Equivalencia entre Péndulo Elástico y Circuito RLC

October 1, 2024

La ecuación diferencial del sistema mecánico se obtiene al considerar el equilibrio de fuerzas ejercidas sobre la masa:

$$F_{\mathrm{S}}(t) + F_{\mathrm{F}}(t) + F_{\mathrm{I}}(t) = F_{\mathrm{E}}(t) \tag{1}$$

Donde $F_{\mathrm{E}}(t)$ es la fuerza externa aplicada, $F_{\mathrm{S}}(t)$ es la fuerza inducida por el resorte:

$$F_{\mathrm{S}}(t) = ky(t) \tag{2}$$

La fuerza de fricción $F_{\mathrm{F}}(t)$ inducida por el amortiguador es:

$$F_{\mathrm{F}}(t) = c\frac{dy(t)}{dt} \tag{3}$$

La fuerza inercial $F_{\mathrm{I}}(t)$ debida a la aceleración de la masa es:

$$F_{\mathrm{I}}(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \tag{4}$$

Al introducir las fuerzas anteriormente halladas en el equilibrio de fuerzas se obtiene la ecuación diferencial que describe el desplazamiento del péndulo elástico amortiguado como consecuencia de la fuerza externa:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_{\mathrm{E}}(t) \tag{5}$$

La ecuación anterior constituye una EDO con coeficientes constantes. Puede interpretarse como un SLIT con la fuerza externa $x(t) = F_{\mathrm{E}}(t)$ como señal de entrada y el desplazamiento de la masa como la señal de salida $y(t)$.

Para encontrar la función de transferencia, debemos aplicar la transformada de Laplace a la ecuación que modela el equilibrio de fuerzas:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_{\mathrm{E}}(t) \tag{6}$$

Aplicando la transformada de Laplace, obtenemos:

$$ms^2Y(s) + csY(s) + kY(s) = F_{\mathrm{E}}(s) \tag{7}$$

Factoreamos $Y(s)$:

$$Y(s)\left(ms^2 + cs + k\right) = F_{\mathrm{E}}(s) \tag{8}$$

Despejamos $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{F_{\mathrm{E}}(s)}{ms^2 + cs + k} \tag{9}$$

Por lo tanto, la **función de transferencia** es:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_{\mathrm{E}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{10}$$

Ahora, al comparar con el circuito RLC serie, cuya ecuación diferencial es:

$$L\frac{d^2u_{\mathrm{o}}(t)}{dt^2} + R\frac{du_{\mathrm{o}}(t)}{dt} + \frac{1}{C}u_{\mathrm{o}}(t) = \frac{1}{C}u_{\mathrm{i}}(t) \tag{11}$$

Donde $u_{\mathrm{i}}(t)$ y $u_{\mathrm{o}}(t)$ son los voltajes de entrada y salida del circuito, respectivamente, obtenemos la función de transferencia del circuito RLC:

$$H(s) = \frac{V_{\mathrm{o}}(s)}{V_{\mathrm{i}}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{12}$$

Finalmente, al comparar las ecuaciones diferenciales de ambos sistemas, obtenemos las siguientes equivalencias:

Circuito RLC	**Péndulo elástico**
$LC = m$	$m = LC$
$RC = c$	$c = RC$
$1 = k$	$k = 1$