Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Информационных технологий и
программирования

Расчетно-графическая работа

«Дифференциальные уравнения»

Специальные разделы высшей математики

Выполнили:
Бобков Артем
Грибов Артем
Комашко Александр
Насонов Петр

Группа:
M3100

Преподаватель:
Далевская Ольга Петровна

2023/2024 г.

Содержание

Задание 1. Дифференциальные модели первого порядка

Условие.

В задачах проведите исследование:

1. Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, в задаче B сделайте чертеж, составьте дифференциальное уравнениеи запишите начальные условия.
2. Решите аналитически составленную задачу Коши.
3. Изобразите семейство интегральных кривых и решение задачи Коши.
4. Запишите ответ

A. В электрическую цепь с сопротивлением 3/2 Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найдите зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

B. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0,-2)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы

Решение.

A. Пусть $U(t) = \frac{120}{2\cdot 60}t = t$ - напряжение в цепи, $I(t)$ - сила тока в цепи, $R = \frac{3}{2}$ - сопротивление цепи.

Катушка с индуктивностью $L = I(t)$ в цепи будет создавать магнитный поток $\Phi = LI = I^2(t)$ и ЭДС самоиндукции $\varepsilon(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} = -I(t)\frac{dI(t)}{dt}$, направленный в противоположную сторону.

Воспользуемся законом Ома:

$$U(t) + \varepsilon(t) = I(t)R$$

$$t = I(t)\frac{3}{2} + I(t)\frac{dI(t)}{dt}$$

$$t - I(t)\frac{3}{2} = I(t)\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\frac{t - I(t)\frac{3}{2}}{I(t)} = \frac{dI(t)}{dt}$$

Воспользуемся заменой $y = \frac{I(t)}{t}, I'(t) = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d(yt)}{dt} = y't + y$:

$$\frac{2-3y}{2y} = y't + y$$

$$\frac{2-3y-2y^2}{2y} = y't$$

$$\frac{2ydy}{2-3y-2y^2} = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{2ydy}{(y+2)\,(2y-1)} = -\frac{dt}{t}$$

$$\frac{y}{(y+2)\,(2y-1)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{2y-1} = \frac{2Ay - A + By + 2B}{(y+2)(2y-1)} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$2\int \frac{ydy}{(y+2)(2y-1)} = \frac{4}{5}\int \frac{dy}{y+2} + \frac{1}{5}\int \frac{d2y}{2y-1} = -\ln|t| + C$$

$$\frac{4}{5}\ln|y+2| + \frac{1}{5}\ln|2y-1| = -\ln|t| + C$$

$$\left(\sqrt[5]{y+2}\right)^4 \sqrt[5]{2y-1} = \frac{C}{t}$$

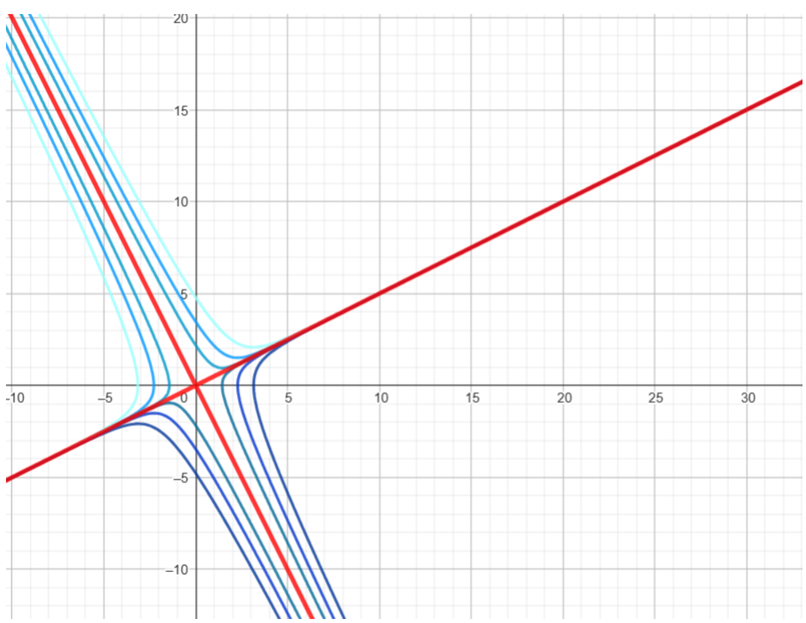
$$(y+2)^4(2y-1) = \frac{C}{t^5}$$

$$\left(\frac{I(t)}{t} + 2\right)^4 \left(2\frac{I(t)}{t} - 1\right) = \frac{C}{t^5}$$

$$(I(t) + 2t)^4(2I(t) - t) = C$$

Так как в начале опыта напряжения в токе не было, при $t_0 = 0$ сила тока $I(t_0) = 0$, поэтому $C = 0$, получаем решение $(I(t) + 2t)^4(2I(t) - t) = 0$

График семейства интегральных кривых (отмеченных синим) и решения задачи Коши (отмеченного красным):



B. Зная, что угловой коэффициент касательной равняется утроенной ординате, можем сказать, что:

$$y' = 3y$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y$$

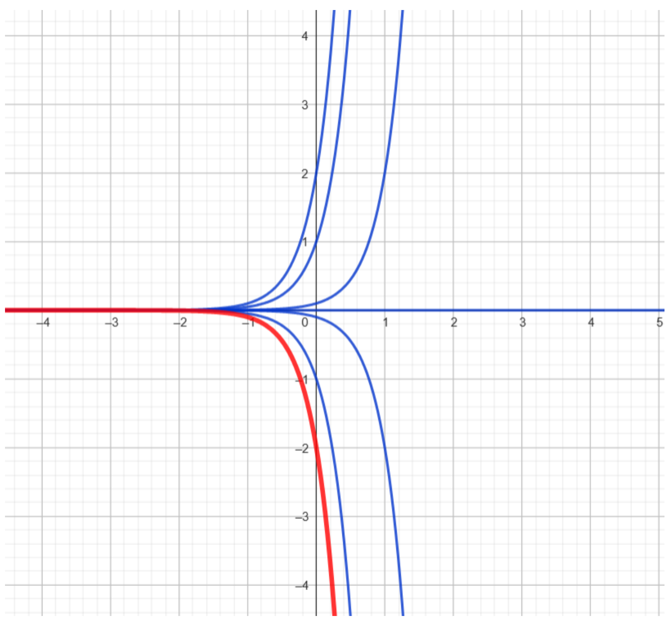
$$\frac{dy}{y} = 3dx$$

$$\ln|y| = 3x + C$$

$$y = Ce^{3x}$$

Начальным условием является $y(0) = -2$, поэтому $C = \frac{y}{e^{3x}} = \frac{-2}{1} = -2$, решением задачи Коши является $y = -2e^{3x}$

График семейства интегральных кривых (отмеченных синим) и решения задачи Коши (отмеченного красным):



Задание 2. Графическое решение ДУ первого порядка

Условие.

В задачах проведите исследование:

1. Изучите по источникам метод изоклин (например, здесь: Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления — URL:https://e.lanbook.com/book/152035).
2. Постройте приближенно семейство интегральных кривых данного ДУ методом изоклин.
3. Решите задачу аналитически. Изобразите точное решение.
4. Сравните точное и приближенное решение.

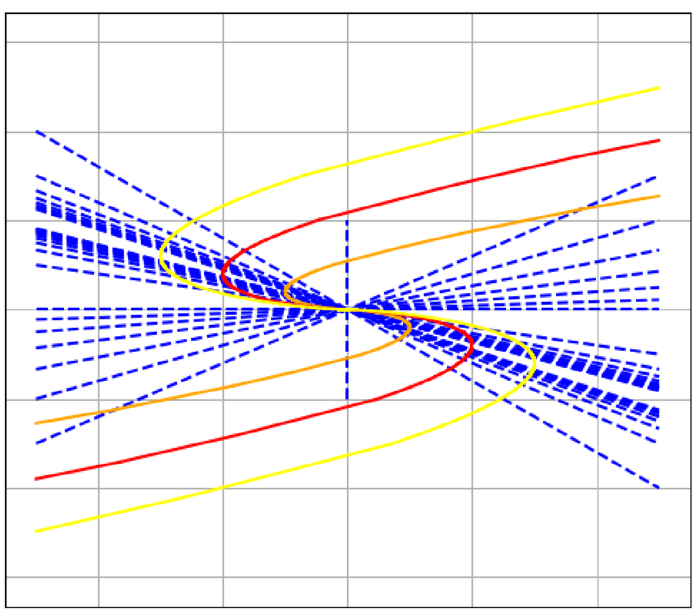
$$y' = \frac{y}{x+y}$$

Решение.

1. Метод изоклин состоит в следующем:
   - Строится достаточно густая сетка изоклин для различных значений k и на каждой изоклине изображаются небольшие отрезки с наклоном k.
   - Начиная из точки (x_0, y_0), поводится линия, которая, будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений. Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0).
2. Изоклины, которые задает это уравнение, описываются уравнением $\frac{y}{y+x} = k \Longleftrightarrow y = \frac{kx}{k-1}$ - множество прямых, пересекающихся в начале координат

   Прямые в 1 и 3 четвертях задают наклон кривой $k \in (0;1)$, во 2 и 4 четвертях - наклон $k \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$.

   Используя компьютерные технологии (язык программирования Python и библиотека для изображения графиков matplotlib), построим несколько изоклин и 3 интегральные кривые, которые они задают:



3. Решим дифференциальное уравнение:

$y' = \frac{y}{x+y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$

$\frac{dy}{dx} = t \cdot \frac{1}{1+t}$

$t'x + t = t \cdot \frac{1}{1+t}$

$t'x = \frac{-t^2}{1+t}$

$\frac{(1+t)dt}{-t^2} = \frac{dx}{x}$

$\frac{dt}{-t^2} + \frac{tdt}{-t^2} = \frac{dx}{x}$

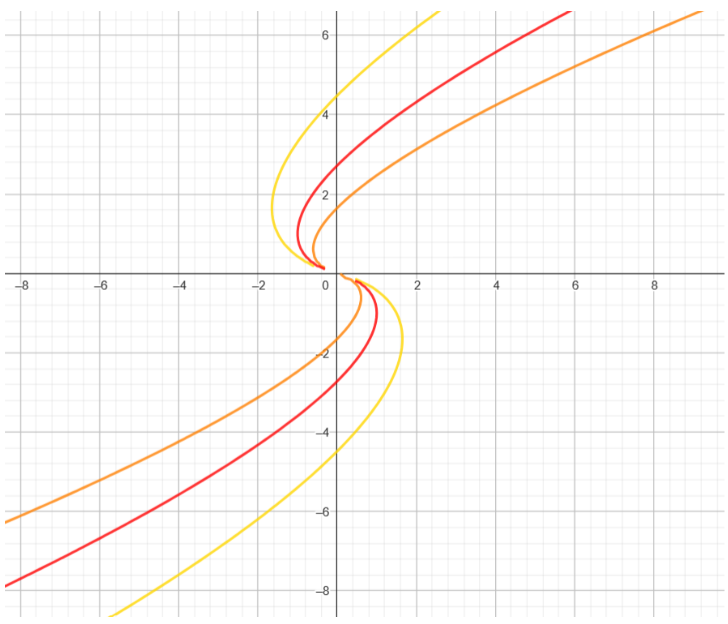
$d\frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{2} d \ln |t^2|\right) = d \ln |x|$

$\frac{1}{t} + (-\ln |t|) = \ln |x| + C$

$\frac{x}{y} - \ln |\frac{y}{x}| = \ln |x| + C$

$\frac{x}{y} - \ln |y| = C$

4. Построим в Geogebra уравнение выше с 3 разными константами:



Как можем заметить, метод изоклин дает довольно точное изображение того, как ведет себя семейство интегральных кривых

Задание 3. ДУ второго порядка

Условие.

Пружинный маятник движется по закону:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

1. Запишите однородное уравнение движения маятника. Выясните, почему движение описывается уравнением такого вида (каков физический смысл коэффициентовлевой части уравнения).
2. Установите характер движения (периодический, апериодический) при данных $p(t)$ и $q(t)$.
3. Найдите ФСР ЛОДУ и убедитесь в ее линейной независимости с помощью вронскиана.
4. Найдите общее решение ЛОДУ.
5. Задайте начальные условия в момент $t_0 = 0$ и найдите удовлетворяющее им частное решение ЛОДУ. Изобразите закон движения в системе координат.
6. Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t)$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.
7. Найдите решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям. Изобразите закон движения в системе координат.
8. Сделайте вывод о влиянии на движение функции $f(t)$.

$$p(t) = 4, q(t) = 5, f(t) = t^2 e^{2t}$$

Решение.

It is empty but you can fill it!

Ответ: It is empty but you can fill it!

Задание 4. Системы ДУ. Устойчивость.

Условие.

Дана система ДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

1. Найдите общее решение системы.
2. Изобразите на фазовой плоскости семейство интегральных кривых $y = y(x)$.
3. Исследуйте решение системы на устойчивость при $t \to +\infty$.
4. Определите характер особой точки.

Решение.

1. Решение ДУ

   Решим через метод Эйлера (через характеристическое уравнение).

   В общем наше решение будет выглядеть как система функций вида:

   $$\begin{cases} x(t) = \omega_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_2 C_2 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = \mu_1 C_1 e^{\lambda_2 t} + \mu_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

   $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $(-2-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, 3$

   (a) $\lambda_1 = -4$ $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_1 = -\dfrac{5}{2}\mu_1$

   (возьмем $\mu_2 = 1$, тогда $\omega_1 = -\frac{5}{2}$).

   (b) $\lambda_2 = 3$ $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_2 = \mu_2$

   (возьмем любое число, к примеру: 1).

   Тогда наша система выглядит так:

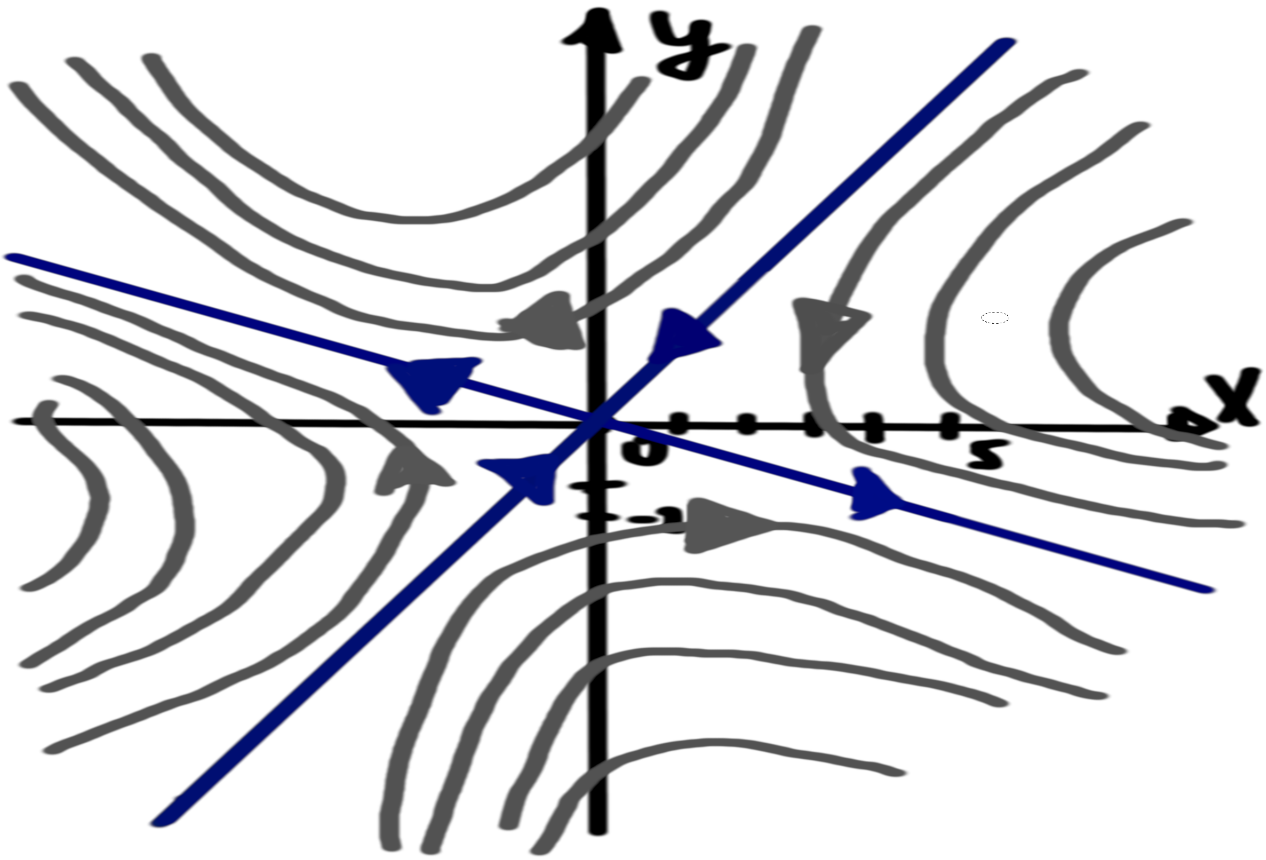
   $$\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{2} C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t} \end{cases}$$

2. Фазовая плоскость

   Т.к. собственные числа характеристического уравнения действительные и разных знаков то фазовая плоскость будет состоять как бы из гипербол. Поэтому нам нужно найти векторы асимптот. Каждый такой вектор x_i можно найти через уравнение

   $\begin{vmatrix} -2-\lambda_i & 5 \\ 2 & 1-\lambda_i \end{vmatrix} \cdot x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Таким образом: $x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



3. Устойчивость: Т.к. корни характеристического уравнения действительные числа одного знака, то положение равновесия которое у нас получится - седло.
4. Тип особой точки: (0, 0) - седло