1 Algorytm "Delayed Column Generation" - Gilmore i Gomory

$$L \geq l_1 a_1 + \cdots + l_m a_m \tag{1}$$

$$b_1 a_1 + \cdots + b_m a_m > c \tag{2}$$

1. Określnie m poczatkowych rokrojów i ich kosztu w następujący sposób: dla każdego i wybranie długości bazowej L_j dla której $L_j > l_i$ i określenie i-tego rokroju jako wycięcie $a_{ii} = [L_j/l_i]$ elementów o długości l_i z długości L_j. Koszt i-tego rozkroju będzie równy kosztowi c_j długości L_j z której i-ta operacja wycina odcinki o długości l_i.

2. Uformowanie macierzy $\boldsymbol{B}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_m \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{array}$$

gdzie a_{ii} jest ilością odcinków o długości l_i wyciętych w i-tym rozkroju z długości bazowej o koszcie c_j. Ostatnie m kolumn jets powiązane z rozkrojami. Dane te będą aktualizowane gdy zostanie znaleziony wynik który poprawi rozwiązanie.

Utworzenie m $m+1$ wymiarowych wektorów kolumnowych $\boldsymbol{S_1}$,...,$\boldsymbol{S_m}$ odnoszących się do zmiennych dodatkowych, gdzie $\boldsymbol{S_i}$ posiada same zera z wyjątkiem wiersza $(i+1)$ w którym jest -1. Dodatkowo utworzenie $m+1$ wymiarowego wektora kolumnowego $\boldsymbol{N'}$ który jako pierwszy element przyjmuje 0, a w następnych i-tych wierszach posiada wartośic N_i.

Obliczenie $\boldsymbol{B}^{-1}$ która wynosi:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & c_1/a_{11} & c_2/a_{22} & \dots & c_m/a_{mm} \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{mm} \end{array}$$

Niech $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{N'}$. Sprawdzając czy pierwszy element z $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}$ jest dodatni można określić czy istnieje możliwość polepszenia rozwiązania. Wektor kolumnowy $\boldsymbol{P}$ jets wektorem złożonym ze zmiennych nieuzytych w bieżącym rozwiązaniu, np. pierwszy element to negatywny koszt, a pozostałe m wierszy jest równe zmiennym a_{ij}.

3. Z powyższego puntku wynika że jeśli i-ta zmienna dodatkowa która nie wchodzi w skład rozwiązania może ulepszyć rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $(i+1)$ element pierwszego wiersza $\boldsymbol{B}^{-1}$ jest ujemny.

4. Jeśli nie jest możliwe polepszenie rozwiązania nalezy określić czy wprowadznie nowego rozkroju ulepszy bieżące rozwiązanie. Jets to możliwe poprzez sprawdznie czy dla L z kosztem c istnieje rozwiązanie nierówności 1 oraz 2, gdzie $b_1, \ldots, b_m$ to ostatnie m elementów w piwerwszym wierszu $\boldsymbol{B}^{-1}$. Jeśli te nierówności nie posiadają rozwiąania dla dowolnej długości $L_1, \ldots, L_k$ z kosztem odpowiednio $c_1, \ldots, c_m$ wtedy bieżące rozwiązanie jest minimum. Rozwiązanie i jego koszt jest określone poprzez $\boldsymbol{N}$, gdzie pierwszy wiersz to koszt, a pozostałe m wierszy jest, w kolejności, odpowiednimi wartościami m-tej kolumny z $\boldsymbol{B}^{-1}$.

   Jeśli nowy rozkrój poprawi rozwiązanie wtedy formowany jest nowy wektor $\boldsymbol{P}$ ze współczynnikami, w kolejności $-c, a_1, a_2, \ldots, a_m$.

5. Wprowadznie zarówno dodatkowej zmiennej jak i nowego rozkroju może poprawić rozwiązanie. W obu przypadkach $\boldsymbol{P}$ będzie kolumnowym wektorem ze zmiennymi. Dla określenia nowych $\boldsymbol{B}^{-1}$ oraz $\boldsymbol{N}$ które opisują ulepszone rozwiązanie i jego koszt, co pozawala na przejście przez kkroki 3, 4 oraz kontynujacje kroku 5 w nastepujący sposób: Obliczenie $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}$ - niech elementy wynikime będą elementy $y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}$ oraz niech elementami bierzącego wektora $\boldsymbol{N}$ będą $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}$. Ustalenie i, $i \geq 2$ dla każdego $y_i > 0$, $x_i \geq 0$ oraz x_i/y_i jest najminiejsze i przypisanie tej wartości do zmiennej k. Minimalny stosunek powinien być zerem aby można było wykorzystać metodę degeneracji.

   Jeśli stosunek nie jest równy zero wtedy k-ty element wektora $\boldsymbol{P}$, y_k będzie elementem wokół którego zajdzie eliminacja Gaussa odbywająca się równocześnie na $\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}$ oraz $\boldsymbol{N}$. Eliminacja ta przebiega na macierzy $(m+1) \times (m+3)$ wymiarowej $\boldsymbol{G}$ uformowanej z $\boldsymbol{B}^{-1}$ poprzez dołączenie kolumn $\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}$ oraz $\boldsymbol{N}$. Pierwsze $m+1$ kolumn $\boldsymbol{G'}$ formuje nową macierz $\boldsymbol{B}^{-1}$, a kolumna $m+2$ to nowy wektor $\boldsymbol{N}$. Zależność między kolumnami $\boldsymbol{B}^{-1}$ a rozkrojami lub zmiennymi dodatkowymi jets aktualizowana poprzez usunięcie k-tej kolumny i podmienieniu jej na nowy rozkruj lub zmienną dodatkową.

   Degeneracja w razie wystąpienia może być obsłużona w tradycyjny sposób. Pewne środki ostrożności powinny zostać podjęte w celu uniknięcia cykliczności. Nowa kolumna $\boldsymbol{N}^1$ z dodatnimi elementami $x'_1, \ldots, x'_{m+1}$ która jest niezależna pd $\boldsymbol{N}$ jest dołączana do $\boldsymbol{G}$ i wybór takiego $y_i > 0$ dla którego $x_i = 0$ który jest elementem osiowym jets dokonywany na podstawie takiego i dla którego $x'_i > 0$ oraz x'_i/y_i jest najmniejsze. Gdy element osiowy zostanie wybrany, wówczas eliminacja Gaussa zachodzi tak jak w poprzednim przypadku na powiększonej macierzy

$\boldsymbol{G}$. Dodatkowa kolumna jest przechowywane w $\boldsymbol{G}$ dopóki istnieje takie i dla którego x_i/y_i jest dodatnie i skończone, jeśłi warunek ten jest spełniony wówczas kolumna zostaje usunięta. Powinno to nastąpić w przypadku gdy nie istnieje takie i dla którego x_i/y_i oraz x_i'/y_i są dodatnie i skończone. Wówczas powinna zostać dodana kolumna $\boldsymbol{N}^2$ nizależna od $\boldsymbol{N}$ oraz $\boldsymbol{N}^1$. Podobnie dowolna liczba kolumn może zostac dodana i usunięta gdy przestanie byc potrzebna. Dopóki kolumny są niezależne w czasie dodawania i pozostają takie po eliminacji Gaussa, nie potrzeba więcej jak m nowych kolumn. Każda dodana kolumna definiuje nowy problem liniowy który eliminuje problem cykliczności tak długo aż degeneracja nie wystąpi.