Ejercicios de refuerzo (no evaluables)

Lógica

1. Halla el valor de verdad de las fórmulas lógicas siguientes:

   a) $p \to p$.
   b) $p \to \neg p$.
   c) $p \leftrightarrow p$.
   d) $p \leftrightarrow \neg p$.
   e) $\neg(p \to q)$.
   f) $p \to (p \wedge q)$.
   g) $p \to (p \vee q)$.
   h) $(p \wedge q) \to p$.
   i) $(p \vee q) \to p$.
   j) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$.
   k) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$.
   l) $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$.
   m) $(p \to q) \to (q \to p)$.
   n) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$.

2. Expresa en lenguaje de primer orden los enunciados siguientes y razona sobre su veracidad o falsedad.

   a) Todo número entero es natural.
   b) Existe algún número natural par.
   c) Existe un valor real tal que, para todo número real, el producto de ambos es siempre igual al primero.
   d) No es cierto que para todo número natural, existe otro número natural que es mayor que él.

3. Expresa en lenguaje formal los pares de enunciados siguientes y razona acerca de su veracidad, comparando los resultados obtenidos.

   a)
   - Para todo número entero, existe otro entero tal que su suma es positiva.
   - Existe un entero tal que para todo número entero, la suma de ambos es positiva.

b)
- Toda función real es continua, o bien toda función real es discontinua.
- Toda función real es continua o bien discontinua.

c)
- Existe algún número natural que es par y existe algún número natural que es impar.
- Existe algún número natural tal que es par e impar.

Álgebra

1. Obténganse las normas 1, 2 e ∞ de los siguientes vectores:

   a) $v_1 = (1, 0, 2)$.
   b) $v_2 = (-6, 5)$.
   c) $v_3 = (\sqrt{2}, -1, 0, 1)$.

2. Calcúlese $u \cdot v$ en cada caso y determínese en cada caso si u y v son perpendiculares.

   a) $u = (0, -1, 2)$, $v = (1, 0, 0)$.
   b) $u = (-3, 1, 4)$, $v = (1, 4, -2)$.
   c) $u = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $v = (-\sqrt{2}, 2, -3)$.

3. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si u es perpendicular a w y v es perpendicular a w, entonces $u + v$ también es perpendicular a w.

4. Realícense las siguientes operaciones matriciales:

   a)
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   b)
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   c)
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices cuadradas tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$. Obtén razonadamente el valor de $\det(12A^2B)$.

Cálculo

1. Calcúlese el dominio de definición de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = x^2 + 1$.
   b) $f(x) = \sqrt{x-1}$.
   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   e) $f(x) = \log(1-x^2)$.
   f) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

2. Obténgase el valor del límite en cada caso:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) + e^x$.
   b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \log(1-x)$.
   c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, donde
   $$f(x) = \begin{cases} \sin\big(\pi(x-3)\big) & x < 3 \\ -2 & x = 3 \\ e^{x-3} - 1 & x > 3 \end{cases}$$
   d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, donde
   $$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3-x & x > 0 \end{cases}$$
   e) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, donde f es la función del apartado anterior.
   f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$.
   g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}$.

3. Determínese si las siguientes funciones son o no continuas en los puntos indicados.

   a) En $x = 0$ para
   $$f(x) = \begin{cases} 2e^{\sin(x)} + 1 & x < 0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$$

b) En $x = 1$ para

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 + 2 & x > 1 \end{cases}$$

c) En $x = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4. Obténgase la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 4$.

b) $f(x) = x \ln(x)$.

c) $f(x) = x^2 \sin(x)$.

d) $f(x) = -2x^3 \cos(x) \ln(x)$.

e) $f(x) = e^{x^2+1}$.

f) $f(x) = \ln(\ln(x))$.

g) $f(x) = \sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 2}$.

h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{1 + x^2}$.

i) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

j) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$.

5. Obténgase el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - 1}{\ln(x)}$.

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2) + e^x - 1}{x^2 \cos(x)}$.

6. Determínese la expresión general asociada a las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int (x^2 - 4x - 1)\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int x\cos(x)\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x.$

7. Calcúlese el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} (4x^3 - 6x^2 + 1)\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

c) $\displaystyle\int_{-3\pi}^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x.$

d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x.$

Probabilidad

1. Calcúlese la probabilidad de obtener alguna cruz tras lanzar 5 monedas.

2. Sea $\Omega = \{00, 01, 02, 03, \ldots, 98, 99\}$ espacio muestral, correspondiente a una urna con bolas numeradas del 00 al 99, A el suceso "obtener un número múltiplo de 7" y B el suceso "obtener un número cuya suma de sus cifras es múltiplo de 5". Obténganse las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$.

b) $P(B)$.

c) $P(A \cap B)$.

d) $P(A \cup B)$.

e) $P(A|B)$.

f) $P(B|A)$.

3. Se propone el siguiente juego: se lanzan un dado y una moneda, ganándose éste si sale un 6 en el dado y una cara en la moneda, mientras que en caso contrario se pierde. Si la apuesta es de 10 euros por jugada y el premio por ganar son 100 euros más la devolución de los 10 euros apostados, obténganse los beneficios esperados por jugada.

4. Calcúlese la varianza asociada al problema anterior.

5. Un experimento tiene una probabilidad de fracaso de un $10\,\%$. ¿Cuál es la probabilidad de fracasar menos de 3 veces tras realizar el experimento 25 veces?

6. La probabilidad de obtener un determinado producto defectuoso en una cadena de montaje es de un $0.005\,\%$. Estímese la probabilidad de obtener más de 2 productos defectuosos tras producir un total de 50000 unidades.

7. Se dispone de una moneda trucada, de tal forma que la probabilidad de obtener cara es de un $60\,\%$ y la de obtener cruz un $40\,\%$. Estímese la probabilidad de que tras lanzar la moneda 2000 veces se obtengan más de 850 cruces.