La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R},\mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R},\mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1,x_2) = \bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_T |x_1(t)-x_2(t)|^2\,dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación:

$$x_1(t) = Ae^{jw_0t}$$

$$x_2(t) = Be^{j5w_0t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$. Determine la distancia entre las dos señales.

$$\bar{P}_{x_1-x_2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |Ae^{jw_0t} - Be^{j5w_0t}|^2\,dt$$

$$|x_1(t)-x_2(t)|^2 = |Ae^{jw_0t} - Be^{j5w_0t}|^2$$
$$= A^2 - 2ABe^{j6w_0t} + B^2$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T (A^2 - 2ABe^{j6w_0t} + B^2)\,dt$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_0^T A^2\,dt - 2AB\int_0^T e^{j6w_0t}\,dt + \int_0^T B^2\,dt\right]$$

① $\int_0^T A^2\,dt = A^2T$

② $-2AB\int_0^T e^{jw_0t} = -2AB\int_0^T \frac{e^u}{j6w_0}\,du = \frac{-2AB}{j6w_0}\left[e^{j6(\frac{2\pi}{T})\cdot T} - \overset{1}{\cancel{e^{j6(\frac{2\pi}{T})\cdot 0}}}\right]$

$$= \frac{-2AB}{j6w_0}e^{j12\pi} + \frac{2AB}{j6w_0}$$

$u = j6w_0t$
$du = j6w_0\,dt$
$dt = \frac{du}{j6w_0}$

③ $\int_0^T B^2\,dt = B^2T$

$$A^2T - \frac{2AB}{j6(2\pi/T)}e^{j12\pi} + \frac{2AB}{j6(\frac{2\pi}{T})} + B^2T$$

$$A^2T - \frac{2ABT}{j12\pi}e^{j12\pi} + \frac{2AB}{j12\pi}T + B^2T$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\cancel{T}}\, A^2\cancel{T} - \frac{\cancel{2}AB\cancel{T}}{j\cancel{12}\pi\cancel{T}}e^{j12\pi} + \frac{\cancel{2}AB\cancel{T}}{j\cancel{12}\pi\cancel{T}} + \frac{B^2\cancel{T}}{\cancel{T}}$$

$$P_{x_1-x_2} = A^2 - \frac{AB}{j6\pi}e^{j12\pi} + \frac{AB}{j6\pi} + B^2$$

b). Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$, aplicado a la señal continua $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$?. Realizar la simulación del proceso de discretización. En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

F_s

$W_1 = 1000\pi \qquad f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \qquad T_1 = \frac{1}{500}$

$W_2 = 2000\pi \qquad f_2 = \frac{2000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 1000 \qquad T_2 = \frac{1}{1000}$

$W_3 = 11000\pi \qquad f_3 = \frac{11000\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 5500 \qquad T_3 = \frac{1}{5500}$

No cumple Nyquist

Discretizamos $\quad t = nT_s = \frac{n}{F_s}$

$= 3\cos\frac{1}{5}\pi n + 5\,\text{sen}\,2\pi n + 10\cos\frac{11}{5}\pi n$

$\Omega_1 = \frac{\pi}{5} \qquad \Omega_2 = 2\pi \qquad \Omega_3 = \frac{11}{5} - 2\pi = \frac{\pi}{5}$

$$\boxed{x[n] = 3\cos\frac{\pi}{5}n + 5\,\text{sen}\,2\pi n + 10\cos\frac{\pi}{5}n}$$