Capítulo 1

Exercícios parametrizados

Os exercícios parametrizados têm sido bastante utilizados por professores e investigadores ligados à área do Ensino. A maioria desses profissionais têm usado ambientes *web* a partir dos quais vários exercícios são gerados permitindo que os alunos façam autoestudo e auto-avaliação numa mesma unidade temática e que os professores tenham um banco de dados de exercícios semelhantes quer pelos conteúdos quer pelo nível de dificuldades ou ainda pelo nível de discriminação (PmatE, 2010; MEGUA,2010). Contudo, estes ambientes *web*, na sua maioria, fornecem aos utentes apenas a resposta correta dos exercícios sem no entanto apresentarem a resolução, caso do PmatE - Projecto Matemática Ensino da Universidade de Aveiro - Oliveira et at (2014). Neste trabalho, para além da elaboração de exercícios parametrizados e apresentação da resposta correta, são apresentadas as propostas de resoluções que conduzem à resposta correta bem como as possíveis causas que contribuem para obtenção de respostas erradas dos exercícios. Um projeto similar com fins pedagógicos designado por MEGUA (MEGUA, 2010), foi criado para auxiliar os alunos a serem autodidatas na medida em que, a partir dos exercícios disponibilizados na base de dados da plataforma, eles podem resolver diferentes exercícios sob o mesmo conteúdo e fazer a verificação dos resultados com base nas propostas de resolução disponibilizadas. Os professores são, também, beneficiados pois contribui na redução da atividade periódica de eleboração de exercícios sobre mesmos conteúdos, flexibiliza a produção de material didático e de apoio às aulas e à avaliação e pode, inclusive, reduzir o tempo necessário para esclarecer possíveis dúvidas aos alunos (Cruz et al, 2013).

Os exercícios apresentados neste trabalho foram desenvolvidos a partir do ambiente de trabalho do *SageMathCloud* (um *software* matemático livre e de código aberto, desenvolvido sob a licença GPL por uma comunidade de programadores e matemáticos, que busca ser uma alternativa para os principais sistemas proprietários de *software* matemático como o Magma, Maple, Mathematica e Matlab) que integra, dentre várias funções, a linguagem LaTeX (para efeitos de produção de texto matemático) e do R (para gerar valores aleatórios e calcular alguns indicadores numéricos). Uma das vantagens desta plataforma é que qualquer outro pesquisador que receba páginas de *SageMathCloud* é capaz de as partilhar e manipular sem a necessidade de aquisição de *software* proprietário (Stein, 2011). Isto foi notório aquando da utilização da plataforma para a produção deste trabalho. Essa funcionalidade tornou possível o acesso, a manipulação e a interação entre intervenientes sem que estivessem juntos presencialmente.

1.1 Conteúdos tratados

Os exercícios abordam, por opção, o tópico das variáveis aleatórias discretas. A cada exercício modelo estão associadas 4 respostas possíveis. A elaboração da resposta correta leva em conta todos os procedimentos válidos para a sua obtenção. As respostas erradas resultam das constatações de alguns erros cometidos pelos alunos verificadas no decurso da atividade docente do autor desta dissertação enquanto professor de Matemática em Moçambique, nomeadamente: interpretação errada ao nível do acontecimento em causa, dificuldades em distinguir a função massa de probabilidade da função acumulada de probabilidade, aplicação errada de propriedades da esperança e da variância, entre outros. A seguir são apresentados, resumidamente, alguns conceitos sobre variáveis aleatórias discretas baseando-se nas obras de Fonseca (2001), Casella & Berger (2002) e Murteira et al (2015).

Definição 2.1: A função $f(x)$ chama-se **função massa de probabilidade** (*probability mass function*) ou **função probabilidade** da variável aleatória (v.a.) discreta X se e só se:

$$f(x) = \begin{cases} P(X=x), & \text{se } x = x_i \\ 0, & \text{se } x \neq x_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

Definição 2.2: Designa-se por **função acumulada de probabilidade** (*cumulative distribution function*) ou **função de distribuição** de da v.a. X à função real de variável real F, definida por

$$F(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Toda função de distribuição F satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq F(x) \leq 1$;
- $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad$ e $\quad F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;
- $F(x)$ é não decrescente: $\Delta x > 0 \Rightarrow F(x) \leq F(x + \Delta x)$;
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ desde que $a < b$;
- F é contínua à direita: $F(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$;
- $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$, com $F(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} F(x)$.

Definição 2.3: Seja X uma v.a. discreta que assume diferentes valores reais $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. O **valor esperado** (a média ou a esperança) de X, denotado por $E(X)$ ou simplesmente μ, é dado por

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, f(x_i). \tag{1.3}$$

Este valor tem como uma das propriedades a linearidade do operador:

$$E(aX \pm b) = E(aX) \pm E(b) = aE(X) \pm b \tag{1.4}$$

onde a e b são constantes reais.

Definição 2.4: Seja X uma v.a. discreta que assume diferentes valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. A **variância** de X, simbolicamente representada por $V(X)$ ou simplesmente σ^2, é definida pela expressão

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 \quad \text{ou} \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{1.5}$$

Para quaisquer constantes reais a e b, é válida a propriedade

$$V(aX+b) = a^2 V(X)\,. \tag{1.6}$$

A parametrização que implementamos nos exercícios que a seguir propomos, consistiu em criar um algoritmo que permitisse gerar aleatoriamente, dentro de um conjunto definido, probabilidades associadas aos valores que a variável aleatória discreta assume. Tendo em conta as Definições 2.1 e 2.2, foi aplicado o seguinte algoritmo para a obtenção dessas probabilidades, partindo de valores iniciais para n, a e b.

1º Passo: gerar n valores aleatórios inteiros $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ compreendidos entre a e b, por exemplo e que funcionam como pesos de cada observação distinta x_i que irá fazer parte dos enunciados aleatórios;

2º Passo: determinar a probabilidade para ocorrência de cada um desses valores x_i usando a ponderação, excepto para o último isto é,

$$f(x_i) = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{1.7}$$

3º Passo: determinar o valor da n-ésima probabilidade de ocorrência de x_n, isto é,

$$f(x_n) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i). \tag{1.8}$$

O terceiro passo visa garantir, efetiva e numericamente, que a soma de todas as probabilidade seja igual a um. Este procedimento é importante para resolver problemas causados por arredondamentos em (1.7).

1.2 Descrição e proposta de resolução de exercícios

Quatro exercícios modelo com 4 opções de escolhas múltiplas (com apenas uma opção certa) são apresentados nesta secção. Para cada um dos exercícios é apresentado o enunciado, a descrição, a proposta de resolução correta e as possíveis causas das respostas erradas que constam nas opções não corretas.

1.2.1 Exercício 1

Enunciado

Um agricultor tem os seguintes valores para as estimativas das probabilidades correspondentes aos dias necessários para terminar determinada sementeira:

Número de dias	1	2	3	4	5
Probabilidades	0.05	0.20	0.35	0.30	0.10

A probabilidade de que uma sementeira escolhida aleatoriamente leve não mais de quatro dias é:

(a) 0.90

(b) 0.10

(c) 0.60

(d) 0.40

Parametrização

O enunciado é gerado automaticamente sempre que se executa o comando para a respetiva produção. Nesse processo, os valores das probabilidades são obtidos aleatoriamente por substituição de parâmetros definidos por valores numéricos e seguidamente são calculadas as opções de respostas. A v.a. número de dias para terminar uma sementeira toma somente 5 valores e, portanto, são gerados aleatoriamente 5 números inteiros entre $a = 1$ e $b = 20$: x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 (1º Passo). A seguir (2º Passo) são calculadas as probabilidades correspondentes: p_1, p_2, p_3 e p_4 excepto a última (p_5), isto é, $p_1 = \frac{x_1}{S}$, $p_2 = \frac{x_2}{S}$, $p_3 = \frac{x_3}{S}$ e $p_4 = \frac{x_4}{S}$, onde $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Finalmente (3º Passo) calcula-se o valor da última probabilidade: $p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$.

As opções de respostas quer a correta quer as incorretas são, igualmente, calculadas automaticamente utilizando os valores das probabilidades obtidas aleatoriamente tendo em conta procedimentos pré-definidos. Esses procedimentos são descritos na proposta de resolução e na justificação do porquê da resposta ser incorreta (falsa).

Descrição e proposta de resolução

Neste exercício espera-se que o aluno, a partir de uma tabela que traduz a função massa de probabilidade, calcule as probabilidades de ocorrência de qualquer evento. A variável aleatória X = "Número de dias para terminar uma sementeira" é discreta, as probabilidades associadas aos valores possíveis da variável são positivas e o seu somatório é igual à unidade. Verificadas essas condições, concluí-se que se trata de uma função massa de probabilidade. O pedido "a probabilidade de que uma sementeira escolhida aleatoriamente leve não mais de quatro dias" equivale a dizer "a probabilidade de que uma sementeira escolhida aleatoriamente leve um número de dias inferior ou igual a quatro", isto é,

$$P(X \leq 4)\,.$$

Lembre-se que para uma v.a. discreta, a função massa de probabilidade é dada pela expressão (1.1). Para o problema em causa, X assume números inteiros de 1 a 5 e os números iguais ou inferiores a 4 são 1, 2, 3 e 4. Assim, com base na tabela da função massa de probabilidade, dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.05	0.20	0.35	0.30	0.10

tem-se:

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0.05 + 0.20 + 0.35 + 0.30 \\ &= 0.90\,. \end{aligned}$$

Portanto:

(a) Verdadeira.

(b) É falsa porque considera a probabilidade correspondente à sementeira levar um número de dias superior 4, isto é, $P(X > 4)$.

(c) É falsa porque considera a probabilidade da sementeira terminar em um número dias estritamente inferiores a 4, isto é, $P(X < 4)$.

(d) É falsa porque considera a probabilidade da sementeira terminar em um número de dias igual ou superior a 4, isto é, $P(X \geq 4)$.

As opções erradas propostas neste exercício têm um aspecto em comum: má interpretação do evento de interesse.

1.2.2 Exercício 2

Enunciado

A distribuição de probabilidades relativa ao número de carros vendidos numa determinada semana, é dada pela seguinte tabela:

Número de carros vendidos ser menor ou igual	0	1	2	3	4	5
Probabilidades	0.10	0.30	0.65	0.83	0.95	1.0

A probabilidade de que, numa determinada semana, sejam vendidos exatamente três carros é:

(a) 0.18

(b) 0.83

(c) 0.95

(d) 0.55

Parametrização

Neste exercício, apesar de a v.a. tomar 6 valores, a parametrização segue a lógica utilizada no Exercício 1. Porém, observa-se que as probabilidades são acumuladas, isto é, estão associadas a um ou mais valores da v.a. Assim, depois de calculadas as probabilidades pontuais p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 e p_6 são obtidas as probabilidades acumuladas P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 tais que: $P_1 = p_1$, $P_2 = P_1 + p_2$, $P_3 = P_2 + p_3$, $P_4 = P_3 + p_4$, $P_5 = P_4 + p_5$ e $P_6 = P_5 + p_6$. A partir daí são obtidas as opções de respostas conforme se observa a seguir.

Descrição e proposta de resolução

Neste exercício espera-se que o aluno, a partir de uma tabela que traduz a função acumulada de probabilidade, calcule as probabilidades de ocorrência de qualquer evento associado a essa v.a. A v.a. X = "Número de carros vendidos por semana" é discreta, as probabilidades associadas aos valores possíveis da variável são positivas e, na tabela dada, o somatório das probabilidades não é igual à unidade. Analisando na tabela as probabilidades associadas aos valores acumulados da variável aleatória X, nota-se que estas são crescentes e que a última probabilidade é exatamente igual a 1. Estas condições caraterizam a função acumulada de probabilidade. Na sequência, apresenta-se a seguir, a proposta de resolução para "a probabilidade de, em uma determinada semana, vender exatamente três carros", que é o mesmo que determinar $P(X = 3)$.

Levando em considereção as características acima, $P(X = 3)$ pode ser encontrada aplicando a propriedade

$$P(X = a) = F(a) - F(a^-), \quad \text{com} \quad F(a^-) = \lim_{x \to a^-} F(x)\,.$$

Assim,

$$P(X = 3) = F(3) - F(3^-) = F(3) - F(2) = 0.83 - 0.65 = 0.18\,.$$

Para as opções apresentadas temos:

(a) Verdadeira.

(b) É falsa porque considera a probabilidade correspondente à venda de 3 carros, conforme a tabela do enunciado, como se de uma função massa de probabilidade se tratasse, isto é, determina $F(3)$ e não $P(X = 3)$.

(c) É falsa porque considera a soma dos valores das probabilidades apresentadas na tabela como se correspondesse a uma tabela da função massa de probabilidade e toma os valores correspondentes a venda de um ou dois carros, isto é, faz $F(1) + F(2)$.

(d) É falsa porque, apesar de encontrar a função massa de probabilidade, considera a soma dos valores das probabilidades correspondentes à venda de um ou dois carros, isto é, faz $P(X = 1) + P(X = 2)$.

1.2.3 Exercício 3

Enunciado

Considere o enunciado do Exercício 2. Sabe-se que, por semana, o vendedor recebe um salário fixo de 300 euros mais 150 euros por cada carro vendido. Para a semana seguinte, o salário esperado e a variância do salário semanal do vendedor são, respetivamente:

(a) 765 e 70425

(b) 1080 e 281700

(c) 1827 e -1377729

(d) 1950 e 70725

Parametrização

Tratando-se do mesmo enunciado do Exercício 2, mantém-se o processo de parametrização aplicado.

Descrição e proposta de resolução

Neste exercício, espera-se que o aluno, analisando os valores crescentes das probabilidades para valores acumulados da variável observada, compreenda que a tabela traduz a função acumulada de probabilidade e, a partir desta, encontre a função massa de probabilidade por forma a calcular a esperança e a variância da variável que traduz o salário semanal do vendedor.

Denotando por X a v.a. relativa ao "número de carros vendidos por semana" calculam-se, a seguir, as probabilidades associadas aos valores de X. O procedimento a aplicar é análogo ao descrito na resolução do Exercício 2, sendo aqui para todos os valores possíveis de X. Com efeito:

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= F(0) - F(0^-) = 0.16 - 0 = 0.16 \\
P(X=1) &= F(1) - F(1^-) = 0.23 - 0.16 = 0.07 \\
P(X=2) &= F(2) - F(2^-) = 0.32 - 0.23 = 0.09 \\
P(X=3) &= F(3) - F(3^-) = 0.45 - 0.32 = 0.13 \\
P(X=4) &= F(4) - F(4^-) = 0.74 - 0.45 = 0.29 \\
P(X=5) &= F(5) - F(5^-) = 1 - 0.74 = 0.26
\end{aligned}$$

Assim, a tabela da função massa de probabilidade é

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	0.16	0.07	0.09	0.13	0.29	0.26

Denotando a *comissão de venda* por c e o *salário fixo* por a, o salário esperado será dado por

$$E(cX + a)$$

e, pela propriedade de linearidade do operador esperança, resulta que

$$E(cX + a) = E(cX) + E(a) = cE(X) + a\,.$$

Sendo conhecidos os valores de c e de a, resta calcular a esperança $E(X)$ aplicando a fórmula (1.3):

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{6} x_i\, f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{5} i \times P(X = i) \\ &= 0 \times 0.16 + 1 \times 0.07 + 2 \times 0.09 + 3 \times 0.13 + 4 \times 0.29 + 5 \times 0.26 \\ &= 3.1\,, \end{aligned}$$

consequentemente

$$E(cX + a) = 150 \times 3.1 + 300 = 765\,.$$

Relativamente à variância, podemos obter o seu valor com base na propriedade (1.6) e ainda da fórmula (1.5).

Ora,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{6} x_i^2\, f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{5} i^2 \times P(X = i) \\ &= 0^2 \times 0.16 + 1^2 \times 0.07 + 2^2 \times 0.09 + 3^2 \times 0.13 + 4^2 \times 0.29 + 5^2 \times 0.26 \\ &= 12.74\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$V(X) = 12.74 - 3.1^2 = 3.13\,.$$

Finalmente é calculada a variância do salário esperado dada por:

$$V(cX + a) = c^2 V(X) = 150^2 \times 3.13 = 70425\,.$$

Portanto, para as opções sugeridas conclui-se:

(a) Verdadeira.

(b) Falsa. Esta opção resulta da troca dos valores dos parâmetros a e c, isto é, $E(300X+150)$ e $V(300X+150)$.

(c) Falsa. Esta opção resulta de usar as probabilidades de uma função acumulada de probabilidades para efetuar os cálculos da esperança e da variância pedidas.

(d) Falsa. Esta opção resulta de tomar o cálculo da esperança a partir da média aritmética dos valores da variável X sem ter em conta as probabilidades a eles associados e aplica erradamente a propriedade da variância fazendo $V(150X+300) = 150^2V(X)+300$.

1.2.4 Exercício 4

Enunciado

Os relatórios de uma agência bancária mostram que, em média, são atendidos 75 clientes por dia. Por forma a aumentar a eficiência dos seus funcionários, o administrador da agência bancária criou um sistema que oferece a cada funcionário um prémio de 750 euros por cada cliente extra atendido acima de 76 clientes por dia. O ganho operacional da agência é de 650 euros, para cada cliente extra atendido acima de 75 clientes por dia. Para cada um dos casos (oferecer prémio ou ter um ganho), o teto máximo é de 80 clientes por dia. As probabilidades de atendimento são:

Número de clientes	75	76	77	78	79	80
Probabilidades	0.23	0.19	0.06	0.2	0.1	0.22

Caso o sistema seja implementado, a agência espera ter um lucro (valor positivo) ou prejuízo (valor negativo) de:

(a) 336.5

(b) 2250

(c) 2796.5

(d) -336.5

Parametrização

Neste exercício, o processo de parametrização da tabela da função massa de probabilidade dada no enunciado é análogo ao aplicado ao Exercício 1.

Descrição e proposta de resolução

A ideia do exercício é obter o lucro (L) esperado pela agência com a implementação de um novo sistema, a partir da informação dos números de clientes que os funcionários da agência atendem por dia, os custos envolvidos e os respetivos ganhos. Assim sendo, o aluno precisa verificar que a tabela dada corresponde a uma função massa de probabilidade e seguidamente substituir os valores da variável "número de clientes atendidos por dia" pelos prémios (custos) e pelos ganhos (receitas), no contexto do problema. O aluno deve observar que a nova variável (L) resulta da diferença entre a receita (R) e o custo (C): $L = R - C$. Sendo L uma v.a. discreta, o lucro esperado é obtido aplicando a fórmula (1.3) para o cálculo da esperança:

$$E(L) = \sum_{i=1}^{6} l_i\, f(l_i) \quad \text{onde} \quad l_i = r_i - c_i\,.$$

Por opção, os cálculos preliminares são apresentados na tabela a seguir:

X	75	76	77	78	79	80	Total
R	0	650	1300	1950	2600	3250	-
C	0	0	750	1500	2250	3000	-
L	0	650	550	450	350	250	-
$P(L=l)$	0.23	0.19	0.06	0.2	0.1	0.22	1.0

$$E(L) = 0 \times 0.23 + 650 \times 0.19 + 550 \times 0.06 + 450 \times 0.2 + 350 \times 0.1 + 250 \times 0.22 = 336.5$$

Portanto:

(a) Verdadeira.

(b) Falsa. Calcula o lucro esperado somente a partir da relação $L = R - C$,tomando as probabilidades dada na tabela do enunciado e portanto ignorando completamente as corretas probabilidades associadas.

(c) Falsa. Esta opção resulta de considerar o lucro como a soma entre a receita e o custo ($L = R + C$).

(d) Falsa. Esta opção resulta de considerar o lucro como a diferença entre o custo e a receita ($L = C - R$).