Cálculo Multivariado

João Paulo Lazzarini Cyrino

26/11/2020

Funções com mais de uma variável

Uma função f de duas variáveis reais é uma relação que associa cada par ordenado (x, y) de um conjunto A, domínio, a um único valor real $f(x, y)$, ou seja:

$$f : A \subset R^2 \to R$$

Funções de duas variáveis podem ser esboçadas com gráficos de curvas de nível. Consideremos a seguinte função:

$$f(x) = x^2 + y^2$$

Podemos representá-la em R com os valores dentro de um intervalo tal como [-10,10] para os valores de x e y. Para isso, criamos uma variável contendo uma sequência de 21 números dentro desse intervalo:

```r
s <- seq(-10,10, length.out=21)
```

Agora, criamos um data frame f com o produto cartesiano de $s \times s$. Nomeamos as colunas desse data frame com x e y:

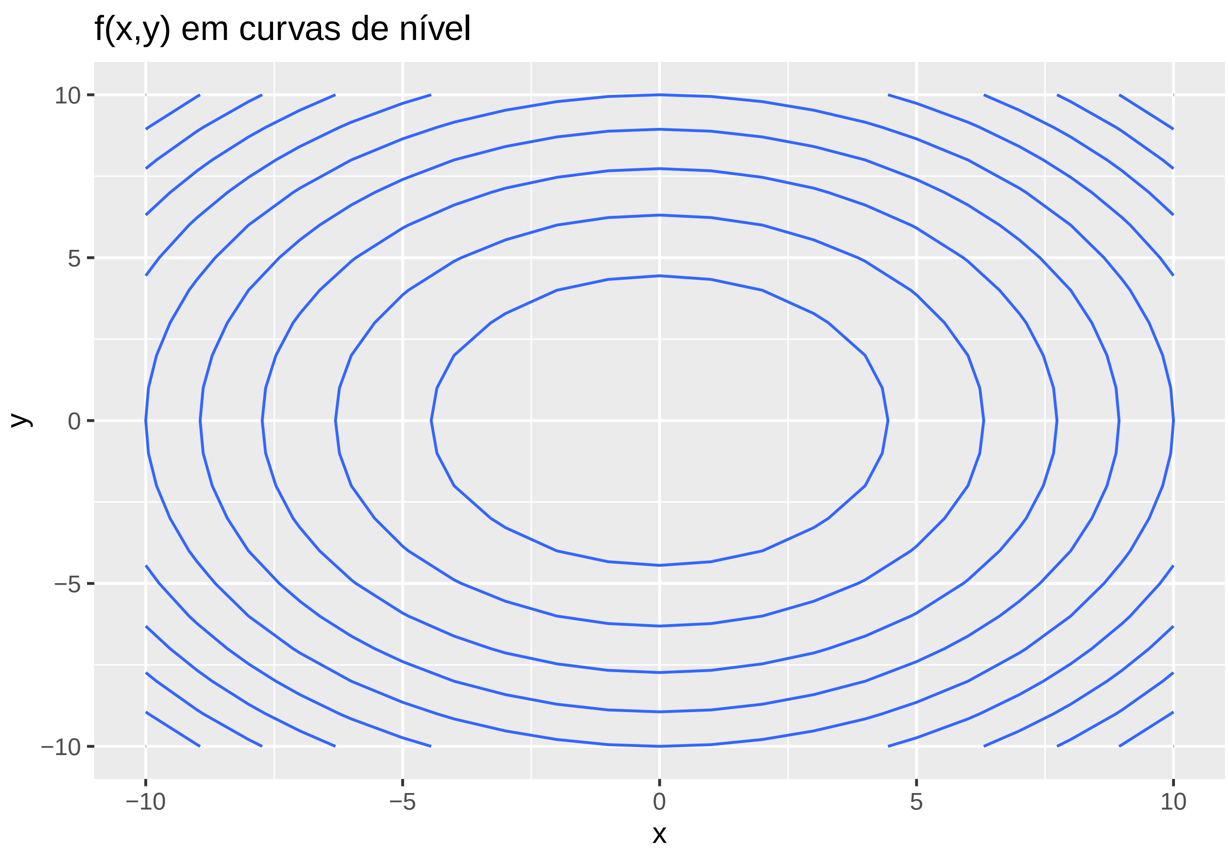
```r
f <- expand.grid(s,s)
colnames(f) <- c('x','y')
```

Agora que todas as combinações possíveis dos valores de x e y, adicionamos em f os valores para z:

```r
f$z <- f$x**2 + f$y**2
```

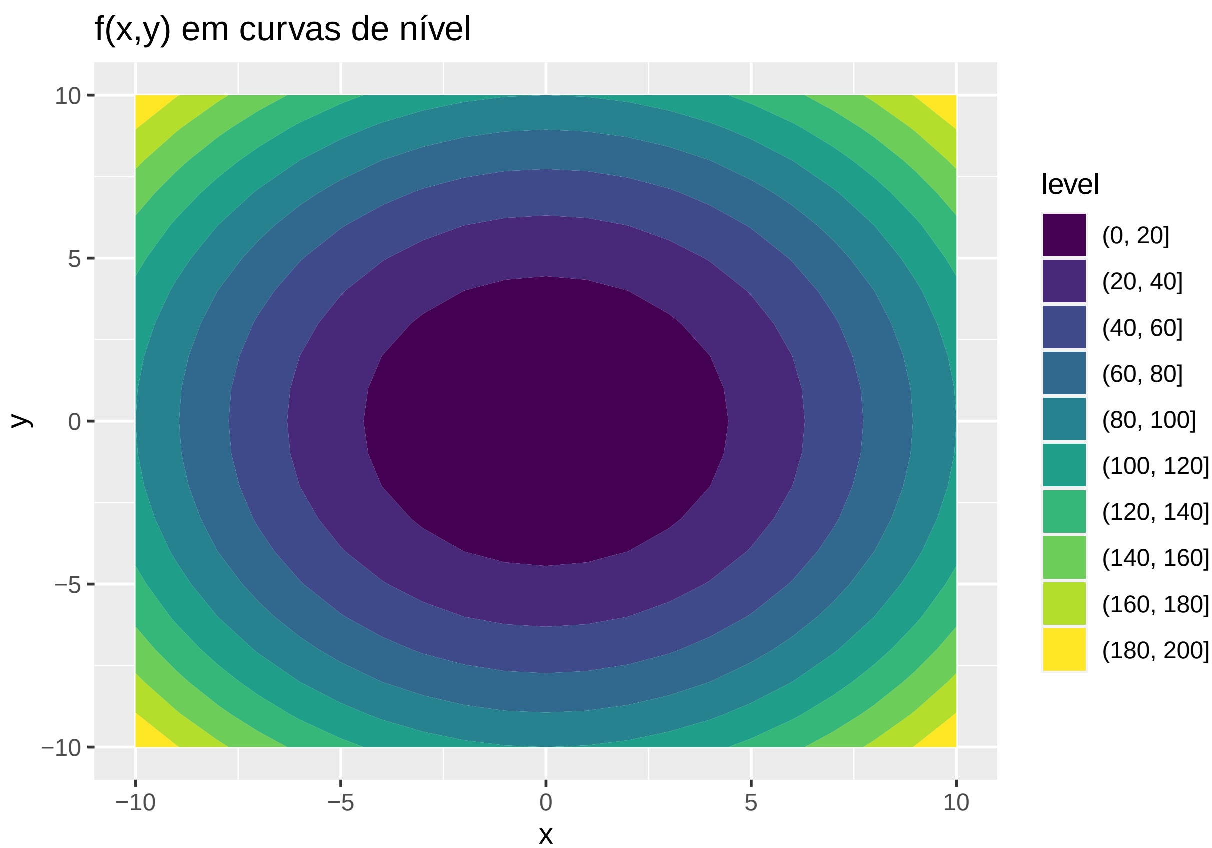
Podemos visualizar as curvas de nível para essa função utilizando o atributo *geom_contour()* do pacote *ggplot2*:

```r
ggplot(f, aes(x,y,z=z)) +
  geom_contour() +
  labs(title="f(x,y) em curvas de nível")
```



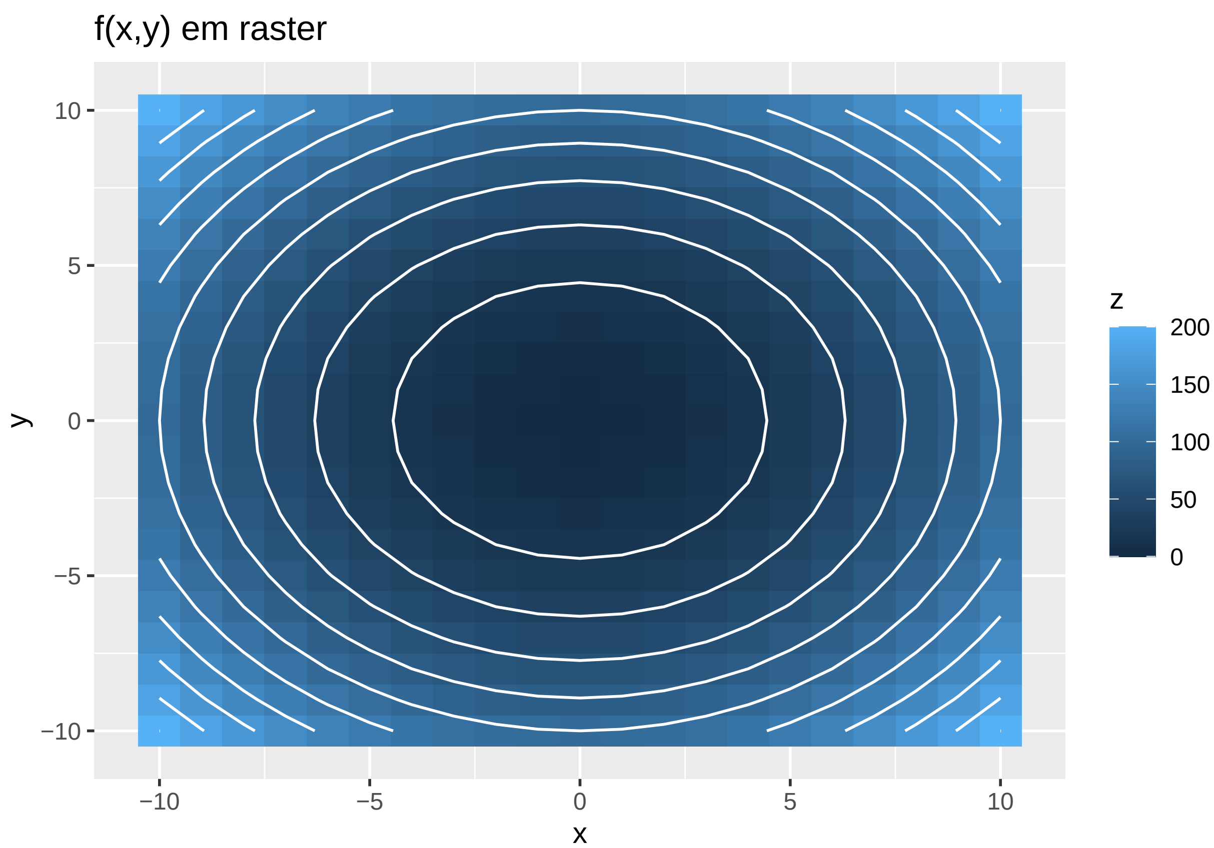
Com *geom_contour_filled()* podemos ter a visualização com cores para cada faixa de valor de z:

```
ggplot(f, aes(x,y,z=z)) +
  geom_contour_filled() +
  labs(title="f(x,y) em curvas de nível")
```



Também podemos utilizar *geom_contour()* junto com *geom_raster()*:

```
ggplot(f, aes(x,y,z=z)) +
  geom_raster(aes(fill=z)) +
  geom_contour(colour="white") +
  labs(title="f(x,y) em raster")
```



Derivadas Direcionais e Parciais

A derivada de uma função multivariada se dá em um ponto (x_0, y_0) de um vetor unitário $u =< a, b >$:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Tomando a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1)$, podemos ter a derivada da seguinte forma:

$$D_u f(1, 1) = \lim{}_h \to 0 \frac{f(1 + ha, 1 + hb) - f(1, 1)}{h} = 2a + 2b$$

Supondo que a direção desejada seja dada pelo vetor $v =< -1, 1 >$, para obter o vetor unitário u precisamos normalizá-lo:

$$u = \frac{(a, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Dessa forma:

$$D_u f(1, 1) = 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

Derivadas parciais

Quando o vetor u é $< 1, 0 >$ ou $< 0, 1 >$, temos uma derivada de f em relação à x ou y respectivamente. Essas derivadas são denominadas derivadas parciais. Temos então:

$$D_{<1,0>}f = f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

e

$$D_{<0,1>}f = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Solucionar derivadas parciais é bastante simples, basta tratar a variável que não é derivada como uma constante. Por exemplo, para a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ temos:

$$f_x = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial x} = 2x$$

e

$$f_y = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = 2y$$

Nabla: gradiente da função

É possível entender a derivada direcional considerando $u =< a, b >$ como:

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Isso pode ser compreendido como o produto cartesiano do vetor $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ com o vetor $u = (a, b)$:

$$D_u f(x, y) = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right) \cdot u$$

O vetor $(f_x(x, y), f_y(x, y))$ possui uma nomenclatura especial ∇f, que é entendido como o gradiente da função. O nome para o símbolo ∇ é *nabla*.

$$\nabla f(x, y) =< f_x(x, y), f_y(x, y) >= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)$$

Dessa forma, a derivada direcional de uma função f pode ser definida como $D_u f = \nabla f \cdot u$

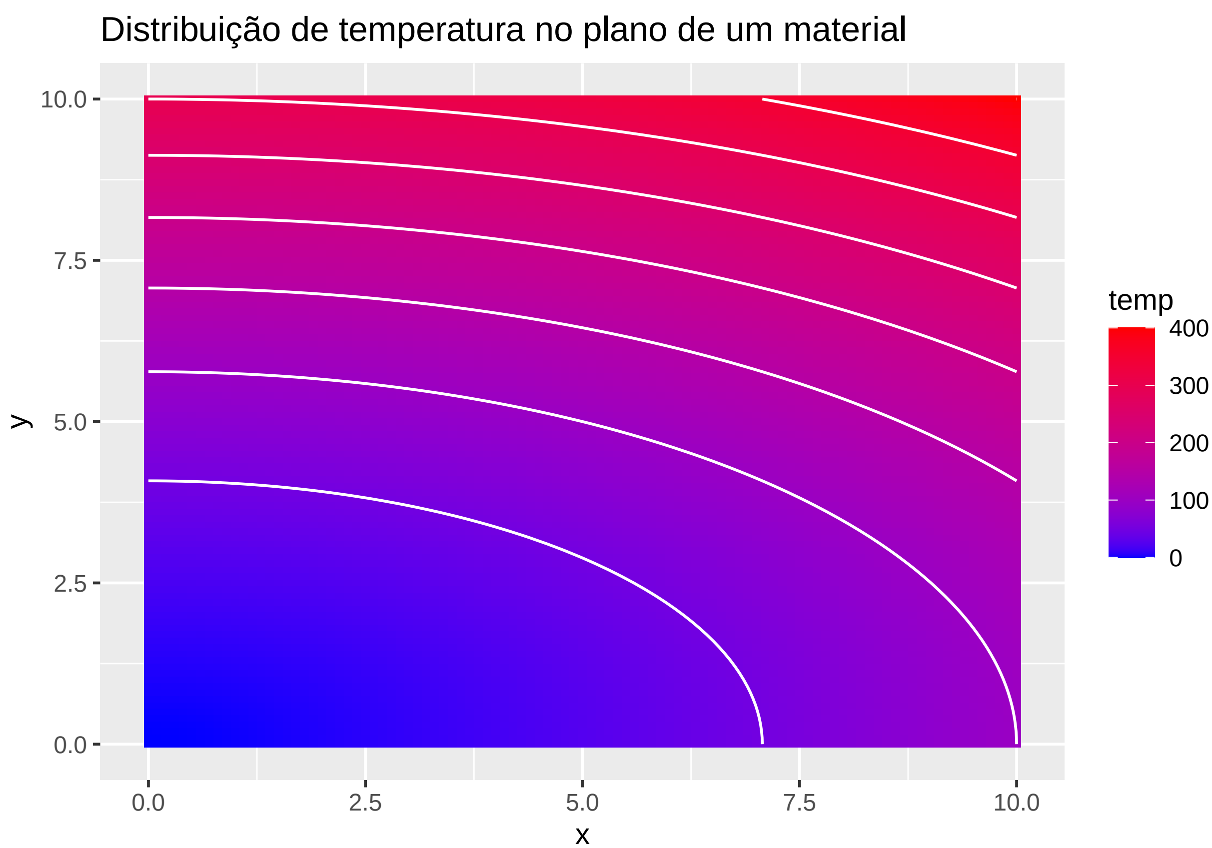
Aplicação

Derivadas direcionais são úteis para determinarmos em que direção uma função f varia mais rapidamente e qual é essa taxa de variação.

Teorema: se f é uma função de duas variáveis e f_x e f_y existam e sejam contínuas, o valor máximo da derivada direcional $D_u f$ é o módulo do vetor ∇f e ocorre quando u tem a mesma direção de ∇f.

Tomemos a função $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ que represente a distribuição de temperatura no plano xy de um material. Vamos representar isso graficamente também:

```r
# criando a sequência de números para x e y:
s <- seq(0,10,length.out=101)
# criando o data frame para a função f:
f <- expand.grid(s,s)
colnames(f) <- c('x','y')
# criando o valor da temperatura:
f$temp <- f$x**2 + 3*f$y**2
# plotando com geom_raster, ajustando a visualização para temperaturas altas em vermelho.
ggplot(f, aes(x,y,fill=temp)) +
  geom_raster() +
  geom_contour(aes(z=temp),colour="white") +
  scale_fill_gradient(low="blue", high="red") +
  labs(title="Distribuição de temperatura no plano de um material")
```



No ponto $(1, 1)$, qual a direção e taxa de maior aumento da temperatura? Para saber isso, basta calcular $\nabla f(1, 1)$ e seu respectivo módulo.

Para a direção:

$$\nabla f(x, y) =< f_x(x, y), f_y(x, y) >=< 2x, 6y >$$

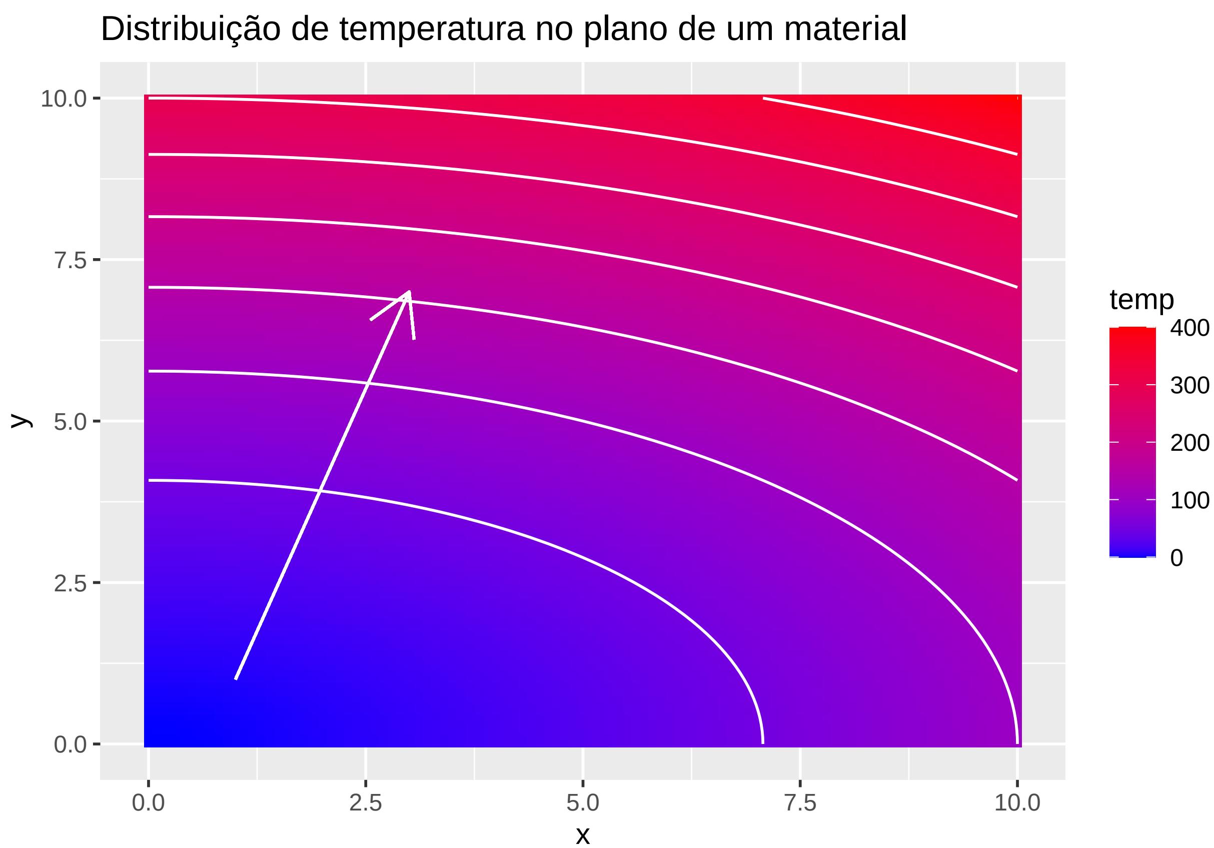
$$\nabla f(1, 1) =< 2, 6 >$$

Para a taxa:

$$|\nabla f(1,1)| = |<2,6>| = 2\sqrt{10} \approx 6,3^oC/cm$$

Abaixo mostramos com representar graficamente o vetor $\nabla f(1,1)$ no plano da função $f(x,y)$

```
ggplot(f, aes(x,y,fill=temp)) +
  geom_raster() +
  scale_fill_gradient(low="blue", high="red") +
  geom_contour(aes(z=temp),colour="white") +
  geom_segment(aes(x=1,y=1,xend=3,yend=7), color="white", arrow = arrow()) +
  labs(title="Distribuição de temperatura no plano de um material")
```



Um problema parecido seria considerar que a temperatura em um plano seria dada pela função abaixo:

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

Qual seria a taxa de aumento de temperatura nesse material no ponto (-1,1,0)? A resposta nesse caso é $|\nabla f(-1,1,0)|$. Para chegar a isso precisamos das derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2) = 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2) = 4y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2) = 6z$$

Dessa forma:

$$\nabla f(-1,1,0) =< 2(-1), 4(1), 6(0) >=< -2, 4, 0 >$$

Para saber a taxa, temos que calcular $|(-2,4,0)|$:

$$|(-2,4,0)| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$$

Regra de Cadeia

Supondo que uma função $f(x,y)$ seja, na verdade, $f(g(t),h(t))$. Nesse caso, temos a seguinte solução de sua derivada:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Por exemplo, se $f(x,y) = x^2y + 4xy^3$ e $x = \sin 2t$ e $y = \cos t$, como calcular $\frac{df}{dt}$?

Nesse caso, fazemos:

$$(2xy + 4y^3)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^2)(-\sin t)$$

E prosseguimos a álgebra desse ponto, o que é suprimido aqui.

Quando, no entanto temos $f(x,y) = f(g(s,t),h(s,t))$, derivamos a função f em relação a cada variável s e t:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Integral Dupla

Da mesma forma que podemos calcular derivadas parciais, considerando as demais variáveis de uma função como constantes, podemos utilizar a mesma estratégia em integrais. No exemplo abaixo resolvemos a integral de uma função de duas variáveis em relação à variável x:

$$\int 4x^3y^2dx = 4y^2\int x^3dx = 4y^2\left(\frac{x^4}{4}\right) + C = y^2x^4 + C$$

Podemos também calcular a integral dessa função em relação à variável y:

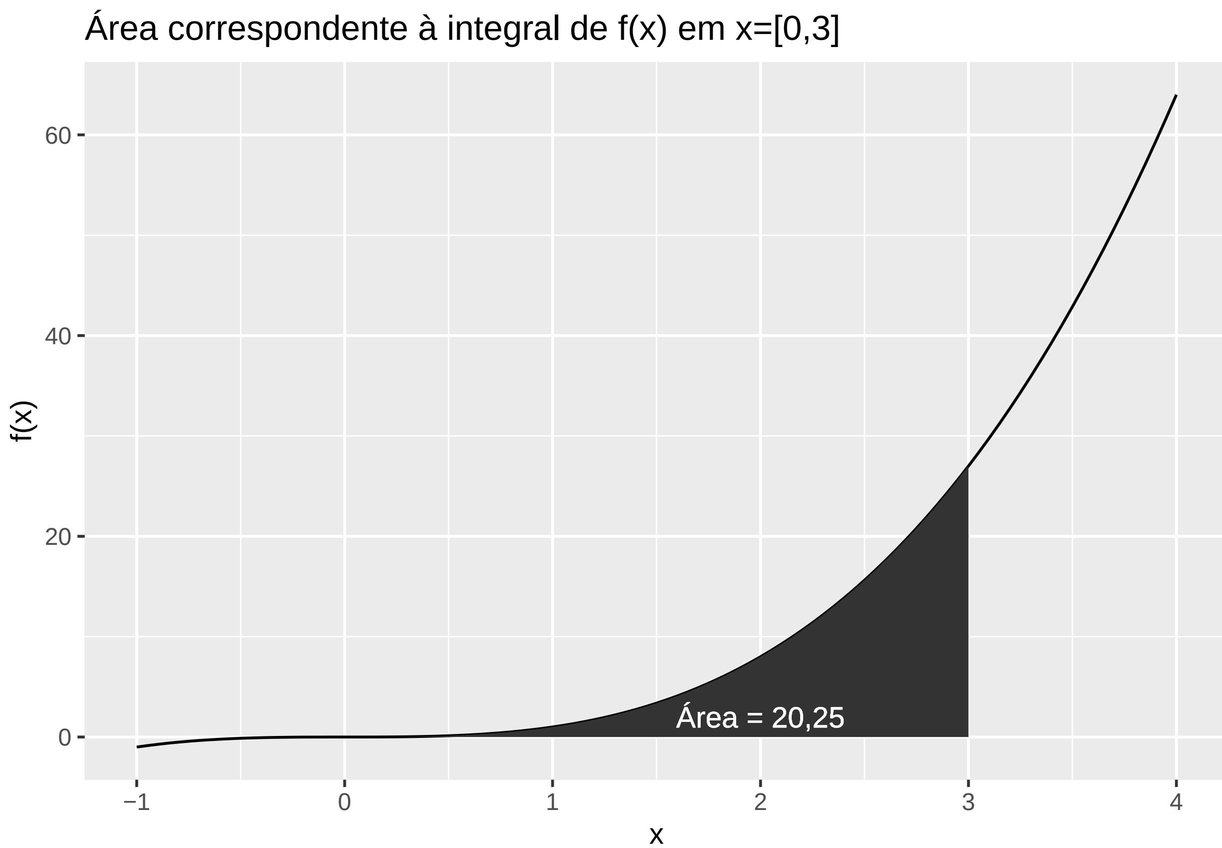
$$\int 4x^3y^2dy = 4x^3\int y^2dy = 4x^3\left(\frac{y^3}{3}\right) + C = \frac{4y^3x^3}{3} + C$$

Quando falamos sobre integrais definidas, no entanto, a coisa se complica um pouco mais. Consideremos a integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Essa integral de uma variável equivale à área ocupada entre os valores de f(x) e o eixo x do gráfico nos intervalos de x entre a e b. Por exemplo, vamos tomar a função $f(x) = x^3$ e sua integral definida entre os valores de $x = 0$ e $x = 3$:

$$\int_0^3 x^3dx = \left[\frac{(3)^4}{4}\right] - \left[\frac{(0)^4}{4}\right] = 20,25$$

Esse valor equivale à área sob a curva do gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 3$, conforme ilustrado abaixo:

```
s <- seq(-2,5)
ggplot(data.frame(s),aes(x=s)) +
  stat_function(fun=function(x){x**3},
                geom="line") +
  stat_function(fun=function(x){x**3},
                geom="area",
                xlim=c(0,3)) +
  xlim(-1,4) +
  geom_text(aes(x=2,y=2,label="Área = 20,25"), colour="white") +
  labs(x="x",y="f(x)",title="Área correspondente à integral de f(x) em x=[0,3]")
```



Para uma função de duas variáveis podemos utilizar integrais definidas para calcular volumes. Nesse caso utilizamos as **integrais duplas**. Há uma série de métodos para trabalhar com essas integrais, portanto, vamos passo a passo.

Integrais Duplas em Áreas Retangulares

Vamos definir uma área retangular $R = [a, b] \times [c, d]$ para a função $f(x, y)$. Se dividirmos o intervalo $[a, b]$ em m intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento, o comprimento de cada intervalo se dá por $\Delta x = \frac{(b-a)}{m}$. Da mesma forma podemos dividir $[c, d]$ em n intervalos $[y_{j-1}, y_j]$ tendo $\Delta y = \frac{(d-c)}{n}$. Sabendo disso, o volume da região S abaixo da curva dada por f definida em R é:

$$V = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*, y^*)\Delta A$$

onde:

- (x^*, y^*) é um ponto arbitrário de cada $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
- $\Delta A = \Delta x \Delta y$

Disso podemos generalizar a integral dupla, definida para um retângulo R:

$$\int \int_R f(x, y) \Delta A$$

Vamos tomar um exemplo concreto. A função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ definida no retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ tem o volume definido pela integral dupla abaixo:

$$\int \int_R \sqrt{1 - x^2} \Delta A$$

Podemos solucionar essa integral considerando, primeiramente, x como uma constante para o intervalo $y = [-2, 2]$. Assim, resolvemos $\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - x^2} dy$. Essa integral será uma função de x que podemos definir como $A(x)$ que deverá ser integrada posteriormente em $\int_{-1}^{1} A(x) dx$. Primeiro solucionamos a primeira integral. Vamos obter a integral indefinida para a variável y da função $\sqrt{1 - x^2}$:

$$\int \sqrt{1 - x^2} dy = y \sqrt{1 - x^2} + C$$

Agora, passemos para a definida:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{1 - x^2} dy = (2\sqrt{1 - x^2}) - (-2\sqrt{1 - x^2}) = 4\sqrt{1 - x^2}$$

Considerando que $A(x) = 4\sqrt{1 - x^2}$, integramos agora $\int_{-1}^{1} A(x) dx$. Faremos primeiro a integral indefinida:

$$\int 4\sqrt{1 - x^2} dx = 2 \arcsin(x) + \sin(2 \arcsin(x)) + C$$

Resolvendo a definida temos:

$$[2 \arcsin(1) + \sin(2 \arcsin(1))] - [2 \arcsin(-1) + \sin(2 \arcsin(1))] =$$
$$[\pi + \sin(\pi)] - [-\pi + \sin(-\pi)] = \pi + \pi = 2\pi$$

Algo que pode facilitar os cálculos é o *Teorema de Fubini*, que nos dá algumas relações de igualdade entre as integrais:

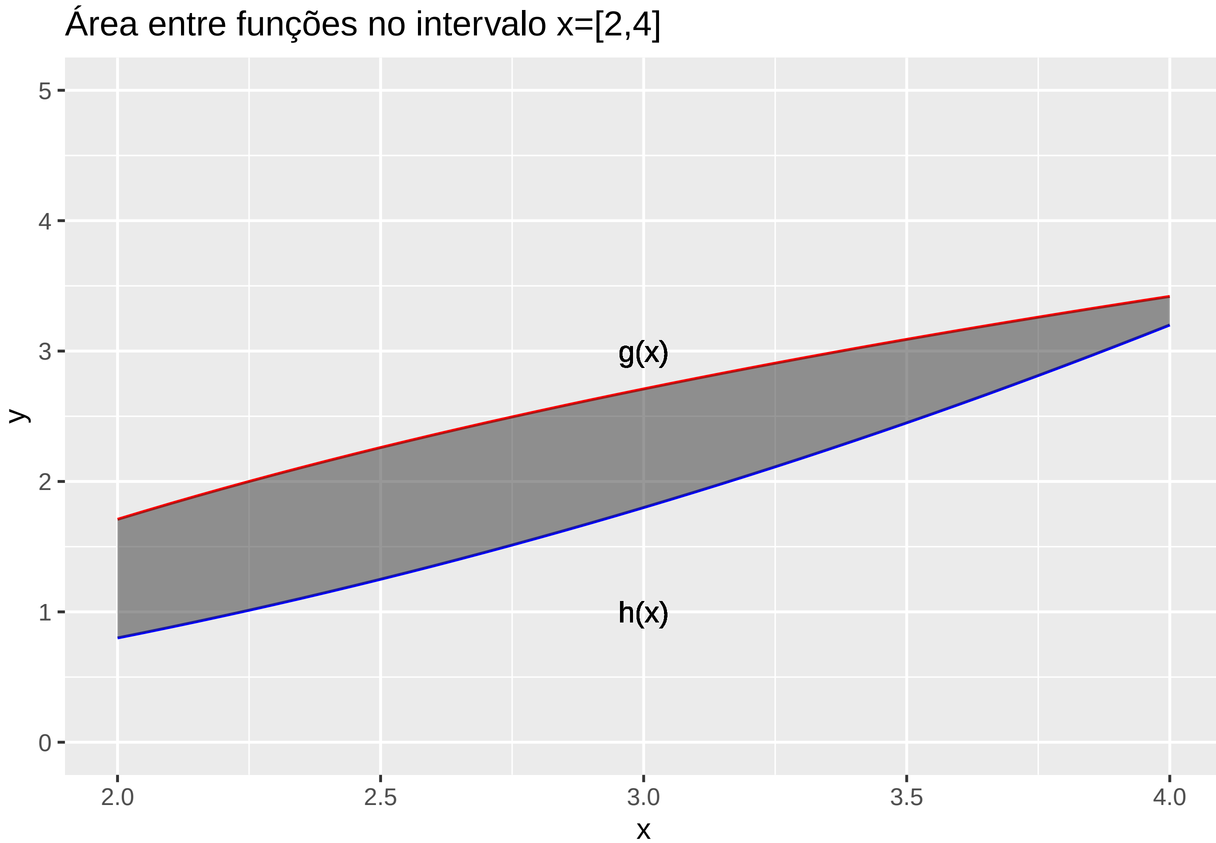
Teorema de Fubini

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Anteriormente calculamos integrais duplas para funções definidas em uma região retangular. Na maior parte das vezes, no entanto, a região que precisaremos calcular não será retangular. Nesse caso precisamos utilizar outra técnica.

Existem dois tipos de regiões que podemos utilizar. A primeira está ilustrada abaixo:



Nesse caso, temos uma área definida entre intervalos da variável x em duas funções que mapeiam x a y, $y = g(x)$ e $y = h(x)$. O outro tipo de região é o contrário, a área é definida entre intervalos da variável y em duas funções que mapeiam y a x, por exemplo $x = c(y)$ e $x = d(y)$.

No gráfico acima, vamos chamar a área de D. Queremos saber, justamente:

$$\int \int_D f(x,y)dA$$

Para isso, precisamos especificar os valores de D. Utilizamos a definição de conjunto:

$$D = \{(x,y)|2 \leq x \leq 4, h(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Nesse caso, a integral dupla deve ser calculada da seguinte forma:

$$\int_2^4 \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dydx$$

Quando temos o segundo tipo de região, determinado por uma área entre funções que mapeiam y a x, temos a seguinte definição de D:

$$D = \{(x,y)|c(y) \leq x \leq d(y), 2 \leq y \leq 4\}$$

A integral dupla deve ser calculada da seguinte forma:

$$\int_2^4 \int_{c(y)}^{d(y)} f(x,y)dxdy$$

Exemplo 1:

$$\int\int_D e^{\frac{x}{y}} dA, D = \{(x,y)|1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$$

Nesse caso temos que D é uma região do tipo 2, em que y é determinado por intervalos numéricos e x por funções. Dessa forma a resolução:

$$\int_1^2 \int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}} dxdy = \int_1^2 ye^{\frac{x}{y}}|_y^{y^3} dy = \int_1^2 ye^{y^2} - yedy =$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{1}{2}y^2e\right)|_1^2 = \frac{1}{2}e^4 - 2e$$

Integrais em Coordenadas Polares

Algumas vezes utilizar as funções definidas no plano cartesiano pode ser mais trabalhoso. Especialmente quando a área desejada se assemelha a uma fatia ou parte de um círculo. Nesse caso, podemos trocar o sistema de coordenadas do cartesiano para as coordenadas polares.

Nas coordenadas polares, um ponto é definido em termos de um raio r e um ângulo θ. Para converter uma coordenada cartesiana em coordenada polar utilizamos as seguintes fórmulas:

- $x = r\cos\theta$
- $y = y\sin\theta$
- $r^2 = x^2 + y^2$

Dessa forma, uma integral dupla na região D pode ser reescrita da seguinte forma em coordenadas polares:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

Vamos calcular o volume de um objeto definido entre o plano $z = 0$ e o paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. Sabemos que $z = 1 - x^2 - y^2$ quando $z = 0$ define uma círculo de raio $r = 1$. Dessa forma, temos que a região de nossa função é:

$$P = \{(r,\theta)|0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Sendo nossa função $z = 1 - x^2 - y^2$, podemos defini-la em termos de coordenadas polares:

$$z = 1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta$$

Dessa forma, calculamos a integral dupla:

$$\int\int_P 1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta rdrd\theta$$

$$\int_0^1 1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta r dr = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Equações Diferenciais Ordinárias

Equações diferenciais ordinárias (EDOs) são equações envolvendo derivadas de funções. Quando temos equações envolvendo derivadas parciais, aí estamos lidando com equações diferenciais parciais (EDPs).

EDOs e EDPs são muito importantes dada sua vasta aplicabilidade. Podemos modelar diversos fenômenos físicos em termos dessas equações. Aqui vou ilustrar com o exmplo de um objeto em queda.

Suponhamos que tenhamos um objeto de massa m no ar. Nele atuam as forças F_G, referente à gravidade e F_A, referente à resistência do ar. Ambas são opostas. F_G está direcionada para baixo e F_A, para cima. Vamos assumir que forças no sentido de F_G, para baixo, possuem valores positivos, e forças no sentido de F_A, para cima, possuem valores negativos.

Vamos considerar duas coisas. Em primeiro lugar, a *Segunda Lei de Newton* que diz que:

$$F = ma$$

Ou seja, qualquer força pode ser definida pela massa vezes a aceleração. Nesse caso, temos a definição de força em função da variável aceleração a. Podemos, no entanto, ser um pouco mais detalhistas e estabelecer que F pode ser uma função da velocidade v e do tempo t. Isso porque a aceleração a é a derivada da velocidade em função do tempo. Dessa forma:

$$F(t, v) = m\frac{dv}{dt}$$

Voltando ao nosso objeto, sabemos que sobre ele atuam as duas forças F_G e F_A, e, como são opostas, temos que a resultante delas é $F_G - F_A$. Podemos reescrever F_G como o produto da massa m e a aceleração da gravidade g (normalmente considerado como $9,8m/s^2$). Sobre F_A, vamos considerar que ela é proporcional à velocidade v do objeto, assumindo que ela se dê pelo produto γv, em que γ é uma constante maior que zero. Dessa forma temos que:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

Vamos simplificar a relação dividindo pela massa:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma v}{m}$$

Acima temos uma equação diferencial que, quando resolvida, nos dá a velocidade de queda de um objeto de massa m que possui gravidade e resistência do ar atuando sobre ele.

Muito bem, vamos supor que nosso objeto tenha massa $m = 2kg$, a constante de resistência do ar seja $\gamma = 0,392$ e que a gravidade seja $g = 9,8m/s^2$. Nesse caso temos:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0,196v$$

Vamos supor que, em um determinado instante t a velocidade do objeto seja de $30m/s$. Nesse caso temos:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0,196(30) = 3,92$$

Isso significa que no instante t a velocidade está aumentando em 3,92m/s. Interessante, não?

Agora, vamos considerar que no instante seguinte a velocidade aumentou para $33,92m/s$. Dessa forma temos:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0,196(33,92) = 3,15$$

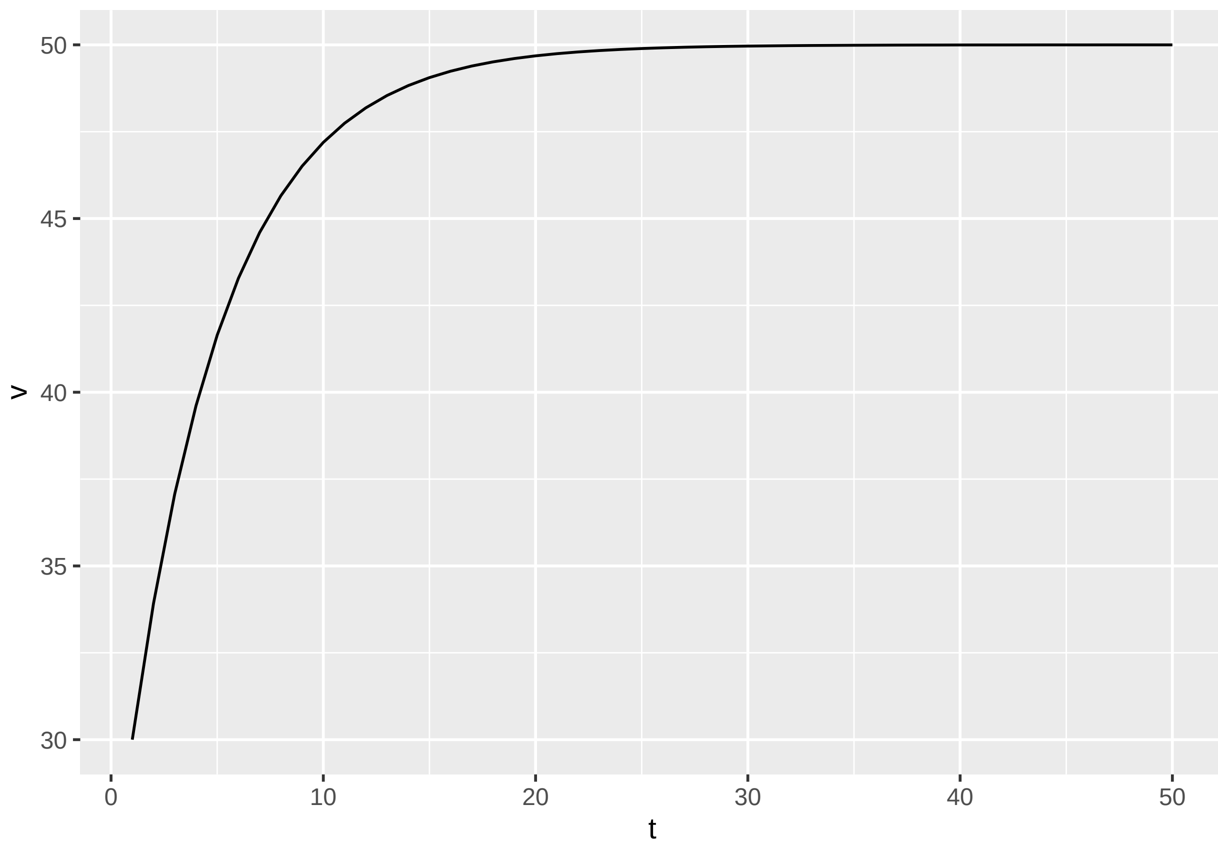
O que percebemos com isso é que a cada instante a aceleração tende a diminuir. Curiosamente, quando temos $v = 50$, $\frac{dv}{dt} = 0$, ou seja, não há variação na velocidade.

Considerando que a velocidade é de $30m/s$ no instante $t = 0s$, vamos ver o que ocorre nos próximos $50s$:

```
# primeira velocidade
v <- c(30)
# primeira aceleração
dvs <- c(0)
# atualização da aceleração de acordo com o tempo
# v = vetor de velocidades
# dvs = vetor de acelerações
for (t in seq(1,49)) {
  dv <- 9.8 - 0.196*v[t]
  v[t+1] <- v[t]+dv
  dvs[t+1] <- dv
}
```

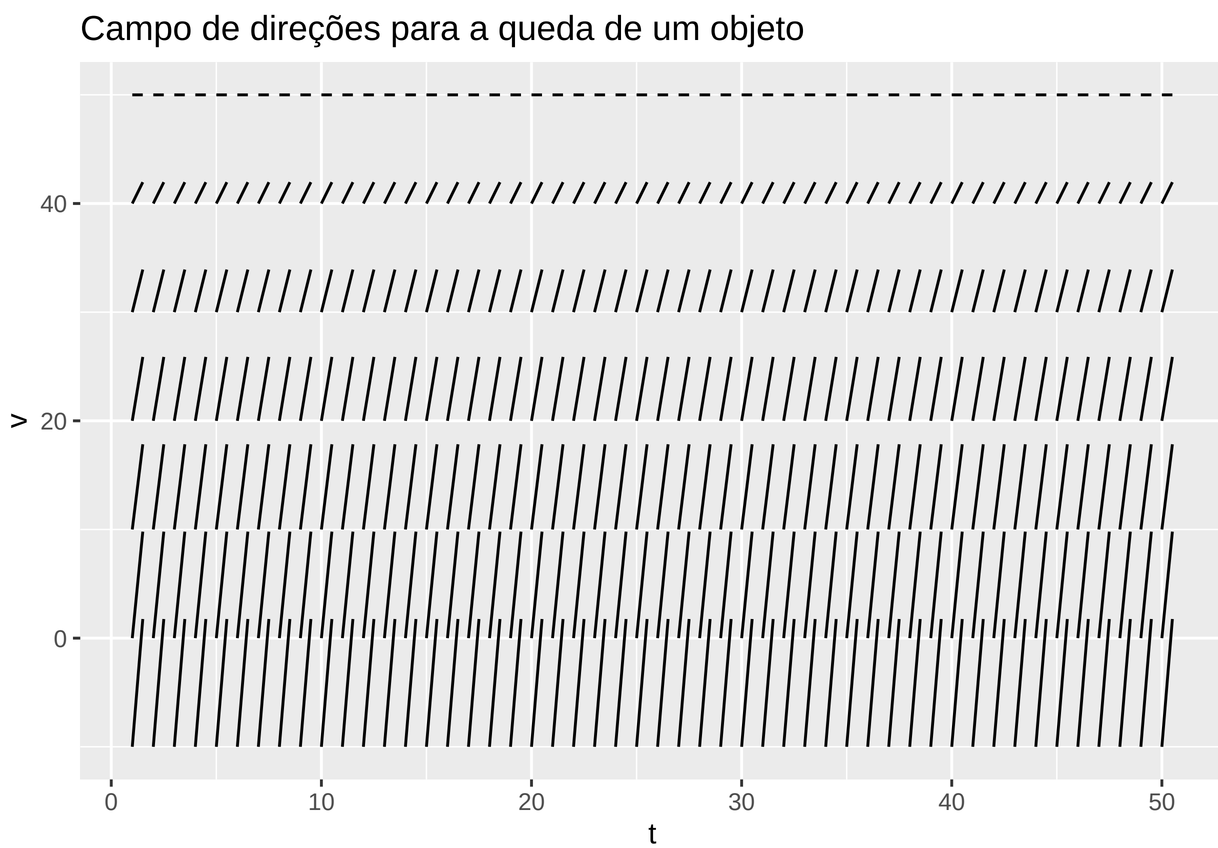
O gráfico abaixo mostra a variação da velocidade em relação ao tempo. Como podemos ver, quando a velocidade atinge cerca de $50m/s$, ela deixa de aumentar.

```
ggplot(data.frame(t = c(1:50), v, dvs), aes(x=t, y=v)) +
  geom_line()
```



Podemos também criar um Campo de Direções bastante rudimentar para ilustrar o que descreve nossa equação diferencial.

```
# Primeiro vamos criar uma lista de velocidades e outra de tempos:
v <- seq(-10,50,by=10)
t <- seq(1,50)
# Agora vamos criar uma tabela que combine os tempos e as velocidades:
tab <- expand.grid(t,v)
colnames(tab) <- c('t','v')
# Aplicamos v à equação, criando a coluna d da tabela:
tab$d <- sapply(tab$v, FUN= function(x){9.8 - 0.196*x})
# Agora plotamos o gráfico:
ggplot(tab, aes(x=t,y=v)) +
  geom_segment(aes(xend=t+.5,yend=v+d)) +
  labs(title="Campo de direções para a queda de um objeto")
```



Esse é o poder das equações diferenciais, elas permitem que nós modelemos a complexidade de um fenômeno tal como a velocidade de queda de um objeto.

Solucionando Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Solucionar equações diferenciais é, basicamente, obter uma função. Ou seja, lembrando da equação passada, queremos resolvê-la para obter o seguinte:

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0.196v \rightarrow v(t) = 50 + ce^{-0.196t}$$

Ou seja, a partir da equação diferencial obtemos a função exponencial que descreve a velocidade de queda de um objeto em função do tempo. A constante c é um resultado das integrações que utilizamos para solucionar a equação. Mas é interessante observar que ela tem uma estreita relação com a velocidade inicial v_0. Na verdade, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$v(t) = 50 + (v_0 - 50)e^{-0.196t}$$

O objetivo aqui é chegar na função $v(t)$ mantendo a constante c, ou seja, a solução geral da equação. Algumas vezes é possível desvendar a constante c tendo em conta alguns dados adicionais, e aí conseguimos ter uma solução específica.

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem O primeiro tipo de EDO que vamos tentar resolver é a EDO Linear de Primeira Ordem. Trata-se de uma equação no seguinte formato:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

As funções $p(t)$ e $g(t)$ são quaisquer funções contínuas em função de t. É importante sempre ter em conta que queremos descobrir $y(t)$.

Para solucionar uma EDO Linear precisamos ter em conta que ela precisa estar no formato acima. Um exemplo de EDO Linear é a equação da queda do objeto que estávamos apresentando anteriormente. Podemos colocá-la no formato desejado:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v \rightarrow \frac{dv}{dt} + 0.196v = 9.8$$

Nesse caso, $p(t) = 0.196$, $g(t) = 9.8$ e $v = 1$. Como podemos ter vários tipos, vamos focar nossa solução na forma geral apresentada anteriormente.

Para solucionar essas equações vamos assumir uma função $\mu(t)$, a que chamamos de *fator de integração*. Essa função possui uma propriedade especial, apontada abaixo:

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t)$$

Assim, se multiplicarmos todos os termos da equação pelo fator de integração, temos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

Agora, considerando que $\mu(t)p(t) = \mu'(t)$ e $\mu(t)\frac{dy}{dt} = \mu(t)y'(t)$, o que temos do lado esquerdo da equação é a regra do produto:

$$\mu(t)y'(t) + \mu'(t)y = (\mu(t)y(t))'$$

Dessa forma:

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t)$$

Agora, podemos integrar ambos os lados para ter a solução:

$$\int (\mu(t)y(t))'dt = \int \mu(t)g(t)dt$$

$$\mu(t)y(t) + C = \int \mu(t)g(t)dt$$

Com um pouco de álgebra conseguimos isolar $y(t)$ e obter a solução da equação:

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt - C}{\mu(t)}$$

Como a constante C é desconhecida, podemos multiplicá-la por -1 sem maiores problemas, obtendo:

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)}$$

A pergunta que resta é, no entanto, como obter o fator de integração $\mu(t)$? Vamos lá!

Precisamos que $\mu(t)p(t) = \mu'(t)$, dessa forma:

$$p(t) = \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}$$

Sucede que:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = (\ln \mu(t))' = p(t)$$

Assim, podemos integrar ambos os lados:

$$\int (\ln \mu(t))' dt = \int p(t) dt$$

$$\ln \mu(t) + k = \int p(t) dt$$

Como não sabemos o valor de k, podemos manipulá-la de forma a obter:

$$\mu(t) = k e^{\int p(t) dt}$$

Na equação final, essa constante k poderá ser absorvida na constante C principal.

$$y(t) = \frac{\int \mu(t) g(t) dt + C}{\mu(t)} = \frac{\int k e^{\int p(t) dt} g(t) dt + C}{k e^{\int p(t) dt}} = \frac{k \int e^{\int p(t) dt} g(t) dt + C}{k e^{\int p(t) dt}}$$

A simplificação disso resultará em:

$$y(t) = \frac{\int e^{\int p(t) dt} g(t) dt + \frac{C}{k}}{e^{\int p(t) dt}}$$

Como não sabemos o valor de C, nem de k, podemos considerar $\frac{C}{k}$ como C. Dessa forma temos que:

$$y(t) = \frac{\int e^{\int p(t) dt} g(t) dt + C}{e^{\int p(t) dt}}$$

Ou seja, podemos considerar que o fator de integração $\mu(t)$ é:

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dx}$$

Aplicando para a equação da queda Agora que sabemos como solucionar uma EDO Linear de Primeira Ordem, vamos tentar resolver a equação da queda:

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v$$

Primeiramente, vamos colocar os elementos em ordem:

$$\frac{dv}{dt} + 0.196v = 9.8$$

Considerando que, para essa equação, $p(t) = 0.196$, podemos obter $\mu(t)$:

$$\mu(t) = e^{\int 0.196dt} = e^{0.196t+k}$$

Considerando $\frac{dv}{dt} = v'(t)$, seguimos:

$$\mu(t)v'(t) + \mu(t)0.196v = \mu(t)9.8$$

Pela propriedade $\mu'(t) = \mu(t)p(t)$ e sabendo que $p(t) = 0.196$, temos que:

$$\mu(t)v'(t) + \mu'(t)v = \mu(t)9.8$$

Com a regra do produto, obtemos:

$$(\mu(t)v(t))' = \mu(t)9.8$$

Integrando ambos os lados:

$$\int (\mu(t)v(t))'dt = \int \mu(t)9.8dt$$

Tudo isso resultará em:

$$v(t) = \frac{\int \mu(t)9.8dt + C}{\mu(t)}$$

Vamos substituir $\mu(t) = e^{0.196t}$:

$$v(t) = \frac{9.8\int e^{0.196t}dt + C}{e^{0.196t}}$$

$$v(t) = \frac{50e^{0.196t} + C}{e^{0.196t}}$$

Considerando que $\frac{1}{e^{0.196t}} = e^{-0.196t}$, podemos simplificar:

$$v(t) = 50 + Ce^{-0.196t}$$

Podemos determinar o valor da constante em termos de uma velocidade inicial. Vamos considerar a seguinte equação:

$$v(0) = 50 + Ce^{-0.196(0)}$$

Vamos resolvê-la para C, e vamos considerar o símbolo $v(0)$ como v_0, referente à velocidade inicial.

$$v_0 = 50 + Ce^{-0.196(0)} = 50 + Ce^0 = 50 + C$$

Isolando C, temos:

$$C = v_0 - 50$$

Dessa forma, temos a equação da velocidade de queda, considerando uma velocidade inicial v_0:

$$v(t) = 50 + (v_0 - 50)e^{-0,196t}$$