Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°6: La integral indefinida y métodos de integración

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Abril 18 de 2025**

Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Encuentre las siguientes integrales indefinidas

   a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$

   b) $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx$

   c) $\displaystyle\int cos(ax+b)\, dx$

   d) $\displaystyle\int \left(2 + tan^2\theta\right) d\theta$

   e) $\displaystyle\int \left(4secx\, tanx - 2sec^2 x\right) dx$

   f) $\displaystyle\int \frac{(2e^x + e^{2x})}{e^x} dx$

2. Resuelva los problemas de valor inicial

   a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2} + x$, $x > 0$; $y(2) = 1$

   b) $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{2}{t^3}$; $\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=1} = 1$, $r(1) = 1$

3. Encuentre una curva $y = f(x)$ tal que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$, que su gráfica pase por el punto $(0,1)$ y tenga una tangente horizontal ahí. ¿Cuántas curvas como esta hay?

4. Movimiento a lo largo de una recta coordenada. Una partícula se mueve sobre una recta coordenada con aceleración $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = 15\sqrt{t} - \dfrac{3}{\sqrt{t}}$, sujeta a las condiciones $\dfrac{ds}{dt} = 4$ y $s = 0$ cuando $t = 1$. Encuentre

   a) La velocidad $v = \dfrac{ds}{dt}$ en términos de t.

   b) La posición s en términos de t.

5. Movimiento con aceleración constante. La ecuación estándar para la posición s de un cuerpo que se mueve con aceleración constante a lo largo de una recta coordenada es

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

   donde v_0 y s_0 son la velocidad y la posición del cuerpo en el instante $t = 0$. Deduzca esta ecuación resolviendo el problema de valor inicial

   Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a$

   Condiciones iniciales: $\dfrac{ds}{dt} = v_0$ y $s = s_0$ cuando $t = 0$.

6. Suponga que $f(x) = \dfrac{d}{dx}(1 - \sqrt{x})$ y $g(x) = \dfrac{d}{dx}(x+2)$. Halle $\displaystyle\int [2f(x) - 3g(x)]\, dx$

7. Exploraciones con computadora. Use un software matemático para resolver el problema de valor inicial

$$y'' = \frac{2}{x} + \sqrt{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0$$

8. Usando el método de sustitución, calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{7x-1}{7x^2-2x+4}\,dx$ d) $\displaystyle\int x^4(3x^5+1)^{1/3}\,dx$ g) $\displaystyle\int 2^{1-t}\,dt$

b) $\displaystyle\int \frac{x arctan\, x^2}{1+x^4}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{(ln\, x)^2}{x}\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{2}{16+25x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{tan\, x}{cos^2 x}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{-2x}{1+x^4}\,dx$ i) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{3-6x^2}}\,dx$

9. Resuelva el siguiente problema de valor inicial: $\dfrac{ds}{dt} = 8sen^2\left(t+\dfrac{\pi}{12}\right),\ s(0)=8.$

10. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta es $a = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \pi^2 cos(\pi t)\ m/seg^2$ para toda t. Si $s=0$ y $v = 8\,m/seg$ cuando $t=0$, encuentre s cuando $t = 1\,seg$.

11. Suponga que los frenos de un automóvil producen una desaceleración constante de $k\,pies/seg^2$.

 a) Determine qué valor de k llevará a un automóvil que viaja a $88\,pies/seg$ a detenerse en una distancia de $100\,pies$ desde el punto donde se pisan los frenos.

 b) Con el mismo valor de k, ¿qué tan lejos llegará un automóvil que viaja a $44\,pies/seg$ antes de detenerse totalmente?

12. La sustitución $u = tanx$ conduce a que $\displaystyle\int sec^2x\, tanx\, dx = \frac{tan^2x}{2} + C$ y la sustitución $u = secx$ nos lleva a que $\displaystyle\int sec^2x\, tanx\, dx = \frac{sec^2x}{2} + C$. ¿Son correctas las dos integraciones? Justifique su respuesta.

13. Usando el método de integración por partes calcule:

 a) $\displaystyle\int t\, sen(4t-1)\,dt$ d) $\displaystyle\int \ln(x+x^2)\,dx$ g) $\displaystyle\int cos\, x\, ln(sen\, x)\,dx$

 b) $\displaystyle\int t\, sec^2 t\,dt$ e) $\displaystyle\int x^2e^{3x}\,dx$ h) $\displaystyle\int arcsen\, x\,dx$

 c) $\displaystyle\int x(\ln x)^2\,dx$ f) $\displaystyle\int e^{ax}cos(bx)\,dx$ i) $\displaystyle\int sen(ln\, x)\,dx$

14. Halle $\displaystyle\int sec^3x\,dx$:

 a) Teniendo en cuenta que sec^3x aparece en la derivada de $sec\, x\, tan\, x$ y que $\displaystyle\int sec\, x\,dx = \ln|sec\, x + tan\, x| + C.$

 b) Usando integración por partes.

15. Usando el método de integración por fracciones parciales, calcule las siguientes integrales

 a) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$ e) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3-1}\,dx$

 b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x^2+2x+1)}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx$

16. Usando fracciones parciales pruebe que: $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

17. Usando sustituciones trigonométricas, calcule las siguientes integrales.

 a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{3x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-9}}$ d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$