Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Информационных технологий и
программирования

Расчетно-графическая работа

«Дифференциальные уравнения»

Специальные разделы высшей математики

Выполнили:
Бобков Артем
Грибов Артем
Комашко Александр
Насонов Петр
Орлов Максим

Группа:
M3100

Преподаватель:
Далевская Ольга Петровна

2023/2024 г.

Содержание

Задание 1. Дифференциальные модели первого порядка

Условие.

В задачах проведите исследование:

1. Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, в задаче B сделайте чертеж, составьте дифференциальное уравнениеи запишите начальные условия.
2. Решите аналитически составленную задачу Коши.
3. Изобразите семейство интегральных кривых и решение задачи Коши.
4. Запишите ответ

A. В электрическую цепь с сопротивлением 3/2 Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найдите зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.

B. Найти такую кривую, проходящую через точку $(0, -2)$, чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы

Решение.

A. It is empty but you can fill it!
Ответ: It is empty but you can fill it!

B. It is empty but you can fill it!
Ответ: It is empty but you can fill it!

Задание 2. Графическое решение ДУ первого порядка

Условие.

В задачах проведите исследование:

1. Изучите по источникам метод изоклин (например, здесь: Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления — URL:https://e.lanbook.com/book/152035).
2. Постройте приближенно семейство интегральных кривых данного ДУ методом изоклин.
3. Решите задачу аналитически. Изобразите точное решение.
4. Сравните точное и приближенное решение.

$$y' = \frac{y}{x+y}$$

Решение.

It is empty but you can fill it!

Ответ: It is empty but you can fill it!

Задание 3. ДУ второго порядка

Условие.

Пружинный маятник движется по закону:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$$

1. Запишите однородное уравнение движения маятника. Выясните, почему движение описывается уравнением такого вида (каков физический смысл коэффициентовлевой части уравнения).
2. Установите характер движения (периодический, апериодический) при данных $p(t)$ и $q(t)$.
3. Найдите ФСР ЛОДУ и убедитесь в ее линейной независимости с помощью вронскиана.
4. Найдите общее решение ЛОДУ.
5. Задайте начальные условия в момент $t_0 = 0$ и найдите удовлетворяющее им частное решение ЛОДУ. Изобразите закон движения в системе координат.
6. Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t)$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.
7. Найдите решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям. Изобразите закон движения в системе координат.
8. Сделайте вывод о влиянии на движение функции $f(t)$.

$$p(t) = 4, q(t) = 5, f(t) = t^2 e^{2t}$$

Решение.

It is empty but you can fill it!

Ответ: It is empty but you can fill it!

Задание 4. Системы ДУ. Устойчивость.

Условие.

Дана система ДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 5y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

1. Найдите общее решение системы.
2. Изобразите на фазовой плоскости семейство интегральных кривых $y = y(x)$.
3. Исследуйте решение системы на устойчивость при $t \to +\infty$.
4. Определите характер особой точки.

Решение.

1. Решение ДУ

   Решим через метод Эйлера (через характеристическое уравнение).

   В общем наше решение будет выглядеть как система функций вида:

$$\begin{cases} x(t) = \omega_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \omega_2 C_2 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = \mu_1 C_1 e^{\lambda_2 t} + \mu_2 C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

   $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

   $(-2-\lambda)(1-\lambda) - 2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4, 3$

   (a) $\lambda_1 = -4$ $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_1 = -\dfrac{5}{2}\mu_1$

   (возьмем $\mu_2 = 1$, тогда $\omega_1 = -\frac{5}{2}$).

   (b) $\lambda_2 = 3$ $\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \omega_2 = \mu_2$

   (возьмем любое число, к примеру: 1).

   Тогда наша система выглядит так:

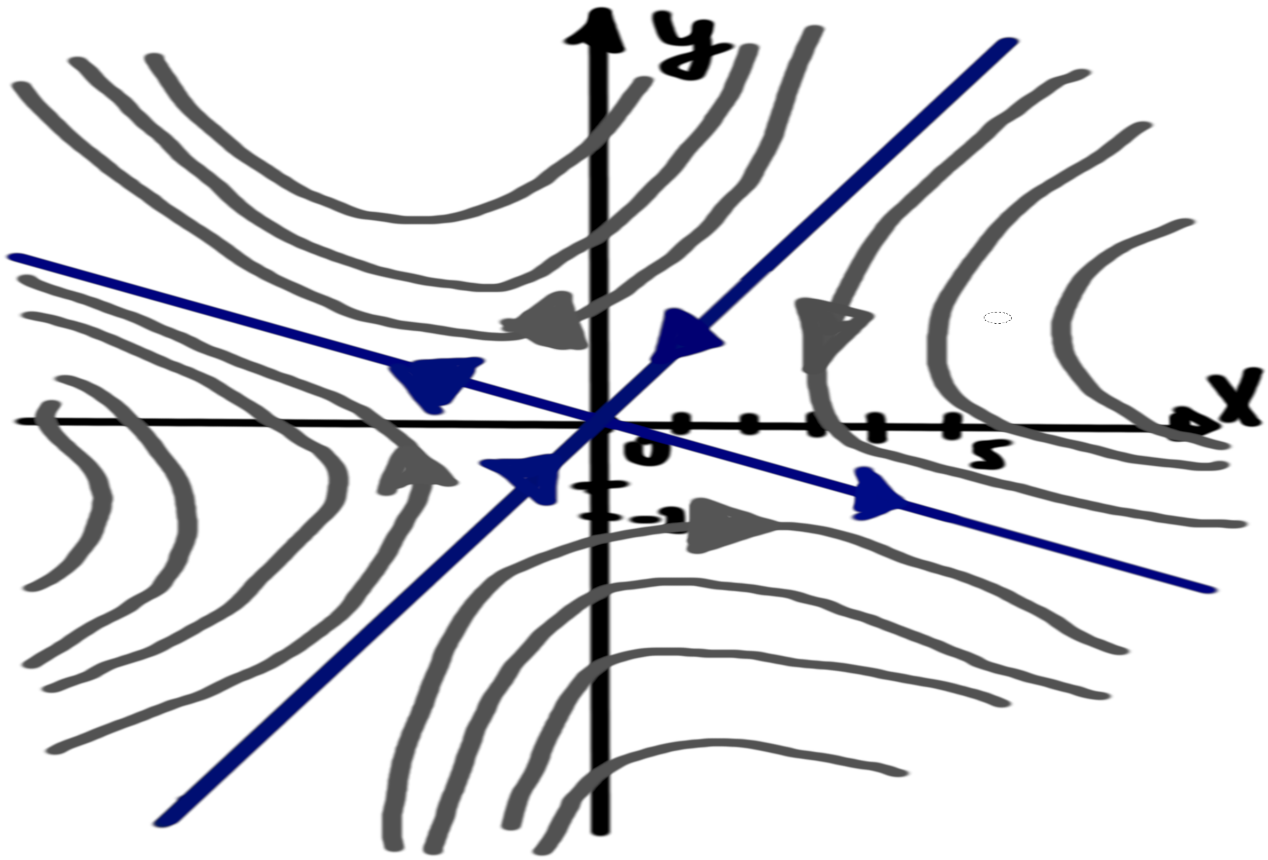
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{2} C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t} \\ y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t} \end{cases}$$

2. Фазовая плоскость

   Т.к. собственные числа характеристического уравнения действительные и разных знаков то фазовая плоскость будет состоять как бы из гипербол. Поэтому нам нужно найти векторы асимптот. Каждый такой вектор x_i можно найти через уравнение

   $\begin{vmatrix} -2-\lambda_i & 5 \\ 2 & 1-\lambda_i \end{vmatrix} \cdot x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Таким образом: $x_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



3. Устойчивость: Т.к. корни характеристического уравнения действительные числа одного знака, то положение равновесия которое у нас получится - седло.
4. Тип особой точки: (0, 0) - седло