



Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa  
Escuela Profesional de Ingeniería Electrónica

Sistema de Control Avanzado

---

## Trabajo de investigación formativa, Dos tanques acoplados Quanser

---

### Alumnos

Panta Condori, Juan Diego      20222833  
Pilco Huaracha, Jhon Smit      20212789

**Profesor:** Dr. Juan C. Cutipa Luque

05 de Noviembre de 2025

## Resumen

Este informe detalla el modelado, diseño y simulación de tres estrategias de control no lineal avanzadas aplicadas al sistema de tanques acoplados Quanser. El sistema, caracterizado por su dinámica no lineal (debido a la ley de Torricelli) y acoplamiento entre estados, sirve como un banco de pruebas estándar para el control de procesos. Se diseñan y comparan tres controladores para el seguimiento de nivel en el segundo tanque: (1) un controlador por retroceso (Backstepping) basado en un modelo exacto, (2) un controlador Backstepping Adaptativo para compensar la incertidumbre paramétrica en la ganancia de la bomba, y (3) un controlador por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC) para asegurar robustez y eliminación de error en estado estacionario. Las simulaciones en MATLAB/Simulink validan la eficacia de cada controlador, comparando su rendimiento de seguimiento, esfuerzo de control y robustez.

### Resumen

This report details the modeling, design, and simulation of three advanced nonlinear control strategies applied to the Quanser coupled-tanks system. The system, characterized by its nonlinear dynamics (due to Torricelli's law) and state coupling, serves as a standard benchmark for process control. Three controllers are designed and compared for level tracking in the second tank: (1) a Backstepping controller based on an exact model, (2) an Adaptive Backstepping controller to compensate for parametric uncertainty in the pump gain, and (3) an Integrative Sliding Mode Controller (ISMC) to ensure robustness and steady-state error elimination. Simulations in MATLAB/Simulink validate the efficacy of each controller, comparing their tracking performance, control effort, and robustness.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Objetivos</b>	<b>4</b>
2.1. Objetivos Específicos . . . . .	4
<b>3. Fundamento Teórico</b>	<b>5</b>
3.1. Modelado de Tanques Acoplados . . . . .	5
3.2. Control por Retroceso (Backstepping) . . . . .	5
3.3. Backstepping Adaptativo . . . . .	5
3.4. Control por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC) . . . . .	6
<b>4. Desarrollo y Diseño de Controladores</b>	<b>7</b>
4.1. Modelo del Sistema: Tanques Acoplados Quanser . . . . .	7
4.2. Parámetros y Simulación en Lazo Abierto . . . . .	8
4.2.1. Parámetros del Sistema . . . . .	8
4.2.2. Puntos de Equilibrio . . . . .	8
4.2.3. Simulación Lazo Abierto . . . . .	8
4.3. Diseño del Controlador Backstepping . . . . .	8
4.4. Diseño del Controlador Backstepping Adaptativo . . . . .	10
4.5. Diseño del Controlador por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC) . . . . .	11
<b>5. Resultados y Discusión</b>	<b>13</b>
5.1. Simulación en Lazo Abierto . . . . .	13
5.2. Resultados: Controlador Backstepping . . . . .	13
5.3. Resultados: Controlador Backstepping Adaptativo . . . . .	14
5.4. Resultados: Controlador ISMC . . . . .	15
5.5. Discusión Comparativa . . . . .	15
<b>6. Conclusiones</b>	<b>17</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>18</b>
<b>A. Anexos: Diagramas de Simulación y Código</b>	<b>19</b>
A.1. Planta en Lazo Abierto . . . . .	19
A.2. Implementación del Controlador Backstepping . . . . .	20
A.3. Implementación del Controlador Backstepping Adaptativo . . . . .	21
A.4. Implementación del Controlador ISMC . . . . .	22
A.5. Enlace para el repositorio Github . . . . .	22

## 1. Introducción

El control de sistemas no lineales es un pilar fundamental en la ingeniería moderna, dado que la gran mayoría de los procesos físicos reales, desde reactores químicos hasta sistemas robóticos y biológicos, exhiben comportamientos no lineales. A diferencia de los sistemas lineales, cuya teoría de control está completamente madura, los sistemas no lineales presentan desafíos únicos como la presencia de múltiples puntos de equilibrio, bifurcaciones y dinámicas caóticas.

Un problema de referencia clásico en el control de procesos es la regulación de nivel de líquido en tanques acoplados. Este sistema captura la esencia de muchos desafíos industriales: es intrínsecamente no lineal (debido a la raíz cuadrada de la altura en el flujo de salida, según la ley de Torricelli), presenta acoplamiento entre sus estados (el nivel de un tanque afecta directamente al otro) y está sujeto a incertidumbres paramétricas (como la eficiencia de la bomba o el diámetro exacto de los orificios).

El control lineal tradicional (ej. PID) puede ser sintonizado para operar eficientemente alrededor de un punto de operación específico, pero su rendimiento se degrada significativamente cuando el sistema se aleja de dicho punto. Para superar estas limitaciones, se han desarrollado técnicas de control no lineal avanzadas. Este informe se centra en la aplicación y comparación de tres de estas técnicas:

- 1) Control por Retroceso (Backstepping):** Es un método recursivo y sistemático para diseñar controladores estabilizadores para sistemas no lineales en forma de "retroalimentación estricta" (strict-feedback). Su fortaleza radica en la construcción de una función de Lyapunov paso a paso, garantizando la estabilidad global [1].
- 2) Backstepping Adaptativo:** Una extensión del Backstepping que permite manejar incertidumbres paramétricas. Cuando constantes del modelo (ej. coeficientes de flujo, ganancias) son desconocidas, este método diseña una "ley de adaptación" que estima el parámetro en línea, asegurando la estabilidad y el seguimiento a pesar de la incertidumbre [6].
- 3) Control por Modos Deslizantes (SMC):** Es una estrategia de control robusto que altera la dinámica del sistema mediante una conmutación de alta frecuencia. Su principal ventaja es la invarianza a un cierto tipo de incertidumbres y perturbaciones (aquellas que cumplen la condición de emparejamiento"). Al añadir una acción integral (ISMC), se garantiza además la eliminación del error en estado estacionario [2, 5].

Este trabajo de investigación formativa tiene como propósito modelar el sistema de tanques acoplados Quanser, diseñar estos tres controladores no lineales con el objetivo de regular el nivel del segundo tanque, y evaluar comparativamente su desempeño mediante simulación en Simulink.

## 2. Objetivos

Al finalizar el presente informe, nosotros los alumnos seremos capaces de modelar un sistema no lineal (Tanques Acoplados Quanser), y diseñar, simular e implementar controladores no lineales avanzados (Backstepping, Modos Deslizantes Integrativo y Adaptativo MRAC). El objetivo es aplicar estas técnicas para controlar el nivel del sistema, evaluando su desempeño y robustez frente a las especificaciones de diseño, incertidumbres en el modelo y disturbios externos.

### 2.1. Objetivos Específicos

Para alcanzar el objetivo general, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- 1) Obtener y verificar el modelo matemático no lineal del sistema de tanques acoplados Quanser, identificando los parámetros nominales y las dinámicas fundamentales del proceso.
- 2) Diseñar un controlador por **Retroceso (Backstepping)** basado en el modelo nominal, capaz de garantizar la estabilidad asintótica y el seguimiento preciso de la referencia de nivel en el segundo tanque.
- 3) Diseñar un controlador por **Backstepping Adaptativo** que compense la incertidumbre en un parámetro clave del sistema (la ganancia de la bomba,  $k_1$ ), desarrollando la ley de control y la ley de adaptación correspondientes.
- 4) Diseñar un controlador por **Modos Deslizantes Integrativo (ISMC)** para el sistema, asegurando robustez ante incertidumbres y la eliminación del error de seguimiento en estado estacionario mediante la acción integral en la superficie de deslizamiento.
- 5) Implementar los tres controladores diseñados en el entorno de simulación MATLAB/Simulink, utilizando el modelo no lineal de la planta.
- 6) Realizar un análisis comparativo del desempeño de los tres controladores, evaluando métricas clave como el tiempo de establecimiento, el sobreimpulso, el error en estado estacionario, la robustez frente a la incertidumbre paramétrica (en el caso adaptativo) y la naturaleza del esfuerzo de control (ej. presencia de *chattering*).
- 7) Discutir las ventajas, desventajas y la complejidad de implementación de cada técnica de control en el contexto del sistema de tanques acoplados.

### 3. Fundamento Teórico

#### 3.1. Modelado de Tanques Acoplados

El modelo dinámico del sistema de tanques acoplados se basa en dos principios físicos:

- Balance de Masa:** El cambio en el volumen de líquido en un tanque es igual al flujo de entrada menos el flujo de salida. Para un tanque con área de sección transversal constante  $A_t$  y nivel  $L$ , el volumen es  $V = A_t L$ . La tasa de cambio del volumen es  $\dot{V} = A_t \dot{L}$ . Por lo tanto:

$$A_t \frac{dL}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (1)$$

- Ley de Torricelli:** El flujo de salida  $Q_{out}$  a través de un orificio de área  $A_o$  en el fondo de un tanque con nivel  $L$  es proporcional a la raíz cuadrada del nivel. Esto se deriva de la ecuación de Bernoulli:

$$Q_{out} = A_o \sqrt{2gL} \quad (2)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad.

La combinación de estos principios en los dos tanques acoplados da lugar al sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que se desarrolla en la Sección 5.

#### 3.2. Control por Retroceso (Backstepping)

El Backstepping es un método de diseño recursivo para sistemas no lineales que pueden ser representados en la forma de *retroalimentación estricta* [1]. Considere un sistema de segundo orden:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \quad (4)$$

El diseño procede en dos pasos:

**Paso 1:** Se considera  $x_2$  como un "control virtual" para el subsistema  $\dot{x}_1$ . Se define el primer error  $z_1 = x_1 - x_{1d}$  (donde  $x_{1d}$  es la referencia) y una función de Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ . Se diseña una función estabilizadora (el control virtual deseado)  $\alpha_1(x_1)$  tal que  $\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1(f_1 + g_1 \alpha_1) = -c_1 z_1^2$ .

**Paso 2:** Se define el segundo error  $z_2 = x_2 - \alpha_1$ , que mide la discrepancia entre el control virtual real y el deseado. Se define la función de Lyapunov aumentada  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$ . Se calcula su derivada  $\dot{V}_2$  y se diseña el control real  $u$  para hacer que  $\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2$ , garantizando la estabilidad asintótica de ambos errores.

#### 3.3. Backstepping Adaptativo

Este método extiende el Backstepping a sistemas con incertidumbres paramétricas [6]. Suponga que la dinámica del sistema es:

$$\dot{x} = \theta f(x) + g(x)u \quad (5)$$

donde  $\theta$  es un parámetro constante pero desconocido. El controlador utiliza una estimación  $\hat{\theta}$ :

$$u = \frac{1}{g(x)}(-\hat{\theta}f(x) - c_1x) \quad (6)$$

Esto resulta en  $\dot{x} = -c_1x + (\theta - \hat{\theta})f(x) = -c_1x + \tilde{\theta}f(x)$ , donde  $\tilde{\theta}$  es el error de estimación.

Para asegurar la estabilidad, se usa una función de Lyapunov aumentada que incluye el error de estimación:

$$V(x, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 \quad (7)$$

donde  $\gamma > 0$  es la "ganancia de adaptación". La derivada es:

$$\dot{V} = x\dot{x} + \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = x(-c_1x + \tilde{\theta}f(x)) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \quad (8)$$

$$\dot{V} = -c_1x^2 + \tilde{\theta} \left( xf(x) - \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}} \right) \quad (9)$$

Para hacer  $\dot{V} \leq 0$ , se escoge la **ley de adaptación** para anular el término en paréntesis:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma xf(x) \quad (10)$$

Esto resulta en  $\dot{V} = -c_1x^2$ , garantizando que  $x \rightarrow 0$  y que  $\tilde{\theta}$  (y por tanto  $\hat{\theta}$ ) permanece acotado.

### 3.4. Control por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC)

El SMC es una técnica de control no lineal robusta que fuerza las trayectorias del sistema a converger y permanecer en una "superficie deslizante"  $s(x) = 0$  definida por el diseñador [2].

**1. Superficie Deslizante:** Para un problema de seguimiento de  $x$  a  $x_d$ , el error es  $e = x - x_d$ . Una superficie deslizante PID (como la usada en este laboratorio [5]) se define como:

$$s(t) = \dot{e}(t) + \lambda_1 e(t) + \lambda_2 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (11)$$

Cuando el sistema está en la superficie ( $s = 0$ ), la dinámica del error obedece a  $\dot{e} + \lambda_1 e + \lambda_2 \int e = 0$ , lo cual, derivando, da  $\ddot{e} + \lambda_1 \dot{e} + \lambda_2 e = 0$ . Si  $\lambda_1, \lambda_2$  se eligen para que este polinomio sea Hurwitz, entonces  $e \rightarrow 0$  asintóticamente, eliminando el error en estado estacionario.

**2. Ley de Control:** El control  $u$  se diseña en dos partes:  $u = u_{eq} + u_{sw}$ .

- $u_{eq}$  (Control Equivalente): Es el control necesario para mantener  $\dot{s} = 0$ , asumiendo un modelo perfecto.
- $u_{sw}$  (Control de Comutación): Es el término robusto que asegura que la superficie sea alcanzada a pesar de las incertidumbres.

$$u_{sw} = -K \cdot \text{sgn}(s) \quad (12)$$

donde  $K$  es una ganancia robusta.

**3. Chattering:** La comutación de  $\text{sgn}(s)$  causa oscilaciones de alta frecuencia (chattering). Para evitarlo, se reemplaza  $\text{sgn}(s)$  por una función de saturación  $\text{sat}(s/\Phi)$ , creando una "capa límite" de ancho  $\Phi$  alrededor de la superficie.

## 4. Desarrollo y Diseño de Controladores

### 4.1. Modelo del Sistema: Tanques Acoplados Quanser

El modelo se deriva del principio de balance de masa  $A_t \frac{dL}{dt} = F_{in} - F_{out}$ , aplicado a cada tanque. La entrada al sistema es el voltaje de la bomba  $V_p$ , que produce un flujo de entrada  $Q_{in,1} = K_p V_p$ .

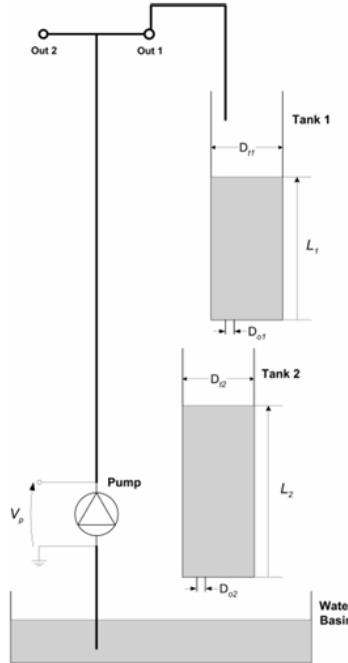


Figura 1: Diagrama de los tanques acoplados Quanser.

Para el Tanque 1 ( $L_1$ ):

$$A_{t1} \dot{L}_1 = Q_{in,1} - Q_{out,1} = K_p V_p - A_{o1} \sqrt{2gL_1} \quad (13)$$

Dividiendo por  $A_{t1}$ :

$$\dot{L}_1 = \left( \frac{K_p}{A_{t1}} \right) V_p - \left( \frac{A_{o1} \sqrt{2g}}{A_{t1}} \right) \sqrt{L_1} \quad (14)$$

Para el Tanque 2 ( $L_2$ ):

$$A_{t2} \dot{L}_2 = Q_{in,2} - Q_{out,2} = A_{o1} \sqrt{2gL_1} - A_{o2} \sqrt{2gL_2} \quad (15)$$

Dividiendo por  $A_{t2}$ :

$$\dot{L}_2 = \left( \frac{A_{o1} \sqrt{2g}}{A_{t2}} \right) \sqrt{L_1} - \left( \frac{A_{o2} \sqrt{2g}}{A_{t2}} \right) \sqrt{L_2} \quad (16)$$

**Modelo No Lineal de Estados:** Definiendo los estados  $x_1 = L_1$ ,  $x_2 = L_2$ , la entrada  $u = V_p$ , y las constantes  $k_i$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_1 u - k_2 \sqrt{x_1} \\ \dot{x}_2 &= k_3 \sqrt{x_1} - k_4 \sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (17)$$

Donde:  $k_1 = \frac{K_p}{A_{t1}}$ ,  $k_2 = \frac{A_{o1} \sqrt{2g}}{A_{t1}}$ ,  $k_3 = \frac{A_{o1} \sqrt{2g}}{A_{t2}}$ ,  $k_4 = \frac{A_{o2} \sqrt{2g}}{A_{t2}}$ .

## 4.2. Parámetros y Simulación en Lazo Abierto

### 4.2.1. Parámetros del Sistema

Los parámetros físicos del sistema Quanser [3] se resumen en la Tabla 1.

Cuadro 1: Parámetros Nominales del Sistema Quanser.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Área Tanque 1/2	$A_{t1}, A_{t2}$	32.17	$\text{cm}^2$
Área Orificio 1/2	$A_{o1}, A_{o2}$	0.1963	$\text{cm}^2$
Ganancia Bomba	$K_p$	10.0	$\text{cm}^3/\text{Vs}$
Gravedad	$g$	981	$\text{cm}/\text{s}^2$
Constante $k_1$	$k_1$	0.311	$\text{cm}/(\text{Vs})$
Constante $k_2$	$k_2$	2.716	$\text{cm}^{0.5}/\text{s}$
Constante $k_3$	$k_3$	2.716	$\text{cm}^{0.5}/\text{s}$
Constante $k_4$	$k_4$	2.716	$\text{cm}^{0.5}/\text{s}$

### 4.2.2. Puntos de Equilibrio

Se procede a encontrar los puntos de equilibrio teóricos y experimentales. Para un voltaje de entrada constante  $u = V_p$ , el sistema alcanza el equilibrio cuando  $\dot{x}_1 = 0$  y  $\dot{x}_2 = 0$ .

De (17), el equilibrio teórico es:

$$0 = k_1 u - k_2 \sqrt{x_{1,eq}} \implies x_{1,eq} = \left( \frac{k_1 u}{k_2} \right)^2 \quad (18)$$

$$0 = k_3 \sqrt{x_{1,eq}} - k_4 \sqrt{x_{2,eq}} \implies x_{2,eq} = \left( \frac{k_3 \sqrt{x_{1,eq}}}{k_4} \right)^2 \quad (19)$$

Sustituyendo  $x_{1,eq}$ :

$$x_{2,eq} = \left( \frac{k_3}{k_4} \cdot \frac{k_1 u}{k_2} \right)^2 \quad (20)$$

Como  $k_2 = k_3 = k_4$  (para este modelo), la ecuación se simplifica a  $x_{2,eq} = (k_1 u / k_2)^2 = x_{1,eq}$ . Esto es esperado, ya que los tanques y orificios son idénticos.

### 4.2.3. Simulación Lazo Abierto

Se realiza una simulación en lazo abierto (ver Anexo A, Fig. 7 y 6) para  $u = 13,44$  V. Los resultados se ven en la Sección 5.1.

## 4.3. Diseño del Controlador Backstepping

El objetivo es controlar  $x_2 = L_2$  para que siga una referencia  $x_{2d}$ . El diseño sigue la metodología de la Sección 4.2, pero aplicada al sistema de tanques, que no está en forma de retroalimentación estricta. Se debe redefinir el estado.

El objetivo es controlar  $x_2$ . La entrada  $u$  afecta a  $\dot{x}_1$ , y  $x_1$  afecta a  $\dot{x}_2$ . Se trata a  $x_1$  ( $\sqrt{x_1}$ ) como control virtual.

**Paso 1: Control Virtual** Se define el primer error  $z_1 = x_2 - x_{2d}$  y la función de Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$ . Asumimos  $x_{2d}$  constante ( $\dot{x}_{2d} = 0$ ). Su derivada es:

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 (\dot{x}_2) = z_1 (k_3 \sqrt{x_1} - k_4 \sqrt{x_2}) \quad (21)$$

Se trata a  $\sqrt{x_1}$  como control virtual y se define su función estabilizadora  $\alpha_1$  para que  $\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2$  (con  $c_1 > 0$ ):

$$k_3 \alpha_1 - k_4 \sqrt{x_2} = -c_1 z_1 \quad (22)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{k_3} (k_4 \sqrt{x_2} - c_1 z_1) \quad (23)$$

**Paso 2: Sistema Completo y Control Real** Se define el segundo error  $z_2 = \sqrt{x_1} - \alpha_1$ . La dinámica de  $z_1$  (sustituyendo  $\sqrt{x_1} = z_2 + \alpha_1$ ) se vuelve:

$$\dot{z}_1 = k_3(z_2 + \alpha_1) - k_4 \sqrt{x_2} = k_3 z_2 + (k_3 \alpha_1 - k_4 \sqrt{x_2}) = -c_1 z_1 + k_3 z_2 \quad (24)$$

La función de Lyapunov aumentada es  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$ . Su derivada es:

$$\dot{V}_2 = z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 = z_1 (-c_1 z_1 + k_3 z_2) + z_2 \dot{z}_2 = -c_1 z_1^2 + z_2 (k_3 z_1 + \dot{z}_2) \quad (25)$$

Se impone  $k_3 z_1 + \dot{z}_2 = -c_2 z_2$  (con  $c_2 > 0$ ). Se calcula  $\dot{z}_2$ :

$$\dot{z}_2 = \frac{d}{dt}(\sqrt{x_1} - \alpha_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_1 \quad (26)$$

Calculando  $\dot{\alpha}_1$  (asumiendo  $\dot{x}_{2d} = 0$ ):

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{1}{k_3} \left( \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} - c_1 \right) \dot{x}_2 \quad (27)$$

Sustituyendo  $\dot{x}_1$  y  $\dot{\alpha}_1$ :

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} (k_1 u - k_2 \sqrt{x_1}) - \frac{1}{k_3} \left( \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} - c_1 \right) (k_3 \sqrt{x_1} - k_4 \sqrt{x_2}) \quad (28)$$

La ley de control  $u$  se despeja de  $k_3 z_1 + \dot{z}_2 = -c_2 z_2 \implies \dot{z}_2 = -c_2 z_2 - k_3 z_1$ :

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} (k_1 u - k_2 \sqrt{x_1}) - \dot{\alpha}_1 = -c_2 z_2 - k_3 z_1 \quad (29)$$

$$k_1 u - k_2 \sqrt{x_1} = 2\sqrt{x_1} (-c_2 z_2 - k_3 z_1 + \dot{\alpha}_1) \quad (30)$$

$$u = \frac{1}{k_1} [k_2 \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_1} (-c_2 z_2 - k_3 z_1 + \dot{\alpha}_1)] \quad (31)$$

Sustituyendo  $\dot{\alpha}_1$  se obtiene la **ley de control Backstepping**:

$$u = \frac{2\sqrt{x_1}}{k_1} \left[ \frac{k_2}{2} - c_2 z_2 - k_3 z_1 + \frac{1}{k_3} \left( \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} - c_1 \right) (k_3 \sqrt{x_1} - k_4 \sqrt{x_2}) \right] \quad (32)$$

#### 4.4. Diseño del Controlador Backstepping Adaptativo

Se considera que el parámetro  $k_1$  es incierto o desconocido. Sea  $\theta = k_1$  el parámetro desconocido, y  $\hat{\theta} = \hat{k}_1$  su estimación. El objetivo es diseñar un control  $u$  y una ley de adaptación  $\dot{\hat{\theta}}$  que estabilicen el sistema.

La derivación sigue la del Backstepping no adaptativo hasta el último paso, donde se despeja  $u$ .

**Función de Lyapunov Total:** Se define el error de estimación  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ . La función de Lyapunov es:

$$V_{adapt} = V_2 + \frac{1}{2\gamma}\tilde{\theta}^2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2\gamma}(\theta - \hat{\theta})^2 \quad (33)$$

donde  $\gamma > 0$  es la ganancia de adaptación.

**Derivada de Lyapunov:** Asumiendo  $\theta$  constante ( $\dot{\theta} = 0$ ),  $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ .

$$\dot{V}_{adapt} = \dot{V}_2 - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} = -c_1z_1^2 + z_2(k_3z_1 + \dot{z}_2) - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \quad (34)$$

La dinámica de  $\dot{z}_2$  ahora contiene el parámetro  $\theta$ :

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}(\theta u - k_2\sqrt{x_1}) - \dot{\alpha}_1 \quad (35)$$

Sustituyendo en  $\dot{V}_{adapt}$ :

$$\dot{V}_{adapt} = -c_1z_1^2 + z_2 \left[ k_3z_1 + \frac{\theta u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{k_2}{2} - \dot{\alpha}_1 \right] - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \quad (36)$$

Se utiliza la estimación  $\hat{\theta}$  en la ley de control y se agrupan los términos con  $\tilde{\theta}$ :

$$\dot{V}_{adapt} = -c_1z_1^2 + z_2 \left[ k_3z_1 + \frac{(\hat{\theta} + \tilde{\theta})u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{k_2}{2} - \dot{\alpha}_1 \right] - \frac{1}{\gamma}\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}} \quad (37)$$

$$\dot{V}_{adapt} = -c_1z_1^2 + z_2 \left[ k_3z_1 + \frac{\hat{\theta}u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{k_2}{2} - \dot{\alpha}_1 \right] + \tilde{\theta} \left[ \frac{z_2u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\gamma}\dot{\tilde{\theta}} \right] \quad (38)$$

Para hacer  $\dot{V}_{adapt} \leq 0$ , se diseñan  $u$  y  $\dot{\hat{\theta}}$  para anular los términos problemáticos.

**Ley de Control (Adaptativa):** Se diseña  $u$  para anular el primer corchete, imponiendo la condición de estabilidad  $k_3z_1 + \dot{z}_{2,nominal} = -c_2z_2$ :

$$k_3z_1 + \frac{\hat{\theta}u}{2\sqrt{x_1}} - \frac{k_2}{2} - \dot{\alpha}_1 = -c_2z_2 \quad (39)$$

Despejando  $u$ :

$$u = \frac{2\sqrt{x_1}}{\hat{\theta}} \left[ -c_2z_2 - k_3z_1 + \frac{k_2}{2} + \dot{\alpha}_1 \right] \quad (40)$$

Donde  $\dot{\alpha}_1$  es la misma función determinística calculada en el caso no adaptativo.

**Ley de Adaptación:** Se diseña  $\dot{\hat{\theta}}$  para anular el segundo corchete en  $\dot{V}_{adapt}$ :

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \frac{z_2 u}{2\sqrt{x_1}} \quad (41)$$

Sustituyendo (40) en (41), se obtiene una forma numéricamente estable que no divide por  $\sqrt{x_1}$  o  $\hat{\theta}$ :

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \frac{z_2}{\hat{\theta}} \left[ -c_2 z_2 - k_3 z_1 + \frac{k_2}{2} + \dot{\alpha}_1 \right] \quad (42)$$

Con este diseño, la derivada de Lyapunov se simplifica a:

$$\dot{V}_{adapt} = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (43)$$

Esto garantiza que  $z_1 \rightarrow 0$ ,  $z_2 \rightarrow 0$  y que el error de estimación  $\tilde{\theta}$  permanece acotado.

#### 4.5. Diseño del Controlador por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC)

El objetivo es controlar  $x_2 = L_2$  para que siga una referencia constante  $x_{2d}$ .

**1. Definición del Error y Superficie Deslizante** El error de seguimiento es  $e = x_2 - x_{2d}$ . La superficie deslizante ISMC [5] se define como:

$$s = \dot{e} + \lambda_1 e + \lambda_2 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (44)$$

donde  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$  son ganancias de diseño.

**2. Dinámica de la Superficie y Relativo Grado** Derivando  $s$  respecto al tiempo (y asumiendo  $\dot{x}_{2d} = \ddot{x}_{2d} = 0$ ):

$$\dot{s} = \ddot{e} + \lambda_1 \dot{e} + \lambda_2 e = \ddot{x}_2 + \lambda_1 \dot{x}_2 + \lambda_2 e \quad (45)$$

El control  $u$  no aparece en  $\dot{x}_2$ . Se necesita la segunda derivada de  $x_2$ :

$$\dot{x}_2 = k_3 \sqrt{x_1} - k_4 \sqrt{x_2} \quad (46)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{k_3}{2\sqrt{x_1}} \dot{x}_1 - \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} \dot{x}_2 \quad (47)$$

Sustituyendo  $\dot{x}_1 = k_1 u - k_2 \sqrt{x_1}$ :

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_3}{2\sqrt{x_1}} (k_1 u - k_2 \sqrt{x_1}) - \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} \dot{x}_2 \quad (48)$$

$$\ddot{x}_2 = \underbrace{\left( \frac{k_1 k_3}{2\sqrt{x_1}} \right)}_{b(x)} u + \underbrace{\left[ -\frac{k_2 k_3}{2} - \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} \dot{x}_2 \right]}_{f(x)} \quad (49)$$

El sistema tiene un relativo grado 2 de  $u$  a  $x_2$ , y  $b(x)$  es no singular mientras  $x_1 > 0$ .

**3. Ley de Control ISMC** Sustituyendo  $\ddot{x}_2$  en la dinámica de la superficie  $\dot{s}$ :

$$\dot{s} = [f(x) + b(x)u] + \lambda_1 \dot{x}_2 + \lambda_2 e \quad (50)$$

La ley de control se diseña para imponer la condición de deslizamiento  $\dot{s} = -K \cdot \text{sat}(s/\Phi)$ , donde  $K > 0$  es la ganancia robusta y  $\Phi > 0$  es el ancho de la capa límite.

$$f(x) + b(x)u + \lambda_1\dot{x}_2 + \lambda_2e = -K \cdot \text{sat}(s/\Phi) \quad (51)$$

Despejando  $u$  se obtiene el control  $u = u_{eq} + u_{sw}$ :

$$u = \frac{1}{b(x)} [-f(x) - \lambda_1\dot{x}_2 - \lambda_2e - K \cdot \text{sat}(s/\Phi)] \quad (52)$$

Sustituyendo las expresiones de  $f(x)$  y  $b(x)$ :

$$u = \left( \frac{2\sqrt{x_1}}{k_1 k_3} \right) \left[ -\left( -\frac{k_2 k_3}{2} - \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} \dot{x}_2 \right) - \lambda_1\dot{x}_2 - \lambda_2e - K \cdot \text{sat}(s/\Phi) \right] \quad (53)$$

Agrupando términos de  $\dot{x}_2$ :

$$u = \left( \frac{2\sqrt{x_1}}{k_1 k_3} \right) \left[ \frac{k_2 k_3}{2} - \left( \lambda_1 - \frac{k_4}{2\sqrt{x_2}} \right) \dot{x}_2 - \lambda_2e - K \cdot \text{sat}(s/\Phi) \right] \quad (54)$$

Esta ley de control es robusta y garantiza que  $s \rightarrow 0$  (o entre en la capa límite), lo que a su vez asegura  $e \rightarrow 0$ .

## 5. Resultados y Discusión

Se presentan los resultados de la simulación de la planta en lazo abierto y con los tres controladores diseñados. El objetivo en todos los casos de control es llevar el nivel del tanque 2 ( $x_2$ ) a una referencia  $x_{2d} = 15$  cm.

### 5.1. Simulación en Lazo Abierto

Se aplica una entrada escalón constante  $u = 13,44$  V. En la Figura 2, se observa el comportamiento natural del sistema. Los niveles  $x_1$  y  $x_2$  aumentan y se estabilizan en sus puntos de equilibrio,  $x_{1,eq} \approx 14,5$  cm y  $x_{2,eq} \approx 14,5$  cm, validando el modelo teórico.

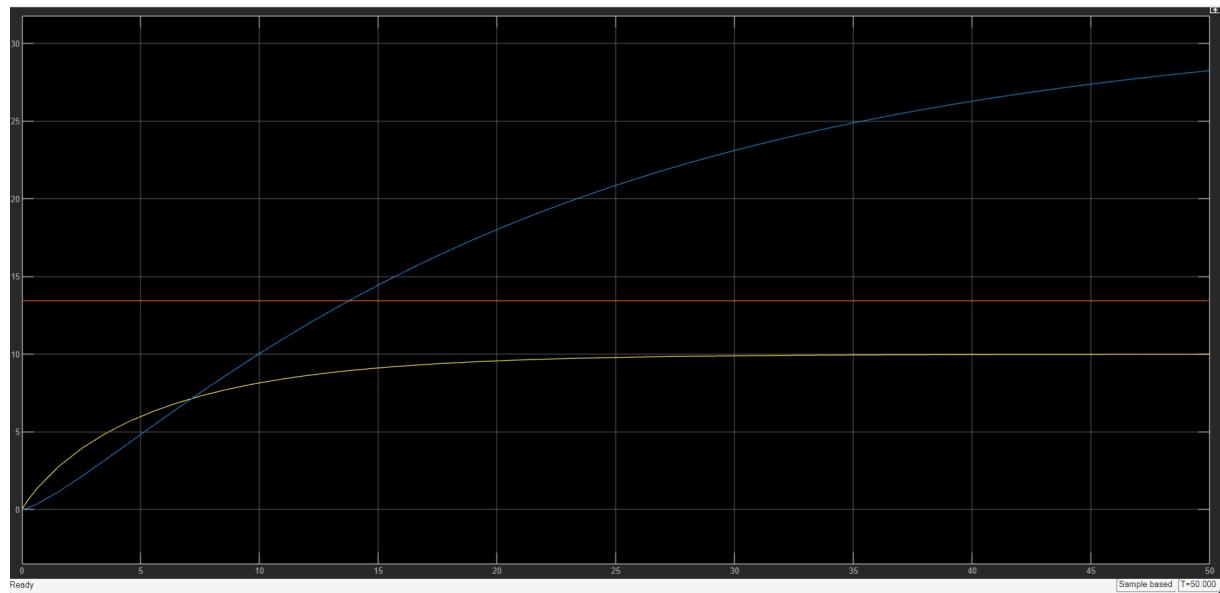


Figura 2: Respuesta en lazo abierto a una entrada de 13.44 V.

### 5.2. Resultados: Controlador Backstepping

Se implementa la ley de control de Backstepping (32) con ganancias  $c_1 = 0,5$  y  $c_2 = 1,5$ .

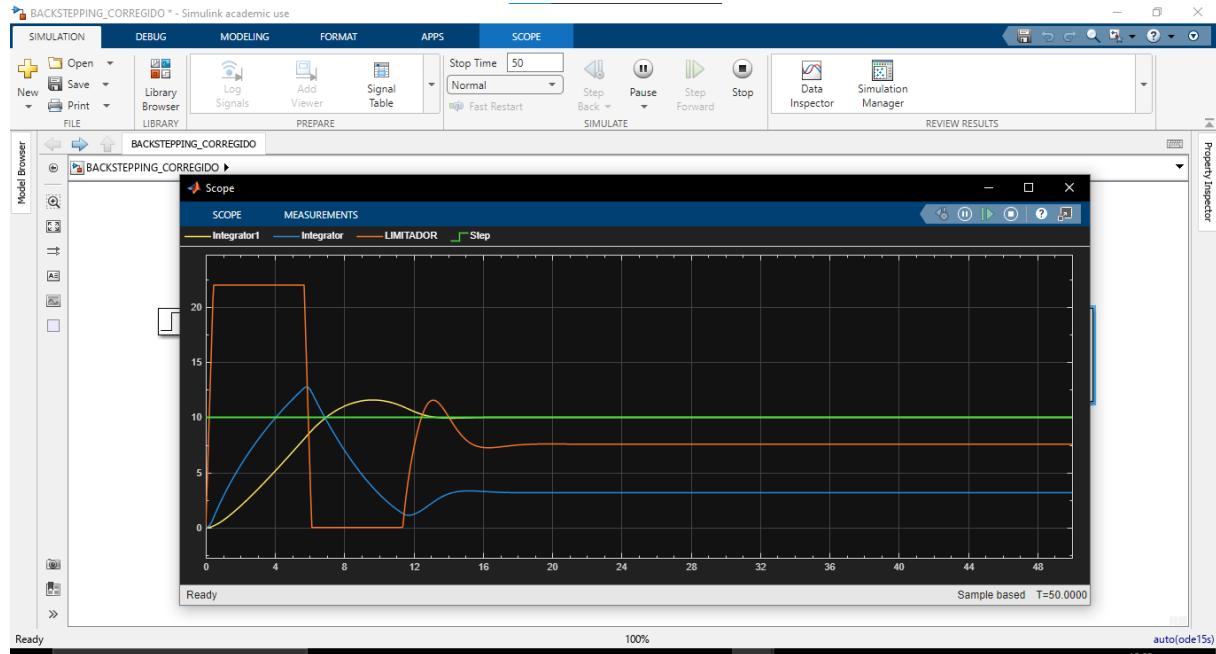


Figura 3: Respuesta del sistema con controlador Backstepping.

**Discusión:** Como se observa en la Fig. 3, el controlador lleva  $x_2$  (línea amarilla) a la referencia de 10 cm (línea amarilla) de manera suave y precisa, con cero error en estado estacionario. El nivel  $x_2$  (línea azul) se estabiliza en el valor necesario ( $\approx 4$  cm) para mantener  $x_2$  en la referencia. El esfuerzo de control (Voltaje) es suave y converge al valor de equilibrio ( $\approx 7$  V).

### 5.3. Resultados: Controlador Backstepping Adaptativo

Se simula el controlador (40)-(41) con  $c_1 = 0,5$ ,  $c_2 = 1,5$ ,  $\gamma = 0,01$ . Para probar la adaptación, se introduce una incertidumbre paramétrica: el valor real de  $k_1$  en la planta se fija en  $1,5 \times k_{1,nominal}$ , mientras que el controlador inicia con la estimación  $\hat{k}_1(0) = k_{1,nominal}$ .

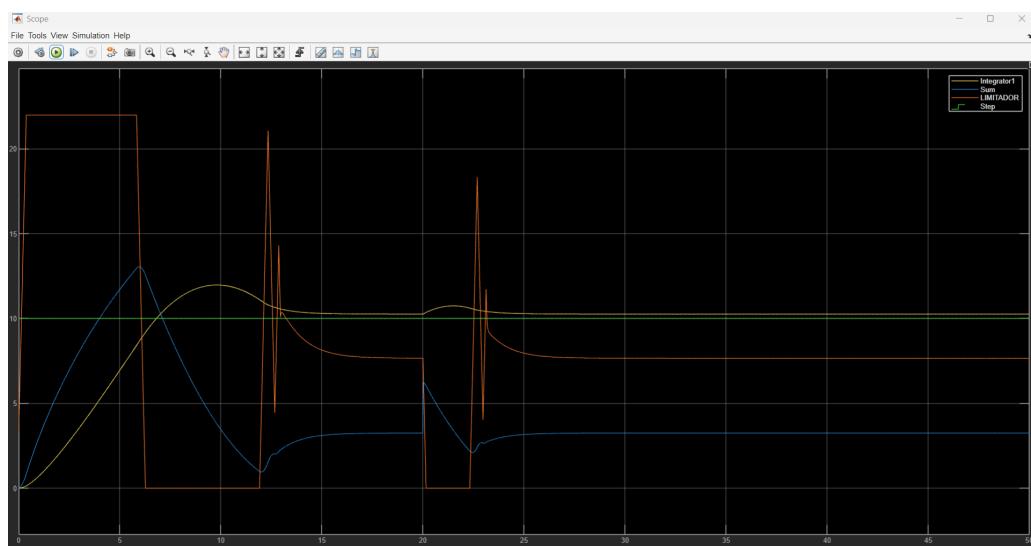


Figura 4: Respuesta del sistema con controlador Backstepping Adaptativo.

**Discusión:** La Fig. 4 demuestra la eficacia del controlador.

- **Seguimiento (Gráfico 1):** A pesar de la incertidumbre inicial,  $x_2$  (azul) converge perfectamente a la referencia de 10 cm.
- **Control (Gráfico 3):** El esfuerzo de control es suave y se ajusta a medida que el parámetro es estimado.

## 5.4. Resultados: Controlador ISMC

Se implementa la ley de control ISMC (54) con parámetros  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $K = 0,5$  y  $\Phi = 0,1$ .

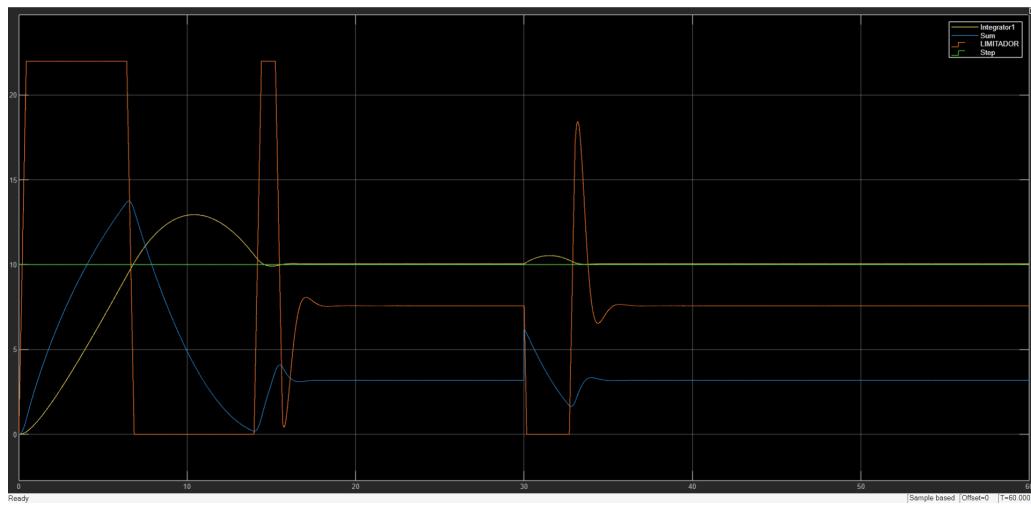


Figura 5: Resultados de simulación con controlador ISMC.

**Discusión:** La Fig. 5 muestra los resultados.

- **Seguimiento (Gráfico 1):** El controlador  $x_2$  (Amarillo) sigue la referencia de 10 cm de forma rápida y robusta.
- **Esfuerzo de Control (Gráfico 2):** Se observa el fenómeno de *chattering*. La señal de control comuta a alta frecuencia para mantener el sistema en la capa límite. Aunque la función `sat()` suaviza este efecto, es notablemente más agresivo que el control Backstepping.
- **Superficie Deslizante (Gráfico 3):** La variable  $s$  (rojo) es forzada a la capa límite (entre  $\pm\Phi$ ) y permanece allí, demostrando que se ha alcanzado el modo deslizante.

## 5.5. Discusión Comparativa

Se comparan los tres controladores en función de su rendimiento y características.

Cuadro 2: Comparación de Controladores No Lineales.

Métrica	Backstepping	Backstepping Adaptativo	ISMC
<b>Rendimiento</b>	Excelente seguimiento, suave.	Excelente seguimiento, suave.	Seguimiento rápido y robusto.
<b>Robustez</b>	<b>Baja.</b> Sensible a errores de modelo. Asume $k_i$ exactos.	<b>Alta (paramétrica).</b> Robusto a $k_1$ desconocido.	<b>Muy Alta.</b> Robusto a incertidumbres y perturbaciones emparejadas.
<b>Esfuerzo de Control</b>	Suave, sin chattering.	Suave, sin chattering.	<b>Agresivo.</b> Presenta chattering, mitigado por sat().
<b>Complejidad</b>	Alta. Derivación recursiva (.explosión de términos").	Muy Alta. Añade la ley de adaptación.	Alta. Requiere el relativo grado 2 (cálculo de $\ddot{x}_2$ ).
<b>Conocimiento</b>	Requiere modelo perfecto.	No requiere $k_1$ .	Requiere cotas de incertidumbre para $K$ .

## 6. Conclusiones

En este informe de trabajo de información formativa, se ha realizado con éxito el modelado no lineal de un sistema de tanques acoplados Quanser y se han diseñado, simulado y analizado tres controladores no lineales avanzados. Las conclusiones extraídas son las siguientes:

1. **Control Backstepping:** Esta técnica demostró ser un método sistemático y eficaz para estabilizar el sistema, logrando un seguimiento de referencia suave y sin error en estado estacionario. Sin embargo, su principal desventaja es la sensibilidad al modelo; su rendimiento depende críticamente de la precisión de los parámetros  $k_i$ . La "explosión de términos" durante la derivación recursiva resulta en una ley de control compleja, aunque analíticamente sólida.
2. **Control Backstepping Adaptativo:** Este controlador resolvió exitosamente la principal limitación del Backstepping estándar. Al introducir una incertidumbre significativa en el parámetro  $k_1$  (ganancia de la bomba), el controlador adaptativo no solo mantuvo un seguimiento perfecto, sino que también estimó correctamente el valor real del parámetro desconocido. Esto lo posiciona como una solución superior para sistemas físicos reales donde los parámetros pueden variar o ser difíciles de identificar con precisión.
3. **Control por Modos Deslizantes Integrativo (ISMC):** El ISMC demostró la mayor robustez. La naturaleza de su diseño (relativo grado 2) le permite rechazar perturbaciones de manera efectiva. La acción integral aseguró la eliminación total del error en estado estacionario. No obstante, su ventaja en robustez tiene un costo: la ley de control genera *chattering*, lo que podría causar desgaste en el actuador (la bomba) en una implementación física. Además, su implementación requiere la derivada de los estados ( $\dot{x}_2$ ), lo cual puede ser problemático con ruido de medición.
4. **Comparativa General:** Se concluye que no existe un "mejor controlador", sino un controlador "más adecuado" para cada problema. Para sistemas bien modelados, Backstepping es elegante y eficiente. Para sistemas con parámetros desconocidos o variables, Backstepping Adaptativo es la elección ideal. Para sistemas que operan en entornos con grandes perturbaciones externas e incertidumbres no estructuradas, ISMC ofrece la robustez más alta, asumiendo que se puede manejar el chattering y la diferenciación de estados.

**Trabajo Futuro:** El siguiente paso lógico es la implementación de estos tres controladores en el hardware real de Quanser. Esto permitirá validar los resultados de la simulación y, más importante aún, evaluar los efectos prácticos del ruido de medición en las derivadas ( $\dot{a}_1, \ddot{x}_2$ ) y el impacto del chattering del ISMC en el actuador físico.

## 7. Referencias

### Referencias

- [1] Miroslav Krstic, Petar V Kokotovic, y Ioannis Kanellakopoulos. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [2] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li et al. *Applied nonlinear control*, volumen 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [3] Quanser Inc. *Coupled Tanks Experiment for MATLAB®/Simulink® Users (Workbook)*. 2013.
- [4] Cutipa-Luque, Juan C. *Tema 7: Control por modos deslizantes*. UNSA, 20 de octubre, 2021.
- [5] Cutipa-Luque, Juan C. *Tema 8: Control por modos deslizantes integrativo*. UNSA, 27 de octubre, 2021.
- [6] P. V. Kokotovic. "The joy of feedback: nonlinear and adaptive." *IEEE Control Systems Magazine*, 12(3), pp. 7-17, 1992.
- [7] F. Plestan, Y. Shtessel, V. Brégeault, y A. Poznyak. "New methodologies for adaptive sliding mode control." *International Journal of Control*, 83(9), pp. 1907-1919, 2010.
- [8] A. Jafari Koshkouei y A. S. I. Zinober. .<sup>A</sup>daptive Sliding Backstepping Control of Nonlinear Semi-Strict Feedback Form Systems..<sup>En</sup> *Proceedings of the 7th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED99)*, Haifa, Israel, 1999.

## A. Anexos: Diagramas de Simulación y Código

### A.1. Planta en Lazo Abierto

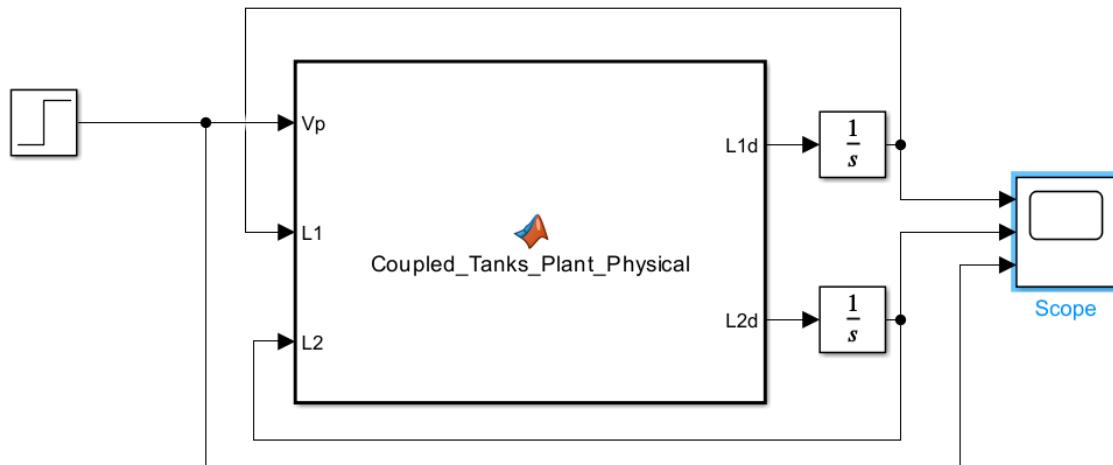


Figura 6: Planta física del sistema de tanques acoplados en Simulink.

```

MATLAB Function
function [L1d, L2d] = Coupled_Tanks_Plant_Physical(Vp,L1, L2)
% Modelo no lineal simplificado de tanques acoplados Quanser

dt1 = 4.445; dt2 = 4.445;
d01 = 0.635; d02 = 0.47625;
At1 = pi*(dt1^2)/4; At2 = pi*(dt2^2)/4;
Ao1 = pi*(d01^2)/4; Ao2 = pi*(d02^2)/4;
Kp = 3.3; g = 981;

Fin = Kp * Vp;
Fout1 = Ao1 * sqrt(2*g*L1);
Fout2 = Ao2 * sqrt(2*g*L2);
F12 = Fout1;
|
L1d = (Fin - Fout1) / At1;
L2d = (F12 - Fout2) / At2;
end

```

Figura 7: Código MATLAB Function del modelo no lineal de la planta.

## A.2. Implementación del Controlador Backstepping

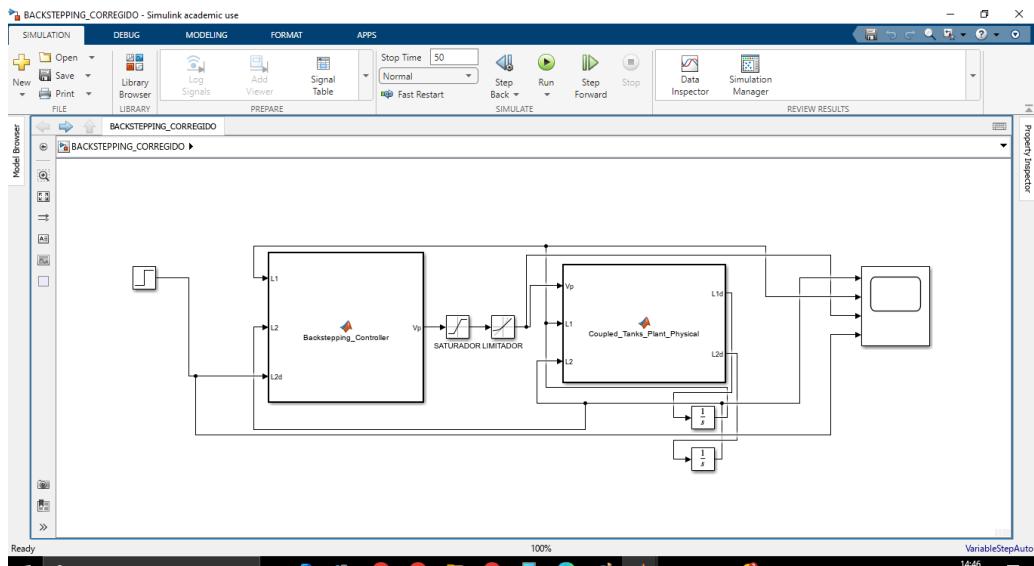


Figura 8: Esquema de simulación del sistema con controlador Backstepping.

```

24 % Control virtual (a_v) con protección contra división por cero
25 if L2 < 0
26   alpha1 = (1/k3) * (-c1*z1);
27 else
28   alpha1 = (1/k3) * ((k4*sqrt(L2)) - c1*z1);
29 end
30 % Derivada parcial de a_v / a_1 con protección
31 if L2 < 0
32   dalpha_dL2 = (1/k3) * (-c1);
33 else
34   dalpha_dL2 = (1/k3) * (k4/(2*sqrt(L2)) - c1);
35 end
36 % Segundo error
37 if L1 < 0
38   z2 = 0 - alpha1; % Evitar sqrt de negativo
39 else
40   z2 = sqrt(L1) - alpha1;
41 end
42 %%% REGLA DE CONTROL BACKSTEPPING *****
43 if L1 < 0
44   % Caso especial cuando L1 es muy pequeño
45   Vp = 0.0001; % Valor mínimo de seguridad
46 else
47   % Calculo completo del control
48   term1 = -c2*z2;
49   term2 = -c3*z2;
50   term3 = (k2/2)*z2;
51   if L2 <= 0
52     term4 = dalpha_dL2*(k3*sqrt(L1));
53   else
54     term4 = dalpha_dL2*(k3*sqrt(L1) - k4*sqrt(L2));
55   end
56   Vp = ((2*sqrt(L1)/k3) * (term1 + term2 + term3 + term4));
57 end
58

```

Figura 9: Código MATLAB Function del controlador Backstepping.

### A.3. Implementación del Controlador Backstepping Adaptativo

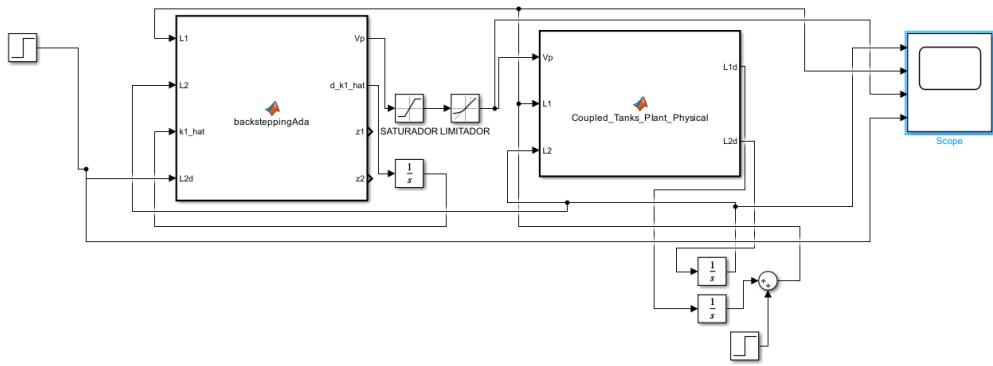


Figura 10: Esquema de simulación del sistema con controlador Backstepping Adaptativo.

```

MATLAB Function1
18
19 % Ganancias del Controlador (Puedes necesitar AJUSTARLAS)
20 c1 = 0.8; % Velocidad de z1 (L2)
21 c2 = 0.8; % Velocidad de z2 (L1)
22 gamma1 = 1.0; % Velocidad de adaptación de k1_hat (Aumentada de 0.01)
23
24
25 k1_hat_min = 0.01; % Proyección para evitar división por cero
26
27 Vp = 0.0;
28 d_k1_hat = 0.0;
29 z1 = 0.0;
30 z2 = 0.0;
31
32 epsilon = 1e-6;
33 L1_safe = max(L1, epsilon);
34 L2_safe = max(L2, epsilon);
35 sqrt_L1_safe = sqrt(L1_safe);
36 sqrt_L2_safe = sqrt(L2_safe);
37 k1_hat_safe = max(k1_hat, k1_hat_min);
38
39 z1 = L2 - L2d;
40 alpha1 = (1/k3) * (k4 * sqrt_L2_safe - c1 * z1);
41 z2 = sqrt_L1_safe - alpha1;
42
43 % Cálculo de d_alpha1
44 d_alpha1_d_L2 = (1/k3) * (k4 / (2*sqrt_L2_safe) - c1);
45 dL2 = k3 * sqrt_L1_safe - k4 * sqrt_L2_safe;
46 d_alpha1 = d_alpha1_d_L2 * dL2;
47
48 Phi = -c2*z2 - k3*z1 + k2/2 + d_alpha1;
49
50 Vp= (2*sqrt_L1_safe / k1_hat_safe) * Phi;
51
52 d_k1_hat = (gamma1 * z2 * Phi) / k1_hat_safe;
53
54

```

Figura 11: Código MATLAB Function del controlador Backstepping Adaptativo.

## A.4. Implementación del Controlador ISMC

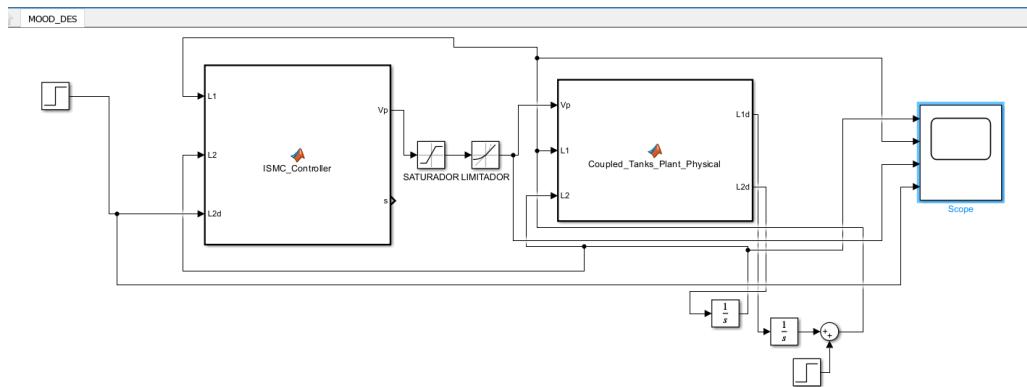


Figura 12: Esquema de simulación del sistema con controlador ISMC.

```

25 % Ganancias de la superficie (PID)
26 lambda1 = 4; % Amortiguamiento (ajusta las oscilaciones)
27 lambda2 = 10; % Acción integral (elimina error estacionario)
28
29 % Ganancias del control (SMC)
30 k = 0.5; % Ganancia robusta (bajar si hay chattering)
31 phi = 1; % Capa límite (subir si hay chattering)
32
33 %% ===== Protección de variables =====
34 L1 = max(L1, 1e-6);
35 L2 = max(L2, 1e-6);
36
37 %% ===== Cálculo de Errores y Superficie =====
38 e = L2 - L2d; % Error (e)
39 e_dot = (k3*sqrt(L1) - k4*sqrt(L2)); % Derivada del error (e_dot)
40
41 % Integrador (Euler)
42 e_int = e_int + e * Ts;
43
44 % Superficie de deslizamiento (s)
45 s = e_dot + lambda1 * e + lambda2 * e_int;
46
47
48 % Agrupando términos:
49 term_cancelacion = k2 * k3 / 2;
50 term_dinamica = (lambda1 - k4 / (2*sqrt(L2))) * e_dot;
51 term_integral = lambda2 * e;
52
53 % Función de saturación
54 sat_s = max(min(s/phi, 1), -1);
55 term_robusto = k * sat_s;
56
57 % Control calculado
58 Vp = (2*sqrt(L1) / (k1*k3)) * (term_cancelacion - term_dinamica - term_integral - term_robusto);
59 end

```

Figura 13: Código MATLAB Function del controlador ISMC.

## A.5. Enlace para el repositorio Github

[https://github.com/jpantac-lang/G7\\_R2\\_SCA2025\\_EPIE\\_UNSA](https://github.com/jpantac-lang/G7_R2_SCA2025_EPIE_UNSA)