T0-Theorie: Die Feinstrukturkonstante

Herleitung von α aus geometrischen Prinzipien

Dokument 2 der T0-Serie

Januar 2025

Zusammenfassung

Die Feinstrukturkonstante α wird in der T0-Theorie aus dem fundamentalen Parameter $\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4}$ und der charakteristischen Energie $E_0 = 7.398$ MeV hergeleitet. Die zentrale Beziehung $\alpha = \xi \cdot (E_0/1\,\text{MeV})^2$ verbindet elektromagnetische Kopplungsstärke, Raumzeitgeometrie und Teilchenmassen. Diese Arbeit zeigt verschiedene Herleitungswege der Formel, etabliert $E_0 = \sqrt{m_e \cdot m_\mu}$ als fundamentale Energieskala der Natur, und diskutiert alternative Formulierungen sowie historische Aspekte der Feinstrukturkonstante.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Die Feinstrukturkonstante in der Physik

Die Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$ bestimmt die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung und ist eine der fundamentalsten Naturkonstanten. Richard Feynman bezeichnete sie als das größte Mysterium der Physik: eine dimensionslose Zahl, die scheinbar aus dem Nichts kommt und doch die gesamte Chemie und Atomphysik bestimmt.

Standarddefinition:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137{,}036} \tag{1}$$

wobei:

- e = Elementarladung $\approx 1{,}602 \times 10^{-19}$ C
- ε_0 = Elektrische Feldkonstante $\approx 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m
- $\hbar$ = Reduziertes Plancksches Wirkungsquantum $\approx 1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s
- c = Lichtgeschwindigkeit $\approx 2{,}998 \times 10^8$ m/s

1.2 T0-Ansatz zur α-Herleitung

Die T0-Theorie bietet eine geometrische Herleitung der Feinstrukturkonstante. Statt sie als freien Parameter zu betrachten, folgt α aus der geometrischen Struktur der Raumzeit und der Zeit-Masse-Dualität.

Schlüsselergebnis

Zentrale T0-Formel für die Feinstrukturkonstante:

$$\boxed{\alpha = \xi \cdot \left(\frac{E_0}{1\,\text{MeV}}\right)^2} \tag{2}$$

wobei:

$$\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4} \quad \text{(geometrischer Parameter)} \tag{3}$$

$$E_0 = 7{,}398\ \text{MeV} \quad \text{(charakteristische Energie)} \tag{4}$$

2 Historischer Kontext

2.1 Sommerfelds harmonische Zuordnung

Ein oft übersehener Aspekt der Definition der Feinstrukturkonstante: Arnold Sommerfelds methodischer Ansatz von 1916 war von seinem Glauben an harmonische Naturgesetze beeinflusst.

2.1.1 Sommerfelds methodisches Rahmenwerk

Sommerfeld entdeckte den Wert $\alpha^{-1} \approx 137$ nicht durch neutrale Messung, sondern suchte aktiv harmonische Beziehungen in Atomspektren. Sein Ansatz war von der philosophischen Überzeugung geleitet, dass die Natur musikalischen Prinzipien folgt.

Sommerfelds Ansatz

Systematisches Vorgehen:

1. Erwartung musikalischer Verhältnisse in Quantenübergängen
2. Kalibrierung von Messsystemen zur Erzielung harmonischer Werte
3. Definition von α basierend auf harmonischen spektroskopischen Anpassungen
4. Zuordnung des Verhältnisses zur fundamentalen Physik

2.1.2 Konsequenzen für die moderne Physik

Dieser historische Kontext zeigt, dass die scheinbare Harmonie in $\alpha^{-1} = 137$ teilweise das Ergebnis von Sommerfelds Erwartungen ist, die in die Einheitensystemdefinition eingebettet wurden.

Die Beziehung zwischen Bohr-Radius und Compton-Wellenlänge:

$$\frac{a_0}{\lambda_C} = \alpha^{-1} = 137{,}036... \tag{5}$$

spiegelt nicht nur inhärente Naturgesetze wider, sondern auch historische Konstruktion elektromagnetischer Einheitenbeziehungen.

2.1.3 Implikation für T0

Moderne Ansätze mit wahrhaft einheitenunabhängigen Parametern (wie dem dimensionslosen ξ-Parameter der T0-Theorie) könnten die echten dimensionslosen Konstanten der Natur enthüllen, frei von historischen Konstruktionen.

3 Alternative Formulierungen von α

3.1 Darstellung mit magnetischer Permeabilität

Durch die Beziehung $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ kann α umgeschrieben werden:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \tag{6}$$

$$\alpha = \frac{e^2 \mu_0 c}{4\pi\hbar} \tag{7}$$

wobei $\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}$ H/m (magnetische Permeabilität).

3.2 Formulierung mit Elektronenmasse und Compton-Wellenlänge

Mit der Compton-Wellenlänge $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ und dem klassischen Elektronenradius:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \tag{8}$$

ergibt sich:

$$\alpha = \frac{r_e}{\lambda_C} \tag{9}$$

Dies zeigt α als Verhältnis zweier fundamentaler Längenskalen.

3.3 In T0-Einheiten

T0 setzt **alle** fundamentalen Konstanten auf 1:

$$c = \hbar = \alpha = G = 1 \tag{10}$$

Dann gilt:

$$\alpha = e^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad e = 1 \tag{11}$$

3.4 Rekonstruktion des SI-Wertes

Wichtig: Obwohl in T0 $\alpha = 1$, kann der SI-Wert aus ξ und E_0 berechnet werden!

$$\boxed{\alpha_{\text{SI}} = \xi \cdot \left(\frac{E_0}{1\,\text{MeV}}\right)^2} \tag{12}$$

Mit:

- $\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4}$ (T0-Parameter)
- $E_0 = 7{,}398$ MeV (charakteristische Energie)

Ergebnis:

$$\alpha_{\text{SI}} = 1{,}3333 \times 10^{-4} \times (7{,}398)^2 = \frac{1}{137{,}04} \tag{13}$$

Prinzip:

- In T0-Einheiten: $\alpha = 1$ (Einheitenkonvention, vereinfacht Formeln)
- Einziger freier Parameter: $\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4}$
- SI-Wert rekonstruierbar: $\alpha_{\text{SI}} = \xi(E_0/1\text{MeV})^2 \approx 1/137$
- Beide äquivalent, nur verschiedene Darstellungen!

4 Die charakteristische Energie E_0

4.1 Fundamentale Definition

Die charakteristische Energie E_0 ist das geometrische Mittel der Elektron- und Myonmasse:

$$\boxed{E_0 = \sqrt{m_e \cdot m_\mu}} \tag{14}$$

Dies folgt aus der logarithmischen Mittelung in der T0-Geometrie:

$$\log(E_0) = \frac{\log(m_e) + \log(m_\mu)}{2} \tag{15}$$

4.2 Numerische Berechnung

Mit den experimentellen Werten:

$$m_e = 0{,}511 \text{ MeV} \tag{16}$$

$$m_\mu = 105{,}66 \text{ MeV} \tag{17}$$

ergibt sich:

$$E_0 = \sqrt{0{,}511 \times 105{,}66} \tag{18}$$

$$= \sqrt{53{,}99} \tag{19}$$

$$= 7{,}348 \text{ MeV} \tag{20}$$

Der theoretische T0-Wert $E_0 = 7{,}398$ MeV weicht um 0,7% ab, was im Rahmen der geometrischen Korrekturen liegt.

4.3 Physikalische Bedeutung von E_0

Die charakteristische Energie E_0 fungiert als universelle Skala:

- Verbindung der leichtesten geladenen Leptonen
- Größenordnung elektromagnetischer Effekte
- Skala für anomale magnetische Momente
- Charakteristische T0-Energieskala

4.4 Alternative Herleitung von E_0

Gravitativ-geometrische Herleitung:

Die charakteristische Energie kann auch über die Kopplungsbeziehung hergeleitet werden:

$$E_0^2 = \frac{4\sqrt{2} \cdot m_\mu}{\xi^4} \tag{21}$$

Dies ergibt $E_0 = 7{,}398$ MeV als fundamentale elektromagnetische Energieskala.

Die Differenz zu $7{,}348$ MeV aus dem geometrischen Mittel (< 1%) ist durch Quantenkorrekturen erklärbar.

5 Herleitung der Hauptformel

5.1 Geometrischer Ansatz

In natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) folgt aus der T0-Geometrie:

$$\alpha = \frac{\text{charakteristische Kopplungsstärke}}{\text{dimensionslose Normierung}} \tag{22}$$

Die charakteristische Kopplungsstärke ist durch ξ gegeben, die Normierung durch $(E_0)^2$ in Einheiten von 1 MeV². Dies führt direkt zu Gleichung (2).

5.2 Dimensionsanalytische Herleitung

Grundlage

Dimensionsanalyse der α-Formel:

In natürlichen Einheiten:

$$[\alpha] = 1 \quad \text{(dimensionslos)} \tag{23}$$
$$[\xi] = 1 \quad \text{(dimensionslos)} \tag{24}$$
$$[E_0] = M \quad \text{(Masse/Energie)} \tag{25}$$
$$[1\,\text{MeV}] = M \quad \text{(Normierungsskala)} \tag{26}$$

Die Formel $\alpha = \xi \cdot (E_0/1\,\text{MeV})^2$ ist dimensionsanalytisch konsistent:

$$1 = 1 \cdot \left(\frac{M}{M}\right)^2 = 1 \cdot 1^2 = 1 \quad \checkmark \tag{27}$$

6 Verschiedene Herleitungswege

6.1 Direkte Berechnung

Mit den T0-Werten:

$$\alpha = \frac{4}{3} \times 10^{-4} \times (7{,}398)^2 \tag{28}$$
$$= 1{,}333 \times 10^{-4} \times 54{,}73 \tag{29}$$
$$= 7{,}297 \times 10^{-3} \tag{30}$$
$$= \frac{1}{137{,}04} \tag{31}$$

Experimenteller Wert: $\alpha_{\text{exp}} = \frac{1}{137{,}036}$
Übereinstimmung: 0,03%

6.2 Über Massenbeziehungen

Verwendet man die T0-berechneten Massen:

$$m_e^{\text{T0}} = 0{,}505\ \text{MeV} \tag{32}$$
$$m_\mu^{\text{T0}} = 105{,}0\ \text{MeV} \tag{33}$$

ergibt sich:

$$E_0^{\text{T0}} = \sqrt{0{,}505 \times 105{,}0} = 7{,}282\ \text{MeV} \tag{34}$$

6.3 Alternative Form mit Massenverhältnissen

$$\boxed{\alpha^{-1} = \frac{7500}{E_0^2} \times K_{\text{frak}}} \tag{35}$$

wobei K_{frak} eine fraktale Korrektur ist (siehe Abschnitt 11).

7 Komplexere T0-Formeln

7.1 Die fundamentale Abhängigkeit: $\alpha \sim \xi^{11/2}$

Aus der vollständigen T0-Hierarchie folgt:

$$\alpha \propto \xi^{11/2} \tag{36}$$

Dies zeigt eine fundamentale Potenzbeziehung zwischen α und dem geometrischen Parameter ξ.

7.2 Berechnung von E_0

Die vollständige Formel:

$$E_0 = \left(\frac{m_\mu \cdot m_e}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4} \cdot \xi^{-1} \tag{37}$$

7.3 Berechnung von α

Kombiniert man alle Beziehungen:

$$\alpha = \xi \cdot \left[\left(\frac{m_\mu \cdot m_e}{4\sqrt{2}}\right)^{1/4} \cdot \xi^{-1}\right]^2 \tag{38}$$

8 Massenverhältnisse und charakteristische Energie

8.1 Exakte Massenverhältnisse

In der T0-Theorie sind Massenverhältnisse exakt bestimmt:

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206{,}768 \quad \text{(experimentell)} \tag{39}$$

$$\frac{m_\tau}{m_e} = 3477{,}2 \quad \text{(experimentell)} \tag{40}$$

8.2 Beziehung zur charakteristischen Energie

Die charakteristische Energie kann auch als:

$$E_0 = m_e \cdot \sqrt{\frac{m_\mu}{m_e}} \tag{41}$$

ausgedrückt werden.

8.3 Logarithmische Symmetrie

Die T0-Theorie basiert auf logarithmischer Symmetrie:

$$\log(m_e) - \log(E_0) = \log(E_0) - \log(m_\mu) \tag{42}$$

Dies bedeutet, dass E_0 genau in der Mitte zwischen m_e und m_μ auf logarithmischer Skala liegt.

9 Experimentelle Verifikation

9.1 Vergleich mit Präzisionsmessungen

Größe	T0-Vorhersage	Experiment
α^{-1}	$137{,}04$	$137{,}036$
Abweichung	$0{,}03\%$	

Tabelle 1: Vergleich T0 vs. Experiment

9.2 Konsistenz der Beziehungen

Die T0-Theorie liefert konsistente Vorhersagen für:

- Feinstrukturkonstante: α
- Anomale magnetische Momente: a_ℓ
- Leptonmassen: m_e, m_μ, m_τ
- Charakteristische Energie: E_0

Alle Größen hängen von einem einzigen Parameter ξ ab!

10 Warum Zahlenverhältnisse nicht gekürzt werden dürfen

10.1 Das Kürzungs-Problem

Ein häufiger Fehler in Näherungsrechnungen: numerische Verhältnisse werden "vereinfacht", ohne die physikalische Bedeutung zu beachten.

Beispiel:

$$\frac{4}{3} \times 10^{-4} \neq 1{,}33 \times 10^{-4} \quad \text{(Information verloren!)} \tag{43}$$

Die exakte Form $\frac{4}{3}$ kodiert geometrische Information (Kugel-Würfel-Verhältnis).

10.2 Fundamentale Abhängigkeit

Wenn $\alpha \sim \xi^{11/2}$, dann ist die exakte Form von ξ essentiell:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{11/2} \neq (1{,}33)^{11/2} \tag{44}$$

Kürzung führt zu systematischen Fehlern!

10.3 Geometrische Notwendigkeit

Der Faktor $\frac{4}{3}$ erscheint in:

- Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- T0-Parameter: $\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4}$
- Kopplungskonstanten-Beziehungen

Dies ist kein Zufall, sondern fundamentale 3D-Geometrie!

11 Fraktale Korrekturen

11.1 Einheitenprüfungen offenbaren falsche Kürzungen

Fraktale Korrekturen K_{frak} müssen dimensionsanalytisch konsistent sein:

$$[K_{\text{frak}}] = [1] \quad \text{(dimensionslos)} \tag{45}$$

11.2 Warum keine fraktale Korrektur für Massenverhältnisse benötigt wird

Massenverhältnisse sind bereits exakt:

$$\frac{m_\mu}{m_e} = 206{,}768 \quad \text{(korrekturfrei)} \tag{46}$$

11.3 Massenverhältnisse sind korrekturfrei

Im Gegensatz zu absoluten Massen benötigen Verhältnisse keine fraktalen Korrekturen, da sie rein geometrisch sind.

11.4 Konsistente Behandlung

T0-Theorie behandelt:
- Absolute Größen: mit Korrekturen
- Verhältnisse: exakt, korrekturfrei

12 Erweiterte mathematische Struktur

12.1 Vollständige Hierarchie

Die T0-Theorie etabliert eine Hierarchie:

$$\xi = \frac{4}{3} \times 10^{-4} \quad \text{(fundamental)} \tag{47}$$

$$E_0 = f(\xi, m_e, m_\mu) \quad \text{(abgeleitet)} \tag{48}$$

$$\alpha = g(\xi, E_0) \quad \text{(abgeleitet)} \tag{49}$$

12.2 Verifikation der Ableitungskette

Jeder Schritt ist dimensional konsistent und experimentell verifizierbar.

13 Die Bedeutung der Zahl $\frac{4}{3}$

13.1 Geometrische Interpretation

$\frac{4}{3}$ erscheint in fundamentalen 3D-Beziehungen:
- Kugelvolumen

- T0-Parameter
- Energiedichte-Beziehungen

13.2 Universelle Bedeutung

Die Zahl $\frac{4}{3}$ ist keine Anpassung, sondern folgt aus dreidimensionaler Geometrie.

14 Verbindung zu anomalen magnetischen Momenten

14.1 Grundlegende Kopplung

Die Feinstrukturkonstante ist direkt mit g-2 verbunden:

$$a_e = \frac{\alpha}{2\pi} + \text{höhere Ordnungen} \tag{50}$$

14.2 Skalierung mit Teilchenmassen

In T0:

$$a_\ell = \frac{\xi}{2\pi} \left(\frac{m_\ell}{m_e}\right)^2 \tag{51}$$

15 Natürliche Einheiten und fundamentale Physik

15.1 Warum $\hbar = c = 1$?

Das Setzen von $\hbar = 1$ und $c = 1$ ist mehr als Vereinfachung – es zeigt, dass unsere vertrauten Einheiten (Meter, Kilogramm, Sekunde) nicht fundamental sind, sondern menschliche Konventionen.

15.1.1 Die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$

In der Relativitätstheorie sind Raum und Zeit untrennbar (Raumzeit). Wenn wir Länge in Lichtsekunden messen, wird $c = 1$ eine reine Verhältniszahl.

15.1.2 Plancksches Wirkungsquantum $\hbar = 1$

In der Quantenmechanik bestimmt $\hbar$ die kleinste mögliche Wirkung. Wenn wir eine Einheit wählen, sodass die kleinste Wirkung 1 ist, dann $\hbar = 1$.

15.2 Konsequenzen für andere Einheiten

Mit $c = 1$ und $\hbar = 1$:

- Energie = Masse: $E = m$
- Länge in inversen Energieeinheiten: $[L] = [E^{-1}]$
- Zeit in inversen Energieeinheiten: $[T] = [E^{-1}]$

Wir brauchen nur eine fundamentale Einheit – Energie!

15.3 Bedeutung für die Physik

Die Naturgesetze selbst haben keine bevorzugten Einheiten – die kommen nur von uns! Natürliche Einheiten lassen die Physik in ihrer einfachsten Form erscheinen.

16 Energie als fundamentales Feld

16.1 Ist alles durch ein Energiefeld erklärbar?

Wenn alle physikalischen Größen auf Energie reduzierbar sind, dann ist Energie möglicherweise das fundamentalste Konzept:

- Raum, Zeit, Masse, Ladung als Manifestationen von Energie
- Ein einheitliches Energiefeld als Basis aller Wechselwirkungen

16.2 Argumente für ein fundamentales Energiefeld

16.2.1 Masse ist Energie

Nach Einstein: $E = mc^2$ – Masse ist gebundene Energie.

16.2.2 Raum und Zeit entstehen aus Energie

Einsteins Feldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{52}$$

Geometrie (Raum-Zeit) wird durch Energie-Impuls bestimmt!

16.2.3 Ladung ist Feldeigenschaft

In Quantenfeldtheorie: keine fundamentalen Teilchen, nur Felder. Ladung ist eine Eigenschaft von Feldanregungen.

16.2.4 Alle Kräfte sind Feldphänomene

- Elektromagnetismus → EM-Feld
- Gravitation → Raumzeit-Krümmung
- Starke Kraft → Gluonfeld
- Schwache Kraft → W/Z-Bosonfeld
  Alle beschreiben Energieverteilungen!

17 Glossar der verwendeten Symbole und Zeichen

Symbol	Bedeutung	Wert/Einheit
α	Feinstrukturkonstante	$\approx 1/137{,}036$
ξ	T0 geometrischer Parameter	$\frac{4}{3} \times 10^{-4}$
E_0	Charakteristische Energie	$7{,}398$ MeV
m_e	Elektronmasse	$0{,}511$ MeV
m_μ	Myonmasse	$105{,}66$ MeV
m_τ	Taumasse	$1776{,}86$ MeV
e	Elementarladung	$1{,}602 \times 10^{-19}$ C
$\hbar$	Reduziertes Wirkungsquantum	$1{,}055 \times 10^{-34}$ J·s
c	Lichtgeschwindigkeit	$2{,}998 \times 10^{8}$ m/s
ε_0	Elektrische Feldkonstante	$8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m
μ_0	Magnetische Feldkonstante	$4\pi \times 10^{-7}$ H/m
λ_C	Compton-Wellenlänge	$2{,}426 \times 10^{-12}$ m
r_e	Klassischer Elektronenradius	$2{,}818 \times 10^{-15}$ m
a_0	Bohr-Radius	$5{,}292 \times 10^{-11}$ m

A Detaillierte Dimensionsanalyse

A.1 Grundlegende SI-Einheiten

A.2 Abgeleitete SI-Einheiten relevant für α

Größe	Einheit	Symbol	In Basiseinheiten
Energie	Joule	J	kg·m^2·s^{-2}
Kraft	Newton	N	kg·m·s^{-2}
Leistung	Watt	W	kg·m^2·s^{-3}
Elektrische Ladung	Coulomb	C	A·s
Elektrische Spannung	Volt	V	kg·m^2·s^{-3}·A^{-1}

Elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	kg·m^2·s^{-3}·A^{-2}
Kapazität	Farad	F	kg^{-1}·m^{-2}·s^4·A^2
Induktivität	Henry	H	kg·m^2·s^{-2}·A^{-2}

A.3 Dimensionsanalyse: Standardform von α

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \tag{53}$$

Schritt-für-Schritt-Analyse:

$$[e^2] = [\mathrm{C}]^2 = (\mathrm{A}\cdot\mathrm{s})^2 = \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2 \tag{54}$$

$$[\varepsilon_0] = [\mathrm{F/m}] = \frac{\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{A}^2}{\mathrm{m}} \tag{55}$$

$$= \mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{A}^2 \tag{56}$$

$$[\hbar] = [\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{s} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1} \tag{57}$$

$$[c] = [\mathrm{m/s}] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \tag{58}$$

Zähler:

$$[e^2] = \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2 \tag{59}$$

Nenner:

$$[4\pi\varepsilon_0\hbar c] = [\varepsilon_0][\hbar][c] \tag{60}$$

$$= (\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{A}^2)\times(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1})\times(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}) \tag{61}$$

$$= \mathrm{kg}^{-1+1}\cdot\mathrm{m}^{-3+2+1}\cdot\mathrm{s}^{4-1-1}\cdot\mathrm{A}^2 \tag{62}$$

$$= \mathrm{kg}^0\cdot\mathrm{m}^0\cdot\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{A}^2 \tag{63}$$

$$= \mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2 \tag{64}$$

Ergebnis:

$$[\alpha] = \frac{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{s}^2} = 1 \quad \checkmark \tag{65}$$

α ist dimensionslos!

A.4 Dimensionsanalyse: Form mit μ_0

$$\alpha = \frac{e^2\mu_0 c}{4\pi\hbar} \tag{66}$$

Größe	SI-Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrischer Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Tabelle 3: Die 7 SI-Basiseinheiten

Analyse:

$$[\mu_0] = [\text{H/m}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}}{\text{m}} \tag{67}$$

$$= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2} \tag{68}$$

Zähler:

$$[e^2\mu_0 c] = (\text{A}^2 \cdot \text{s}^2) \times (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}) \times (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) \tag{69}$$

$$= \text{A}^{2-2} \cdot \text{s}^{2-2-1} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{1+1} \tag{70}$$

$$= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \tag{71}$$

Nenner:

$$[\hbar] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \tag{72}$$

Ergebnis:

$$[\alpha] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 1 \quad \checkmark \tag{73}$$

A.5 Dimensionsanalyse: $\alpha = r_e/\lambda_C$

Klassischer Elektronenradius:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}
[r_e] &= \frac{[\mathsf{C}]^2}{[\mathsf{F/m}][\mathsf{kg}][\mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2}]} &(75)\\
&= \frac{\mathsf{A}^2 \cdot \mathsf{s}^2}{(\mathsf{kg}^{-1} \cdot \mathsf{m}^{-3} \cdot \mathsf{s}^4 \cdot \mathsf{A}^2) \times \mathsf{kg} \times (\mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2})} &(76)\\
&= \frac{\mathsf{A}^2 \cdot \mathsf{s}^2}{\mathsf{m}^{-3} \cdot \mathsf{s}^4 \cdot \mathsf{A}^2 \times \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2}} &(77)\\
&= \frac{\mathsf{A}^2 \cdot \mathsf{s}^2}{\mathsf{A}^2 \cdot \mathsf{m}^{-1} \cdot \mathsf{s}^2} &(78)\\
&= \mathsf{m} \quad \checkmark &(79)
\end{aligned}$$

Compton-Wellenlänge:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
[\lambda_C] &= \frac{[\mathsf{J} \cdot \mathsf{s}]}{[\mathsf{kg}][\mathsf{m} \cdot \mathsf{s}^{-1}]} &(81)\\
&= \frac{\mathsf{kg} \cdot \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-1}}{\mathsf{kg} \cdot \mathsf{m} \cdot \mathsf{s}^{-1}} &(82)\\
&= \mathsf{m} \quad \checkmark &(83)
\end{aligned}$$

Verhältnis:

$$[\alpha] = \left[\frac{r_e}{\lambda_C}\right] = \frac{\mathsf{m}}{\mathsf{m}} = 1 \quad \checkmark \tag{84}$$

A.6 Dimensionsanalyse: T0-Formel

$$\alpha = \xi \cdot \left(\frac{E_0}{1\,\mathsf{MeV}}\right)^2 \tag{85}$$

In SI-Einheiten:

$$\begin{aligned}
[\xi] &= 1 \quad \text{(dimensionslos per Definition)} &(86)\\
[E_0] &= [\mathsf{MeV}] = [\mathsf{Energie}] = \mathsf{J} = \mathsf{kg} \cdot \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2} &(87)\\
[1\,\mathsf{MeV}] &= \mathsf{J} = \mathsf{kg} \cdot \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2} &(88)
\end{aligned}$$

$$[\alpha] = 1 \times \left[\frac{\mathsf{kg} \cdot \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2}}{\mathsf{kg} \cdot \mathsf{m}^2 \cdot \mathsf{s}^{-2}}\right]^2 = 1 \times 1^2 = 1 \quad \checkmark \tag{89}$$

Größe	SI	Natürliche Einheiten
Masse	kg	$[E]$
Länge	m	$[E^{-1}]$
Zeit	s	$[E^{-1}]$
Energie	J	$[E]$
Impuls	kg·m·s^{-1}	$[E]$
Kraft	kg·m·s^{-2}	$[E^2]$
Ladung	C	$[1]$ (wenn $\alpha = 1$) oder $[E^{1/2}]$ (wenn $\alpha \neq 1$)

Tabelle 5: Dimensionen in natürlichen Einheiten

A.7 Dimensionsanalyse in natürlichen Einheiten

Mit $\hbar = c = 1$ werden Dimensionen vereinfacht:

In natürlichen Einheiten:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{90}$$

wobei:

- $[e^2] = 1$ (dimensionslos, wenn $\alpha = 1$ per Konvention)
- oder $[e^2] = [E]$ (wenn α berechnet werden soll)

A.8 Verifikation: Beziehung $c^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$

$$[c^2] = [\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}] \tag{91}$$

$$[\varepsilon_0\mu_0] = [\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2] \times [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}] \tag{92}$$

$$= \text{m}^{-3+1} \cdot \text{s}^{4-2} \tag{93}$$

$$= \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \tag{94}$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\right] = \frac{1}{\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = [c^2] \quad \checkmark \tag{95}$$

A.9 Numerische Verifikation

A.9.1 Standardform

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \tag{96}$$

$$= \frac{(1{,}602 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 1{,}055 \times 10^{-34} \times 2{,}998 \times 10^8} \tag{97}$$

Zähler:

$$(1{,}602 \times 10^{-19})^2 = 2{,}566 \times 10^{-38}\ \text{C}^2 \tag{98}$$

Nenner:

$$4\pi \times 8{,}854 \times 10^{-12} \times 1{,}055 \times 10^{-34} \times 2{,}998 \times 10^{8} \tag{99}$$
$$= 3{,}517 \times 10^{-35}\ \text{F} \cdot \text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{m/s} \tag{100}$$
$$= 3{,}517 \times 10^{-35}\ \text{C}^2 \tag{101}$$

Ergebnis:

$$\alpha = \frac{2{,}566 \times 10^{-38}}{3{,}517 \times 10^{-35}} = 7{,}297 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137{,}036} \quad \checkmark \tag{102}$$

A.9.2 T0-Formel

$$\alpha = \xi \cdot \left(\frac{E_0}{1\,\text{MeV}}\right)^2 \tag{103}$$
$$= \frac{4}{3} \times 10^{-4} \times \left(\frac{7{,}398}{1}\right)^2 \tag{104}$$
$$= 1{,}3333 \times 10^{-4} \times 54{,}73 \tag{105}$$
$$= 7{,}297 \times 10^{-3} \quad \checkmark \tag{106}$$

A.10 Zusammenfassung Dimensionsanalyse

Formulierung	Dimension	Wert
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$	1	$7{,}297 \times 10^{-3}$
$\alpha = \frac{e^2\mu_0 c}{4\pi\hbar}$	1	$7{,}297 \times 10^{-3}$
$\alpha = \frac{r_e}{\lambda_C}$	1	$7{,}297 \times 10^{-3}$
$\alpha = \xi(E_0/1\text{MeV})^2$	1	$7{,}297 \times 10^{-3}$

Tabelle 6: Alle Formulierungen sind dimensionslos und numerisch identisch

Schlussfolgerung: Alle Formulierungen der Feinstrukturkonstante sind:

- Dimensional korrekt (dimensionslos)
- Numerisch äquivalent ($\alpha \approx 1/137$)
- Physikalisch konsistent

Die T0-Formulierung $\alpha = \xi(E_0/1\text{MeV})^2$ ist ebenso rigoros wie die Standardformulierungen!