1 Knapsack Problem - Problem plecakowy

Problem plecakowy jest zagadnieniem optymailzacyjnym. Problem ten swoją nazwę wziął z analogii do rzeczywistego problemu pakowania plecaka. Rozwiązując ten problem zarówno w praktyce jak i teorii trzeba zachować reguły określające ładowność plecaka dotyczące objętości i nośności plecaka. Knapsack Problem zaczął być intensywnie badany po pionierskiej pracy Dantziga [?] w późnych latach 50 XX wieku. Znalazł on natychmiast zastosowanie w przemyśle oraz w zarządzaniu finansami. Z teoretycznego punktu widzenia, problem plecakowy często występuję jako relaksacja róznorodnych problemów programowania całkowitego [?].

1.1 Różnorodność problemu plecakowego

Wszystkie elementy z rodziny tego problemu wymagają pewnego zestawu elementów które mogą zostać wybrane w taki sposób że zysk zostanie zmaksymalizowany, a pojemość placaka lub plecaków nie zostanie przekroczona. Wszystkie typy problemu należą do rodziny problemów $NP - trudnych$ co oznacza, że raczej nispotykane jest rozwiązanie problemu z użyciem algorytmów wielomianowych. Możliwe są różne warinaty problemu zależna od rozmieszczenia elementów oraz plecaków:

- *Problem plecakowy 0-1* - każdy element może być wybrany tylko raz. Problem polega na wyborze n elementów dla których suma profitów p_j jest największa, bez konieczności osiągnięcia całkowitej pojemności c. Może być sformułowany jako problem maksymalizacji:

$$\begin{aligned} &\text{maksymalizacja} && \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \\ &\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c, \\ & && x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1}$$

  gdzie x_j jest wartością binarną. Jeżeli $x_j = 1$ wtedy j-ty element powinien znaleźć się w plecaku, w innym przypadku $x_j = 0$.

- *Ograniczony problem plecakowy* - każdy element może być wybrany ograniczoną ilość razy. Zmianą w obecnym problemie względem problemu 0-1 jest ograniczona m_j ilość elementów j:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in \{0, 1 \ldots, m_j\}, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2}$$

- *Nieograniczony problem plecakowy* - jest rozszerzeniem problemu ograniczonego o nielimitowaną liczbę dostępnych elementów:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c, \\ & x_j \in N_0, \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{3}$$

  Każda zmienna x_j w metodzie niograniczonej zostanie ograniczona poprzez pojemność c, gdy waga każdego z elementów jest równa przynajmniej jeden. W ogólnym przypadku transformacja problemu nieograniczonego w ograniczony nie przynosi korzyści

- *Problem plecakowy wielokrotnego wyboru* - elementy powinny być wybierane z klas rozłącznych. Problem ten jest generalizacją problemu 0-1. Możliwy jest wybór dokładnie jednego elementu j z każdej grupy N_i, $i = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizacja} \quad & \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in N_i} p_{ij} x_{ij}, \\ \text{w odniesieniu do} \quad & \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in N_i} w_{ij} x_{ij} \leq c, \\ & \sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & x_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j \in N_i. \end{aligned} \tag{4}$$

  Zmienna binarna $x_{ij} = 1$ określa że j-ty element został wybrany z i-tej grupy. Ograniczenie $\sum_{j \in N_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, k$ wymusza wybór dokładnie jednego elementu z każdej grupy.

- *Wielokrotny problem plecakowy* - mozliwość wypełnienia wielu pleckaków. Jeśli jest możliwość załadowania n elementów do m pleckaów o róznych pojemnościahc c_i w taki sposób że zysk będzie jak największy:

$$\begin{aligned} &\text{maksymalizacja} && \sum_{i=1}^{k} \sum_{j \in N_i} p_{ij} x_{ij}, \\ &\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \leq c_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & && \sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, k, \\ & && x_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5}$$

Zmienna $x_{ij} = 1$ określa że j-ty element powinien zostać umiesczony w i-tym plecaku, podczas gdy ogranicznie $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \leq c_i$ zapewnia że restrykcja dotycząca pojemności plecaka zostanie zachowana. Ogranicznie $\sum_{j \in N_i} x_{ij} \leq 1$ zapewnia że każdy element zostanie wybrany tylko raz.

- *Welokrotnie ograniczony problem plecakowy* - najbardziej ogólny typ który jest problemem programowania całkowitego z dodatnimi współczynnikami:

$$\begin{aligned} &\text{maksymalizacja} && \sum_{j=1}^{n} p_j x_j, \\ &\text{w odniesieniu do} && \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq c_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ & && x_j \in N_0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{6}$$

1.2 Możliwe rozwiązania

Dopóki problem plecakowy należy do problemów $NP\!-\!trudnych$ nie jest znane inne dokładne rozwiązanie niż wyliczenie przestrzeni rozwiązań. Użycie poniższych technik może ograniczyć pracochłonność otrzymania rozwiązania:

- *Metoda podziału i ograniczeń* - pełna enumeracja rozwiązań, ale ograniczenia są użyte do znalezienia węzłów które nie mogą doprowadzić do poprawy rozwiązania. Metoda ta często jest stosowana do problemu plecakowego od momentu gdy Kolesar [?] zaprezentował pierwszy algorytm w 1967 roku.

- *Programownaie dynamiczne* - może być traktowane jako enumeracja wszerz z pewnymi zasadami dominacji. Czasem testy brzegowe są dodawane do algorytmu programowania dynamicznego, wtedy algorytm ten staje się "zaawansowaną" formą metody podziału i ograniczeń.

- *Przestrzeń stanów relaksacji* - jest to relaksacja metody programowania dynamicznego w której współczynniki są skalowane przez ustaloną wartość. Dzięki tej metodzie zmniejsza się czas oraz złożoność algorytmu, ale rozwiązanie traci optymalność. Algorytm ten jest często wykorzystywany jako wydajny algorytm aproksymacji problemu plecakowego.
- *Przetwarzanie wstępne* - pewna liczba zmiennych zostaje ustalona jako wartość optymalana, używając testów brzegowych do wykluczenia pewnych wartości z rozwiązania.