	Facultad de Ciencias Naturales y Exactas - Departamento de Matemáticas	
Universidad del Valle	**Parcial 3 de Cálculo Monovariable - Gr. 12**	**Prof. Juan M. Montoya** **Periodo:** 2025-1
	Fecha: 25 de junio de 2025	**Tiempo:** 2 horas

Nombre: ______________________________ **Código:** ______________

1. **(4pts)** Utilice diferenciales para aproximar
$$\sqrt[3]{28}.$$
Exprese su respuesta con 3 cifras decimales.

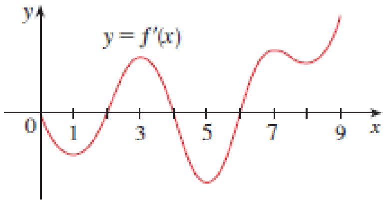
Sea $f(x) = x^{1/3}$. Queremos $f(28)$. Tomemos $a = 27$ cercano a 28, donde $f(a) = 3$.
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3}, \quad f'(27) = \tfrac{1}{3} \cdot 27^{-2/3} = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{27}.$$
La aproximación lineal:
$$f(28) \approx f(27) + f'(27) \cdot (28 - 27) = 3 + \tfrac{1}{27} \cdot 1 = 3 + \tfrac{1}{27} \approx 3{,}037037.$$
A tres cifras decimales: $\boxed{3{,}037}$.

2. **(5pts)** Evalue el siguiente límite
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x$$
Sea
$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x.$$
Observamos:
$$\ln L = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{1/x}$$
Como $\ln L$ es de la forma $\dfrac{0}{0}$, podemos aplicar la regla de L'Hopital. Así,
$$\ln L = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{10}{x^3}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \dfrac{10}{x}}{1 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}} = 3$$
Entonces $\boxed{L = e^3}$.

3. **(5pts)** Demuestre que la ecuación
$$2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$$
tiene exactamente una raíz real.

Defina $g(x) = 2x - 1 - \sin x$. Claramente g es una función continua. Además, $g(0) = -1 < 0$ y $g(1) > 0$. Por el teorema de valor intermedio, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$. Por otro lado, $g'(x) = 2 - \cos x \geq 2 - 1 = 1 > 0$. Por tanto g es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Por el teorema del valor medio existe exactamente un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$. Unica raíz real.

4. **(8pts)** La siguiente gráfica ilustra la primera derivada f' de una función f.



Responda a los siguientes items justificando correctamente.

a) ¿En qué intervalos f es creciente y cuáles es decreciente?
f es creciente $(1,4)$ y $(6,\infty)$ pues en estos intervalos f' es positiva. Por otro lado, f es decreciente en $(0,2)$ y $(4,6)$, pues en estos intervalos f' es negativa.

b) ¿Para qué valores de x, f tiene un máximo local y qué otros valores de x posee un mínimo local?
f tiene un máximo local en $x=4$, pues f pasa de creciente a decreciente; y f tiene mínimos locales en $x=2$ y $x=6$ pues f pasa de decreciente a creciente en estos puntos.

c) ¿Para qué intervalos, f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?
f es cóncava hacia abajo en $(0,1)$, $(3,4)$ y $(7,8)$ pues $f'<0$ en estos intervalos. Por otro lado, f es cóncava hacia arriba en $(1,3)$, $(5,7)$ y $(8,\infty)$.

d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexón de f?
f tiene puntos de inflexión donde hay cambio de concavidad, es decir, en $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=7$ y $x=8$.

5. **(10pts)** Un recipiente rectangular de almacenaje con la parte superior abierta debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado. El material para los costados, \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

Recipiente abierto, volumen $V=10$, largo $=2w$, ancho $=w$, altura $=h$. Volumen:

$$V = 2w\cdot w\cdot h = 2w^2h = 10 \implies h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}.$$

Costo:

$$C(w) = 10\cdot(\text{área base}) + 6\cdot(\text{área de los 4 costados}).$$

Base: $2w^2$. Costados: dos de dimensiones $w\times h$ y dos de $2w\times h$:

$$A_{\text{costados}} = 2wh + 2(2w)h = 6wh = 6w\cdot\frac{5}{w^2} = \frac{30}{w}.$$

Entonces:

$$C(w) = 10\cdot(2w^2) + 6\cdot\frac{30}{w} = 20w^2 + \frac{180}{w}.$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$C'(w) = 40w - 180w^{-2} = 0 \implies 40w^3 - 180 = 0 \implies w^3 = \tfrac{9}{2} \implies w = \sqrt[3]{4{,}5}.$$

Entonces:

$$h = \frac{5}{(\sqrt[3]{4{,}5})^2}, \quad l = 2w = 2\sqrt[3]{4{,}5}.$$

Costo mínimo:

$$C_{\text{mín}} = 20w^2 + \frac{180}{w}\bigg|_{w=\sqrt[3]{4{,}5}} \approx \$163{,}54.$$

6. **(6pts)** Resuelva las siguientes integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int x^5 \ln x\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$. Haga $u = e^x + 1$, $du = e^x\,dx$. Entonces:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln(e^x+1) + C.$$

b) $\displaystyle\int x^5 \ln x\,dx$. Use integración por partes: $u = \ln x$, $dv = x^5 dx$. Entonces $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^6}{6}$. Entonces:

$$\int x^5 \ln x\,dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

7. **(12pts)** Considere la función $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

a) Halle los intervalos donde f es creciente y donde f es decreciente.

b) Halle extremos locales y clasifíquelos.

c) Halle los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

d) Halle puntos de inflexión, si los hay.

a) $\displaystyle f'(x) = \sqrt{2-x^2} + x\cdot\frac{1}{2}(2-x^2)^{-1/2}\cdot(-2x) = \frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}.$

$$f'(x) = 0 \iff 2-2x^2 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Signo:

$$f' > 0 \text{ para } |x| < 1; \quad f' < 0 \text{ para } 1 < |x| \le \sqrt{2}.$$

Entonces creciente en $(-1,1)$, decreciente en $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$.

b) Extremos locales en los puntos críticos:

$$f(-1) = (-1)\sqrt{2-1} = -1, \quad f(1) = 1.$$

Como cambia de creciente a decreciente en $x = 1$, es máximo local $(1,1)$. Para $x = -1$, cambia de decreciente a creciente, mínimo local $(-1,-1)$.

c) Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2-2x^2}{(2-x^2)^{1/2}}\right).$$

Se puede derivar usando cociente o producto; tras simplificar:

$$f''(x) = \frac{-6x(2-x^2)^{1/2} - (2-2x^2)\cdot(-x)(2-x^2)^{-1/2}}{2-x^2}.$$

Simplificando, se determina signo:

$$f''(x) > 0 \text{ en } (-\sqrt{2},0) \text{ y } f''(x) < 0 \text{ en } (0,\sqrt{2}).$$

Por tanto, f es cóncava hacia arriba en $(-\sqrt{2},0)$ y es cóncava hacia abajo en $(0,\sqrt{2})$

d) Punto de inflexión en $(0,0)$ donde cambia concavidad.