Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°3: Derivadas

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Septiembre 5 de 2025**

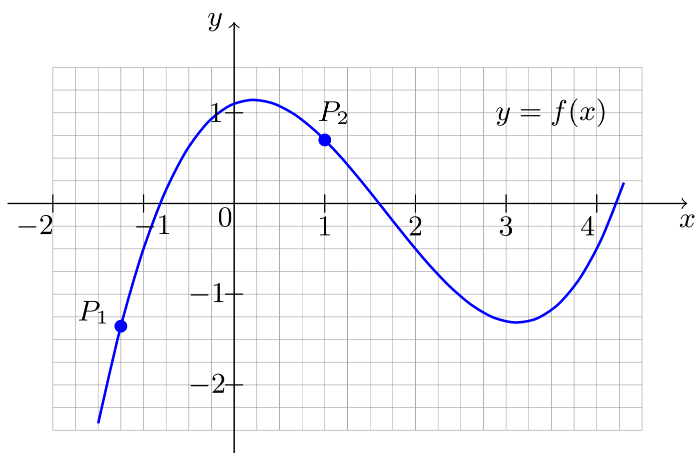
⋆ Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Usando la definición de derivada calcule:

   a) $f'(0)$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

   b) $f'(t)$ si $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$.

2. Use la cuadrícula y una regla para estimar la pendiente de la recta tangente a la cuva en los puntos P_1 y P_2.



3. Calcule la derivada de las siguientes funciones

   a) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x - \dfrac{1}{x} + 1\right)$

   b) $z = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$

   c) $v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$

   d) $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

4. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$

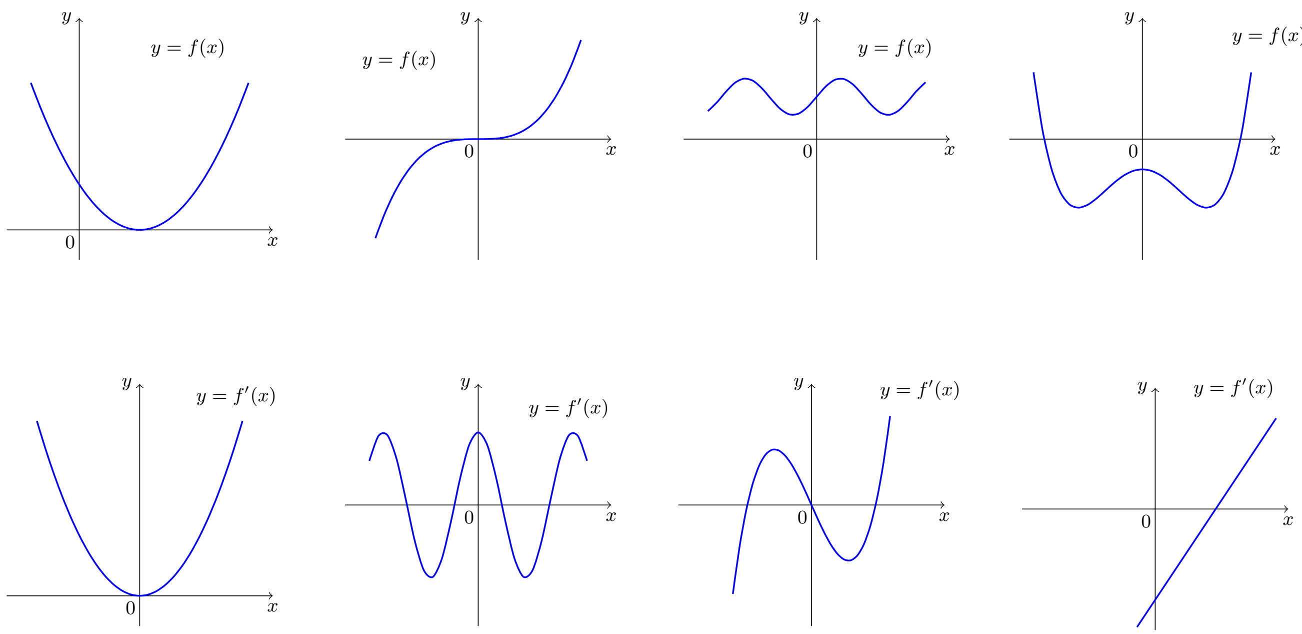
   a) $y = \dfrac{cosx}{1 + senx}$

   b) $y = secx \cdot cscx$

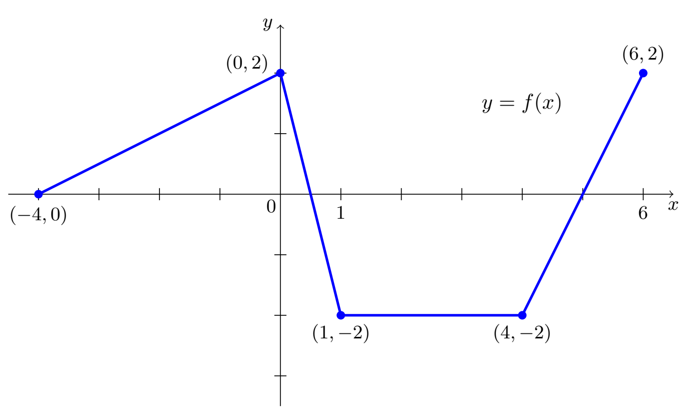
5. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

a) $f(t) = t^3 + 3t, \;\; P(1,4)$ *b*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ en $x = 0$.

6. A continuación se muestra la gráfica de la función f y su derivada. Relacione cada función con su derivada.



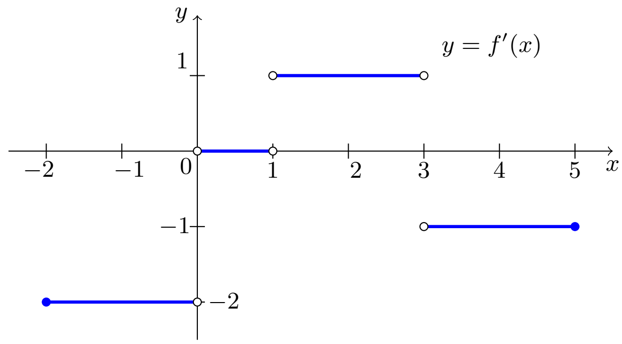
7. A continuación se muestra la gráfica de la función f.



a) ¿En qué puntos del intervalo $[-4, 6]$ no está definida f'?. Justifique su respuesta.

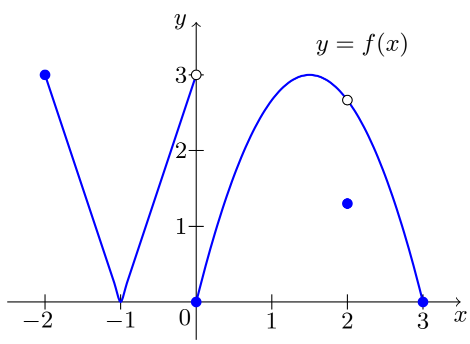
b) Grafique la derivada de f.

8. Sea f una función con dominio el intervalo $[-2, 5]$. A continuación se muestra la gráfica de la derivada de f.



Elabore la gráfica de f considerando que empieza en el punto $(-2, 3)$.

9. A continuación se muestra la gráfica de la función f.



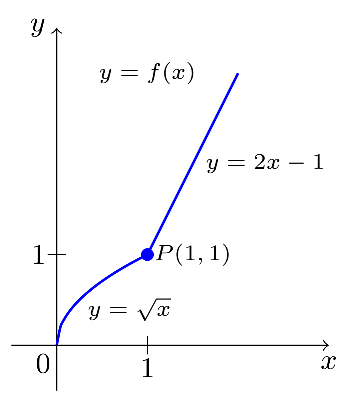
Indique en qué puntos del dominio la función es:

a) diferenciable.

b) continua pero no diferenciable.

c) ni continua ni diferenciable.

10. Compare las derivadas por la derecha y por la izquierda de la función f en el punto $P(1, 1)$ y muestre que f no es diferenciable en ese punto.



11. ¿Existe un valor de b de modo que $g(x) = \begin{cases} x + b & si \quad x < 0 \\ cosx & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$?.¿Existe alguno que la haga diferenciable en $x = 0$?, justifique su respuesta.

12. Suponga que u y v son funciones de x, diferenciables en $x = 0$, y que $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$ y $v'(0) = 2$. Halle en $x = 0$

   a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$ b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$ c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$ d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

13. ¿La curva $y = x + 2cosx$ tiene alguna tangente horizontal en el intervalo $[0, 2\pi]$?, en caso afirmativo halle los valores de x donde se presenta. Para comprobar sus resultados visulamente grafique la función con ayuda de un software.

14. Halle los puntos de la curva $y = tanx$, con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, donde la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$. Trace en un mismo plano la curva y la tangente (o tangentes).

15. Sea $f(x) = x + sen(2x)$ y $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Usando un software matemático realice los siguientes items:

   a) Trace la grafica de f en el intervalo $\left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \leq x \leq (x_0 + 3)$.

   b) Sea $q(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, cálcule $\lim\limits_{h \to 0} q(h)$.

   c) Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q(h)(x - x_0)$ para $h = 3, 2, 1$. Gráfiquelas juntas con f y la recta tangente en el intervalo indicado en el item a).

16. Considere la curva $y = 1 + \sqrt{2}\,cscx + cotx$. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = \frac{\pi}{4}$. Encuentre los puntos en el intervalo de $[2, 3]$ donde la tangente es horizontal.

17. ¿la curva $y = \sqrt{x}$ tiene una tangente que cruza el $eje\,x$ en $x = -1$?. De se así, encuentre el punto de tangencia y la ecuación de la recta?. De lo contrario, expliqué por qué no lo cruza.

18. Considere la curva $y = x^3 - 4x + 1$

   a) Halle la ecuación de la recta perpendicular a la tangente a la curva en el punto $P(2, 1)$.

   b) ¿Cuál es la mínima pendiente que puede tener una tangente a la curva?. ¿En qué punto se obtiene?.

   c) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de pendiente 8.

   d) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la curva.

19. Encuentre las constantes a, b y c, tales que:

   a) La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el origen.

   b) Las curvas $y = x^2 + ax + b$ y $y = cx - x^2$ tienen una recta tangente común en el punto $(1, 0)$.

20. Si un gas en un cilidro se mantiene a temperatura constante T, la presión P se realciona con el volumen V mediante la fórmula

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

   en donde a, b, n y R con constantes. Encuentre $\dfrac{dP}{dV}$.

21. Calcule la derivada de f en el valor indicado, si existe.

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 3x^2 - 9x + 5 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} ; \quad x = 2.$

   b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x + 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 7x^2 - 5x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} ; \quad x = 1.$

22. Halle los valores de las constantes a y b para los cuales la función

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x^2 + 1} + bx & si \quad x \leq 1 \\ 5ax - b + 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$ es derivable en $x = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x+1} + 4 & si \quad x \leq -1 \\ 2ax^2 - bx + 3 & si \quad x > -1 \end{cases}$ es derivable en $x = -1$.

23. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$, si:

   a) $y = 6u - 9, \ u = \frac{1}{2}x^4$

   b) $y = cosu, \ u = senx$

24. Escriba la función dada en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$, luego halle $\dfrac{dy}{dx}$, como función de x.

   a) $y = \left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{1}{5x}\right)$

   b) $y = sec(tanx)$

25. Determine las derivadas de las siguientes funciones

   a) $s = \dfrac{4}{3\pi}sen(3t) + \dfrac{4}{5\pi}cos(5t)$

   b) $r = -(sec\theta + tan\theta)^{-1}$

   c) $y = (2x-5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$

   d) $f(\theta) = \left(\dfrac{sen\theta}{1 + cos\theta}\right)^2$

   e) $q = cot\left(\dfrac{sent}{t}\right)$

   f) $y = 4sen(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$

26. Sea $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}$. Halle $f'(x)$ y encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 6$.

27. Considere las funciones $i)$ $f(x) = 3x^2$, $ii)$ $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Para cada una de ellas realice los siguientes items:

   a) Halle $f'(x)$.

   b) Grafique las dos funciones $y = f(x)$ y $y = f'(x)$ en planos distintos, una al lado de la otra.

   c) ¿Para qué valores de x, si los hay, f' es positiva?. ¿Para cuáles es igual a cero?. ¿Para cuáles es negativa?.

   d) ¿En qué intervalos, si los hay, la función f es creciente?. ¿En qué intervalos es decreciente?. ¿Cómo se relacionan estos resultados con lo que encontró en el item anterior?.

28. Sea f una función derivable.

   a) Si $g(x) = x^2 f(x^2 + x)$, $f(0) = 3$ y $f'(0) = -\frac{1}{6}$, halle $g'(-1)$

   b) Si $g(x) = \dfrac{1}{x}f(\sqrt{x^2+5})$, $f(3) = 2$ y $f'(3) = 6$ halle $g'(-2)$.

29. Suponga que se dan los valores de las funciones f y g con sus derivadas con respecto a x en $x = 2$ y $x = 3$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	1/3	-3
3	3	-4	2π	5

   Encuentre las derivadas con respecto a x de las combinaciones siguientes en el valor de x dado.

   a) $f(x) \cdot g(x), \quad x = 3$

   b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad x = 2$

   c) $(f \circ g)(x), \quad x = 2$

   d) $\sqrt{f(x)}, \quad x = 2$

   e) $\dfrac{1}{g^2(x)}, \quad x = 3$

   f) $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, \quad x = 2$

30. Suponga que se dan los valores de las funciones f y g con sus derivadas con respecto a x en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

   Encuentre las derivadas con respecto a x de las combinaciones siguientes en el valor de x dado.

a) $f(x) \cdot g^3(x), \quad x = 0$

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}, \quad x = 1$

c) $(f \circ g)(x), \quad x = 0$

d) $(g \circ f)(x), \quad x = 0$

e) $(x^{11} + f(x))^{-2}, \quad x = 1$

f) $f(x + g(x)), \quad x = 0$

31. *a*) Encuentre la tangente a la curva $y = 2tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ en $x = 1$.

    b) ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener la pendiente de la curva en el intervalo $-2 < x < 2$?. Justifique su respuesta

32. Suponga que $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Entonces ambas composiciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ son diferenciables en $x = 0$ aún cuando g no sea diferenciable en $x = 0$. ¿Esto contradice la regla de la cadena?. Explique.

33. Suponga que $u = g(x)$ es diferenciable en $x = 1$ y que $y = f(u)$ es diferenciable en $u = g(1)$. Si la gráfica de $y = (f \circ g)(x)$ tiene una tangente horizontal en $x = 1$, ¿podemos concluir algo sobre la tangente a la gráfica de g en $x = 1$ o sobre la tangente a la gráfica de f en $u = g(1)$?. Justifique su respuesta.

34. Elabore la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. ¿En qué punto la gráfica aparenta tener tangente vertical?. Confirme su respuesta cálculando el límite. (Recuerde que una curva $y = f(x)$ tiene tangente vertical en el punto $x = x_0$ si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$ ó $-\infty$).

35. *a*) Sea $f(x)$ una función que satisface $|f(x)| \leq x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$. Demuestre que f es diferenciable en $x = 0$ y determine $f'(0)$.

    b) Demuestre que $f(x) = \begin{cases} x^2\, sen\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en $x = 0$. Encuentre $f'(0)$.

36. La posición de un objeto que se mueve en línea recta está dada por $s = \dfrac{25}{t^2} - \dfrac{5}{t}$, $1 \leq t \leq 5$, con s en metros y t en segundos.

    a) Encuentre el desplazamiento del cuerpo y la velocidad promedio en el intevalo indicado.

    b) Determine la rapidez y la aceleración del cuerpo a los dos segundos.

    c) ¿En qué momento durante el intervalo, si es que esto ocurre, cambiará la dirección del cuerpo?

37. La posición de un cuerpo que se mueve a lo largo del *eje* s está dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, con s en metros y t en segundos.

    a) Determine la aceleración del cuerpo cuando la velocidad es cero.

    b) Halle la rapidez del cuerpo si la aceleración es cero.

    c) Encuentre la distacia recorrida por el cuerpo entre $t = 0$ y $t = 2$.

38. Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie lunar, a una velocidad de $24\, m/seg$. El proyectil alcanza una altura de $s = 24t - 0{,}8t^2$ metros en t segundos.

    a) Encuentre la velocidad y la aceleración de la roca en el tiempo t. (En este caso, la aceleración es la gravedad en la Luna).

    b) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar el punto más alto?

    c) ¿Qué altura alcanza?

    d) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar la mitad de la altura máxima?

    e) ¿Cuánto tiempo está la roca en el aire?

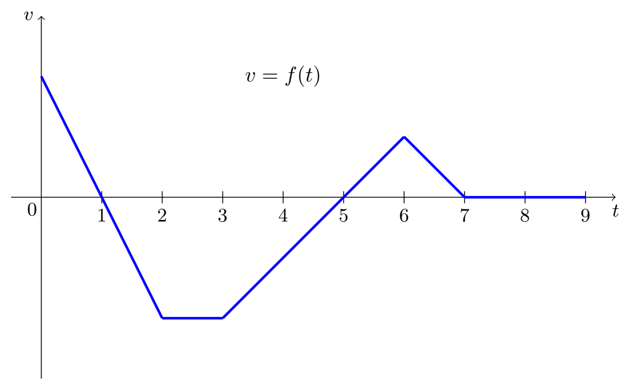
39. Si Galileo hubiera dejado caer una bala de cañon desde la torre de Pisa, a 179 pies sobre el nivel del piso, la altura de la bala a t segundos de la caída habría sido $s = 179 - 16t^2$.

   a) ¿Cuáles habrían sido la velocidad, la rapidez y la aceleración de la bala en el tiempo t?.

   b) ¿Cuánto habría tardado la bala en llegar al suelo?.

   c) ¿Cuál habría sido la velocidad de la bala en el momento del impacto?.

40. La siguiente gráfica muestra la velocidad $v = f(t)$ de una partícula que se mueve sobre una recta, donde t se mide en segundos y v en metros por segundo.



   a) ¿Cuándo se mueve la partícula hacia adelante?. ¿Cuándo lo hace hacia atrás?. ¿Cuándo aumenta la velocidad y cuándo la baja?

   b) ¿En qué momento la aceleración de la partícula es positiva?. ¿En qué momento es negativa?. ¿Cuándo es igual a cero?

   c) ¿Cuándo se mueve la partícula a su mayor rapidez?

   d) ¿En qué momento la partícula queda inmóvil durante más de un instante?

41. El volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ de un globo esférico cambia de acuerdo a su radio.

   a) ¿A qué razón cambia el volumen del globo con respecto al radio cuando $r = 2$ pies.

   b) ¿Cuánto crece aproximadamente el volumen cuando el radio cambia de 2 a 2,2 pies.

42. Halle la razón de cambio de:

   a) El área de un círculo con respecto a su diámetro.

   b) El área de un triángulo equilatero, con respecto a uno de sus lados.