

## Résumé

Nous proposons un algorithme de calcul numérique des racines d'un système polynômial zéro-dimensionnel basé sur les matrices de Bézout. Cet algorithme est entièrement basé sur des procédures l'algèbre linéaire numérique. Une implémentation en python en est fournie en annexe.

## 1 Introduction

Quelques mots d'introduction ici !!

## 2 Cas univariable

Rappelons quelques faits connus sur les polynômes à une variable. Soit  $f(x) = a_0x^d + \dots + a_{d-1}x + a_d$  un polynôme en la variable complexe  $x$ . Notons  $\langle f(x) \rangle$  l'idéal engendré par  $f(x)$  dans l'anneau  $\mathbb{C}[x]$  et  $A_x = \mathbb{C}[x] / \langle f(x) \rangle$  son algèbre quotient ; de même notons  $A_y = \mathbb{C}[y] / \langle f(y) \rangle$ . Dorénavant  $x$  désignera indifféremment la variable  $x$ , sa projection sur le quotient  $A_x$  ou l'endomorphisme de multiplication par  $x$  dans  $A_x$ . Une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $A_x$  est la **base des monômes**  $\mathbf{x} = (1, x, \dots, x^{d-1})$ .

### 2.1 Matrices des opérateurs de multiplication dans $A_x$

L'opérateur de multiplication  $x : \begin{cases} A \mapsto A \\ h \mapsto xh \end{cases}$  est un endomorphisme et se représente donc dans la base des monômes par une matrice  $X$  de taille  $d$ , appelée **matrice compagnon**

$$X = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_d/a_0 \\ 1 & 0 & \dots & -a_{d-1}/a_0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_1/a_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

**Proposition 1.** *La matrice compagnon admet  $f$  comme polynôme caractéristique et comme polynôme minimal, c'est-à-dire que  $f(X) = 0$ . De plus les racines du polynôme  $f$  sont les valeurs propres de  $X$ , comptées avec les mêmes multiplicités.*

*Remarque.* La proposition précédente fournit une méthode effective de calcul numérique des racines de  $f$ . En effet,  $X$  est une matrice de Hessenberg, à laquelle on peut appliquer des techniques performantes de calcul de valeurs propres, comme la méthode QR. Nous verrons à la section 3 que ces techniques peuvent aussi s'appliquer au cas d'un système multivariable en intersection complète.

Plus généralement, pour tout élément  $g \in A_x$ , l'opérateur de multiplication  $g : \begin{cases} A \mapsto A \\ h \mapsto gh \end{cases}$  est un endomorphisme, et se représente dans la base des monômes par une matrice que nous appellerons encore matrice compagnon de  $g$  et qui se calcule à partir de  $X$  très facilement. Considérons par exemple  $g = x^2$ . L'opérateur de multiplication par  $x^2$  n'est autre que le carré de l'opérateur de multiplication par  $x$  ; sa matrice est donc  $X^2$ . Donc d'une façon générale, nous avons

**Proposition 2.** *la matrice compagnon de  $g$  est  $g(X)$ .*

*Remarque.* Il faut noter que si  $g_1, g_2$  sont deux représentants de  $g$  on a  $g_1(X) = g_2(X)$ , ce qui définit  $g(X)$  sans ambiguïté, indépendamment du représentant de  $g$  dans  $A_x$ .

### 2.2 Polynômes et matrices de Bezout

**Définition 1.** Introduisons une nouvelle variable  $y$ . Pour tout polynôme  $g$ , on définit le **polynôme de Bezout**  $\delta(g)$  et la **matrice de Bezout**  $B(g) = [b_{\alpha\beta}]$  par les formules

$$\delta(g) = \frac{f(x)g(y) - f(y)g(x)}{x - y} = \sum_{\alpha, \beta=0, \dots, m-1} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (2)$$

où  $m$  désigne n'importe quel entier supérieur ou égal au maximum des degrés de  $f$  et  $g$ .

**Exemple 1.** Pour  $f = x^2 - 3x + 2$ , et  $g = x^3$  on a les polynômes de Bezout  $\delta(1) = -3 + x + y$  et  $\delta(x^3) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 3x^2y + 3xy^2 - x^2y^2$  qui, représentés sous forme de tableaux, font apparaître les matrices de Bezout  $B(1)$  et  $B(x^3)$

$$\begin{array}{c|ccc} \delta(1) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \delta(x^3) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 \\ x & 0 & -2 & 3 \\ x^2 & -2 & 3 & -1 \end{array}$$

*Remarque.* Le polynôme et la matrice de Bezout sont liés par l'égalité matricielle

$$\delta(g) = \mathbf{x}B(g)\mathbf{y}^T \quad (3)$$

où  $\mathbf{x} = (1, x, \dots, x^{m-1})$  et  $\mathbf{y} = (1, y, \dots, y^{m-1})$  sont des vecteurs de monômes de  $\mathbb{C}[x]$  et  $\mathbb{C}[y]$ . (Attention, on emploie encore ici la notation  $\mathbf{x}$  pour un vecteur de  $\mathbb{C}[x]^m$ , notation qui était utilisée précédemment pour désigner la base des monômes  $\mathbf{x}$  mais en pratique cette confusion n'est pas gênante).

Considérons maintenant les produits vecteur-matrice  $\mathbf{x}B(1)$  et  $\mathbf{x}B(g)$ . Ces deux familles sont constituées des colonnes de  $B(1)$ , resp.  $B(g)$ , vues comme des polynômes en  $x$  exprimés dans la base des monômes. On peut aussi voir  $\mathbf{x}B(1)$ , resp.  $\mathbf{x}B(g)$ , comme la famille des coefficients du polynôme  $\delta(1)$ , resp.  $\delta(g)$ , considéré comme un polynôme en  $y$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$ .

**Proposition 3.** Soit  $g$  un polynôme de  $\mathbb{C}[x]$ , et  $m$  le maximum des degrés de  $f$  et  $g$ . Si on écrit  $B(1)$  et  $B(g)$  dans le même système d'indice  $\mathbf{x} = (1, x, \dots, x^{m-1})$  et  $\mathbf{y} = (1, y, \dots, y^{m-1})$ , alors

$$\mathbf{x}B(1)g = \mathbf{x}B(g) \quad (4)$$

*Démonstration.* Ecrivons

$$\begin{aligned} \delta(g) &= g(x) \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f(x) \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \\ \delta(g) &= g(x)\delta(1) - f(x) \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \end{aligned}$$

Regardons cette dernière égalité comme une égalité entre polynômes en la variable  $y$ , à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$ . Si  $h \in \mathbb{C}[x][y]$  et  $\beta \in \mathbb{N}$  notons  $h_\beta$  le coefficient de  $y^\beta$  dans  $h$ . On a alors

$$\delta(g)_\beta = g(x)\delta(1)_\beta - f(x) \left( \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right)_\beta$$

qui est une égalité entre éléments de  $\mathbb{C}[x]$ . En projetant sur  $A_x$  on a  $\delta(g)_\beta = g(x)\delta(1)_\beta$  et comme ceci est vrai pour tout  $\beta \in \mathbb{N}$ , on obtient bien la relation (4).  $\square$

*Remarque.* En disant la proposition autrement, chaque colonne de  $B(1)$  donne, lorsqu'elle est multipliée par  $g$  modulo  $A_x$ , la colonne de même indice de  $B(g)$ .

**Exemple 2.** Reprenant l'exemple précédent, la Proposition 3 dit que, modulo  $A_x$ , on a les égalités  $(-3 + x)x^3 = -2x^2$ ,  $(1)x^3 = -2x + 3x^2$ ,  $(0)x^3 = -2 + 3x - x^2$ , qui se vérifient facilement.

*Remarque.* En considérant les lignes de  $B(1), B(x)$  à la place des colonnes on aboutirait à une formule écrite en la variable  $y$ , identique à la formule (4) car les matrices de Bezout sont ici symétriques, mais ce ne sera plus le cas en plusieurs variables.

## 2.3 Lien entre matrices de Bezout et matrices compagnon

Particulièrement importantes sont les matrices de Bezout définies par  $B(1)$  et  $B(x)$

$$\begin{array}{c|cccc} \delta(1) & 1 & y & \dots & y^{d-1} \\ \hline 1 & a_{d-1} & \dots & \dots & a_0 \\ x & a_{d-2} & \dots & a_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{d-1} & a_0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} \delta(x) & 1 & y & \dots & y^{d-1} \\ \hline 1 & -a_d & 0 & \dots & 0 \\ x & 0 & a_{d-2} & \dots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{d-1} & 0 & a_0 & \dots & 0 \end{array} \quad (5)$$

en effet nous avons le lien suivant entre matrice de Bezout et la matrice compagnon

**Proposition 4.** *La matrice compagnon  $X$  peut se calculer grâce à la formule de Barnett [2]*

$$B(x)B(1)^{-1} = X \quad (6)$$

*Démonstration.* Définissons deux nouvelles familles dans  $A_x$  par

$$\begin{aligned} \mathbf{x}B(1) &= (a_{d-1} + a_{d-2}x + \cdots + a_0x^{d-1}, \dots, a_1 + a_0x, a_0). \\ \mathbf{x}B(x) &= (-a_d, a_{d-2}x + \cdots + a_0x^{d-1}, \dots, a_0x) \end{aligned} \quad (7)$$

et posons  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}B(1)$ .  $B(1)$  étant inversible, la famille  $\hat{\mathbf{x}}$  est une base de  $A_x$  appelée **base de Horner**. D'après la proposition 3 on a  $\hat{\mathbf{x}}x = \mathbf{x}B(1)$ . Par construction, les familles  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{x}}x$  s'expriment dans la base  $\mathbf{x}$  (des monômes) respectivement par les matrices  $B(1)$  et  $B(x)$ . La famille  $\hat{\mathbf{x}}x$  s'exprime donc dans la base  $\hat{\mathbf{x}}$  (de Horner) par la matrice  $B(1)^{-1}B(x)$  ce qui veut dire que l'endomorphisme  $x : \begin{cases} A \mapsto A \\ h \mapsto xh \end{cases}$  a pour matrice  $B(1)^{-1}B(x)$  dans la base  $\hat{\mathbf{x}}$  et pour matrice  $B(1)(B(1)^{-1}B(x))B(1)^{-1} = B(x)B(1)^{-1}$  dans la base  $\mathbf{x}$ .  $\square$

## 2.4 Formule de Barnett généralisée

La formule de Barnett a été écrite en considérant les matrices de Bezout des polynômes 1 et  $x$ . Si on considère un polynôme quelconque  $g$  de  $\mathbb{C}[x]$  et  $B(g)$  sa matrice de Bezout il serait naturel d'avoir entre les matrices de Bezout  $B(1)$  et  $B(g)$  la relation suivante, que nous appellerons **formule de Barnett généralisée**

$$B(g)B(1)^{-1} = g(X) \quad (8)$$

On montre facilement la formule (8) lorsque le degré de  $g$  est inférieur ou égal à  $d$ , c'est-à-dire lorsque  $B(1)$  et  $B(g)$  sont de même taille. Par exemple pour  $f = x^2 - 3x + 2$ ,  $d = 2$ , on a

$$\begin{array}{c|cc} \delta(1) & 1 & y \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \delta(x) & 1 & y \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \delta(x^2) & 1 & y \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ x & -2 & 3 \end{array}$$

$$B(x)B(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = X \quad B(x^2)B(1)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = X^2 \quad (9)$$

ce qui confirme bien la formule (8). Si par contre le degré de  $g$  est supérieur à  $d$ , alors  $B(g)$  et  $B(1)$  ne sont plus de la même taille et une opération telle que  $B(g)B(1)^{-1}$  n'a plus de sens. Une première idée est de réécrire les deux matrices de Bezout dans le même système d'indices, à savoir  $\mathbf{x} = (1, x, \dots, x^{m-1})$  et  $\mathbf{y} = (1, y, \dots, y^{m-1})$ ,  $m$  étant le degré de  $g$ . Par exemple en choisissant  $f$  comme ci-dessus et  $g = x^3$  on aurait

$$\begin{array}{c|ccc} \delta(1) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \delta(x^3) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 \\ x & 0 & -2 & 3 \\ x^2 & -2 & 3 & -1 \end{array}$$

mais alors  $B(1)$  n'est plus inversible. Nous allons cependant montrer, grâce aux relations (4), que si on projette les deux polynômes de Bezout sur le quotient  $A_x$  alors les matrices  $B(g)$  et  $B(1)$  sont redimensionnées à la même taille,  $B(1)$  est inversible et la formule (8) s'applique. Illustrons le procédé sur l'exemple ci-dessus. Puisque  $B(1)$  n'est pas inversible, on peut trouver une combinaison linéaire de colonnes qui s'annule, ici c'est la troisième colonne qui est nulle. En la multipliant par  $x^3$ , et en appliquant les relations (4), on obtient que la troisième colonne de  $B(x^3)$  est aussi nulle. Mais cette colonne vaut  $-2 + 3x - x^2$  ce qui entraîne que, dans le quotient,  $-2 + 3x - x^2 = 0$  (ce n'est pas une surprise car ce dernier polynôme n'est autre que  $-f$ ; ceci est dû au fait que l'exemple choisi est particulièrement simple, mais nous verrons dans le cas multidimensionnel que les relations nulles dans le quotient ainsi générées sont loin d'être triviales).

En vue d'automatiser les calculs, traduisons le procédé précédent en termes d'algèbre matricielle. Toujours sur

le même exemple

$$\begin{aligned}\delta(x^3) &= [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix} \\ \delta(x^3) &= [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix} \\ \delta(x^3) &= [1 \quad x \quad 2 - 3x + x^2] \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

En résumé nous multiplions le vecteur d'indices  $[1 \quad x \quad x^2]$  à droite par la transformation de Gauss  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  et les deux matrices de Bezout  $B(1)$  et  $B(g)$  à gauche par  $P^{-1}$ . Les polynômes de Bezout, écrits sous forme de tableaux, deviennent alors

$$\begin{array}{c|ccc} \delta(1) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 2 - 3x + x^2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \delta(x^3) & 1 & y & y^2 \\ \hline 1 & 4 & -6 & 0 \\ x & -6 & 7 & 0 \\ 2 - 3x + x^2 & -2 & 3 & -1 \end{array}$$

Ce que disent les relations (4) c'est que la troisième colonne de  $B(x^3)$  est nulle dans le quotient  $A_x$ , c'est à-dire  $-2 + 3x - x^2 = 0$ , (on reconnait l'égalité  $-f = 0$ ). On a donc

$$\begin{aligned}\delta(1) &= [1 \quad x] \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} \\ \delta(x^3) &= [1 \quad x] \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} + (2 - 3x + x^2)(-2 + 3y - y^2)\end{aligned}$$

puis, en projetant  $\delta(1), \delta(g)$  sur  $A_x \otimes A_y$

$$\begin{array}{c|cc} \delta(1) & 1 & y \\ \hline 1 & -3 & 1 \\ x & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \delta(x^3) & 1 & y \\ \hline 1 & 4 & -6 \\ x & -6 & 7 \end{array}$$

Nous avons bien obtenu des matrices de Bezout de même taille, avec  $B(1)$  inversible. Formons alors le quotient

$$B(x^3)B(1)^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -14 \\ 7 & 15 \end{bmatrix} = X^3 \quad (10)$$

ce qui est bien conforme à la formule de Barnett généralisée.

*Remarque.* On peut remplacer la matrice de Gauss par toute matrice permettant de transformer une colonne donnée en une colonne possédant un seul élément non nul, comme par exemple une matrice orthogonale de Householder. C'est le choix qui sera fait dans l'implémentation en Julia proposée en [7].

### 3 Cas multivariable

Dans le cas univariable, examiné à la section précédente, la structure de  $A_x$  se compose d'une part d'une base, en l'occurrence la base des monômes, d'autre part de la matrice compaignon, exprimant l'endomorphisme de multiplication par  $x$  dans la base. Ces deux éléments peuvent être obtenus soit directement par lecture des coefficients de  $f$ , soit à partir des matrices de Bezout  $B(1), B(x)$ .

Dans le cas multivariable, que nous allons développer dans cette section, ni une base ni les matrices compaignon (matrices des opérateurs  $x_j : \begin{cases} A \mapsto A \\ h \mapsto x_j h \end{cases}$  dans la base) ne sont visibles directement sur les coefficients des polynômes

de départ. En revanche nous allons montrer comment construire des matrices de Bezout  $B(1), B(x_1), \dots, B(x_n)$  à partir desquelles on peut obtenir une base et les matrices compagnon  $X_j$  associées à la base obtenue. Commençons par fixer le cadre de travail. Pour  $n$  polynômes  $f_1, \dots, f_n$  en les variables complexes  $x_1, \dots, x_n$  considérons :

- $\mathbb{C}[x]$  l'anneau des polynômes en les variables  $x = x_1, \dots, x_n$
- $\langle f \rangle$  l'idéal généré par la famille  $f = f_1, \dots, f_n$
- $V(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0\}$  la variété associée à  $\langle f \rangle$
- $A_x = \mathbb{C}[x]/\langle f \rangle$  l'algèbre quotient

Nous supposons dorénavant que l'idéal  $\langle f \rangle$  est **zéro-dimensionnel**, c'est-à-dire que  $V(I)$  est fini ou, de façon équivalente [6, p. 234], que  $A_x$  est de **dimension finie** en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Ceci est bien sûr toujours le cas lorsque  $n = 1$ .

### 3.1 Construction des polynômes et des matrices de Bezout

#### 3.1.1 Extension de la Définition 1 au cas multivariable

**Définition 2.** Soit  $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} \in \mathbb{C}[x]$  un monôme. Introduisons un nouveau jeu de variables  $y = y_1, \dots, y_n$  et considérons, pour tous  $i, j = 1 \dots n$ , le rapport

$$\delta_{i,j}(x^\gamma) = \frac{y_j^{\gamma_j} f_i(y_1, \dots, y_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - x_j^{\gamma_j} f_i(y_1, \dots, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{x_j - y_j} \quad (11)$$

qui est un polynôme en les variables  $x, y$ . Nous obtenons une matrice de différences finies  $\Delta(x^\gamma) = (\delta_{i,j}(x^\gamma))_{i,j}$ , qui est à la matrice jacobienne ce que le taux d'accroissement est à la dérivée. Le **polynôme de Bezout** du monôme  $x^\gamma$  est par définition

$$\delta(x^\gamma) = \det(\Delta(x^\gamma)) \quad (12)$$

qui est un élément de  $\mathbb{C}[x, y]$ . Pour un polynôme général  $g = \sum_\gamma g_\gamma x^\gamma \in \mathbb{C}[x]$ , on étend la définition précédente par linéarité  $\delta(g) = \sum_\gamma g_\gamma \delta(x^\gamma)$ . En développant  $\delta(g) = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  comme une somme de monômes de  $\mathbb{C}[x, y]$ , et en notant  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  les familles de tous les monômes en  $x$  et  $y$  apparaissant dans ce développement, nous définissons la **matrice de Bezout**  $B(g) = [b_{\alpha\beta}]$ , c'est à dire que l'on a la relation suivante, similaire à (3), entre polynôme et matrice de Bezout

$$\delta(g) = \mathbf{x} B(g) \mathbf{y}^T \quad (13)$$

**Exemple 3.** Fixons  $n = 2$  et considérons  $f_1 = x_1^2 + x_1 x_2^2 - 1, f_2 = x_1^2 x_2 + x_1$ . Nous allons calculer les matrices de Bezout  $B(1), B(x_1), B(x_2)$ , qui vont servir à la construction des matrices compagnon  $X_1, X_2$ , comme nous le verrons plus loin. Pour commencer, calculons à partir des formules (11)

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + y_1 & x_2 y_1 + y_1 y_2 \\ 1 + x_1 x_2 + x_2 y_1 & y_1^2 \end{pmatrix} \\ \Delta(x_1) &= \begin{pmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_2 y_1 + y_1 y_2 \\ 1 + x_1 x_2 + x_2 y_1 & y_1^2 \end{pmatrix} \\ \Delta(x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + y_1 & 1 - y_1^2 + x_2 y_1 y_2 \\ 1 + x_1 x_2 + x_2 y_1 & -y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dont le déterminant fournit les polynômes de Bezout

$$\begin{aligned} \delta(1) &= -x_2 y_1 - x_1 x_2^2 y_1 + x_1 y_1^2 + y_1^3 - y_1 y_2 - x_1 x_2 y_1 y_2 - x_2 y_1^2 y_2 \\ \delta(x_1) &= y_1^2 - x_1 x_2^2 y_1^2 + x_1 y_1^3 - x_1 x_2 y_1^2 y_2 \\ \delta(x_2) &= -1 - x_1 x_2 - x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_2^2 y_1 + x_1 x_2 y_1^2 + x_2 y_1^3 - x_2 y_1 y_2 - x_1 x_2^2 y_1 y_2 - x_2^2 y_1^2 y_2 \end{aligned}$$

Les familles de monômes apparaissant dans ces polynômes sont  $\mathbf{x} = (1, x_2, x_2^2, x_1, x_1 x_2, x_1 x_2^2)$  et  $\mathbf{y} = (1, y_1, y_1 y_2, y_1^2, y_1^2 y_2, y_1^3)$ . Les polynômes de Bezout s'écrivent sous forme de tableaux faisant apparaître les matrices de Bezout

|             |    |       |           |         |             |         |
|-------------|----|-------|-----------|---------|-------------|---------|
| $\delta(1)$ | 1  | $y_1$ | $y_1 y_2$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
| 1           |    |       | -1        |         |             | 1       |
| $x_2$       | -1 |       |           |         | -1          |         |
| $x_2^2$     |    |       |           |         |             |         |
| $x_1$       |    |       |           | 1       |             |         |
| $x_1 x_2$   |    |       | -1        |         |             |         |
| $x_1 x_2^2$ | -1 |       |           |         |             |         |

| $\delta(x_1)$ | 1 | $y_1$ | $y_1 y_2$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $\delta(x_2)$ | 1  | $y_1$ | $y_1 y_2$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
|---------------|---|-------|-----------|---------|-------------|---------|---------------|----|-------|-----------|---------|-------------|---------|
| 1             |   |       |           | 1       |             |         | 1             | -1 |       |           |         |             |         |
| $x_2$         |   |       |           |         |             |         | $x_2$         |    | -1    | -1        |         |             | 1       |
| $x_2^2$       |   |       |           |         |             |         | $x_2^2$       |    | -1    |           |         | -1          |         |
| $x_1$         |   |       |           |         |             | 1       | $x_1$         |    | -1    |           |         |             |         |
| $x_1 x_2$     |   |       |           |         | -1          |         | $x_1 x_2$     | -1 |       |           | 1       |             |         |
| $x_1 x_2^2$   |   |       |           | -1      |             |         | $x_1 x_2^2$   |    |       | -1        |         |             |         |

*Remarque.* Ici, contrairement au cas univarié, les listes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas des bases de  $A$ . Nous verrons plus loin qu'elles sont cependant génératrices et comment on peut en extraire des bases.

### 3.1.2 Calcul effectif des matrices de Bezout

Dans l'exemple précédent, les polynômes de Bezout s'obtiennent en calculant le déterminant des matrices  $\Delta(1), \Delta(x_1), \Delta(x_2)$ , qui sont de taille 2 et dont les coefficients sont des polynômes en  $x_1, x_2$ . Si le nombre de variables  $n$  ou le degré des polynômes  $f_i$  augmentaient alors ce calcul pourrait devenir difficile car les coefficients des matrices  $\Delta(x_k)$  ne sont pas numériques et on ne peut donc pas appliquer la méthode du pivot de Gauss. Un moyen de contourner cette difficulté est de procéder par évaluation-interpolation :

1. on estime à priori l'ensemble des monômes qui vont apparaître dans le résultat  $\delta(x^\gamma)$
2. on évalue  $\Delta(x_k)$  sur un ensemble adéquat  $U \times V$  de multi-points de Fourier  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$  et  $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$
3. pour chaque point  $(u, v) \in U \times V$  on calcule le déterminant numérique de  $\Delta(x_k)(u, v)$  par la méthode du pivot de Gauss.
4. pour finir on interpole l'ensemble des valeurs obtenues par le polynôme cherché  $\delta(x_k)$ .

Pour implémenter cet algorithme concrètement on doit préciser l'ensemble des monômes de  $\delta(x_k)$  ainsi que les points de Fourier utilisés pour l'évaluation de  $\delta(x_k)$ . Prenons l'exemple d'un système polynomial  $\langle f \rangle$  de multidegré  $(d_1, \dots, d_n)$ , c'est-à-dire que pour tous  $i, j = 1..n$  le degré de  $f_i$  en la variable  $x_j$  est inférieur ou égal à  $d_j$ . Fixons un entier  $k$  compris entre 0 et  $n$  et adoptons la convention que  $x_0 = 1$ . On voit facilement que  $\delta(x_k)$ , polynôme en  $x, y$ , est de multidegré  $(d_1, 2d_2, \dots, nd_n)$  en  $x$  et de multidegré  $(nd_1, (n-1)d_2, \dots, d_n)$  en  $y$ . Pour l'évaluation de  $\delta(x_k)$  aux points de Fourier  $(u, v) \in U \times V$  nous choisirons donc  $U = \prod_{j=1..n} U_j$  où  $U_j$  est l'ensemble des racines complexes de  $X^{jd_j} - 1$ . De même nous choisirons  $V = \prod_{j=1..n} V_j$  de façon que  $U_j$  et  $V_j$  soient disjoints, afin que le dénominateur ne s'annule jamais dans la formule (11). Ceci est réalisé par exemple lorsque  $V_j$  est l'ensemble des racines complexes de  $X^{(n-j+1)d_j} - \theta_j$  avec  $\theta_j = e^{i\pi/j}$ . Les considérations précédentes nous permettent maintenant d'écrire l'algorithme :

---

**Algorithm 1** Construction des ensembles de points de Fourier servant à l'évaluation du polynôme de Bezout  $\delta(x_k)$

---

```

function FOURIERPOINTS( $d$ )
     $\triangleright$  multidegré  $d = (d_1, \dots, d_n)$ 
    for  $j = 1..n$  do
         $U_j \leftarrow$  ensemble des racines de  $X^{jd_j} - 1$ 
         $V_j \leftarrow$  ensemble des racines de  $X^{(n-j+1)d_j} - e^{i\pi/j}$ 
    end for
     $U \leftarrow \prod_{j=1..n} U_j$ 
     $V \leftarrow \prod_{j=1..n} V_j$ 
    return  $U, V$ 
end function

```

---

Les ensembles de points de Fourier  $U$  et  $V$  peuvent être utilisés pour construire la matrice d'évaluation du polynôme de Bezout :

---

**Algorithm 2** Construction de la matrice d'évaluation du polynôme de Bezout  $\delta(x_k)$ 

---

```
function EVALUATION( $f, k$ )                                 $\triangleright f = (f_1, \dots, f_n)$  système polynomial
   $U, V \leftarrow \text{FOURIERPOINTS}(d)$                          $\triangleright d$  multidegré de  $f$ 
   $D \leftarrow \prod_{j=1..n} j d_j$ 
   $C^{(k)} \leftarrow \text{ZEROS}(D, D)$ 
  for  $(u, v) \in U \times V$  do
     $\Delta \leftarrow \text{ZEROS}(n, n)$ 
    for  $i, j = 1..n$  do
       $\Delta_{i,j} \leftarrow \delta_{i,j}(x_k)(u, v)$                  $\triangleright \delta_{i,j}(x_k)$  défini à la formule (11)
    end for
     $C_{u,v}^{(k)} \leftarrow \text{DET}(\Delta)$ 
  end for
  return  $C^{(k)}$ 
end function
```

---

Rappelons que la matrice de Bezout  $B^{(k)} = [b_{\alpha\beta}^{(k)}]_{\alpha\beta}$  est définie par  $\delta^{(k)}(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta}^{(k)} x^\alpha y^\beta$ . On a donc  $C_{u,v}^{(k)} = \delta^{(k)}(u, v) = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha\beta}^{(k)} u^\alpha v^\beta$ , ce qui s'écrit comme produit de matrices  $[C_{u,v}^{(k)}]_{u,v} = [u^\alpha]_{u,\alpha} [b_{\alpha,\beta}^{(k)}]_{\alpha,\beta} [v^\beta]_{v,\beta}^T$ . Définissons alors les matrices de Fourier  $F_u = [u^\alpha]_{u,\alpha}$  et  $F_v = [v^\beta]_{v,\beta}$ . On obtient la relation d'évaluation-interpolation entre les matrices  $B^{(k)}$  et  $C^{(k)}$

$$C^{(k)} = F_u B^{(k)} F_v^T$$

Grâce au choix des points de Fourier fait dans l'Algorithme 1 les matrices  $F_u$  et  $F_v$  sont unitaires et la matrice  $B^{(k)}$  s'obtient alors facilement par la relation

$$B^{(k)} = F_u^* C^{(k)} \overline{F_v} \quad (14)$$

La construction des matrices de Bezout, inspirée des considérations précédentes, a été implémentée en Python et publiée sur le site [7].

### 3.2 Formules de Barnett et structure de l'algèbre quotient.

Rappelons que dans notre hypothèse où l'idéal est zéro-dimensionnel, la dimension de l'algèbre quotient  $A = \mathbb{C}[\mathbf{x}] / \langle f \rangle$  est finie, ce qui assure l'existence d'une base et de matrices compagnon  $X_1, \dots, X_n$  (matrices des opérateurs de multiplication par les variables dans la base considérée). Nous allons montrer que le même procédé mis en oeuvre dans la section 2.4, consistant en manipulations sur les colonnes des matrices de Bezout  $B(1), B(x_1), \dots, B(x_n)$ , permet ici aussi de construire une base de  $A_x$  ainsi que les matrices compagnons associées. Rappelons tout d'abord un certain nombre de propriétés algébriques du polynôme  $\delta(1)$  et des matrices de Bezout  $B(x_k)$ .

#### 3.2.1 Propriétés algébriques du polynôme $\delta(1)$ et de la matrice $B(1)$

Les propriétés qui suivent sont de nature algébrique et seront données sans démonstration. Le lecteur intéressé pourra consulter les détails dans [4, 5]. Comme dans la Proposition 4, définissons de nouvelles familles d'éléments de  $A_x$  par

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x} B(x_k), \quad k = 0 \dots n \quad (15)$$

**Example 4.** En reprenant l'exemple précédent nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 &= (0, -x_2 - x_1 x_2^2, -1 - x_1 x_2, x_1, -x_2, 1) \\ \hat{\mathbf{x}}_1 &= (0, 0, 0, -1 - x_2^2, -x_1 x_2, x_1) \\ \hat{\mathbf{x}}_2 &= (-1 - x_1 x_2, -x_2 - x_2^2 - x_1, -x_2 - x_1 x_2^2, x_1 x_2, -x_2^2, x_2) \end{aligned} \quad (16)$$

**Proposition 5.** Pour tout  $k = 1 \dots n$  on a

$$\hat{\mathbf{x}}_0 x_k = \hat{\mathbf{x}}_k \quad (17)$$

Les relations ci-dessus sont faciles à vérifier sur l'exemple précédent. Jusqu'à maintenant les cas univariable et multivariable sont très similaires, sauf sur un point : dans le cas multivariable les familles  $\mathbf{x}_0$  et  $\hat{\mathbf{x}}_0$  ne sont plus nécessairement des bases de  $A_x$ . On a cependant la propriété suivante

**Proposition 6.** Chacune des familles  $\mathbf{x}$  et  $\hat{\mathbf{x}}$  est génératrice dans  $A_x$ .

### 3.2.2 Processus de réduction

La proposition précédente fournit un début de structure de l'algèbre  $A_x$ . Nous avons pour l'instant une famille génératrice  $\mathbf{x}$  de  $A_x$  ainsi que des matrices de Bezout  $B(x_k)$ . Nous allons montrer comment, en appliquant le procédé matriciel décrit dans la section 2.4 à la famille génératrice  $\mathbf{x}$  et aux matrices de Bezout  $B(x_k)$ , on peut fabriquer une base de  $A_x$  et des matrices compagnon  $X_k$ .

Illustrons les calculs à partir de l'Exemple ???. Le rang de  $B(1)$  est 5. La première colonne de  $B(x_1)$  est nulle mais celle de  $B(x_2)$  ne l'est pas, ce qui fournit la relation dans le quotient  $1 + x_1x_2 = 0$ . Multiplions  $\mathbf{x}$  à droite par la matrice de Gauss  $P$  dont la 5ème colonne vaut  $(1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ , et multiplions les matrices de Bezout à gauche par  $P^{-1}$ , ce qui revient à soustraire la cinquième ligne à la première. Les matrices de Bezout  $B(1), B(x_1), B(x_2)$  s'écrivent :

$$\begin{array}{c|cccccc} B(1) & 1 & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & & & & 1 \\ x_2 & & -1 & & & -1 & \\ x_2^2 & & & & & & \\ x_1 & & & & 1 & & \\ 1 + x_1x_2 & & & -1 & & & \\ x_1x_2^2 & & -1 & & & & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|cccccc} B(x_1) & 1 & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & & 1 & 1 & \\ x_2 & & & & & & \\ x_2^2 & & & & & & \\ x_1 & & & & & 1 & \\ 1 + x_1x_2 & & & -1 & & 1 + x_1x_2 & \\ x_1x_2^2 & & & -1 & & x_1x_2^2 & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|cccccc} B(x_2) & 1 & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & & -1 & & \\ x_2 & & -1 & -1 & & & 1 \\ x_2^2 & & -1 & & & -1 & \\ x_1 & & -1 & & & & \\ 1 + x_1x_2 & -1 & & & 1 & & \\ x_1x_2^2 & & & -1 & & & \end{array}$$

La première colonne de  $B(x_2)$  contient maintenant un seul coefficient non nul, indexé par  $1 + x_1x_2$ . On peut donc, en projetant les trois bezoutiens sur  $A_x$ , supprimer la première colonne et la cinquième ligne dans les trois matrices :

$$\begin{array}{c|ccccc} B(1) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & & & 1 \\ x_2 & -1 & & & -1 & \\ x_2^2 & & & & & \\ x_1 & & & 1 & & \\ x_1x_2^2 & -1 & & & & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|ccccc} B(x_1) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 & \\ x_2 & & & & & \\ x_2^2 & & & & & \\ x_1 & & & & 1 & \\ x_1x_2^2 & & -1 & & x_1x_2^2 & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|ccccc} B(x_2) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & -1 & & \\ x_2 & -1 & -1 & & & 1 \\ x_2^2 & -1 & & & -1 & \\ x_1 & -1 & & & & \\ x_1x_2^2 & & -1 & & & \end{array}$$

La deuxième colonne de  $B(1)$  est nulle, celle de  $B(x_2)$  ne l'est pas. La relation est  $x_2 + x_1x_2^2 = 0$ . La matrice  $P$  est définie par sa cinquième colonne  $(0, 1, 0, 0, 1)^T$ . Le vecteur  $\mathbf{x}$  devient  $(1, x_2, x_2^2, x_1, x_2 + x_1x_2^2)$ . On soustrait la cinquième ligne à la deuxième. Les bezoutiens s'écrivent :

$$\begin{array}{c|ccccc} B(1) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & & & 1 \\ x_2 & & & & -1 & \\ x_2^2 & & & & & \\ x_1 & & & 1 & & \\ x_2 + x_1x_2^2 & -1 & & & & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|ccccc} B(x_1) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 & \\ x_2 & & & 1 & & \\ x_2^2 & & & & & \\ x_1 & & & & 1 & \\ x_2 + x_1x_2^2 & & -1 & & x_2 + x_1x_2^2 & \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c|ccccc} B(x_2) & y_1 & y_1y_2 & y_1^2 & y_1^2y_2 & y_1^3 \\ \hline 1 & & & -1 & & \\ x_2 & -1 & & & & 1 \\ x_2^2 & -1 & & & -1 & \\ x_1 & -1 & & & & \\ x_2 + x_1x_2^2 & & -1 & & & \end{array}$$



La deuxième colonne de  $B_2$  contient un seul coefficient non nul, en cinquième ligne, on peut donc supprimer les deuxièmes colonnes et les cinquièmes lignes :

| $B(1)$  | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $B(x_1)$ | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $B(x_2)$ | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
|---------|-------|---------|-------------|---------|----------|-------|---------|-------------|---------|----------|-------|---------|-------------|---------|
| 1       |       |         |             | 1       | 1        | 1     | 1       |             |         | 1        |       | -1      |             |         |
| $x_2$   |       |         | -1          |         | $x_2$    | 1     |         |             |         | $x_2$    | -1    |         |             | 1       |
| $x_2^2$ |       |         |             |         | $x_2^2$  |       |         |             |         | $x_2^2$  | -1    |         | -1          |         |
| $x_1$   | 1     |         |             |         | $x_1$    |       |         | 1           |         | $x_1$    | -1    |         |             |         |

La première colonne de  $B(1)$  est nulle, celle de  $B(x_2)$  ne l'est pas. La relation est  $x_2 + x_2^2 + x_1 = 0$ . La matrice  $P$  est définie par sa quatrième colonne  $(0, 1, 1, 1)^T$ . Le vecteur  $\mathbf{x}$  devient  $(1, x_2, x_2^2, x_2 + x_2^2 + x_1)$ . On soustrait la quatrième ligne à la deuxième et à la troisième. Les bezoutiens s'écrivent :

| $B(1)$              | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
|---------------------|-------|---------|-------------|---------|
| 1                   |       |         |             | 1       |
| $x_2$               |       | -1      | -1          |         |
| $x_2^2$             |       | -1      |             |         |
| $x_2 + x_2^2 + x_1$ |       | 1       |             |         |

| $B(x_1)$            | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $B(x_2)$            | $y_1$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
|---------------------|-------|---------|-------------|---------|---------------------|-------|---------|-------------|---------|
| 1                   |       | 1       | 1           |         | 1                   |       | -1      |             |         |
| $x_2$               |       |         |             |         | $x_2$               |       |         |             | 1       |
| $x_2^2$             |       |         | -1          |         | $x_2^2$             |       |         | -1          |         |
| $x_2 + x_2^2 + x_1$ |       |         | 1           |         | $x_2 + x_2^2 + x_1$ | -1    |         |             |         |

La première colonne de  $B_2$  contient un seul coefficient non nul, en quatrième ligne, on peut donc supprimer les premières colonnes et les quatrième lignes :

| $B(1)$  | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $B(x_1)$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ | $B(x_2)$ | $y_1^2$ | $y_1^2 y_2$ | $y_1^3$ |
|---------|---------|-------------|---------|----------|---------|-------------|---------|----------|---------|-------------|---------|
| 1       |         |             | 1       | 1        | 1       | 1           |         | 1        | -1      |             |         |
| $x_2$   | -1      | -1          |         | $x_2$    | 1       |             | -1      | $x_2$    |         |             | 1       |
| $x_2^2$ | -1      |             |         | $x_2^2$  |         |             | -1      | $x_2^2$  |         | -1          |         |

A ce stade, la matrice  $B(1)$  est inversible et le processus de réduction est donc terminé. On vérifie que les familles  $\mathbf{x} = (1, x_2, x_2^2)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_1^2, y_1^3)$  sont des bases de  $A$ , dont les bases de Horner associées sont  $\hat{\mathbf{x}} = (-x_2 - x_2^2, -x_2, 1)$  et  $\hat{\mathbf{y}} = (y_1^3, -y_1^2 - y_1^2 y_2, -y_1^2)$ . La dimension de  $A$  est ici égale à 3.

D'une façon générale nous formulons la conjecture suivante ([4] p.57)

**Conjecture 1.** *Lorsque le processus de réduction est terminé, c'est-à-dire lorsque la matrice  $B(1)$  est inversible et que toutes les matrices  $B(x_k), k = 0, \dots, n$  sont de même taille et indexées par des familles de polynômes  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , alors chacune des familles  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  est une base de  $A$ .*

*Remarque.* Nous insistons sur le fait que la conjecture précédente est valable uniquement dans l'hypothèse où l'idéal est zéro-dimensionnel. Lors de nos expériences nous avons pu observer que dans le cas contraire, il est possible d'obtenir en fin de processus des tailles de  $\delta(1)$  différentes suivant que l'on considère les relations en  $x$  ou en  $y$  lors du processus de réduction. Le cas échéant, cette différence de taille finale est un phénomène qui reste à éclaircir.

### 3.2.3 Formules de Barnett et matrices compagnon

Reprenons l'exemple précédent et définissons les matrices  $X_1, X_2$  par les quotients

$$X_1 = B(x_1)B(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = B(x_2)B(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

On vérifie que  $X_1, X_2$  sont les matrices de multiplication par les variables  $x_1, x_2$  dans la base  $\mathbf{x}$ .  $X_1, X_2$  sont donc des matrices compagnon, pour la base  $\mathbf{x}$  et nous retrouvons dans la situation décrite à la section 2.3. D'une façon générale nous avons :

**Proposition 7.** Lorsque le processus de réduction est terminé et que les matrices de Bezout sont écrites dans des bases  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ , alors les matrices compagnon  $X_j$ , c'est à dire les matrices de multiplication par  $x_j$  dans la base  $\mathbf{x}$ , peuvent se calculer grâce aux **formules de Barnett**

$$X_j = B(x_j)B(1)^{-1} \quad (19)$$

*Remarque.* Comme dans le cas univariable nous avons pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,  
 $B(x_k)^T B(1)^{-T}$  est la matrice de multiplication par  $y_k$  dans la base  $\mathbf{y}$   
 $B(1)^{-1} B(x_k)$  est la matrice de multiplication par  $x_k$  dans la base  $\hat{\mathbf{x}}$   
 $B(1)^{-T} B(x_k)^T$  est la matrice de multiplication par  $y_k$  dans la base  $\hat{\mathbf{y}}$

### 3.2.4 Calcul numérique des racines

Comme dans le cas univariable (voir Proposition 1) les racines numériques du système polynomial  $f_1, \dots, f_n$  s'obtiennent en calculant les valeurs propres des matrices compagnons (voir [1]).

Dans l'exemple précédent, les matrices  $X_1, X_2$  fournissent les valeurs propres

| $x_1$                | $x_2$                 |
|----------------------|-----------------------|
| -1.32472             | 0.75488               |
| $0.66236 + 0.56228i$ | $-0.87744 + 0.74486i$ |
| $0.66236 - 0.56228i$ | $-0.87744 - 0.74486i$ |

Puisque l'algèbre  $A$  est commutative, les matrices  $X_1, X_2$  commutent et ont donc les mêmes vecteurs propres. Lors du calcul il faut donc faire attention d'ordonner les valeurs propres pour qu'elles correspondent aux mêmes vecteurs propres. Dans l'exemple précédent on vérifie facilement que les couples  $(x_1, x_2)$  ci-dessus sont bien racines du système  $f_1 = x_1^2 + x_1 x_2^2 - 1, f_2 = x_1^2 x_2 + x_1$ .

## 3.3 Structure bloc-triangulaire et rang numérique de $B(1)$

Dans le processus de réduction, la première étape consiste à calculer le noyau de  $B(1)$ . Lorsque les coefficients des polynômes d'entrée sont entiers ou rationnels, ceci peut se faire de manière exacte au moyen d'un programme de calcul symbolique. La taille des entiers peut alors croître considérablement au cours des calculs et augmenter en conséquence le temps total de calcul et les besoins en mémoire du calculateur. Si par contre on veut effectuer l'ensemble des calculs en nombres flottants, ou si les coefficients d'entrée sont eux mêmes donnés sous forme numérique, alors on doit faire un calcul numérique du noyau. La méthode éprouvée pour cela, implémentée dans des packages d'algèbre linéaire numérique comme Matlab/Octave, Numpy ou Julia, est d'effectuer une factorisation QR "rank revealing" de  $B(1)$ , que nous appellerons factorisation QRP, c'est-à-dire accompagnée de pivots sur les colonnes. L'expérience montre que cette approche est souvent efficace mais peut s'avérer délicate à mettre en oeuvre si la taille de la matrice augmente. Montrons le sur un exemple. Nous choisissons  $n = 4$  et un système polynomial  $f$  de multidegré  $[2, 2, 2, 2]$ . Les coefficients, entiers, sont choisis aléatoirement suivant une loi gaussienne (fonction `ZZ.random_element(0.5, distribution='gaussian')` de Sage). La matrice de Bezout  $B(1)$  est de taille 384 et possède une certaine structure, comme le montre la figure ci-dessous. Cependant il paraît difficile d'exploiter cette structure pour le calcul numérique du rang de la matrice  $B(1)$ . On doit avoir recours à une méthode numérique générale, par exemple une factorisation SVD ou une factorisation QRP "rank revealing". Choisissons cette deuxième méthode. Les termes diagonaux du facteur triangulaire  $R$  seront triés en ordre décroissant, comme le montre la figure ci-dessous. On s'aperçoit que les derniers termes non nuls décroissent vite, et qu'il peut devenir difficile de choisir un seuil au dessus duquel les termes diagonaux seront déclarés "non nuls". Le saut entre termes "non-nuls" et termes proches du epsilon machine a tendance à diminuer à mesure que la taille de la matrice augmente, ce qui rend le calcul du rang numérique difficile.

Nous pouvons cependant améliorer, dans une certaine mesure, la situation précédente en exploitant une propriété de  $B(1)$ . En effet, en permutant lignes et colonnes de cette matrice d'une certaine façon, on peut arriver à une structure bloc-triangulaire de  $B(1)$ . En appliquant à la matrice une factorisation QRP bloc après bloc, les termes diagonaux vont alors décroître uniquement à l'intérieur de chaque bloc. Le graphique ci dessous montre la nouvelle disposition des termes diagonaux à la fin de la factorisation QRP, en traitant les blocs l'un après l'autre. On voit que, malgré une décroissance rapide des termes diagonaux dans chaque bloc, la petite taille de ceux-ci permet au plus petit terme "non-nul" d'être nettement grand que dans la factorisation QRP appliquée globalement à  $B(1)$ . Le calcul du rang numérique est facilité et l'on trouve ici un rang égal à 294, qui correspond au nombre de termes dans la figure ci-dessus. Enfin la dernière figure montre la distribution des termes diagonaux dans la matrice finale, une fois les

FIGURE 1 – sparsité  $B(1)$

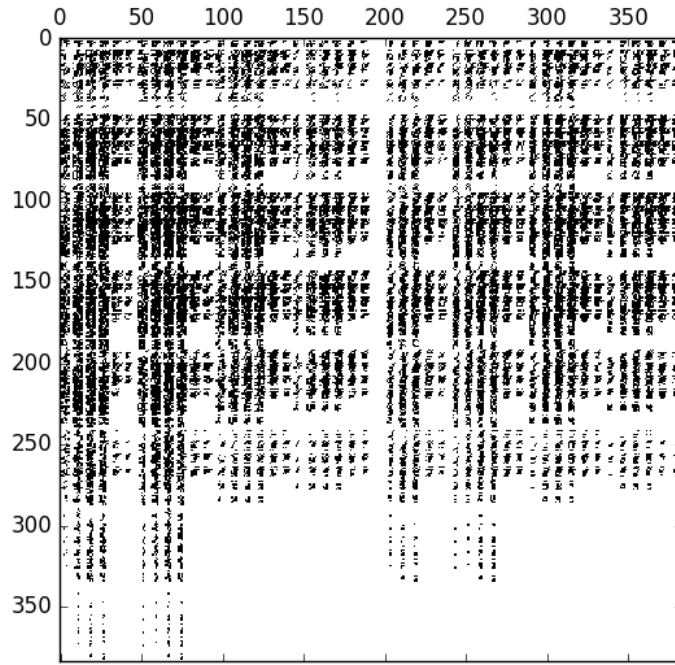
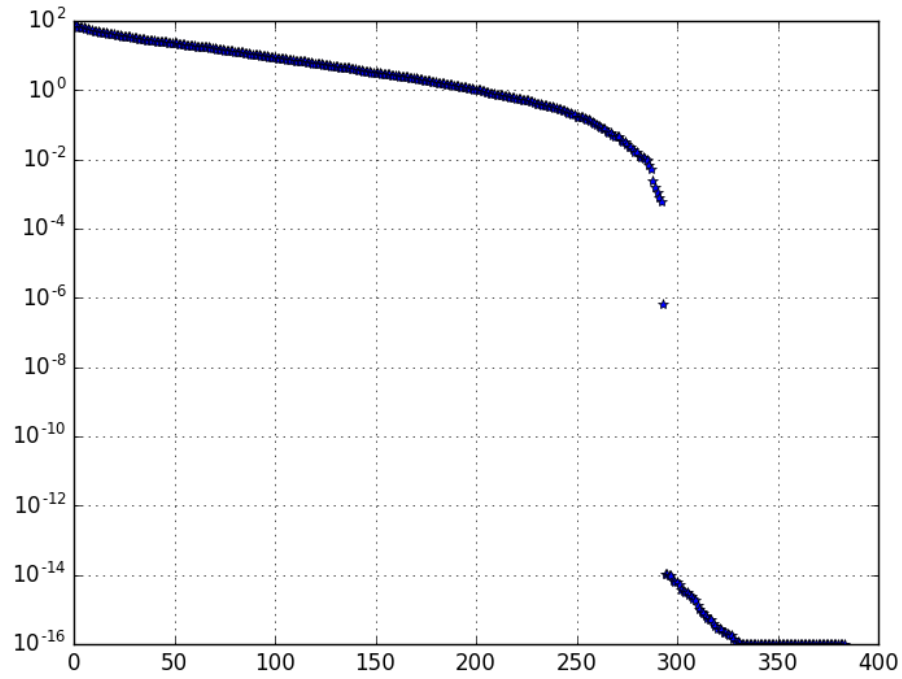


FIGURE 2 – termes diagonaux factorisation QR  $B(1)$



réductions faites, comme expliqué dans la section 3.2.2. On voit que la distribution des termes est toujours bonne.

FIGURE 3 –  $B(1)$  permutée sous forme bloc-triangulaire

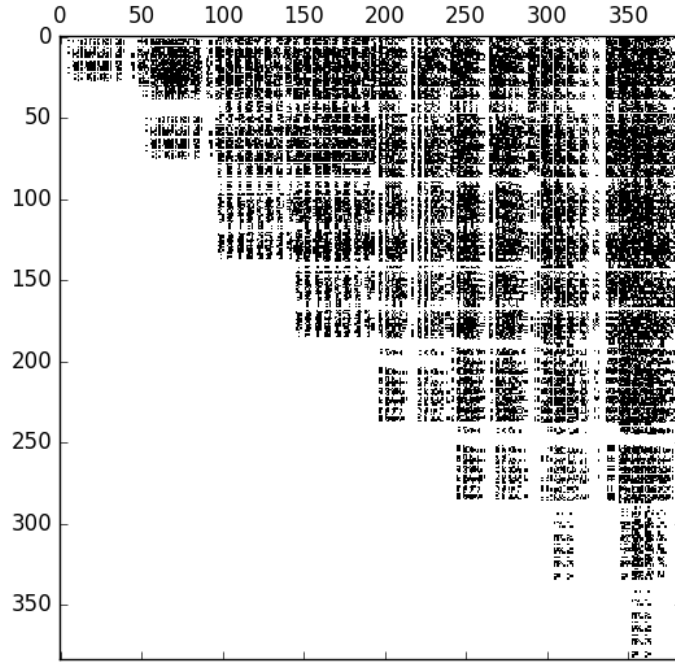
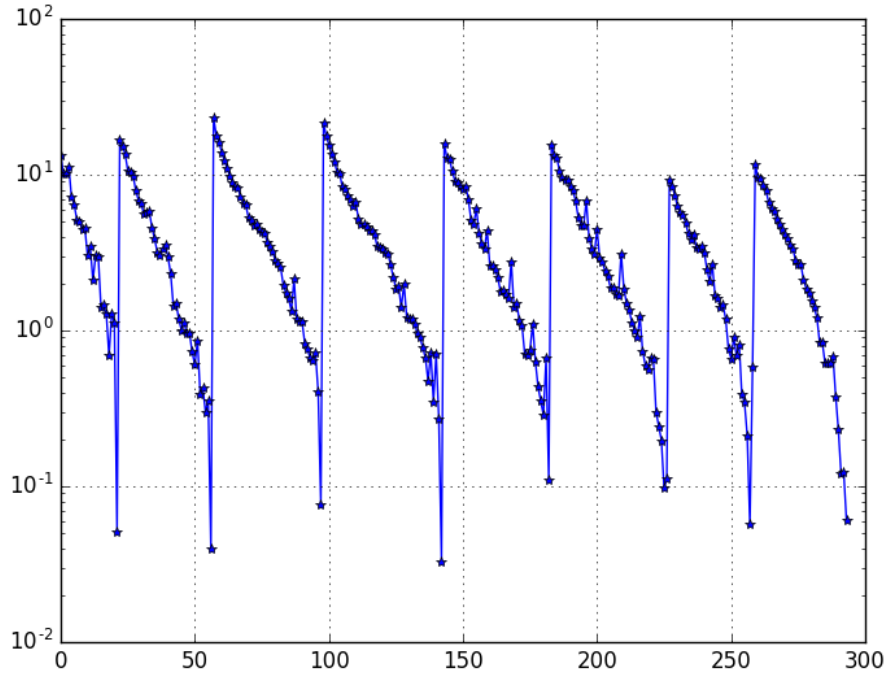
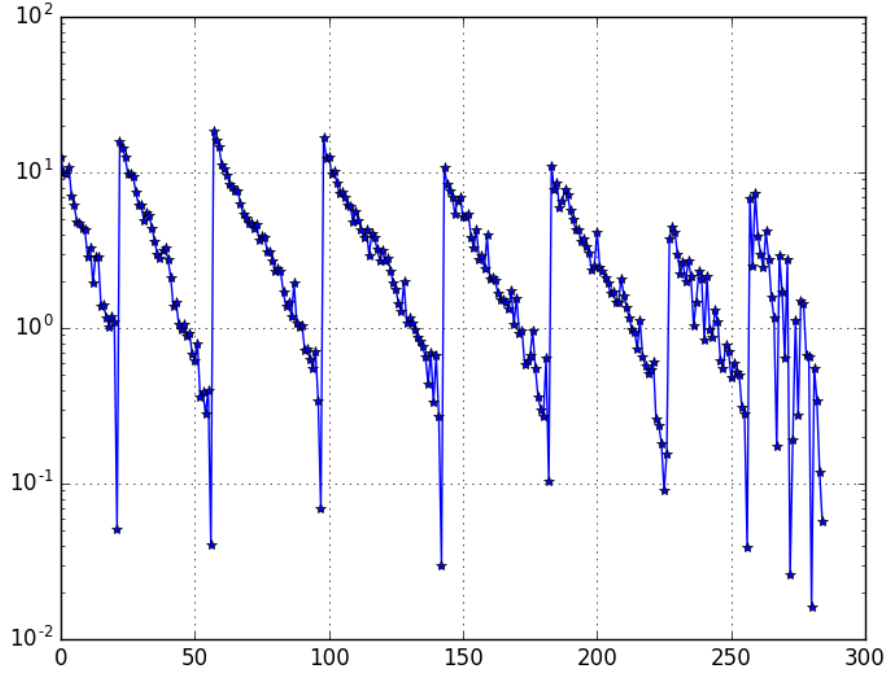


FIGURE 4 – termes diagonaux factorisation QR  $B(1)$  permutée



Le rang de la nouvelle matrice est 285, c'est la dimension du quotient  $A$ , d'après la Conjecture 1.

FIGURE 5 – termes diagonaux après réduction



### 3.4 Calcul numérique des racines

Nous reprenons l'exemple ci-dessus. La matrice de Bezout  $B(1)$ , à coefficients entiers, est de taille 384 . Après réductions on trouve que la dimension du quotient  $A$  est 285 . En calculant numériquement les valeurs propres des matrices compagnon  $X_j = B(x_j)B(1)^{-1}$  on obtient les racines du système polynômial  $f$ . On vérifie la qualité de chacune des racines obtenues en lui appliquant les polynômes  $f_i, i = 1, \dots, n$ . Les résultats sont représentés sous forme d'histogramme où le logarithme décimal de l'erreur est porté en abscisse. Sur la figure suivante le processus

FIGURE 6 – Processus de réduction exécuté en arithmétique exacte

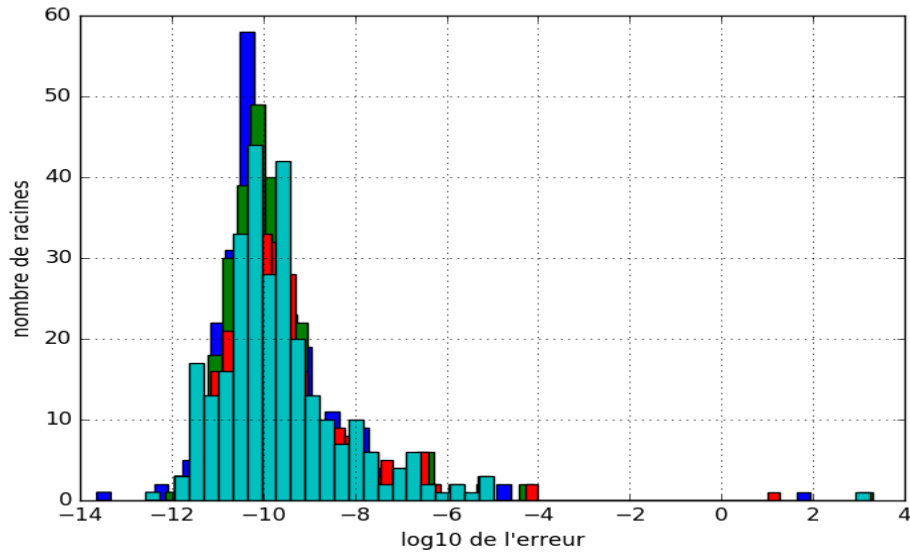
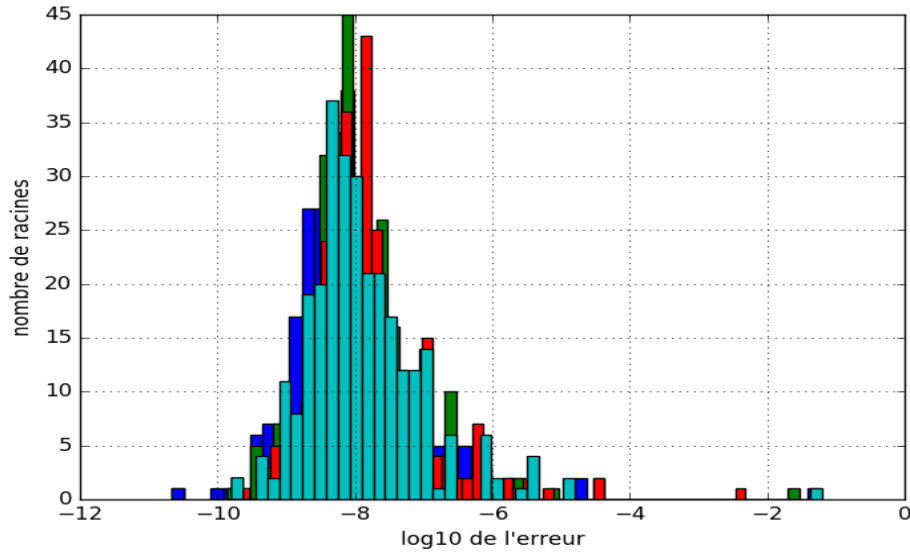


TABLE 1 – timings

| Arithmétique | Processus                       | Software | Timing   |
|--------------|---------------------------------|----------|----------|
| flottante    | Construction matrices de Bezout | NumPy    | 2128 ms  |
|              | Noyau de $B(1)$                 | Octave   | 127 ms   |
|              | Réduction matrices              | Octave   | 524 ms   |
|              | Valeurs propres                 | SciPy    | 2440 ms  |
| exacte       | Réduction matrices              | SageMath | 12228 ms |
|              | Vérification dimension Algèbre  | Sage     | 40562 ms |

de réduction est effectué en arithmétique flottante. On constate que le temps de calcul en arithmétique flottante est

FIGURE 7 – Processus de réduction exécuté en arithmétique flottante



plus court mais au prix d'une dégradation sensible de la qualité des résultats.

## 4 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une méthode de résolution numérique des systèmes polynômiaux en intersection complète. Cette méthode utilise exclusivement des techniques d'algèbre linéaire numérique. Le principe de la méthode repose sur une conjecture de nature algébrique mais il est facile de tester si les racines obtenues sont numériquement correctes et les racines non satisfaisantes peuvent être écartées.

## Références

- [1] Auzinger, Stetter, A note, SIAM, 19?
- [2] S. Barnett, A note on the Bezoutian matrix, SIAM J. Appl. Math., 22 :84-86, 1972
- [3] G.H. Golub, C.F. van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [4] J.P. Cardinal, Dualité et algorithmes itératifs pour la résolution de systèmes polynômiaux, Thèse présentée devant l'université de Rennes I, 1993.
- [5] J.P. Cardinal, B. Mourrain, Algebraic approach of residues and applications, in : J. Renegar, M. Shub, S. Smale (Eds.), Proc. AMS-SIAM Summer Seminar on Math. of Numerical Analysis, Park City, Utah, 1995, Lectures in Appl. Math., 32, Amer. Math. Soc, Providence, pp. 189-210, 1996
- [6] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms, Third Edition, Springer, 2006

[7] <https://github.com/jpcp13/bezout>