Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Astrofísica — Facultad de Física
Estadística para Astrónomos - ASP5408
Primer Semestre 2016

Tarea 2

Profesor: Andrés Jordán (ajordan@astro.puc.cl)
Ayudante: Néstor Espinoza (nespino@astro.puc.cl)

Fecha de entrega: Viernes 22 de Abril, 11:30 hrs. (buzón del ayudante y/o en webcursos).

La presente tarea tiene por objetivo el ejercitar sus habilidades matemáticas aplicadas al área de probabilidades y estadística, asi como también en el lenguaje de programació Python.

A considerar:

- Cualquier código que haya sido ocupado para desarrollar la tarea debe adjuntarse en la resolución de la misma a través de un link a su GitHub. Si no tiene cuenta en GitHub, cree una.
- Desarrolle lo más que pueda sus ideas.
- Esta bien discutir las tareas en grupo, pero recuerde que estas son personales. Usted debe generar una discusión propia de sus resultados.

Problema 1 Velocidades superlumínicas de quasares

En 1996, Sir Martin Rees predijo que sería posible observar velocidades superlumíncas de quásares si es que el material eyectado por estos salía disparado en dirección al observador. Considerando esto,

a) Demuestre que si un trozo de material es eyectado del quásar a una velocidad v con un ángulo θ con respecto a la línea de visión (i.e., en la dirección del observador en la Tierra, tal como se muestra en la Figura 1), la velocidad transversal aparente de dicho trozo para un observador en la Tierra es

$$v' = \frac{v\sin(\theta)}{1-(v/c)\cos(\theta)},$$

donde θ y v son las cantidades físicas mostradas en la Figura 1 y c es la velocidad de la luz.

b) Si todos los quásares están orientados aleatoriamente, calcule la probabilidad de observar un quásar superlumínico en el límite $v/c \to 1$.

....

Problema 2 Generando v.a. de una distribución normal multivariada

En este problema, usted aprenderá a generar samples de una distribución normal multivariada con vector media $\vec{\mu}$ de N dimensiones y matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$ de $N \times N$ solo usando un generador de números aleatorios uniformes.

1. (*Probability Integral Transform)*. Considere una v.a. X, que tiene una CDF contínua y estrictamente creciente F. Considere la v.a. $Y = F(X)$; encuentre la PDF de Y. Esta es llamada la *probability integral transform*.

2. Ahora, considere $U \sim$ Uniforme$(0, 1)$ y haga $X = F^{-1}(U)$. Demuestre que $X \sim F$. Explique como, usando este resultado, ud. podría generar números aleatorios que tengan cualquier distribución solo teniendo en mano números que distribuyen uniformemente. Pruebe su algoritmo generando números que distribuyan con una distribución normal estándar, usando números distribuidos uniformemente.

3. Considere una matriz simétrica y positiva-definida $\mathbf{\Sigma}$, cuya descomposición de Cholesky viene dada por la matriz triangular inferior $\mathbf{L}$, i.e.,

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{\Sigma}.$$

Si consideramos el vector $\vec{S} \sim N(\vec{0}, \mathbf{I})$, donde $\vec{0}$ es el vector nulo (con ceros en sus elementos) e $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, muestre que el vector aleatorio

$$\vec{X} = \vec{\mu} + \mathbf{L}\vec{S},$$

tiene una distribución normal multivariada con media $\vec{\mu}$ y matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$.

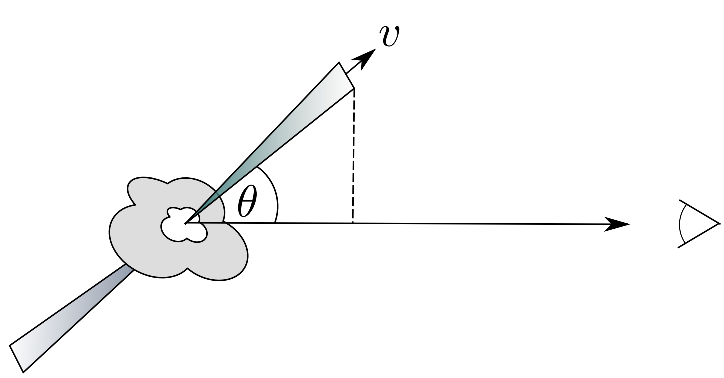

Figure 1 — Representación gráfica del Problema 1.

4. Usando el resultado anterior, calcule samples de una distrubición gaussiana multivariada $\vec{X}$ con media $\vec{\mu} = \vec{0}$ y matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$ de $N = 100$ dimensiones, donde los elementos (i, j) de la matriz de covarianza vienen dados por

$$\mathbf{\Sigma}_{i,j} = \exp\left(-\frac{1}{2}|\vec{x}_i - \vec{x}_j|^2\right),$$

donde $\vec{x}_k$ es el elemento k-ésimo del vector $\vec{x} = [-5, -4.9, ..., 4.9, 5]^T$ (más adelante veremos la importancia de esta forma de una matriz de covarianza, que es llamado un *squared exponential kernel*).

. . . .

Problema 3 Funciones generadoras de momentos

Una v.a. X distrubuye como una chi-cuadrado con ν grados de libertad si su pdf está dada por

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} x^{\nu/2-1} \exp(-x/2) \tag{1}$$

para $x > 0$, donde $\Gamma(x)$ denota la función gamma.

a) Encuentre la función generadora de momentos de una chi-cuadrado con ν grados de libertad.

b) Pruebe que si Y_1 es una chi-cuadrado con ν_1 grados de libertad e Y_2 es una chi-cuadrado con ν_2 grados de libertad, entonces $W = Y_1 + Y_2$ sigue una chi-cuadrado con $\nu_1 + \nu_2$ grados de libertad.

c) Considere la v.a. $Y = \sum_{i=1}^n Z_i^2$, donde $Z_i \sim N(0, 1)$. Usando la función generadora de momentos de una distribución normal estándar, pruebe que Z_i^2 distribuye como una chi-cuadrado. Con esto, calcule la distribución de Y.

. . . .