Pontificia Universidad Católica de Chile
Instituto de Astrofísica – Facultad de Física
Estadística para Astrónomos - ASP5408
Primer Semestre 2016

Tarea 2

Juan Pablo Díaz
22 de abril de 2016
https://github.com/jpdiazp/Tarea2

1.

a)

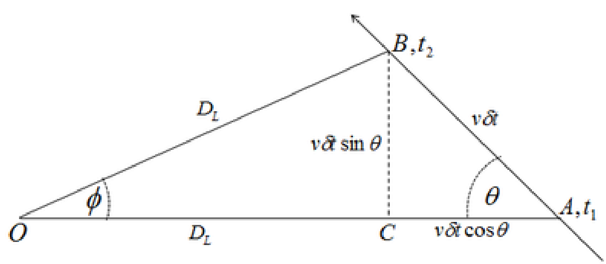

Figura 1:

La materia sale eyectada desde el punto A con velocidad v en el tiempo t_1 hasta el punto B en el tiempo t_2. El observador en O ve los eventos en A y B en los tiempos t'_1 y t'_2 respectivamente. El ángulo ϕ es muy chico y se puede considerar 0, entonces las distancias D_L serán iguales.

$$t_2 - t_1 = \delta t \tag{1}$$

$$AB = v\delta t \tag{2}$$

$$CB = ABsen(\theta) = v\delta tsen(\theta) \tag{3}$$

$$AC = ABcos(\theta) \tag{4}$$

El tiempo t'_1 será entonces:

$$t'_1 = t_1 + \frac{D_L + v\delta tcos(\theta)}{c} \tag{5}$$

siendo c la velocidad de la luz, y t'_2:

$$t'_2 = t_2 + \frac{D_L}{c} \tag{6}$$

Definimos ahora $\delta t'$:

$$\delta t' = t'_2 - t'_1 = t_2 + \frac{D_L}{c} - t_1 - \frac{D_L + v\delta tcos(\theta)}{c} = \delta t - \frac{v\delta tcos(\theta)}{c} = \delta t(1 - \frac{vcos(\theta)}{c}) \tag{7}$$

$$\delta t = \frac{\delta t'}{1 - \frac{vcos(\theta)}{c}} \tag{8}$$

Ahora reemplazamos en CB:

$$v\delta tsen(\phi) = vsen(\theta)\frac{\delta t'}{1 - \frac{vcos(\theta)}{c}} \tag{9}$$

Por último, nuestra velocidad aparente será la distancia aparente CB dividido el tiempo aparente $\delta t'$:

$$v' = \frac{CB}{\delta t'} = \frac{vsen(\theta)}{1 - \frac{vcos(\theta)}{c}} \tag{10}$$

b)

En el límite $v/c \to 1$ la función sería asi:

$$v'(\theta) = \frac{vsen(\theta)}{1 - cos(\theta)} \tag{11}$$

La gráfica de esta función asumiendo $v = 1$ es:

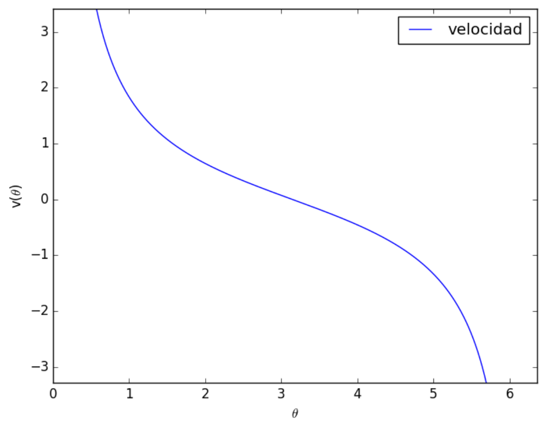

Figura 2: velocidad v' entre 0 y 2π

En el gráfico los valores de v' entre -1 y 1 corresponden a velocidades menores a la velocidad de la luz para nuestra función. Para simplificar, nos interesan los valores de θ entre 0 y π Asumiendo que la distribución es continua, calculamos la media y la varianza (usando Wolfram Alpha):

$$\mu = \int_0^{\pi} \theta \frac{sen(\theta)}{1 - cos(\theta)} d\theta = \pi ln(4) \approx 4{,}35 \tag{12}$$

$$\sigma^2 = \int_0^{\pi} (\theta - \mu)^2 \frac{sen(\theta)}{1 - cos(\theta)} d\theta \tag{13}$$

La integral de la varianza diverge, por lo que no podemos calcular la distribución de esta manera.

Ahora, si usamos un código que simule esta distribución, la PDF se verá de esta manera:

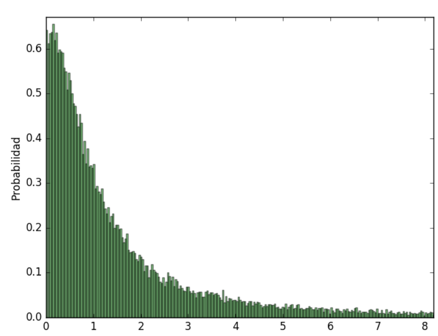

Figura 3: PDF de v'

Esta simulación la hize iterando valores de *theta* entre 0 y π unas 47,000 veces, número aproximado de quasares visibles. En el histograma podemos ver que a medida que sube la velocidad aparente, menor es la probabilidad de observar un quasar superlumínico, y que lo más probable es observar materia lanzada a 0,15c de velocidad.
Grafiquemos ahora la CDF:

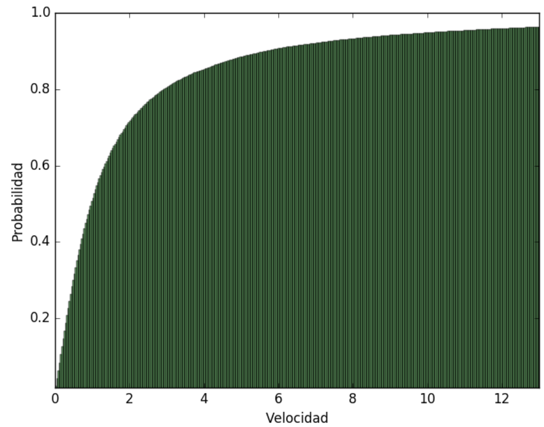

Figura 4: CDF de v'

Si estimamos cual es la probabilidad de no ver un quasar superlumínico, podemos encontrar la probabilidad de ver uno restándole la probabilidad anterior a 1. Veamos:

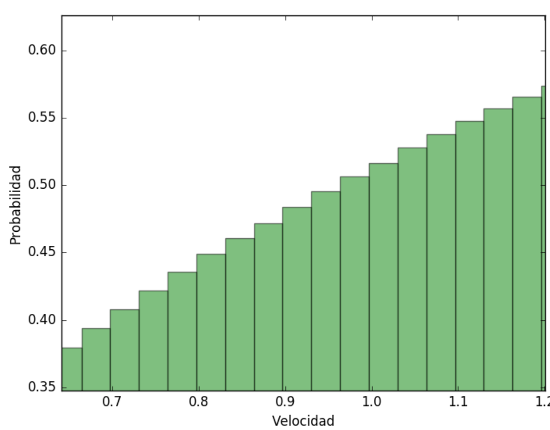

Figura 5: CDF de v'

En el histograma aproximadamente la probabilidad de no ver un quasar superlumínico es de 0,52, por lo que quedamos con que la probabilidad de sí ver uno es de $0{,}48 = 48\,\%$. Recordar que esto es válido para el caso $v/c \to 1$.

2.

2.1.

Dada una variable aleatoria X y su CDF F, se define la variable aleatoria Y como:

$$Y = F(X) = \int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

Derivamos:

$$\frac{d}{dx}F(X) = \frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}F(X) = f(x) \to a \leq x \leq b \tag{16}$$

donde $f(x)$ es la PDF de Y.

2.2.

$$\{X \leq x\} = \{F^{-1}(U) \leq x\} = \{F(F^{-1}(U)) \leq F(x)\} = \{U \leq F(x)\} \tag{17}$$

Usando probabilidades:

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x) \tag{18}$$

$$P(F^{-1}(U) \leq x)) = F(x) \tag{19}$$

$$P(X \leq x)) = F(x) \to X \sim F \tag{20}$$

Usando esto, podemos generar datos ,a partir de variables aleatorias distribuidas uniformemente, de una distribución F siempre y cuando podamos obtener una fórmula explícita para $F^{-1}(U)$ por el método de la transformación inversa. Para el caso de la distribución normal estándar, su inversa no puede ser calculada analíticamente, y para probar un algorítmo es necesario usar una función en python que la aproxima.

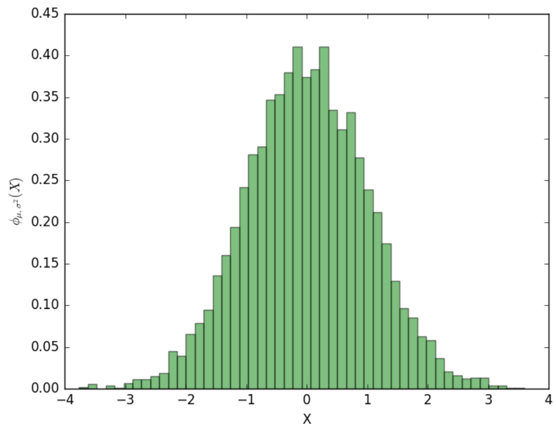

Figura 6: $N(0,1)$

2.3.

$$\vec{S} \sim N(\vec{0}, I) \tag{21}$$

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y $Z \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{22}$$

Multiplicamos por L ámbos lados:

$$LZ = L\frac{(X-\mu)}{\sigma} \tag{23}$$

Y $\sigma = L$

Tenemos que $\vec{S} \sim N(\vec{0}$ y si $\vec{S}$ es de $1x1$ entonces $\vec{S} \sim N(0,1)$. Entonces:

$$L\vec{S} = L\frac{(X-\mu)}{\sigma} = X - \mu \tag{24}$$

$$X = \mu + L\vec{S} \tag{25}$$

Donde teníamos que $X \sim N(\mu, \Sigma)$

2.4.

Usando una función de python, pude calcular la distribución normal multivariada.

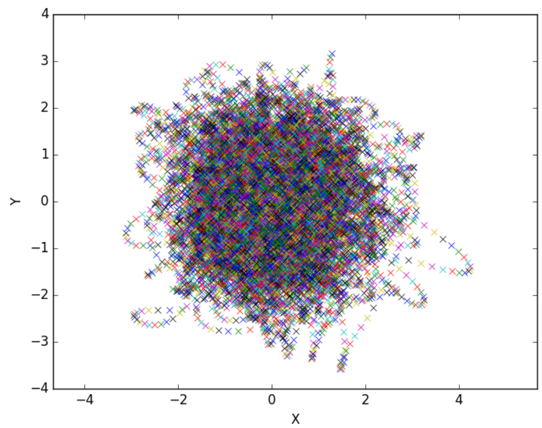

Figura 7: Distribución normal multivariada

3.

3.1. a)

$$f_v(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}} x^{v/2-1} \exp(-x/2) \tag{26}$$

Como $x > 0$:

$$E[e^{xt}] = \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}} \int_0^\infty x^{v/2-1} \exp(-x/2) \exp(xt) dx \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}} \int_0^\infty x^{v/2-1} \exp(-x/2 + xt) dx \tag{28}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}} \int_0^\infty x^{v/2-1} \exp(-\frac{x}{2}(1-2t)) dx \tag{29}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}} \frac{(1-2t)^{-v/2}}{(1-2t)^{-v/2}} \int_0^\infty x^{v/2-1} \exp(-\frac{x}{2}(1-2t)) dx \tag{30}$$

$$= (1-2t)^{-v/2}\int_0^\infty \frac{x^{v/2-1}}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}(1-2t)^{-v/2}}\exp(-\frac{x}{2}(1-2t))dx \tag{31}$$

Usando que $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)2^\alpha(1-2t)^{-\alpha}}\exp(-\frac{x}{2}(1-2t))dx = 1$ con $\alpha = v/2$:

$$E[e^{xt}] = (1-2t)^{-v/2} \tag{32}$$

3.2. b)

Tenemos $M_{Y_1} = E[e^{Y_1 t}]$ y $M_{Y_2} = E[e^{Y_2 t}]$

$$M_{Y_1+Y_2} = E[e^{(Y_1+Y_2)t}] = E[e^{Y_1 t}e^{Y_2 t}] \tag{33}$$

Como son i.i.d.:

$$E[e^{Y_1 t}e^{Y_2 t}] = E[e^{Y_1 t}]E[e^{Y_2 t}] \tag{34}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v_1}{2})2^{v_1/2}}\int_0^\infty Y_1^{v_1/2-1}\exp(-Y_1/2)\exp(Y_1 t)dY_1 \frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2})2^{v_2/2}}\int_0^\infty Y_2^{v_2/2-1}\exp(-Y_2/2)\exp(Y_2 t)dY_2 \tag{35}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v_1}{2})2^{v_1/2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2})2^{v_2/2}}\int_0^\infty Y_1^{v_1/2-1}\exp(-\frac{Y_1}{2}(1-2t))dY_1\int_0^\infty Y_2^{v_2/2-1}\exp(-\frac{Y_2}{2}(1-2t))dY_2 \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v_1}{2})2^{v_1/2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2})2^{v_2/2}}\frac{(1-2t)^{-v_1/2}}{(1-2t)^{-v_1/2}}\int_0^\infty Y_1^{v_1/2-1}\exp(-\frac{Y_1}{2}(1-2t))dY_1\int_0^\infty Y_2^{v_2/2-1}\exp(-\frac{Y_2}{2}(1-2t))dY_2 \tag{37}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2})2^{v_2/2}}(1-2t)^{-v_1/2}\int_0^\infty Y_2^{v_2/2-1}\exp(-\frac{Y_2}{2}(1-2t))dY_2 \tag{38}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{v_2}{2})2^{v_2/2}}(1-2t)^{-v_1/2}\frac{(1-2t)^{-v_2/2}}{(1-2t)^{-v_2/2}}\int_0^\infty Y_2^{v_2/2-1}\exp(-\frac{Y_2}{2}(1-2t))dY_2 \tag{39}$$

$$M_{Y_1+Y_2} = (1-2t)^{-v_1/2}(1-2t)^{-v_2/2} \tag{40}$$

$$M_{Y_1+Y_2} = (1-2t)^{-(v_1/2+v_2/2)} \tag{41}$$

Por lo tanto $Y_1 + Y_2 \sim$ chi cuadrado $(v_1 + v_2)$.

3.3. c)

$Z_i \sim N(0,1)$, $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$

$$E[e^{xt}] = E[e^{Z^2 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Z_i^2 t} f_{normal} dZ_i \tag{42}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{Z_i^2 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(\frac{-(Z_i-\mu)^2}{2\sigma^2}) dZ_i \tag{43}$$

Con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{Z_i^2 t - Z_i^2/2} dZ_i \tag{44}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-Z_i^2}{2}(1-2t)} dZ_i \tag{45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{-1}{2}[\frac{Z_i}{(1-2t)^{-1/2}}]^2) dZ_i \tag{46}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-2t)^{-1/2}}{(1-2t)^{-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{-1}{2}[\frac{Z_i}{(1-2t)^{-1/2}}]^2) dZ_i \tag{47}$$

$$= (1-2t)^{-1/2} \tag{48}$$

Nos da una función generadora de una chi cuadrado, por lo tanto Y distribuye como chi-cuadrado.

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-2t)^{-1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\frac{-1}{2}[\frac{Z_i}{(1-2t)^{-1/2}}]^2) dZ_i \tag{49}$$

Esto es una distribución normal con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = (1-2t)^{-1}$.