Modelos Determinísticos de Investigação Operacional

MIEI - UMinho **Trabalho 2 (data de entrega: 24 de novembro)**

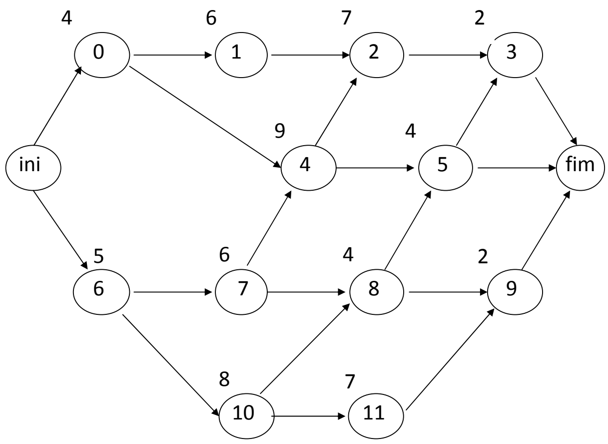
O método do caminho crítico, designado na literatura anglo–saxónica por *critical path method*, constitui uma ferramenta muito importante em gestão de projectos. O método do caminho crítico é aplicado a projectos que podem ser decompostos num conjunto de actividades, que se considera terem durações determinísticas, entre as quais existem relações de precedência.

Todas as actividades têm de ser realizadas. As restrições de precedência traduzem o facto de o instante em que se pode dar início a uma dada actividade ter de ser posterior aos instantes em que terminam as actividades que lhe são precedentes.

Considere um projecto com as actividades e as relações de precedência a seguir indicadas:

Actividade	Duração	Precedências
0	4	–
1	6	0
2	7	1,4
3	2	2,5
4	9	0,7
5	4	4,8
6	5	–
7	6	6
8	4	7,10
9	2	8,11
10	8	6
11	7	10

No método do caminho crítico, a rede que representa o projecto pode ser representada de duas formas alternativas: uma, em que as actividades do projecto são representadas por arcos do grafo, e a outra, em que são representadas por nós. Neste trabalho, vamos considerar a segunda representação. O grafo associado a este projecto é:



O caminho crítico corresponde ao caminho mais longo entre o vértice que define o início do projecto e o vértice que define o fim do projecto. Como as precedências têm de ser respeitadas, é o caminho mais longo que determina a duração mínima necessária para completar a execução de todo o projecto. No problema em análise, o caminho crítico corresponde às actividades 6, 7, 4, 2 e 3, com uma duração de 29 unidades de tempo.

As actividades pertencentes ao caminho mais longo (que pode não ser único) são críticas, porque qualquer atraso verificado numa delas dá origem inevitavelmente a um atraso no tempo de execução do projecto. Assim, estas actividades são as que devem ser seguidas e controladas mais de perto.

Neste trabalho, cada grupo deverá considerar um problema em que alguma actividades são eliminadas do projecto, da forma indicada no fim do texto do enunciado, na secção Determinação da lista de actividades, sendo portanto as redes diferentes consoante os grupos.

PARTE I

O problema de caminho mais longo entre um vértice s e um vértice t de um grafo acíclico (sem ciclos) pode ser formulado como um problema de programação linear utilizando variáveis de decisão x_{ij} associadas a cada arco do grafo. Estas variáveis tomam o valor 1, se o arco fizer parte do caminho mais longo, e o valor 0, caso contrário. O problema pode ser entendido como um modelo em que se injecta na rede, a partir do vértice s, uma unidade de fluxo que segue pelo caminho mais longo até atingir o vértice t.

1. Apresente a rede que representa o projecto, depois de eliminar as actividades indicadas na secção "Determinação da lista de actividades", no final do texto.

2. Os modelos de transporte em rede são identificados pelas restrições de conservação de fluxo e pelas restrições de capacidade. Formule o problema do caminho mais longo como um modelo de transporte em rede, indicando o significado das variáveis de decisão associadas aos arcos do modelo, e os respectivos custos e limites superiores, bem como as restrições de conservação de fluxo e as quantidades oferecidas e consumidas em cada nó da rede. Teça todos os comentários que considere adequados.

3. Apresente o ficheiro de input submetido ao package RELAX4.

4. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa.

5. Interprete o output fornecido pelo RELAX4. Apresente o caminho crítico.

PARTE II

Considere o modelo de programação linear usado no Trabalho 1, em que cada variável de decisão $t_i, \forall i$, representa o tempo de início da actividade i e em que o objectivo é minimizar o tempo de execução total do projecto obedecendo a todas as restrições de precedência. Neste modelo, todas as linhas têm apenas dois elementos diferentes de 0, e iguais a -1 e +1, respectivamente.

1. Apresente o modelo (o do Trabalho 1) com variáveis de decisão $t_i, \forall i$.

2. Construa e apresente o modelo dual desse modelo, e mostre que é um modelo do problema do caminho mais longo (caminho crítico), definido numa rede, em que cada coluna corresponde a um arco, sendo o elemento -1 a origem do arco e o elemento +1 o respectivo destino.

   Explique detalhadamente a forma como construiu o modelo dual.

PARTE III

A filosofia do *just-in-time* preconiza a redução das folgas existentes entre o fim de uma actividade e o início de uma actividade que lhe é subsequente, podendo, no limite, ser imposto que não exista folga entre essas duas actividades. Tal pode acontecer, por exemplo, quando a primeira operação é a fundição de uma liga metálica e a segunda operação o seu vazamento em moldes. A redução dos intervalos de tempos entre actividades sucessivas conduz a uma redução de inventários intermédios, o que normalmente se traduz numa vantagem.

No Exemplo em análise, considerando o grafo inicial (*i.e.*, o grafo antes de se retirarem os vértices que dependem do grupo), podemos querer impor que a actividade 2 comece imediatamente depois da actividade 1 ter terminado, ou seja, o instante de início da actividade 2 deve ser menor ou igual do que o instante de fim da actividade 1. Esta restrição conjugada com a restrição de precedência entre as actividades 1 e 2 implica que o instante de fim da actividade 1 vai ser igual ao instante de início da actividade 2 (porquê?).

As restrições de *just-in-time* podem ser generalizadas, para exprimir, por exemplo, que o instante de início da segunda operação deve acontecer num instante de tempo menor ou igual do que o instante do fim da primeira operação somado à duração de um (pequeno) intervalo. No entanto, neste trabalho, vamos considerar que o intervalo tem a duração de 0 unidades de tempo.

1. Claramente, para o exemplo acima referido (grafo inicial e restrição de *just-in-time* entre as actividades 1 e 2), a restrição de *just-in-time* vai ter consequências no instante de tempo em que a actividade **1** pode ser iniciada. Justifique, e indique qual o instante mais cedo em que a actividade **1** pode ter início.

2. Escolha um qualquer par de actividades do seu grafo (*i.e.*, o grafo depois de retirar os vértices que dependem do grupo). Diga qual a respectiva restrição de *just-in-time* no modelo com variáveis de decisão $t_i, \forall i$. Adicione essa restrição ao modelo, e resolva-o. Qual o instante mais cedo em que a **primeira** actividade pode ser iniciada? Houve alteração do instante mais cedo?

3. Mostre que essa restrição corresponde a um arco no modelo dual de caminho mais longo.

4. Adicione esse arco ao modelo do RELAX4, e apresente o ficheiro de input submetido ao package RELAX4 com o novo arco.

5. Apresente o output produzido pelo programa.

6. Verifique e mostre que a solução obedece às restrições impostas. Apresente o novo caminho crítico. Verifique se o caminho mais longo para a segunda actividade se alterou depois de ter adicionado o novo arco. Teça todos os comentários que considere adequados.

PARTE IV

Escolha agora um caminho, diferente do caminho crítico, que tenha uma duração total estritamente inferior à do caminho crítico, e considere todas as actividades que pertencem a esse caminho.

1. Se a duração total do caminho for inferior à duração do caminho crítico e se adicionarmos restrições de *just-in-time* para todos os pares de actividades ao longo desse caminho (incluindo as actividades fictícias "ini"e "fim") que forcem que o instante de início de cada actividade seja igual ao instante de fim da actividade que lhe é imediatamente precedente, será possível obter uma solução válida para a execução do projecto? Justifique.

2. Teste essa hipótese adicionando, ao seu modelo da Parte I, todos os arcos correspondentes às restrições de *just-in-time* para todos os pares de actividades ao longo do caminho que escolheu.

3. Apresente o ficheiro de input submetido ao package RELAX4 com o novo arco.

4. Apresente o output produzido pelo programa.

5. Justifique o resultado. Teça todos os comentários que considere adequados.

Determinação da lista de actividades

Seja $ABCDE$ o número de inscrição do aluno do grupo com maior número de inscrição. Remova da lista de actividades as actividades D e E, passando as precedências a ser estabelecidas da seguinte forma:

- os sucessores da actividade D passam a ter como novas precedências os antecessores da actividade D; e
- o mesmo para E.

A título ilustrativo, se a actividade 4 for removida, a actividade 2 passa a ter como precedências, como novas precedências, as actividades 0 e 7 (em vez da actividade 4), o mesmo acontecendo com a actividade 5.

VC