ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS

redes de ordenamento

2010-2011

Carlos Lisboa Bento

Redes de Ordenamento

Motivações

- Algoritmos facos de ordenamento $O(N^2)$
- Algoritmos eficientes de ordenamento $O(N \lg N)$
- Ordenamento baseado na manipulação de bases $O(N)$ c/ d = const ...
  em certas condições sublineares

- ... procuramos um algoritmos vocacionados para paralelização
- e que tenham complexidade sublinear ... $O(\lg^2 N)$

Redes de Comparadores

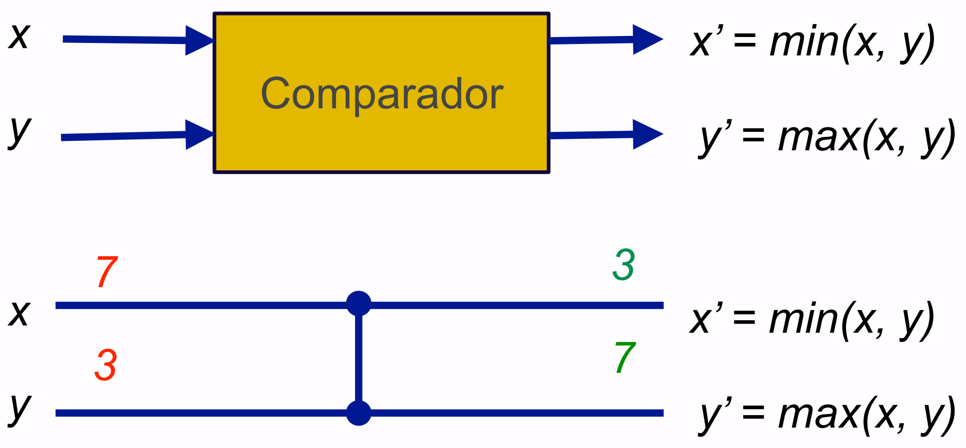
... respondem a estas motivações !!

- baseadas unicamente em comparações
- numa rede de comparações operações em paralelo

- n elementos ordenados em tempo sub-linear!!

Redes de Comparadores

comparador



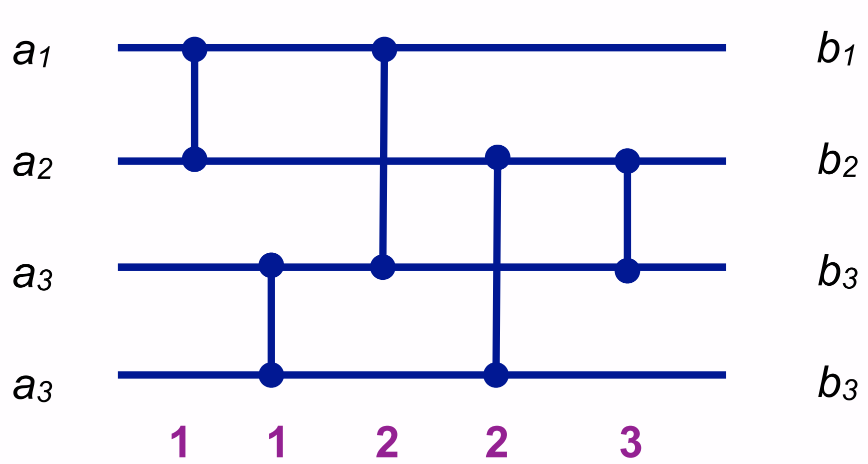
Nota: cada comparador produz o resultado somente quando tem ambas as entradas instanciadas

Redes de Comparadores
profundidade

- Assumindo que cada comparador produz a saida numa unidade de tempo, o **tempo de estabilização da rede de comparadores é dado pelas unidades de tempo necessárias para todas as saídas produzirem o seu resultado** depois de todas as entradas terem o seu valor instanciado

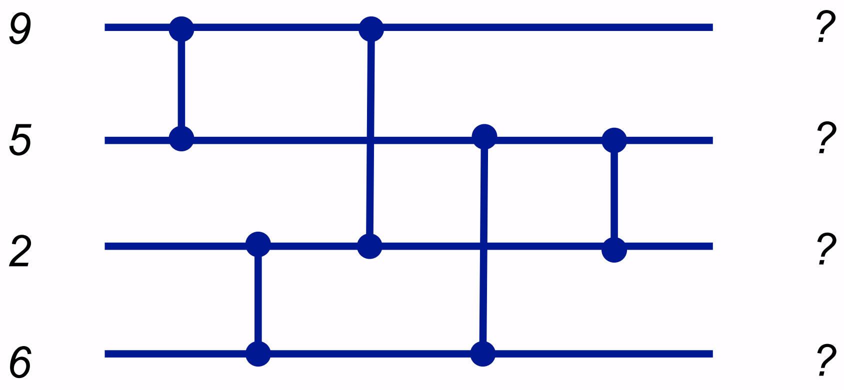
- Profundidade de uma linha:
  - uma **linha de entrada** de um comparador tem **profundidade 0**
  - tendo um comparador com duas linhas, **uma com profundidade d_x outra d_y**, a profundidade das suas linhas de saida é **$\max(d_x, d_y) + 1$**

Redes de Comparadores
profundidade



Redes de Ordenamento
definição

▪ é uma rede de comparadores em que a sequência de saida é monotonicamente crescente para quaisquer que sejam os valores de entrada.



Redes de Ordenamento
princípio 0-1

▪ se uma rede de ordenamento **se comporta correctamente para entradas do conjunto {0, 1}** então também se comporta correctamente para **entradas sobre qualquer conjunto linearmente ordenado**.

▪ consequência: ao construirmo uma rede de ordenamento que comprovadamente **ordena todas as sequências de 0s e 1s**, usando o princípio 0-1 temos que esta rede ordena correctamente **qualquer conjunto de valores**

Redes de Ordenamento

redes de ordenamento bitónicas

- **sequência bitónica:** sequência que cresce monotonamente e de seguida descresce monotonamente, ou que pode ser movimentada de forma circular para ficar monotonicamente crescente seguida de monotonicamente decrescente

ex.: <1, 4, 6, 8, 3, 2> <9, 8, 3, 2, 4, 6>
$0^i\ 1^j\ 1^k$ $1^i\ 0^j\ 1^k$ c/ $i, j, k \geq 0$

- uma rede de **ordenamento de sequências bitónicas** compreende vários estágios chamados **"half-cleaners"**

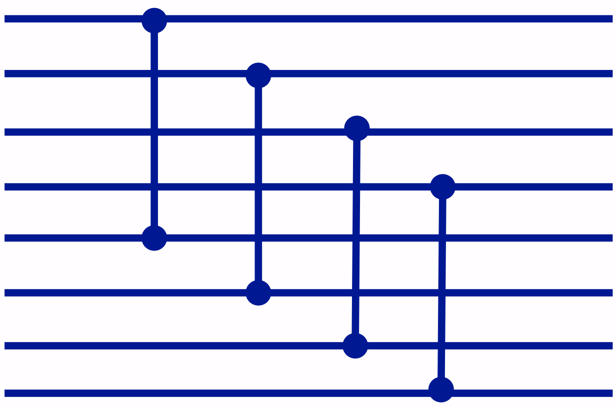
Redes de Ordenamento

half-cleaner

- rede de comparadores de profundidade 1 em que:

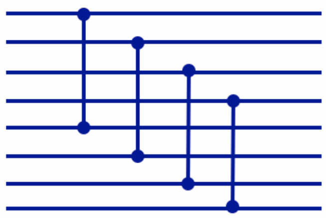
cada entrada i é comparada com a entrada i + n/2 c/ i = 1, 2, ..., n/2 (c/ n par)

- Exemplo para n = 8



Redes de Ordenamento

half-cleaner : propriedades

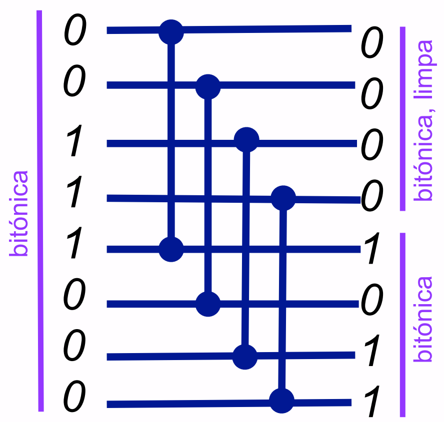


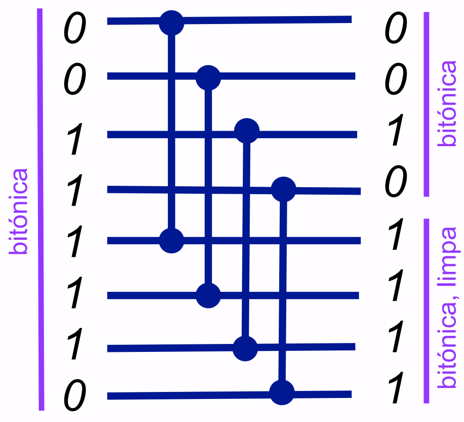
- quando uma sequência bitónica de zeros e uns é aplicada na entrada de uma rede half-cleaner:
  - a sequência de saida vai ter os menores valores na primeira metade e os maiores na segunda metade das saidas
  - pelo menos uma das metades é limpa (clean) ou seja só tem zeros ou uns
  - e ambas as metades são bitónicas

Redes de Ordenamento

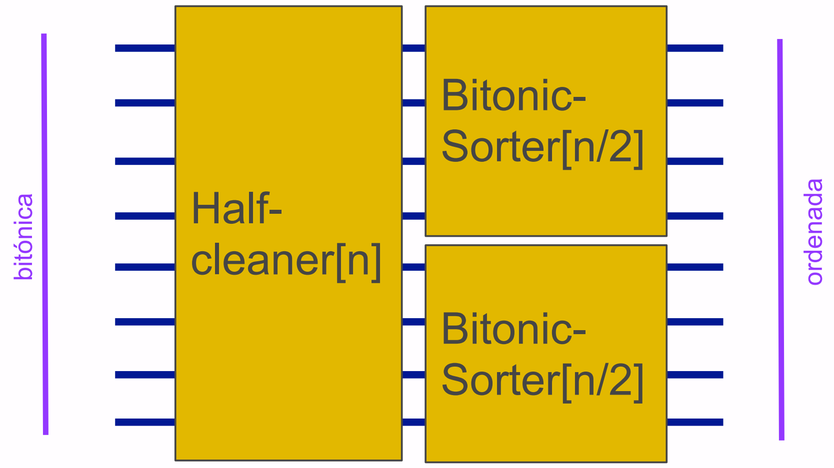
half-cleaner : propriedades

- Exemplo para n = 8





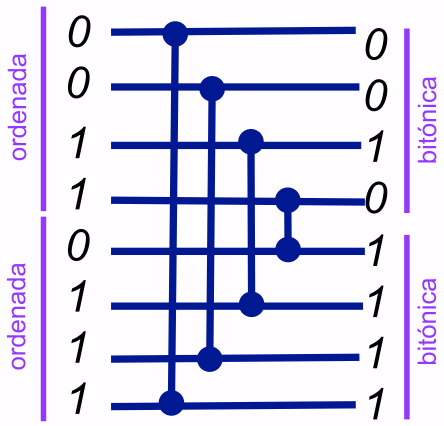
Redes de Ordenamento
rede de ordenamento bitónico



Redes de Ordenamento
rede de merging

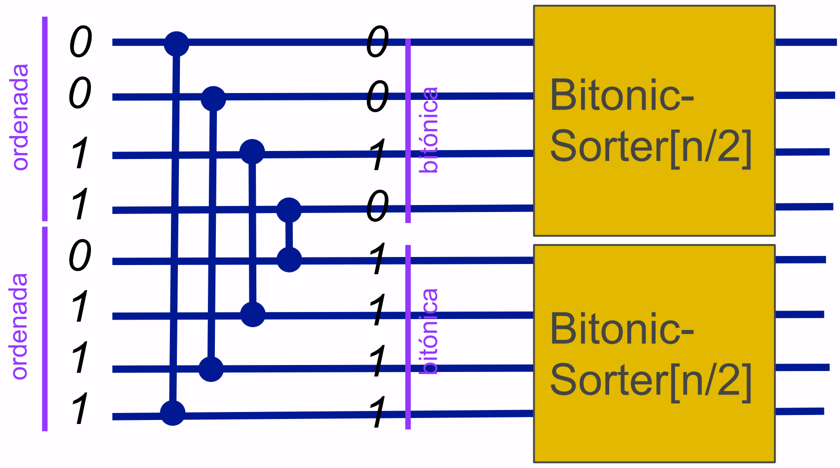
- redes que combinam duas sequências ordenadas numa única sequência ordenada

Primeiro estágio da rede de merging:



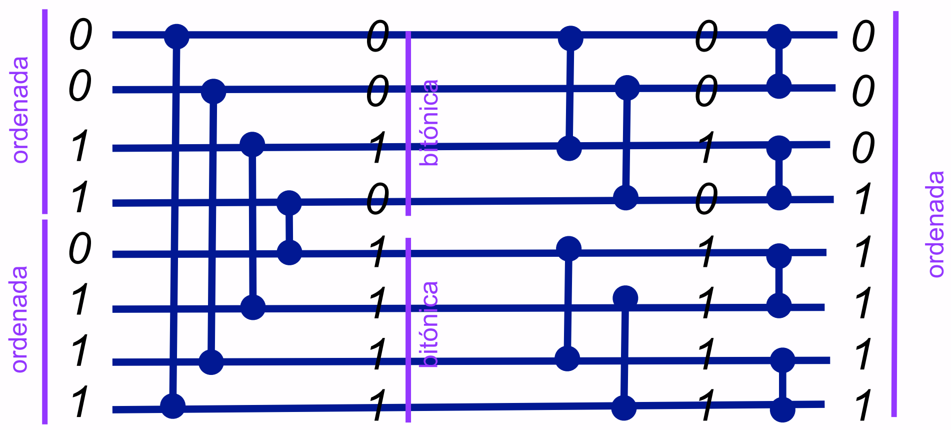
Redes de Ordenamento
rede de merging

- ... finalmente uma rede de merging



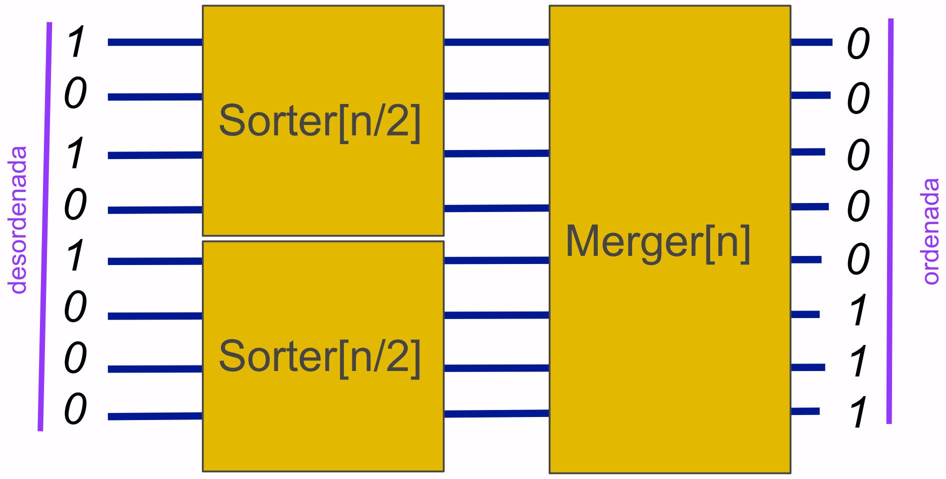
Redes de Ordenamento
rede de merging

- ... finalmente uma rede de merging



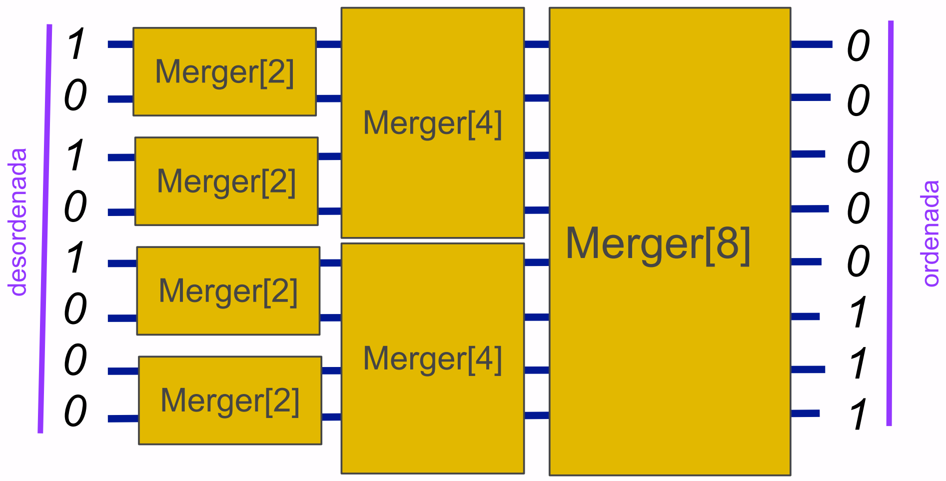
Redes de Ordenamento

... e uma rede de ordenamento



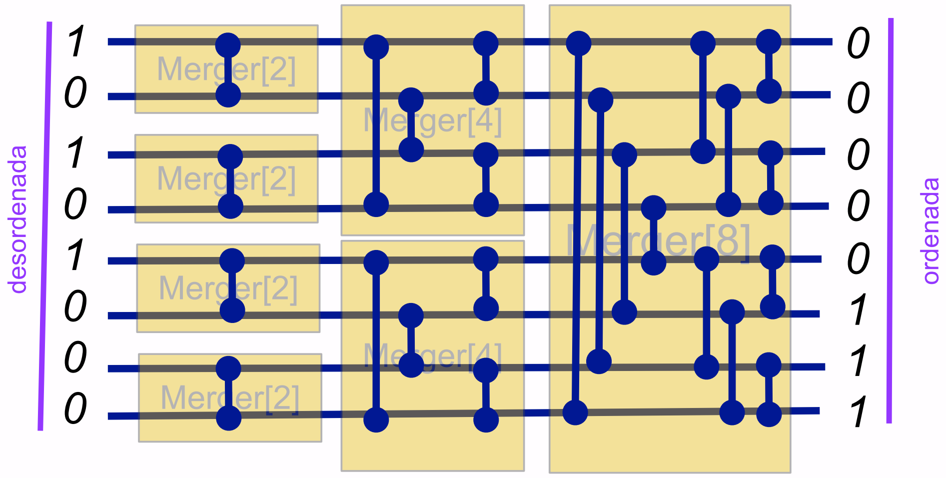
Redes de Ordenamento

... e uma rede de ordenamento



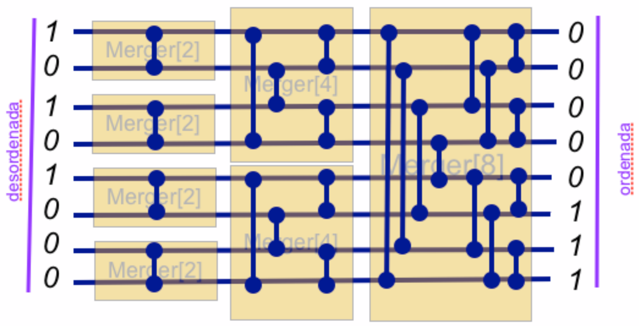
Redes de Ordenamento

... e uma rede de ordenamento



Redes de Ordenamento

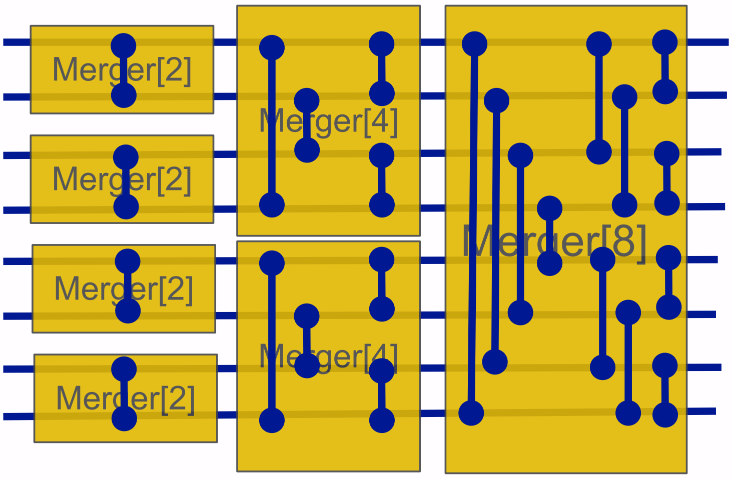
... e uma rede de ordenamento



Prova-se que uma rede de ordenamento para n entradas tem exactamente profundidade (lg N)(lg N + 1) / 2

Redes de Ordenamento

... e uma rede de ordenamento



Prova-se que uma rede de ordenamento para n entradas tem exactamente profundidade (lg N)(lg N + 1) / 2

Algoritmos de ordenamento

… end ;-)