Estatística

VIII

M. Cristina Miranda e Anabela Rocha

1. Distribuições Teóricas. Caraterização de algumas distribuições contínuas.

Distribuições Teóricas. Caraterização de algumas distribuições contínuas.

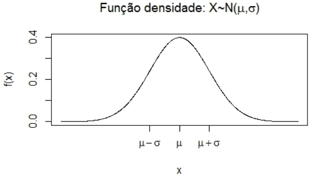
Distribuição Normal

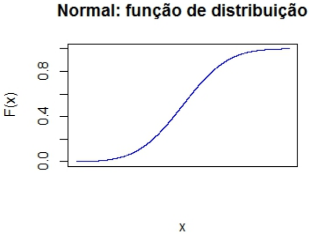
Uma v.a. X segue uma distribuição Normal, se tiver a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right], x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

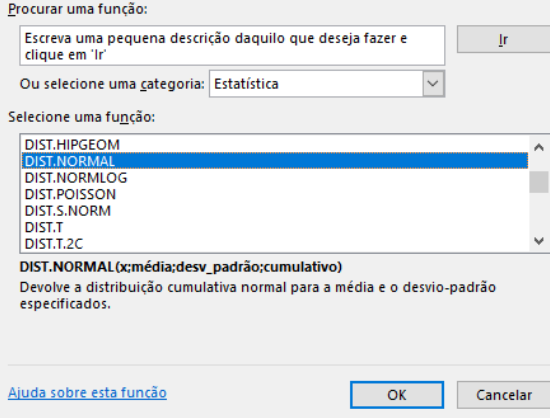
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] & = \mu \\ V[X] & = \sigma^2 \end{cases}$$

Distribuição Normal

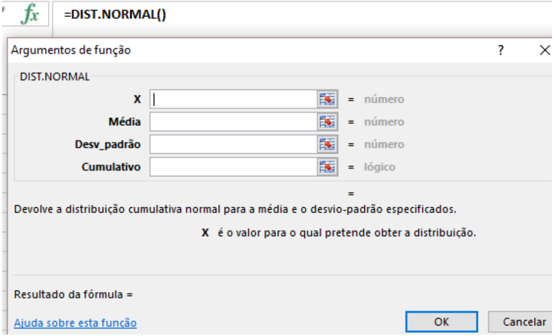




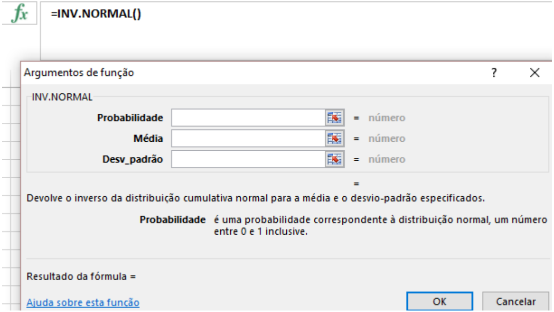
Podemos obter no EXCEL os valores da função densidade e da função de distribuição para determinados valores da Média e da Variância:



Para obter o valor da função de distribuição preenche-se o valor cumulativo com **1** (verdadeiro):



Podemos ainda determinar no EXCEL o valor de um quantil de probabilidade p:



1) Exemplo

Supondo que a v.a. X segue uma distribuição Normal com valor médio $\mu = 4$ e variância $\sigma^2 = 2$, mostrar que:

- $f(2) = 0.1$;
- $F(2) = 0.08$;
- $P(X < 3) = 0.24$;
- $P(X > 4) = 0.5$;
- O valor do quantil de probabilidade $p = 0.1$ é $x = 2.19$.

Distribuição NORMAL PADRÃO ou NORMAL REDUZIDA

Normal(0,1)

Dizemos que Z segue uma distribuição Normal reduzida ou padrão:

$$Z \sim N(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} P(Z \leq z) & = \Phi(z) \\ \Phi(z) & = \int_{-\infty}^{z} \varphi(z) dz \end{cases}$$

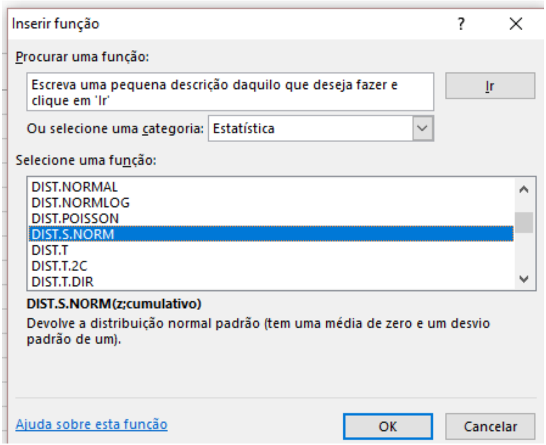
$$E[Z] = 0 \text{ e } V[Z] = 1.$$

Estatística

M. Cristina Miranda e Anabela Rocha

Distribuições Teóricas. Caraterização de algumas distribuições contínuas.

No EXCEL



Propriedades

- f.d.p. é simétrica em relação a μ;
- f.d.p. tem dois pontos de inflexão em: $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$;
- f.d.p. é mais achatada quanto maior for o valor de σ;
- $$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1);$$
- $$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow P(a < X < b) = \Phi(\frac{b - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma})$$

Propriedades

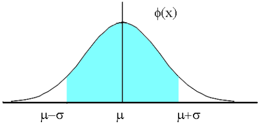
- $$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \forall z \in \mathbb{R}$$
- Se X_i são v.a.s independentes e $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $\alpha_i \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \sim N(\mu, \sigma^2),$$

onde $\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i$ e $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2$.

Propriedades

Note-se que, para qualquer distribuição Normal se tem,



$$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=$$

$$=P(-\sigma<X-\mu<\sigma)$$

$$=P\left[-1<\frac{X-\mu}{\sigma}<1\right]$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)$$

$$=2\Phi(1)-1\simeq 0.68.$$

$$
\begin{aligned}
&P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \\
&= P(-3\sigma < X - \mu < 3\sigma) \\
&= P\left[-3 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 3\right] \\
&= \Phi(3) - \Phi(-3) \\
&= 2\Phi(3) - 1 \backsimeq 0.997.
\end{aligned}
$$

Os valores da tabela correspondem à área acumulada até z, sendo o valor das unidades e décimas de z expresso na primeira coluna (amarela) e os valores da casa da centésima na primeira linha (amarela) $\Phi(z) = P(Z \leq z)$:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
...	...	...	...	...	...	...	.	.	.	.
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.999

Tendo apenas disponível uma tabela com a distribuição Normal, é necessário centrar e reduzir antes do cálculo de probabilidades relativas a uma v.a. não standardizada, pois a tabela diz respeito em exclusivo à $N(0,1)$.

2) Exemplo

1. Sendo $X \sim N(0,1)$, calcule $P(X > 1.3)$;
2. Sendo $X \sim N(5,4)$, calcule $P(X < 3)$;

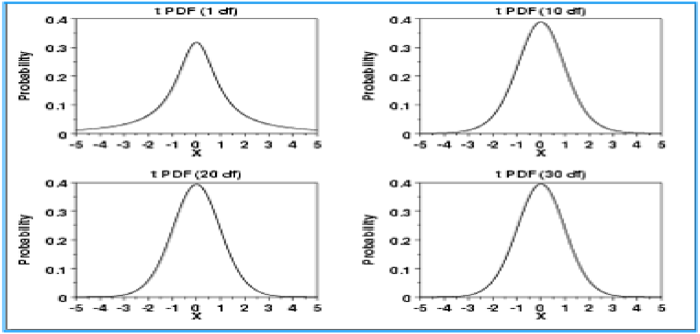
1. $P(X > 1.3) = 1 - P(X \leq 1.3)$

$= 1 - \Phi(1.3) = 1 - \mathbf{0.9032} = 0.0968.$

2. $P(X < 3) = P\left(\frac{X-5}{2} < \frac{3-5}{2}\right) = P(Z < -1) = \Phi(-1) =$

$= 1 - \Phi(1) = 1 - \mathbf{0.8413} = 0.1587$

Distribuição T-Student

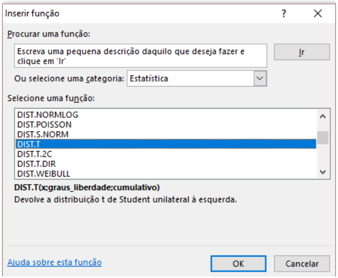


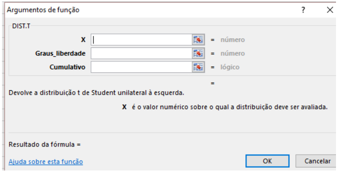
Propriedades da distribuição T-Student

$$X \sim T_n \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] = 0 & , n \neq 1 \text{ (para n=1 não existe;)} \\ V[X] = \dfrac{n}{n-2}. & \end{cases}$$

No EXCEL

obtém-se o valor de $F(x)\ldots$

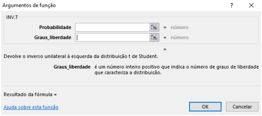


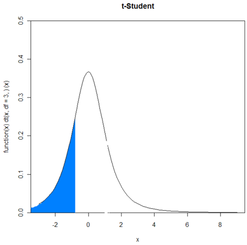


universidade de aveiro

No EXCEL

E o valor do quantil de ordem **p**, $x : F(x) = p$:





Aproximação da T-Student a uma Normal

Para grandes valores de n, X aproxima-se da Normal padrão.
(regra prática: obtêm-se boas aproximações para n>30).
Podemos calcular probabidades relativas à variável X (com distribuição t-student) usando valores aproximados, obtidos com a distribuição Normal padrão.

	P(X<2)	
n	t-Student	Normal Padrão
2	0,9082483	0,97725
5	0,949030	0,97725
10	0,96330	0,97725
15	0,968027	0,97725
20	0,970367	0,97725
30	0,972687	0,97725
500	0,976979	0,97725
1000	0,9771148	0,97725

3) Exemplo

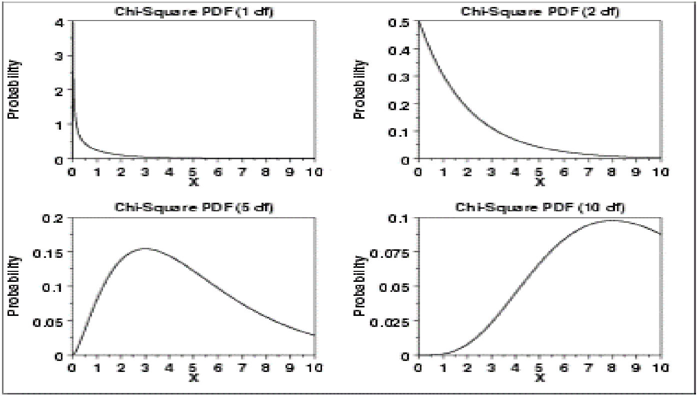
Supondo que a v.a. T segue uma distribuição t-Student com 30 g.l., determine:

1. F(1.5);
2. o quantil de ordem 0.96;
3. um valor aproximado para F(1.5).

1. $F(1.5) = P(X \leq 1.5) = (DIST.T(1,5;30;1)) = 0,928;$
2. $x_{0.96} = x : F(x) = 0.96 \Leftrightarrow x = (INV.T(0,96;30)) = 1,81;$
3. $F_t(1.5) \backsimeq F_N(1.5) = (DIST.S.NORM(1,5;1)) = 0.933.$

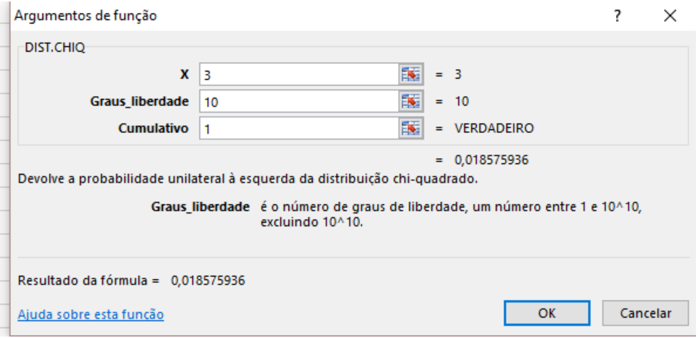
Distribuição Qui-quadrado

$$X \sim \chi^2_n \Leftrightarrow \begin{cases} E[X] & = n \\ V[X] & = 2n \end{cases}$$



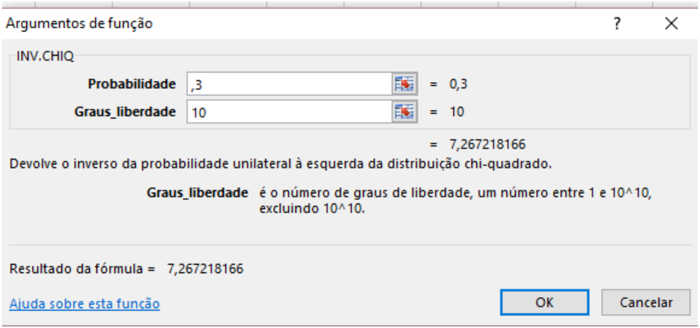
No EXCEL

obtém-se o valor de $F(x)\ldots$



No EXCEL

E o valor do quantil de ordem **p**, $x : F(x) = p$:



4) Exemplo

Supondo que a v.a. Y segue uma distribuição Qui-quadrado com 4 g.l., determine:

1. F(2);
2. o quantil de ordem 0.99;
3. $P(2Y > 1)$.

1. $F(2) = P(Y \leq 2) = (DIST.CHIQ(2;4;1)) = 0,264;$
2. $y_{0.99} = y : F(y) = 0.99\backslash$
   $\Leftrightarrow y = (INV.CHIQ(0,99;4)) = 13.2767;$
3. $$P(2Y > 1) = P(Y > \frac{1}{2}) = 1 - P(Y \leq \frac{1}{2}) = 1 - F(0.5)$$

$$= 1 - (DIST.CHIQ(0,5;4;1)) = 0.974.$$