \big\{\eta \in \mathcal{S}^t : \quad \eta \equiv \vartheta \text{ na } \{\vartheta < s\}\big\}$. Dla dowolnego $\eta \in \theta$ z lematu 2.19 dostajemy

$$\begin{aligned}\Pi_t^e\big(A(\eta), \eta\big) &= \Pi_t^e\Big(1_{\eta<s}A(\eta) + \Pi_s^e\big(1_{\eta\geq s}A(\eta), \eta \vee s\big), \eta \wedge s\Big)\\ &= \Pi_t^e\Big(1_{\vartheta<s}A(\vartheta) + \Pi_s^e\big(1_{\vartheta=s}A(\eta), \eta \vee s\big), \eta \wedge s\Big).\end{aligned}$$

Podobnie jak powyżej, z lematu 2.14 dostajemy

$$\Pi_s^e\big(1_{\vartheta=s}A(\eta), \eta \vee s\big) = 1_{\vartheta=s}\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big).$$

Zauważmy także, że $\eta \wedge s = \vartheta$. Na mocy lematu 2.18

$$\begin{aligned}&\operatorname*{esssup}_{\eta\in\theta} \Pi_t^e\Big(1_{\vartheta<s}A(\vartheta) + 1_{\vartheta=s}\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big), \vartheta\Big)\\ &\qquad = \Pi_t^e\Big(1_{\vartheta<s}A(\vartheta) + 1_{\vartheta=s} \operatorname*{esssup}_{\eta\in\theta} \Pi_s^e\big(A(\eta), \eta \vee s\big), \vartheta\Big) = \Pi_t^e\big(\hat{A}(\vartheta), \vartheta\big).\end{aligned}$$

Zatem

$$\Pi_t^e\big(\hat{A}(\vartheta), \vartheta\big) = \operatorname*{esssup}_{\eta\in\theta} \Pi_t^e\big(A(\eta), \eta\big) \leq \operatorname*{esssup}_{\eta\in\mathcal{S}^t} \Pi_t^e\big(A(\eta), \eta\big).$$

∎

Dowód twierdzenia 2.17. Na mocy lematu 2.10 zachodzi nierówność

$$\Pi_0^a(A) \geq \sup_{\eta\in\mathcal{S}} \Pi_0^e\big(A(\eta), \eta\big).$$

Jeśli prawa strona jest nieskończona, to lewa również i dostajemy równość. Skupimy się zatem na przypadku, gdy prawa strona jest skończona. Wtedy $\Pi_0^e\big(A(\eta), \eta\big)$ są jednostajnie ograniczone dla $\eta \in \mathcal{S}$. Ponadto $\Pi_s^e\big(A(\eta), \eta\big) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$ dla dowolnego $\eta \in \mathcal{S}^s$, $s \in I$. Wynika to z zastosowania lematu 2.19 dla $t = 0$ i $A = A(\eta)$. Łatwo też zauważamy, że zmienne losowe typu

$$A = \operatorname*{esssup}_{\eta\in\mathcal{S}^s} \Pi_s^e\big(A(\eta), \eta\big)$$

są w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$, ponieważ

$$A \leq \sum_{t\in I, t\geq s} \Pi_s^e\big(A(t), t\big)$$

i ze skończoności I wynika, że suma po prawej stronie zawiera skończoną liczbę składników.

Dla jasności wywodu ograniczymy się do przypadku, gdy $I = \{0, t_1, t_2\}$, $0 < t_1 < t_2$, lecz rozumowanie analogicznie przeprowadza się dla dowolnego skończonego zbioru I. Połóżmy

$$C_1 = \Pi^e_{t_1}\big(A(t_2), t_2\big) \vee A(t_1) \qquad \text{oraz} \qquad C_0 = \Pi^e_0\big(C_1, t_1\big).$$

Z lematu 2.20 mamy $C_0 = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} \Pi^e_0\big(A(\tau), \tau\big)$. Skonstruujemy inwestycję $\sigma \in \overline{J - \Sigma_+}$, która zabezpieczy wypłatę amerykańską $\big(A(t)\big)_{t\in I}$ i jej cena w 0 będzie równa C_0. Połóżmy

$$\begin{aligned}\gamma^1 &= -C_0\delta_0 + C_1\delta_{t_1} \in \overline{j^0 - \Gamma^0_+},\\ \gamma^2 &= -C_1\delta_{t_1} + A(t_2)\delta_{t_2} \in \overline{j^{t_1} - \Gamma^{t_1}_+}.\end{aligned}$$

Niech $\gamma^1_n \in j^0 - \Gamma^0_+$, $\gamma^2_n \in j^{t_1} - \Gamma^{t_1}_+$ będą ciągami inwestycji europejskich zbieżnych odpowiednio do γ^1 i γ^2. Na mocy (COH3)

$$\sigma_n = \gamma^1_n\zeta(t_1) + (\gamma^1_n + \gamma^2_n)\zeta(t_2) \in J - \Sigma_+.$$

Stąd $\sigma_n \to \sigma$ w $\mathcal{N}$, gdzie

$$\sigma = \big(-C_0\delta_0 + C_1\delta_{t_1}\big)\zeta(t_1) + \big(-C_0\delta_0 + A(t_2)\delta_{t_2}\big)\zeta(t_2).$$

Dostaliśmy zatem zabezpieczenie amerykańskiej opcji $(A(t))_{t\in I}$. ■

Zauważmy, że założenie NTC jest wymagane tylko do dowodu lematu 2.19. Możemy zatem zastąpić je założeniem

(PD) Dla dowolnych $s, t \in I^*$, $t \le s$, $\eta \in \mathcal{S}^t$ i $A \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$

$$\Pi^e_t\big(A, \eta\big) = \Pi^e_t\big(1_{\eta<s}A + \Pi^e_s(1_{\eta\ge s}A, \eta\vee s), \eta\wedge s\big).$$

Zwróćmy też uwagę, że w dowodach przedstawionych powyżej faktów nie korzystaliśmy z założenia o braku arbitrażu. Oznacza to, że nasze wyniki są prawdziwe nawet dla rynków, na których istnieje możliwość arbitrażu. Nie było to możliwe do osiągnięcia w przypadku innych sposobów modelowania.

2.4. Przykład

Niech $\mathcal{T}$ będzie co najwyżej przeliczalnym podzbiorem $[0, \infty)$, I dowolnym podzbiorem $\mathcal{T}$, zaś $p \ge 1$. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\big)$ z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Ograniczymy się do tzw. modelu przeliczalnego dla p. Na rynku dana jest rodzina adaptowanych procesów stochastycznych $(S^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, reprezentujących ceny papierów wartościowych. Dyskusję o możliwych papierach wartościowych odłożymy na później. Tutaj wspomnijmy tylko, że nie dokonujemy żadnych założeń co do liczności zbioru indeksów $\mathcal{A}$. Zakładamy jedynie, że $S^\alpha(\eta) \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$ dla dowolnego $\alpha \in \mathcal{A}$, $\eta \in \tilde{\mathcal{S}}$, gdzie $\tilde{\mathcal{S}}$ jest zbiorem momentów stopu o wartościach w $\mathcal{T}$. Przez $\tilde{\mathcal{S}}^s$, $s \in I^*$, oznaczymy zbiór momentów stopu $\eta \in \tilde{\mathcal{S}}$ nie mniejszych od s. Wprowadzamy ograniczenia na skład portfela poprzez wybranie wypukłego dodatniego stożka $C \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{A}}$. Zakładamy, że jedna transakcja może dotyczyć skończonej liczby papierów.

Skonstruujemy rynek amerykański z ograniczeniami na skład portfela. Idea konstrukcji jest prosta, jednak będzie wymagała skomplikowanych oznaczeń. Niech $\Theta(\eta)$, gdzie $\eta \in \tilde{\mathcal{S}}$, oznacza zbiór funkcji $\theta : \mathcal{A} \to L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\eta)$ o następujących własnościach:

i) $\theta(\alpha) = 0$ p.n. poza skończoną liczbą argumentów $\alpha \in \mathcal{A}$,

ii) $\big(\theta(\alpha), \alpha \in \mathcal{A}\big) \in C$ p.n.

Jest to zbiór możliwych transakcji w momencie η.

Konstrukcję rynku z ograniczeniami J^s podzielimy na dwie części. Zgodnie z definicją, jeśli $\sigma \in J^s$, to $\sigma\big|_{[0,s)} \equiv 0$ i współrzędne $\sigma(t)$, $t \in I \cap [0, s]$ nie są ze sobą związane, zaś współrzędne $\sigma(t)$, $t \in I \cap (s, \infty)$ są ograniczone więzami ujętymi w Σ. Zbiór $\mathcal{Y}^s$ odpowiada za pierwszy z powyższych przypadków, zaś $\mathcal{X}^s$ – za drugi.

Zbiór $\mathcal{X}^s$, $s \in I^*$, zawiera funkcje $\Delta : I \cap (s, \infty) \to \tilde{\mathcal{S}}^s \times \tilde{\mathcal{S}}^s \times \Theta(\infty)$ o następujących własnościach: przyjmując oznaczenie współrzędnych $\Delta(u) = (\eta_u, \vartheta_u, \theta_u)$, $u \in I \cap (s, \infty)$, dla $u, v \in I \cap (s, \infty)$

$$\begin{aligned} \theta_u &\in \Theta(\eta_u), \\ \eta_u &< \vartheta_u, \\ \eta_u = \eta_v,\ \theta_u &= \theta_v \text{ na } \{\eta_u < u\} \cup \{\eta_v < u\}, \\ \vartheta_u &= \vartheta_v \text{ na } \{\vartheta_u < u\} \cup \{\vartheta_v < u\}. \end{aligned}$$

Z elementem zbioru $\mathcal{X}^s$ zwiążemy amerykańską możliwość inwestycyjną σ, która na współrzędnej $t > s$ będzie miała wynik strategii inwestycyjnej polegającej na zakupie portfela θ_t w momencie η_t i sprzedaży w momencie ϑ_t. Analogicznie będziemy interpretować zbiór $\mathcal{Y}^s$, $s \in I^*$, który zawiera funkcje $\Delta : I \cap [0, s] \to \tilde{\mathcal{S}}^s \times \tilde{\mathcal{S}}^s \times \Theta(\infty)$ o następujących własnościach: przyjmując oznaczenie współrzędnych $\Delta(u) = (\eta_u, \vartheta_u, \theta_u)$, $u \in I \cap [0, s]$,

$$\begin{aligned} \theta_u &\in \Theta(\eta_u), \\ \eta_u &< \vartheta_u. \end{aligned}$$

Rynek amerykański J^s, $s \in I^*$, jest najmniejszym wypukłym dodatnim stożkiem zawierającym inwestycje

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in I \cap (s,\infty)} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \theta(t)(\alpha)\big(S^\alpha(\vartheta_t)\delta_{\vartheta_t} - S^\alpha(\eta_t)\delta_{\eta_t}\big)\zeta(t), \qquad (\eta_t, \vartheta_t, \theta_t) \in \mathcal{X}^s, \\ &\sum_{t \in I \cap [0,s]} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \theta(t)(\alpha)\big(S^\alpha(\vartheta_t)\delta_{\vartheta_t} - S^\alpha(\eta_t)\delta_{\eta_t}\big)\zeta(t), \qquad (\eta_t, \vartheta_t, \theta_t) \in \mathcal{Y}^s. \end{aligned}$$

Przykład 2.2 (Model ilustracyjny c.d.). Jak wspomnieliśmy, model ilustracyjny jest identyczny z modelem przeliczalnym $\mathcal{T} = I = \{0, 1, 2, 3\}$. Przypomnijmy, że każda inwestycja amerykańska σ w tym modelu ma zapis

$$\sigma(i) = \gamma_0^i\delta_0 + \gamma_1^i\delta_1 + \gamma_2^i\delta_2 + \gamma_3^i\delta_3, \quad i \in I.$$

Ustalmy także dla uproszczenia $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ i dodatni wypukły stożek $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Rozszerzony rynek amerykański składa się z czterech części: J^0, J^1, J^2 i J^3. Ostatnia z nich jest trywialna, składa się z jednego elementu zerowego. Przedstawimy w detalach konstrukcję J^1. Odpowiednikiem inwestycji generowanych przez $\mathcal{X}^1$ jest zbiór $\sigma \in \Sigma$ o następujących własnościach:

$$\begin{aligned} &\gamma_j^0 = \gamma_j^1 = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ &\gamma_1^2 = \gamma_1^3 = -\theta(1)S^1(1) - \theta(2)S^2(1), \\ &\gamma_k^2 = \gamma_k^3 = \theta(1)S^1(k) + \theta(2)S^2(k) \end{aligned}$$

dla $k \in \{2,3\}$, $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_1; C)$ lub $\gamma^i_j = 0$, $i,j \in I$, poza

$$\gamma^k_2 = -\theta(1)S^1(2) - \theta(2)S^2(2),$$
$$\gamma^k_3 = \theta(1)S^1(3) + \theta(2)S^2(3)$$

dla $k \in \{2,3\}$, $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_2; C)$. Inwestycjom związanych ze zbiorem $\mathcal{Y}^1$ odpowiadają $\sigma \in \Sigma$ o wszystkich elementach zerowych poza

$$\gamma^i_k = -\theta(1)S^1(k) - \theta(2)S^2(k),$$
$$\gamma^i_l = \theta(1)S^1(l) + \theta(2)S^2(l)$$

dla $k,l,i \in I$, $1 \leq k < l$, $\theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_l; C)$. □

Jeśli I oraz $\mathcal{A}$ są zbiorami skończonymi, to rynek możemy zdefiniować prościej. Weźmy $s \in I^*$. Wtedy J^s jest najmniejszym wypukłym dodatnim stożkiem zawierającym

$$\bigcup_{t \in I \cap (t,\infty)} J^t,$$
$$\gamma\zeta(t), \quad \gamma \in \Xi(s), \quad t \in I \cap [0,s],$$
$$\sum_{u \in I \cap (t,\infty)} \gamma\zeta(u), \quad \gamma \in \Xi(s), \quad t \geq s,$$

gdzie

$$\Xi(s) = \Big\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \theta(\alpha)\big(S^\alpha(\vartheta)\delta_\vartheta - S^\alpha(\eta)\delta_\eta : \quad \eta, \vartheta \in \tilde{\mathcal{S}}^s, \quad \eta < \vartheta, \quad \theta \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_\eta, C)\Big\},$$

gdzie ograniczenie C traktujemy jako podzbiór przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{\mathcal{A}}$.

Oznaczmy skonstruowany powyżej model przez $\mathcal{J}\big((S^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, C\big)$. Model ten jest bardzo ogólny. Obejmuje on instrumenty bazowe będące akcjami lub obligacjami z ryzykiem bankructwa, rachunki bankowe. Możemy także uwzględnić inwestycje w opcje z możliwością ich sprzedaży lub nie. Zauważmy też, że zaprezentowany model pozwala na rozważanie różnych stóp lokat i pożyczek bankowych.

LEMAT 2.21. Rodzina $\mathcal{J}\big((S^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, C\big)$ jest rozszerzonym rynkiem amerykańskim.

Dowód tego faktu jest natychmiastowy. Udowodnimy teraz warunek (PD).

TWIERDZENIE 2.22. Jeśli ceny akcji są nieujemne oraz $C \subseteq [0,\infty)^{\mathcal{A}}$, to na rynku $\mathcal{J}\big((S^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, C\big)$ spełniony jest warunek (PD)

$$\Pi^e_t\big(A,\eta\big) = \Pi^e_t\big(1_{\eta<s}A + \Pi^e_s(1_{\eta \geq s}A, \eta \vee s), \eta \wedge s\big), \quad s,t \in I, \quad s > t, \quad \eta \in \mathcal{S}^t$$

dla wypłat o tej własności, że $\Pi^e_s(A,\eta) < \infty$.

Dowód. Jeśli lewa strona warunku (PD) jest nieskończona, to równość jest natychmiastowa. Załóżmy zatem, że $\Pi^e_t\big(A,\eta\big)$ jest skończona. W dowodzie będziemy korzystać z tego, że działamy w modelu przeliczalnym, w którym zbieżność γ_n do γ jest silnie związana ze zbieżnością w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t)$ przepływów $\gamma_n(t)$ w chwili $t \in \mathcal{T}$ inwestycji γ_n do $\gamma(t)$.

Na podstawie dowodu lematu 2.19 widać, że w celu dowiedzenia (PD) konieczne jest udowodnienie warunku NTC dla inwestycji postaci $-C\delta_t + A\delta_\eta$. Ustalmy $t \in \mathcal{T}$ i $s \in I^*$, $s > t$, $s \leq \eta$ p.n. Niech $\gamma = -C\delta_t + A\delta_\eta \in \overline{j^s - \Gamma_+^s}$, zaś $\gamma_n \in j^s - \Gamma_+^s$ będzie ciągiem zbieżnym do γ. Możemy znaleźć dekompozycję γ_n na sumę $\phi_n + \psi_n$ spełniającą założenia podane w warunku NTC, tzn. $\phi_n \in j^t - \Gamma_+^t$, $\psi_n \in j^s - \Gamma_+^s$ i $\phi|_{(s,\infty)} \equiv 0$. Oznaczmy przez $w_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$ przepływ pieniężny w chwili s w inwestycji ϕ_n, zaś przez $v_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$ przepływ pieniężny w chwili s w inwestycji ψ_n. Oczywiście $w_n + v_n$ jest równe przepływowi w chwili s strategii γ_n, czyli suma ta dąży do 0 w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$. Co więcej, v_n jest zmienną losową niedodatnią, gdyż na mocy założeń na rynku nie ma możliwości zadłużania się.

Połóżmy $v = -\Pi_s^e(A, \eta)$ i $B = \{v_n < v\}$. Inwestycja

$$\psi_n^* = 1_B(v\delta_s + A\delta_\eta) + 1_{B^c}\gamma_n$$

należy do $\overline{j^s - \Gamma_+^s}$. Jej przepływ w momencie s wynosi $v_n^* = 1_B v + 1_{B^c} v_n$. Zmodyfikujmy inwestycje ϕ_n kładąc

$$\phi_n^* = \phi_n + (v_n - v_n^*)\delta_s.$$

Ponieważ $v_n - v_n^* \leq 0$, to $\phi_n^* \in \overline{j^t - \Gamma_+^t}$.

Na mocy lematu A1.1 z pracy Delbaen, Schachermayer [7] istnieje ciąg $\tilde{v}_n^* \in \operatorname{conv}(v_n^*, v_{n+1}^*, \ldots)$ zbieżny punktowo i w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$ do pewnej zmiennej losowej $\tilde{v}^*$. Weźmy identyczne kombinacje wypukłe strategii ψ_n^* i ϕ_n^*, i oznaczmy je odpowiednio przez $\tilde{\psi}_n^*$, $\tilde{\phi}_n^*$. Wtedy

$$\tilde{\psi}_n^* \to \tilde{v}^*\delta_s + A\delta_\eta \tag{2.1}$$

oraz

$$\tilde{\phi}_n^* \to -C\delta_t - v^*\delta_s,$$

bo przepływ w momencie s inwestycji ϕ_n^* wynosi $w_n + v_n - v_n^*$, zaś $w_n + v_n$ dąży do zera w $L^p(\Omega, \mathcal{F}_s)$. ■

Zauważmy, że z powyższego dowodu wynika, iż $\tilde{v}^* = -\Pi_s^e(A, \eta)$. Z konstrukcji wynika, że

$$0 \geq v_n^* \geq -\Pi_s^e(A, \eta),$$

czyli $\tilde{v}^*$ spełnia te same nierówności. Jednak z (2.1) mamy $\tilde{v}^* \leq -\Pi_s^e(A, \eta)$.

Rozdział 3

Sterowanie impulsowe

Sterowanie impulsowe procesów Markowa zostało wprowadzone w pracy Bensoussana i Lionsa [2]. Jest ono jednym z najczęściej stosowanych sposobów sterowania stochastycznego. Polega na zmianie stanu sterowanego procesu Markowa $Y(t)$ w momentach stopu $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Zmiana ta zależy tylko od historii procesu. Celem sterowania jest maksymalizacja lub minimalizacja funkcjonału zależnego od trajektorii procesu i sterowania. W tym rozdziale skupimy się na jednym typie funkcjonału. Rozważania rozpocznijmy jednak od wprowadzenia pojęć.

3.1. Procesy Markowa

Rozważmy przestrzeń mierzalną $(\Omega, \mathcal{F})$, która będzie pełnić rolę bazy dla kolekcji przestrzni probabilistycznych. W tej przestrzeni wprowadzamy filtrację, czyli rosnącą rodzinę σ-ciał zawartych w $\mathcal{F}$. Niech $(E, \mathcal{E})$ będzie przestrzenią metryczną ośrodkową z σ-ciałem zbiorów borelowskich oznaczanym $\mathcal{E}$. Nazwiemy ją przestrzenią stanów.

DEFINICJA 3.1. Procesem Markowa nazywamy rodzinę $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, \mathbb{P}^x\big)$ spełniającą następujące warunki:

i) $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$ jest procesem adaptowanym,

ii) $(\mathbb{P}^x)_{x \in E}$ jest rodziną miar probabilistycznych na $(\Omega, \mathcal{F})$,

iii) funkcja $x \mapsto \mathbb{P}^x\big\{X(t) \in B\big\}$ jest mierzalna dla dowolnego $B \in \mathcal{E}$ i $t \in \mathbb{R}_+$,

iv) $\theta_t : \Omega \to \Omega$, zwany operatorem przesunięcia lub translacji, spełnia $X(t) \circ \theta_h(\omega) = X(t + h)(\omega)$ dla $t, h \in \mathbb{R}_+$ i $\omega \in \Omega$ (jednorodność w czasie),

v) $\mathbb{P}^x\big\{X(t+s) \in B | \mathcal{F}_t\big\} = \mathbb{P}^{X(t)}\big\{X(s) \in B\big\}$ dla $x \in E$, $B \in \mathcal{E}$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$ (własność Markowa),

vi) $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}_t)$ są uniwersalnie zupełne.

Często rozważaną bazą procesu Markowa jest przestrzeń Ω składająca się ze wszystkich funkcji RCLL (prawostronnie ciągłych z lewostronnymi granicami) z $\mathbb{R}_+$ do $\mathbb{R}^d$. Wtedy $(E, \mathcal{E}) = \big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ oraz $X(t)(\omega) = \omega(t)$ dla $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Na Ω zadajemy filtrację wzorem

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma\big(\omega(s) : \quad s \leq t\big), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

i uzupełniamy uniwersalnie dostając $\mathcal{F}_t$. Oczywiście $\mathcal{F}$ jest uzupełnieniem uniwersalnym σ-ciała generowanego przez $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$.

W dalszej części rozdziału odwołując się do procesu Markowa nie będziemy przytaczać całej rodziny obiektów, które go tworzą, lecz ograniczymy się tylko do oznaczenia $X(t)$.

Wprowadzimy teraz mocniejszą wersję własności Markowa.

DEFINICJA 3.2. Proces Markowa $X(t)$ ma **silną własność Markowa**, jeśli

$$\mathbb{P}^x\big\{X(\tau+s)\in B|\mathcal{F}_\tau\big\} = \mathbb{P}^{X(\tau)}\big\{X(s)\in B\big\}$$

dla momentu stopu τ, liczby $s\in\mathbb{R}_+$, $x\in E$ oraz $B\in\mathcal{E}$.

Wprowadźmy teraz kilka oznaczeń. Załóżmy, że E jest przestrzenią metryczną. Niech $C(E)$, $C_b(E)$, $C_0(E)$ oznaczają rodziny funkcji z E do $\mathbb{R}$ odpowiednio ciągłych, ciągłych ograniczonych i ciągłych, ograniczonych, znikających w nieskończoności.

Z każdym procesem Markowa powiązana jest półgrupa przejścia. Z własności Markowa wynika, że zdefiniowany poniżej operator ma rzeczywiście własność półgrupy.

DEFINICJA 3.3. **Półgrupa przejścia** $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ procesu Markowa $X(t)$ dana jest wzorem

$$P_tf(x) = \mathbb{E}^x f\big(X(t)\big),\quad x\in E,$$

gdzie $f: E\to\mathbb{R}$ jest ograniczoną funkcją mierzalną, zaś $\mathbb{E}^x$ jest operatorem wartości oczekiwanej związanym z miarą $\mathbb{P}^x$.

Następna definicja wprowadza rodzinę procesów Fellera, którymi będziemy zajmować się w tym rozdziale.

DEFINICJA 3.4. **Procesem Fellera** nazywamy taki proces Markowa, którego półgrupa przejścia $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ przekształca $C_0(E)$ w $C_0(E)$ i jest C_0 ciągła tzn.

$$\|P_tf-f\|\to 0,\quad \text{gdy } t\to 0,\quad f\in C_0(E).$$

Fellerowskość jest rodzajem ciągłości procesu. Intuicyjnie, proces z dużym prawdopodobieństwem zostaje w określonym otoczeniu punktu startowego przez krótki, ale deterministyczny czas.

Własność C_0 ciągłości jest implikowana przez nieco słabszy warunek (patrz Rogers, Williams [26], lemat III.6.7)

$$\lim_{t\to 0} P_tf(x) = f(x),\quad x\in E,\quad f\in C_0(E).$$

Dowodu poniższego twierdzenia należy szukać w monografii Dynkina [9]. Znajduje się on także w Rogers, Williams [26] III.7 i III.11. Udowodnienie istnienia modyfikacji RCLL wymaga skorzystania z zupełności filtracji.

TWIERDZENIE 3.5. Proces Fellera posiada modyfikację o trajektoriach RCLL, która

i) ma silną własność Markowa,

ii) jest quasi-lewostronnie ciągła.

W obliczu powyższego twierdzenia w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że operujemy na modyfikacji procesu Fellera z trajektoriami RCLL, tzn. każdy proces Fellera bedzie miał trajektorie RCLL. Zauważmy ponadto, że filtracja generowana przez proces Markowa będzie prawostronnie ciągła.

3.2. Sterowanie

W tym podrozdziale wprowadzimy pojęcie sterowania, funkcjonału celu i funkcji wartości. Ograniczymy się do szczególnej postaci sterowania, dzięki czemu nie będziemy zmuszeni do żmudnych konstrukcji procesu odpowiedzi na sterowanie (patrz Robin [25]). Nie będzie to jednak wpływało na ogólność prezentowanych wyników, a jedynie uprości notację.

Ustalmy proces Markowa $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X(t), \theta_t, \mathbb{P}^x\big)$. Nie będziemy nim bezpośrednio sterować, zmieniając jego stan, jak to się dzieje w ogólnym podejściu. Nasze sterowanie będzie zewnętrznym elementem. Niech $Y = (N, X)$ będzie procesem Markowa, którego pierwsza współrzędna jest stała, zaś druga jest równa X. Sterowanie będzie dokonywało zmiany tylko pierwszej współrzędnej, która de facto pełni funkcję przechowywania ostatniej decyzji.

DEFINICJA 3.6. Sterowaniem Π nazywamy ciąg par $(N_i, \tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ spełniających następujące warunki:

i) τ_i jest momentem stopu,

ii) $\tau_i \leq \tau_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{N}$,

iii) $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ $\mathbb{P}^{X(0)}$-p.n.,

iii) N_i jest $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mierzalną zmienną losową o wartościach w E,

iv) $\tau_0 = 0$, N_0 jest deterministyczną wartością.

Zauważmy, że zbiór sterowań zależy od warunku początkowego $X(0)$ dla procesu X.

Formalnie odpowiedzią na sterowanie $\Pi = (N_i, \tau_i)$ jest proces $Y^\Pi(t) = \big(N(t), X(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie

$$N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 1_{[\tau_i, \tau_{i+1})}(t) N_i.$$

Oczywiście jest on procesem Markowa. Oznaczmy więc przez $\tilde{E}$ nową przestrzeń stanów $E \times E$ z σ-ciałem produktowym $\tilde{\mathcal{E}}$. W celu uproszczenia notacji będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}^y$, $y = (\eta, x) \in \tilde{E}$, miarę $\mathbb{P}^x$.

Ograniczymy teraz zbiór sterowań, które będziemy rozpatrywać. Z każdym punktem przestrzeni stanów zwiążemy zbiór możliwych impulsów poprzez wprowadzenie funkcji $\Gamma : \tilde{E} \to \tilde{\mathcal{E}}$. A zatem z punktu $y \in \tilde{E}$ możemy proces przesunąć do dowolnego punktu ze zbioru $\Gamma(y)$ i nigdzie indziej.

DEFINICJA 3.7. Sterowaniem dopuszczalnym $\Pi = (N_i, \tau_i)$ dla $y = (\eta, x) \in \tilde{E}$ nazywamy sterowanie, takie że $N_0 = \eta$ i

$$\mathbb{P}^y\big\{N_i \in \Gamma\big(N_{i-1}, X(\tau_i)\big)\big\} = 1.$$

Zbiór wszystkich sterowań dopuszczalnych oznaczamy przez $\mathcal{A}$. Zbiór sterowań dopuszczalnych dla $y \in \tilde{E}$ oznaczamy przez $\mathcal{A}(y)$. Dla ustalonego sterowania dopuszczalnego $\Pi \in \mathcal{A}(y)$ rozważamy funkcjonał celu:

$$J(\Pi) = \mathbb{E}^y \Big\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y^\Pi(t)\big) dt + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha\tau_i} c\big(Y^\Pi(\tau_i), N_i\big) \Big\}, \tag{3.1}$$

gdzie $f : \tilde{E} \to \mathbb{R}_+$ i $c : \tilde{E} \times E \to \mathbb{R}_+$ są funkcjami mierzalnymi, nieujemnymi, zaś $\alpha \in \mathbb{R}$. Funkcję c rozumie się jako koszt dokonania impulsu, zaś f odpowiedzialna jest za ocenę bieżącego stanu procesu. Zadanie optymalnego sterowania polega na znalezieniu strategii minimalizującej lub maksymalizującej wartość funkcjonału J.

W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do opisu przypadku minimalizacji.

DEFINICJA 3.8. **Funkcją wartości** nazywamy

$$v(y) = \inf_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J(\Pi), \quad y \in \tilde{E}.$$

Jak wspomnieliśmy wcześniej, teoria sterowania optymalnego zajmuje się odpowiedzią na pytanie, czy infinum znajdujące się w definicji funkcji wartości jest osiągane. Ponadto poszukuje się funkcji wartości. Okazuje się, że znalezienie funkcji wartości odpowiednio gładkiej pozwala na skonstruowanie sterowania optymalnego.

W dalszej części wykładu podamy metody dowodzenia istnienia sterowania optymalnego i jego znajdowania. Teraz jednak zwrócimy uwagę na bardzo ważny fakt. Jeśli będziemy w stanie znaleźć sterowanie optymalne, to będzie to sterowanie stacjonarne i markowskie, tzn. takie, w którym decyzję o dokonaniu impulsu będziemy podejmować na podstawie bieżącej wartości procesu sterowanego $Y^{\Pi}(t)$ i cel tego impulsu będzie również zależał od wartości $Y^{\Pi}(t)$ w momencie dokonywania impulsu.

3.3. Równanie Bellmana

W rozwiązaniach problemów sterowania optymalnego pojawia się często równanie Bellmana. W tym rozdziale będziemy dążyć do pokazania, że równianie to pełni pierwszorzędną rolę w rozwiązaniu problemu sterowania optymalnego.

Na początek wprowadźmy **operator impulsu** dla funkcji $u : \tilde{E} \to \mathbb{R}$

$$Mu(\eta, x) = \inf_{\xi \in \Gamma(y)} \big(c(\eta, x, \xi) + u(\xi) \big), \quad (\eta, x) \in \tilde{E}.$$

Operatorem Bellmana będziemy nazywać

$$\mathcal{K}u(y) = \inf_{\tau} \mathbb{E}^{\,y} \Big\{ \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} f\big(Y(t)\big) dt + e^{-\alpha \tau} Mu\big(Y(\tau)\big) \Big\}, \quad y \in \tilde{E}, \tag{3.2}$$

gdzie $u : \tilde{E} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją, taką że Mu jest funkcją mierzalną.

Sformułujemy teraz twierdzenia pierwszorzędnej wagi dla naszego wykładu. Stwierdzają one, że jeśli funkcja wartości spełnia równanie Bellmana

$$\mathcal{K}v = v, \tag{3.3}$$

jest ciągła i operator impulsu spełnia odpowiednie założenia, to istnieje strategia optymalna, która jest markowska. Ponadto skonstruujemy tę strategię bazując na funkcji wartości v.

DEFINICJA 3.9. Odwzorowanie $\gamma : \tilde{E} \to \tilde{\mathcal{E}}$ nazywamy **ośrodkowym**, jeśli

i) $\{(z, y) : \quad y \in \gamma(z)\} \in \tilde{\mathcal{E}} \otimes \tilde{\mathcal{E}}$,
ii) $\tilde{E}$ zawiera przeliczalny gęsty zbiór $\tilde{E}'$, taki że $\tilde{E}' \cap \gamma(y)$ jest gęsty w $\gamma(y)$ dla każdego $y \in \tilde{E}$.

TWIERDZENIE 3.10. Załóżmy, że

i) $\Gamma(y)$ jest zbiorem zwartym dla każdego $y \in \tilde{E}$,
ii) v jest funkcją ciągłą,
iii) istnieje ciąg odwzorowań ośrodkowych $\gamma_n : \tilde{E} \to \tilde{\mathcal{E}}_c$, gdzie $\tilde{\mathcal{E}}_c$ to podrodzina $\tilde{\mathcal{E}}$ składająca się ze zbiorów zwartych, takich że $\gamma_n(y) \to \Gamma(y)$, $y \in \tilde{E}$

Istnieje wtedy funkcja mierzalna $I : \tilde{E} \to \tilde{E}$, taka że

$$Mv(y) = c\big(y, I(y)\big) + v\big(I(y)\big).$$

Funkcję tę nazwiemy **funkcją impulsu**.

Dowód. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia 2 z pracy Schäl'a [27]. ■

Niech C będzie dowolnym zbiorem otwartym w $\tilde{E}$, zwanym **obszarem kontynuacji**, zaś I funkcją mierzalną. Skonstruujemy sterowanie $\Pi = (N_i, \tau_i)$, które zależeć będzie od tych dwóch elementów. Nie musi ono jednak spełniać punktu iii) definicji 3.6. Konstrukcja przebiegać będzie indukcyjnie. Ustalmy punkt $y = (\eta, x) \in \tilde{E}$ i połóżmy $N_0 = \eta$, $\tau_0 = 0$. Następnie dla $i = 1, 2, \ldots$ kładziemy

$$\begin{aligned} \tau_i &= \inf\{t \geq \tau_{i-1} : \quad (N_{i-1}, X(t)) \notin C\}, \\ N_i &= I\big(N_{i-1}, X(\tau_i)\big). \end{aligned}$$

Ponieważ dopełnienie C jest zbiorem domkniętym, to τ_i jest momentem stopu.

Przypomnijmy, że f i c są funkcjami nieujemnymi - będziemy z tego korzystać w poniższym twierdzeniu. Ponadto niech h będzie potencjałem:

$$h(y) = \mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y(t)\big) dt, \quad y \in \tilde{E}.$$

TWIERDZENIE 3.11. Załóżmy, że

i) funkcja wartości v spełnia równanie Bellmana $\mathcal{K}v = v$,
ii) Mv i v są funkcjami ciągłymi,
iii) istnieje mierzalna funkcja impulsu I.

Wtedy zbiór kontynuacji

$$C = \{y \in \tilde{E} : \quad Mv(y) > v(y)\}$$

jest zbiorem otwartym. Niech $y \in \tilde{Y}$ i

$$\Pi = \big((N_0, \tau_0), (N_1, \tau_1), \ldots\big),$$

gdzie N_i i τ_i pochodzą z konstrukcji poprzedzającej twierdzenie. Jeśli

i') $\mathbb{P}^y\{\lim_{i\to\infty} \tau_i < K\} = 0$,
ii') przy minimalizacji funkcjonału celu

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{e^{-\alpha\tau_i} h\big(Y^\Pi(\tau_i)\big)\big\} \to 0, \quad \text{gdy } i \to \infty,$$

przy maksymalizacji funkcjonału celu

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{e^{-\alpha\tau_i} v\big(Y^\Pi(\tau_i)\big)\big\} \to 0, \quad \text{gdy } i \to \infty,$$

to Π jest sterowaniem dopuszczalnym i optymalnym dla y.

Dowód. Jasne jest, że Π jest sterowaniem dopuszczalnym. Musimy tylko pokazać jego optymalność. Niech Π_i będzie obcięciem Π do i pierwszych impulsów. Wystarczy zatem pokazać, że $J(\Pi_i)$ zbiega do $v(y)$, gdzie y jest początkowym stanem procesu. Rozważmy najpierw przypadek minimalizacji funkcjonału celu. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
J(\Pi_i) - v(y) &= J(\Pi_i) - \mathcal{K}^i v(y) = \\
&= \mathbb{E}^y \Big\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi_i}(t)\big) dt + \sum_{k=1}^{i} e^{-\alpha\tau_k} c\big(Y^{\Pi_i}(\tau_k), N_k\big) \Big\} \\
&\quad - \mathbb{E}^y \Big\{ \int_0^{\tau_i} e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi_i}(t)\big) dt + \sum_{k=1}^{i} e^{-\alpha\tau_k} c\big(Y^{\Pi_i}(\tau_k), N_k\big) + e^{-\alpha\tau_i} v\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big) \Big\}
\end{aligned}
$$

Warunkujemy względem $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau_i}$

$$J(\Pi_i) - v(y) = \mathbb{E}^y \Big\{ \mathbb{E}^y \Big\{ \int_{\tau_i}^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi_i}(t)\big) dt \Big| \tilde{\mathcal{F}}_{\tau_i} \Big\} - e^{-\alpha\tau_i} v\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big) \Big\}$$

A zatem

$$J(\Pi_i) - v(y) \leq \mathbb{E}^y e^{-\alpha\tau_i} h\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big)$$

wykorzystując fakt, że v jest funkcją nieujemną; wynika to z nieujemności f i c. Zatem na mocy założenia ii') mamy

$$\lim_{i\to\infty} J(\Pi_i) - v(y) = 0.$$

Dowód dla przypadku maksymalizowania funkcjonału celu jest niemalże identyczny. Po przekształceniach dostajemy

$$v(y) - J(\Pi_i) \leq \mathbb{E}^y e^{-\alpha\tau_i} v\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big),$$

co na mocy założenia ii') dąży do zera. ■

WNIOSEK 3.12. Warunek ii') twierdzenia 3.11 jest zbędny, gdy f jest funkcją ograniczoną.

Dowód. Niech $F = \sup_{y\in\tilde{E}} |f(y)|$. Wtedy

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^y \big\{ e^{-\alpha\tau_i} h\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big) \big\} &\leq \mathbb{E}^y \big\{ e^{-\alpha\tau_i} \frac{F}{\alpha} \big\} = \frac{F}{\alpha} \mathbb{E}^y e^{-\alpha\tau_i} \to 0, \\
\mathbb{E}^y \big\{ e^{-\alpha\tau_i} v\big(Y^{\Pi_i}(\tau_i)\big) \big\} &\leq \mathbb{E}^y \big\{ e^{-\alpha\tau_i} \frac{F}{\alpha} \big\} = \frac{F}{\alpha} \mathbb{E}^y e^{-\alpha\tau_i} \to 0,
\end{aligned}
$$

gdyż z i') i ze zbieżności zmajoryzowanej

$$\mathbb{E}^y e^{-\alpha\tau_i} \to 0.$$

■

Aby skorzystać w podanej powyżej teorii musimy wiedzieć, że funkcja wartości spełnia równanie Bellmana i jest ciągła. Zaprezentujemy dwie metody rozwiązania tego problemu, które, jak się okaże, będą silnie ze sobą powiązane. Choc będą one niekonstruktywne, tzn. pozwolą jedynie dowieść istnienia rozwiązania, w przeciwieństwie do metod z zastosowaniem nierówności quasi-wariacyjnych, to pozwolą na wykazanie istnienia rozwiązania optymalnego dla większej klasy problemów. Dla przejrzystości założymy, że f jest funkcją ograniczoną.

Granica rozwiązań cząstkowych

Niech $\mathcal{A}_i(y)$ będzie zbiorem tych sterowań dopuszczalnych, które mają co najwyżej i impulsów tzn. $\tau_{i+1} = \infty$ p.n. Oznaczmy

$$v_i(y) = \inf_{\Pi \in \mathcal{A}_i(y)} J(\Pi), \quad y \in \tilde{E}.$$

Zatem v_i to funkcja wartości dla problemu z ograniczoną przez i liczbą dozwolonych impulsów. Oczywiście ciąg $v_i(y)$ jest nierosnący i ograniczony z dołu przez 0 dla każdego $y \in \tilde{E}$. Ma zatem granicę, którą oznaczamy przez $v(y)$.

LEMAT 3.13. v jest funkcją wartości.

Dowód. Ustalmy $y \in E$ i oznaczmy przez u funkcję wartości. Wtedy

$$u(y) = \inf_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J(\Pi).$$

Weźmy dowolny $\epsilon > 0$ i $\Pi \in \mathcal{A}(y)$ takie, że $J(\Pi) - u(y) < \epsilon$. Rozważmy następnie obcięcie Π_i sterowania Π do i pierwszych impulsów. Wtedy, podobnie jak w dowodzie twierdzenia 3.11, mamy

$$J(\Pi_i) - J(\Pi) \leq \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha\tau_i} h\big(Y^{\Pi}(\tau_i)\big).$$

Na mocy wniosku 3.12 istnieje takie i, że $J(\Pi_i) - J(\Pi) < \epsilon$. Stąd $J(\Pi_i) - u(y) < 2\epsilon$, czyli $v_i(y) - u(y) < 2\epsilon$. A zatem $v_i(y)$ dąży do $u(y)$ z dowolności wyboru ϵ. Stąd $v = u$. ■

Głównym problemem pozostaje pokazanie, że v, otrzymane jako granica v_i, jest funkcją ciągłą i spełnia równanie Bellmana. Jeżeli f jest funkcją ciągłą oraz M przekształca funkcje ciągłe w ciągłe, to v_i są funkcjami ciągłymi. Jeśli zatem pokażemy, że v_i zbiegają do v jednostajnie na zbiorach zwartych, to v będzie funkcją ciągłą. Łatwo też wykażemy, że v spełnia równanie Bellmana.

Twierdzenie o punkcie stałym

Bardzo silnym narzędziem do poszukiwania rozwiązań równania Bellmana jest zastosowanie twierdzenia o punkcie stałym odwzorowania wklęsłego i monotonicznego. Ograniczymy się tutaj do samego zacytowania ostatecznego wyniku bez jego dowodu. Niech h będzie potencjałem

$$h(y) = \mathbb{E}^{\,y} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f\big(Y(t)\big) dt, \quad y \in \tilde{E}.$$

TWIERDZENIE 3.14 (Zabczyk [33]). Jeśli $h \in C_b(\tilde{E})$, $\gamma h \leq M\mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{0}$ jest funkcją zerową, zaś $\gamma > 0$ i M przekształca $C_b(\tilde{E})$ w $C_b(\tilde{E})$, to równanie Bellmana

$$v = \mathcal{K} v$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $\tilde{v}$ w zbiorze $C_b(\tilde{E})$. Ponadto dla dowolnego $v_0 \in C_b(\tilde{E})$, $v_0 \geq 0$

$$\mathcal{K}^i v_0 \to \tilde{v}, \quad i \to \infty.$$

jednostajnie i wykładniczo szybko.

Twierdzenie powyższe stanie się pełne, jeśli pokażemy, że rozwiązanie $\tilde{v}$ równania Bellmana jest funkcją wartości. W tym celu udowodnijmy

LEMAT 3.15. Jeśli istnieje funkcja impulsu dla Mh, Mv_i, $i = 1, 2, \ldots$, to

$$v_i(y) = \mathcal{K}^i h(y), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

gdzie h jest potencjałem.

Dowód. Oczywiste jest, że $v_0 = h$. Ustalmy $y \in \tilde{E}$.

$$\begin{aligned}
v_1(y) = \inf_{\Pi \in \mathcal{A}_1(y)} J(\Pi) &= \inf_{\Pi \in \mathcal{A}_1(y)} \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi}(t)\big) dt + e^{-\alpha\tau_1} c\big(N_0, X(\tau_1), N_1\big)\Big\} \\
&= \inf_{\Pi \in \mathcal{A}_1(y)} \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi}(t)\big) dt + e^{-\alpha\tau_1} c\big(N_0, X(\tau_1), N_1\big) \\
&\qquad + \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_{\tau_1}^\infty e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi}(t)\big) dt \big| \tilde{\mathcal{F}}_{\tau_1}\Big\}\Big\} \\
&= \inf_{\Pi \in \mathcal{A}_1(y)} \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_0^{\tau_1} e^{-\alpha t} f\big(Y^{\Pi}(t)\big) dt + e^{-\alpha\tau_1} c\big(N_0, X(\tau_1), N_1\big) + e^{-\alpha\tau_1} h\big(N_1, X(\tau_1)\big)\Big\} \\
&= \inf_{\tau} \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} f\big(Y(t)\big) dt + e^{-\alpha\tau} Mh\big(Y(\tau)\big)\Big\} = \mathcal{K} v_0.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z istnienia funkcji impulsu. Bez tego mielibyśmy tylko górne oszacowanie. Podobnie pokazujemy, że $v_{i+1} = \mathcal{K} v_i$, co kończy dowód. ■

Na mocy twierdzenia 3.14 $\mathcal{K}^i h$ dąży do ciągłego rozwiązania równania Bellmana. Na podstawie lematów 3.13 i 3.15 ciąg ten zbiega do funkcji wartości. Stąd funkcja wartości spełnia równanie Bellmana i jest ciągła, a zatem definiuje strategię optymalną.

Rozdział 4

Problem portfelowy z kosztami za transakcje

Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ rozważmy rynek finansowy, na którym ceny akcji modelowane są przez jednorodny w czasie proces Markowa $\big(S(t), X(t)\big)_{t\geq 0}$, gdzie $S(t) = \big(S^1(t), \ldots, S^d(t)\big) \in (0, \infty)^d$ opisuje ceny d aktywów, a $X(t) \in \mathbb{R}^m$ odpowiada m czynnikom ekonomicznym. Czynniki ekonomiczne mogą reprezentować poziom bezrobocia, deficyt budżetowy, stopy procentowe, optymizm konsumentów i ceny instrumentów, których nie możemy kupować. Zauważmy, że dodanie procesu czynników ekonomicznych do opisu modelu powiększa znacznie pole zachowań cen akcji. Sam proces $\big(S(t)\big)_{t\geq 0}$ nie musi być procesem Markowa. Ponadto, patrząc z punktu widzenia praktyka, poprawia jakość statystycznej estymacji parametrów modelu. Te argumenty są rozwinięte w pracy Bieleckiego, Pliski i Sherrisa [4]. Zakładamy, że proces $\big(S(t), X(t)\big)_{t\geq 0}$ ma prawostronnie ciągłe trajektorie z lewostronnymi granicami (cádlág) i spełnia warunek Fellera, tzn. związana z nim półgrupa przekształca przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych, znikających w nieskończoności w siebie.

Rozpoczynając z ustalonego portfela dokonujemy inwestycji w akcje. Niech $N^i(t)$ określa liczbę akcji aktywu i w portfelu w momencie $t \geq 0$. Proces $N(t) = \big(N^1(t), \ldots, N^d(t)\big)$ opisuje cały portfel w momencie t. Zakładamy, że $N^i(t) \in [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, d$, a więc krótka sprzedaż jest zabroniona. Naszym celem jest maksymalizacja zdyskontowanego funkcjonału użyteczności z nieskończonym horyzontem czasowym:

$$\mathbb{E} \int_0^\infty e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big) ds,$$

gdzie $Y(s) = \big(N(s), S(s), X(s)\big)$. Funkcja F mierzy użyteczność lub jakość portfela, zaś $\alpha > 0$ jest stopą dyskonta. Intuicja, jaka stoi za użyciem funkcjonału w postaci całkowej, bazuje na spostrzeżeniu, że w ocenie przebiegu inwestycji ważne jest jej zachowanie w każdym momencie. Zarządzający funduszami inwestycyjnymi wiedzą, że notowania wartości jednostki uczestnictwa dostępne są inwestorom dla każdego dnia roboczego. Inwestorzy zaś zainteresowani są tym, by wartość ta rosła stabilnie, bez nadmiernych spadków. Wtedy naturalne jest przyjęcie funkcji F zależnej od bogactwa portfela:

$$F(\eta, s, x) = u(\eta \cdot s),$$

gdzie $\eta \cdot s = \sum_{i=1}^d \eta^i s^i$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^d$, zaś $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją użyteczności np.

$$
\begin{aligned}
&u(x) = \ln(x),\\
&u(x) = x^{\beta}, \quad \beta \in (0,1),\\
&u(x) = x.
\end{aligned}
$$

Zakładamy, że strategie inwestycyjne mają charakter impulsowy. Podyktowane jest to istnieniem kosztów transakcji, które posiadają składnik stały i zmienny. Koszty te opisane są przez funkcję $c(\eta, \eta_1, s)$. Wartość $c(\eta, \eta_1, s)$ odpowiada kosztowi dokonania zmiany zawartości portfela z η do η_1, gdy ceny akcji wynoszą s.

DEFINICJA 4.1. Funkcja $c(\eta, \eta_1, s) : [0,\infty)^d \times [0,\infty)^d \times (0,\infty)^d \to \mathbb{R}_+$ jest **funkcją kosztu**, jeśli $c(\eta, \eta_1, s) = K + \tilde{c}(\eta, \eta_1, s)$ oraz

i) $K > 0$,
ii) $\tilde{c}(\eta, \eta_1, s)$ jest ciągła,
iii) $\tilde{c}(\eta, \eta_1 + \gamma, s) - \tilde{c}(\eta, \eta_1, s) \le \beta\gamma s$ dla dowolnego $\gamma \in [0,\infty)^d$ i ustalonego $\beta > 0$,
iv) $\tilde{c}(\alpha\eta, \alpha\eta_1, s) \le \alpha\tilde{c}(\eta, \eta_1, s)$ dla $\alpha \ge 1$,
v) $\tilde{c}(\eta, \eta_1, s) \ge 0$,
vi) $\tilde{c}(\eta + \gamma, \eta_1 + \gamma, s) \le \tilde{c}(\eta, \eta_1, s)$ dla $\gamma \in [0,\infty)^d$.

Założenia i)-vi) są wbrew pozorom bardzo intuicyjne. Ciągłość funkcji kosztu wymusza to, że mała zmiana transakcji nie może powodować dużej zmiany jej kosztu. Punkt iii) ustanawia górną granicę kosztu: koszt transakcji polegającej na dokupieniu γ akcji nie może przekraczać wielokrotności wartości zakupu. Nie wymagamy przy tym, aby β była mniejsza od 1. Na rynku zarządzanie dużym portfelem jest zawsze nie droższe (w przeliczeniu na akcję), a zwykle tańsze, niż małym portfelem. Zostało to uchwycone w warunku iv). Podobna własność zapisana jest w warunku vi): połączenie dwóch portfeli nie może spowodować zwiększenia kosztów transakcji.

Najprostszym przykładem funkcji kosztu jest suma kosztu stałego i proporcjonalnego do wolumenu transakcji. Niech zatem $\gamma, \tilde{\gamma}$ będą dwoma macierzami diagonalnymi o nieujemnych wyrazach. Wtedy

$$
c(\eta, \eta_1, s) = K + (\eta - \eta_1)^{+}\gamma s + (\eta - \eta_1)^{-}\tilde{\gamma} s,
$$

gdzie η^{+} jest częścią dodatnią każdej współrzędnej, zaś η^{-} – częścią ujemną, spełnia założenia definicji 4.1.

Rozważane przez nas strategie inwestycyjne są samofinansujące. Wszystkie koszty ponoszone w procesie inwestycyjnym muszą być pokrywane ze sprzedaży instrumentów, tzn. zakupy i koszty transakcji są finansowane ze sprzedaży. Jeśli zatem koszty transakcji są zbyt duże, to może się okazać, że jedynym dopuszczalnym sposobem postępowania jest niedokonywanie żadnych ruchów. Nie wyklucza to wszakże istnienia strategii optymalnej.

DEFINICJA 4.2. $\Pi = \big((N_0, 0), (N_1, \tau_1), \dots\big)$ jest **strategią dopuszczalną** dla $(s,x) \in (0,\infty)^d \times \mathbb{R}^m$, jeśli

i) $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \cdots$ są momentami stopu,
ii) N_i jest $\mathcal{F}_{\tau_i}$ mierzalne,
iii) $N_i \in [0,\infty)^d$ $\mathbb{P}^{(s,x)}$-p.n.,

iv) $N_i \cdot S(\tau_i) + c\big(N_{i-1}, N_i, S(\tau_i)\big) = N_{i-1} \cdot S(\tau_i)$ $\mathbb{P}^{(s,x)}$-p.n. (samofinansowanie),

v) $\mathbb{P}^{(s,x)}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty) = 1$.

Zauważmy, że dopuszczalność strategii zależy od punktów startu (s, x) procesu modelującego rynek. Warunek iv) bardzo ogranicza możliwości manewru. Jednak jeśli tylko $N_i \cdot S(\tau) > K$ i $c(0, 0, s) = 0$, to zbiór możliwych transakcji jest niepusty. Dzięki ciągłości c mogliśmy napisać równość w warunku iv) wiedząc, że istnieje punkt stały tego przekształcenia.

Z istnienia składnika stałego w funkcji kosztu wynika, że handlowanie w sposób ciągły nie jest możliwe. Naturalną odpowiedzią jest wybór podejścia impulsowego, ujętego w definicji 4.2. Zauważmy jednak, że istnieje znaczna różnica pomiędzy klasycznym problemem sterowania impulsowego (patrz poprzedni rozdział i Bensoussan, Lions [1]) a tym, który rozważamy w tym rozdziale. W podejściu klasycznym koszty impulsów wchodziły do funkcjonału celu jako składnik kary, zmniejszający jego wartość (patrz funkcjonał celu (3.1)). My, natomiast, odejmujemy te koszty od bogactwa portfela, czyli kodujemy je w zbiorze dostępnych impulsów. Ten typ problemów obecny jest w literaturze od wielu lat. W pracach Eastham'a i Hastings'a [10] oraz Korn'a [16] autorzy rozważali model bez czynników ekonomicznych i dowodzili istnienia strategii optymalnej w specjalnych przypadkach. Czynniki ekonomiczne pojawiły się w pracy Bieleckiego, Pliski i Sherrisa [4]. Wspomniane prace bazowały na wykorzystaniu nierówności quasi-wariacyjnych (patrz Bensoussan, Lions [1]). W bieżącym rozdziale zastosujemy inne podejście, które pozwoli nam udowodnić istnienie markowskiej strategii przy słabych założeniach nałożonych na mechanizm kosztów transakcji i proces cen aktywów. Zakończymy przedstawiając dwa przykłady.

4.1. Wyniki wstępne

Na początek wprowadźmy notację, która będzie obecna w całym rozdziale. Niech $E = [0, \infty)^d \times (0, \infty)^d \times \mathbb{R}^m$. Dla $y = (\eta, s, x) \in E$, gdzie η jest portfelem początkowym, zaś (s, x) jest punktem startu procesu $\big(S(t), X(t)\big)_{t\geq 0}$, zdefiniujmy zbiór strategii $\mathcal{A}(y)$, które są dopuszczalne dla (s, x) i startują z portfela η, tzn. jeśli $\big((N_0, 0), (N_1, \tau_1), \dots\big) \in \mathcal{A}(y)$, to $N_0 = \eta$. W celu uproszczenia notacji będziemy pisać $\mathbb{P}^y$ mając na myśli miarę $\mathbb{P}^{(s,x)}$.

Następujące stwierdzenie jest kluczowym wynikiem używanym wielokrotnie w dalszej części rozdziału. Pokazuje ono konstrukcję wielokrotności strategii inwestycyjnej pozwalającą na kumulowanie oszczędności na kosztach transakcji w jednym z aktywów. Do jego udowodnienia kluczowe są warunki nałożone na funkcję kosztu w definicji 4.1.

STWIERDZENIE 4.3. Niech $\Pi = \big((N_0, \tau_0), (N_1, \tau_1), \dots\big)$ będzie strategią dopuszczalną dla (s, x) i $\alpha > 1$. Istnieje wtedy strategia $\tilde{\Pi} = \big((\tilde{N}_0, \tau_0), (\tilde{N}_1, \tau_1), \dots\big)$ dopuszczalna dla (s, x) z $\tilde{N}_0 = \alpha N_0$, taka że

$$\tilde{N}_i^1 = \alpha N_i^1 + \gamma_i,$$
$$\tilde{N}_i^k = \alpha N_i^k, \quad k = 2, \dots, d,$$

gdzie

$$\gamma_i \geq \gamma_{i-1} + \frac{\frac{\alpha-1}{\beta+1} K}{S^1(\tau_i)},$$

zaś β jest stałą z definicji 4.1.

Dowód. Szkic rozumowania jest następujący. Rozpoczynamy z portfela $\tilde{N}_0 = N_0$. Transakcji dokonujemy w momentach $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Zawsze trzymamy co najmniej αN_i akcji po i-tej transakcji. Struktura kosztów transakcji pozwala nam na oszczędności przy każdej transakcji oddzielone od zera stałą. Zainwestowane w S^1 kumulują się.

Dokładniej, niech γ_i oznacza skumulowane oszczędności wyrażone w liczbie akcji S^1 po i-tej transakcji, $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 = 0$. Konstruujemy $\tilde{\Pi}$ w taki sposób, że

$$\tilde{N}_i - \gamma_i \epsilon_1 = \alpha N_i, \tag{4.1}$$

gdzie $\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ i γ_i jest $\mathcal{F}_{\tau_i}$-mierzalną nieujemną zmienną losową.

Konstruujemy strategię $\tilde{\Pi}$ przez indukcję. Na początku $\tilde{N}_0 = \alpha N_0$. Definiujemy $\tilde{N}_1$ jako punkt stały

$$\tilde{N}_0 S(\tau_1) = \tilde{N}_1 S(\tau_1) + c\big(\tilde{N}_0, \tilde{N}_1, S(\tau_1)\big).$$

spełniający (4.1). A więc

$$\alpha N_0 S(\tau_1) = (\alpha N_1 + \gamma_1 \epsilon_1) S(\tau_1) + K + \tilde{c}\big(\alpha N_0, \alpha N_1 + \gamma_1 \epsilon_1, S(\tau_1)\big) = (\#).$$

Z definicji

$$\alpha N_0 S(\tau_1) = \alpha N_1 S(\tau_1) + \alpha c\big(N_0, N_1, S(\tau_1)\big) \geq \alpha N_1 S(\tau_1) + \alpha K + \tilde{c}\big(\alpha N_0, \alpha N_1, S(\tau_1)\big).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
(\#) &\leq (\alpha N_1 + \gamma_1 \epsilon_1) S(\tau_1) + K + \tilde{c}\big(\alpha N_0, \alpha N_1, S(\tau_1)\big) + \beta \gamma_1 S^1(\tau_1) \\
&= \alpha N_1 S(\tau_1) + \alpha K + \tilde{c}\big(\alpha N_0, \alpha N_1, S(\tau_1)\big) + \gamma_1 S^1(\tau_1) + (1-\alpha) K + \beta \gamma_1 S^1(\tau_1) \\
&= \alpha N_0 S(\tau_1) + \gamma_1 S^1(\tau_1) + (1-\alpha) K + \beta \gamma_1 S^1(\tau_1) \\
&= \tilde{N}_0 S(\tau_1) + (1-\alpha) K + (\beta+1) \gamma_1 S^1(\tau_1).
\end{aligned}$$

Otrzymujemy więc dolne ograniczenie na γ_1

$$(1-\alpha) K + (\beta+1) \gamma_1 S^1(\tau_1) \geq 0,$$

które przekształcamy do

$$\gamma_1 \geq \frac{\frac{\alpha-1}{\beta+1} K}{S^1(\tau_1)}.$$

Dla jasności podajemy dalsze kroki indukcji, których myśl przewodnia została już przedstawiona, lecz notacja jest bardziej skomplikowana. Niech $\tilde{N}_i$ będzie punktem stałym

$$\tilde{N}_{i-1} S(\tau_i) = \tilde{N}_i S(\tau_i) + c\big(\tilde{N}_{i-1}, \tilde{N}_i, S(\tau_i)\big)$$

spełniającym (4.1). Zatem

$$(\alpha N_{i-1} + \gamma_{i-1} \epsilon_1) S(\tau_i) = (\alpha N_i + \gamma_i \epsilon_1) S(\tau_i) + K + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1} + \gamma_{i-1} \epsilon_1, \alpha N_i + \gamma_i \epsilon_1, S(\tau_i)\big) = (\#\#).$$

Z definicji

$$\alpha N_{i-1} S(\tau_i) = \alpha N_i S(\tau_i) + \alpha c\big(N_{i-1}, N_i, S(\tau_i)\big) \geq \alpha N_i S(\tau_i) + \alpha K + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1}, \alpha N_i, S(\tau_i)\big).$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
(\#\#) &\le (\alpha N_i + \gamma_i \epsilon_1) S(\tau_i) + K + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1} + \gamma_{i-1}\epsilon_1, \alpha N_i + \gamma_{i-1}\epsilon_1, S(\tau_i)\big) + \beta(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) \\
&= \alpha N_i S(\tau_i) + \alpha K + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1}, \alpha N_i, S(\tau_i)\big) + \gamma_i S^1(\tau_i) + (1-\alpha) K \\
&\quad + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1} + \gamma_{i-1}\epsilon_1, \alpha N_i + \gamma_{i-1}\epsilon_1, S(\tau_i)\big) - \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1}, \alpha N_i, S(\tau_i)\big) + \beta(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) \\
&\le \alpha N_i S(\tau_i) + \alpha K + \tilde{c}\big(\alpha N_{i-1}, \alpha N_i, S(\tau_i)\big) + \gamma_i S^1(\tau_i) + (1-\alpha) K + \beta(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) \\
&= \alpha N_{i-1} S(\tau_i) + \gamma_{i-1} S^1(\tau_i) + (\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) + (1-\alpha) K + \beta(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) \\
&= \tilde{N}_{i-1} S(\tau_i) + (1-\alpha) K + (\beta+1)(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i).
\end{aligned}
$$

Otrzymujemy dolne ograniczenie na γ_i

$$(1-\alpha)K + (\beta+1)(\gamma_i - \gamma_{i-1}) S^1(\tau_i) \ge 0,$$

które zapisujemy

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} \ge \frac{\frac{\alpha-1}{\beta+1} K}{S^1(\tau_i)}.$$

■

Ze strategią $\Pi \in \mathcal{A}(y)$ związujemy proces portfela $N^\Pi(t)$

$$N^\Pi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 1_{[\tau_i, \tau_{i+1})}(t) N_i,$$

i proces bogactwa $W^\Pi(t) = N^\Pi(t) \cdot S(t)$.

DEFINICJA 4.4. Rynek nazywamy **uczciwym**, jeśli proces bogactwa każdej strategii dopuszczalnej jest skończony na każdym przedziale $[0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$.

Często bardzo trudno jest udowodnić, że optymalna strategia spełnia założenie v) definicji 4.2 (patrz np. lemat 2.12 w pracy Eastham'a i Hastings'a [10]). Stwierdzenie 4.3 pozwoli nam na pokazanie, że jeśli rynek jest uczciwy, to każda strategia spełniająca warunki i)–iv) definicji 4.2 spełnia v).

LEMAT 4.5. Jeśli rynek jest uczciwy i strategia Π spełnia warunki i)–iv) definicji 4.2 dla (s, x), to spełnia również warunek v) tzn. dla dowolnej stałej $L > 0$

$$\mathbb{P}^{(s,x)}\big(\lim_{n\to\infty} \tau_n \le L\big) = 0.$$

Dowód. Ustalmy strategię spełniającą i)– iv) dla (s, x) i liczbę $L > 0$. Załóżmy, że

$$\mathbb{P}^{(s,x)}\big(\lim_{n\to\infty} \tau_n \le L\big) > 0$$

i oznaczmy to zdarzenie przez A. Dalsze rozumowanie będziemy przeprowadzać na A. Strategia musi sfinansować nieskończoną liczbę transakcji na przedziale $[0, L]$. Musi zatem zarabiać nieskończenie wiele pieniędzy (choć może je wydać na dokonywanie transakcji). Skonstruujemy strategię, której bogactwo będzie nieskończone w momencie L, a tym samym zaprzeczy uczciwości rynku.

Ustalmy $\alpha > 1$. Niech $\tilde{\Pi}$ będzie strategią skonstruowaną w stwierdzeniu 4.3. Oszczędności skumulowane w S^1 są ograniczone przez

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} \geq \frac{\frac{\alpha-1}{\beta+1}K}{S^1(\tau_i)}.$$

Jako że S^1 ma prawie wszystkie trajektorie cádlág, które są funkcjami ograniczonymi na $[0, L]$ dla każdego $\omega \in \Omega$, to γ_i dąży do nieskończoności. Stąd bogactwo $\tilde{W}(t)$ portfela $\tilde{\Pi}$ dąży do nieskończoności, gdyż

$$\tilde{W}(L) \geq \lim_{i\to\infty} \gamma_i S^0(L).$$

Przeczy to uczciwości rynku i kończy dowód. ■

4.2. Problem optymalizacyjny

Dla strategii $\Pi \in \mathcal{A}(y)$, $y \in E$, rozważmy proces

$$Y^{\Pi}(t) = \begin{pmatrix} N^{\Pi}(t) \\ S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}.$$

Warunek samofinansowania opisujemy specyfikując funkcję $\Gamma : E \to \mathcal{E}$ (patrz podrozdz. 3.2):

$$\Gamma(\eta, s, x) = \{(\eta_1, s, x) \in E : \quad \eta_1 \cdot s + c(\eta, \eta_1, s) = \eta \cdot s\}, \quad (\eta, s, x) \in E. \tag{4.2}$$

W nomenklaturze rozdziału 3, zbiór sterowań dopuszczalnych przy funkcji Γ startujących z $y \in E$ jest identyczny ze zbiorem strategii dopuszczalnych $\mathcal{A}(y)$. Wynika to stąd, że sterowanie oddziałuje tylko na pierwszą współrzędną. Stąd też będziemy zamiennie używać nazw sterowanie i strategia.

Wprowadzamy **funkcjonał celu**

$$J(\Pi) = \mathbb{E}^{\,y} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} F\big(Y^{\Pi}(t)\big) dt, \quad \Pi \in \mathcal{A}(y), \quad y \in E,$$

dla ustalonej stopy dyskonta $\alpha \geq 0$ i nieujemnej funkcji ciągłej $F : E \to \mathbb{R}_+$ spełniającej

Założenie UF.

$$F(0, s, x) = \min_{\eta \in [0,\infty)^d} F(\eta, s, x), \quad (s, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^m.$$

W dalszej części powiemy, co skłoniło nas do wprowadzenia powyższego założenia. Nie są to względy techniczne, lecz kwestia poprawności zastosowanej techniki modelowania. Niech

$$v(y) = \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J(\Pi), \quad y \in E,$$

będzie **funkcją wartości** problemu. Musimy niezależnie opisać operator impulsu, gdyż, jak wspomnieliśmy w dyskusji warunku samofinansowania, zbiór $\Gamma(y)$ może być pusty dla pewnych $y \in E$. W przypadku, gdy zbiór $\Gamma(\eta, s, x)$ jest pusty, dokonujemy sztucznego skoku do $(0, s, x)$.

$$Mu(y) = \begin{cases} \sup_{\tilde{y} \in \Gamma(y)} \big(c(y, \tilde{y}) + u(y)\big), & \Gamma(y) \neq \emptyset \\ u(0, s, x), & \Gamma(y) = \emptyset \end{cases}, \quad y = (\eta, s, x) \in E. \tag{4.3}$$

Wprowadzamy nową funkcję opisującą możliwe transakcje

$$\tilde{\Gamma}(y) = \begin{cases} \Gamma(y), & \Gamma(y) \neq \emptyset, \\ \{(0, s, x)\}, & \Gamma(y) = \emptyset, \end{cases} \quad \text{dla } y = (\eta, s, x) \in E.$$

Wtedy operator M przyjmuje postać

$$Mu(y) = \sup_{\tilde{y} \in \tilde{\Gamma}(y)} \big(c(y, \tilde{y}) + u(y)\big).$$

Teraz możemy zapisać operator Bellmana

$$\mathcal{K}u(y) = \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\,y} \Big\{ \int_0^{\tau} e^{-\alpha t} F\big(Y(t)\big) dt + e^{-\alpha \tau} Mu\big(Y(\tau)\big) \Big\}, \quad y \in E, \tag{4.4}$$

gdzie $u : E \to \mathbb{R}_+$ jest dowolną funkcją taką, że Mu jest funkcją mierzalną.

Wzbogaćmy notację. Oznaczmy przez $C^l(K, L)$ zbiór funkcji półciągłych z dołu z K do L. Podobnie $C^u(K; L)$ jest zbiorem funkcji półciągłych z góry. Wykażmy własności operatora impulsu.

LEMAT 4.6. M przekształca w siebie $C^b(E; \mathbb{R}_+)$, $C(E; \mathbb{R}_+)$ i $C^u(E; \mathbb{R}_+)$. Ponadto dla każdej funkcji ciągłej, nieujemnej istnieje funkcja impulsu w myśl twierdzenia 3.10.

Dowód. Ciągłość funkcji kosztu c implikuje, że $\tilde{\Gamma}(y)$ jest zbiorem zwartym dla każdego $y \in E$. Weźmy zatem $u \in C^u(E, \mathbb{R}_+)$ i ciąg $y_n \to y$ w E. Oznaczmy przez z_n punkty realizujące maksimum w $Mu(y_n)$, tzn. $u(z_n) = Mu(y_n)$. Ponieważ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\Gamma}(y_n)$ jest zbiorem ograniczonym, to jego domknięcie jest zwarte i możemy znaleźć podciąg (z_n) zbiegający do jakiegoś $z \in E$. Oznaczmy ten podciąg też przez z_n. Funkcja u jest półciągła z góry, a więc $\limsup_{n \to \infty} u(z_n) \leq u(z)$. Ponadto $z \in \tilde{\Gamma}(y)$ z ciągłości funkcji kosztu c. Zatem $u(z) \leq Mu(y)$ i Mu jest półciągła z góry.

Udowodnimy teraz, że Mu jest półciągła z dołu dla ciągłej funkcji u. Podobnie jak powyżej bierzemy ciąg y_n zbiegający do y w E i ustalamy $\epsilon > 0$. Oznaczamy przez z punkt realizujący maksimum w $Mu(y)$ tzn. $u(z) = Mu(y)$. Z ciągłości u istnieje $\delta > 0$, taka że

$$\tilde{y} \in B(z, \delta) \quad \Longrightarrow \quad |u(\tilde{y}) - u(z)| \leq \epsilon,$$

gdzie $B(z, \delta) = \{y \in E : \quad \|z - y\| \leq \delta\}$. Ponadto $B(z, \delta) \cap \tilde{\Gamma}(y_n) \neq \emptyset$ dla dostatecznie dużych n. Zatem $\liminf_{n \to \infty} Mu(y_n) \geq u(z) - \epsilon$. Ponieważ ϵ może być dowolnie mały, to zachodzi nierówność $\liminf_{n \to \infty} Mu(y_n) \geq u(z)$ i Mu jest półciągła z dołu. Łącząc ten rezultat z powyższym otrzymujemy, że obrazem funkcji ciągłej jest funkcja ciągła. Ograniczoność jest oczywista.

Pozostało nam wykazanie, że istnieje funkcja impulsu dla operatora Mu, gdzie $u \in C(E; \mathbb{R}_+)$. Skorzystamy z twierdzenia 3.10. Jedynym warunkiem, który należy sprawdzić, jest istnienie ciągu γ_n odwzorowań ośrodkowych zbiegającego punktowo do $\tilde{\Gamma}$. Połóżmy zatem

$$\gamma_n(y) = \overline{\bigcup_{z \in \tilde{\Gamma}(y)} B(z, 1/n)}, \quad y \in E,$$

A więc $\gamma_n(y)$ jest $1/n$-otoczką zbioru $\tilde{\Gamma}(y)$. Ponadto γ_n są odwzorowaniami ośrodkowymi ze zbiorem E' (patrz definicja 3.9) składającym się ze wszystkich punktów o współrzędnych wymiernych. Z domkniętości $\tilde{\Gamma}(y)$ wynika, że $\lim_{n \to \infty} \gamma_n(y) = \tilde{\Gamma}(y)$. Zastosowanie twierdzenia 3.10 kończy dowód.

■

Udowodnimy teraz analogon lematu 3.13. Niech

$$v_0(y) = \mathbb{E}^y \int_0^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y(t)\big) dt, \quad y \in E,$$

i $v_{i+1} = \mathcal{K} v_i$, $i = 0, 1, \ldots$.

LEMAT 4.7. Jeśli $F \in C(E; \mathbb{R}_+)$, $v(y) < \infty$ dla $y \in E$ i $\begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$ jest procesem Fellera, to v_i są funkcjami ciągłymi i zbiegają monotonicznie do funkcji wartości v. Ponadto v_i jest funkcją wartości problemu z ograniczoną przez i liczbą impulsów.

Dowód. Ciągłości v_i dowodzimy przez indukcję. Ciągłość v_0 wynika wprost z fellerowskości procesów opisujących model rynku. Załóżmy, że v_i jest funkcją ciągłą. Z lematu 4.6 wynika, że $M v_i$ jest również funkcją ciągłą. Zatem znów na mocy fellerowskości $\begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$ mamy, że v_{i+1} jest funkcją ciągłą.

Rozumowanie analogiczne do dowodu lematu 3.15 prowadzi do konkluzji, że v_i jest funkcją wartości dla problemu z ograniczoną przez i liczbą impulsów. Stąd dostajemy, że v_i jest ciągiem niemalejącym i $v_i \le v$. Chcemy teraz wykazać, że v_i zbiega punktowo do v. Ustalmy $y \in E$. Oznaczmy granicę $\lim_{i\to\infty} v_i(y)$ przez $u(y)$. Ustalmy strategię $\Pi \in \mathcal{A}(y)$ i oznaczmy przez Π^i jej obcięcie do i pierwszych impulsów. Oczywiście $v_i(y) \ge J(\Pi^i)$ i $u(y) \ge J(\Pi^i)$. Najpierw zauważmy, że

$$g_i = \int_0^{\tau_i} e^{-\alpha s} F\big(Y^\Pi(s)\big) ds$$

jest monotonicznym ciągiem nieujemnych zmiennych losowych z granicą $g = \int_0^\infty e^{-\alpha s} F\big(Y^\Pi(s)\big) ds$. Zatem z twierdzenia o zbieżności monotonicznej $\mathbb{E}^y g_i \to \mathbb{E}^y g = J(\Pi)$. Ponadto, $J(\Pi^i) \ge \mathbb{E}^y g_i$, co pociąga $\liminf_{i\to\infty} J(\Pi^i) \ge J(\Pi)$. To, razem z faktem, że $J(\Pi^i) \le v_i(y)$ i $v_i \le v$ dowodzi, że $v(y) = u(y)$. ■

Podamy teraz znaczenie założenia UF. Zauważmy, że w przypadku, gdy w portfelu nie ma dostatecznie dużo aktywów, aby pokryć koszty jakiejkolwiek transakcji ($\Gamma(\cdot) = \emptyset$), to następuje bankructwo portfela, czyli usunięcie z niego wszystkich akcji. Naszym celem jest jednak rozważanie tylko takich strategii, w których transakcje nie mają miejsca w momentach, gdy zbiór $\Gamma(\cdot)$ jest pusty. Dzięki warunkowi UF zapewniamy, że strategia optymalna nigdy nie zawiera transakcji prowadzącej do bankructwa, czyli spełnia ona nasze oczekiwania.

4.3. Ograniczona funkcja F

W rozdziale tym zajmiemy się rozwiązaniem problemu optymalnego sterowania w przypadku funkcji F ograniczonej i nieujemnej.

Założenia NFL. Dla każdego $y = (n, s, x) \in E$ istnieje $\epsilon > 0$, taki że dla dowolnego $T > 0$

$$\sup_{z \in B(y,\epsilon)} \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^z N^\Pi(T) S(T) < \infty,$$

gdzie N^Π jest procesem zawartości portfela związanym ze strategią Π, zaś $B(y, \epsilon)$ jest kulą otwartą w E.

Założenie NUM. S^1 jest procesem niemalejącym.

Założenie NFL pełni funkcję warunku braku arbitrażu. Zauważmy, że implikuje ono uczciwość rynku. Założenie NUM wymusza, by proces S^1 był procesem rachunku bankowego tzn. wymusza istnienie procesu nieujemnego $r(t)$, takiego że

$$S^1(t) = \exp\Big(\int_0^t r(s)ds\Big).$$

Założenia NUM i NFL pozwalają na wprowadzenie oszacowań na szybkość zbieżności momentów impulsów dla strategii dopuszczalnych. Poniższy wynik będziemy wielokrotnie wykorzystywać w tym rozdziale. Przedtem jednak wprowadzimy następującą konwencję oznaczeń strategii inwestycyjnych. Momenty impulsów strategii $\Pi \in \mathcal{A}$ oznaczymy przez $\tau_0^\Pi, \tau_1^\Pi, \ldots$, zaś zawartość portfela przez $N_0^\Pi, N_1^\Pi, \ldots$.

LEMAT 4.8. Jeżeli spełnione są założenia NFL i NUM, to dla dowolnego $y \in E$ istnieje $\delta > 0$

$$\sup_{z\in B(y,\delta)} \sup_{\Pi\in\mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^z e^{-\alpha\tau_i^\Pi} \to 0, \quad \text{gdy } i \to \infty.$$

gdzie $B(y,\delta)$ jest kulą otwartą w E.

Dowód. Ustalmy $T > 0$. Dla dowolnej strategii dopuszczalnej $\Pi \in \mathcal{A}(z)$ możemy dokonać zgrubnego oszacowania

$$\mathbb{E}^z e^{-\alpha\tau_i^\Pi} \le \mathbb{P}^z(\tau_i^\Pi \le T) + e^{-\alpha T}\mathbb{P}^z(\tau_i^\Pi > T) \le \mathbb{P}^z(\tau_i^\Pi \le T) + e^{-\alpha T}. \tag{4.5}$$

Na mocy założenia NFL istnieje kula $B(2y,\epsilon)$, taka że

$$\sup_{z\in B(2y,\epsilon)} \sup_{\Pi\in\mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^z N^\Pi(T)S(T) < \infty.$$

Oznaczmy tą liczbę przez $H(T)$. Ustalmy $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Weźmy $z \in B(y,\delta)$ i strategię $\Pi \in \mathcal{A}(z)$. Na mocy stwierdzenia 4.3 istnieje podwojona strategia $\tilde{\Pi} \in \mathcal{A}(2z)$ (tzn. z $\alpha = 2$) i następujące oszacowanie na oszczędności zdeponowane w S^1

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} \ge \frac{\frac{1}{\beta+1}K}{S^1(\tau_i)}.$$

S^1 jest niemalejący, więc $\gamma_i S^1(\tau_i) \ge i\frac{1}{\beta+1}K$. A zatem $H(T) \ge i\frac{1}{\beta+1}K$. Z nierówności Czebyszewa

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^z(\tau_i^\Pi \le T) = \mathbb{P}^z(\tau_i^{\tilde{\Pi}} \le T) &\le \mathbb{P}^z\Big(N^{\tilde{\Pi}}(T)S(T,z) > i\frac{1}{\beta+1}K\Big)\\ &\le \frac{\mathbb{E}^z N^{\tilde{\Pi}}(T)S(T,z)}{i\frac{1}{\beta+1}K} \le \frac{H(T)}{i\frac{1}{\beta+1}K},\end{aligned}$$

przy czym szacowanie to nie zależy od wyboru $\Pi \in \mathcal{A}(z)$, $z \in B(y,\delta)$. Zatem, korzystając z (4.5), dla dowolnego $\Pi \in \mathcal{A}(z)$, $z \in B(y,\delta)$ mamy

$$\mathbb{E}^z e^{-\alpha\tau_i^\Pi} \le \frac{H(T)}{i\frac{1}{\beta+1}K} + e^{-\alpha T}.$$

Czyli $\mathbb{E}^z e^{-\alpha\tau_i^\Pi}$ zbiega do $e^{-\alpha T}$ jednostajnie dla $\Pi \in \mathcal{A}(z)$, $z \in B(y,\delta)$. Z dowolności T zbieżność $\mathbb{E}^z e^{-\alpha\tau_i^\Pi}$ do zera jest też jednostajna. ■

TWIERDZENIE 4.9. Jeżeli spełnione są założenia NFL i NUM, oraz $F \in C^b(E;\mathbb{R}_+)$, to funkcja wartości v jest ciągła i spełnia równanie Bellmana

$$v = \mathcal{K}v.$$

Dowód. Niech v będzie funkcją wartości. Zauważmy najpierw, że v jest funkcją ograniczoną. Wynika to z ograniczoności F. Niech

$$v_0(y) = \mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y(t)\big)dt, \quad y \in E,$$

i $v_{i+1} = \mathcal{K}v_i(y)$, $i = 0,1,\ldots$. Z lematu 4.7 wynika, że v_i dążą monotonicznie do v i są ciągłe. Pokażemy teraz, że v jest funkcją ciągłą dowodząc, że zbieżność v_i do v jest niemal jednostajna (jednostajna na zbiorach zwartych).

Ustalmy $y \in E$. Oznaczmy przez Π^i obcięcie strategii Π do i pierwszych impulsów. Niech $\mathcal{A}^i(y) = \{\Pi^i : \quad \Pi \in \mathcal{A}(y)\}$. Dostajemy wtedy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} 0 \le v(y) - v_i(y) &= \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J(\Pi) - \sup_{\tilde{\Pi} \in \mathcal{A}_i(y)} J(\tilde{\Pi}) \le \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} \big|J(\Pi) - J(\Pi^i)\big| \\ &\le \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} \frac{\|F\|_\infty}{\alpha} \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha\tau^\Pi} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Na mocy lematu 4.8 $\mathbb{E}^{\,\Pi} e^{-\alpha\tau_i^\Pi}$ dąży do zera jednostajnie na pewnej kuli $B(y,\delta)$. A zatem na tej kuli zbieżność v_i do v jest jednostajna. W efekcie v jest funkcją ciągłą.

Pozostaje nam wykazanie, że $v = \mathcal{K}v$. Prosto wynika to z ciągu równości

$$\begin{aligned} Gu(y) = G\big(\sup_i v_i(y)\big) &= \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\Big(Y(s)\Big)ds + e^{-\alpha\tau} M\big(\sup_i v_i\big)\big(Y(\tau)\big)\Big) \\ &= \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\Big(Y(s)\Big)ds + e^{-\alpha\tau} \sup_i M v_i\big(Y(\tau)\big)\Big) \\ &= \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\Big(Y(s)\Big)ds + e^{-\alpha\tau} \lim_{i\to\infty} M v_i\big(Y(\tau)\big)\Big) \\ &= \sup_i \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\Big(Y(s)\Big)ds + e^{-\alpha\tau} M v_i\big(Y(\tau)\big)\Big) = \sup_i v_i(y) = v(y). \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy twierdzenie o zbieżności monotonicznej pod znakiem całki i przemienność operatorów $\sup$. ■

Powyższe twierdzenie, razem z lematem 4.6 dowodzi, że pod warunkiem NFL i NUM istnieje strategia optymalna, która jest stacjonarna i markowska (patrz twierdzenie 3.11). Strategia ta jest sterowaniem, które zmienia tylko pierwsze d współrzędnych procesu Y, odpowiadających za zawartość portfela. Nie dokonuje się sterowanie procesami cen.

W dalszej części tego podrozdziału chcielibyśmy pokazać zastosowanie twierdzenia 3.14 do wykazania, że funkcja wartości v jest ciągła i spełnia równanie Bellmana. W tym celu wprowadźmy notację

$$H_\epsilon(B,T) = \sup_{z\in B} \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^{\,z}\big(N^\Pi(T) S\big(z,T\big)\big)^{1+\epsilon}, \quad \epsilon > 0$$

dla zwartego zbioru $B \subseteq E$ i $T > 0$.

Założenie NFL1. Dla dowolnego $y \in E$ istnieją dodatnie stałe $\delta, \theta, \eta, \epsilon$, przy czym $\eta < \alpha$, takie, że

$$H_\epsilon(B,t) \le \theta e^{\eta t},$$

gdzie $B = B(y,\delta) \subseteq E$.

TWIERDZENIE 4.10. Załóżmy, że spełnione są założenia NUM i NFL1, $\begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$ jest procesem Fellera. Wtedy funkcja wartości v jest ciągła i spełnia równanie Bellmana $v = \mathcal{K}v$.

Dowód. Rozważmy następującą rodzinę operatorów:

$$\mathcal{K}_k u(y) = \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big) ds + e^{-\alpha\tau} M_k u\big(Y(\tau)\big)\Big),$$
$$M_k u(\eta_0, s, x) = \sup\{u(\eta_1, s, x) - 1/k : \quad \eta_1 \cdot s + c(\eta_0, \eta_1, s) = \eta_0 \cdot s, \quad \eta_1 \in [0,\infty)^d\} \wedge u(0, s, x)$$

dla $k \ge 0$. Na mocy twierdzenia 3.14 istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania $u_k = \mathcal{K}_k u_k$ w przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych, które jest funkcją wartości zmodyfikowanego problemu sterowania z funkcjonałem celu

$$J_k(\Pi) = \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big) dt - \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha \tau_i^\Pi} 1/k \Big\}, \quad \Pi \in \mathcal{A}(y), \quad y \in E.$$

Funkcje u_k tworzą niemalejący ciąg, a zatem ich granica u jest funkcją półciągłą z dołu. Pokażemy, że zbieżność jest niemal jednostajna, a więc u będzie funkcją ciągłą. W tym celu wykażemy, że

$$\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha \tau_i^\Pi}$$

jest ograniczone jednostajnie dla $\Pi \in \mathcal{A}(y)$, $y \in B \subseteq E$, B – kula.

Ustalmy $y \in E$. Na mocy założenia NFL2 istnieje kula $B = B(2y,\delta)$ i dodatnie stałe θ, η, ϵ, przy czym $\eta < \alpha$, takie, że

$$H_\epsilon(B,t) \le \theta e^{\eta t}, \quad t \ge 0. \tag{4.7}$$

Weźmy $z \in B(y,\delta/2)$ i strategię $\Pi \in \mathcal{A}(z)$. Na mocy stwierdzenia 4.3 istnieje podwojona strategia $\tilde\Pi \in \mathcal{A}(2z)$ (tzn. z $\alpha = 2$) i następujące oszacowanie na oszczędności zdeponowane w S^1

$$\gamma_i - \gamma_{i-1} \ge \frac{\frac{1}{\beta+1}K}{S^1(\tau_i)}.$$

S^1 jest niemalejący, więc $\gamma_i S^1(\tau_i) \ge i\frac{1}{\beta+1}K$. Z nierówności Czebyszewa, dla dowolnego $t \ge 0$,

$$\mathbb{P}^z(\tau_i^\Pi \le t) = \mathbb{P}^z(\tau_i^{\tilde\Pi} \le t) \le \mathbb{P}^z\Big(N^{\tilde\Pi}(t)S(t) > i\frac{1}{\beta+1}K\Big)$$
$$\le \frac{\mathbb{E}^{\,z}\big(N^{\tilde\Pi}(t)S(t)\big)^{1+\epsilon}}{\big(i\frac{1}{\beta+1}K\big)^{1+\epsilon}} \le \frac{H_\epsilon(B,t)}{\big(i\frac{1}{\beta+1}K\big)^{1+\epsilon}},$$

przy czym szacowanie to nie zależy od wyboru $\Pi \in \mathcal{A}(z)$, $z \in B(y,\delta/2)$.

LEMAT 4.11. Niech h będzie dystrybuantą nieujemnej zmiennej losowej X. Jeśli $h \leq g$, $h(0) = g(0) = 0$ i $h(\infty) = g(\infty) = 1$, to

$$\mathbb{E}\, e^{-\alpha X} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dh(t) \leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} dg(t).$$

Dowód. Całkowanie przez części daje

$$\int_0^T e^{-\alpha t} dh(t) = e^{-\alpha T} h(T) + \alpha \int_0^T e^{-\alpha t} h(t) dt \leq e^{-\alpha T} g(T) + \alpha \int_0^T e^{-\alpha t} g(t) dt = \int_0^T e^{-\alpha t} dg(t).$$

■

Powyższy lemat wraz z (4.7) pozwala nam na wyprowadzenie następującego oszacowania:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\,z} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha t} d\Big(\frac{H_\epsilon(B,t)}{\big(i \frac{1}{\beta+1} K\big)^{1+\epsilon}} \Big) \leq \frac{D}{i^{1+\epsilon}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} d\big(e^{\eta t}\big) \\ &= \frac{D\eta}{i^{1+\epsilon}} \int_0^\infty e^{(\eta-\alpha)t} dt = \frac{D\eta}{i^{1+\epsilon}} \frac{1}{\alpha - \eta},\end{aligned}$$

gdzie

$$D = \frac{\theta}{\big(\frac{1}{\beta+1} K\big)^{1+\epsilon}}.$$

Zatem istnieje $L > 0$ takie, że

$$\sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}^{\,z} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \leq \frac{D\eta}{\alpha - \eta} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^{1+\epsilon}} < L$$

dla $\Pi \in \mathcal{A}(z)$, $z \in B(y, \delta/2)$. Stąd dla $l > k$

$$J_l(\Pi) - J_k(\Pi) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}^{\,z} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \leq \frac{1}{k} L, \quad \Pi \in \mathcal{A}(z), \quad z \in B(y, \delta/2).$$

A więc $u(z) - u_k(z) \leq L/k$ dla $z \in B(y, \delta/2)$, czyli funkcje u_k zbiegają do u jednostajnie na $B(y, \delta/2)$. Z dowolności wyboru $y \in E$, u jest funkcją ciągłą.

Oczywiście, $u \leq v$. By udowodnić, że $u = v$ zauważmy, że

$$J(\Pi) - J_k(\Pi) \leq \frac{L}{k},$$

gdzie L jest stałą zależną od $y \in E$, $\Pi \in \mathcal{A}(y)$. Otrzymujemy

$$v(y) = \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J(\Pi) \leq \frac{L}{k} + \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} J_k(\Pi) = \frac{L}{k} + u_k(y).$$

Gdy k zbiega do nieskończoności $u_k(y)$ zbiega do $v(y)$. Z jednoznaczności granicy $u = v$.

Na koniec pokażemy, że $u = \mathcal{K}u$.

$$\mathcal{K}u(y) = \mathcal{K}\big(\sup_k u_k(y)\big) = \sup_\tau \mathbb{E}^{\,y} \Big(\int_0^\tau e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big) ds + e^{-\alpha \tau} M\big(\sup_k u_k\big)\big(Y(\tau)\big)\Big).$$

Z przemienności operatorów $\sup$ w definicji M dostajemy

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big)ds + e^{-\alpha\tau} \sup_k Mu_k\big(Y(\tau)\big)\Big).$$

Ciąg funkcji u_i jest monotoniczny, czyli $\sup_k u_k(z) = \lim_{k\to\infty} u_k(z)$, $z \in E$:

$$\sup_{\tau} \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big)ds + e^{-\alpha\tau} \lim_{k\to\infty} Mu_k\big(Y(\tau)\big)\Big)$$

Korzystamy z twierdzenia o monotonicznej zbieżności pod znakiem całki i dostajemy

$$\sup_{\tau} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big)ds + e^{-\alpha\tau} Mu_k\big(Y(\tau)\big)\Big).$$

Wiedząc, że $\mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha\tau} \le 1$, możemy napisać

$$\sup_{\tau} \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big)ds + e^{-\alpha\tau} M_k u_k\big(Y(\tau)\big)\Big).$$

Na koniec, bazując na tym, że $M_k u_k$ jest ciągiem rosnącym i tym samym pozwala na zamianę $\lim$ na $\sup$, wnioskujemy

$$\sup_k \sup_{\tau} \mathbb{E}^{\,y}\Big(\int_0^{\tau} e^{-\alpha s} F\big(Y(s)\big)ds + e^{-\alpha\tau} M_k u_k\big(Y(\tau)\big)\Big) = \sup_k \mathcal{K}_k u_k(y) = \sup_k u_k(y) = u(y).$$

■

4.4. Nieograniczona funkcja F

Gdy F jest funkcją ograniczoną, to funkcjonał celu jest ograniczony i całe rozważania prowadzone są w przestrzeni funkcji ograniczonych. Jeśli F jest nieograniczone, to nie możemy liczyć na to, że funkcja wartości jest ograniczona. Choć sposób postępowania będzie podobny jak w poprzednim rozdziale, wykazanie ciągłości funkcji wartości będzie wymagało silniejszych założeń i delikatniejszych rozumowań. Dowód optymalności strategii z twierdzenia 3.11 nie będzie też natychmiastowy.

Założenie NFL2. Dla każdego $y = (n, s, x) \in E$ istnieją $\eta > 1$, $\epsilon > 0$ takie, że

$$\sup_{z\in B} \sup_{\Pi\in\mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^{\,z} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^{\Pi}(t)\big)\Big)^{\eta} dt < \infty,$$

gdzie $B = B\big(y, \epsilon\big) \subseteq E$ jest kulą otwartą.

TWIERDZENIE 4.12. Załóżmy, że $\begin{pmatrix} S(t) \\ X(t) \end{pmatrix}$ jest procesem Fellera i spełnione są założenia NUM, NFL i NFL2. Wtedy funkcja wartości v jest funkcją ciągłą i spełnia równanie Bellmana $\mathcal{K}v = v$. Ponadto istnieje strategia optymalna.

Dowód. Założenie NFL2 gwarantuje, że $v(y) < \infty$ dla każdego $y \in E$. Niech

$$v_0(y) = \mathbb{E}^y \int_0^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y(t)\big) dt, \quad y \in E,$$

i $v_{i+1} = \mathcal{K} v_i(y)$, $i = 0, 1, \ldots$. Z lematu 4.7 wynika, że v_i dążą monotonicznie do v i są ciągłe. Pokażemy teraz, że v jest funkcją ciągłą dowodząc, że zbieżność v_i do v jest niemal jednostajna.

Ustalmy $y \in E$. Na mocy lematu 4.8 i założenia NFL2 istnieją stałe $\epsilon > 0$ i $\eta > 1$ takie, że

$$\begin{aligned} &\sup_{z \in B(y,\epsilon)} \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^z e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \to 0, \quad \text{gdy } i \to \infty, \\ &\sup_{z \in B(y,\epsilon)} \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^z \int_0^\infty e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^\Pi(t)\big)\Big)^\eta dt < \infty. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Zauważmy, że v_i dąży do v jednostajnie na $B(y, \epsilon)$, jeśli

$$\mathbb{E}^z \int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big) dt \to 0, \qquad i \to \infty,$$

jednostajnie dla $z \in B(y, \epsilon)$ i $\Pi \in \mathcal{A}(z)$. Stosujemy dwukrotnie nierówność Höldera

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^z \int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big) dt &\le \mathbb{E}^z \bigg\{ \bigg(\int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^\Pi(t)\big)\Big)^\eta dt \bigg)^{\frac{1}{\eta}} \bigg(\int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} dt \bigg)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \bigg\} \\ &= \mathbb{E}^z \bigg\{ \bigg(\int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^\Pi(t)\big)\Big)^\eta dt \bigg)^{\frac{1}{\eta}} \bigg(\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \bigg)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \bigg\} \\ &\le \bigg(\mathbb{E}^z \int_{\tau_i^\Pi}^\infty e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^\Pi(t)\big)\Big)^\eta dt \bigg)^{\frac{1}{\eta}} \bigg(\mathbb{E}^z \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \bigg)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \\ &\le \bigg(\mathbb{E}^z \int_0^\infty e^{-\alpha t} \Big(F\big(Y^\Pi(t)\big)\Big)^\eta dt \bigg)^{\frac{1}{\eta}} \bigg(\mathbb{E}^z \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} \bigg)^{\frac{\eta-1}{\eta}} \\ &= (I) \cdot (II). \end{aligned}$$

Na mocy (4.8) pierwszy składnik (I) jest jednostajnie ograniczony, zaś drugi składnik (II) dąży jednostajnie do zera. Możemy wyciągnąć wniosek, że v_i dąży do v jednostajnie na $B(y, \epsilon)$. Z dowolności $y \in E$ funkcja wartości v jest ciągła. Identycznie jak w dowodzie twierdzenia 4.9 pokazujemy, że $v = \mathcal{K} v$.

Na zakończenie musimy jeszcze wykazać istnienie strategii optymalnej. Na mocy lematu 4.6 istnieje funkcja impulsu I dla Mv. Definiujemy zbiór kontynuacji $C = \{y \in E : Mv(y) > v(y)\}$. Ustalmy $y \in E$. Tworzymy strategie

$$\Pi_i = \big((y, 0), (Y_1, \tau_1), \ldots, (Y_i, \tau_i)\big), \quad i \in \mathbb{N},$$

zgodnie z konstrukcją przeprowadzoną przed twierdzeniem 3.11. Pokażemy, że strategia

$$\Pi = \big((y, 0), (Y_1, \tau_1), \ldots\big)$$

jest optymalna. Wystarczy wykazać, że $v(y) - J(\Pi_i)$ dąży do zera, gdy i dąży do nieskończoności. Z lematu 4.7 wynika, że $J(\Pi_i) = v_i(y)$, natomiast zbieżność $v_i(y)$ do $v(y)$ już wykazaliśmy. ■

4.5. Przykłady

W tym podrozdziale skupimy się na przykładach modeli rynków, które spełniają warunki NFL, NFL1 lub NFL2.

Dyfuzja z ograniczonymi współczynnikami zależnymi od markowskich czynników ekonomicznych

Modelujemy proces cen jako eksponentę Doleans-Dade dyfuzji ze współczynnikami zależnymi od zewnętrznego procesu reprezentującego czynniki ekonomiczne.

$$\frac{dS^i(t)}{S^i(t)} = \mu^i\big(X(t)\big)dt + \sigma^i\big(X(t)\big)\cdot dW(t), \quad i=1,\dots,d, \tag{4.9}$$

gdzie $W(t)$ jest p-wymiarowym procesem Wienera, $\mu^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest dryfem, $\sigma^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ – wektorem zmienności, a $X(t)$ jest procesem Fellera. Zakładamy, że μ^i i σ^i, $i=1,\dots,d$, są funkcjami ograniczonymi. Równanie (4.9) posiada jednoznaczne rozwiązanie, które możemy zapisać wzorem

$$S^i(t) = S^i(s)\exp\bigg(\int_s^t \sigma^i\big(X(u)\big)\cdot dW(u) - \frac{1}{2}\int_s^t \big\|\sigma^i\big(X(u)\big)\big\|^2 du + \int_s^t \mu^i\big(X(u)\big)du\bigg),$$
$$i=1,\dots,d.$$

Ponadto, jest to proces Fellera.

Korzystając z jawnej postaci rozwiązania (4.9) udowodnimy oszacowanie na bogactwo portfela. Pozwoli nam to wykazać warunek NFL.

LEMAT 4.13. Dla dowolnego $y=(\eta,s,x)\in E$, $\Pi\in\mathcal{A}(y)$, $t\ge 0$,

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{N^{\Pi}(t)\cdot S(t)\big\} \le \eta\cdot s\, e^{\tilde\beta t}, \tag{4.10}$$

gdzie

$$\tilde\beta = \sup_{(x,i)\in\mathbb{R}^m\times\{1,\dots,d\}} \mu^i(x).$$

Dowód. Ustalmy y, Π i t. Dla zwiększenia przejrzystości nie będziemy pisać Π przy N^{Π} i τ_k^{Π}. Wykażemy, że dla dowolnego $i\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\} \le n\cdot s\, e^{\tilde\beta t}.$$

Warunek samofinansowania implikuje, że

$$N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t) \le N(\tau_{i-1}\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t).$$

Ponadto, z mocnej własności Markowa procesu cen wynika, że

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\} \le \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_{i-1}\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\big\}\Big\}$$

Rozwijamy iloczyn skalarny pod warunkową wartością oczekiwaną

$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_{i-1}\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\big\}$$
$$= \sum_{k=1}^d \mathbb{E}^{\,y}\big\{N^k(\tau_{i-1}\wedge t)S^k(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\big\}$$

Oszacowujemy każdy ze składników oddzielnie.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\,y}\big\{N^k(\tau_{i-1}\wedge t)S^k(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\big\}\\
&\quad= N^k(\tau_{i-1}\wedge t)\ \mathbb{E}^{\,y}\bigg\{e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}S^k(\tau_{i-1}\wedge t)\\
&\qquad\qquad \exp\bigg(\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\sigma^k\big(X(u)\big)dW(u)-\frac12\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\big\|\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2du\\
&\qquad\qquad\qquad +\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\mu^k\big(X(u)\big)du\bigg)\bigg|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\bigg\}\\
&\quad\le N^k(\tau_{i-1}\wedge t)S^k(\tau_{i-1}\wedge t)\\
&\qquad \mathbb{E}^{\,y}\bigg\{e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}e^{\tilde\beta(\tau_i\wedge t-\tau_{i-1}\wedge t)}\exp\bigg(\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\sigma^i\big(X(u)\big)dW(u)\\
&\qquad\qquad -\frac12\int_{\tau_{i-1}\wedge t}^{\tau_i\wedge t}\big\|\sigma^i\big(X(u)\big)\big\|^2du\bigg)\bigg|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge t}\bigg\}\\
&\quad= N^k(\tau_{i-1}\wedge t)S^k(\tau_{i-1}\wedge t)e^{\tilde\beta(\tau_{i-1}\wedge t)},
\end{aligned}
$$

ponieważ

$$
s\mapsto \exp\bigg(\int_0^s\sigma^i\big(X(u)\big)dW(u)-\frac12\int_0^s\big\|\sigma^i\big(X(u)\big)\big\|^2du\bigg)
$$

jest martyngałem. Podsumowując, pokazaliśmy

$$
\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\}\le \mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_{i-1}\wedge t)\cdot S(\tau_{i-1}\wedge t)e^{\tilde\beta(\tau_{i-1}\wedge t)}\big\}.
$$

Powtarzając powyższe rozumowanie $i-1$ razy dostajemy

$$
\mathbb{E}^{\,y}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\}\le n\cdot s\ e^{\tilde\beta t}.
$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy przejść z i do nieskończoności. Z lematu Fatou

$$
\mathbb{E}^{\,y}\liminf_{i\to\infty}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\}\le n\cdot s\ e^{\tilde\beta t}.
$$

Z dopuszczalności strategii Π wynika, że $\tau_i(\omega)>t$ dla niekończenie wielu i. Zatem

$$
\liminf_{k\to\infty}\big\{N(\tau_i\wedge t)\cdot S(\tau_i\wedge t)e^{\tilde\beta(t-\tau_i\wedge t)}\big\}=N(t)\cdot S(t),
$$

co kończy dowód. ■

Zauważmy zatem, że w rozważanym modelu warunek NFL jest spełniony. Przy dodatkowych zastrzeżeniach możemy wykazać NFL2.

WNIOSEK 4.14. Jeśli $F(n,s,x)=(n\cdot s)^\gamma$ dla $\gamma\in(0,1)$ i $\alpha>\tilde\beta$, to warunek NFL2 jest spełniony.

Dowód. Ustalmy kulę $B\subseteq E$ i oznaczmy $\eta=\frac{1}{\gamma}$. Weźmy $y=(n,s,x)\in B$ i $\Pi\in\mathcal{A}(y)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\,y}\int_0^\infty e^{-\alpha t}\big(N^\Pi(t)\cdot S(t)\big)^{\gamma\eta}dt &= \mathbb{E}^{\,y}\int_0^\infty e^{-\alpha t}N^\Pi(t)\cdot S(t)dt\\
&=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ \mathbb{E}^{\,y}\big\{N^\Pi(t)\cdot S(t)\big\}dt\\
&\le\int_0^\infty e^{-\alpha t}\ n\cdot s\ e^{\tilde\beta t}dt=\frac{n\cdot s}{\alpha-\tilde\beta}.
\end{aligned}
$$

Zatem NFL2 jest spełniony, gdyż $n \cdot s$ jest ograniczony w zbiorach ograniczonych. ∎

Aby znaleźć warunki, przy których założenie NFL2 jest spełnione dla szerszej klasy funkcji, musimy udowodnić trudniejszą wersję lematu 4.13.

LEMAT 4.15. Dla $y = (n, s, x) \in E$, $\Pi \in \mathcal{A}(y)$ i ograniczonego momentu stopu σ

$$\mathbb{E}^{\,y}\left\{e^{-\alpha\sigma} N^{\Pi}(\sigma) \cdot S(\sigma)\right\} \leq n \cdot s \Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{e^{-2(\alpha-\beta)\sigma}\right\}\Big)^{1/2}, \tag{4.11}$$

gdzie

$$\beta = \sup_{i=1,\ldots,d} \Big(\frac{1}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|\sigma^i(x)\|^2 + \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \mu^i(x)\Big).$$

Dowód. Podobnie jak poprzednio, w dowodzie będziemy opuszczać oznaczenie Π przy N^{Π} i τ_i^{Π}. Ustalmy $y = (n, s, x) \in E$ i $\Pi \in \mathcal{A}(y)$. Pokażemy najpierw, że dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$ i ograniczonej zmiennej losowej ξ

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)} N(\tau_i \wedge \sigma) \cdot S(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big\} \\ &\quad \leq \mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)} N(\tau_{i-1} \wedge \sigma) \cdot S(\tau_{i-1} \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Warunek samofinansowania implikuje, że

$$N(\tau_i \wedge t) \cdot S(\tau_i \wedge t) \leq N(\tau_{i-1} \wedge t) \cdot S(\tau_i \wedge t).$$

Zatem

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)} N(\tau_i \wedge \sigma) \cdot S(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big\} \\ &\qquad \leq \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\mathbb{E}^{\,y}\Big\{N(\tau_{i-1} \wedge \sigma) \cdot S(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big\} \end{aligned}$$

Rozwijamy iloczyn skalarny pod wewnętrzną wartością oczekiwaną

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\,y}\Big\{N(\tau_{i-1} \wedge \sigma) \cdot S(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\} \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{d} N^k(\tau_{i-1} \wedge \sigma)\mathbb{E}^{\,y}\Big\{S^k(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\} \end{aligned}$$

Następnie szacujemy każdy składnik oddzielnie, korzystając z mocnej własności Markowa procesu cen

$$\begin{aligned} &N^k(\tau_{i-1} \wedge \sigma)\mathbb{E}^{\,y}\Big\{S^k(\tau_i \wedge \sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\} \\ &= N^k(\tau_{i-1} \wedge \sigma) S^k(\tau_{i-1} \wedge \sigma) \\ &\quad \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ \exp\Big(\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma} \sigma^k\big(X(u)\big) dW(u) - \frac{1}{2}\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma} \big\|\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2 du + \int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma} \mu^k\big(X(u)\big) du\Big) \\ &\qquad \Big(\mathbb{E}^{\,y}\left\{\xi | \mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\right\}\Big)^{1/2}\Big| \mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\} \end{aligned}$$

Stosujemy nierówność Schwartza

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\exp\Big(\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\sigma^k\big(X(u)\big)dW(u)-\frac{1}{2}\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\big\|\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2du+\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\mu^k\big(X(u)\big)du\Big)$$
$$\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}$$
$$\leq\Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\exp\Big(\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}2\sigma^k\big(X(u)\big)dW(u)-\frac{1}{2}\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\big\|2\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2du\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big)^{1/2}$$
$$\Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\exp\Big(\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\big\|\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2du+\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}2\mu^k\big(X(u)\big)du-2\alpha(\tau_i\wedge\sigma)\Big)$$
$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big)^{1/2}.$$

Pierwszy czynnik możemy zapisać jako

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\frac{M^k(\tau_i\wedge\sigma)}{M^k(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\},$$

gdzie

$$M^k(t)=\exp\Big(\int_0^t 2\sigma^k\big(X(u)\big)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t\big\|2\sigma^k\big(X(u)\big)\big\|^2du\Big)$$

jest martyngałem. Zatem $\mathbb{E}^{\,y}\{M^k(\tau_i\wedge\sigma)|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\}=M^k(\tau_{i-1}\wedge\sigma)$, ponieważ σ jest ograniczonym momentem stopu. Stąd

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\frac{M^k(\tau_i\wedge\sigma)}{M^k(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}=1.$$

Drugi czynnik szacujemy korzystając z ograniczoności σ^i i μ^i

$$\Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\exp\Big(\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}\big\|\sigma^i\big(X(u)\big)\big\|^2du+\int_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}^{\tau_i\wedge\sigma}2\mu^i\big(X(u)\big)du-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)\Big)$$
$$\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big)^{1/2}$$
$$\leq\Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{2\beta(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)-2\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big)^{1/2}$$
$$=\Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-2\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\Big\}\Big)^{1/2}$$
$$=e^{-\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi\;e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}$$

Dostajemy zatem oszacowanie

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}N(\tau_i\wedge\sigma)\cdot S(\tau_i\wedge\sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi|\mathcal{F}_{\tau_i\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big\}$$
$$\leq\mathbb{E}^{\,y}\Big\{e^{-\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}N(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\cdot S(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\xi\;e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big\},$$

które kończy dowód (4.12).

Wykażemy teraz, że dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}N(\tau_i\wedge\sigma)\cdot S(\tau_i\wedge\sigma)\Big\} \le n\cdot s\Big(\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma)}\big\}\Big)^{1/2}. \tag{4.13}$$

Zastosujmy oszacowanie (4.12) z $\xi = 0$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}N(\tau_i\wedge\sigma)\cdot S(\tau_i\wedge\sigma)\Big\}\\ &\quad\le \mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}N(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\cdot S(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\Big(\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big\}.\end{aligned}$$

Następnie stosujemy (4.12) z $\xi = \exp\big(2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)\big)$

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_{i-1}\wedge\sigma)}N(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\cdot S(\tau_{i-1}\wedge\sigma)\Big(\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-1}\wedge\sigma)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-1}\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big\}\\ &\quad\le \mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_{i-2}\wedge\sigma)}N(\tau_{i-2}\wedge\sigma)\cdot S(\tau_{i-2}\wedge\sigma)\Big(\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma-\tau_{i-2}\wedge\sigma)}\big|\mathcal{F}_{\tau_{i-2}\wedge\sigma}\big\}\Big)^{1/2}\Big\}.\end{aligned}$$

Ostatni krok powtarzamy $i-2$ razy i dostajemy (4.13). Przechodzimy teraz z i do nieskończoności. Zauważamy, że z twierdzenia o zbieżności monotonicznej pod znakiem całki i z dopuszczalności strategii Π wynika, że

$$\lim_{i\to\infty}\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)(\tau_i\wedge\sigma)}\big\} = \mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)\sigma}\big\}.$$

Zauważmy, że $\tau_i(\omega) > \sigma(\omega)$ dla niekończenie wielu i, bo σ jest ograniczonym momentem stopu, zaś Π jest strategią dopuszczalną. Stosując lemat Fatou i powyższą uwagę dostajemy

$$\begin{aligned}\liminf_{i\to\infty}\mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}N(\tau_i\wedge\sigma)\cdot S(\tau_i\wedge\sigma)\Big\} &\ge \mathbb{E}^y\liminf_{i\to\infty}\Big\{e^{-\alpha(\tau_i\wedge\sigma)}N(\tau_i\wedge\sigma)\cdot S(\tau_i\wedge\sigma)\Big\}\\ &= \mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha\sigma}N(\sigma)\cdot S(\sigma)\Big\}.\end{aligned}$$

A zatem

$$\mathbb{E}^y\Big\{e^{-\alpha\sigma}N(\sigma)\cdot S(\sigma)\Big\} \le n\cdot s\,\Big(\mathbb{E}^y\big\{e^{2(\beta-\alpha)\sigma}\big\}\Big)^{1/2},$$

co kończy dowód. ■

Określimy teraz szerszą rodzinę funkcji F, dla których udowodnimy istnienie strategii optymalnej. Nie skorzystamy przy tym z twierdzenia 4.12, lecz silniej wykorzystamy postać procesu cen.

Założenie AF. Istnieją stałe A, B takie, że

$$0 \le F(\eta, s, x) \le A + B(\eta\cdot s), \quad (\eta, s, x) \in E.$$

Założenie AF ogranicza wzrost funkcji F w stosunku do bogactwa. Zauważmy, że jeśli $F(\eta, s, x) = u(\eta\cdot s)$, czyli jest użytecznością bogactwa, to warunek AF jest spełniony dla dowolnej nieujemnej wklęsłej lub wypukło-wklęsłej funkcji u. Obejmuje to całą klasę stosowanych obecnie funkcji użyteczności.

TWIERDZENIE 4.16. Załóżmy, że F spełnia założenia AF, $\alpha > \beta$, gdzie

$$\beta = \sup_{i=1,\dots,d}\big(\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^m}\|\sigma^i(x)\|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^m}\mu^i(x)\big),$$

oraz zachodzi NUM. Wtedy funkcja wartości v jest funkcją ciągłą i spełnia równanie Bellmana $\mathcal{K}v = v$. Ponadto istnieje strategia optymalna.

Dowód. Dowód tego twierdzenia będzie bazował na dowodzie twierdzenia 4.12. Zauważmy, że założenie NFL jest spełnione na mocy lematu 4.13. Nie mamy tylko NFL2. Jest ono wykorzystywane w dowodzie twierdzenia 4.12 tylko do pokazania, że dla dowolnego zbioru zwartego $B \subseteq E$

$$\mathbb{E}^{\,y} \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} F\big(N^\Pi(t) \cdot S(t)\big) dt \to 0$$

jednostajnie dla $y \in B$ i $\Pi \in \mathcal{A}(y)$.

Ustalmy zatem zbiór zwarty $B \subseteq E$, $y \in B$ i $\Pi \in \mathcal{A}(y)$. Na mocy założenia AF

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\,y}\left\{ \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big) dt \right\} &= \mathbb{E}^{\,y}\left\{ \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} A + \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} B\big(N^\Pi(t) \cdot S(t)\big) dt \right\} \\ &\le \frac{A}{\alpha}\, \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} + B\, \mathbb{E}^{\,y}\left\{ \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} N^\Pi(t) \cdot S(t) dt \right\}\end{aligned}$$

Zajmijmy się drugim składnikiem

$$\mathbb{E}^{\,y}\left\{ \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} N^\Pi(t) \cdot S(t) dt \right\} = \int_0^\infty \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi) \cdot S(t+\tau_i^\Pi) \Big\} dt$$

Na mocy lematu 4.15 dla dowolnego $T > 0$

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi \wedge T)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \cdot S(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \Big\} \le n \cdot s\, \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2(t+\tau_i^\Pi \wedge T)(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2}.$$

Ze zbieżności monotonicznej

$$\lim_{T\to\infty} \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2(t+\tau_i^\Pi \wedge T)(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2} = \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2(t+\tau_i^\Pi)(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2}.$$

i granica jest skończona, gdyż $(\beta - \alpha) < 0$. Lemat Fatou daje

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\,y} \liminf_{T\to\infty} \Big\{ e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi \wedge T)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \cdot S(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \Big\} \\ &\le \liminf_{T\to\infty} \mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi \wedge T)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \cdot S(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \Big\} \\ &\le n \cdot s\, \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2(t+\tau_i^\Pi)(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Zauważmy też, że

$$\liminf_{T\to\infty} \Big(e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi \wedge T)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \cdot S(t+\tau_i^\Pi \wedge T) \Big) = e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi) \cdot S(t+\tau_i^\Pi),$$

a więc

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{-\alpha(t+\tau_i^\Pi)} N^\Pi(t+\tau_i^\Pi) \cdot S(t+\tau_i^\Pi) \Big\} \le n \cdot s\; e^{t(\beta-\alpha)} \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2\tau_i^\Pi(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2}.$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\,y}\left\{ \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big) dt \right\} \\ &\le \frac{A}{\alpha}\, \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} + n \cdot s\, B \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2\tau_i^\Pi(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2} \int_0^\infty e^{t(\beta-\alpha)} dt \Big\} \\ &= \frac{A}{\alpha}\, \mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha \tau_i^\Pi} + n \cdot s\, \frac{B}{\alpha-\beta} \Big(\mathbb{E}^{\,y}\Big\{ e^{2\tau_i^\Pi(\beta-\alpha)} \Big\} \Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Warunek NFL implikuje nam, że zarówno $\mathbb{E}^{\,y} e^{-\alpha\tau_i^\Pi}$ jak i $\mathbb{E}^{\,y}\big\{e^{2\tau_i^\Pi(\beta-\alpha)}\big\}$ dążą do zera jednostajnie dla $y \in B$ i $\Pi \in \mathcal{A}(y)$. Stąd

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{y\in B,\Pi\in\mathcal{A}(y)} \mathbb{E}^{\,y} \int_{\tau_i^\Pi}^{\infty} e^{-\alpha t} F\big(N^\Pi(t)\cdot S(t)\big)dt = 0,$$

co kończy dowód, gdyż dalej postępujemy identycznie jak w dowodzie twierdzenia 4.12. ∎

Na zakończenie zwróćmy uwagę na to, że zwiększenie rodziny funkcji F okupiliśmy zmianą oszacowania na możliwe stopy dyskonta α. We wniosku 4.14 wymagaliśmy tylko, by

$$\alpha > \tilde{\beta} = \sup_{(x,i)\in\mathbb{R}^m\times\{1,\ldots,d\}} \mu^i(x).$$

Natomiast w twierdzeniu 4.16 żądamy, aby

$$\alpha > \beta = \sup_{i=1,\ldots,d} \Big(\frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}^m} \|\sigma^i(x)\|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \mu^i(x)\Big).$$

Multiplikatywny proces cen

Ceny modelujemy jako d-wymiarowy proces dany przez

$$S^i(t) = e^{Z^i(t)}, \quad i = 1,\ldots,d.$$

Proces $Z(t)$ nie musi być procesem Fellera. Dopiero razem z procesem $X(t)$, który, przypomnijmy, reprezentuje czynniki ekonomiczne, spełnia warunek Fellera. Formalnie $\big(Z(t), X(t)\big) \in E^Z \times E^X$, $E^Z = \mathbb{R}^d$, $E^X = \mathbb{R}^m$. Zauważmy także, że proces $\big(S(t), X(t)\big)$ spełnia warunek Fellera.

Celem tej części jest znalezienie wystarczających warunków wyrażonych w terminach procesu $\big(Z(t), X(t)\big)$ na to, by były spełnione założenia NFL, NFL1 i NFL2. Wyniki będą znacznie ogólniejsze niż w poprzednim przykładzie, lecz także słabsze w tym sensie, że dolne ograniczenie na współczynnik dyskonta α będzie wyższe. Jedynym założeniem, które zrobimy, jest

Założenie MLT. Dla dowolnego $T > 0$ istnieje $\beta > 0$

$$\mathbb{E}^{\,z}\big\{\big(S^i(t)\big)^2\big|\mathcal{F}_s\big\} \le \big(S^i(s)\big)^2 e^{2\beta(t-s)}, \quad s \le t \le T, \quad i = 1,\ldots,d, \quad z \in E.$$

Proces dyfuzji (4.9) z ograniczonymi współczynnikami spełnia MLT z β równym temu z lematu 4.15.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, przedstawione dowody nie będą brały pod uwagę istnienia kosztów za transakcje. Tutaj jednak będziemy musieli jawnie ograniczyć nasze rozważania do takiego przypadku. Chociaż usuniemy koszty za transakcje, to pozostaniemy przy wymaganiu, by nasza strategia była sterowaniem impulsowym. Zwróćmy uwagę, że wszelkie górne oszacowania bogactwa portfela bez kosztów za transakcje przenoszą się w oczywisty sposób na przypadek kosztów za transakcje. Zastosowana sztuczka nie jest więc żadnym ograniczeniem.

Zdefiniujemy teraz strategię bez kosztów za transakcje. Różni się ona od definicji 4.2 tylko punktem iv).

DEFINICJA 4.17. $\Pi = \big((N_0, 0), (N_1, \tau_1), \ldots\big)$ jest **strategią dopuszczalną bez kosztów za transakcje** dla $(s_0, x_0) \in E^S \times E^X$, jeśli

i) $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \cdots$ są momentami stopu,
ii) N_i jest $\mathcal{F}_{\tau_i}$ mierzalne,
iii) $N_i \in E^N$ $\mathbb{P}^{(s_0,x_0)}$-p.n.,
iv) $N_i S(\tau_i) = N_{i-1} S(\tau_i)$ $\mathbb{P}^{(s_0,x_0)}$-p.n. (samofinansowanie),
v) $\mathbb{P}^{(s,x)}(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty) = 1$.

Zbiór strategii dopuszczalnych bez kosztów za transakcje dla $y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E$ będziemy oznaczać przez $\tilde{\mathcal{A}}(y)$. Składa się on z tych wszystkich strategii dopuszczalnych bez kosztów za transakcje dla (s_0, x_0), w których $N_0 = \eta_0$.

Możemy teraz sformułować główny wynik.

TWIERDZENIE 4.18. Załóżmy, że proces cen spełnia warunek MLT. Dla dowolnego $T > 0$ istnieje $\beta > 0$ taka, że

$$\sup_{\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}(y)} \mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \le (\eta_0 \cdot s_0)^2 e^{2\beta T}, \quad y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E. \tag{4.14}$$

Ponadto, β jest równa stałej z warunku MLT.

Trywialnie dostajemy analogiczny wynik dla przypadku z kosztami za transakcje.

WNIOSEK 4.19. Jeśli proces cen spełnia MLT, to istnieje $\beta > 0$ zależna od $T > 0$, taka że

$$\sup_{\Pi \in \mathcal{A}(y)} \mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \le (\eta_0 \cdot s_0)^2 e^{2\beta T}, \quad y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E.$$

Dowód twierdzenia 4.18 bazuje na dyskretyzacji czasu i pewnego rodzaju ciągłości procesu Fellera. Początkowo dowodzimy (4.14) dla strategii z transakcjami w ustalonej, skończonej liczbie deterministycznych momentów. Następnie, gdy zbiór tych momentów staje się gęstszy w $[0, T]$, proponowane przybliżenie lewej strony (4.14) staje się coraz lepsze, by w granicy osiągnąć równość.

Dowód twierdzenia 4.18. W dowodzie, jeśli nie będzie to niejednoznaczne, opuszczać będziemy oznaczenie Π przy N^{Π} i τ_i^{Π}. Dla $n \in \mathbb{N}$ wprowadzimy diadyczny podział odcinka $[0, T]$

$$D_n = \Big\{0, \frac{T}{2^n}, \frac{2T}{2^n}, \ldots, T\Big\}.$$

W zbiorze strategii $\tilde{\mathcal{A}}(y)$ wybieramy te, których transakcje mają miejsce w D_n $\mathbb{P}^y$-p.n. Oznaczamy ten zbiór przez $\tilde{\mathcal{A}}_n(y)$. Możemy postrzegać strategie z $\tilde{\mathcal{A}}_n(y)$ jako takie, które mają transakcję w każdym punkcie D_n. Uzasadnić to można brakiem kosztów za transakcje. Teraz, niech $\tilde{\mathcal{A}}^m(y)$ będzie zbiorem strategii o co najwyżej m transakcjach w $[0, T]$. Zaś $\tilde{\mathcal{A}}_n^m(y)$ jest przecięciem dwóch powyższych zbiorów. Formalnie

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}_n(y) &= \{\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}(y) : \quad \mathbb{P}^y(\tau_i \cap [0,T] \in D_n \ \forall i) = 1\}, \quad y \in E, \quad n \in \mathbb{N}, \\
\tilde{\mathcal{A}}^m(y) &= \{\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}(y) : \quad \tau_{m+1} > T \quad \mathbb{P}^y\text{-p.n.}\}, \quad y \in E, \quad m \in \mathbb{N}, \\
\tilde{\mathcal{A}}_n^m(y) &= \tilde{\mathcal{A}}^m(y) \cap \tilde{\mathcal{A}}_n(y), \quad y \in E, \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Poniższy lemat dowodzi całkowalności lewej strony (4.14) dla strategii z $\tilde{\mathcal{A}}^m$.

LEMAT 4.20.

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 < \infty, \quad \Pi \in \tilde{\mathcal{A}}^m(y), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in E.$$

Dowód. Wykażemy oszacowanie

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T)\cdot S(T)\big)^2 \le (\eta_0\cdot s_0)^2 e^{2m\beta T}, \tag{4.15}$$

gdzie $y=(\eta_0,s_0,x_0)$, $\Pi\in\tilde{\mathcal{A}}^m(y)$, zaś β jest stałą z założenia MLT.

Zauważmy najpierw, że $\big(N(T)\cdot S(T)\big)^2$ jest nieujemną zmienną losową, więc jej warunkowa wartość oczekiwana jest dobrze zdefiniowana, choć może być nieskończona w niektórych punktach. Ustalmy $m\in\mathbb{N}$. Brak kosztów za transakcje pozwala nam założyć, że $\tau_m^{\Pi}\le T$. Formalnie można to zrobić w następujący sposób

$$\begin{aligned}
&\tau_1'=\tau_1\wedge T,\dots,\tau_m'=\tau_m\wedge T,\\
&\tau_{m+1}'=\tau_1\vee T,\dots\tau_{2m}'=\tau_m\vee T,\\
&\tau_{2m+k}'=\tau_{m+k},\quad k>0.
\end{aligned}$$

Oczywiście, proces zawartości portfela związany z powyższą modyfikacją strategii jest identyczny z $N^{\Pi}(t)$.

Tak więc, zakładając $\tau_m\le T$, piszemy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\,y}\big(N(T)\cdot S(T)\big)^2 &= \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} N^i(T)S^i(T)N^j(T)S^j(T)\Big\}\\
&= \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}^{\,y}\big\{N^i(T)S^i(T)N^j(T)S^j(T)\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Szacujemy każdy składnik z osobna z nierówności Schwartza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\,y}\big\{N^i(T)S^i(T)N^j(T)S^j(T)\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\} &= \mathbb{E}^{\,y}\big\{N^i(\tau_m)S^i(T)N^j(\tau_m)S^j(T)\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\\
&= N^i(\tau_m)N^j(\tau_m)\mathbb{E}^{\,y}\big\{S^i(T)S^j(T)\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\\
&\le N^i(\tau_m)N^j(\tau_m)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\big(S^i(T)\big)^2\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\Big)^{\frac12}\\
&\qquad\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\big(S^j(T)\big)^2\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\Big)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Na mocy założenia MLT powyższe wyrażenie możemy oszacować z góry przez

$$\begin{aligned}
N^i(\tau_m)N^j(\tau_m)S^i(\tau_m)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{e^{2\beta(T-\tau_m)}\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\Big)^{\frac12} S^j(\tau_m)\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{e^{2\beta(T-\tau_m)}\big|\mathcal{F}_{\tau_m}\big\}\Big)^{\frac12}&\\
\le N^i(\tau_m)N^j(\tau_m)S^i(\tau_m)S^j(\tau_m)e^{2\beta T}&.
\end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\,y}\big(N(T)\cdot S(T)\big)^2 &\le \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} N^i(\tau_m)N^j(\tau_m)S^i(\tau_m)S^j(\tau_m)e^{2\beta T}\Big\}\\
&= \mathbb{E}^{\,y}\big(N(\tau_m)\cdot S(\tau_m)\big)^2 e^{2\beta T}.
\end{aligned}$$

Założenie o samofinansowaniu daje

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N(\tau_m)\cdot S(\tau_m)\big)^2 e^{2\beta T} = \mathbb{E}^{\,y}\big(N(\tau_m-)\cdot S(\tau_m)\big)^2 e^{2\beta T}.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie m razy dochodzimy do (4.15). ■

W poniższym lemacie wykorzystamy spostrzeżenie, że strategie z $\tilde{\mathcal{A}}_n(y)$ można traktować jako strategie, które mają transakcję w każdym punkcie D_n. Oznaczmy przez β stałą z założenia MLT dla horyzontu T.

LEMAT 4.21. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \leq (\eta_0 \cdot s_0)^2 e^{2\beta T}, \quad \Pi \in \tilde{\mathcal{A}}_n(y), \quad y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E.$$

Dowód. Oznaczmy punkty D_n przez $t_0, t_1, \ldots, t_{2^n}$, tzn. $t_i = Ti/2^n$. Ponadto, niech $N_{2^n} = N^{\Pi}(t_{2^n})$, $N_{2^n-1} = N^{\Pi}(t_{2^n-1})$, ... Oczywiście N_i jest $\mathcal{F}_{t_i}$-mierzalne dla $i = 0, \ldots 2^n$.

Skorzystajmy z warunku samofinansowania $N_{2^n} \cdot S(T) = N_{2^n-1} \cdot S(T)$ i rozwińmy iloczyn skalarny

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 &= \mathbb{E}^{\,y}\big(N_{2^n} \cdot S(T)\big)^2 = \mathbb{E}^{\,y}\big(N_{2^n-1} \cdot S(T)\big)^2 \\ &= \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} N^i_{2^n-1} S^i(T) N^j_{2^n-1} S^j(T)\Big\} \\ &= \mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}^{\,y}\big\{N^i_{2^n-1} S^i(T) N^j_{2^n-1} S^j(T)\big|\mathcal{F}_{t_{2^n-1}}\big\}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Szacujemy każdy składnik oddzielnie korzystając z nierówności Schwartza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\,y}\big\{N^i_{2^n-1} S^i(T) N^j_{2^n-1} S^j(T)\big|\mathcal{F}_{t_{2^n-1}}\big\} &= N^i_{2^n-1} N^j_{2^n-1} \mathbb{E}^{\,y}\big\{S^i(T) S^j(T)\big|\mathcal{F}_{t_{2^n-1}}\big\} \\ &\leq N^i_{2^n-1} N^j_{2^n-1}\Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\big(S^i(T)\big)^2\big|\mathcal{F}_{t_{2^n-1}}\big\}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \Big(\mathbb{E}^{\,y}\big\{\big(S^j(T)\big)^2\big|\mathcal{F}_{t_{2^n-1}}\big\}\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Na mocy założenia MLT szacujemy to przez

$$N^i_{2^n-1} N^j_{2^n-1} S^i(t_{2^n-1}) e^{\frac{\beta}{2^n}} S^j(t_{2^n-1}) e^{\frac{\beta}{2^n}}.$$

Ostatecznie (4.16) jest ograniczone z góry przez

$$\mathbb{E}^{\,y}\Big\{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} N^i_{2^n-1} S^i(t_{2^n-1}) N^j_{2^n-1} S^j(t_{2^n-1}) e^{\frac{2\beta}{2^n}}\Big\} = \mathbb{E}^{\,y}\big(N_{2^n-1} \cdot S(t_{2^n-1})\big)^2 e^{\frac{2\beta}{2^n}}.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie $(2^n - 1)$ razy dochodzimy do nierówności, którą mieliśmy udowodnić. ■

W dalszej części dowodu będziemy wykorzystywali ciągłość półgrupy związanej z procesem $\big(Z(t), X(t)\big)$. W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy $\tilde{Y}(t) = \big(Z(t), X(t)\big)$. Poniższe lematy oraz referencje do dowodów pochodzą z pracy Stettnera [30].

LEMAT 4.22. Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subseteq E^Z \times E^X$, $\epsilon > 0$, $T > 0$, istnieje zbiór zwarty $K_1 \supseteq K$, taki że

$$\sup_{\tilde{y} \in K} \mathbb{P}^{\tilde{y}}\big\{\tilde{Y}(t) \notin K_1 \quad \text{dla pewnego } t \in [0, T]\big\} < \epsilon.$$

LEMAT 4.23. Niech $O_\delta(\tilde{y}) = \{\tilde{z} \in E^Z \times E^X : \quad \|\tilde{y} - \tilde{z}\| < \delta\}$, $\tilde{y} \in E^Z \times E^X$.

$$\forall_{\epsilon>0,\ \delta>0} \forall_{K_1 \text{ – zwarty}} \exists_{h_0} \forall_{h \le h_0} \forall_{\tilde{y} \in K_1} \quad \mathbb{P}^{\tilde{y}}\big\{\tilde{Y}(h) \notin O_\delta(\tilde{y})\big\} < \epsilon.$$

Dowód lematu 4.22 można znaleźć w pracy Mackevicius [17], lemat 2. Lemat 4.23 może być dowiedziony identycznie do lematu 2.5 z monografii Dynkina [9]. Jako wniosek dostajemy

WNIOSEK 4.24. Niech τ będzie ograniczonym momentem stopu. Dla dowolnych stałych $\delta, \epsilon > 0$ i zbioru zwartego $\tilde{B} \in E^Z \times E^X$ istnieje $\eta > 0$, takie że

$$\mathbb{P}^{\tilde{y}}\big\{\|\tilde{Y}(\tau) - \tilde{Y}(\sigma)\| \ge \delta, \quad \tilde{Y}(\tau) \in \tilde{B}\big\} \le \epsilon, \quad \tilde{y} \in E^Z \times E^X.$$

dla dowolnej $\mathcal{F}_\tau$-mierzalnej zmiennej losowej σ spełniającej

$$0 \le \sigma - \tau \le \eta.$$

Skorzystamy teraz z ciągłości procesu Fellera, udowodnionej powyżej, oraz z lematu 4.21, aby otrzymać oszacowanie górne na bogactwo portfeli związanych ze strategiami z $\tilde{\mathcal{A}}^m(y)$.

LEMAT 4.25. Dla $m \in \mathbb{N}$, $y \in E$, $\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}^m(y)$

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \le \lim_{n\to\infty} \sup_{\Pi' \in \tilde{\mathcal{A}}^m_n(y)} \mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi'}(T) \cdot S(T)\big)^2.$$

Dowód. Dowód opiera się na następującej dyskretyzacji strategii. Niech $\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}^m(y)$,

$$\Pi = \big((N_0, \tau_0), (N_1, \tau_1), \ldots, (N_m, \tau_m)\big).$$

Jak poprzednio, możemy założyć, że $\tau_m \le T$. Konstruujemy n-dyskretyzację Π, oznaczaną przez Π_n, która będzie elementem $\tilde{\mathcal{A}}^m_n(y)$. Modyfikujemy momenty transakcji:

$$\tau_{n,l} = \frac{kT}{2^n}, \qquad \text{jeżeli } \frac{(k-1)T}{2^n} < \tau_l \le \frac{kT}{2^n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^n, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Zatem $0 \le \tau_{n,l} - \tau_n \le 2^{-n}$. Żądamy, aby liczba akcji w portfelu Π_n była proporcjonalna do liczby akcji w portfelu Π, tzn.

$$N_{n,l} = \alpha_{n,l} N_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m.$$

Oczywiście $\alpha_{n,0} = 1$. Ponadto musi być spełniony warunek samofinansowania

$$\alpha_{n,l-1} N_{l-1} \cdot S(\tau_{n,l}) = \alpha_{n,l} N_l \cdot S(\tau_{n,l}).$$

Powyższa relacja determinuje w całości $\alpha_{n,l}$. Ponadto, $\alpha_{n,l}$ jest $\mathcal{F}_{\tau_{n,l}}$-mierzalną zmienną losową.

Teraz dla dowolnych $\delta, \epsilon > 0$ znajdziemy $N(\delta, \epsilon)$, takie że dla $n \ge N(\delta, \epsilon)$ istnieje zbiór $A_n(\delta, \epsilon) \subseteq \Omega$ o mierze $\mathbb{P}^y\{A_n(\delta, \epsilon)\} \ge 1 - \epsilon$ oraz

$$A_n(\delta, \epsilon) \subseteq \Big\{\frac{S^i(\tau_{n,l})}{S^i(\tau_l)} \in [e^{-\delta}, e^{\delta}], \quad i = 1, \ldots, d, \quad l = 0, \ldots, m\Big\}. \tag{4.18}$$

Na mocy lematu 4.22 istnieje zbiór zwarty $\tilde{B}_1 \subseteq E^Z \times E^X$, taki że $y \in [0, \infty)^d \times \tilde{B}_1$ i

$$\mathbb{P}^y\big\{\big(Z(t), X(t)\big) \notin \tilde{B}_1 \quad \text{dla } t \in [0, T]\big\} < \frac{\epsilon}{m+1}.$$

Z wniosku 4.24 możemy znaleźć $N \in \mathbb{N}$, takie że n-dyskretyzacja Π_n strategii Π spełnia dla $n \geq N$

$$\mathbb{P}^y\big\{|Z(\tau_{n,l}) - Z(\tau_l)| > \delta, \quad \big(Z(\tau_l), X(\tau_l)\big) \in \tilde{B}_1\big\} \leq \frac{\epsilon}{m+1}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^y\{A_n^c(\delta,\epsilon)\} &= \mathbb{P}^y\big\{\exists_{l\in\{1,2,\dots,m\}}|Z(\tau_{n,l}) - Z(\tau_l)| > \delta\big\} \\
&= \mathbb{P}^y\big\{\exists_{l\in\{1,2,\dots,m\}}|Z(\tau_{n,l}) - Z(\tau_l)| > \delta, \quad \exists_{t\in[0,T]}\big(Z(\tau_l), X(\tau_l)\big) \notin \tilde{B}_1\big\} \\
&\quad + \mathbb{P}^y\big\{\exists_{l\in\{1,2,\dots,m\}}|Z(\tau_{n,l}) - Z(\tau_l)| > \delta, \quad \forall_{t\in[0,T]}\big(Z(\tau_l), X(\tau_l)\big) \in \tilde{B}_1\big\} \\
&\leq \mathbb{P}^y\big\{\exists_{t\in[0,T]}\big(Z(\tau_l), X(\tau_l)\big) \notin \tilde{B}_1\big\} \\
&\quad + \sum_{l=1}^m \mathbb{P}^y\big\{|Z(\tau_{n,l}) - Z(\tau_l)| > \delta, \quad \forall_{t\in[0,T]}\big(Z(\tau_l), X(\tau_l)\big) \in \tilde{B}_1\big\} \\
&\leq \frac{\epsilon}{m+1} + m\frac{\epsilon}{m+1} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ustalmy $\delta, \epsilon > 0$ i weźmy $n \geq N(\delta, \epsilon)$. Podamy teraz oszacowanie dolne na $\alpha_{n,m}$ na zbiorze $A_n(\delta,\epsilon)$. Ustalmy numer transakcji $l \in \{1, \dots, m\}$. Bogactwo przed transakcją jest równe $N_{n,l-1} \cdot S(\tau_{n,l})$. Relacja (4.18) pozwala nam na dokonanie następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}
N_{n,l-1} \cdot S(\tau_{n,l}) = \alpha_{n,l-1}N_{l-1} \cdot S(\tau_{n,l}) &= \alpha_{n,l-1}\sum_{i=1}^d N_{l-1}^i S^i(\tau_{n,l}) \\
&\geq \alpha_{n,l-1}\sum_{i=1}^d N_{l-1}^i S^i(\tau_l)e^{-\delta} = \alpha_{n,l-1}e^{-\delta}N_{l-1} \cdot S(\tau_l).
\end{aligned}$$

Ponieważ Π jest strategią samofinansującą

$$\alpha_{n,l-1}e^{-\delta}N_{l-1} \cdot S(\tau_l) = \alpha_{n,l-1}e^{-\delta}N_l \cdot S(\tau_l).$$

A zatem, na mocy (4.18)

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,l-1}e^{-\delta}N_l \cdot S(\tau_l) &= \alpha_{n,l-1}e^{-\delta}\sum_{i=1}^d N_l^i S^i(\tau_l) \\
&\geq \alpha_{n,l-1}e^{-\delta}\sum_{i=1}^d N_l^i S^i(\tau_{n,l})e^{-\delta} = \alpha_{n,l-1}e^{-2\delta}N_l \cdot S(\tau_{n,l}).
\end{aligned}$$

Warunek samofinansowania dla strategii Π_n ma postać $N_{n,l} \cdot S(\tau_{n,l}) = N_{n,l-1} \cdot S(\tau_{n,l})$. Dostajemy zatem $N_{n,l} \geq \alpha_{n,l-1}e^{-2\delta}N_l$, co pozwala zapisać oszacowanie dolne na $\alpha_{n,l}$ w postaci rekurencyjnej: $\alpha_{n,l} \geq \alpha_{n,l-1}e^{-2\delta}$. Czyli

$$\alpha_{n,m} \geq e^{-2m\delta}.$$

Podsumowując

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^y\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}N_{n,m} \cdot S(T)\big)^2 &= \mathbb{E}^y\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}\alpha_m N_m \cdot S(T)\big)^2 \geq \mathbb{E}^y\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}e^{-2m\delta}N_m \cdot S(T)\big)^2 \\
&= e^{-4m\delta}\mathbb{E}^y\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2.
\end{aligned}$$

Możemy teraz oszacować bogactwo portfela Π w momencie T przy pomocy strategii zdyskretyzowanych. Mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\,y}\big(N_m \cdot S(T)\big)^2 &= \mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2 + \mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n^c(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2 \\
&\leq e^{4m\delta}\mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n(\delta,\epsilon)}N_{n,m} \cdot S(T)\big)^2 + \mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n^c(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2 \\
&\leq e^{4m\delta}\mathbb{E}^{\,y}\big(N_{n,m} \cdot S(T)\big)^2 + \mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n^c(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2 \\
&\leq e^{4m\delta}\lim_{k\to\infty}\sup_{\Pi'\in\tilde{\mathcal{A}}_k^m(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi'}(T) \cdot S(T)\big)^2 + \mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n^c(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Zauważmy, że (4.19) zależy od n tylko poprzez zbiór $A_n(\delta,\epsilon)$. Weźmy $\delta = \epsilon$ dążące do zera. Wtedy

$$e^{4m\delta}\lim_{k\to\infty}\sup_{\Pi'\in\tilde{\mathcal{A}}_k^m(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi'}(T) \cdot S(T)\big)^2 \to \lim_{k\to\infty}\sup_{\Pi'\in\tilde{\mathcal{A}}_k^m(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi'}(T) \cdot S(T)\big)^2$$

oraz

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(1_{A_n^c(\delta,\epsilon)}N_m \cdot S(T)\big)^2 \to 0$$

na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej, gdyż z lematu 4.20 wynika, że $N_m \cdot S(T)$ jest całkowalne z kwadratem. ∎

Zdefiniujmy

$$W(m,y) = \sup_{\Pi\in\tilde{\mathcal{A}}^m(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2, \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in E.$$

Dla dowolnej strategii $\Pi \in \tilde{\mathcal{A}}^m(y)$, $y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E$, na mocy lematów 4.25 i 4.21

$$\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \leq \lim_{n\to\infty}\sup_{\Pi'\in\tilde{\mathcal{A}}_n^m(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi'}(T) \cdot S(T)\big)^2 \leq (\eta_0 \cdot s_0)^2\, e^{2\beta T}.$$

Zatem ciąg $\big(W(m,y)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony przez $(\eta_0 \cdot s_0)^2\, e^{2\beta T}$ dla $y = (\eta_0, s_0, x_0) \in E$. Ponadto jest niemalejący względem m i zbiega do

$$\sup_{\Pi\in\mathcal{A}(y)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2.$$

∎

Twierdzenie 4.18 lub dokładniej wniosek 4.19 pozwala nam znaleźć warunki dostateczne, by założenia NFL, NFL1 i NFL2 były spełnione. Niech więc MLT zachodzi ze stałą β, uniwersalną dla $T > 0$. Wtedy dla $T > 0$, $z = (\eta_0, s_0, x_0) \in E$, $\Pi \in \mathcal{A}(z)$

$$\mathbb{E}^{\,y}N^{\Pi}(T) \cdot S(T) \leq 1 + \mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \leq 1 + (\eta_0 \cdot s_0)^2 e^{2\beta T}, \qquad (4.20)$$

czyli założenie NFL jest spełnione. Aby wykazać NFL1 weźmy $\epsilon = 1$, $z = (\eta_0, s_0, x_0) \in B \subseteq E$ – kula i zauważmy

$$\sup_{\Pi\in\mathcal{A}(z)}\mathbb{E}^{\,y}\big(N^{\Pi}(T) \cdot S(T)\big)^2 \leq (\eta_0 \cdot s_0)^2 e^{2\beta t}. \qquad (4.21)$$

Pokazaliśmy, że NFL1 jest zachodzi ze stałą $\eta = 2\beta$.

Jedynie przypadek NFL2 nie jest oczywisty. Załóżmy, podobnie jak w twierdzeniu 4.16, że F spełnia założenie AF:

$$0 \leq F(\eta, s, x) \leq A + B(\eta \cdot s), \quad (\eta, s, x) \in E,$$

dla pewnych stałych $A, B \in \mathbb{R}_+$. Na mocy (4.20) i (4.21), $z = (\eta_0, s_0, x_0) \in E$

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} F\big(Y^\Pi(t)\big)^2 dt \\
&\leq \sup_{\Pi \in \mathcal{A}(z)} \mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \Big(A^2 + 2ABN^\Pi(t) \cdot S(t) + B^2 \big(N^\Pi(t) \cdot S(t)\big)^2\Big) dt \\
&= \frac{A^2}{\alpha} + 2AB\,\mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} N^\Pi(t) \cdot S(t) dt + B^2\,\mathbb{E}^{\,y} \int_0^\infty e^{-\alpha t} \big(N^\Pi(t) \cdot S(t)\big)^2 dt \\
&\leq \frac{A^2}{\alpha} + 2AB\Big(\frac{1}{\alpha} + (\eta_0 \cdot s_0)^2 \int_0^\infty e^{-\alpha t + 2\beta t} dt\Big) + B^2 (\eta_0 \cdot s_0)^2 \int_0^\infty e^{-\alpha t + 2\beta t} dt.
\end{aligned}
$$

Przyjmując $\alpha > 2\beta$, dostajemy górne ograniczenie zależne tylko od $(\eta_0 \cdot s_0)^2$, czyli od kwadratu bogactwa początkowego. Jest ono ograniczone na dowolnym zbiorze zwartym zawartym w E, co dowodzi założenia NFL2.

Jak wspomnieliśmy na początku tego przykładu, model dyfuzyjny rozpatrywany wcześniej spełnia założenie MLT ze stałą β identyczną do tej z lematu 4.15. Tutaj udowodniliśmy istnienie strategii optymalnej dla F spełniającego założenie AF i czynnika dyskonta $\alpha > 2\beta$. Natomiast w twierdzeniu 4.16 dowodzimy tej samej tezy, ale przy słabszych założeniach: $\alpha > \beta$. Udało nam się zatem dowieść ogólniejszego rezultatu ale kosztem gorszego oszacowania na czynnik dyskonta.

Bibliografia

[1] Bensoussan, A., Lions, J. L., Contrôl Impulsionnel Inéquations Quasi-Variationnelles, 1982, Dunod, Paris

[2] Bensoussan, A., Lions, J. L., *Nouvelles Methodes en Contrôle Impulsionnel*, Applied Mathematics and Optimization 1, 1975, 289-312

[3] Bichteler, K., Stochastic integration with jumps, 2002, Cambridge University Press, Cambridge

[4] Bielecki, T.R., Pliska, S.R., Sherris, M., *Risk sensitive asset allocation*, J. Economic Dynamics and Control 24, 2000, 1145-1177

[5] Cvitanić, J., Shreve, S.E., Soner H.M., *There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs*, 1995, Annals of Applied Probability 5/2, 327-355

[6] Davis, M.H.A., Markov Models and Optimization, 1993, Chapman & Hall, London

[7] Delbaen, F., Schachermayer, W., *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen 300, 1994, 463-520

[8] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear operators, Interscience Publishers, 1958

[9] Dynkin, E. B., Markov processes, 1965, Springer

[10] Eastham J.F., Hastings, K.J., *Optimal impulse control of portfolios*, Mathematics of Operation Research 13, 4, 1988, 588 – 605

[11] He, S., Wang, J., Yan, J., Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press and CRC Press Inc., 1992

[12] Jouini, E., Napp, C., *Arbitrage and investment opportunities*, Stochastics, 2001

[13] Jouini, E., Napp, C., Schachermayer, W., *Arbitrage and state price deflators in a general intertemporal framework*, ukaże się w Journal of Mathematical Economics

[14] Karatzas, I., Shreve, S. E., Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1991

[15] Karatzas, I., Shreve, S. E., Methods of Mathematical Finance, Springer-Verlag, 1998

[16] Korn, R, *Portfolio optimization with strictly positive transaction cost and impulse control*, Finanace and Stochastics 2, 1998, 85 – 114

[17] Mackevicius, V., *Passing to the limit in the optimal stopping problems of Markov processes*, ibidem 13.1, 1973, 115 – 128

[18] Markowitz, H.M., *Portfolio Selection*, 1952, Journal of Finance 7 (1), 77-91

[19] Merton, R.C., *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, J. of Economical Theory 3, 373-413

[20] Napp, C., *Pricing issues with investment flows. Applications to market models with frictions*, J. of Mathematical Economics 35, 2001, 383-408

[21] Palczewski, J., *Arbitrage and pricing in a general model with flows*, 2003, Applicationes Mathematicae 30, 413-429

[22] Palczewski, J., Stettner, Ł., *Impulsive control of portfolios*, złożone do Applied Mathematics and Optimisation

[23] Palczewski, J., Zabczyk, J., *Portfolio diversification with Markovian prices*, 2004, Preprint IM-PAN 649

[24] Pliska, S. R., Suzuki, K., *Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs*, Quantitative Finance, 2004, vol. 4, no. 2, 233-243

[25] Robin, M., *Contrôle Impulsionnel des processus de Markov*, praca habilitacyjna, Univérsité de Paris IX, 1978

[26] Rogers, L. C. G., Williams D., Diffusions, Markov processes and martingales, 2000, Cambridge University Press

[27] Schäl, M., *A selection theorem for optimization problems*, Archiv der Mathematik 25, 1974, 219-224

[28] Schwartz, L., *Fonctions mesurables et *-scalairement mesurables, mesures banachiques majorees, martingales banachiques, et propriete de Radon-Nikodym*, Exposés 4, 5 et 6, Seminaire Maurey-Schwartz, Ecole Polytechnique, 1974-1975

[29] Stettner, Ł., *On impulsive control with long run average cost criterion*, Studia Math., 1983, vol. 76, 279-298

[30] Stettner, Ł., *On some stopping and impulsive control problems with a general discount rate criteria*, Probability and Mathematical Statistics 10, 2, 1989, 223 – 245

[31] Stricker, Ch., *Arbitrage et lois de martingale*, Ann. Inst. Henri Poincaré 26, no. 3, 1990, 451-460

[32] Yosida, K., Functional analysis, Springer-Verlag, 1966

[33] Zabczyk, J., *Stopping problems in stochastic control*, Proceedings of International Congress of Mathematicians, 1983, 1425-1437