

Optymalizacja wykorzystania materiału w procesie rozkroju rur

Jakub Pelczar

30 stycznia 2017
v0.1.1

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Knapsack Problem - Problem plecakowy	3
2.1	Zastosowanie	3
2.2	Różnorodność problemu plecakowego	3
2.3	Możliwe rozwiązania	6
2.3.1	Metoda podziału i ograniczeń	7
2.3.2	Programowanie dynamiczne	10
3	Cutting Stock Problem - Problem optymalnego rozkroju	13
4	Metoda "Brutal Force"	14
4.1	Algorytm wyjściowy	14
4.2	Rozszerzenie o szerokość cięcia	15
4.3	Rozszerzenie o wiele długości bazowych	15
4.4	Rozszerzenie o cenę materiału wsadowego	15
4.5	Przykład	16
4.6	Podsumowanie	18
5	Metoda "Delayed Column Generation"	19
5.1	Algorytm	19
5.2	Metody użyte w implementacji	21
5.2.1	Dwufazowa metoda simplex	21
5.2.2	Metoda podziału i ograniczeń	21
5.3	Przykład	21
6	Wyniki	22
6.1	Porównanie	22
6.2	Wnioski	22
6.3	Podsumowanie	22

7	Opis implementacji	23
7.1	Architektura	23
7.2	Java	23
7.3	Kotlin	23
7.4	JavaFX	23
8	Zakończenie	24

1 Wstep

2 Knapsack Problem - Problem plecakowy

Problem plecakowy jest zagadnieniem z zakresu optymalizacji. Problem ten swoją nazwę wziął z analogii do rzeczywistego problemu pakowania plecaka. Rozwiązując go zarówno w praktyce jak i teorii trzeba zachować reguły określające ładowność plecaka dotyczące objętości i nośności plecaka. "Knapsack Problem" zaczął być intensywnie badany po pionierskiej pracy Dantziga[3] w późnych latach 50 XX wieku. Znalazł on natychmiast zastosowanie w przemyśle oraz w zarządzaniu finansami. Z teoretycznego punktu widzenia, problem plecakowy często występuje jako relaksacja różnorodnych problemów programowania całkowitego[8].

2.1 Zastosowanie

Problem plecakowy stosowany jest nie tylko w sytuacji wynikającej bezpośrednio z nazwy. Znajduje on zastosowanie w wielu dziedzinach życia oraz nauki. Diffi i Helman[4] w 1976 roku oraz Merkle i Helman[7] w 1978 roku zaproponowali problem plecakowy jako podstawę do enkrypcji kluczy prywatnych. Jednakże klucze oparte na tym algorytmie w latach późniejszych zostały złamane przez środowisko kryptograficzne i jego miejsce zajęły bardziej odporne podejścia.

"Knapsack Problem" jest stosowany również podczas załadunku kontenerów służących do przewozu materiałów drogą morską. Ładowność oraz gabaryty ładowanych elementów są ograniczane przez budowę i wytrzymałość kontenera.

Problem ten stosowany jest również w dziedzinie finansów. Jest on podstawowym narzędziem do optymalizacji portfela inwestycyjnego. Poprzez uogólnienie i modyfikacje problemu plecakowego zjawiska ekonomiczne mogą być modelowane z większą dokładnością. Przykładowo możliwe jest zakupienie 0, 1, 2 lub więcej akcji inwestycyjnych, a zakup kolejnych akcji może przynieść obniżenie przychodu.

Wiele problemów związanych z planowaniem może być przyrównana do problemu plecakowego, dla przykładu czas wykonywania operacji na maszynie jest zasobem deficytowym. Jest on szczególnie uwydatniony gdy od aktywności maszyny zależy zysk przedsiębiorstwa. Poprzez rozwiązanie problemu plecakowego możliwe jest przewidzenie zapotrzebowania na materiały podczas procesu tak aby warunki zamówienia zostały spełnione[1].

Kolejnym zagadnieniem wynikającym z problemu plecakowego jest problem optymalnego rozkroju, zostanie on przedstawiony w rozdziale section 3.

2.2 Różnorodność problemu plecakowego

Wszystkie elementy z rodziny tego problemu wymagają pewnego zestawu elementów które mogą zostać wybrane w taki sposób aby zysk został zmaksy-

malizowany, a pojemność plecaka lub wielu plecaków nie została przekroczona. Wszystkie typy problemu należą do rodziny problemów NP – *trudnych* co oznacza, że możliwe jest rozwiązanie problemu z użyciem algorytmów wielomianowych. Możliwe są różne wariaty problemu zależne od rozmieszczenia elementów oraz ilości plecaków[8]:

- *Problem plecakowy 0-1* - każdy element może być wybrany tylko raz. Problem polega na wyborze n elementów dla których suma zysków p_j jest największa, bez konieczności osiągnięcia całkowitej pojemności c . Może być sformułowany jako problem maksymalizacji:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie x_j jest wartością binarną. Jeżeli $x_j = 1$ wtedy j -ty element powinien znaleźć się w plecaku, w innym przypadku $x_j = 0$.

- *Ograniczony problem plecakowy* - każdy element może być wybrany ograniczoną ilość razy. Zmianą w obecnym problemie względem problemu 0-1 jest ograniczona m_j ilość elementów j :

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1, \dots, m_j\}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.2}$$

- *Nieograniczony problem plecakowy* - jest rozszerzeniem problemu ograniczonego o nielimitowaną liczbę dostępnych elementów:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in N_0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Każda zmienna x_j w metodzie nieograniczonej zostanie ograniczona poprzez pojemność c , gdy waga każdego z elementów jest równa przynajmniej jeden. W ogólnym przypadku transformacja problemu nieograniczonego w ograniczony nie przynosi korzyści

- *Problem plecakowy wielokrotnego wyboru* - elementy powinny być wybierane z klas rozłącznych. Problem ten jest generalizacją problemu 0-1. Możliwy jest wybór dokładnie jednego elementu j z każdej grupy N_i , $i = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned}
&\text{maksymalizacja} && \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} p_{ij} x_{ij}, \\
&\text{w odniesieniu do} && \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} w_{ij} x_{ij} \leq c, \\
&&& \sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, && i = 1, \dots, k, \\
&&& x_j \in \{0, 1\}, && i = 1, \dots, k, \quad j \in N_i.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Zmienna binarna $x_{ij} = 1$ określa że j -ty element został wybrany z i -tej grupy. Ograniczenie $\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1$, $i = 1, \dots, k$ wymusza wybór dokładnie jednego elementu z każdej grupy.

- *Wielokrotny problem plecakowy* - możliwość wypełnienia wielu plecaków. Jeśli jest możliwość załadowania n elementów do m plecaków o różnych pojemnościach c_i w taki sposób że zysk będzie jak największy:

$$\begin{aligned}
&\text{maksymalizacja} && \sum_{i=1}^k \sum_{j \in N_i} p_{ij} x_{ij}, \\
&\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq c_i, && i = 1, \dots, m \\
&&& \sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1, && i = 1, \dots, k, \\
&&& x_j \in \{0, 1\}, && i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Zmienna $x_{ij} = 1$ określa że j -ty element powinien zostać umieszczony w i -tym plecaku, podczas gdy ograniczenie $\sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq c_i$ zapewnia że restrykcja dotycząca pojemności plecaka zostanie zachowana. Ograniczenie $\sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1$ zapewnia że każdy element zostanie wybrany tylko raz.

- *Bin-packing problem* - bardzo często spotykana wersja problemu plecakowego. Problem ten polega na umieszczeniu n elementów w jak

najmniejszej liczbie opakowań:

$$\begin{aligned}
 &\text{maksymalizacja} && \sum_{i=1}^n y_i \\
 &\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^n w_j x_{ij} \leq c y_i, && i = 1, \dots, n, \\
 &&& \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, && j = 1, \dots, n, \\
 &&& y_i \in \{0, 1\}, && i = 1, \dots, n, \\
 &&& x_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

gdzie y_i określa czy i -te opakowanie zostało użyte, a x_{ij} stanowi czy j -ty element powinien zostać umieszczony w i -tym opakowaniu

- *Wielokrotnie ograniczony problem plecakowy* - najbardziej ogólny typ, który jest problemem programowania całkowitego z dodatnimi współczynnikami:

$$\begin{aligned}
 &\text{maksymalizacja} && \sum_{j=1}^n p_j x_j, \\
 &\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
 &&& x_j \in N_0, && j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3 Możliwe rozwiązania

Problem plecakowy należy do grupy problemów \mathcal{NP} -Trudnych. Rozwiązanie problemów z tej grupy jest co najmniej tak trudne, jak rozwiązanie każdego problemu z całej klasy \mathcal{NP} . Problem \mathcal{NP} -Trudny to problem obliczeniowy dla którego znalezienie rozwiązania problemu możliwe jest z wielomianową złożonością obliczeniową. Problemy \mathcal{NP} -Trudne obejmują zarówno problemy decyzyjne jak również problemy przeszukiwania czy też problemy optymalizacyjne.

Rozwiązanie problemu plecakowego jest możliwe przy użyciu różnych metod:

- *Metoda podziału i ograniczeń* - Metoda ta często jest stosowana do problemu plecakowego od momentu gdy Kolesar [6] zaprezentował pierwszy algorytm w 1967 roku.
- *Programowanie dynamiczne* - Gdy zostaną dodane warunki brzegowe wtedy algorytm ten staje się "zaawansowaną" formą metody podziału i ograniczeń.

- *Relaksacja przestrzeni stanów* - relaksacja programowania dynamicznego gdzie współczynniki są skalowane przez pewną stałą wartość.

2.3.1 Metoda podziału i ograniczeń

Algorytm ten polega na wypisaniu wszystkich możliwych rozwiązań używając struktury drzewa. Algorytm przechodzi kolejno po gałęziach które reprezentują podzbiory rozwiązania. Każda gałąź jest sprawdzana zadanymi warunkami brzegowymi i zostaje odrzucona jeśli nie poprawia rozwiązania. Przedstawione zostanie rozwiązanie nieograniczonego problemu plecakowego (eq. (2.3)) [2]. Współczynniki $w_1, \dots, w_m, p_1, \dots, p_m$ oraz c są nieujemne. Stosunek p_j/w_j jest wartością jednej jednostki długości j -tego elementu. Stosunek ten jest nazywany *wydajnością* zmiennej x_j . Pierwszym krokiem algorytmu jest posortowanie zmiennych w porządku malejącym względem wydajności:

$$p_1/w_1 \geq p_2/w_2 \geq \dots \geq p_m/w_m \quad (2.8)$$

Dla posortowanych elementów każde rozwiązanie optymalne (eq. (2.3)) spełnia warunek:

$$c - \sum_{j=1}^m w_j x_j < w_m \quad (2.9)$$

Głównym elementem algorytmu jest stworzenie drzewa wyliczeń oraz przeprowadzenie jego redukcji. Przykładowo dla problemu który zawiera 13 rozwiązań:

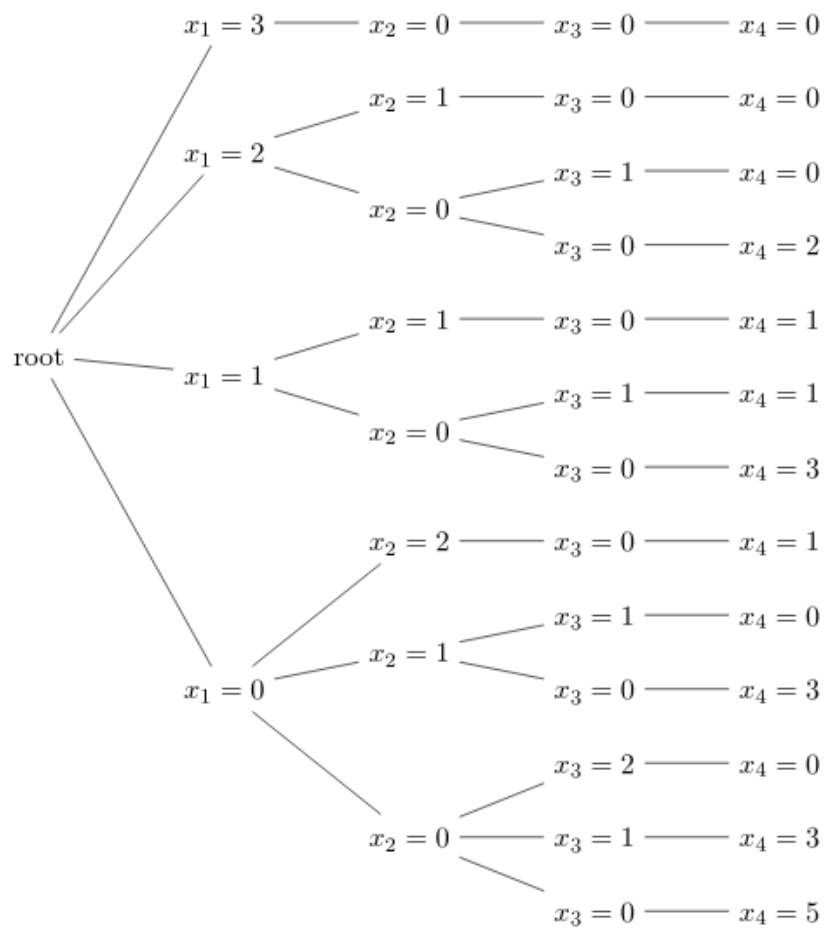
$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ \text{w odniesieniu do} \quad & 33x_1 + 49x_2 + 51x_3 + 22x_4 \leq 120 \\ & x_j \in N_0 \end{aligned}$$

drzewo będzie miało 13 liści (fig. 2.1). Jeśli dany węzeł posiada więcej niż jedno dziecko, wówczas potomek o większej przechowywanej wartości zostaje umieszczony wyżej. Każdy następny węzeł jest obliczany według wzoru:

$$\begin{aligned} x_j &= \lfloor (c - \sum_{i=1}^{j-1} w_i x_i) / w_j \rfloor \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_1 &= \lfloor c / w_1 \rfloor \end{aligned}$$

Podczas poszukiwania węzłów które nie mogą polepszyć rozwiązania i gałęzi które dają szansę na rozwiązanie optymalne x_1, x_2, \dots, x_m ustawione zostaje $k = m - 1$. Jeśli zachodzi taka potrzeba zmienna k jest dekrementowana dopóki nie zostanie znalezione takie x_k , że $x_k > 0$. Wówczas $x_k = x_{k-1}$, a wartości $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$ są otrzymywane ze wzoru (section 2.3.1).

Dla bieżącego rozwiązania x_1^*, \dots, x_m^* zachodzi $\sum_{i=1}^m p_i x_i^* = M$. Maksymalne k takie, że $k \leq m - 1$ oraz $x_k > 0$ zostaje określone przechodząc od



Rysunek 2.1: Drzewo wyliczeń możliwych rozwiązań

węzłów x_1, x_2, \dots, x_m w kierunku korzenia. Podobnie jak wcześniej, niech $\bar{x}_i = x_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k-1$ oraz $\bar{x}_k = x_k - 1$ będą zmiennymi kandydującymi do rozwiązania. Aby określić czy \bar{x}_i polepszy rozwiązanie x_i^* . Zgodnie z (eq. (2.8)) dla każdej zmiennej $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$ wydajność wynosi maksymalnie p_{k+1}/w_{k+1} , tak więc

$$\sum_{i=k+1}^m p_i \bar{x}_i \leq \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} \sum_{i=k+1}^m w_i \bar{x}_i$$

połączone razem z (eq. (2.3)) zwraca:

$$\sum_{i=1}^m p_i \bar{x}_i \leq \sum_{i=1}^m w_i \bar{x}_i + \frac{p_i}{w_i} (c - \sum_{i=1}^k w_i \bar{x}_i). \quad (2.10)$$

Zgodnie z zasadami drzewa wyliczeń, nierówność

$$\sum_{i=1}^k p_i \bar{x}_i + \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} (c - \sum_{i=1}^k w_i \bar{x}_i) \leq M \quad (2.11)$$

określa że ścieżka $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ jest niegorsza niż pozostałe. Jeśli wszystkie współczynniki p_1, \dots, p_m są dodatnimi liczbami całkowitymi, wówczas również M jest liczbą całkowitą, a słaba nierówność (2.11) może zostać zastąpiona mocną

$$\sum_{i=1}^k p_i \bar{x}_i + \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} (c - \sum_{i=1}^k w_i \bar{x}_i) < M + 1 \quad (2.12)$$

Dla wcześniejszego przykładu powyższy krok mający na celu redukcję drzewa przyjmuje postać:

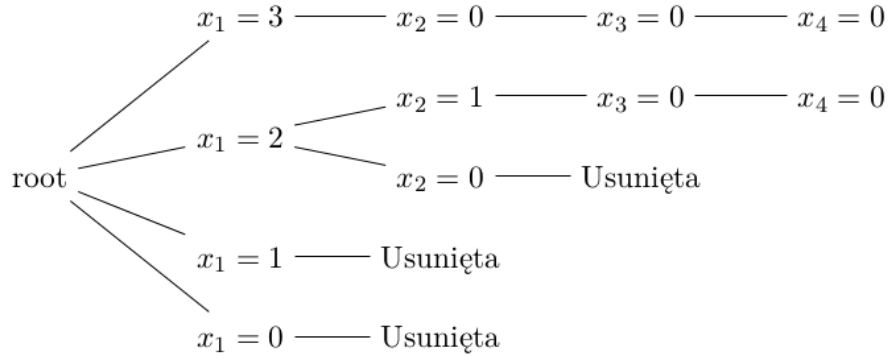
$$\begin{aligned} x_1 &= \lfloor 120/33 \rfloor = 3 \\ x_2 &= \lfloor (120 - 99)/49 \rfloor = 0 \\ x_3 &= \lfloor (120 - 99)/51 \rfloor = 0 \\ x_4 &= \lfloor (120 - 99)/99 \rfloor = 0 \end{aligned}$$

Z powyższego wynika że początkowe rozwiązanie to $x_1^* = 3, x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ oraz $M = 12$. Początkowo $k = 3$, następnie występuje redukcja k dopóki nie zostanie znalezione takie $k = 1$ dla którego istnieje $x_k > 0$. Wówczas $x_1 = 3$ zostaje zaminione na $x_1 = 2$. Przed sprawdzeniem gałęzi $x_1 = 2$ przeprowadzony zostaje test (2.12) z $k = 1$ oraz $\bar{x}_1 = 2$. Wówczas lewa strona nierówności wynosi

$$8 + \frac{5}{49}(120 - 66) = 13.5$$

i jest nie mniejsza niż $M + 1 = 13$ z czego wynika że gałąź może być warta sprawdzenia. Następnie zostaje obliczona kolejna ścieżka

$$\begin{aligned} x_2 &= \lfloor (120 - 66)/49 \rfloor = 1 \\ x_3 &= \lfloor (120 - 115)/51 \rfloor = 0 \\ x_4 &= \lfloor (120 - 115)/99 \rfloor = 0 \end{aligned}$$



Rysunek 2.2: Drzewo wyliczeń możliwych rozwiązań

i zastępuje ona poprzednie rozwiązanie $x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = x_4^* = 0$ oraz $M = 13$. Powtórzony zostaje krok z redukcją $k = 3$ dopóki nie zostanie znalezione takie $k = 2$ dla którego istanieje $x_k > 0$. Wówczas $x_2 = 1$ zostaje zamienione na $x_2 = 0$. Aby określić czy ścieżka $x_1 = 2, x_2 = 0$ jest warta sprawdzenia, zostaje przeprowadzony test (2.12) z $k = 2$ oraz $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 0$. Lewa strona nierówności wynosi

$$8 + \frac{5}{51}(120 - 66) = 13.3$$

Jest ona mniejsza niż $M + 1 = 14$, więc gałąź ta jest odcinana. Następnie k dalej jest zmniejszane, a kroki są powtarzane. Dla $x_1 = 1$ wynik testu to $12.9 < 14$, a dla $x_1 = 0$ wynik to $12.2 < 14$ więc gałęzie te są odcinane. Tak więc optymalnym rozwiązaniem jest $x_1^* = 2, x_2^* = 1, x_3^* = x_4^* = 0$. Drzewo wyliczeń zostało zredukowane do postaci 2.2.

Jeśli odcięta jest gałąź $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ wówczas odcięty również zostaje pozostała część gałęzi bez przeprowadzania dodatkowych testów.

Algorytm dla metody podziału i ograniczeń do rozwiązywania problemu plecakowego, został przedstawiony poniżej

2.3.2 Programowanie dynamiczne

Metoda ta używana jest w przypadku gdy problem można podzielić na małe podproblemy które mogą zostać rozwiązane rekursywnie. Rozwiązanie optymalne podproblemu jest również optymalnym rozwiązaniem problemu głównego. Przedstawione zostanie rozwiązanie problemu plecakowego rodzaju 0-1 [5].

Jeśli elementy są oznaczone jako $1, \dots, n$ wtedy podproblem będzie odpowiadający za znalezienie optymalnego rozwiązania dla $S_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Algorytm 1 Metoda podziału i ograniczeń - problem plecakowy

```
1:  $M := 0$ 
2:  $k := 0$ 
3: for  $j := k+1$  TO  $m$  do
4:    $x_j = \lfloor (c - \sum_{i=1}^{j-1} w_i x_i) / w_j \rfloor$ 
5:  $k := m$ 
6: if  $\sum_{i=1}^m p_i x_i > M$  then
7:    $M := \sum_{i=1}^m p_i x_i$ 
8:   for  $j := 1$  TO  $m$  do
9:      $x_j^* = x_j$ 
10: if  $k = 1$  then
11:   stop
12: else
13:    $k = k - 1$ 
14: if  $x_k = 0$  then
15:   idź do linii 10
16: else
17:    $x_k = x_k - 1$ 
18: if  $\sum_{i=1}^k p_i \bar{x}_i + \frac{p_{k+1}}{w_{k+1}} (c - \sum_{i=1}^k w_i \bar{x}_i) < M + 1$  then
19:   idź do linii 3
20: else
21:   idź do linii 10
```

Niemożliwe jest opisanie rozwiązania końcowego S_n na podstawie podproblemów S_k . Rekursywne sformułowanie podproblemu:

$$B[k, w] = \begin{cases} B[k-1, w] & \text{jeśli } w_k > w, \\ \max\{B[k-1, w], B[k-1, w-w_k] + b_k\} & \text{jeśli } w_k \leq w. \end{cases} \quad (2.13)$$

Z powyższego równania wynika że najlepszy podzbiór podproblemu S_k z całkowitą wagą w jest najlepszym podzbiorem dla S_{k-1} którego całkowita waga wynosi w lub jest najlepszym podzbiorem dla S_{k-1} którego całkowita waga wynosi $w - w_k$ plus k -ty element. Złożoność programowania dynamicznego to $O(n * W)$. Algorytm jako dane wejściowe przyjmuje maksymalną wartość ciężaru W , oraz dwie listy: listę wag w_1, \dots, w_n oraz odpowiadającą jej listę zysku b_1, \dots, b_n .

Algorytm 2 Programowanie dynamiczne - problem plecakowy 0-1

```

1: for  $w := 0$  TO  $W$  do
2:    $B[0, w] := 0$ 
3: for  $i := 1$  TO  $n$  do
4:    $B[i, 0] := 0$ 
5: for  $i := 1$  TO  $n$  do
6:   for  $w := 0$  TO  $W$  do
7:     if  $w_i \leq w$  then
8:       if  $b_i + B[i-1, w-w_i] > B[i-1, w]$  then
9:          $B[i, w] := b_i + B[i-1, w-w_i]$ 
10:      else
11:         $B[i, w] := B[i-1, w]$ 
12:      else
13:         $B[i, w] := B[i-1, w]$ 

```

3 Cutting Stock Problem - Problem optymalnego rozkroju

4 Metoda "Brutal Force"

4.1 Algorytm wyjściowy

Metoda ta opiera się zarówno na intuicji jak i na rozwiązaniu zaproponowanym przez Dantzig dla problemu plecakowego [3]. Jest to metoda która w prosty sposób - nie używając złożonych modeli matematycznych, pozwala osiągnąć optymalny rozkrój materiału.

Pierwszym krokiem jest posortowanie elementów wyjściowych malejąco względem ich długości $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_m$ i umieszczenie w ten sposób w kolejce.

Drugim krokiem jest pobranie pierwszego elementu z kolejki i sprawdzenie, jak wiele razy jego długość zawiera się w długości elementu bazowego. Obliczone zostaje ile materiału pozostało w elemencie bazowym po docięciu najdłuższych elementów. Następnie pobierany jest kolejny odcinek z kolejki. Następuje sprawdzenie ile razy zawiera się on w pozostałej długości.

$$\begin{aligned}a_1 &= \lfloor L/l_1 \rfloor, \\a_2 &= \lfloor (L - l_1 a_1)/l_2 \rfloor, \\a_3 &= \lfloor (L - (l_1 a_1 + l_2 a_2))/l_3 \rfloor, \dots\end{aligned}\tag{4.1}$$

Kroki te powtarzane są dopóki kolejka się nie skończy.

Każdy element wyjściowy posiada określoną liczebność jaką powinien osiągnąć pod koniec procesu cięcia. Jeśli na danym etapie procesu cięcia wymagana liczba elementów danego typu spada do zera, wówczas jest on pomijany w dalszej pracy algorytmu. Koniecznie jest sprawdzenie czy liczba uzyskanych elementów danego typu jest mniejsza lub równa od wymaganej:

- Jeśli stwierdzenie jest prawdziwe - długość z której elementy są wycinane zostanie zmniejszona o liczbę wystąpień elementu pomnożoną przez jego długość, a licznik wymaganych odcinków danej długości zostanie zmniejszony o odpowiednią liczbę wystąpień
- Jeśli stwierdzenie jest fałszywe - długość z której elementy są wycinane zostanie zmniejszona o liczbę pozostałych wykrojów pomnożoną przez długość elementu, a licznik wymaganych odcinków danej długości zostanie ustawiony na zero.

Po zakończeniu przebiegu algorytmu dla jednego układu rozkroju, można określić ile razy będzie on użyty. Zostaje to wyznaczone poprzez obliczenie

$$g = \text{floor}\{\min\{z_i/a_i\}\}, i \in [0..m], g \in Z\tag{4.2}$$

gdzie g to liczba ile razy dany schemat może zostać użyty, z to liczebność wyjściowego elementu i która pozostała do wycięcia, a to ilość wykrojów elementu i w bieżącym układzie, m to liczba długości umieszczonych w

rozkroju. Następnie licznik wymaganych odcinków elementu i zostaje zmniejszony o ga_i .

Cały proces powtarzany jest do momentu aż wszystkie wymagane elementy zostaną wycięte.

4.2 Rozszerzenie o szerokość cięcia

W warunkach rzeczywistych elementy wycinane są za pomocą ostrza które ma niezerową grubość. Wówczas metodę obliczania należy rozszerzyć jeśli ma odpowiadać warunkom rzeczywistym. Szerokość cięcia wlicza się w odpad. Jest kilka przypadków wliczania szerokości ostrza.

Jeżeli element jest równy długości bazowej wówczas nie wlicza się szerokości cięcia. Natomiast jeżeli materiał bazowy ma zostać pocięty na kilka elementów wówczas do każdego dolicza się szerokość cięcia. Szczególnym przypadkiem jest, gdy ostatni element wraz z szerokością ostrza jest dłuższy niż długość odcinka, który został po wycięciu wcześniejszych elementów.

Gdyby szerokość cięcia nie została uwzględniona w obliczeniach wówczas dla elementu wejściowego o długości 6000mm i wymaganych odcinkach 4500mm oraz 1500mm, obie długości zostały wycięte z jednego segmentu materiału bazowego. Skutkiem takiego postępowania byłby element krótszy o szerokość ostrza. Zazwyczaj długość ta może być akceptowana jako tolerancja dokładności maszyny. Jednak dla poprawności obliczeń wielkość ta powinna zostać uwzględniona.

4.3 Rozszerzenie o wiele długości bazowych

Dla zmniejszenia odpadu można użyć kilku długości bazowych. Rozszerzenie to wprowadza następującą zmianę algorytmu: obliczenia układu muszą zostać powtórzone dla każdego elementu wejściowego. Następnie wybierany jest ten rozkrój, który daje mniejszy odpad. Modyfikacja ta znacząco wpływa na wydajność metody. Jeżeli n oznacza złożoność obliczeniową podstawowego algorytmu, a m oznacza liczbę odcinków wejściowych, wówczas nowa złożoność obliczeniowa wynosi $m * n$.

4.4 Rozszerzenie o cenę materiału wsadowego

Rozszerzenie to wprowadza zmianę koncepcyjną. Każdy element bazowy posiada cenę za metr bieżący materiału, umożliwia to obliczenie kosztu odpadu i wybranie tańszej opcji wykroju.

4.5 Przykład

1. Dane wejściowe

- 6000mm - 3\$/mb
- 7000mm - 2\$/mb
- szerokość cięcia: 10mm

2. Dane wyjściowe

- 1x3500mm
- 1x3000mm
- 3x2000mm
- 5x500mm

3. Przebieg algorytmu

- Pierwszy rozkrój
 - 3500mm mieści się raz w 6000mm. Zostaje $2500 - 10 = 2490$ mm.
 - 3000mm nie mieści się w 2490mm.
 - 2000mm mieści się raz w 2490mm. Zostaje $490 - 10 = 480$ mm.
 - 500mm nie mieści się w 480mm.
 - Rozkrój 6000mm: 3500mm, 2000mm. Odpad $6000 - 5500 = 500 * 0.003 = 1.5$ \$
 - —————
 - 3500mm mieści się dwa razy w 7000mm. Dostępny jest jeden odcinek 3500mm. Zostaje $3500 - 10 = 3490$ mm.
 - 3000mm mieści się raz w 3490mm. Zostaje $490 - 10 = 480$ mm.
 - 2000mm nie mieści się w 480mm.
 - 500mm nie mieści się w 480mm.
 - Rozkrój 7000mm: 3500mm, 3000mm. Odpad $7000 - 6500 = 500 * 0.002 = 1.0$ \$
 - —————
 - Wybrano rozkrój 3500mm, 2000mm na długości 7000mm ze względu na mniejszy koszt odpadu.
 - Do realizacji pozostało: 0x3500mm; 0x3000mm; 3x2000mm; 5x500mm
- Drugi rozkrój
 - 2000mm mieści się trzy razy w 6000mm. Uwzględniając szerokość cięcia - zostaną użyte tylko dwa elementy od długości 2000mm. Zostaje $2000 - 2 * 10 = 1980$ mm.

- 500mm mieści się trzy razy w 1980mm. Zostaje $480 - 3 * 10 = 450\text{mm}$.
- Rozkrój 6000mm: 2x2000mm, 3x500mm. Odpad $6000 - 5500 = 500 * 0.003 = 1.5\$$
- —————
- 2000mm mieści się trzy razy w 7000mm. Zostaje $1000 - 3 * 10 = 970\text{mm}$.
- 500mm mieści się raz w 970mm. Zostaje $470 - 10 = 460\text{mm}$.
- Rozkrój 7000mm: 3x2000mm, 500mm. Odpad $7000 - 6500 = 500 * 0.002 = 1.0\$$
- —————
- Wybrano rozkrój 3x2000mm, 500mm na długości 7000mm ze względu na mniejszy koszt odpadu
- Do realizacji pozostało: 0x3500mm, 0x3000mm, 0x2000mm, 4x500mm
- Trzeci rozkrój
 - 500mm mieści się dwanaście razy w 6000mm. Dostępne są cztery element 500mm. Zostaje $6000 - 4 * 500 - 4 * 10 = 3960\text{mm}$.
 - Rozkrój 6000mm: 4x500mm. Odpad $6000 - 4 * 500 = 4000 * 0.003 = 12\$$
 - —————
 - 500mm mieści się czternaście razy w 7000mm. Dostępne są cztery elementy 500mm. zostaje $7000 - 4 * 500 - 4 * 10 = 4960\text{mm}$
 - Rozkrój 7000mm: 4x500mm. Odpad $7000 - 4 * 500 = 5000 * 0.002 = 10\$$
 - —————
 - Wybrano rozkrój 4x500 na długości 7000mm ze względu na mniejszy koszt odpadu
 - Do realizacji pozostało: 0x3500mm, 0x3000mm, 0x2000mm, 0x500mm
- Podsumowanie
 - Rozkroje : 3500mm, 2000mm na długości 7000mm; 3x2000mm, 500mm na długości 7000mm; 4x500 na długości 7000mm.
 - Suma odpadów: $6000 * 0.002 = 12\$$

4.6 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm jest intuicyjny oraz zwraca poprawne wyniki. Główną wadą jest brak świadomości o następnym kroku oraz kolejnych wykrojach. Dla przykładu: Zoszło 1000mm materiału, do dyspozycji (z długości mniejszych niż 1000mm) jest odcinek 900mm oraz dwa elementy 480mm. Algorytm przydzieli odcinek 900mm, jednak lepszym wyborem byłoby użycie dwóch odcinków 480mm.

5 Metoda "Delayed Column Generation"

5.1 Algorytm

$$L \geq l_1 a_1 + \dots + l_m a_m \quad (5.1)$$

$$b_1 a_1 + \dots + b_m a_m > c \quad (5.2)$$

1. Określenie m początkowych rozkrojów i ich kosztu w następujący sposób: dla każdego i wybranie długości bazowej L_j dla której $L_j > l_i$ i określenie i -tego rozkroju jako wycięcie $a_{ii} = \lfloor L_j / l_i \rfloor$ elementów o długości l_i z długości L_j . Koszt i -tego rozkroju będzie równy kosztowi c_j długości L_j z której i -ta operacja wycina odcinki o długości l_i .

2. Uformowanie macierzy B

$$\begin{array}{cccccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_m \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{array}$$

gdzie a_{ii} jest ilością odcinków o długości l_i wyciętych w i -tym rozkroju z długości bazowej o koszcie c_j . Ostatnie m kolumn jest powiązane z rozkrojami. Dane te będą aktualizowane gdy zostanie znaleziony wynik który poprawi rozwiązanie.

Utworzenie $m + 1$ wymiarowych wektorów kolumnowych S_1, \dots, S_m odnoszących się do zmiennych dodatkowych, gdzie S_i posiada same zera z wyjątkiem wiersza $(i+1)$ w którym jest -1 . Dodatkowo utworzenie $m + 1$ wymiarowego wektora kolumnowego N' który jako pierwszy element przyjmuje 0, a w następnych i -tych wierszach posiada wartość N_i .

Obliczenie B^{-1} która wynosi:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & c_1/a_{11} & c_2/a_{22} & \dots & c_m/a_{mm} \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{mm} \end{array}$$

Niech $N = B^{-1} \cdot N'$. Sprawdzając czy pierwszy element z $B^{-1} \cdot P$ jest dodatni można określić czy istnieje możliwość polepszenia rozwiązania. Wektor kolumnowy P jest wektorem złożonym ze zmiennych nieużytych w bieżącym rozwiązaniu, np. pierwszy element to negatywny koszt, a pozostałe m wierszy jest równe zmiennym a_{ij} .

3. Z powyższego punktu wynika że jeśli i -ta zmienna dodatkowa która nie wchodzi w skład rozwiązania może ulepszyć rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $(i + 1)$ element pierwszego wiersza \mathbf{B}^{-1} jest ujemny.
4. Jeśli nie jest możliwe polepszenie rozwiązania należy określić czy wprowadzenie nowego rozkroju ulepszy bieżące rozwiązanie. Jest to możliwe poprzez sprawdzenie czy dla L z kosztem c istnieje rozwiązanie nierówności 5.1 oraz 5.2, gdzie b_1, \dots, b_m to ostatnie m elementów w pierwszym wierszu \mathbf{B}^{-1} . Jeśli te nierówności nie posiadają rozwiązania dla dowolnej długości L_1, \dots, L_k z kosztem odpowiednio c_1, \dots, c_m wtedy bieżące rozwiązanie jest minimum. Rozwiązanie i jego koszt jest określone poprzez \mathbf{N} , gdzie pierwszy wiersz to koszt, a pozostałe m wierszy jest, w kolejności, odpowiednimi wartościami m -tej kolumny z \mathbf{B}^{-1} .

Jeśli nowy rozkrój poprawi rozwiązanie wtedy formowany jest nowy wektor \mathbf{P} ze współczynnikami, w kolejności $-c, a_1, a_2, \dots, a_m$.

5. Wprowadzenie zarówno dodatkowej zmiennej jak i nowego rozkroju może poprawić rozwiązanie. W obu przypadkach \mathbf{P} będzie kolumnowym wektorem ze zmiennymi. Dla określenia nowych \mathbf{B}^{-1} oraz \mathbf{N} które opisują ulepszone rozwiązanie i jego koszt, co pozawala na przejście przez kroki 3, 4 oraz kontynuację kroku 5 w następujący sposób: Obliczenie $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ - niech elementy wynikowe będą elementy y_1, \dots, y_m, y_{m+1} oraz niech elementami bierzącego wektora \mathbf{N} będą x_1, \dots, x_m, x_{m+1} . Ustalenie $i, i \geq 2$ dla każdego $y_i > 0, x_i \geq 0$ oraz x_i/y_i jest najmniejsze i przypisanie tej wartości do zmiennej k . Minimalny stosunek powinien być zerem aby można było wykorzystać metodę degeneracji.

Jeśli stosunek nie jest równy zero wtedy k -ty element wektora \mathbf{P} , y_k będzie elementem wokół którego zajdzie eliminacja Gaussa odbywająca się równocześnie na \mathbf{B}^{-1} , $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ oraz \mathbf{N} . Eliminacja ta przebiega na macierzy $(m + 1) \times (m + 3)$ wymiarowej \mathbf{G} uformowanej z \mathbf{B}^{-1} poprzez dołączenie kolumn $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ oraz \mathbf{N} . Pierwsze $m + 1$ kolumn \mathbf{G} formuje nową macierz \mathbf{B}^{-1} , a kolumna $m + 2$ to nowy wektor \mathbf{N} . Zależność między kolumnami \mathbf{B}^{-1} a rozkrojami lub zmiennymi dodatkowymi jest aktualizowana poprzez usunięcie k -tej kolumny i podmienieniu jej na nowy rozkrój lub zmienną dodatkową.

Degeneracja w razie wystąpienia może być obsługiwana w tradycyjny sposób. Pewne środki ostrożności powinny zostać podjęte w celu uniknięcia cykliczności. Nowa kolumna \mathbf{N}^1 z dodatnimi elementami x'_1, \dots, x'_{m+1} która jest niezależna od \mathbf{N} jest dołączana do \mathbf{G} i wybór takiego $y_i > 0$ dla którego $x_i = 0$ który jest elementem osiowym jest dokonywany na podstawie takiego i dla którego $x'_i > 0$ oraz x'_i/y_i jest najmniejsze. Gdy element osiowy zostanie wybrany, wówczas eliminacja Gaussa zachodzi tak jak w poprzednim przypadku na powiększonej macierzy

G . Dodatkowa kolumna jest przechowywana w G dopóki istnieje takie i dla którego x_i/y_i jest dodatnie i skończone, jeśli warunek ten jest spełniony wówczas kolumna zostaje usunięta. Powinno to nastąpić w przypadku gdy nie istnieje takie i dla którego x_i/y_i oraz x'_i/y_i są dodatnie i skończone. Wówczas powinna zostać dodana kolumna N^2 niezależna od N oraz N^1 . Podobnie dowolna liczba kolumn może zostać dodana i usunięta gdy przestanie być potrzebna. Dopóki kolumny są niezależne w czasie dodawania i pozostają takie po eliminacji Gaussa, nie potrzeba więcej jak m nowych kolumn. Każda dodana kolumna definiuje nowy problem liniowy który eliminuje problem cykliczności tak długo aż degeneracja nie wystąpi.

5.2 Metody użyte w implementacji

5.2.1 Dwufazowa metoda simplex

5.2.2 Metoda podziału i ograniczeń

5.3 Przykład

6 Wyniki

6.1 Porównanie

6.2 Wnioski

6.3 Podsumowanie

7 Opis implementacji

7.1 Architektura

7.2 Java

7.3 Kotlin

7.4 JavaFX

8 Zakończenie

Spis rysunków

2.1	Drzewo wyliczeń możliwych rozwiązań	8
2.2	Drzewo wyliczeń możliwych rozwiązań	10

Literatura

- [1] J. J. Bartholdi. The knapsack problem. In D. Chhajed and T. J. Lowe, editors, *Building Intuition*, chapter 2, pages 19 – 31. Springer US, 2008.
- [2] V. Chvatal. *Linear Programming*. W.H. Freeman and Company, New York, 1984.
- [3] G. B. Dantzig. Discrete variable extremum problems. *Operations Research*, 2:266 – 288, 1957.
- [4] W. Diffie and M. Hellman. New directions in cryptography. *IEEE Transactions on Information Theory*, 22:644 – 654, 1976.
- [5] S. Goddard. Lecture about dynamic programming 0-1 knapsack problem. <http://cse.unl.edu/~goddard/Courses/CSCE310J/>.
- [6] P. J. Kolesar. A branch and bound algorithm for the knapsack problem. *Managment science*, 13:723 – 735, 1967.
- [7] R. Merkle and M. Hellman. Hiding information and signatures in trapdoor knapsacks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 24:525 – 530, 1978.
- [8] D. Pisinger. *Algorithms for Knapsack Problems*. PhD thesis, Dept. of Computer Science, University of Copenhagen, 1995.