



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas,
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Estatística VIII

M. Cristina Miranda e Anabela Rocha



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

1 Distribuições Teóricas. Caraterização de algumas distribuições contínuas.



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Distribuições Teóricas. Caraterização de algumas distribuições contínuas.



Distribuição Normal

Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Uma v.a. X segue uma distribuição Normal, se tiver a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right], x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] &= \mu \\ V[X] &= \sigma^2 \end{cases}$$



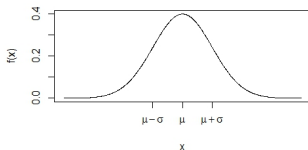
Distribuição Normal

Estatística

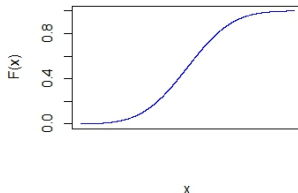
**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Função densidade: $X \sim N(\mu, \sigma)$



Normal: função de distribuição





Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Podemos obter no EXCEL os valores da função densidade e da função de distribuição para determinados valores da Média e da Variância:

Procurar uma função:

Escreva uma pequena descrição daquilo que deseja fazer e clique em 'Ir'

Ou seleccione uma categoria: Estatística

Selecione uma função:

- DIST.HIPGEOM
- DIST.NORMAL**
- DIST.NORMLOG
- DIST.POISSON
- DIST.S.NORM
- DIST.T
- DIST.T.2C

DIST.NORMAL(x;média;desv_padrão;cumulativo)

Devolve a distribuição cumulativa normal para a média e o desvio-padrão especificados.

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Para obter o valor da função de distribuição preenche-se o valor cumulativo com **1** (verdadeiro):

The image shows the Excel function wizard for the `=DIST.NORMAL()` function. The title bar reads "Argumentos de função" with a question mark and a close button. The function name "DIST.NORMAL" is displayed. Below it, four arguments are listed: "X", "Média", "Desv_padrão", and "Cumulativo". Each argument has a text input field, a selection icon, and a description: "X" is "número", "Média" is "número", "Desv_padrão" is "número", and "Cumulativo" is "lógico". Below the arguments, a description states: "Devolve a distribuição cumulativa normal para a média e o desvio-padrão especificados. X é o valor para o qual pretende obter a distribuição." At the bottom, it says "Resultado da fórmula =" followed by a blue link "Ajuda sobre esta função", and two buttons: "OK" and "Cancelar".

Argumento	Descrição
X	número
Média	número
Desv_padrão	número
Cumulativo	lógico

Devolve a distribuição cumulativa normal para a média e o desvio-padrão especificados.
X é o valor para o qual pretende obter a distribuição.

Resultado da fórmula =

[Ajuda sobre esta função](#) OK Cancelar

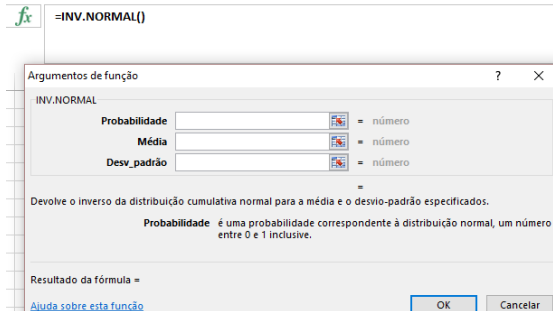


Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Podemos ainda determinar no EXCEL o valor de um quantil de probabilidade p :





● Exemplo

Supondo que a v.a. X segue uma distribuição Normal com valor médio $\mu = 4$ e variância $\sigma^2 = 2$, mostrar que:

- $f(2) = 0.1$;
- $F(2) = 0.08$;
- $P(X < 3) = 0.24$;
- $P(X > 4) = 0.5$;
- O valor do quantil de probabilidade $p = 0.1$ é $x = 2.19$.



Distribuição NORMAL PADRÃO ou NORMAL REDUZIDA

Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Normal(0,1)

Dizemos que Z segue uma distribuição Normal reduzida ou padrão:

$$Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} P(Z \leq z) &= \Phi(z) \\ \Phi(z) &= \int_{-\infty}^z \varphi(z) dz \end{cases}$$

$$E[Z] = 0 \text{ e } V[Z] = 1.$$

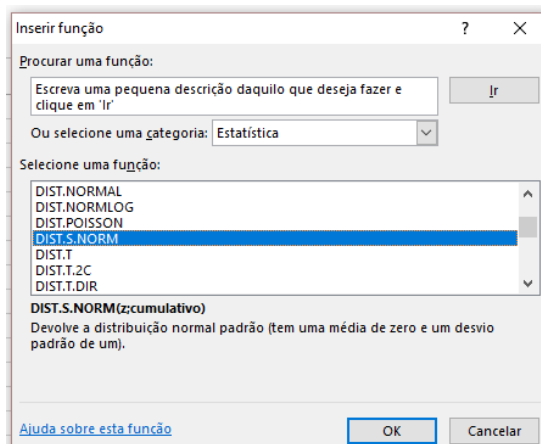


No EXCEL

Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.





- f.d.p. é simétrica em relação a μ ;
- f.d.p. tem dois pontos de inflexão em: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$;
- f.d.p. é mais achatada quanto maior for o valor de σ ;



$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1);$$



$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$



$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \forall z \in \mathbb{R}$$

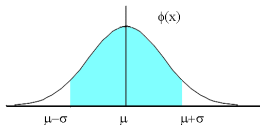
- Se X_i são v.a.s independentes e $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $\alpha_i \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \sim N(\mu, \sigma^2),$$

onde $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i$ e $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2$.



Note-se que, para qualquer distribuição Normal se tem,



$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= \\ &= P(-\sigma < X - \mu < \sigma) \\ &= P\left[-1 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 1\right] \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.68. \end{aligned}$$



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

$$\begin{aligned}P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) &= \\&= P(-3\sigma < X - \mu < 3\sigma) \\&= P\left[-3 < \frac{X - \mu}{\sigma} < 3\right] \\&= \Phi(3) - \Phi(-3) \\&= 2\Phi(3) - 1 \simeq 0.997.\end{aligned}$$



Os valores da tabela correspondem à área acumulada até z , sendo o valor das unidades e décimas de z expresso na primeira coluna (amarela) e os valores da casa da centésima na primeira linha (amarela) $\Phi(z) = P(Z \leq z)$:

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
...
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.999



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Tendo apenas disponível uma tabela com a distribuição Normal, é necessário centrar e reduzir antes do cálculo de probabilidades relativas a uma v.a. não standardizada, pois a tabela diz respeito em exclusivo à $N(0, 1)$.

2 Exemplo

- 1 Sendo $X \sim N(0, 1)$, calcule $P(X > 1.3)$;
- 2 Sendo $X \sim N(5, 4)$, calcule $P(X < 3)$;



Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

$$① P(X > 1.3) = 1 - P(X \leq 1.3)$$

$$= 1 - \Phi(1.3) = 1 - \mathbf{0.9032} = 0.0968.$$

$$② P(X < 3) = P\left(\frac{X - 5}{2} < \frac{3 - 5}{2}\right) = P(Z < -1) = \Phi(-1) =$$

$$= 1 - \Phi(1) = 1 - \mathbf{0.8413} = 0.1587$$

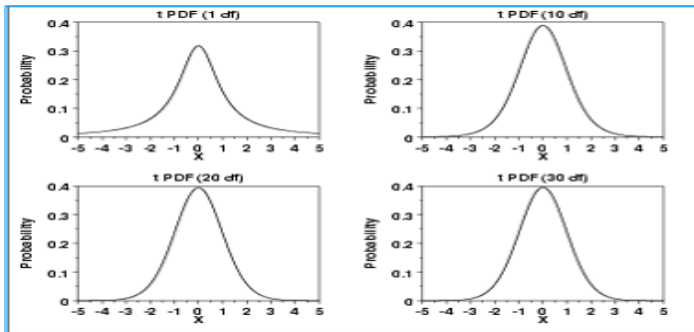


Distribuição T-Student

Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.





Propriedades da distribuição T-Student

Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

$$X \sim T_n \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] = 0 \\ V[X] = \frac{n}{n-2} \end{cases}, n \neq 1 \text{ (para } n=1 \text{ não existe;)}$$

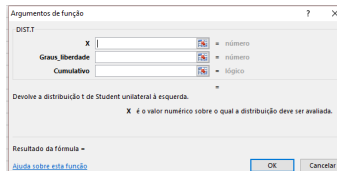
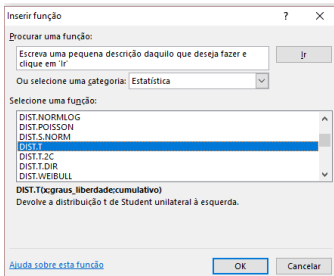


Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

obtém-se o valor de $F(x)$...





Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

E o valor do quantil de ordem p , $x : F(x) = p$:

Argumentos de função

INV.T

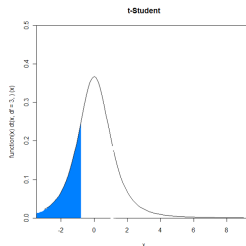
Probabilidade		número
Graus_Liberdade		número

Devolve o inverso unilateral à esquerda da distribuição t de Student.
Graus_Liberdade é um número inteiro positivo que indica o número de graus de liberdade que caracteriza a distribuição.

Resultado da fórmula =

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar





Aproximação da T-Student a uma Normal

Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

Para grandes valores de n , X aproxima-se da Normal padrão.

(regra prática: obtêm-se boas aproximações para $n > 30$).

Podemos calcular probabilidades relativas à variável X (com distribuição t-student) usando valores aproximados, obtidos com a distribuição Normal padrão.

$P(X < 2)$		
n	t-Student	Normal Padrão
2	0,908248	0,97725
5	0,949030	0,97725
10	0,96330	0,97725
15	0,968027	0,97725
20	0,970367	0,97725
30	0,972687	0,97725
500	0,976979	0,97725
1000	0,9771148	0,97725



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

1 Exemplo

Supondo que a v.a. T segue uma distribuição t-Student com 30 g.l., determine:

- 1 $F(1.5)$;
- 2 o quantil de ordem 0.96;
- 3 um valor aproximado para $F(1.5)$.



Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

- 1 $F(1.5) = P(X \leq 1.5) = (DIST.T(1, 5; 30; 1)) = 0,928;$
- 2 $x_{0.96} = x : F(x) = 0.96 \Leftrightarrow x = (INV.T(0,96; 30)) = 1,81;$
- 3 $F_t(1.5) \simeq F_N(1.5) = (DIST.S.NORM(1, 5; 1)) = 0.933.$



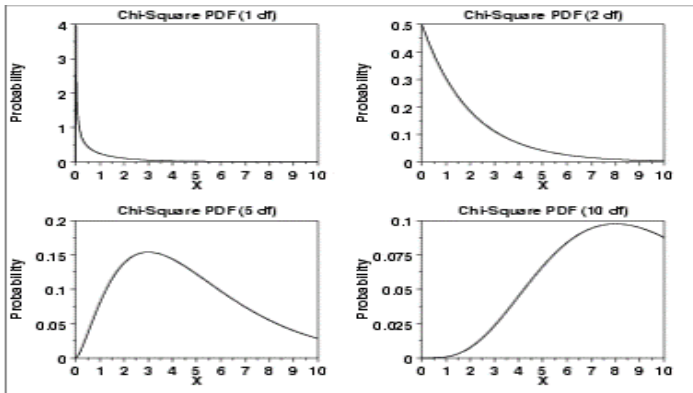
Distribuição Qui-quadrado

Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

$$X \sim \chi_n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] &= n \\ V[X] &= 2n \end{cases}$$





Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

obtém-se o valor de $F(x)$...

Argumentos de função ? X

DIST.CHIQ

X	3		= 3
Graus_liberdade	10		= 10
Cumulativo	1		= VERDADEIRO

= 0,018575936

Devolve a probabilidade unilateral à esquerda da distribuição chi-quadrado.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^{10} , excluindo 10^{10} .

Resultado da fórmula = 0,018575936

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar



No EXCEL

Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

E o valor do quantil de ordem p , $x : F(x) = p$:

Argumentos de função

INV.CHIQ

Probabilidade	,3	= 0,3
Graus_liberdade	10	= 10

= 7,267218166

Devolve o inverso da probabilidade unilateral à esquerda da distribuição chi-quadrado.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^{10} , excluindo 10^{10} .

Resultado da fórmula = 7,267218166

[Ajuda sobre esta função](#)

OK Cancelar



1 Exemplo

Supondo que a v.a. Y segue uma distribuição Qui-quadrado com 4 g.l., determine:

- 1 $F(2)$;
- 2 o quantil de ordem 0.99;
- 3 $P(2Y > 1)$.



Estatística

M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.

1 $F(2) = P(Y \leq 2) = (DIST.CHIQ(2; 4; 1)) = 0,264;$

2 $y_{0.99} = y : F(y) = 0.99 \backslash$
 $\Leftrightarrow y = (INV.CHIQ(0,99; 4)) = 13.2767;$



$$P(2Y > 1) = P(Y > \frac{1}{2}) = 1 - P(Y \leq \frac{1}{2}) = 1 - F(0.5)$$

$$= 1 - (DIST.CHIQ(0,5; 4; 1)) = 0.974.$$



Estatística

**M. Cristina
Miranda e
Anabela
Rocha**

Distribuições
Teóricas.
Caraterização
de algumas
distribuições
contínuas.