

# Cálculo de Programas

## Trabalho Prático

### MiEI+LCC — 2019/20

Departamento de Informática  
Universidade do Minho

Junho de 2020

Grupo nr.	95
a84414	João Correia
a89582	Henrique Ribeiro
a85983	Filipe Felicio

## 1 Preâmbulo

A disciplina de **Cálculo de Programas** tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em **Haskell**. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em **Haskell**. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, validá-los, e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

## 2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita “**literária**” [?], cujo princípio base é o seguinte:

*Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1920t.pdf` que está a ler é já um exemplo de **programação literária**: foi gerado a partir do texto fonte `cp1920t.lhs`<sup>1</sup> que encontrará no **material pedagógico** desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1920t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1920t.lhs > cp1920t.tex
$ pdflatex cp1920t
```

em que **lhs2tex** é um pre-processor que faz “pretty printing” de código Haskell em **L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1920t.lhs` é executável e contém o “kit” básico, escrito em **Haskell**, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1920t.lhs
```

---

<sup>1</sup>O suffixo ‘lhs’ quer dizer *literate Haskell*.

Abra o ficheiro `cp1920t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo **GHCI** para ser executado.

### 3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na [página da disciplina](#) na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo **C** com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com **BibTeX**) e o índice remissivo (com **makeindex**),

```
$ bibtex cp1920t.aux
$ makeindex cp1920t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário **QuickCheck**, que ajuda a validar programas em **Haskell** e a biblioteca **Gloss** para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck gloss
```

Para testar uma propriedade **QuickCheck** *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Pode mesmo controlar o número de casos de teste e sua complexidade utilizando o comando:

```
> quickCheckWith stdArgs { maxSuccess = 200, maxSize = 10 } prop
+++ OK, passed 200 tests.
```

Qualquer programador tem, na vida real, de ler e analisar (muito!) código escrito por outros. No anexo **B** disponibiliza-se algum código **Haskell** relativo aos problemas que se seguem. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

### Problema 1

Pretende-se implementar um sistema de manutenção e utilização de um dicionário. Este terá uma estrutura muito peculiar em memória. Será construída uma árvore em que cada nodo terá apenas uma letra da palavra e cada folha da respectiva árvore terá a respectiva tradução (um ou mais sinónimos). Deverá ser possível:

- *dic\_rd* — procurar traduções para uma determinada palavra
- *dic\_in* — inserir palavras novas (palavra e tradução)
- *dic\_imp* — importar dicionários do formato “lista de pares palavra-tradução”
- *dic\_exp* — exportar dicionários para o formato “lista de pares palavra-tradução”.

A implementação deve ser baseada no módulo **Exp.hs** que está incluído no material deste trabalho prático, que deve ser estudado com atenção antes de abordar este problema.

No anexo **B** é dado um dicionário para testes, que corresponde à figura **1**. A implementação proposta deverá garantir as seguintes propriedades:



Figura 1: Representação em memória do dicionário dado para testes.

**Propriedade [QuickCheck] 1** Se um dicionário estiver normalizado (ver apêndice B) então não perdemos informação quando o representamos em memória:

$$\text{prop\_dic\_rep } x = \text{let } d = \text{dic\_norm } x \text{ in } (\text{dic\_exp} \cdot \text{dic\_imp}) d \equiv d$$

**Propriedade [QuickCheck] 2** Se um significado  $s$  de uma palavra  $p$  já existe num dicionário então adicioná-lo em memória não altera nada:

$$\begin{aligned} \text{prop\_dic\_red } p \ s \ d \\ | \text{ dic\_red } p \ s \ d = \text{dic\_imp } d \equiv \text{dic\_in } p \ s \ (\text{dic\_imp } d) \\ | \text{ otherwise} = \text{True} \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 3** A operação  $\text{dic\_rd}$  implementa a procura na correspondente exportação do dicionário:

$$\text{prop\_dic\_rd } (p, t) = \text{dic\_rd } p \ t \equiv \text{lookup } p \ (\text{dic\_exp } t)$$

## Problema 2

Árvores binárias (elementos do tipo **BTree**) são frequentemente usadas no armazenamento e procura de dados, porque suportam um vasto conjunto de ferramentas para procuras eficientes. Um exemplo de destaque é o caso das **árvores binárias de procura**, *i.e.* árvores que seguem o princípio de *ordenação*: para todos os nós, o filho à esquerda tem um valor menor ou igual que o valor no próprio nó; e de forma análoga, o filho à direita tem um valor maior ou igual que o valor no próprio nó. A Figura 2 apresenta dois exemplos de árvores binárias de procura.<sup>2</sup>

Note que tais árvores permitem reduzir *significativamente* o espaço de procura, dado que ao procurar um valor podemos sempre *reduzir a procura a um ramo* ao longo de cada nó visitado. Por exemplo, ao procurar o valor 7 na primeira árvore ( $t_1$ ), sabemos que nos podemos restringir ao ramo da direita do nó com o valor 5 e assim sucessivamente. Como complemento a esta explicação, consulte também os **vídeos das aulas teóricas** (capítulo ‘pesquisa binária’).

Para verificar se uma árvore binária está ordenada, é útil ter em conta a seguinte propriedade: considere uma árvore binária cuja raiz tem o valor  $a$ , um filho  $s_1$  à esquerda e um filho  $s_2$  à direita. Assuma

<sup>2</sup>As imagens foram geradas com recurso à função *dotBt* (disponível neste documento). Recomenda-se o uso desta função para efeitos de teste e ilustração.



Figura 2: Duas árvores binárias de procura; a da esquerda vai ser designada por  $t_1$  e a da direita por  $t_2$ .

que os dois filhos estão ordenados; que o elemento *mais à direita* de  $t_1$  é menor ou igual a  $a$ ; e que o elemento *mais à esquerda* de  $t_2$  é maior ou igual a  $a$ . Então a árvore binária está ordenada. Dada esta informação, implemente as seguintes funções como catamorfismos de árvores binárias.

$\text{maisEsq} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$   
 $\text{maisDir} :: \text{BTree } a \rightarrow \text{Maybe } a$

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar estas funções à árvore da esquerda ( $t_1$ ) e à árvore da direita ( $t_2$ ) da Figura 2.

```
*Splay> maisDir t1
Just 16
*Splay> maisEsq t1
Just 1
*Splay> maisDir t2
Just 8
*Splay> maisEsq t2
Just 0
```

**Propriedade [QuickCheck] 4** As funções  $\text{maisEsq}$  e  $\text{maisDir}$  são determinadas unicamente pela propriedade

$\text{prop\_inv} :: \text{BTree } \text{String} \rightarrow \text{Bool}$   
 $\text{prop\_inv} = \text{maisEsq} \equiv \text{maisDir} \cdot \text{invBTree}$

**Propriedade [QuickCheck] 5** O elemento *mais à esquerda* de uma árvore está presente no ramo da esquerda, a não ser que esse ramo esteja vazio:

$\text{propEsq } \text{Empty} = \text{property } \text{Discard}$   
 $\text{propEsq } x@(Node(a, (t, s))) = (\text{maisEsq } t) \neq \text{Nothing} \Rightarrow (\text{maisEsq } x) \equiv \text{maisEsq } t$

A próxima tarefa deste problema consiste na implementação de uma função que insere um novo elemento numa árvore binária *preservando* o princípio de ordenação,

$\text{insOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{BTree } a$

e de uma função que verifica se uma dada árvore binária está ordenada,

$\text{isOrd} :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow \text{Bool}$

Para ambas as funções deve utilizar o que aprendeu sobre *catamorfismos e recursividade mútua*.

**Sugestão:** Se tiver problemas em implementar com base em catamorfismos estas duas últimas funções, tente implementar (com base em catamorfismos) as funções auxiliares

$\text{insOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow a \rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{BTree } a, \text{BTree } a)$   
 $\text{isOrd}' :: (\text{Ord } a) \Rightarrow \text{BTree } a \rightarrow (\text{Bool}, \text{BTree } a)$

tais que  $\text{insOrd}' x = \langle \text{insOrd } x, \text{id} \rangle$  para todo o elemento  $x$  do tipo  $a$  e  $\text{isOrd}' = \langle \text{isOrd}, \text{id} \rangle$ .



Figura 3: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.



Figura 4: Exemplo de uma rotação à direita. A árvore da esquerda é a árvore original; a árvore da direita representa a rotação à direita correspondente.

**Propriedade [QuickCheck] 6** Inserir uma sucessão de elementos numa árvore vazia gera uma árvore ordenada.

$prop\_ord :: [Int] \rightarrow Bool$   
 $prop\_ord = isOrd \cdot (foldr insOrd Empty)$

As árvores binárias providenciam uma boa maneira de reduzir o espaço de procura. Mas podemos fazer ainda melhor: podemos aproximar da raiz os elementos da árvore que são mais acedidos, reduzindo assim o espaço de procura na *dimensão vertical*<sup>3</sup>. Esta operação é geralmente referida como *splaying* e é implementada com base naquilo a que chamamos *rotações à esquerda e à direita de uma árvore*.

Intuitivamente, a rotação à direita de uma árvore move todos os nós "uma casa para a sua direita". Formalmente, esta operação define-se da seguinte maneira:

1. Considere uma árvore binária e designe a sua raiz pela letra  $r$ . Se  $r$  não tem filhos à esquerda então simplesmente retornamos a árvore dada à entrada. Caso contrário,
2. designe o filho à esquerda pela letra  $l$ . A árvore que vamos retornar tem  $l$  na raiz, que mantém o filho à esquerda e adota  $r$  como o filho à direita. O orfão (*i.e.* o anterior filho à direita de  $l$ ) passa a ser o filho à esquerda de  $r$ .

A rotação à esquerda é definida de forma análoga. As Figuras 3 e 4 apresentam dois exemplos de rotações à direita. Note que em ambos os casos o valor 2 subiu um nível na árvore correspondente. De facto, podemos sempre aplicar uma *sequência* de rotações numa árvore de forma a mover um dado nó para a raiz (dando origem portanto à referida operação de splaying).

Comece então por implementar as funções

<sup>3</sup>Note que nas árvores de binária de procura a redução é feita na dimensão horizontal.

```

rrot :: BTree a → BTree a
lrot :: BTree a → BTree a

```

de rotação à direita e à esquerda.

**Propriedade [QuickCheck] 7** As rotações à esquerda e à direita preservam a ordenação das árvores.

```

prop_ord_pres_esq = forAll orderedBTree (isOrd · lrot)
prop_ord_pres_dir = forAll orderedBTree (isOrd · rrot)

```

De seguida implemente a operação de splaying

```

splay :: [Bool] → (BTree a → BTree a)

```

como um catamorfismo de listas. O argumento `[Bool]` representa um caminho ao longo de uma árvore, em que o valor `True` representa "seguir pelo ramo da esquerda" e o valor `False` representa "seguir pelo ramo da direita". O caminho ao longo de uma árvore serve para *identificar* unicamente um nó dessa árvore.

**Propriedade [QuickCheck] 8** A operação de splay preserva a ordenação de uma árvore.

```

prop_ord_pres_splay :: [Bool] → Property
prop_ord_pres_splay path = forAll orderedBTree (isOrd · (splay path))

```

### Problema 3

Árvores de decisão binárias são estruturas de dados usadas na área de **machine learning** para codificar processos de decisão. Geralmente, tais árvores são geradas por computadores com base num vasto conjunto de dados e reflectem o que o computador "aprendeu" ao processar esses mesmos dados. Segue-se um exemplo muito simples de uma árvore de decisão binária:



Esta árvore representa o processo de decisão relativo a ser preciso ou não levar um guarda-chuva para uma viagem, dependendo das condições climáticas. Essencialmente, o processo de decisão é efectuado ao "percorrer" a árvore, escolhendo o ramo da esquerda ou da direita de acordo com a resposta à pergunta correspondente. Por exemplo, começando da raiz da árvore, responder `["não", "não"]` leva-nos à decisão "não precisa" e responder `["não", "sim"]` leva-nos à decisão "precisa".

Árvores de decisão binárias podem ser codificadas em **Haskell** usando o seguinte tipo de dados:

```

data Bdt a = Dec a | Query (String, (Bdt a, Bdt a)) deriving Show

```

Note que o tipo de dados `Bdt` é parametrizado por um tipo de dados `a`. Isto é necessário, porque as decisões podem ser de diferentes tipos: por exemplo, respostas do tipo "sim ou não" (como apresentado acima), a escolha de números, ou **classificações**.

De forma a conseguirmos processar árvores de decisão binárias em **Haskell**, deve, antes de tudo, resolver as seguintes alíneas:

1. Definir as funções `inBdt`, `outBdt`, `baseBdt`, `cataBdt`, e `[[·]]`.
2. Apresentar no relatório o diagrama de `[[·]]`.

Para tomar uma decisão com base numa árvore de decisão binária  $t$ , o computador precisa apenas da estrutura de  $t$  (*i.e.* pode esquecer a informação nos nós da árvore) e de uma lista de respostas “sim ou não” (para que possa percorrer a árvore da forma desejada). Implemente então as seguintes funções na forma de *catamorfismos*:

1.  $extLTree : Bdt\ a \rightarrow LTree\ a$  (esquece a informação presente nos nós de uma dada árvore de decisão binária).

**Propriedade [QuickCheck] 9** A função  $extLTree$  preserva as folhas da árvore de origem.

$$\begin{aligned} prop\_pres\_tips &:: Bdt\ Int \rightarrow Bool \\ prop\_pres\_tips &= tipsBdt \equiv tipsLTree \cdot extLTree \end{aligned}$$

2.  $navLTree : LTree\ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree\ a)$  (navega um elemento de  $LTree$  de acordo com uma sequência de respostas “sim ou não”. Esta função deve ser implementada como um catamorfismo de  $LTree$ . Neste contexto, elementos de  $[Bool]$  representam sequências de respostas: o valor  $True$  corresponde a “sim” e portanto a “segue pelo ramo da esquerda”; o valor  $False$  corresponde a “não” e portanto a “segue pelo ramo da direita”.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar  $navLTree$  a  $(extLTree\ bdtGC)$ , em que  $bdtGC$  é a árvore de decisão binária acima descrita, e a uma sequência de respostas.

```
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) []
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False]
Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa")
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True]
Leaf "Precisa"
*ML> navLTree (extLTree bdtGC) [False,True,True,True]
Leaf "Precisa"
```

**Propriedade [QuickCheck] 10** Percorrer uma árvore ao longo de um caminho é equivalente a percorrer a árvore inversa ao longo do caminho inverso.

$$\begin{aligned} prop\_inv\_nav &:: Bdt\ Int \rightarrow [Bool] \rightarrow Bool \\ prop\_inv\_nav\ t\ l &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t\ \mathbf{in} \\ &\quad invLTree\ (navLTree\ t'\ l) \equiv navLTree\ (invLTree\ t')\ (fmap\ \neg\ l) \end{aligned}$$

**Propriedade [QuickCheck] 11** Quanto mais longo for o caminho menos alternativas de fim irão existir.

$$\begin{aligned} prop\_af &:: Bdt\ Int \rightarrow ([Bool],[Bool]) \rightarrow Property \\ prop\_af\ t\ (l1,l2) &= \mathbf{let}\ t' = extLTree\ t \\ &\quad f = \mathbf{length} \cdot tipsLTree \cdot (navLTree\ t') \\ &\quad \mathbf{in}\ isPrefixOf\ l1\ l2 \Rightarrow (f\ l1 \geq f\ l2) \end{aligned}$$

## Problema 4

Mónades são funtores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca **Probability** oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\mathbf{newtype}\ Dist\ a = D\ \{\mathit{unD} :: [(a, ProbRep)]\} \tag{1}$$

em que  $ProbRep$  é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par  $(a, p)$  numa distribuição  $d :: \text{Dist } a$  indica que a probabilidade de  $a$  é  $p$ , devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de  $d$  somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de  $A$  a  $E$ ,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A', 0.02), ('B', 0.12), ('C', 0.29), ('D', 0.35), ('E', 0.22)]
```

que o **GHCI** mostrará assim:

```
'D' 35.0%
'C' 29.0%
'E' 22.0%
'B' 12.0%
'A' 2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

```
d2 = uniform (words "Uma frase de cinco palavras")
```

isto é

```
"Uma" 20.0%
"cinco" 20.0%
"de" 20.0%
"frase" 20.0%
"palavras" 20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

```
d3 = normal [10..20]
```

etc.<sup>4</sup> `Dist` forma um **mónade** cuja unidade é `return a = D [(a, 1)]` e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g) a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g \ a, (y, q) \leftarrow f \ x]$$

em que  $g : A \rightarrow \text{Dist } B$  e  $f : B \rightarrow \text{Dist } C$  são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*. Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica. Vamos estudar a aplicação deste mónade ao exercício anterior, tendo em conta o facto de que nem sempre podemos responder com 100% de certeza a perguntas presentes em árvores de decisão.

Considere a seguinte situação: a Anita vai trabalhar no dia seguinte e quer saber se precisa de levar guarda-chuva. Na verdade, ela tem autocarro de porta de casa até ao trabalho, e portanto as condições meteorológicas não são muito significativas; a não ser que seja segunda-feira... Às segundas é dia de feira e o autocarro vai sempre lotado! Nesses dias, ela prefere fazer a pé o caminho de casa ao trabalho, o que a obriga a levar guarda-chuva (nos dias de chuva). Abaixo está apresentada a árvore de decisão

<sup>4</sup>Para mais detalhes ver o código fonte de **Probability**, que é uma adaptação da biblioteca **PHP** ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser souber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].



respectiva a este problema.



Assuma que a Anita não sabe em que dia está, e que a previsão da chuva para a ida é de 80% enquanto que a previsão de chuva para o regresso é de 60%. *A Anita deve levar guarda-chuva?* Para responder a esta questão, iremos tirar partido do que se aprendeu no exercício anterior. De facto, a maior diferença é que agora as respostas ("sim" ou "não") são dadas na forma de uma distribuição sobre o tipo de dados *Bool*. Implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$bnavLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ Bool) \rightarrow LTree\ a)$$

que percorre uma árvore dado um caminho, *não* do tipo  $[Bool]$ , mas do tipo  $BTree\ Bool$ . O tipo  $BTree\ Bool$  é necessário na presença de incerteza, porque neste contexto não sabemos sempre qual a próxima pergunta a responder. Teremos portanto que ter resposta para todas as perguntas na árvore de decisão.

Seguem alguns exemplos dos resultados que se esperam ao aplicar *bnavLTree* a (*extLTree* *anita*), em que *anita* é a árvore de decisão acima descrita, e a uma árvore binária de respostas.

```

*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Empty,Empty)))
Fork (Leaf "Precisa",Fork (Leaf "Precisa",Leaf "N precisa"))
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(True, (Node(True, (Empty,Empty)),Empty)))
Leaf "Precisa"
*ML> bnavLTree (extLTree anita) (Node(False, (Empty,Empty)))
Leaf "N precisa"

```

Por fim, implemente como um catamorfismo de *LTree* a função

$$pbnvLTree :: LTree\ a \rightarrow ((BTree\ (Dist\ Bool)) \rightarrow Dist\ (LTree\ a))$$

que deverá consistir na "monadificação" da função *bnavLTree* via a mónade das probabilidades. Use esta última implementação para responder se a Anita deve levar guarda-chuva ou não dada a situação acima descrita.

## Problema 5

Os **mosaicos de Truchet** são padrões que se obtêm gerando aleatoriamente combinações bidimensionais de ladrilhos básicos. Os que se mostram na figura 5 são conhecidos por ladrilhos de Truchet-Smith. A figura 6 mostra um exemplo de mosaico produzido por uma combinação aleatória de 10x10 ladrilhos *a* e *b* (cf. figura 5).

Neste problema pretende-se programar a geração aleatória de mosaicos de Truchet-Smith usando o mónade **Random** e a biblioteca **Gloss** para produção do resultado. Para uniformização das respostas, deverão ser seguidas as seguintes condições:

- Cada ladrilho deverá ter as dimensões 80x80
- O programa deverá gerar mosaicos de quaisquer dimensões, mas deverá ser apresentado como figura no relatório o mosaico de 10x10 ladrilhos.
- Valorizar-se-ão respostas elegantes e com menos linhas de código **Haskell**.

No anexo B é dada uma implementação da operação de permuta aleatória de uma lista que pode ser útil para resolver este exercício.



Figura 5: Os dois ladrilhos de Truchet-Smith.



Figura 6: Um mosaico de Truchet-Smith.

# Anexos

## A Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}
 id &= \langle f, g \rangle \\
 &\equiv \{ \text{universal property} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
 &\equiv \{ \text{identity} \} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
 &\square
 \end{aligned}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X *xymatrix*, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\text{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\
 \downarrow \langle g \rangle & & \downarrow id + \langle g \rangle \\
 B & \xleftarrow{g} & 1 + B
 \end{array}$$

## B Código fornecido

### Problema 1

Função de representação de um dicionário:

```
dic_imp :: [(String, [String])] -> Dict
dic_imp = Term "" · map (bmap id singl) · untar · discollect
```

onde

```
type Dict = Exp String String
```

Dicionário para testes:

```
d :: [(String, [String])]
d = [("ABA", ["BRIM"]),
      ("ABALO", ["SHOCK"]),
      ("AMIGO", ["FRIEND"]),
      ("AMOR", ["LOVE"]),
      ("MEDO", ["FEAR"]),
      ("MUDO", ["DUMB", "MUTE"]),
      ("PE", ["FOOT"]),
      ("PEDRA", ["STONE"]),
      ("POBRE", ["POOR"]),
      ("PODRE", ["ROTTEN"])]
```

Normalização de um dicionário (remoção de entradas vazias):

```
dic_norm = collect · filter p · discollect where
  p (a, b) = a > "" ∧ b > ""
```

Teste de redundância de um significado *s* para uma palavra *p*:

```
dic_red p s d = (p, s) ∈ discollect d
```

---

<sup>5</sup>Exemplos tirados de [?].

## Problema 2

Árvores usadas no texto:

```
emp x = Node (x, (Empty, Empty))
t7 = emp 7
t16 = emp 16
t7_10_16 = Node (10, (t7, t16))
t1_2_nil = Node (2, (emp 1, Empty))
t' = Node (5, (t1_2_nil, t7_10_16))
t0_2_1 = Node (2, (emp 0, emp 3))
t5_6_8 = Node (6, (emp 5, emp 8))
t2 = Node (4, (t0_2_1, t5_6_8))
dotBt :: (Show a) => BTree a -> IO ExitCode
dotBt = dotpict · bmap Just Just · cBTree2Exp · (fmap show)
```

## Problema 3

Funções usadas para efeitos de teste:

```
tipsBdt :: Bdt a -> [a]
tipsBdt = cataBdt [singl, ( $\widehat{++}$ ) ·  $\pi_2$ ]
tipsLTree = tips
```

## Problema 5

Função de permutação aleatória de uma lista:

```
permuta [] = return []
permuta x = do { (h, t) ← getR x; t' ← permuta t; return (h : t') } where
  getR x = do { i ← getStdRandom (randomR (0, length x - 1)); return (x !! i, retira i x) }
  retira i x = take i x ++ drop (i + 1) x
```

## QuickCheck

Código para geração de testes:

```
instance Arbitrary a => Arbitrary (BTree a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = return (inBTree $ i1 ())
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry (inBTree · i2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (inBTree · i2))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]
instance (Arbitrary v, Arbitrary o) => Arbitrary (Exp v o) where
  arbitrary = (genExp 10) where
    genExp 0 = liftM (inExp · i1) QuickCheck.arbitrary
    genExp n = oneof [liftM (inExp · i2 · ( $\lambda a \rightarrow (a, [])$ )) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i1) QuickCheck.arbitrary,
      liftM (inExp · i2 · ( $\lambda (a, (b, c)) \rightarrow (a, [b, c])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,)
        (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)))),
      liftM (inExp · i2 · ( $\lambda (a, (b, c, d)) \rightarrow (a, [b, c, d])$ ))
      $ (liftM2 (,) QuickCheck.arbitrary (liftM3 (,,
```

```

    (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1)) (genExp (n - 1))))
  ]
orderedBTree :: Gen (BTree Int)
orderedBTree = liftM (foldr insOrd Empty) (QuickCheck.arbitrary :: Gen [Int])
instance (Arbitrary a) => Arbitrary (Bdt a) where
  arbitrary = sized genbt where
    genbt 0 = liftM Dec QuickCheck.arbitrary
    genbt n = oneof [(liftM2 $ curry Query)
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt (n - 1))),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt (n - 1)) (genbt 0)),
      (liftM2 $ curry (Query))
      QuickCheck.arbitrary (liftM2 (,) (genbt 0) (genbt (n - 1)))]

```

## Outras funções auxiliares

Lógicas:

```

infixr 0 =>
(=>) :: (Testable prop) => (a -> Bool) -> (a -> prop) -> a -> Property
p => f = λa -> p a => f a
infixr 0 <=>
(<=>) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> a -> Property
p <=> f = λa -> (p a => property (f a)) .&&. (f a => property (p a))
infixr 4 ≡
(≡) :: Eq b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f ≡ g = λa -> f a ≡ g a
infixr 4 ≤
(≤) :: Ord b => (a -> b) -> (a -> b) -> (a -> Bool)
f ≤ g = λa -> f a ≤ g a
infixr 4 ∧
(∧) :: (a -> Bool) -> (a -> Bool) -> (a -> Bool)
f ∧ g = λa -> (f a) ∧ (g a)

```

Compilação e execução dentro do interpretador:<sup>6</sup>

```
run = do { system "ghc cp1920t"; system "./cp1920t" }
```

## C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o “layout” que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

### Problema 1

#### Definições auxiliares

```

data XNat a = Zero a | Succ (XNat a) deriving Show
inXNat = [Zero, Succ]
outXNat (Zero a) = i1 a
outXNat (Succ n) = i2 n
baseXNat f g = f + g

```

<sup>6</sup>Pode ser útil em testes envolvendo [Gloss](#). Nesse caso, o teste em causa deve fazer parte de uma função *main*.

```

recXNat f = baseXNat id f
cataXNat a = a · (recXNat (cataXNat a)) · outXNat
anaXNat f = inXNat · (recXNat (anaXNat f)) · f
hyloXNat a c = cataXNat a · anaXNat c
codiag = [id, id]
tailr = hyloXNat codiag
while2 p f g = tailr ((g + f) · grd (¬ · p))

```

## Discollect

```

discollect :: (Ord b, Ord a) => [(b, [a])] -> [(b, a)]
discollect = cataList g where
  g = [[], (⊕) · (f × id)]
  where f (a, l) = map ⟨a, id⟩ l

```

Foi também desenvolvida um versão utilizando o operador bind

```

discollect2 :: (Ord b, Ord a) => [(b, [a])] -> [(b, a)]
discollect2 = (≫=f)
  where f (a, l) = map ⟨a, id⟩ l

```

## Dic\_exp

```

dic_exp :: Dict -> [(String, [String])]
dic_exp = collect · tar
tar = cataExp g where
  g = [singl · ⟨" ", id⟩, f]
  f (a, b) = map ((⊕) a × id) (concat b)

```

## Dic\_rd

```

dic_rd :: String -> Dict -> Maybe [String]
dic_rd s d = while2 p loopBody exit (s, Just d)
  where p (a, b) = (a ≠ [] ∧ isJust b)
        exit (_, Nothing) = Nothing
        exit ([], Just (Var x)) = Just [x]
        exit ([], Just (Term o l))
          | otherwise = f l
        where f = [nothing, Just · cons] · outList · map [id, π1] · filter (isLeft) · map (outExp)
loopBody (s, Just (Var v)) = (s, Nothing)
loopBody (s, Just (Term o l)) | (o ≡ []) = (s, termLsearch s l)
  | (head s ≡ head o) = (tail s, Just (Term o l))
  | otherwise = (s, termLsearch s l)
termLsearch s ((Term o l) : xs) = if (head s ≡ head o) then Just (Term o l) else termLsearch s xs
termLsearch s (_ : xs) = termLsearch s xs
termLsearch _ [] = Nothing
isJust (Just _) = True
isJust _ = False
isLeft (i1 _) = True
isLeft _ = False

```

## Dic\_in

```

dic_in :: String → String → Dict → Dict
dic_in p t d = dic_in_aux (Just (traductionToDict (p, t)), d)
dic_in_aux :: (Maybe (Dict), Dict) → Dict
dic_in_aux = anaExp g
  where g (⊖, Var v) = i1 (v)
        g (Just (Term a b), Term o l) | (o ≡ [] ∨ o ≡ " ") = recExp ⟨(Just (Term a b)), id⟩ (outExp (Term o (insertIfAbsent (head b, l))))
        | (head o ≡ head a) = recExp ⟨(Just (head b)), id⟩ (outExp (Term o (insertIfAbsent (head b, l))))
        | otherwise = recExp ⟨nothing, id⟩ (outExp (Term o l))
        g (Nothing, v) = recExp ⟨nothing, id⟩ (outExp v)
insertIfAbsent ((Term o l), ((Term a b) : ts)) = if (head o ≡ head a) then ((Term a b) : ts) else (Term a b) : (insertIfAbsent (head b, l) : ts)
insertIfAbsent ((Term o l), []) = [(Term o l)]
insertIfAbsent (l, (t : ts)) = t : (insertIfAbsent (l, ts))
traductionToDict :: (String, String) → Dict
traductionToDict = anaExp g where
  g ([], t) = i1 (t);
  g (p : ps, t) = i2 (singl p, singl (ps, t))

```

## Problema 2

### MaisDir

```

maisDir = cataBTree g
  where g = [Nothing, f]
        where f (a, (t1, Nothing)) = Just a
              f (a, (t1, t2)) = t2

```

### MaisEsq

```

maisEsq = cataBTree g
  where g = [Nothing, f]
        where f (a, (Nothing, t2)) = Just a
              f (a, (t1, t2)) = t1

```

### inOrd

```

insOrd' = ⊥
insOrd a x = anaBTree f (Just a, x)
  where f (Nothing, Empty) = i1 ()
        f (Just a, Empty) = i2 (a, ((Nothing, Empty), (Nothing, Empty)))
        f (Just a, Node (x, (t1, t2))) | a ≤ x = i2 (x, ((Just a, t1), (Nothing, t2)))
        | otherwise = i2 (x, ((Nothing, t1), (Just a, t2)))
        f (Nothing, Node (x, (t1, t2))) = i2 (x, ((Nothing, t1), (Nothing, t2)))

```

### isOrd

```

isOrd' = cataBTree g
  where g = ⊥
isOrd = π1 · cataBTree g

```

**where**  $g = [(True, Empty), \langle f2 \ (funcaoComparacao \cdot Node), Node \cdot f \rangle]$   
 $f = (id \times (\pi_2 \times \pi_2)) \ -- \ (a, (Bool, BTree \ a), (Bool, BTree \ a)) \ -_i \ (a, BTree \ a, BTree \ a)$   
 $f2 \ p \ (a, (b, c)) = p \ (f \ (a, (b, c))) \wedge \pi_1 \ (b) \wedge \pi_1 \ (c)$   
 $funcaoComparacao \ (Node \ (a, (t1, t2))) = [\underline{True}, (\leq a) \cdot \pi_1] \ (outBTree \ t1) \wedge [\underline{True}, (\geq a) \cdot \pi_1] \ (outBTree \ t2)$

## Splay

$rrot \ Empty = Empty$   
 $rrot \ t@(Node \ (a, (Empty, d))) = t$   
 $rrot \ (Node \ (black, ((Node \ (red, (purple, green))), blue))) = Node \ (red, (purple, (Node \ (black, (green, blue))))$   
 $lrot \ Empty = Empty$   
 $lrot \ t@(Node \ (a, (e, Empty))) = t$   
 $lrot \ (Node \ (black, (blue, (Node \ (red, (green, purple)))))) = Node \ (red, ((Node \ (black, (blue, green))), purple)))$   
 $splay = cataList \ g$   
**where**  $g = [id, f]$   
 $f \ (True, l) = rrot \cdot l$   
 $f \ (False, l) = lrot \cdot l$

## Problema 3

$inBdt :: a + (String, (Bdt \ a, Bdt \ a)) \rightarrow Bdt \ a$   
 $inBdt = [Dec, Query]$   
 $outBdt :: Bdt \ a \rightarrow a + (String, (Bdt \ a, Bdt \ a))$   
 $outBdt \ (Dec \ a) = i_1 \ a$   
 $outBdt \ (Query \ (s, (b1, b2))) = i_2 \ (s, (b1, b2))$   
 $baseBdt \ f \ g = id + (f \times (g \times g))$   
 $recBdt \ f = id + (id \times (f \times f))$   
 $cataBdt \ g = g \cdot (recBdt \ (cataBdt \ g)) \cdot outBdt$   
 $\llbracket g \rrbracket = inBdt \cdot (recBdt \ \llbracket g \rrbracket) \cdot g$

$$\begin{array}{ccc}
 Bdt \ A & \xleftarrow{inBdt} & A + (String \times (Bdt \ A)^2) \\
 \uparrow \llbracket g \rrbracket & & \uparrow id + (id \times \llbracket g \rrbracket^2) \\
 C & \xrightarrow{g} & A + (String \times (C)^2)
 \end{array}$$

## extLTree

A diferença em termos estruturais entre os dois tipos de dados é a presença da String nos nodos, informação que irá ser removida na transformação para LTree

$extLTree :: Bdt \ a \rightarrow LTree \ a$   
 $extLTree = cataBdt \ g \ \textbf{where}$   
 $g = [Leaf, Fork \cdot \pi_2]$

## navLTree

Versão pointfree

$navLTree :: LTree \ a \rightarrow ([Bool] \rightarrow LTree \ a)$   
 $navLTree = (\llbracket \cdot \rrbracket \cdot Leaf, \lambda(l, r) \rightarrow Cp.cond \ null \ (Fork \cdot \langle l, r \rangle) \ (Cp.cond \ head \ (l \cdot tail) \ (r \cdot tail)))$



Versão pointwise

```

navLTreePointWise :: LTree a → ([Bool] → LTree a)
navLTreePointWise = (g)
  where g = [λa → Leaf a, f]
        f (l, r) [] = Fork (l [], r [])
        f (l, r) (True : hs) = l hs
        f (l, r) (False : hs) = r hs

```

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LTree } A & \xrightarrow{\text{outLTree}} & A + (\text{LTree } A)^2 \\
 \downarrow (g) & & \downarrow \text{id} + (g)^2 \\
 [\text{Bool}]^{\text{LTree } A} & \xleftarrow{g} & A + ([\text{Bool}]^{\text{LTree } A})^2
 \end{array}$$

## Problema 4

### bnavLTree

Versão pointfree

```

y = Node (True, (Node (True, (Empty, Empty)), Empty))
outNode (Node (a, (b, c))) = (a, (b, c))
bnavLTree = (g)
  where f = (λa → Leaf a)
        g (l, r) = Fork (l, r)
        h (l, r) = Cp.cond (π1 · outNode) (l · π1 · π2 · outNode) (r · π2 · π2 · outNode)

```

Versão pointwise

```

bnavLTreePointWise = (g)
  where g = [λa → Leaf a, f]
        f (l, r) Empty = Fork (l Empty, r Empty)
        f (l, r) (Node (True, (left, right))) = l left
        f (l, r) (Node (False, (left, right))) = r right

```

$$\begin{array}{ccc}
 \text{LTree } A & \xrightarrow{\text{outLTree}} & A + (\text{LTree } A)^2 \\
 \downarrow (g) & & \downarrow \text{id} + (g)^2 \\
 (\text{BTree Bool})^{\text{LTree } A} & \xleftarrow{g} & A + ((\text{BTree Bool})^{\text{LTree } A})^2
 \end{array}$$

### pbnavlTree

Esta função irá percorrer uma LTree representante de uma situação onde em que a decisão depende de vários fatores que são testados sucessivamente. A probabilidade de ocorrência, ou não, de cada fator é representada por **Dist Bool**. Devido à natureza sucessiva destes acontecimentos, as suas probabilidades estão organizadas numa **BTree (Dist Bool)**. Será essa BTree, em conjunto com a LTree, que será percorrida para dar resposta à probabilidade de cada uma das respostas.

```

pbnavlTreeDist = (g)
  where g = [λa → D [(Leaf a, 1)], f]
        f (l, r) Empty = D [(Fork ((extract (l Empty)) !! 0), ((extract (r Empty)) !! 0)), 1];
        f (l, r) (Node (d, (b1, b2))) = Probability.cond d (l b1) (r b2)

```

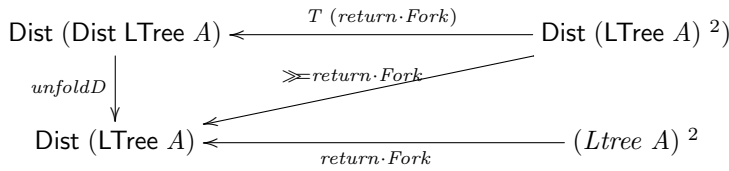
Foi também desenvolvida uma função que se serve da maquinaria monádica para abstrair a monad, no caso de estarmos numa Leaf e no caso em que a BTree é Empty. Esta revela-se mais intuitiva e tem a

vantagem de não se estar a assumir o conteúdo de variáveis, ao contrário do que acontece com `extract`, na função anterior.

```
pbnavlTree = (|g|)
  where g = [λa → return (Leaf a), f] where
    f (l, r) Empty = (prod (l Empty) (r Empty)) >>= (return · Fork)
    f (l, r) (Node (d, (b1, b2))) = Probability.cond d (l b1) (r b2)
xxx (l, r) Empty = (prod (l Empty) (r Empty)) >>= (return · Fork)
x = Fork (Leaf "Precisa", Fork (Leaf "Precisa", Leaf "N precisa"))
z = Node (D [(True, 0.6), (False, 0.4)], (Empty, Empty))
anita = Query ("2a feira?", (Query ("chuva na ida", (Dec "precisa", Query ("chuva no regresso",
testePaulo1 = extLTree anita
btreePaulo = Node (D [(True, 0.8), (False, 0.2)], (Empty, Empty))
```

O seguinte diagrama ilustra a o funcionamento do primeiro caso da função auxiliar `f`.

Nota: `unfoldD` é a operação `join`/multiplicação da monad `Dist`.



## Problema 5

```
truchet1 = Pictures [put (0, 80) (Arc (-90) 0 40), put (80, 0) (Arc 90 180 40)]
truchet2 = Pictures [put (0, 0) (Arc 0 90 40), put (80, 80) (Arc 180 (-90) 40)]
-- janela para visualizar:
janela = InWindow
  "Truchet" -- window title
  (800, 800) -- window size
  (100, 100) -- window position
  -- defs auxiliares -----
put = Translate
main = do
  r ← generateMatrix 10 10
  display janela white r
generateMatrix :: Int → Int → IO Picture
generateMatrix i j = (sequence · replicate (i * j) $ randomRIO (0, 1) >>= generateTruchet)
  >>= (return · pictures · zipWith id l)
  where l = do { x' ← map (80*) [0..(fromIntegral i) - 1];
    y' ← map (80*) [0..(fromIntegral j) - 1];
    return (put (x', y')) }
generateTruchet :: Monad m ⇒ Integer → m Picture
generateTruchet = return · (Cp.cond (≡ 0) truchet1 truchet2)
--
```