

# Informe: Sistemas Continuos

Juan Pablo Bortol, Augusto Fungo.

Simulación: Practico 8, Ejercicio 6.

## 1 Problema

Suponga que se desea modelar el movimiento vertical de una pelota que cae bajo la acción de la gravedad y que rebota al llegar al suelo. La aceleración gravitatoria se considera constante e igual a  $g = 9.8m/s^2$ . Suponer rozamiento lineal, y con velocidad  $v(t)$  positiva hacia arriba. El sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de la pelota es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \begin{cases} -\frac{b_a}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) > 0 \\ -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Considerando los parámetros  $b_a = 0.1$ ,  $m = 1$ ,  $b = 30$ ,  $g = 9.8$  y  $k = 100000$ , calcular y graficar la posición y velocidad de la pelota hasta que la misma quede en estado de reposo.

Considerar lo siguiente:

- paso de integración  $h = 0.0001$
- detener la simulación cuando la altura sea menor a 0.00001 o un tiempo maximo de 100 unidades de tiempo.
- el valor inicial de la velocidad es 0 (cero). A modos de testeo iniciar con una altura 10.

## 2 Análisis

Este problema se resolvió utilizando el metodo de Euler, tomando en cuenta que el movimiento vertical de la pelota comenzaria desde  $x(0) = 10$ , se puede entender que la función  $x(t)$  es la función de altura de la trayectoria de la pelota, así mismo como  $\dot{x}(t) = v(t)$  se entiende que la función  $v(t)$  es la función de velocidad por lo que  $\dot{v}(t)$  es la función de aceleración.

Tomando en cuenta los parametros mencionados anteriormente la solución del problema seria la siguiente:

- Altura:  $x(t+h) = x(t) + 0.0001 \cdot \frac{dx(t)}{dt}$
- Velocidad:  $v(t+h) = v(t) + 0.0001 \cdot \frac{dv(t)}{dt}$
- Aceleración:  $\dot{v}(t) = \begin{cases} -\frac{b_a}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) > 0 \\ -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) - g & \text{si } x(t) \leq 0 \end{cases}$

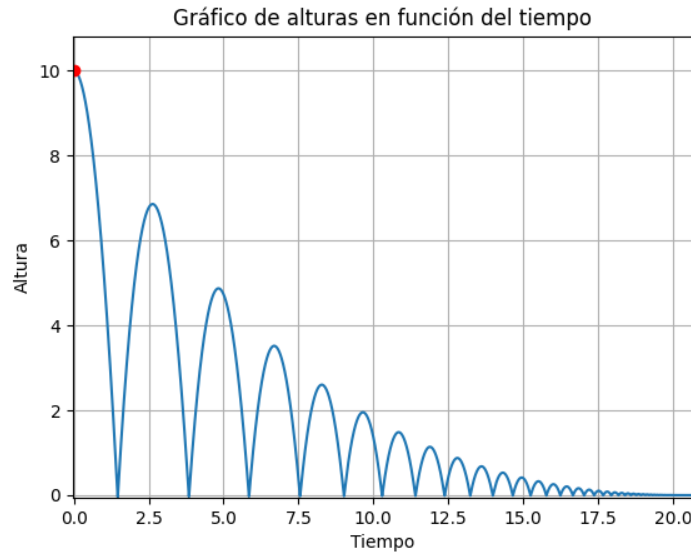


Figura 2.1 Gráfico de altura

Bajo estas restricciones nos quedó la siguiente simulación donde en la Figura 1.1 se puede apreciar la forma en la que la pelota alcanza la altura es mínima y la pelota comienza a rebotar.

Después de tocar el suelo, la pelota rebota hacia arriba, cada rebote se representa como un aumento en la altura en el gráfico. La altura de cada rebote es menor que la anterior debido a la pérdida de energía durante el impacto.

Eventualmente, la altura de los rebotes se estabiliza en un valor mínimo. Esto indica que la pelota ha alcanzado un estado de equilibrio, donde la energía perdida en cada rebote es igual a la energía ganada durante el siguiente rebote.

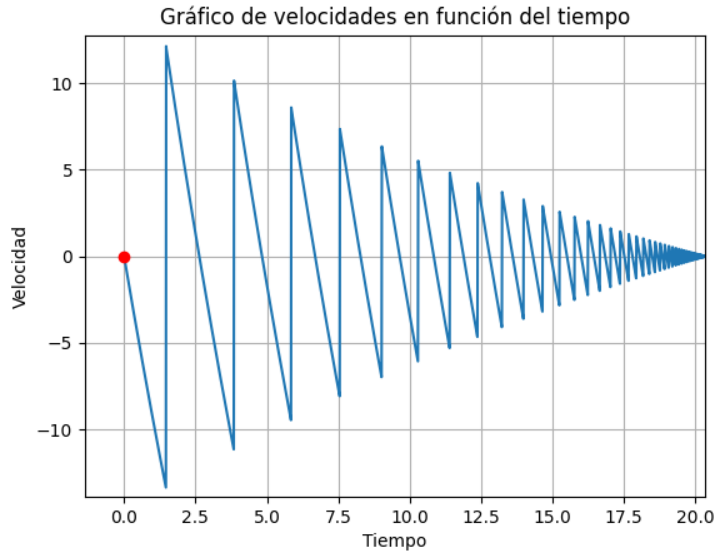


Figura 2.2 Grafico de velocidad

En el caso de la Figura 2.2 en el momento en que la pelota se suelta o se lanza desde su altura inicial, la velocidad es cero. Esto se debe a que la pelota no ha comenzado a moverse y está en reposo antes de caer. Durante la caída libre vertical, la velocidad aumenta constantemente. Esto se debe a que la aceleración debida a la gravedad es constante. En ausencia de fuerzas externas, la velocidad de la pelota aumentará a una tasa constante.

En algún punto del gráfico, la velocidad alcanza su valor máximo durante la caída. Después de este punto, la velocidad ya no aumentará, ya que la resistencia del aire y otros factores pueden comenzar a afectar el movimiento de la pelota. Cuando la pelota toca el suelo y rebota, la velocidad cambia de dirección instantáneamente.

La velocidad positiva durante la caída se convierte en una velocidad negativa durante el rebote, y así sucesivamente en cada rebote subsiguiente. Después de cada rebote, la magnitud de la velocidad disminuye, esto se debe a la pérdida de energía durante el impacto. Después de varios rebotes, la velocidad se estabiliza en un valor constante. Esto indica que la pelota ha alcanzado un equilibrio dinámico en el que la energía perdida durante el rebote es igual a la energía ganada durante el siguiente rebote.

### 3 Conclusiones

Existe una relación inversa entre la altura y la velocidad en la caída y rebotes de la pelota. A medida que la altura disminuye, la velocidad aumenta durante la caída. Por otro lado, durante los rebotes, la velocidad disminuye a medida que

la altura aumenta. Esta relación es coherente con la idea de que la velocidad es la derivada de la altura.

El punto en el gráfico de velocidad (2.2) donde se alcanza la máxima velocidad durante la caída se corresponde con el punto más bajo en el gráfico de altura, cuando la pelota toca el suelo. A partir de este punto, la velocidad comienza a disminuir debido a la pérdida de energía en el rebote.

La reversión de la dirección de la velocidad ocurre en el momento del rebote, cuando la pelota cambia de dirección vertical. El cambio de signo en la velocidad indica el cambio de movimiento de ascendente a descendente y viceversa.

Tanto la altura como la velocidad de la pelota tienden a estabilizarse después de varios rebotes. La altura se estabiliza en un valor mínimo, mientras que la velocidad se estabiliza en un valor constante, que puede ser positivo o negativo dependiendo de la altura alcanzada.