

# 1 Metoda "Delayed Column Generation"

## 1.1 Algorytm

$$L \geq l_1 a_1 + \dots + l_m a_m \quad (1)$$

$$b_1 a_1 + \dots + b_m a_m > c \quad (2)$$

1. Określenie  $m$  początkowych rozkrojów i ich kosztu w następujący sposób: dla każdego  $i$  wybranie długości bazowej  $L_j$  dla której  $L_j > l_i$  i określenie  $i$ -tego rozkroju jako wycięcie  $a_{ii} = \lfloor L_j / l_i \rfloor$  elementów o długości  $l_i$  z długości  $L_j$ . Koszt  $i$ -tego rozkroju będzie równy kosztowi  $c_j$  długości  $L_j$  z której  $i$ -ta operacja wycina odcinki o długości  $l_i$ .

2. Uformowanie macierzy  $B$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_m \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{array}$$

gdzie  $a_{ii}$  jest ilością odcinków o długości  $l_i$  wyciętych w  $i$ -tym rozkroju z długości bazowej o koszcie  $c_j$ . Ostatnie  $m$  kolumn jest powiązane z rozkrojami. Dane te będą aktualizowane gdy zostanie znaleziony wynik który poprawi rozwiązanie.

Utworzenie  $m + 1$  wymiarowych wektorów kolumnowych  $S_1, \dots, S_m$  odnoszących się do zmiennych dodatkowych, gdzie  $S_i$  posiada same zera z wyjątkiem wiersza  $(i+1)$  w którym jest  $-1$ . Dodatkowo utworzenie  $m + 1$  wymiarowego wektora kolumnowego  $N'$  który jako pierwszy element przyjmuje 0, a w następnych  $i$ -tych wierszach posiada wartość  $N_i$ .

Obliczenie  $B^{-1}$  która wynosi:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & c_1/a_{11} & c_2/a_{22} & \dots & c_m/a_{mm} \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{mm} \end{array}$$

Niech  $N = B^{-1} \cdot N'$ . Sprawdzając czy pierwszy element z  $B^{-1} \cdot P$  jest dodatni można określić czy istnieje możliwość polepszenia rozwiązania. Wektor kolumnowy  $P$  jest wektorem złożonym ze zmiennych nieużytych w bieżącym rozwiązaniu, np. pierwszy element to negatywny koszt, a pozostałe  $m$  wierszy jest równe zmiennym  $a_{ij}$ .

3. Z powyższego punktu wynika że jeśli  $i$ -ta zmienna dodatkowa która nie wchodzi w skład rozwiązania może ulepszyć rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy  $(i + 1)$  element pierwszego wiersza  $\mathbf{B}^{-1}$  jest ujemny.
4. Jeśli nie jest możliwe polepszenie rozwiązania należy określić czy wprowadzenie nowego rozkroju ulepszy bieżące rozwiązanie. Jest to możliwe poprzez sprawdzenie czy dla  $L$  z kosztem  $c$  istnieje rozwiązanie nierówności 5.1 Algorytm equation.5.1 oraz 5.2 Algorytm equation.5.2, gdzie  $b_1, \dots, b_m$  to ostatnie  $m$  elementów w pierwszym wierszu  $\mathbf{B}^{-1}$ . Jeśli te nierówności nie posiadają rozwiązania dla dowolnej długości  $L_1, \dots, L_k$  z kosztem odpowiednio  $c_1, \dots, c_m$  wtedy bieżące rozwiązanie jest minimum. Rozwiązanie i jego koszt jest określone poprzez  $\mathbf{N}$ , gdzie pierwszy wiersz to koszt, a pozostałe  $m$  wierszy jest, w kolejności, odpowiednimi wartościami  $m$ -tej kolumny z  $\mathbf{B}^{-1}$ .

Jeśli nowy rozkrój poprawi rozwiązanie wtedy formowany jest nowy wektor  $\mathbf{P}$  ze współczynnikami, w kolejności  $-c, a_1, a_2, \dots, a_m$ .

5. Wprowadzenie zarówno dodatkowej zmiennej jak i nowego rozkroju może poprawić rozwiązanie. W obu przypadkach  $\mathbf{P}$  będzie kolumnowym wektorem ze zmiennymi. Dla określenia nowych  $\mathbf{B}^{-1}$  oraz  $\mathbf{N}$  które opisują ulepszone rozwiązanie i jego koszt, co pozawala na przejście przez kroki 3, 4 oraz kontynuację kroku 5 w następujący sposób: Obliczenie  $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  - niech elementy wynikowe będą elementy  $y_1, \dots, y_m, y_{m+1}$  oraz niech elementami bierzącego wektora  $\mathbf{N}$  będą  $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ . Ustalenie  $i, i \geq 2$  dla każdego  $y_i > 0, x_i \geq 0$  oraz  $x_i/y_i$  jest najmniejsze i przypisanie tej wartości do zmiennej  $k$ . Minimalny stosunek powinien być zerem aby można było wykorzystać metodę degeneracji.

Jeśli stosunek nie jest równy zero wtedy  $k$ -ty element wektora  $\mathbf{P}$ ,  $y_k$  będzie elementem wokół którego zajdzie eliminacja Gaussa odbywająca się równocześnie na  $\mathbf{B}^{-1}$ ,  $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{N}$ . Eliminacja ta przebiega na macierzy  $(m + 1) \times (m + 3)$  wymiarowej  $\mathbf{G}$  uformowanej z  $\mathbf{B}^{-1}$  poprzez dołączenie kolumn  $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  oraz  $\mathbf{N}$ . Pierwsze  $m + 1$  kolumn  $\mathbf{G}$  formuje nową macierz  $\mathbf{B}^{-1}$ , a kolumna  $m + 2$  to nowy wektor  $\mathbf{N}$ . Zależność między kolumnami  $\mathbf{B}^{-1}$  a rozkrojami lub zmiennymi dodatkowymi jest aktualizowana poprzez usunięcie  $k$ -tej kolumny i podmienieniu jej na nowy rozkrój lub zmienną dodatkową.

Degeneracja w razie wystąpienia może być obsługiwana w tradycyjny sposób. Pewne środki ostrożności powinny zostać podjęte w celu uniknięcia cykliczności. Nowa kolumna  $\mathbf{N}^1$  z dodatnimi elementami  $x'_1, \dots, x'_{m+1}$  która jest niezależna od  $\mathbf{N}$  jest dołączana do  $\mathbf{G}$  i wybór takiego  $y_i > 0$  dla którego  $x_i = 0$  który jest elementem osiowym jest dokonywany na podstawie takiego  $i$  dla którego  $x'_i > 0$  oraz  $x'_i/y_i$  jest najmniejsze. Gdy element osiowy zostanie wybrany, wówczas eliminacja Gaussa zachodzi tak jak w poprzednim przypadku na powiększonej macierzy

$G$ . Dodatkowa kolumna jest przechowywana w  $G$  dopóki istnieje takie  $i$  dla którego  $x_i/y_i$  jest dodatnie i skończone, jeśli warunek ten jest spełniony wówczas kolumna zostaje usunięta. Powinno to nastąpić w przypadku gdy nie istnieje takie  $i$  dla którego  $x_i/y_i$  oraz  $x'_i/y_i$  są dodatnie i skończone. Wówczas powinna zostać dodana kolumna  $N^2$  niezależna od  $N$  oraz  $N^1$ . Podobnie dowolna liczba kolumn może zostać dodana i usunięta gdy przestanie być potrzebna. Dopóki kolumny są niezależne w czasie dodawania i pozostają takie po eliminacji Gaussa, nie potrzeba więcej jak  $m$  nowych kolumn. Każda dodana kolumna definiuje nowy problem liniowy który eliminuje problem cykliczności tak długo aż degeneracja nie wystąpi.

## 1.2 Metody użyte w implementacji

### 1.2.1 Dwufazowa metoda simplex

### 1.2.2 Metoda podziału i ograniczeń

### 1.3 Przykład