# Departamento de Matemáticas
# Cálculo Monovariable
## Taller N°3: Derivadas

**Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez.** **Marzo 4 de 2025**

⋆ Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Usando la definición de derivada calcule:

   *a)* $f'(0)$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

   *b)* $f'(t)$ si $f(t)=t-\dfrac{1}{t}$.

2. Sección 2.7 (páginas 140 - 141). Ejercicio 3.

3. Calcule la derivada de las siguientes funciones

   *a)* $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{1}{x}+1\right)$

   *b)* $z=\dfrac{2x+1}{x^2-1}$

   *c)* $v=(1-t)(1+t^2)^{-1}$

   *d)* $r=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}}+\sqrt{\theta}\right)$

4. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$

   *a)* $y=\dfrac{cosx}{1+senx}$

   *b)* $y=secx\cdot cscx$

5. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

   *a)* $f(t)=t^3+3t,\;\; P(1,4)$

   *b)* $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ en $x=0$.

6. Sección 3.1 (páginas 155 - 159). Ejercicios: 27, 30, 31, 32a), 37, 42.

7. ¿Existe un valor de $b$ de modo que $g(x)=\begin{cases} x+b & si \quad x<0 \\ cosx & si \quad x\geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$?.¿Existe alguno que la haga diferenciable en $x=0$?, justifique su respuesta.

8. Suponga que $u$ y $v$ son funciones de $x$, diferenciables en $x=0$, y que $u(0)=5$, $u'(0)=-3$, $v(0)=-1$ y $v'(0)=2$. Halle en $x=0$

   *a)* $\dfrac{d}{dx}(uv)$

   *b)* $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$

   *c)* $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$

   *d)* $\dfrac{d}{dx}(7v-2u)$

9. ¿La curva $y=x+2cosx$ tiene alguna tangente horizontal en el intervalo $[0,2\pi]$?, en caso afirmativo halle los valores de $x$ donde se presenta. Para comprobar sus resultados visulamente grafique la función con ayuda de un software.

10. Halle los puntos de la curva $y=tanx$, con $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y=2x$. Trace en un mismo plano la curva y la tangente (o tangentes).

11. Sea $f(x) = x + sen(2x)$ y $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Usando un software matemático realice los siguientes items:

   a) Trace la grafica de $f$ en el intervalo $\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

   b) Sea $q(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, cálcule $\lim\limits_{h \to 0} q(h)$.

   c) Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q(h)(x - x_0)$ para $h = 3, 2, 1$. Gráfiquelas juntas con $f$ y la recta tangente en el intervalo indicado en el item $a$).

12. Considere la curva $y = 1 + \sqrt{2}\, cscx + cotx$. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = \frac{\pi}{4}$. Encuentre los puntos en el intervalo de $[2, 3]$ donde la tangente es horizontal.

13. ¿la curva $y = \sqrt{x}$ tiene una tangente que cruza el $eje\, x$ en $x = -1$?. De se así, encuentre el punto de tangencia y la ecuación de la recta?. De lo contrario, expliqué por qué no lo cruza.

14. Considere la curva $y = x^3 - 4x + 1$

   a) Halle la ecuación de la recta perpendicular a la tangente a la curva en el punto $P(2, 1)$.

   b) ¿Cuál es la mínima pendiente que puede tener una tangente a la curva?. ¿En qué punto se obtiene?.

   c) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de pendiente 8.

   d) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la curva.

15. Encuentre las constantes $a$, $b$ y $c$, tales que:

   a) La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el origen.

   b) Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = cx - x^2$ tienen una recta tangente común en el punto $(1, 0)$.

16. Si un gas en un cilidro se mantiene a temperatura constante $T$, la presión $P$ se realciona con el volumen $V$ mediante la fórmula

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

   en donde $a$, $b$, $n$ y $R$ con constantes. Encuentre $\dfrac{dP}{dV}$.

17. Calcule la derivada de $f$ en el valor indicado, si existe.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3x^2 - 9x + 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ ; $\quad x = 2$.

   b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 7x^2 - 5x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$ ; $\quad x = 1$.

18. Halle los valores de las constantes $a$ y $b$ para los cuales la función

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x^2 + 1} + bx & si \quad x \leq 1 \\ 5ax - b + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.

   b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x + 1} + 4 & si \quad x \leq -1 \\ 2ax^2 - bx + 3 & si \quad x > -1 \end{cases}$ es derivable en $x = -1$.

19. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$, si:

   a) $y = 6u - 9,\ u = \frac{1}{2}x^4$

   b) $y = cosu,\ u = senx$

20. Escriba la función dada en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$, luego halle $\dfrac{dy}{dx}$, como función de $x$.

   a) $y = \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{5x}\right)$

   b) $y = sec(tanx)$

21. Determine las derivadas de las siguientes funciones

   a) $s = \dfrac{4}{3\pi} sen(3t) + \dfrac{4}{5\pi} cos(5t)$

   b) $r = -(sec\theta + tan\theta)^{-1}$

   c) $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

   d) $f(\theta) = \left(\dfrac{sen\theta}{1+cos\theta}\right)^2$

   e) $q = cot\left(\dfrac{sent}{t}\right)$

   f) $y = 4sen(\sqrt{1+\sqrt{t}})$

22. Sea $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$. Halle $f'(x)$ y encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en $x = 6$.

23. Considere las funciones $i)$ $f(x) = 3x^2$, $ii)$ $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Para cada una de ellas realice los siguientes items:

   a) Halle $f'(x)$.

   b) Grafique las dos funciones $y = f(x)$ y $y = f'(x)$ en planos distintos, una al lado de la otra.

   c) ¿Para qué valores de $x$, si los hay, $f'$ es positiva?. ¿Para cuáles es igual a cero?. ¿Para cuáles es negativa?.

   d) ¿En qué intervalos, si los hay, la función $f$ es creciente?. ¿En qué intervalos es decreciente?. ¿Cómo se relacionan estos resultados con lo que encontró en el item anterior?.

24. Sea $f$ una función derivable.

   a) Si $g(x) = x^2 f(x^2+x)$, $f(0) = 3$ y $f'(0) = -\frac{1}{6}$, halle $g'(-1)$

   b) Si $g(x) = \dfrac{1}{x} f(\sqrt{x^2+5})$, $f(3) = 2$ y $f'(3) = 6$ halle $g'(-2)$.

25. Suponga que se dan los valores de las funciones $f$ y $g$ con sus derivadas con respecto a $x$ en $x = 2$ y $x = 3$.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 2 | 1/3 | $-3$ |
| 3 | 3 | $-4$ | $2\pi$ | 5 |

   Encuentre las derivadas con respecto a $x$ de las combinaciones siguientes en el valor de $x$ dado.

   a) $f(x) \cdot g(x)$, $x = 3$

   b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x = 2$

   c) $(f \circ g)(x)$, $x = 2$

   d) $\sqrt{f(x)}$, $x = 2$

   e) $\dfrac{1}{g^2(x)}$, $x = 3$

   f) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$, $x = 2$

26. Suponga que se dan los valores de las funciones $f$ y $g$ con sus derivadas con respecto a $x$ en $x = 0$ y $x = 1$.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 5 | 1/3 |
| 1 | 3 | $-4$ | $-1/3$ | $-8/3$ |

   Encuentre las derivadas con respecto a $x$ de las combinaciones siguientes en el valor de $x$ dado.

*a*) $f(x) \cdot g^3(x), \quad x = 0$

*b*) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}, \quad x = 1$

*c*) $(f \circ g)(x), \quad x = 0$

*d*) $(g \circ f)(x), \quad x = 0$

*e*) $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

*f*) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

27. *a*) Encuentre la tangente a la curva $y = 2tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ en $x = 1$.

    *b*) ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener la pendiente de la curva en el intervalo $-2 < x < 2$?. Justifique su respuesta

28. Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces ambas composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ son diferenciables en $x = 0$ aún cuando $g$ no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena?. Explique.

29. Suponga que $u = g(x)$ es diferenciable en $x = 1$ y que $y = f(u)$ es diferenciable en $u = g(1)$. Si la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ tiene una tangente horizontal en $x = 1$, ¿podemos concluir algo sobre la tangente a la gráfica de $g$ en $x = 1$ o sobre la tangente a la gráfica de $f$ en $u = g(1)$?. Justifique su respuesta.

30. Elabore la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. ¿En qué punto la gráfica aparenta tener tangente vertical?. Confirme su respuesta cálculando el límite. (Recuerde que una curva $y = f(x)$ tiene tangente vertical en el punto $x = x_0$ si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$ ó $-\infty$).

31. *a*) Sea $f(x)$ una función que satisface $|f(x)| \leq x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$. Demuestre que $f$ es diferenciable en $x = 0$ y determine $f'(0)$.

    *b*) Demuestre que $f(x) = \begin{cases} x^2\, sen\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en $x = 0$. Encuentre $f'(0)$.

32. La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5$, con $s$ en metros y $t$ en segundos.

    *a*) Encuentre el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio en el intevalo indicado.

    *b*) Determine la rapidez y la aceleración del cuerpo a los dos segundos.

    *c*) ¿En qué momento durante el intervalo, si es que esto ocurre, cambiará la dirección del cuerpo?

33. La posición de un cuerpo que se mueve a lo largo del *eje s* está dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, con $s$ en metros y $t$ en segundos.

    *a*) Determine la aceleración del cuerpo cuando la velocidad es cero.

    *b*) Halle la rapidez del cuerpo si la aceleración es cero.

    *c*) Encuentre la distacia recorrida por el cuerpo entre $t = 0$ y $t = 2$.

34. Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie lunar, a una velocidad de $24\, m/seg$. El proyectil alcanza una altura de $s = 24t - 0{,}8t^2$ metros en $t$ segundos.

    *a*) Encuentre la velocidad y la aceleración de la roca en el tiempo $t$. (En este caso, la aceleración es la gravedad en la Luna).

    *b*) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar el punto más alto?

    *c*) ¿Qué altura alcanza?

    *d*) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar la mitad de la altura máxima?

    *e*) ¿Cuánto tiempo está la roca en el aire?

35. Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañon desde la torre de Pisa, a 179 pies sobre el nivel del piso, la altura de la bala a $t$ segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.

    *a*) ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo $t$?.

    *b*) ¿Cuánto habría tardado la bala en llegar al suelo?.

    *c*) ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?.

36. Sección 3.3 (páginas 179 - 183). Ejercicio 18.

37. El volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ de un globo esférico cambia de acuerdo a su radio.

    *a*) ¿A qué razón cambia el volumen del globo con respecto al radio cuando $r = 2$ pies.

    *b*) ¿Cuánto crece aproximadamente el volumen cuando el radio cambia de 2 a 2,2 pies.

38. Halle la razón de cambio de:

    *a*) El área de un círculo con respecto a su diámetro.

    *b*) El área de un triángulo equilatero, con respecto a uno de sus lados.