Estatística Descritiva

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k x_k$; $\overline{x} = \sum_{k=1}^{K} f_k x_k$.
$s_c^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$; $s_c^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{K} f_k(x_k-\overline{x})^2$.
Nota: $s^2 = \frac{(n-1)\,s_c^2}{n}$.
Momentos de ordem θ ($\theta = 1, 2, \ldots$) em relação à média:
$m_\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^\theta$; $m_\theta = \sum_{k=1}^{K} f_k(x_k-\overline{x})^\theta$.
Coeficiente de assimetria (*skewness*): $\frac{n^2}{(n-1)(n-2)}\frac{m_3}{s_c^3}$.
Ordem da observação correspondente ao quantil ordem α: $(n+1)\alpha$.
Barreiras de *outliers*:
$Q_1 - 1.5(Q_3-Q_1)$ e $Q_3 + 1.5(Q_3-Q_1)$;
$Q_1 - 3.0(Q_3-Q_1)$ e $Q_3 + 3.0(Q_3-Q_1)$.

Teoria Elementar da Probabilidade

$0 \le P(A) \le 1$; $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$; $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;
$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$; $P(A) \le P(B)$ se $A \subset B$;
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$;
$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ se A e B disjuntos;
$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ se A e B independentes.

Probabilidade condicionada
$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} \Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$;
$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$ se A e B independentes;
$\mathrm{P}(A\cap B\cap C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(C|A\cap B)$.

Teoremas: Se $\Omega = A_1\cup\ldots\cup A_n$, $A_i\cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, então,
(i) **Bayes**: $\mathrm{P}(A_i|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B|A_i)}{P(B)}$;
(ii) **Prob. Total**: $\mathrm{P}(B) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathrm{P}(A_j)\mathrm{P}(B|A_j)$.

Variáveis Aleatórias (v.a.'s)

Função massa de prob. (fmp), v.a. X discreta:
$f(x) = \mathrm{P}(X = x)$ é fmp sse (i) $0 \le f(x) \le 1$ e (ii) $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$.

Função densidade de prob. (fdp), v.a. X contínua:
$f(x)$ é fdp sse (i) $f(x) \ge 0$ e (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Função de distribuição (fd)

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \begin{cases} \sum_{x_i\le x} f(x_i), & X \text{ discreta;} \\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, & X \text{ contínua;} \end{cases}$$

$F(x)$ é fd sse (i) $0 \le F(x) \le 1$, (ii) F é contínua (só à direita, se X discreta), (iii) F é não decrescente,
(iv) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
Se X contínua, então $F'(x) = f(x)$.

Média ou valor esperado: $\mu = \mathbf{E}[X]$

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x_i} x_i \mathrm{P}(X = x_i), & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, & X \text{ contínua} \end{cases}$$

$\mathrm{E}[aX+b] = a\mathrm{E}[X] + b$; $\mathrm{E}[X+Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$;

Variância: $\sigma^2 = \mathbf{Var}[X]$ (Desvio padrão $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$)

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{x_i}(x_i-\mu)^2 \mathrm{P}(X = x_i), & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx, & X \text{ contínua} \end{cases}$$

$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mu^2$; $\mathrm{Var}[aX+b] = a^2\mathrm{Var}[X]$;
$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ se X e Y independentes;

Das propriedades resulta que: Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.'s i.i.d. com $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$, então $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tem $\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu$ e $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \sigma^2/n$.

Quantil de ordem p

$$x_p = \begin{cases} x_p : p \le F(x_p) \le p + \mathrm{P}(X = x_p), & X \text{ discreta} \\ x_p : F(x_p) = p, & X \text{ contínua} \end{cases}$$

(Exemplo: a mediana é o quantil de ordem $p = 1/2$.)

Distribuições e TLC

Bernoulli $X \sim Be(p)$
X= 1 ("sucesso" com prob. p) ou 0 (prob. $1-p$);
$\mathrm{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$;
$\mathrm{E}[X] = p$; $\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$.

Binomial $X \sim B(n, p)$
X= nº de "sucessos" em n provas independentes;
$\mathrm{P}(X = x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0, \ldots, n$
$\mathrm{E}[X] = np$; $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$;
Propriedade Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ são v.a.'s independentes com $X_i \sim B(n_i, p)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, então $\sum_{i=1}^{m} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$.

Geométrica (nº de provas) $X \sim G(p)$
X= nº de provas independentes até obter o primeiro "sucesso";
$\mathrm{P}(X = x) = (1-p)^{x-1}p$, $x = 1, 2, \ldots$;
$\mathrm{E}[X] = 1/p$; $\mathrm{Var}[X] = (1-p)/p^2$.

Hipergeométrica $X \sim H(N, M, n)$
X= nº de "sucessos" em n provas dependentes;
$\mathrm{P}(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$, $\forall x$ possíveis;
$\mathrm{E}[X] = np$; $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$; $p = M/N$.

Poisson $X \sim P(\lambda)$
Em geral, X= nº de ocorrências por intervalo de tempo ou regiões do espaço;
$\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$; $\lambda > 0$;
$\mathrm{E}[X] = \lambda$; $\mathrm{Var}[X] = \lambda$;
Propriedade Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes com $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Uniforme $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in (a, b) \\ 0 & , x \notin (a, b) \end{cases} \qquad \mathrm{E}[X] = (a+b)/2; \quad \mathrm{Var}[X] = (b-a)^2/12.$$

Exponencial $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$
Em geral, X= tempo de duração ou tempo entre ocorrências consecutivas;
$f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \ge 0$, $\lambda > 0$;
$\mathrm{E}[X] = 1/\lambda$; $\mathrm{Var}[X] = 1/\lambda^2$.

Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Normal Standard $X \sim N(0, 1)$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;
$\mathrm{E}[X] = \mu$; $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$;

(I) Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então (i) $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ e (ii) $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$;
(II) Se $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, ..., n$ são independentes, então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2)$;
(III) Se $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, ..., n$ são independentes, então $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Teorema do Limite Central (TLC)
Se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ é uma sucessão de v.a's i.i.d. com $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ e $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{n\to+\infty}{\sim} N(0,1).$$

Do **TLC** resulta que (i) $\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{aprox}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$ e (ii) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{aprox}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$, para n *suficientemente* elevado (em geral $n > 30$).

Estimação pontual

Método dos Momentos: (usualmente)
Um parâmetro: $\mathrm{E}[X] = \overline{X}$ (ou $\mathrm{Var}[X] = S^2$);
Dois parâmetros: $\mathrm{E}[X] = \overline{X}$ **e** $\mathrm{Var}[X] = S^2$.

TH - noções e procedimentos

Nível de significância:
$\alpha = P(\textbf{Erro Tipo I}) = \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira})$;
Potência do teste: $1 - \beta = 1 - P(\textbf{Erro Tipo II}) =$
$= \mathrm{P}(\text{rejeitar } H_0 | H_1 \text{ verdadeira})$;
Conversão *p-value* bilateral a unilateral:
Se a amostra aponta no sentido de H_1, então
p-value$_{\text{uni}} = \frac{p\text{-}value_{\text{bil}}}{2}$; senão *p-value*$_{\text{uni}} = 1 - \frac{p\text{-}value_{\text{bil}}}{2}$.
Cálculo de *p-value* num teste bilateral:
p-value$_{\text{bil}} = 2P(T < t_{obs}|\mathrm{H}_0)$, se t_{obs} é reduzido;
p-value$_{\text{bil}} = 2P(T > t_{obs}|\mathrm{H}_0)$, se t_{obs} é elevado.
Considera-se t_{obs} reduzido (elevado) quando a estimativa que se obtém para o parâmetro a testar é inferior (superior) ao valor especificado em H_0.

IC e TH em Populações Normais

Média populacional, μ, com σ^2 conhecida

Variável fulcral: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$; usa-se ET $\underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1)$.
(ET significa Estatística de Teste)

Média populacional, μ, com σ^2 desconhecida

Variável fulcral: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_c/\sqrt{n}}$; $T \sim t_{n-1}$

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) = \left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ usa-se $T \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{n-1}$.

Diferença $\mu_X - \mu_Y$ em amostras emparelhadas com variâncias desconhecidas

Considerar $D_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$, com $\mu_D = \mu_X - \mu_Y$.

Variável fulcral: $T = \dfrac{\overline{D} - \mu_D}{S_{cD}/\sqrt{n}}$; $T \sim t_{n-1}$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_D) = \left(\overline{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_{cD}}{\sqrt{n}}, \overline{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\dfrac{S_{cD}}{\sqrt{n}}\right)$

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu_D = \mu_0$ usa-se $T \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{n-1}$.

Diferença $\mu_X - \mu_Y$ em amostras independentes com variâncias conhecidas

Variável fulcral: $Z = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$; $Z \sim N(0,1)$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_X - \mu_Y) = \left(\overline{X} - \overline{Y} \mp z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n} + \dfrac{\sigma_Y^2}{m}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0$ usa-se $Z \underset{sob\ H_0}{\sim} N(0,1)$.

Diferença $\mu_X - \mu_Y$ em amostras independentes com variâncias desconhecidas (consideradas iguais)

Variável fulcral: $T = \dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\mathrm{S}}$; $T \sim t_{n+m-2}$,

onde $\mathrm{S} = \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{(n-1)S_{c\,X}^2 + (m-1)S_{c\,Y}^2}{n+m-2}}$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu_X - \mu_Y) = \left(\overline{X} - \overline{Y} \mp t_{1-\frac{\alpha}{2},n+m-2}\,\mathrm{S}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu_X - \mu_Y = \mu_0$ usa-se $T \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{n+m-2}$.

Variância populacional, σ^2, com μ conhecida

Variável fulcral: $V = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$; $V \sim \chi_n^2$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}, \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ usa-se $V \underset{sob\ H_0}{\sim} \chi_n^2$.

Variância populacional, σ^2, com μ desconhecida

Variável fulcral: $V = \dfrac{(n-1)S_c^2}{\sigma^2}$; $V \sim \chi_{n-1}^2$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left(\dfrac{(n-1)S_c^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}, \dfrac{(n-1)S_c^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ usa-se $V \underset{sob\ H_0}{\sim} \chi_{n-1}^2$.

IC e TH em outras Populações (invocando TLC)

Média populacional, μ, com σ^2 (des)conhecida

Variável fulcral: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$;$Z \overset{aprox}{\sim} N(0,1)$;

Variável fulcral: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S_c/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} N(0,1)$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) \overset{\text{TLC}}{\approx} \left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(\mu) \overset{\text{TLC}}{\approx} \left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\dfrac{S_c}{\sqrt{n}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$ usa-se $Z \underset{sob\ H_0}{\overset{aprox}{\sim}} N(0,1)$.

Proporção populacional, p

Estimador para p: $\widehat{p} = \frac{X}{n} \overset{aprox}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.
(X representa a quantidade de interesse na amostra.)

Variável fulcral: $Z = \dfrac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{aprox}{\sim} N(0,1)$;

$\mathrm{IC}_{1-\alpha}(p) \overset{\text{TLC}}{\approx} \left(\widehat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}, \widehat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$;

TH $\rightarrow$ $\mathrm{H}_0 : p = p_0$ usa-se $Z \underset{sob\ H_0}{\overset{aprox}{\sim}} N(0,1)$.