

1 Algorytm "Delayed Column Generation" - Gilmore i Gomory

$$L \geq l_1 a_1 + \dots + l_m a_m \quad (1)$$

$$b_1 a_1 + \dots + b_m a_m > c \quad (2)$$

1. Określenie m początkowych rozkrojów i ich kosztu w następujący sposób: dla każdego i wybranie długości bazowej L_j dla której $L_j > l_i$ i określenie i -tego rozkroju jako wycięcie $a_{ii} = \lfloor L_j / l_i \rfloor$ elementów o długości l_i z długości L_j . Koszt i -tego rozkroju będzie równy kosztowi c_j długości L_j z której i -ta operacja wycina odcinki o długości l_i .
2. Uformowanie macierzy B

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_m \\ 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{array}$$

gdzie a_{ii} jest ilością odcinków o długości l_i wyciętych w i -tym rozkroju z długości bazowej o koszcie c_j . Ostatnie m kolumn jest powiązane z rozkrojami. Dane te będą aktualizowane gdy zostanie znaleziony wynik który poprawi rozwiązanie.

Utworzenie $m+1$ wymiarowych wektorów kolumnowych S_1, \dots, S_m odnoszących się do zmiennych dodatkowych, gdzie S_i posiada same zera z wyjątkiem wiersza $(i+1)$ w którym jest -1 . Dodatkowo utworzenie $m+1$ wymiarowego wektora kolumnowego N' który jako pierwszy element przyjmuje 0, a w następnych i -tych wierszach posiada wartość N_i .

Obliczenie B^{-1} która wynosi:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & c_1/a_{11} & c_2/a_{22} & \dots & c_m/a_{mm} \\ 0 & 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/a_{mm} \end{array}$$

Niech $N = B^{-1} \cdot N'$. Sprawdzając czy pierwszy element z $B^{-1} \cdot P$ jest dodatni można określić czy istnieje możliwość polepszenia rozwiązania. Wektor kolumnowy P jest wektorem złożonym ze zmiennych nieużytych w bieżącym rozwiązaniu, np. pierwszy element to negatywny koszt, a pozostałe m wierszy jest równe zmiennym a_{ij} .

3. Z powyższego punktu wynika że jeśli i -ta zmienna dodatkowa która nie wchodzi w skład rozwiązania może ulepszyć rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $(i + 1)$ element pierwszego wiersza \mathbf{B}^{-1} jest ujemny.
4. Jeśli nie jest możliwe polepszenie rozwiązania należy określić czy wprowadzenie nowego rozkroju ulepszy bieżące rozwiązanie. Jest to możliwe poprzez sprawdzenie czy dla L z kosztem c istnieje rozwiązanie nierówności 1 oraz 2, gdzie b_1, \dots, b_m to ostatnie m elementów w pierwszym wierszu \mathbf{B}^{-1} . Jeśli te nierówności nie posiadają rozwiązania dla dowolnej długości L_1, \dots, L_k z kosztem odpowiednio c_1, \dots, c_m wtedy bieżące rozwiązanie jest minimum. Rozwiązanie i jego koszt jest określone poprzez \mathbf{N} , gdzie pierwszy wiersz to koszt, a pozostałe m wierszy jest, w kolejności, odpowiednimi wartościami m -tej kolumny z \mathbf{B}^{-1} .

Jeśli nowy rozkrój poprawi rozwiązanie wtedy formowany jest nowy wektor \mathbf{P} ze współczynnikami, w kolejności $-c, a_1, a_2, \dots, a_m$.

5. Wprowadzenie zarówno dodatkowej zmiennej jak i nowego rozkroju może poprawić rozwiązanie. W obu przypadkach \mathbf{P} będzie kolumnowym wektorem ze zmiennymi. Dla określenia nowych \mathbf{B}^{-1} oraz \mathbf{N} które opisują ulepszone rozwiązanie i jego koszt, co pozawala na przejście przez kroki 3, 4 oraz kontynuację kroku 5 w następujący sposób: Obliczenie $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ - niech elementy wynikowe będą elementy y_1, \dots, y_m, y_{m+1} oraz niech elementami bierzącego wektora \mathbf{N} będą x_1, \dots, x_m, x_{m+1} . Ustalenie $i, i \geq 2$ dla każdego $y_i > 0, x_i \geq 0$ oraz x_i/y_i jest najmniejsze i przypisanie tej wartości do zmiennej k . Minimalny stosunek powinien być zerem aby można było wykorzystać metodę degeneracji.

Jeśli stosunek nie jest równy zero wtedy k -ty element wektora \mathbf{P}, y_k będzie elementem wokół którego zajdzie eliminacja Gaussa odbywająca się równocześnie na $\mathbf{B}^{-1}, \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ oraz \mathbf{N} . Eliminacja ta przebiega na macierzy $(m + 1) \times (m + 3)$ wymiarowej \mathbf{G} uformowanej z \mathbf{B}^{-1} poprzez dołączenie kolumn $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{P}$ oraz \mathbf{N} . Pierwsze $m + 1$ kolumn \mathbf{G} formuje nową macierz \mathbf{B}^{-1} , a kolumna $m + 2$ to nowy wektor \mathbf{N} . Zależność między kolumnami \mathbf{B}^{-1} a rozkrojami lub zmiennymi dodatkowymi jest aktualizowana poprzez usunięcie k -tej kolumny i podmienieniu jej na nowy rozkrój lub zmienną dodatkową.

Degeneracja w razie wystąpienia może być obsługiwana w tradycyjny sposób. Pewne środki ostrożności powinny zostać podjęte w celu uniknięcia cykliczności. Nowa kolumna \mathbf{N}^1 z dodatnimi elementami x'_1, \dots, x'_{m+1} która jest niezależna od \mathbf{N} jest dołączana do \mathbf{G} i wybór takiego $y_i > 0$ dla którego $x_i = 0$ który jest elementem osiowym jest dokonywany na podstawie takiego i dla którego $x'_i > 0$ oraz x'_i/y_i jest najmniejsze. Gdy element osiowy zostanie wybrany, wówczas eliminacja Gaussa zachodzi tak jak w poprzednim przypadku na powiększonej macierzy

\mathbf{G} . Dodatkowa kolumna jest przechowywana w \mathbf{G} dopóki istnieje takie i dla którego x_i/y_i jest dodatnie i skończone, jeśli warunek ten jest spełniony wówczas kolumna zostaje usunięta. Powinno to nastąpić w przypadku gdy nie istnieje takie i dla którego x_i/y_i oraz x'_i/y_i są dodatnie i skończone. Wówczas powinna zostać dodana kolumna \mathbf{N}^2 niezależna od \mathbf{N} oraz \mathbf{N}^1 . Podobnie dowolna liczba kolumn może zostać dodana i usunięta gdy przestanie być potrzebna. Dopóki kolumny są niezależne w czasie dodawania i pozostają takie po eliminacji Gaussa, nie potrzeba więcej jak m nowych kolumn. Każda dodana kolumna definiuje nowy problem liniowy który eliminuje problem cykliczności tak długo aż degeneracja nie wystąpi.