Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°1: Límites

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Febrero 10 de 2025**

Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Resuelva los siguientes ejercicios. Estimar los límites que requiera de manera exploratoria usando tablas de valores.

   a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en el punto $P(-1, 3)$.

   b) Un objeto es lanzado desde una torre de 100 metros de altura. Después de t segundos, la altura del objeto es $100 - 4{,}9t^2\, m$. ¿Cuál es su velocidad 2 segundos después de haber sido lanzado?

2. Sea $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$ y $x_0 = 1$. Use un software matemático para realizar los siguientes pasos.

   a) Trace la gráfica de f en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

   b) Si $q(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, cálcule $\lim\limits_{h\to 0} q(h)$.

   c) Defina las rectas secantes $y = f(x_0) + q(h)(x - x_0)$ para $h = 3, 2, 1$. Gráfiquelas juntas con f y la recta tangente en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

3. *a*) Sección 2.1 (páginas 81 - 83). Ejercicios: 2, 3.

   b) Sección 2.4 (páginas 111 -114). Ejercicios: 2, 5.

4. *a*) Si $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$, ¿debe estar definida f en $x = 1$?. De ser así ¿debe ser $f(1) = 5$?. ¿Es posible concluir algo al respecto de los valores de f en $x = 1$?. Explique.

   b) Si $f(1) = 5$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?. De ser así, ¿debe ser $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$?. ¿Es posible concluir algo respecto del $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?.

5. Cálcule los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{x\to 0} (2x - 8)^{1/3}$

   b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5h+4} - 2}{h}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

   d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^4 - 16}$

   e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x + 3}$

   f) $\lim\limits_{x\to -2} (x + 3)\dfrac{|x + 2|}{x + 2}$

   g) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x - 4}{\sqrt{(x-4)^2}}$

   h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{10 - x} - 3}{\sqrt{2 - x} - 1}$

   i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x + 2| - |x - 2|}{x}$

6. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado. Trace la curva y la tangente en una misma gráfica.

   a) $y = 2\sqrt{x},\ P(1, 2)$

   b) $y = x^3,\ P(-2, -8)$

7. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{1}{x - 1}$ con pendiente -1.

8. Suponga que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -2$. Encuentre

   a) $\lim\limits_{x\to c} 2f(x)g(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+3g(x))$ *c*) $\lim\limits_{x\to c} 3x(f(x))^2$ *d*) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

9. Si $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 1$, encuentre $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$.

10. Sea $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 6-2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$.

    Para qué valores de c existe $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

11. Se define la función parte entera de x, denotada $f(x) = [|x|]$, como el mayor entero menor o igual a x. Calcule los siguientes límites.

    a) $\lim\limits_{x\to 4^+}(x-[|x|])$ *b*) $\lim\limits_{x\to 4^-}(x-[|x|])$ *c*) $\lim\limits_{x\to 2}([|x|]+[|-x|])$

12. Considere la función $f(x) = \dfrac{x\, senx}{2-2cosx}$

    a) Se puede probar que $1-\dfrac{x^2}{6} < f(x) < 1$ para x cercano a 0. ¿Qué puede afirmar acerca de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

    b) Usando un software grafique en un mismo plano las funciones $y = 1-\dfrac{x^2}{6}$, $y = f(x)$, $y = 1$, para $-2 \le x \le 2$. Comente el comportamiento de las gráficas cuando $x \to 0$.

13. Sea $f(x) = x^2 cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$

    a) Usando un software grafique f para estimar $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

    b) Confirme mediante una prueba el resultado que obtuvo en la parte *a*).

14. Suponga que $f(x)$ es una función acotada (es decir, existe una constante real $M > 0$, tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in D_f$). Use el teorema del sandwich para probar que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

15. Calcule los siguientes límites.

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(3x)}{4x}$ *d*) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{sen(sen\theta)}{sen\theta}$ *g*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{sen(2x)}{x}$

    b) $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2(cotx)(csc2x)$ *e*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(3x)}{sen(8x)}$ *h*) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r+senr}{2r+7-5senr}$

    c) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t+tcost}{sent\, cost}$ *f*) $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{sen(3y)\, cot(5y)}{y\, cot(4y)}$

16. Calcule $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si existe, para el a indicado

    a) $f(x) = \begin{cases} x^3+x^2-3 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{\sqrt{8+x}-3}{\sqrt{3+x}-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $a = 1$.

    b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \\ 2cot(2x)sen(x) & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $a = 0$.

17. ¿La gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ tiene una tangente en el origen?.Justifique su respuesta.

18. Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-(2/x)}{4+(\sqrt{2}/x^2)}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} xsen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(cos\dfrac{1}{x}\right)$

19. Suponga que f es una función par. Si se sabe que $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=7$, ¿qué puede afirmar acerca de $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$?. Justifique su respuesta.

20. Esboce la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas

a) $f(0)=0$, $f(1)=2$, $f(-1)=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

b) $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$.

21. Encuentre una función que satisfaga las condiciones dadas

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=-\infty$.

22. Halle si existen, asíntotas horizontales y verticales de las funciones dadas.

a) $f(x)=\dfrac{3x}{2x+10}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

c) $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$

23. Calcule los siguientes límites, si existe.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$

24. Halle los valores de la constante a para los cuales $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ existe, si $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\frac{1}{6x+2}-\frac{1}{2}}{2ax} & \text{si} \quad x>0 \\ x^2-2x-3a & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$

25. Halle los valores de la constante m, para los cuales $\lim\limits_{x\to m} f(x)$ existe, si $f(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x\le m \\ \dfrac{-6}{x+2m} & \text{si} \quad x>m \end{cases}$

26. Halle los valores de las constantes a y b, para el cual $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-1}{x}=2$