# 温州大学《机器学习》课程课件（三）逻辑回归

黄海广 机器学习初学者 今天

这学期我给研一同学上机器学习课，接下来，我会陆续分享下我上课用的的课件。
下载地址：
https://github.com/fengdu78/WZU-machine-learning-course
后续持续更新。

**已经发布：**

第一部分课件，第一部分视频讲解
第二部分课件，第二部分视频讲解
接下来我还会录一下课程，分享到大学的某个平台。

## 本章目录

2



## 1.分类问题

3

# 分类问题

4

**监督学习的最主要类型**

标签离散

- ✓分类（Classification）
  - ✓身高1.85m，体重100kg的男人穿什么尺码的T恤？
  - ✓根据肿瘤的体积、患者的年龄来判断良性或恶性？
  - ✓根据用户的年龄、职业、存款数量来判断信用卡是否会违约？

输入变量可以是离散的，也可以是连续的。

# 分类问题

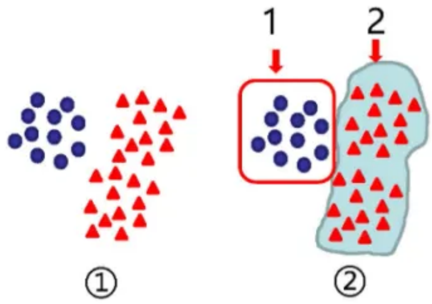
5

## 二分类

我们先从用蓝色圆形数据定义为类型1，其余数据为类型2；

只需要分类1次

步骤：①->②




二分类

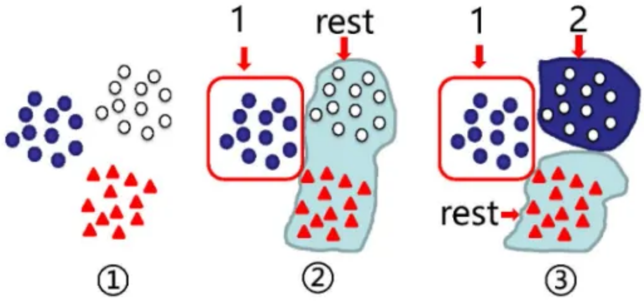
# 分类问题

6

## 多分类

我们先定义其中一类为类型1（正类），其余数据为负类（rest）；接下来去掉类型1数据，剩余部分再次进行二分类，分成类型2和负类；如果有$n$类，那就需要分类$n$-1次

步骤：①->②->③->......




One-vs-All (One-vs-Rest)
一对多 (一对余)

# 2.Sigmoid函数

7

# 2.Sigmoid函数

8

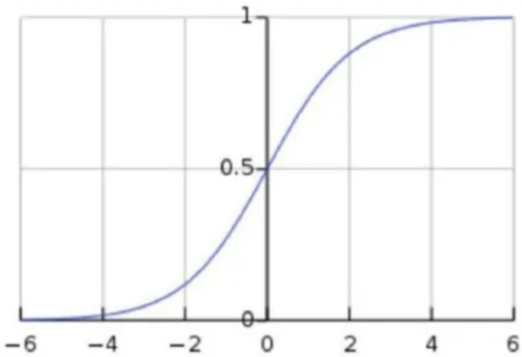
**Sigmoid 函数**

$\sigma(z)$代表一个常用的逻辑函数（logistic function）为$S$形函数（Sigmoid function）

则：$\sigma(z) = g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ $z=w^Tx + b$

合起来，我们得到逻辑回归模型的假设函数：

$$L(\hat{y}, y) = -y\log(\hat{y}) - (1-y)\log(1-\hat{y})$$




当$\sigma(z)$大于等于0.5时，预测 y=1

当$\sigma(z)$小于0.5时，预测 y=0

注意：若表达式 $h(x) = z = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n + b = w^Tx + b$，则$b$可以融入到$w_0$，即：$z=w^Tx$

# 2.Sigmoid函数

9

线性回归的函数 $h(x) = z = w^Tx$，范围是$(-\infty, +\infty)$。

而分类预测结果需要得到[0,1]的概率值。

在二分类模型中，事件的几率odds：事件发生与事件不发生的概率之比为$\frac{p}{1-p}$，

称为事件的发生比（the odds of experiencing an event）

其中$p$为随机事件发生的概率，$p$的范围为[0,1]。

取对数得到：$\log\frac{p}{1-p}$，而$\log\frac{p}{1-p} = w^Tx = z$

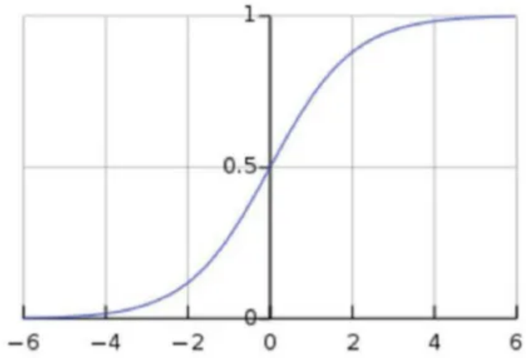
求解得到：$p = \frac{1}{1+e^{-w^Tx}} = \frac{1}{1+e^{-z}}$

## 2.Sigmoid函数

10

将$z$进行逻辑变换：$g(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$

$$
\begin{aligned}
g'(z) &= \left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)' \\
&= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} \\
&= \frac{1+e^{-z}-1}{(1+e^{-z})^2} \\
&= \frac{1}{(1+e^{-z})}\left(1-\frac{1}{(1+e^{-z})}\right) \\
&= g(z)(1-g(z))
\end{aligned}
$$




$g(z)$

## 3.逻辑回归求解

11

01 分类问题

02 Sigmoid函数

03 逻辑回归求解

04 逻辑回归代码实现

# 3.逻辑回归求解

12

假设一个二分类模型:

$$p(y=1|x;w)=h(x)$$
$$p(y=0|x;w)=1-h(x)$$

则:

$$p(y|x;w)=(h(x))^{y}(1-h(x))^{1-y}$$

逻辑回归模型的假设是: $h(x)=g(w^{T}x)=g(z)$

其中$z=w^{T}x$，逻辑函数（**logistic function**)公式为:

$$g(z)=\frac{1}{1+e^{-z}},\quad g'(z)=g(z)(1-g(z))$$

# 3.逻辑回归求解

13

**损失函数**

$$L(\hat{y},y)=-y\log(\hat{y})-(1-y)\log(1-\hat{y})$$

$\hat{y}$ 表示预测值$h(x)$

$y$ 表示真实值

为了衡量算法在全部训练样本上的表现如何，我们需要定义一个算法的代价函数，算法的代价函数是对$m$个样本的损失函数求和然后除以$m$:

**代价函数**

$$J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}L\left(\hat{y}^{(i)},y^{(i)}\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(-y^{(i)}\log\hat{y}^{(i)}-(1-y^{(i)})\log(1-\hat{y}^{(i)})\right)$$

# 3.逻辑回归求解

14

**求解过程：**

似然函数为： $L(w)=\prod_{i=1}^{m}P\left(y^{(i)}|x^{(i)};w\right)=\prod_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)})\right)^{y^{(i)}}(1-h(x^{(i)}))^{1-y^{(i)}}$

似然函数两边取对数，则连乘号变成了连加号：

$$l(w)=\log L(w)=\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\right)$$

代价函数为：

$$J(w)=-\frac{1}{m}l(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\right)$$

# 3.逻辑回归求解

15

**梯度下降求解过程：**

$$w_j:=w_j-\alpha\frac{\partial J(w)}{\partial w}$$

$$J(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)})-y^{(i)}\right)x_j^{(i)}$$

则： $w_j:=w_j-\alpha\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(h(x^{(i)})-y^{(i)}\right)x_j^{(i)}$

# 3.逻辑回归求解

16

**求解过程：** $\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}$的推导过程：

$$J(w)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\underline{y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))})$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}&y^{(i)}\log(h(x^{(i)}))+(1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)}))\\&=y^{(i)}\log(\frac{1}{1+e^{-w^Tx^{(i)}}})+(1-y^{(i)})\log(1-\frac{1}{1+e^{-w^Tx^{(i)}}})\\&=-y^{(i)}\log(1+e^{-w^Tx^{(i)}})-(1-y^{(i)})\log(1+e^{w^Tx^{(i)}})\end{aligned}$$

# 3.逻辑回归求解

17

**求解过程：** $\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}$的推导过程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w_j}J(w)&=\frac{\partial}{\partial w_j}(-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(-y^{(i)}\log\left(1+e^{-w^Tx^{(i)}}\right)-\left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1+e^{w^Tx^{(i)}}\right)))\\&=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(-y^{(i)}\frac{-x_j^{(i)}e^{-w^Tx^{(i)}}}{1+e^{-w^Tx^{(i)}}}-(1-y^{(i)})\frac{x_j^{(i)}e^{w^Tx^{(i)}}}{1+e^{w^Tx^{(i)}}})\\&=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)}-h(x^{(i)}))x_j^{(i)}\\&=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h(x^{(i)})-y^{(i)})x_j^{(i)}\end{aligned}$$

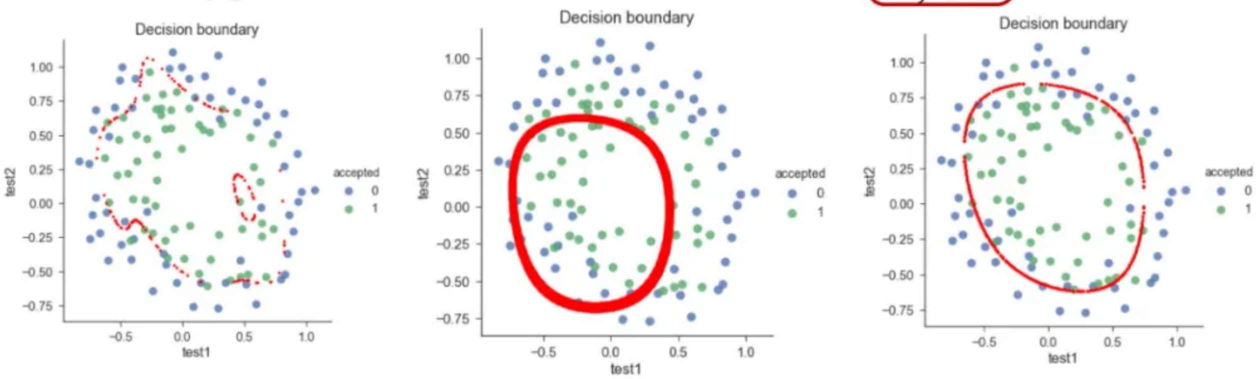
# 3.逻辑回归求解

18

**正则化**：目的是**为了防止过拟合**

$$J(w)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[-y^{(i)}\log\left(h\left(x^{(i)}\right)\right)-\left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1-h\left(x^{(i)}\right)\right)\right]+\overset{\text{正则化项}}{\boxed{\frac{\lambda}{2m}\sum_{j=1}^{n}w_j^2}}$$

当 λ 的值开始上升时，降低了方差。




没有正则化，过拟合　　正则化过度，欠拟合　　适当的正则化

# 4.逻辑回归代码实现

19

- **01** 分类问题
- **02** **Sigmoid**函数
- **03** 逻辑回归求解
- **04** 逻辑回归代码实现

# 4.逻辑回归代码实现

20

## Sigmoid 函数

$$\sigma(z) = g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

```python
def sigmoid(z):
    return 1 / (1 + np.exp(-z))
```

## 代价函数

$$J(w) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)}\log(h(x^{(i)})) + (1-y^{(i)})\log(1-h(x^{(i)})))$$

```python
def cost(w, X, y):
    w = np.matrix(w)
    X = np.matrix(X)
    y = np.matrix(y)
    first = np.multiply(-y, np.log(sigmoid(X * w.T)))
    second = np.multiply((1 - y), np.log(1 - sigmoid(X * w.T)))
    return np.sum(first - second) / (len(X))
```

# 4.逻辑回归代码实现

21

## 正则化

$$J(w) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[-y^{(i)}\log\left(h\left(x^{(i)}\right)\right) - \left(1-y^{(i)}\right)\log\left(1-h\left(x^{(i)}\right)\right)\right] + \frac{\lambda}{2m}\sum_{j=1}^{n} w_j^2$$

```python
def costReg(w, X, y, learningRate):
    w = np.matrix(w)
    X = np.matrix(X)
    y = np.matrix(y)
    first = np.multiply(-y, np.log(sigmoid(X * w.T)))
    second = np.multiply((1 - y), np.log(1 - sigmoid(X * w.T)))
    reg = (learningRate /
           (2 * len(X))) * np.sum(np.power(w[:, 1:w.shape[1]], 2))
    return np.sum(first - second) / len(X) + reg
```