Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°2: Continuidad

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Febrero 24 de 2025**

⋆ Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ -2x+4 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$

   a) Elabore la gráfica de la función.

   b) ¿$f(1)$ existe?, ¿$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existe?, ¿es f es continua en $x = 1$?. Explique.

   c) ¿Para qué valores de x la función es continua?.

   d) ¿Como se puede redefinir f en $x = 1$ para remover la discontinuidad?.

2. Para cada función encuentre su dominio y pruebe que son continuas en el.

   a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3-4x+3}$ *b*) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+1} - \dfrac{x^2}{2}$

3. Sea $f(x) = sec(xsec^2x - tan^2x - 1)$. Determine si f es continua en $x = 1$.

4. Determine si las siguientes funciones son continuas en $x = 0$.

   a) $f(x) = \begin{cases} 4x^3-2x-3 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{sen(6x)}{tan(2x)} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$ *b*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{|4x|} & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

5. Sea $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$. Clasifique la discontinuidad en $x = 1$, extienda f de manera que sea continua en $x = 1$.

6. Sea $f(x) = \dfrac{10^x-1}{x}$. Usando un software grafique la función y observe su comportamiento cerca de 0. ¿Es posible extender f de modo que sea continua en 0?.

7. Dé un ejemplo de una función $f(x)$ que sea continua para todos los valores de x, excepto en $x = 2$, en donde tenga una discontinuidad removible.

8. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. Usando el hecho de que todo intervalo no vacío de números reales contiene números racionales e irracionales, explique por qué la función f es discontinua en cada número real.

9. Si la función $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ y $g(x)$ deben ser continuas en $x = 0$?, justifique su respuesta.

10. Dé un ejemplo de funciones f y g continuas en $x = 0$, para las que la composición $f \circ g$ sea discontinua en $x = 0$.

11. Halle los valores de la constante a para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} x - 2a^2 + 5 & \text{si} \quad x \geq -2 \\ \dfrac{5a}{x+1} & \text{si} \quad x < -2 \end{cases}$$

es continua en $x = -2$.

12. Halle los valores de la constante m, para que la función sea continua en $x = m$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x - 7 & \text{si} \quad x \leq m \\ -2x + 3 & \text{si} \quad x > m \end{cases}$$

13. Halle los valores de las constantes a y b para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - a}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 4ax - b & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ ax^2 + b^2 - 6 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es continua.

14. Pruebe que la función f tiene un cero real.

    a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8$

    b) $f(x) = senx + x^2 - 1$

15. Muestre que las ecuaciones dadas tienen solución en los números reales.

    a) $x^3 + \ln x = 2$

    b) $cosx = x$

16. Si $f(x) = x^3 - 8x + 10$, pruebe que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = \pi$.

17. Muestre que la función $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ toma el valor $\dfrac{a+b}{2}$ para algún valor de x.

18. Suponga que f es una funcion continua en el intervalo $[0, 1]$ y que $0 \leq f(x) \leq 1$ para toda $x \in [0, 1]$. Demuestre que existe un número $c \in [0, 1]$ tal que $f(x) = c$.