Introducción Teórica y Uso de GeoGebra para Evaluación Gráfica y Numérica de Integrales

El cálculo integral es una de las herramientas más poderosas del análisis matemático. Permite determinar áreas bajo curvas, resolver problemas de acumulación, estimar valores medios de funciones, e incluso calcular volúmenes de sólidos generados por rotación. Esta tarea aborda varios de estos aspectos desde un enfoque gráfico y numérico, sin utilizar directamente el Teorema Fundamental del Cálculo.

1. Interpretación Geométrica de la Integral Definida

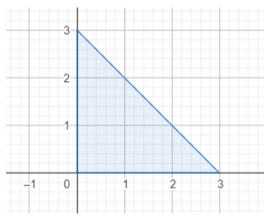
Una integral definida, como

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

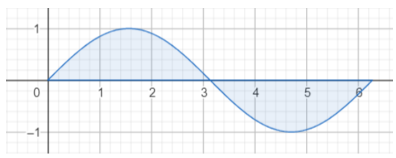
representa el área neta bajo la curva de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Cuando $f(x) \geq 0$ en dicho intervalo, la integral coincide con el área "geométrica". Cuando $f(x)$ es negativa en partes del intervalo, se restan las áreas bajo el eje x.

Por ejemplo:

- $\displaystyle\int_0^3 (3 - x)\,dx$ representa el área de un triángulo de base 3 y altura 3.



- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ es cero porque las áreas positiva y negativa bajo la curva se cancelan simétricamente.



2. Uso de Áreas para Evaluar Integrales (sin usar el Teorema Fundamental)

Se puede usar la geometría elemental para evaluar integrales cuando la gráfica de la función forma figuras conocidas como círculos, triángulos o trapecios. Este enfoque es útil para entender el significado geométrico de la integral.

3. Desigualdad Máx-Mín (Cotas Inferior y Superior)

Cuando no se puede evaluar una integral exactamente, podemos acotar su valor usando el mínimo y máximo de la función en el intervalo de integración:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Donde:

- $m = \text{mín}\{f(x) \text{ en } [a, b]\}$
- $M = \text{máx}\{f(x) \text{ en } [a, b]\}$

Este método proporciona una **estimación por intervalo**, y se puede mejorar dividiendo el intervalo en subintervalos más pequeños.

4. Valor Promedio de una Función

El valor promedio de una función continua $f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ se define como:

$$\text{prom}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

En esta tarea, se evalúan valores promedio mediante sumas en puntos medios, y se busca el valor x que haga que $f(x) = \text{prom}(f)$.

Esto se relaciona con el **teorema del valor medio para integrales**.

5. Intersección de Funciones y Áreas Entre Curvas

Para encontrar el área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$, primero se hallan sus puntos de intersección y luego se calcula:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Dependiendo de cuál función esté por encima, se toma la diferencia correspondiente. El uso de software es crucial para resolver numéricamente las intersecciones y calcular estas áreas.

6. Volumen de Sólidos de Revolución

Cuando se gira una curva en torno a una recta (como $y = c$), se genera un sólido cuya volumen se puede calcular con la fórmula de discos o anillos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x) - c]^2 dx$$

GeoGebra puede ayudarte a visualizar el sólido y trazar cómo varía el volumen al cambiar c. Esto permite identificar valores óptimos de c para minimizar o maximizar el volumen.

¿Qué es GeoGebra y cómo utilizarlo en esta tarea?

GeoGebra es un software interactivo de matemáticas que combina geometría, álgebra, cálculo y gráficos. Para esta tarea, será tu principal herramienta para:

- **Trazar gráficas** de funciones para visualizar áreas o puntos de intersección.
- **Realizar particiones del intervalo** y calcular valores de funciones en puntos medios.
- **Resolver ecuaciones numéricamente**, como $f(x) = \text{prom}(f)$.
- **Estimar áreas y volúmenes** visualmente y de forma numérica.
- **Explorar el comportamiento de funciones complicadas**.

Recomendaciones de Uso

- Usa la **vista gráfica** para trazar funciones.
- Activa la **vista de cálculo simbólico (CAS)** para cálculos numéricos o simbólicos.
- Utiliza comandos como:
  - `Integral(f, a, b)` para evaluar integrales. Además, permite dibujar la región encerrada por f entra a y b.
  - `Interseca(f, g, a, b)` para hallar intersecciones entre f y g en el intervalo (a, b).
  - `SumaSuperior(f, a, b, n)` para graficar los rectángulos superiores de la curva f entre a y b con una partición de tamaño n. Además calcula la Suma de las áreas de todos los rectángulos.
  - `SumaInferior(f, a, b, n)` para graficar los rectángulos inferiores de la curva f entre a y b con una partición de tamaño n. Además calcula la Suma de las áreas de todos los rectángulos.

Conclusión

A través de este enfoque gráfico y computacional, podrás resolver integrales sin recurrir directamente a reglas de antiderivación, comprender mejor la relación entre funciones y sus áreas, estimar valores medios, y explorar la geometría de sólidos de revolución. GeoGebra no solo facilita los cálculos, sino que también mejora la comprensión visual e intuitiva de los conceptos del cálculo integral.

Ejercicios

1. En los siguientes ejercicios, grafique el integrando y use las áreas para evaluar las integrales (No utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluar las integrales).

   a) $\displaystyle\int_{-4}^{0} \sqrt{16 - x^2}\, dx$ *b*) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\, dx$

2. *a*) Use la desigualdad máx-mín para encontrar las cotas superior e inferior de
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$
   b) Use la desigualdad máx-mín para encontrar las cotas superior e inferior de
$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \int_{0,5}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$
   c) Sume las cotas para obtener una mejor estimación de
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

3. Sea $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x}$ con $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \pi\right]$. Use un software matemático para realizar los siguientes pasos:

   a) Trace la gráfica de la función en el intervalo dado.

   b) Haga una partición del intervalo en $n = 100$, 200 y 1000 subintervalos de la misma longitud, y evalúe la función en el punto medio de cada subintervalo.

   c) Calcule el valor promedio de los valores de la función generados en el inciso b).

   d) Resuelva la ecuación $f(x) =$(valor promedio) para x usando el valor promedio calculado en el inciso c) para la partición $n = 1000$.

4. Sean $f(x) = x^2 \cos x$ y $g(x) = x^3 - x$. Use un software matemático para realizar los siguientes pasos.

   a) Trace juntas las curvas para ver cómo son y cuántos puntos de intersección tienen.

   b) Use la resolución numérica de ecuaciones de su software para encontrar todos los puntos de intersección.

   c) Integre en pares de valores de intersecciones consecutivos.

   d) Sume las integrales encontradas en el inciso c).

5. El arco $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$ se hace girar alrededor de la recta $y = c$ para generar el sólido ilustrado en la figura de abajo.

   a) Determine el valor de c que minimiza el volumen del sólido. ¿Cuál es el volumen mínimo?

   b) ¿Cuál es el valor de c en $[0, 1]$ que maximiza el volumen del sólido?

   c) Grafique el volumen del sólido como una función de c, primero para $0 \leq c \leq 1$ y después sobre un dominio más grande. ¿Qué le sucede al volumen del sólido cuando c se aleja de $[0, 1]$? ¿Esto tiene sentido desde el punto de vista físico? Justifique sus respuestas.