Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°4: Derivadas

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Marzo 12 de 2025**

⋆ Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Halle la derivada de las siguientes funciones.

   a) $y = \sqrt[3]{2x}$

   b) $y = x(x^2+1)^{-1/3}$

   c) $y = cos[(1-6t)^{2/3}]$

   d) $y = (sen(\theta+5))^{5/4}$

2. Usando derivación implicíta, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

   a) $x^3 - xy + y^3 = 1$

   b) $(3xy+7)^2 = 6y$

   c) $y\,sen\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - xy$

3. Si $xy + y^2 = 1$, use derivación implícita para hallar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en el punto $(0,-1)$.

4. Verifique que el punto dado está en la curva y encuentre las rectas tangente y normal en el punto.

   a) $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0;\quad (-1,0)$

   b) $x\,sen(2y) = y\,cos(2x);\quad \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

5. Encuentre los dos puntos donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza el $eje\,x$ y muestre que las tangentes a la curva en esos puntos son paralelas. ¿Cuál es la pendiente común de esas tangentes?.

6. Encuentre las rectas normales a la curva $xy + 2x - y = 0$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

7. Considere la parábola $x = y^2$ y el punto $(a,0)$, con $a \geq 0$. Muestre que si hay tres rectas normales a la parábola que pasan por el punto $(a,0)$, entonces $a > \frac{1}{2}$. Observe que el $eje\,x$ siempre es una de esas normales, ¿para qué valor de a son perpendiculares las otras dos normales?.

8. Exploración con computador.

   a) Dado que $x^4 + 4y^2 = 1$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ de dos maneras: resolviendo para y y derivando la función resultante de forma usual y la otra mediante derivación implícita. ¿Obtuvo el mismo resultado en ambos casos?

   b) Resuelva la ecuación $x^4 + 4y^2 = 1$ para y y gráfique juntas la funciones resultantes para obtener la gráfica completa de la ecuación. Después, agregue las gráficas de las primeras derivadas de estas funciones a su pantalla. ¿Podría predecir el comportamiento general de las gráficas de las primeras derivadas a partir de la observación de la gráfica de $x^4 + 4y^2 = 1$?.¿Podría predecir el comportamiento general de la gráfica de $x^4 + 4y^2 = 1$ a partir de la observación de la gráfica de las derivadas?. Justifique sus respuestas.

9. Considere la curva $xy^3 + tan(x+y) = 2$ y el punto $P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$. Use un software matemático para realizar los pasos siguientes:

   a) Gráfique la curva y verifique que el punto dado satisface la ecuación.

b) Usando derivación implícita, halle una fórmula para la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ y evalúela en el punto P.

c) Use la pendiente determinada en el inciso b) para encontrar una ecuación para la recta tangente a la curva en P. Después trace en un mismo gráfico la curva y la recta tangente.

10. Derive las siguientes funciones

a) $y = ln\left(\frac{10}{x}\right)$

b) $y = xe^x - e^x$

c) $y = lnx^3$

d) $y = (lnx)^3$

e) $y = ln(3\theta e^{-\theta})$

f) $y = \dfrac{xlnx}{1 + lnx}$

g) $y = ln\left(\dfrac{\sqrt{sen\theta\, cos\theta}}{1 + 2ln\theta}\right)$

h) $y = ln\left(\sqrt{\dfrac{(3x+1)^5}{(x+2)^{20}}}\right)$

i) $y = e^{sent}\left(lnt^2 + 1\right)$

j) $y = 3^{tan\theta}ln3$

k) $y = log_2(8t^{ln2})$

l) $y = t\, log_3\left(e^{(sent)(ln3)}\right)$

11. Use derivación logarítmica para hallar la derivada.

a) $y = (\sqrt{t})^{\,t}$

b) $y = \sqrt{2\theta + 1}\, tan\theta$

c) $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

d) $y = (lnx)^{\,lnx}$

12. Usando derivación implícita halle $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $ln(xy) = e^{(x+y)}$

b) $e^{2x} = sen(x + 3y)$

c) $tany = e^x + lnx$

13. Halle la derivada de las siguientes funciones

a) $f(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(t) = arcsen\,(e^{-t})$

c) $f(x) = arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) + arccsc\, x$

d) $f(t) = ln(t^2+4) - t\, arctan\left(\dfrac{t}{2}\right)$

14. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se relacionan con el volumen V del cilindro, mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dh}{dt}$ si r es constante?.

b) ¿Cómo se relaciona $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dr}{dt}$ si h es constante?.

c) ¿Cómo se relaciona $\dfrac{dV}{dt}$ con $\dfrac{dr}{dt}$ y $\dfrac{dh}{dt}$ si r y h no son constantes?.

15. El voltaje V (en volts), la corriente I (en amperes) y la resistencia R (en ohms) de un circuito eléctrico se relacionan mediante la ecuación $V = IR$. Suponga que V está creciendo a una tasa de $1\, volts/seg$, mientras que I está decreciendo a una tasa de $\frac{1}{3}\, amperes/seg$. Sea t el tiempo en segundos.

a) ¿Cuál es el valor de $\dfrac{dV}{dt}$?.

b) ¿Cuál es el valor de $\dfrac{dI}{dt}$?.

c) ¿Qué ecuación relaciona $\dfrac{dR}{dt}$ con $\dfrac{dV}{dt}$ y $\dfrac{dI}{dt}$?

d) Encuentre la razón a la que cambia R cuando $V = 12\, volts$ e $I = 2\, amperes$. ¿R está creciendo o decreciendo?.

16. La longitud l de un rectángulo está decreciendo a razón de $2\, cm/seg$ mientra que su ancho w, está creciendo a razón de $2\, cm/seg$. Si $l = 12\, cm$ y $w = 5\, cm$, encuentre las razones de cambio de

a) el área.

b) el perímetro.

c) la longitud de las diagonales del rectángulo.

¿Cuáles de estas magnitudes están creciendo y cuáles decreciendo?

17. Una escalera de 13 pies está apoyada contra una casa cuando su base empieza a resbalarse. En el momento en que la base está a 12 pies de la casa, la base se está moviendo a una razón de $5\,pies/seg$.

    a) ¿Qué tan rápido se está resbalando por la pared la parte superior de la escalera en ese momento?

    b) ¿A qué tasa está cambiando el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo en ese momento?

    c) ¿A qué tasa está cambiando el ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese momento?.

18. Una niña vuela una cometa que está a 300 pies de altura, el viento aleja la cometa horizontalmente a razón de $25\,pies/seg$. ¿Qué tan rápido debe soltar la cuerda la niña cuando la cometa está a 500 pies de ella?.

19. La arena cae a la parte superior de una pila cónica desde una banda transportadora, a una razón de $10\,m^3/min$. La altura de la pila siempre es tres octavos del diámetro de la base. ¿Qué tan rápido cambian

    a) la altura

    b) el radio cuando la pila tiene 4 metros de altura?

20. Se utiliza una cuerda para arrastrar un bote hacia un muelle. Un extremo de la cuerda está atada a la proa de la embarcación y el otro a un aro ubicado en el muelle, en un punto 6 pies arriba de la proa. La cuerda se jala a una razón de $2\,pies/seg$.

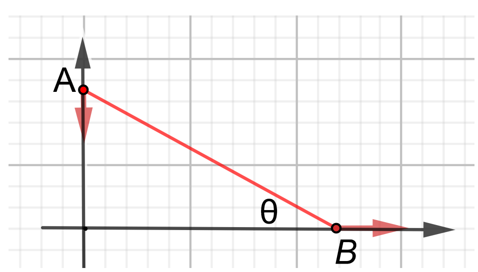
    a) ¿Qué tan rápido se acerca el bote al muelle cuando la cuerda mide 10 pies?

    b) ¿A qué rázon cambia el ángulo formado por la cuerda y la vertical que sale del aro al agua, en ese momento?

21. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ en el primer cuadrante, de manera que sus coordenadas x (medidas en metros) crecen a una razón estable de $10\,m/seg$. ¿Qué tan rápido cambia el ángulo de inclinación θ de la recta que une la partícula con el origen cuando $x = 3\,m$?

22. Un hombre de 6 pies de alto camina a una razón de $5\,pies/seg$ hacia un farol cuya luz está a 16 pies del piso. ¿A qué razón cambia la longitud de su sombra cuando está a 10 pies de la base del farol?. ¿A qué razón se mueve la punta de su sombra?

23. A y B caminan sobre calles rectas que se cruzan en ángulo recto. A se aproxima a la intersección a $2\,m/seg$; B se aleja de la intersección a $1\,m/seg$. ¿A qué razón cambia el ángulo θ cuando A está a $10\,m$ de la intersección y B está a $20\,m$ de la misma?



24. Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$ y x cambia

    a) de 2 a 2,05.

    b) de 2 a 2,01.

25. Encuentre la linealización de $f(x)$ en $x = a$.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad a = 1$

b) $f(x) = cosx, \quad a = 0$

c) $f(x) = cosx, \quad a = \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = (1+x)^k, \quad a = 0.$

e) $f(x) = ln(1+x), \quad a = 0$

f) $f(x) = e^x, \quad a = 0$

26. Encuentre dy si $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

27. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 3$, $x_0 = 2$ y $dx = 0,1$. La función f cambia su valor cuando x cambia de x_0 a $x_0 + dx$. Encuentre Δf, df y el error de aproximación.

28. Use la diferencial para estimar cada uno de los siguientes números dados

a) $e^{-0,015}$

b) $\sqrt[3]{1001}$