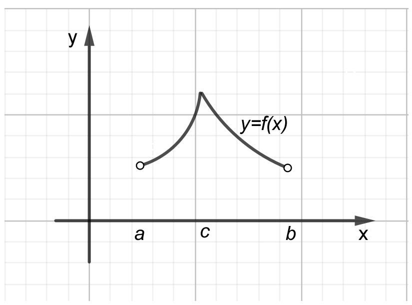
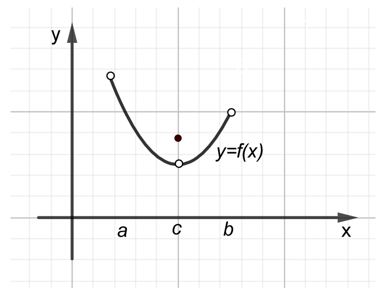
Departamento de Matemáticas
Cálculo Monovariable
Taller N°5: Aplicaciones de la derivada

Profesoras Martha Pinzón y Daniela Vásquez. **Marzo 24 de 2025**

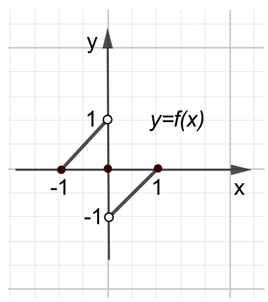
⋆ Algunos de los ejercicios propuestos son seleccionados del texto Cálculo de una variable. G. B. Thomas Jr. Undécima edición, Pearson Addison Wesley, 2006.

1. Determine a partir de la gráfica si la función tiene valores extremos absolutos en el intervalo $[a, b]$. Explique su respuesta.





2. Encuentre los valores extremos de la función f y determine en donde se alcanzan.



3.
   a) Esboce la gráfica de una función continua en $\mathbb{R}$, que no tenga extremos absolutos pero si un máximo y un mínimo local.

   b) Dibuje la gráfica de una función f que sea continua en el intervalo $[-1, 4]$ y tenga las propiedades dadas: mínimo absoluto en -1, máximo absoluto en 3, máximos locales en 0 y 3, mínimo local en 1.

4. Sección 4.1 (páginas 252 - 255). Ejercicios: 11, 12, 13, 14.

5. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de la función en el intervalo dado, indicando dónde se alcanzan.

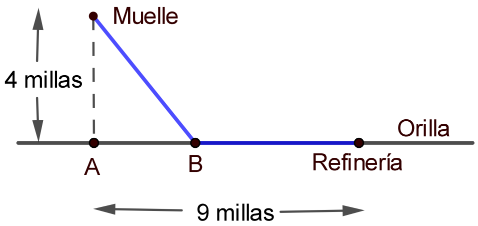
   a) $f(x) = sec\, x\,; \quad x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$

   b) $f(x) = |x+1| + |x-1|\,; \quad x \in [-2, 2]$

   c) $f(x) = x^{1/3}(8-x)\,; \quad x \in [0, 8]$

   d) $f(x) = ln(x^2 + x + 1); \quad x \in [-1, 1]$

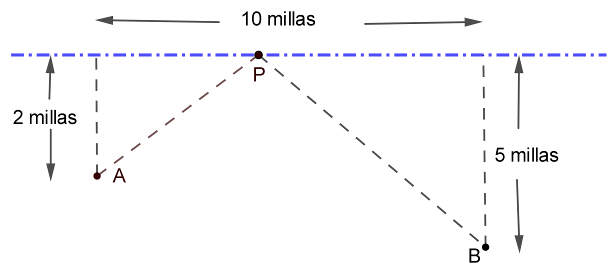
6. Los buques cisterna cargan petróleo en un muelle ubicado a 4 millas de la costa. La refinería más próxima está a 9 millas al este del punto de la costa más cercano al muelle. Se debe construir una tubería que conecte el muelle con la refinería. La tubería cuesta \$300.000 por milla si se construye debajo del agua y \$200.000 por milla si se hace en tierra.



a) Localice el punto B para minimizar el costo de la construcción.

b) Se espera que el costo de la construcción subacuática aumente, mientras que el costo de la construcción en tierra permanezca constante. ¿A qué costo sería mejor construir la tubería directamente hacia el punto A?

7. Dos pueblos están en el lado sur de un río. Se debe ubicar una estación de bombeo para abastecer de agua a los dos pueblos. Una tubería será conectada desde la estación de bombeo a cada pueblo a lo largo de una línea que conecte el pueblo con la estación de bombeo. Ubique la estación de bombeo de manera que se minimice la cantidad de tubería que debe construirse.



8. ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

9. Sea va a construir un campo de atletismo con forma rectangular de x unidades de largo, rematado en ambos extremos por regiones semicirculares de radio r. El campo debe estar acotado por una pista de carreras de 400 metros.

   a) Exprese el área de la parte rectangular del campo como una función sólo de x o sólo de r (queda a su elección).

   b) ¿Qué valores de x y r dan a la parte rectángular el área máxima posible?

10. Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

11. Use un software matemático para determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = \sqrt{x} + cosx$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Realice los siguientes pasos.

    a) Dibuje la función sobre el intervalo para ver su comportamiento ahí.

    b) Encuentre los puntos interiores donde $f'(x) = 0$. También puede dibujar f'.

    c) Encuentre los puntos interiores donde f' no existe.

    d) Evalúe la función en todos los puntos encontrados en los incisos *b*) y *c*) y en los puntos extremos del intervalo.

    e) Encuentre los valores extremos absolutos de la función en el intervalo e identifique en dónde se alcanzan.

12. Sea $f(x) = x\sqrt{x+6}$ con $x \in [-6, 0]$. Verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado y halle los números c que satisfacen la conclusión del teorema.

13. Encuentre los valores de c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio, para las funciones e intervalos indicados.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ *b*) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1, 3]$

14. La función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ es cero en $x = 0$ y $x = 1$ y diferenciable en el intervalo $(0, 1)$, pero su derivada en $(0, 1)$ nunca es cero. ¿Cómo puede ser esto? ¿No dice el teorema de Rolle que la derivada tiene que ser cero en alguna parte del intervalo $(0, 1)$? Justifique su respuesta.

15. ¿Para qué valores de a, m y b la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = 0 \\ -x^2 + 3x + a & \text{si } 0 < x < 1 \\ mx + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$?

16. Use el teorema del valor medio para determinar qué valor es probable para $f(2)$ si suponemos que $f(0) = -3$ y que $f'(x) \leq 5$.

17. Suponga que $f(0) = 5$ y $f'(x) = 2$ para toda x. ¿Debe ser $f(x) = 2x + 5$ para toda x? Justifique su respuesta.

18. Suponga que f es una función diferenciable en el intervalo $[a, b]$ y que $f(b) < f(a)$. Demuestre que f' es negativa en algún punto entre a y b.

19. Para cada función realice los siguientes pasos.

    a) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

    b) Identifique los valores extremos locales de la función, si hay alguno, especificando en dónde se alcanzan.

    c) ¿Cuáles de los valores extremos, si hay alguno, son absolutos?

    d) Apoye sus resultados computacionalmente.

    i) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ *ii*) $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ *iii*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$

20. *a*) Pruebe que la función $f(x) = 2x - cos^2 x + \sqrt{2}$ tiene exactamente una raíz en $\mathbb{R}$.

    b) Muestre que la ecuación $x^9 + 5x = 3$ tiene solución única en los números reales.

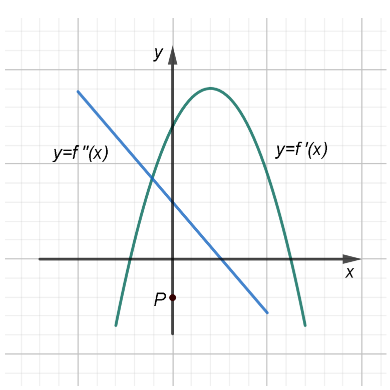
21. Sea $f(x) = sec^2 x - 2 tan x$, con $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Usando una computadora

    a) Encuentre los extremos locales de f en el intervalo dado y diga dónde se alcanzan.

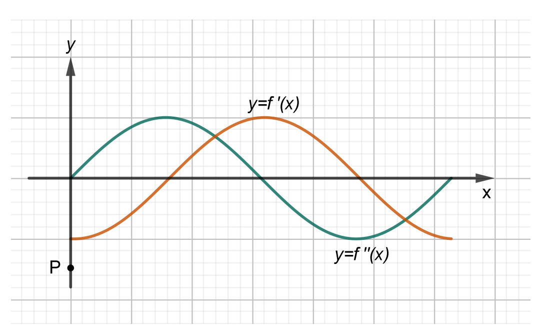
    b) Grafique juntas la función y su derivada. Comente el comportamiento de f en relación con el signo y los valores de f'.

22. A continuación se muestran las gráficas de la primera y segunda derivada de una función $y = f(x)$. Copie la figura y añádale un esbozo de la gráfica aproximada de f, dado que la gráfica pasa por el punto P.

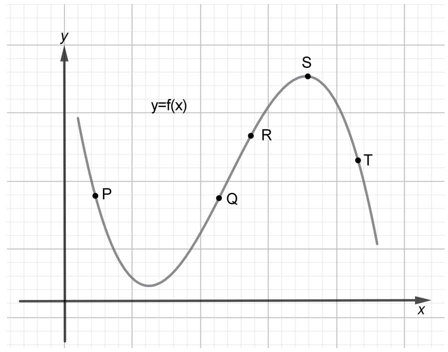
a)



b)



23. La figura siguiente muestra una porción de la gráfica de una función dos veces diferenciable $y = f(x)$. En cada uno de los cinco puntos etiquetados, clasifique y' y y'' como positiva, negativa o cero.



24. Grafique una función continua $y = g(x)$ tal que

   a) $g(2) = 2$, $0 < g'(x) < 1$ para $x < 2$, $g'(x) \to 1^-$ cuando $x \to 2^-$, $-1 < g'(x) < 0$ para $x > 2$ y $g'(x) \to -1^+$ cuando $x \to 2^+$.

   b) $g(2) = 2$, $g'(x) < 0$ para $x < 2$, $g'(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$, $g'(x) > 0$ para $x > 2$ y $g'(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$.

25. Grafique una función dos veces diferenciable $y = f(x)$ con las propiedades siguientes. Señale las coordenadas cuando sea posible.

x	y	Derivadas
$x < 2$		$y' < 0,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\ y'' < 0$

26. Halle el valor de la constante c, para que la gráfica de $f(x) = cx^2 + \dfrac{1}{x^2}$ tenga un punto de inflexión en $(1, f(1))$.

27. Elabore la gráfica de las siguientes funciones indicando: Dominio, rango, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores extremos, intervalos de concavidad hacia arriba, hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas horizontales y asíntotas verticales si existen.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

   b) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$

   c) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{1 + x^2}$

   d) $f(x) = e^{-x^2}$

28. Un sembradío rectangular mide $216\,m^2$, se quiere encerrar con una cerca y dividirlo en dos partes iguales mediante otra cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del rectángulo exterior requieren la menor longitud total de la cerca? ¿Cuánta cerca se requerirá?

29. La fundidora en donde usted trabaja ha sido contratada para diseñar y construir un tanque rectangular de acero, de base cuadrada, abierto por arriba y con una capacidad de $500\,pies^3$. El tanque se tiene que hacer soldando placas delgadas de acero a lo largo de sus bordes. Como ingeniero de producción, su trabajo consiste en determinar las dimensiones de la base y la altura que harán que el tanque pese lo menos posible.

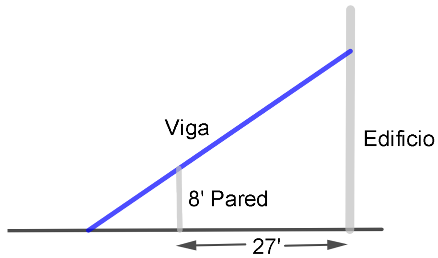
   a) ¿Qué dimensiones le dirá al taller que use?

   b) Describa brevemente cómo tomó en cuenta el peso en su cálculo.

30. Se está diseñando un cartel rectangular cuya área de impresión es $50\, pulg^2$, con márgenes superior e inferior de 4 pulgadas y márgenes laterales de 2 pulgadas cada uno. ¿Qué dimensiones debe tener el cartel para minimizar la cantidad de papel usada?

31. Se quiere construir un silo (sin incluir la base) en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción por unidad cuadrada del área superficial es dos veces mayor para la semiesfera que para la pared cilíndrica. Determine las dimensiones que se deben usar si el volumen es fijo y el costo de construcción debe mantenerse al mínimo. Desprecie el espesor del silo y los desperdicios en la construcción.

32. La pared de 8 pies que se muestra en la figura está a 27 pies del edificio. Encuentre la viga recta de longitud más corta que alcance el lado del edificio desde el piso que está al otro lado de la pared.



33. ¿Que puntos de la gráfica de $y^2 - x^2 = 1$ están más cerca del punto $P(2, 0)$?.

34. Calcule los siguientes límites, usando la regla de L'Hospital

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - (3x+1)\sqrt{x} + 2}{x-1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2 + x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 + sen\, x - e^x}{(arctan\, x)^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\, tan\left(\frac{1}{x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} (tan\, x)^{tan 2x}$

35. La regla de L'Hôpital no ayuda para calcular $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$. Inténtelo y observe que sólo se mantienen ciclos repetitivos. Encuente el valor del límite de otra manera.

36. a) Estime el valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$. Usando un software grafique la función $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ en un intervalo convenientemente grande de valores de x.

b) Ahora confirme su estimación encontrando el límite con la regla de L'Hôpital. Como primer paso, multiplique $f(x)$ por la fracción $\dfrac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x + \sqrt{x^2 + x}}$ y simplifique el nuevo numerador.