[关闭]
@frank-shaw 2015-07-31 20:52 字数 2457 阅读 15444

Logistic Loss函数、Logistics回归与极大似然估计

机器学习理论

一直对Loss函数的类型的具体由来是怎样的弄不清楚。现在学到了经验风险最小化方面的知识，感觉可以尝试去探索一番。

Logistic函数与Logistic回归

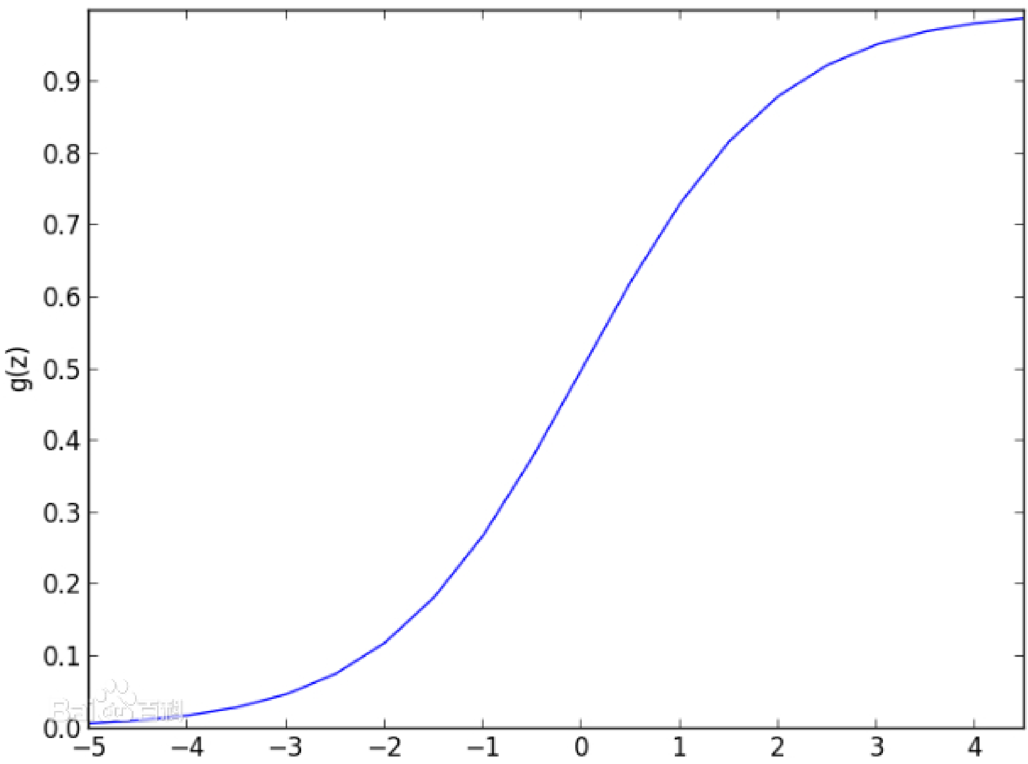
通常，Logistic函数的定义如下：

$$P(x)=\frac{1}{1+exp(-x)} \tag{1}$$

其中$x\in\mathbb{R}$，$P(x)\in[0,1]$。其中一个重要性质为：

$$P(-x)=\frac{1}{1+exp(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{exp(-x)}}$$
$$=\frac{exp(-x)}{1+exp(-x)}=1-\frac{1}{1+exp(-x)}=1-P(x)$$

logistic函数图像：



公式（1）则是被应用到了Logistic回归中,常见形式如下：

$$P(y=1|\beta,x)=\frac{1}{1+exp(-\beta^T x)}=\frac{exp(\beta^T x)}{1+exp(\beta^T x)} \tag{2}$$
$$P(y=0|\beta,x)=1-\frac{1}{1+exp(-\beta^T x)}=\frac{1}{1+exp(\beta^T x)}$$

其中β为相应参数，x表示特征向量，此时$y\in\{0,1\}$表示的是样本标签。

另一种表示形式将标签与预测函数放在了一起：

$$P(g=\pm1|\beta,x)=\frac{1}{1+exp(-g\beta^T x)} \tag{3}$$

此时的样本标签$g\in\{\pm1\}$。很容易证明$P(g=1|\beta,x)=1-P(g=-1|\beta,x)$。显然，这种形式和第一种logistic回归形式本质上并没有区别。

第一种形式的分类法则：
logistics回归1
相似的，第二中形式的分类法则：
logistics回归2

Logistic Loss

既然两种形式是等价的，为了适应更加广泛的分类Loss最小化框架，我们使用第二种形式来表示Logistic回归。

首先定义y为样本标签，x为特征向量。该分类Loss最小化框架可以表示为：

$$\underset{\beta}{\operatorname{argmin}}\sum_i L(y_i,f(x_i))$$

其中f为假设函数，L表示的是loss函数。

对于logistic回归，对应于该分类框架，我们有：

$$f(x)=\beta^T x$$
$$L(y,f(x))=log(1+exp(-yf(x)))$$

这里使用的Loss函数即为Logistic Loss函数。实际上，我们可以通过该Loss最小化框架得到极大似然法则。如果将Logistic回归**第二种表示形式**代入到此时的$L(y,f(x))$，可得：

$$L(y,f(x))=log(1+exp(-yf(x)))=log(\frac{1}{P(y|\beta,x)})$$

由此，Loss最小化可以表示为：

$$\underset{\beta}{\operatorname{argmin}}\sum_i L(y_i,f(x_i))=\underset{\beta}{\operatorname{argmin}}\sum_i log(\frac{1}{P(y_i|\beta,x_i)})$$
$$=\underset{\beta}{\operatorname{argmax}}\sum_i log(P(y_i|\beta,x_i))=\underset{\beta}{\operatorname{argmax}}\prod_i P(y_i|\beta,x_i)$$

上式等式最后即为极大似然估计的表示形式。也就是说，Logistic回归模型使用的Loss函数为Logistic Loss函数，使用极大似然估计法的目的是为了使得该Loss函数最小。

感想

这个时候，我似乎想明白了很多事情。将之前零散的知识点串联起来了。网易《机器学习》第二课中讲到线性回归的时候，将$\frac{1}{2}\sum_i(f(x_i)-y_i)^2$作为Loss函数，最终通过极大似然估计解释了使用这个Loss函数的原因。接着就直接使用极大似然估计来求解Logistic回归问题，至于为什么以及最小化的是哪一个Loss函数，并没有提及。直到现在才弄懂。

当然，如果在Loss函数后面加上一个关于变量的L2范数，这个时候可以推导出贝叶斯学派的极大后验概率估计法则（MAP），在此不展开。似乎，很多算法之间的差异性都可以用Loss函数来解释。

参考文献：

《Regularized Regression under Quadratic Loss, Logistic Loss, Sigmoidal Loss, and Hinge Loss》
《Notes on Logistic Loss Function》

- **内容目录**

-