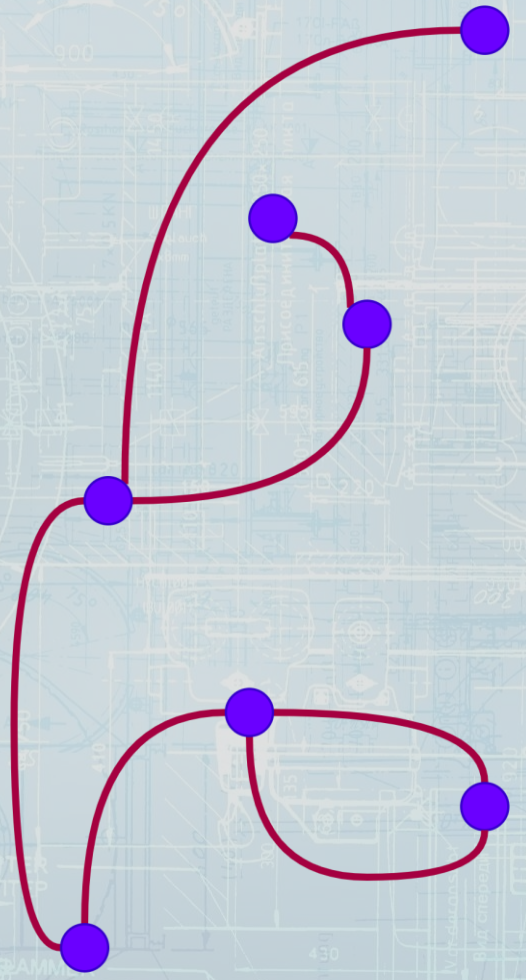
Professor
Fausto Cintra
professor@faustocintra.com.br

Grafos

GRAFOS?!

Grafo



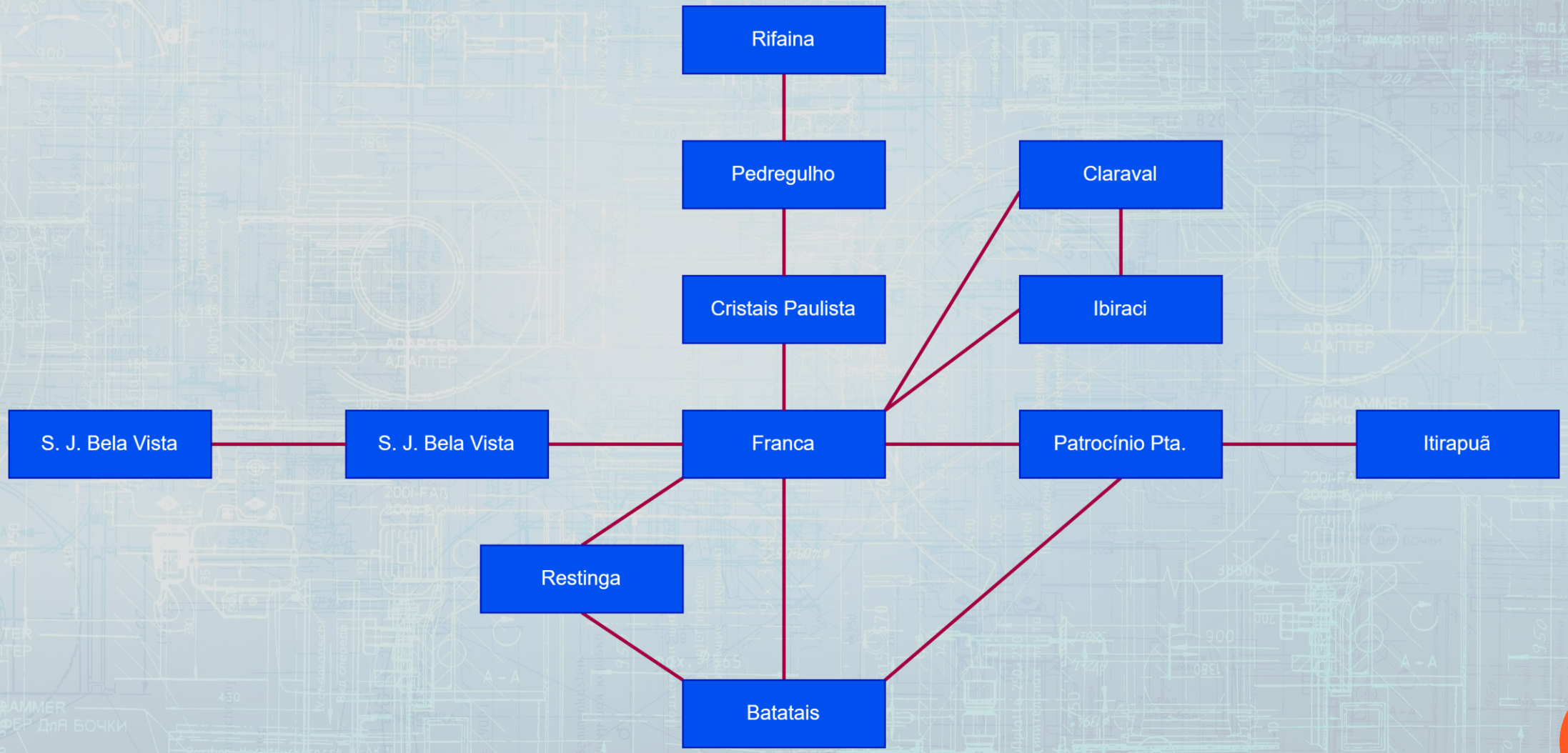
- Um grafo é uma entidade formada por:
  - um conjunto de pontos (**vértices** ou **nodos**); e
  - um conjunto de ligações (**arestas** ou **arcos**) entre esses pontos
- É uma abstração que permite codificar **relacionamentos** entre pares de **objetos**

Objetos e relacionamentos

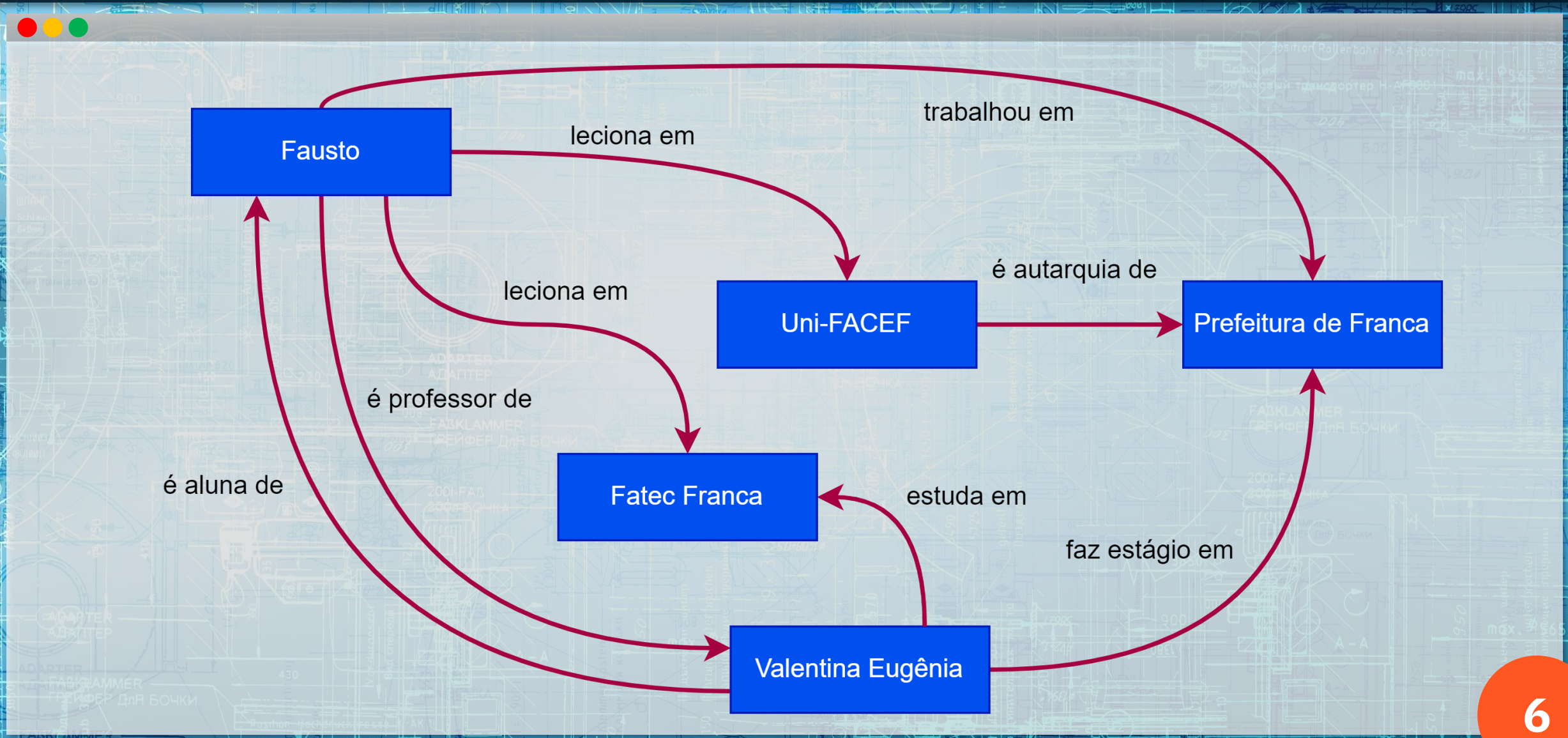
- Que objetos?
  - Pessoas, cidades, empresas, países, páginas *web*, filmes, etc.
- Que relacionamentos?
  - Amizade, conectividade, produção, língua falada, etc.

Mesmo sendo abstratos, os grafos podem ser representados graficamente por meio de diagramas. É daí que derivam seu nome.

Exemplo de grafo não direcionado

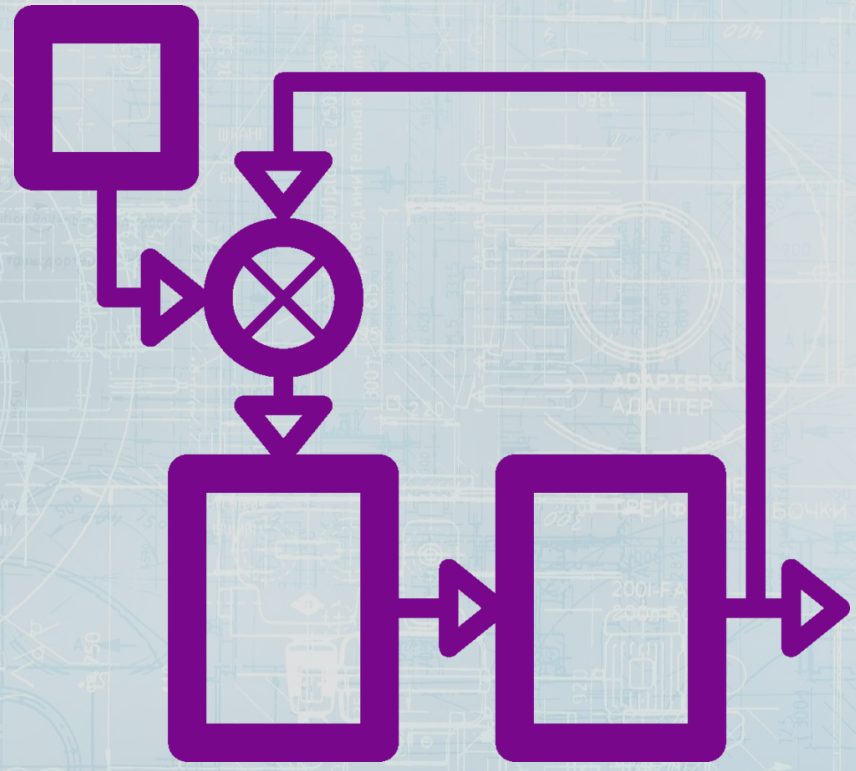


Exemplo de grafo direcionado (digrafo)



POR QUE ESTUDAR GRAFOS?

Importância dos grafos



- Constituem uma importante ferramenta matemática com aplicação em diversas áreas do conhecimento
- São muito utilizadas na definição (modelagem) e resolução de problemas
  - Há centenas de problemas computacionais que empregam grafos com sucesso em sua resolução

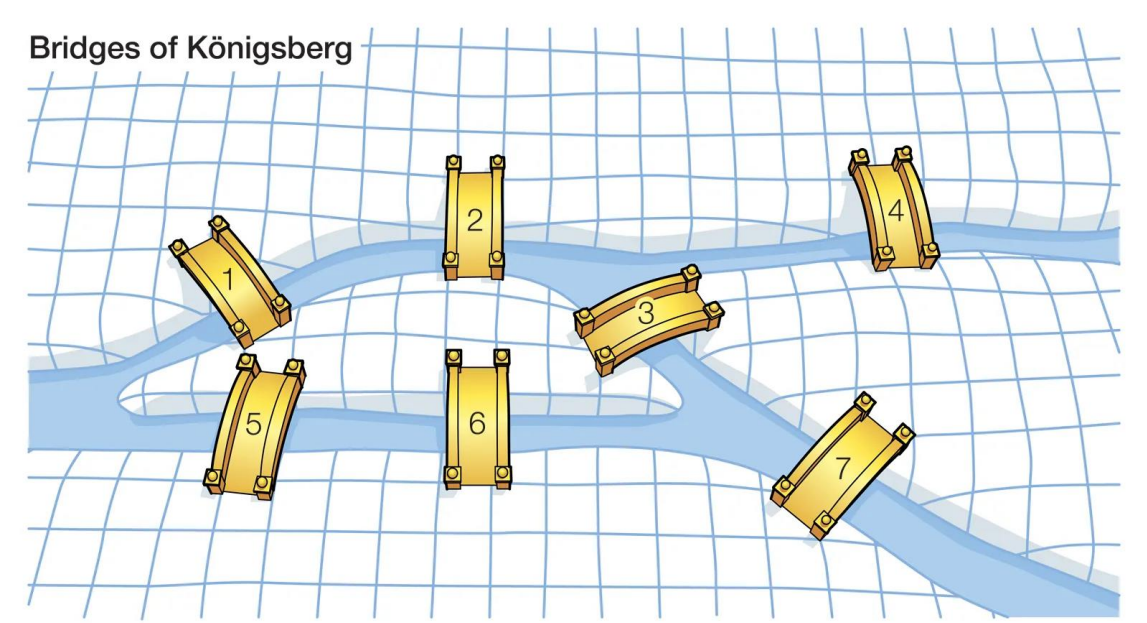
Um canivete suíço

- Os grafos podem ser usados ou representados como:
  - ferramenta de modelagem
  - estrutura de dados
  - ferramenta para a resolução de problemas
  - ferramenta utilizada na abstração de problemas computacionais

Grafos são uma ferramenta fundamental para a ciência da computação

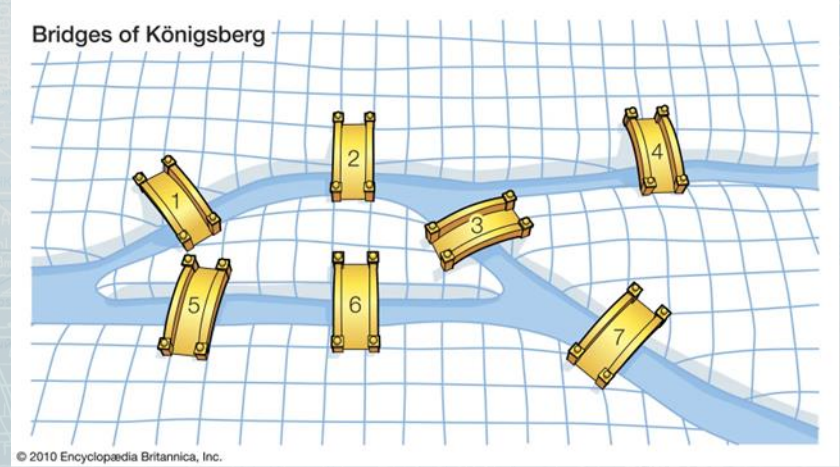
O problema das pontes de Königsberg (1)

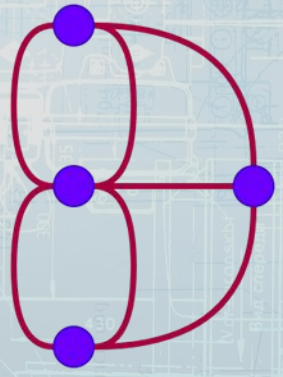
- Em meados do século XVIII, a cidade de Königsberg (atual Kaliningrado, na Rússia) tinha sete pontes que interligavam seu território por sobre o rio Pregel
- Seus habitantes indagavam se seria possível fazer um percurso, percorrendo as diferentes partes da cidade, cruzando todas as pontes uma única vez



© 2010 Encyclopædia Britannica, Inc.

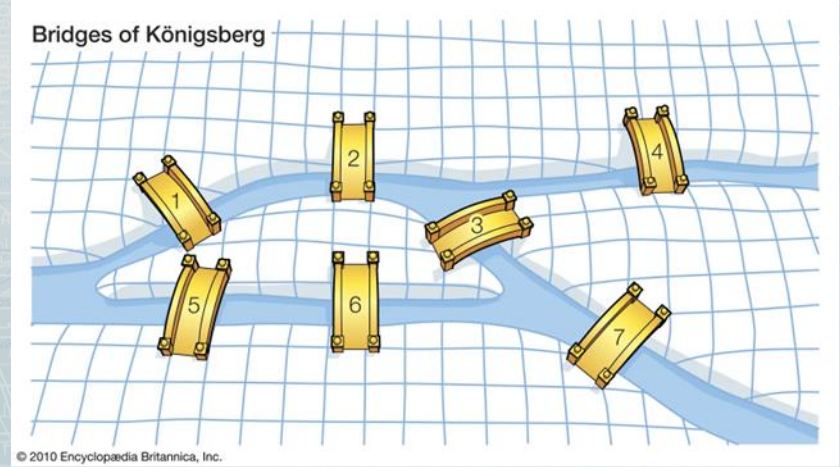
O problema das pontes de Königsberg (2)

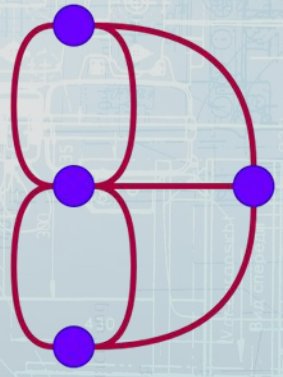




- Leonhard Euler deu início à Teoria dos Grafos ao tentar resolver exatamente este problema, em 1735
- Para tanto, ele criou um modelo para representar o problema, abstraindo detalhes irrelevantes, como o tipo das pontes, a área e o formato de cada território, etc.
- Nesse trabalho, ele acabou chegando a um modelo de grafos
  - As massas de terra foram representadas como vértices
  - As pontes tornaram-se arestas

O problema das pontes de Königsberg (3)

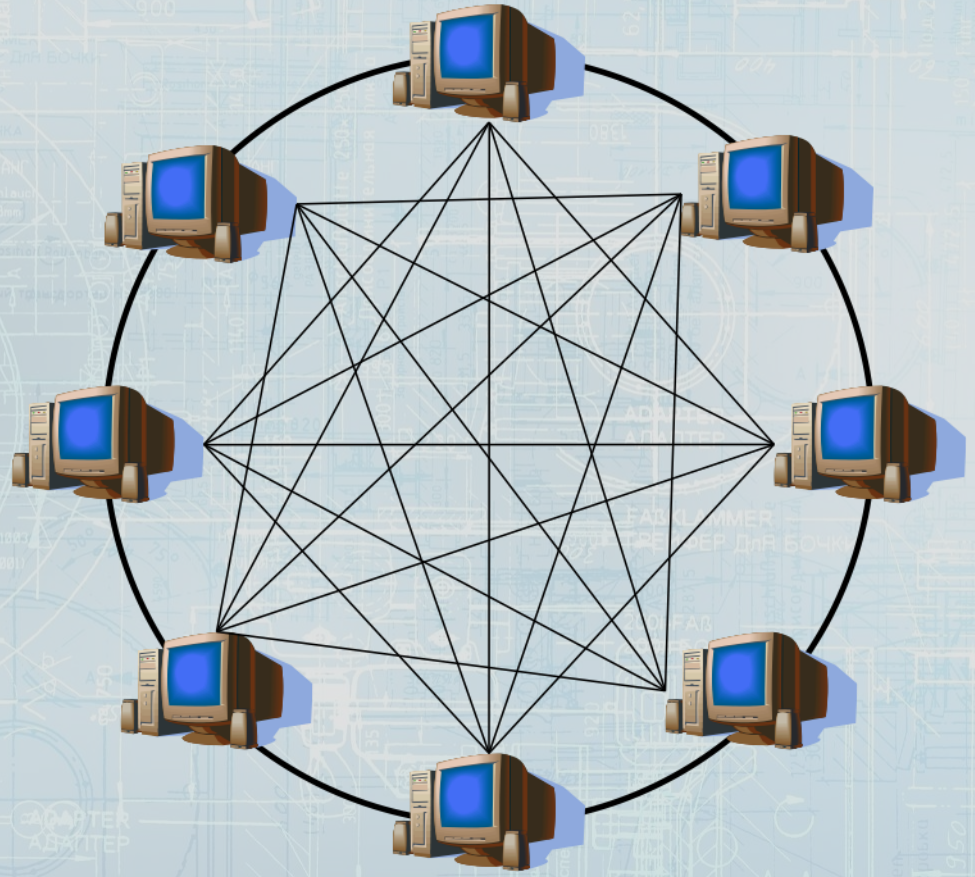




- Um caminho completo, que não percorre a mesma aresta mais de uma vez tornou-se conhecido como **trilha de Euler** ou **circuito euleriano**

Pergunta: o grafo que representa a conexão entre as pontes de Königsberg constitui um circuito euleriano?

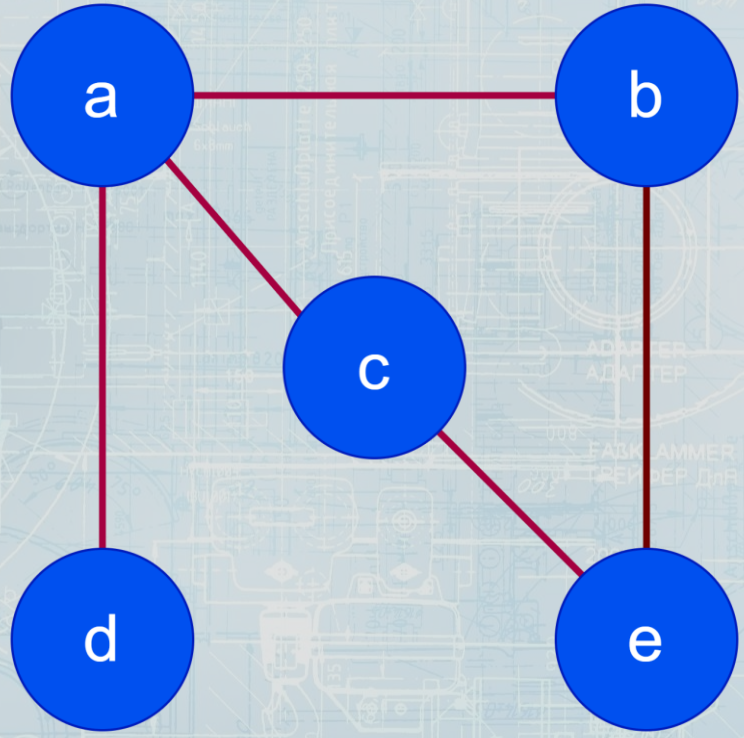
Grafos no mundo real



- Redes de computadores
- Árvores genealógicas e organogramas
- Conexões de voos comerciais
- Relacionamentos em bancos de dados
- Árvores (estrutura de dados)
- Fluxo de um programa
- Redes sociais

CONCEITOS FUNDAMENTAIS

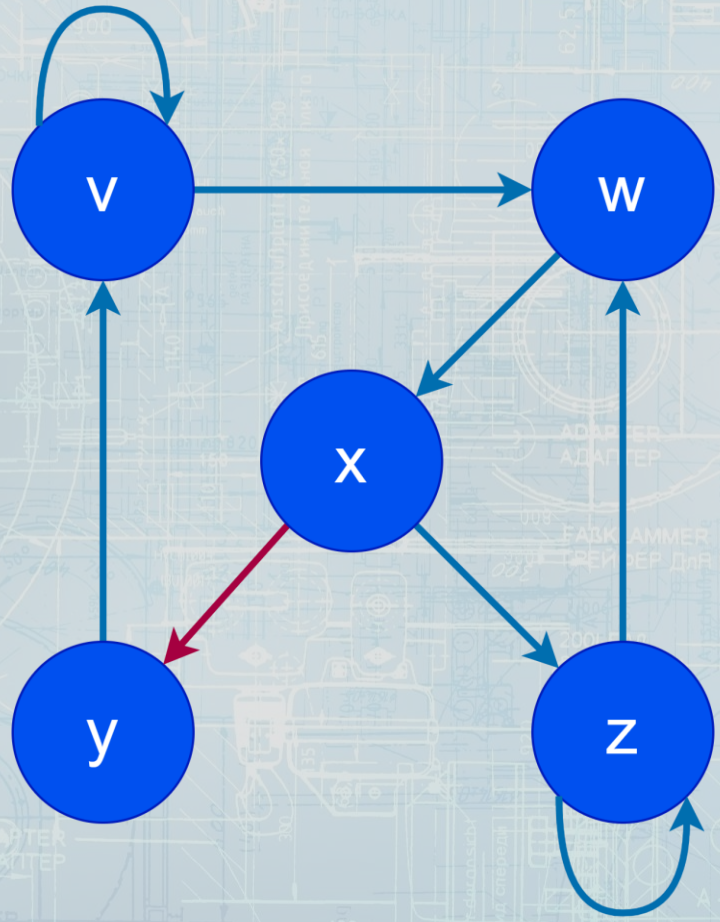
Grafo



- Um grafo é definido como um par (V, A)
  - V é o conjunto de **vértices** ou **nós** ou **nodos**
  - A é o conjunto de **arestas** ou **arcos**

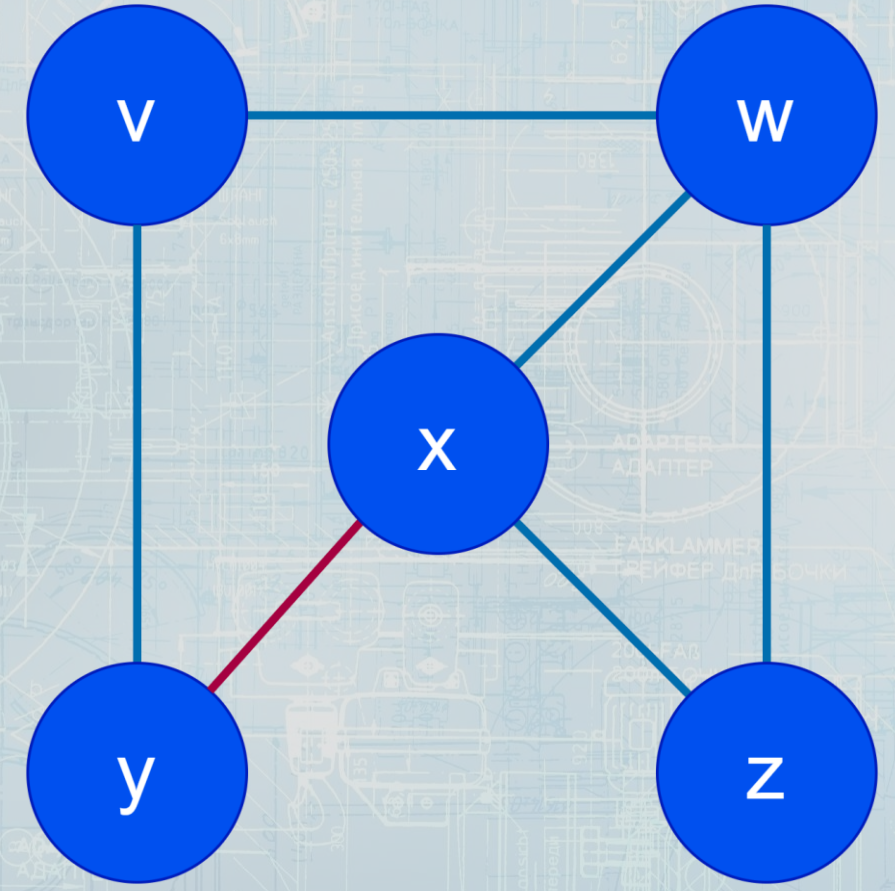
- No grafo ao lado:
  - $V = \{a, b, c, d, e\}$
  - $A = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (c, e)\}$

Grafo direcionado (ou dígrafo)



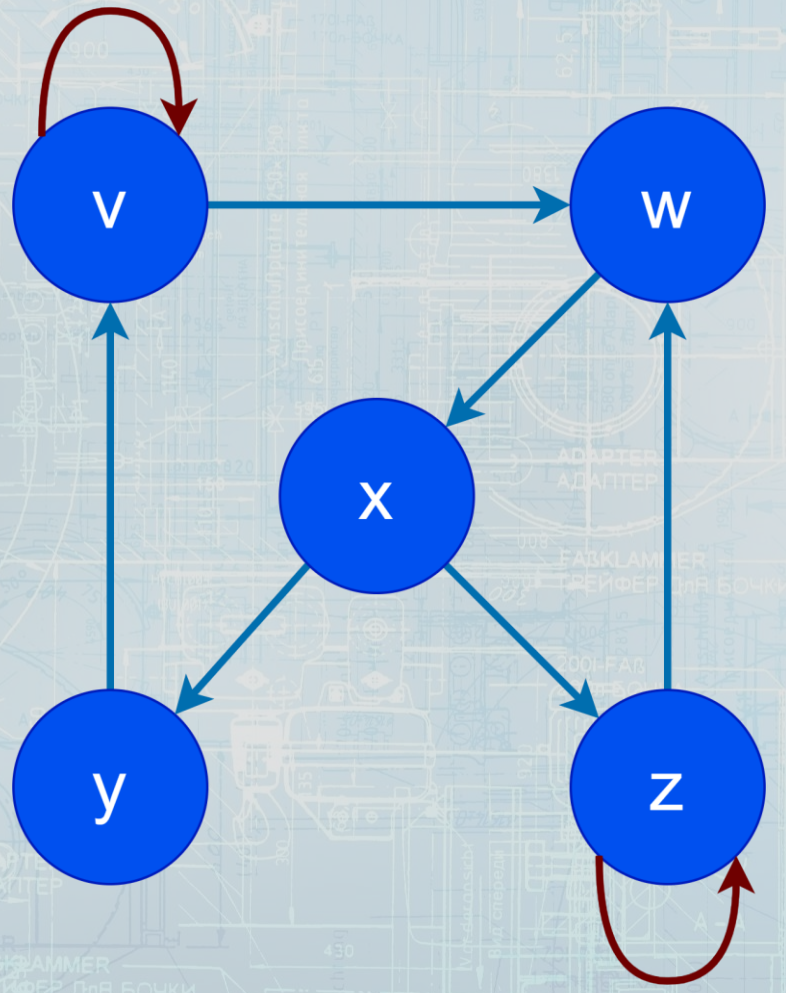
- São grafos em que as arestas possuem uma direção definida
  - Aresta $(x, y) \neq (y, x)$

Grafo não-direcionado



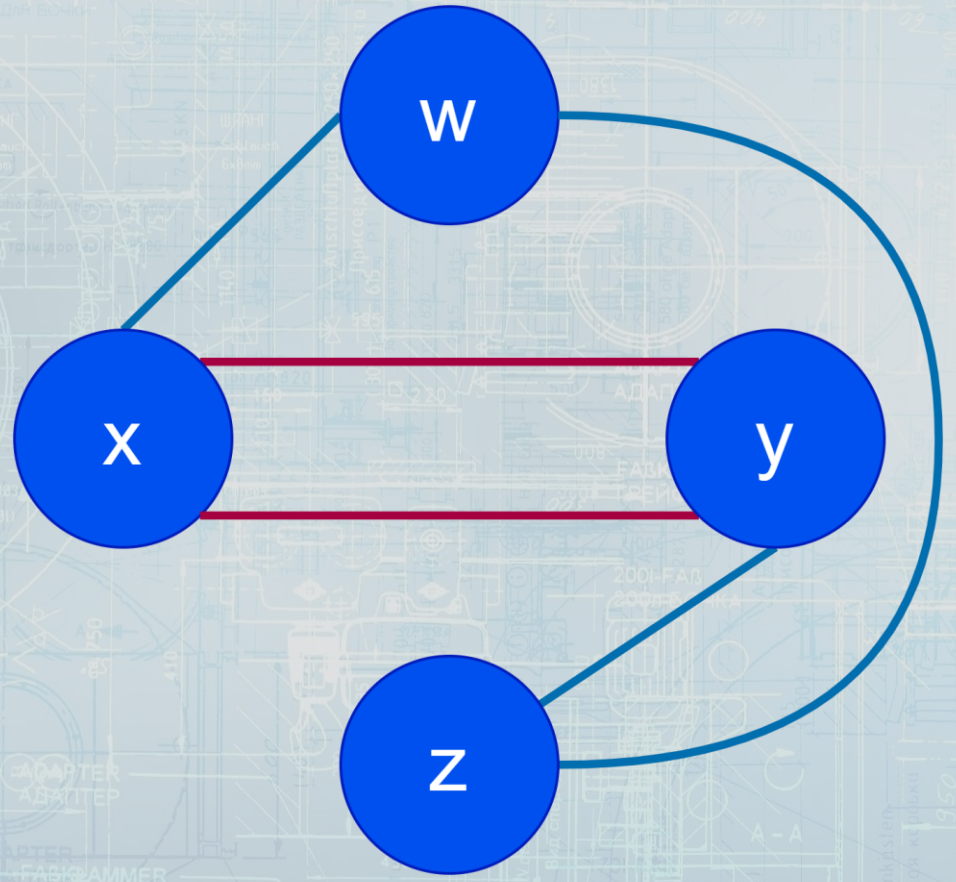
- São grafos em que as arestas não têm possuem uma direção, podendo ser interpretados em ambos os sentidos
  - Aresta $(x, y) = (y, x)$
- Não permite *self-loops*

Laço ou *self-loop*



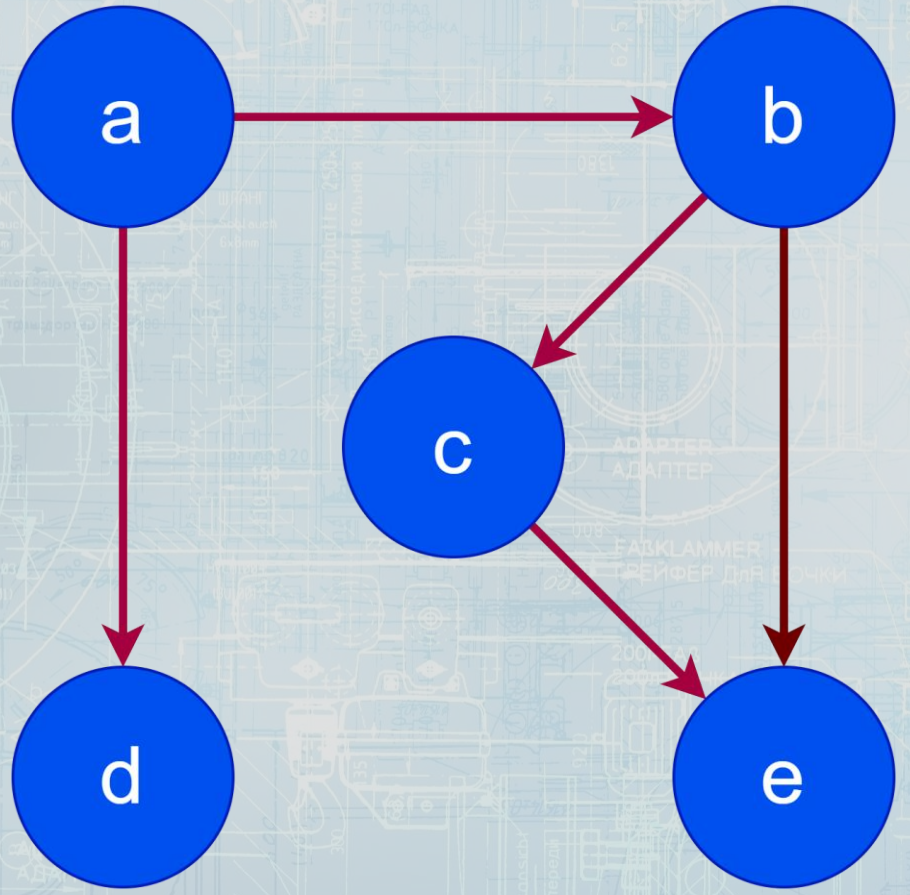
- Ocorre quando um vértice possui uma aresta para si mesmo
  - Ou seja, dado um vértice *v*, existe a aresta (*v*, *v*)

Arestas múltiplas ou paralelas



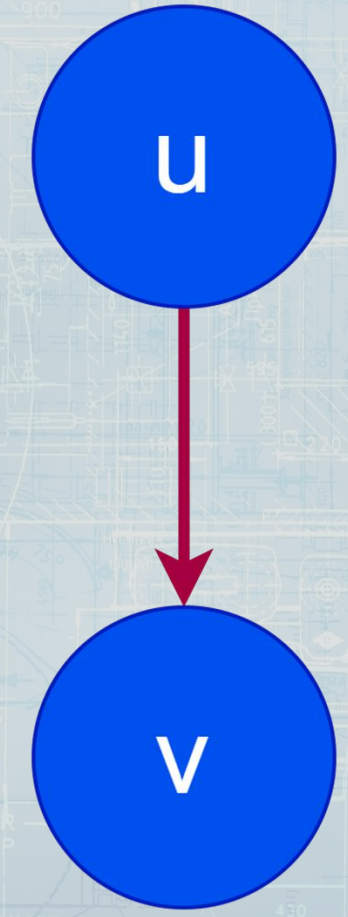
- Ocorre quando há mais de uma aresta interconectando o mesmo par de vértices
  - Ou seja, além de (*x*, *y*), existe, pelo menos, também (*x*, *y*)'

Grafo simples



- É aquele que não possui laços ou múltiplas arestas
- Pode ser direcionado ou não

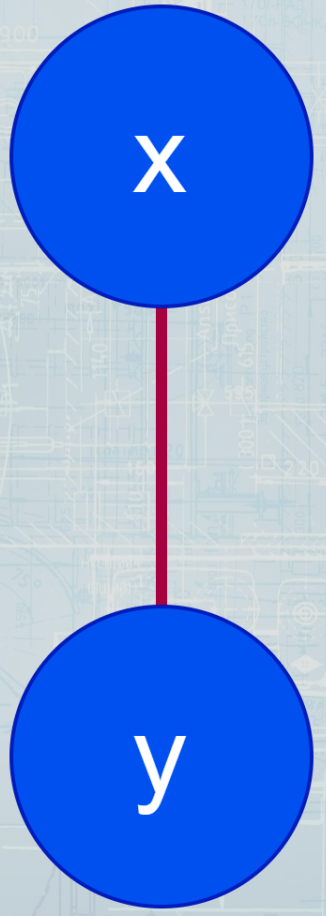
Vértices adjacentes em grafos direcionados



- Em um grafo direcionado, se existe uma aresta (u, v)
  - o vértice v é **adjacente** ao vértice u
  - a aresta **sai** do vértice u (**origem**)
  - a aresta **chega** no vértice v (**destino**)
  - a existência de (u, v) **não implica** na existência de (v, u), ou seja o vértice u **não é adjacente** ao vértice v
  - os vértices u e v são **vizinhos**

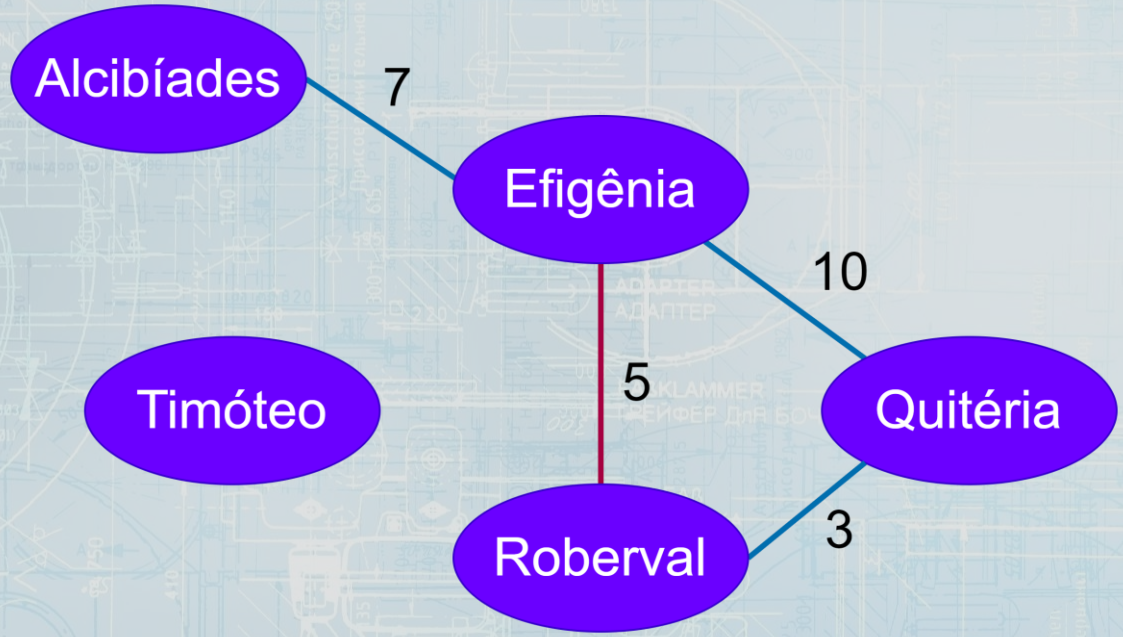
u é adjacente a v? **NÃO**
v é adjacente a u? **SIM**
u e v são vizinhos? **SIM**

Vértices adjacentes em grafos não-direcionados



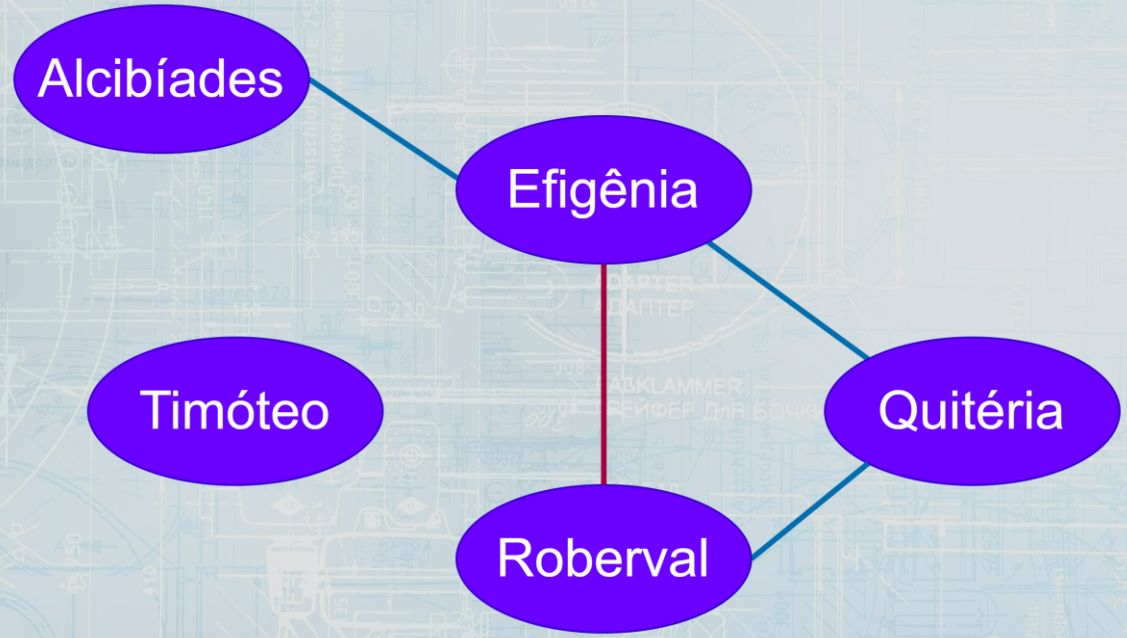
- Em grafos não-direcionados, a relação de **adjacência** é **simétrica**
  - Ou seja, se *x* é adjacente a *y*, *y* também é adjacente a *x*
  - Em outras palavras, as relações de **adjacência** e **vizinhança se confundem**

Grafo ponderado



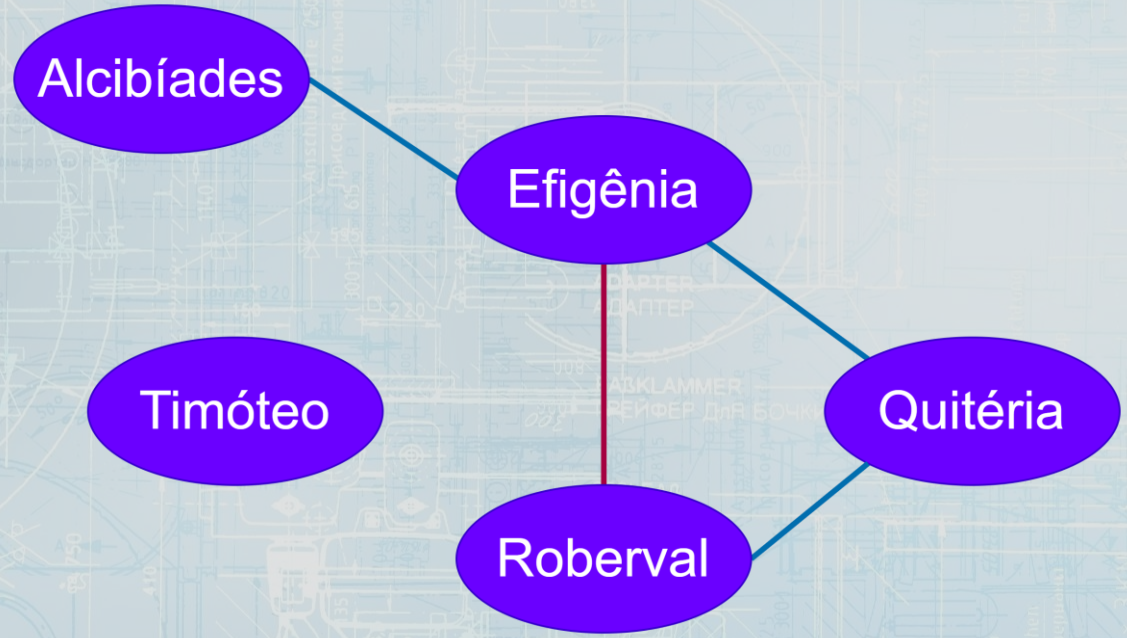
- No grafo ponderado, as arestas possuem um valor numérico (peso) associado a elas
- As arestas passam a ser representadas por uma **tripla** (*u*, *v*, *peso*)
  - P. ex. (*Efigênia*, *Roberval*, *5*)

Grafo não ponderado



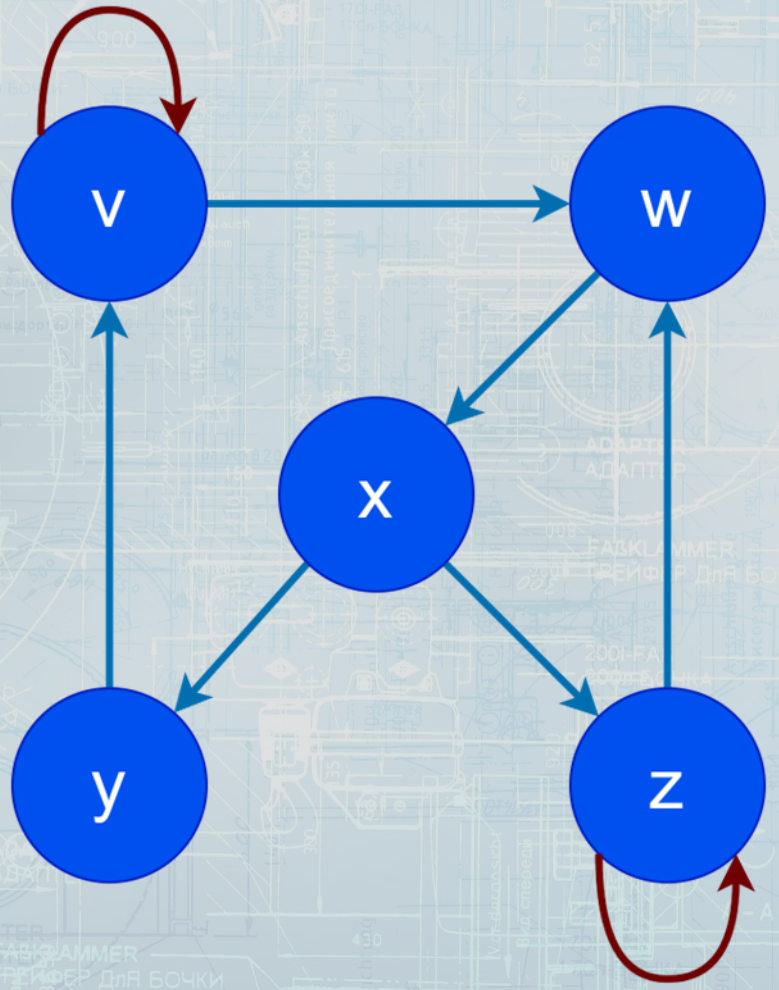
- No grafo não ponderado, todas as arestas possuem o mesmo peso
- As arestas são representadas por uma **dupla** (*u*, *v*)
  - P. ex. (*Efigênia*, *Roberval*)

Grau do vértice (grafos não direcionados)



- **Grau do vértice** → número de outros vértices adjacentes a ele
  - **vértice isolado**: grau 0 (*Timóteo*)
  - **vértice final**: grau 1 (*Alcibíades*)
  - **vértice par**: grau par (*Quitéria*)
  - **vértice ímpar**: grau ímpar (*Efigênia*, *Alcibíades*)

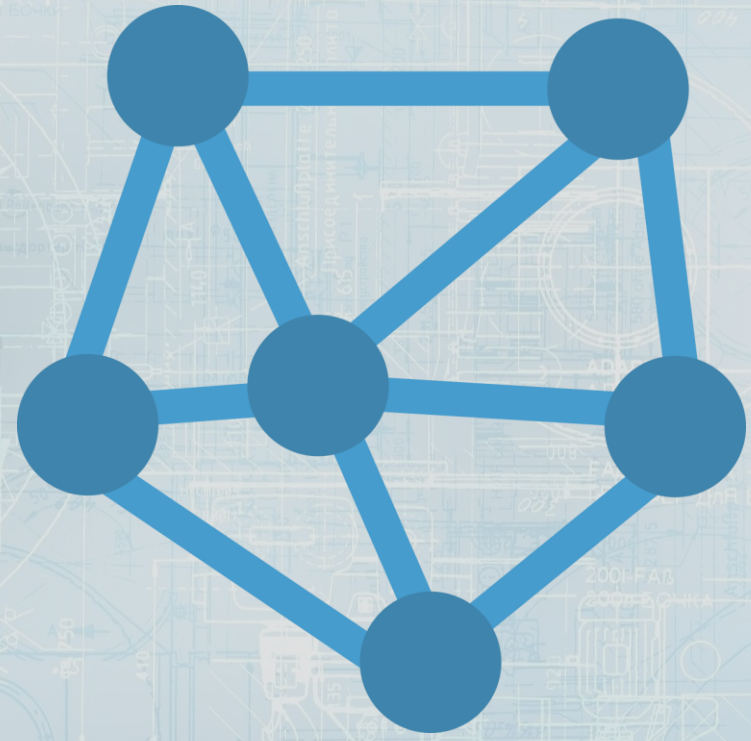
Grau do vértice (grafos direcionados)



- **Grau do vértice** → é dado por
  - número de arestas que saem dele (**grau de saída** ou ***out-degree***)
  - **SOMADO A**
  - número de arestas que chegam a ele (**grau de entrada** ou ***in-degree***)

- No caso do vértice *z* ao lado:
  - grau de entrada: 2
  - grau de saída: 2
  - **grau: 4**

Formas de representação

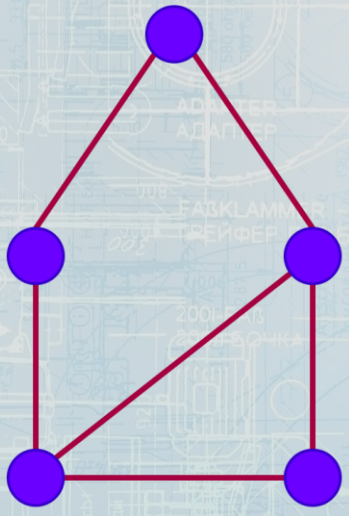


- **Grafos são entidades abstratas**
- Portanto, para compreendê-los e trabalhar com eles, é necessário que façamos uma representação concreta deles
- Os tipos de representações mais comuns são:
  - representação gráfica
  - representação matemática
  - representação computacional
    - matriz de adjacência
    - lista de adjacência
    - matriz de incidência

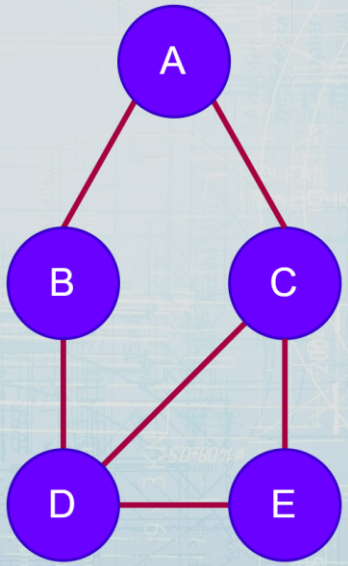
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Representação gráfica e rotulagem

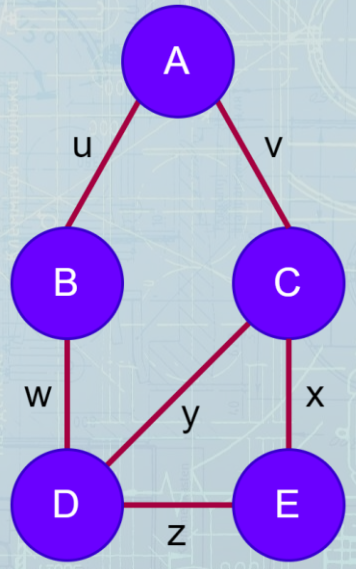
- A representação gráfica, com certeza, é a de mais fácil compreensão para o ser humano
- Um aspecto importante da representação gráfica é a **rotulagem**, pelo que tanto vértices como arestas podem ter uma identificação



Grafo não rotulado



Apenas vértices rotulados

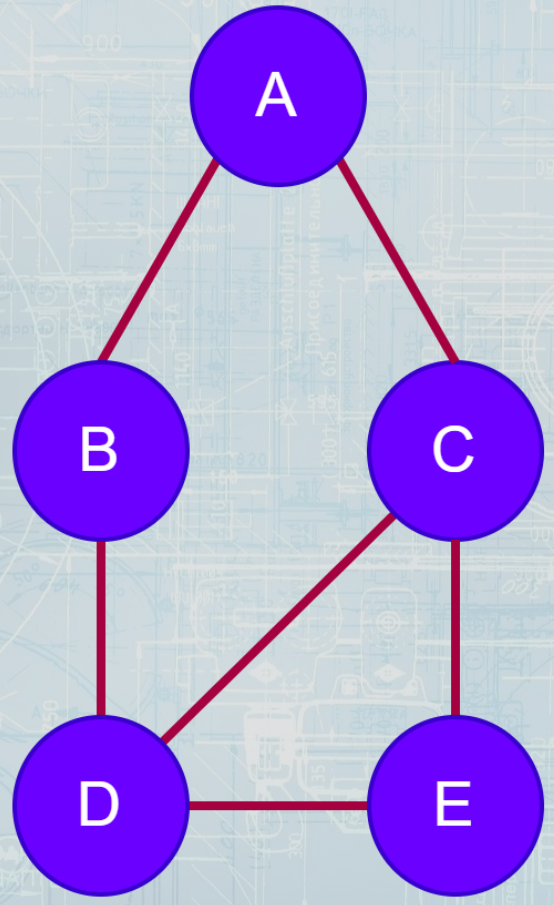


Vértices e arestas rotulados

REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA

(Descrição formal)

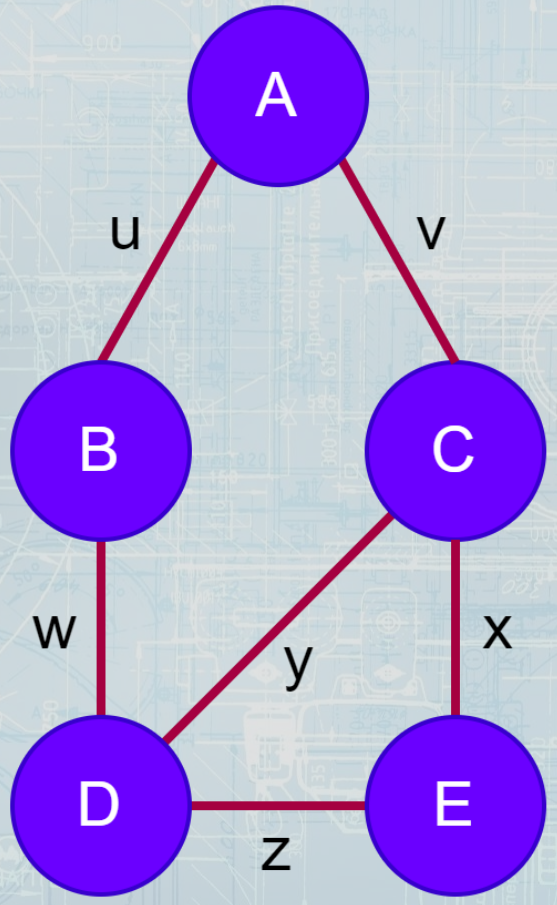
Grafos com apenas vértices rotulados



- Para representar matematicamente um grafo, é necessário que pelo menos os vértices estejam rotulados
- **A representação matemática (ou <u>descrição formal</u>) é feita de tal forma que seja possível derivar dela uma representação gráfica**
- A representação quando apenas os vértices estão rotulados é uma **dupla ordenada** $G = (V, A)$
  - $V = \{ A, B, C, D, E \}$ (conjunto de vértices)
  - $A = \{ (A, B), (A, C), (B, D), (C, D), (C, E), (D, E) \}$ (conjunto de arestas)

- Observações:
  - Em **grafos direcionados**, a aresta é uma **dupla ordenada**, no sentido **origem-destino**
  - Em **grafos ponderados**, a **aresta** é representada por uma **tripla**, pois o respectivo peso precisa ser informado

Grafos com vértices e arestas rotulados



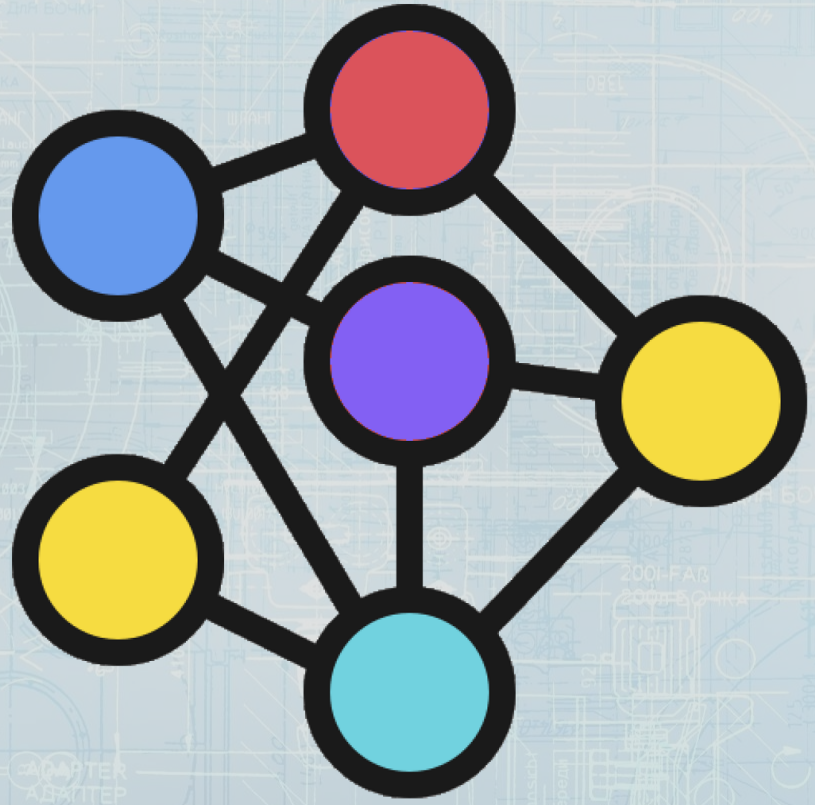
- Quando as arestas também estão rotuladas, a descrição formal passa a ser uma tripla ordenada **G = (V, A, g)**, onde **g** é uma **função de incidência** que associa cada aresta a um par de vértices
  - V = { A, B, C, D, E }
  - A = { u, v, w, x, y, z }
  - g = { g(u) = (A, B), g(v) = (A, C), g(w) = (B, D), g(x) = (C, E), g(y) = (C, D), g(z) = (D, E) }

REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Motivação e pré-requisito

- As representações gráfica e matemática, apesar de serem de fácil compreensão, não são adequadas para o armazenamento de grafos em sistemas computacionais
- Uma representação computacional espacialmente eficiente depende da **densidade** do grafo

Densidade de um grafo

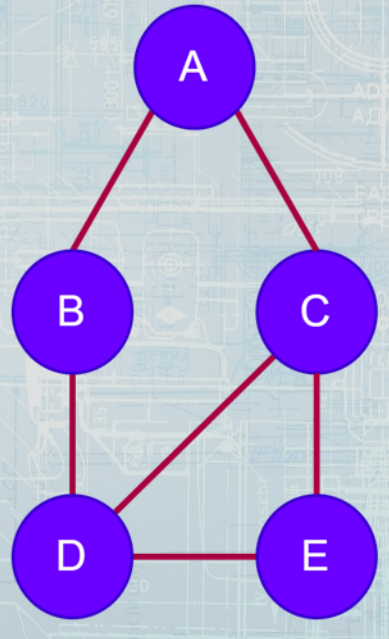


- A **densidade** de um grafo é uma função entre o número de vértices e o número de arestas, dada pelas fórmulas abaixo
  - $\frac{2A}{V(V-1)}$, para grafos não direcionados
  - $\frac{A}{V(V-1)}$, para grafos direcionados
- onde A é o número de arestas e V é o número de vértices
- **Grafo denso** é aquele que possui densidade alta (**próxima a 1**)
- **Grafo esparso** é aquele que possui densidade baixa (**próxima a 0**)

MATRIZ DE ADJACÊNCIA

Definição

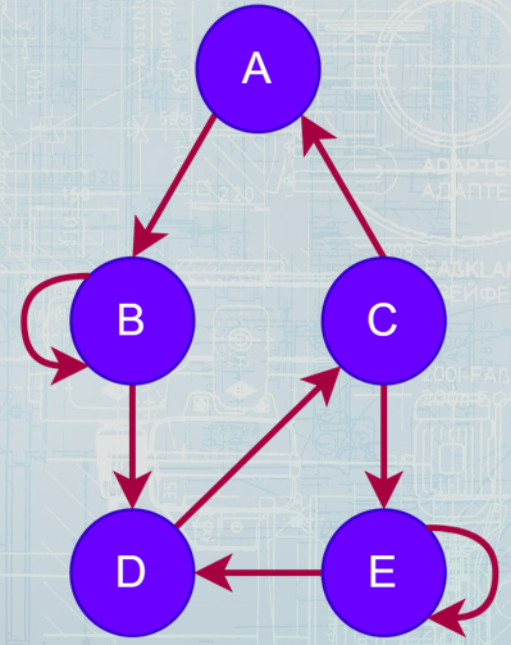
- A **matriz de adjacência** de um grafo com $|V|$ vértices é uma matriz $|V| \times |V|$ de 0s e 1s, na qual a entrada na linha *i* e coluna *j* é 1 se e somente se a aresta (*i*, *j*) constar do grafo
- Em grafos não direcionados, uma valor 1 em (*i*, *j*) implica também no mesmo valor 1 em (*j*, *i*), o que implica em uma **matriz simétrica**



	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	1	1
D	0	1	1	0	1
E	0	0	1	1	0

Matriz de adjacência em grafos direcionados

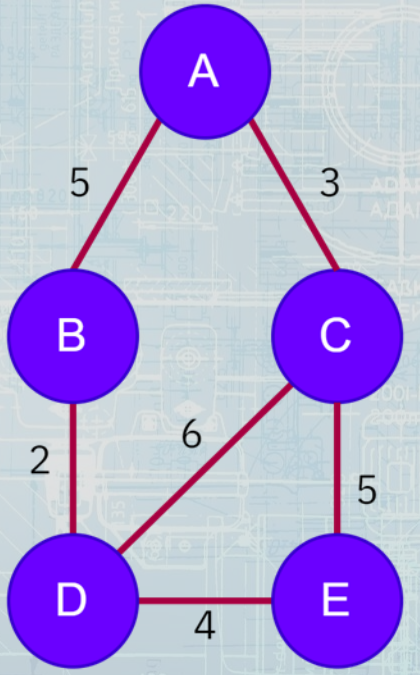
- Nesse caso, consideramos as linhas como vértice de origem e as colunas como vértice de destino



	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	0	1	0	1	0
C	1	0	0	0	1
D	0	0	1	0	0
E	0	0	0	1	1

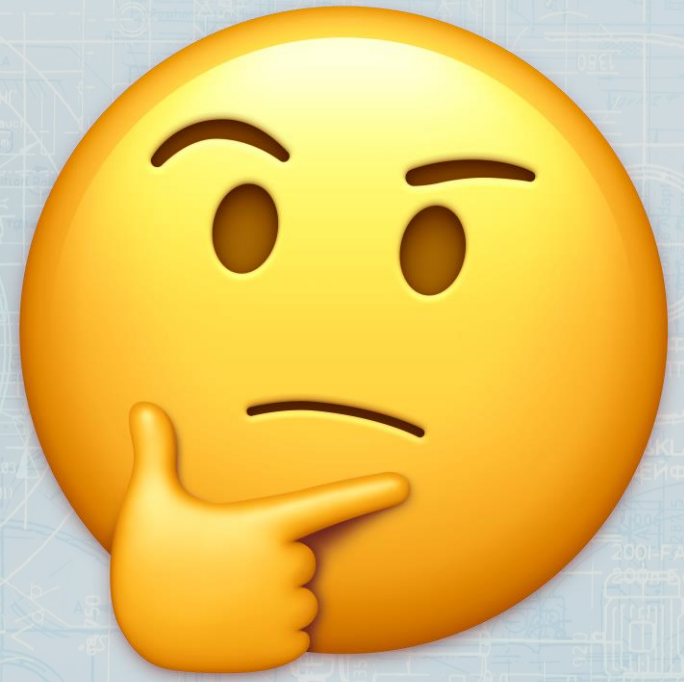
Matriz de adjacência em grafos ponderados

- O peso da aresta é armazenado na matriz na intersecção dos vértices incidentes. Para representar a ausência de um vértice, usa-se um símbolo especial: ∅ (conjunto vazio), ou o valor *null*, em programação



	A	B	C	D	E
A	∅	5	3	∅	∅
B	5	∅	∅	2	∅
C	3	∅	∅	6	5
D	∅	2	6	∅	4
E	∅	∅	5	4	∅

Considerações

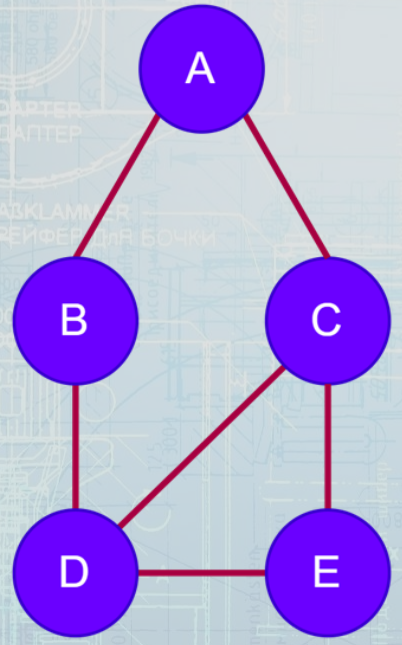


- Complexidade de espaço: $\Theta(|V|^2)$
  - A adição de um novo vértice ao grafo implica a adição de uma nova linha e uma nova coluna à matriz
- **Adequada** para representar **grafos densos** (em que $|A| \simeq |V|^2$)
- **Inadequada para a representação de grafos grandes e esparsos**
- A simplicidade de uma matriz de adjacências a torna preferível no caso de grafos pequenos ou densos

LISTA DE ADJACÊNCIA

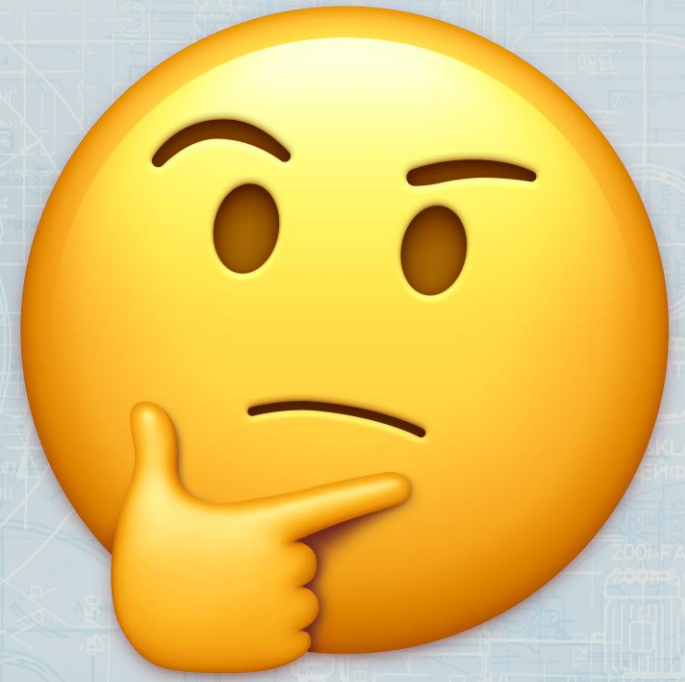
Definição

- A **lista de adjacência** constitui uma solução para o problema do espaço ocupado pela matriz de adjacência
- **Cada vértice é associado a uma lista de vértices com os quais mantém relação de adjacência**
- Pode ser usada para grafos direcionados ou não direcionados



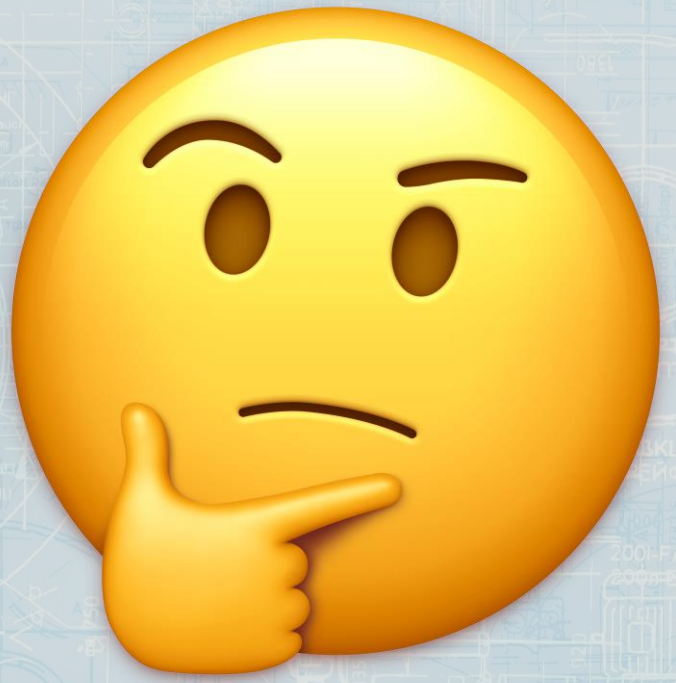
A	B, C
B	A, D
C	A, D, E
D	B, C, E
E	C, D

Considerações (1)



- Se G é um grafo dirigido, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é $|A|$
- Se G não é um grafo dirigido, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é $2 \times |A|$
- Para listar todos os vértices adjacentes a *i* temos que percorrer a lista associada a *i*
- Para saber se um vértice *j* é adjacente a *i* devemos realizar uma busca na lista associada a *i*

Considerações (2)

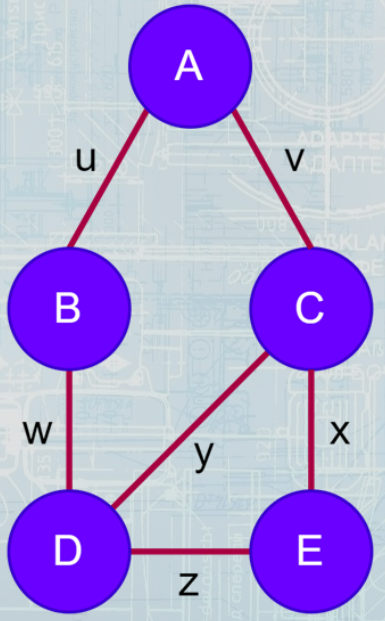


- A quantidade de memória necessária para representar o grafo é $\Theta(|V| + |E|)$
- Forma compacta para grafos esparsos (i. e. em que $|E| \ll |V|^2$)
- Ineficiente para verificar se há adjacência entre dois vértices, pois pode ser necessário percorrer a lista de adjacência completa do vértice
- As listas de adjacência podem facilmente ser adaptadas para representar grafos ponderados (i.e. com pesos nas arestas)

MATRIZ DE INCIDÊNCIA

Definição

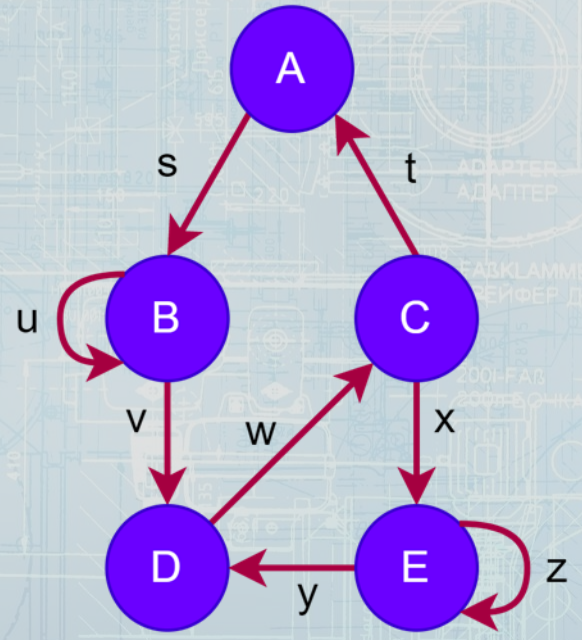
- A **matriz de incidência** de um grafo com $|V|$ vértices e $|A|$ arestas é uma matriz $|V| \times |A|$ de 0s e 1s, na qual a entrada na linha *i* e coluna *j* é 1 se e somente se a aresta *j* incidir sobre o vértice *i*
- Tanto as arestas quanto os vértices precisam estar rotulados



	u	v	w	x	y	z
A	1	1	0	0	0	0
B	1	0	1	0	0	0
C	0	1	0	1	1	0
D	0	0	1	0	1	1
E	0	0	0	1	0	1

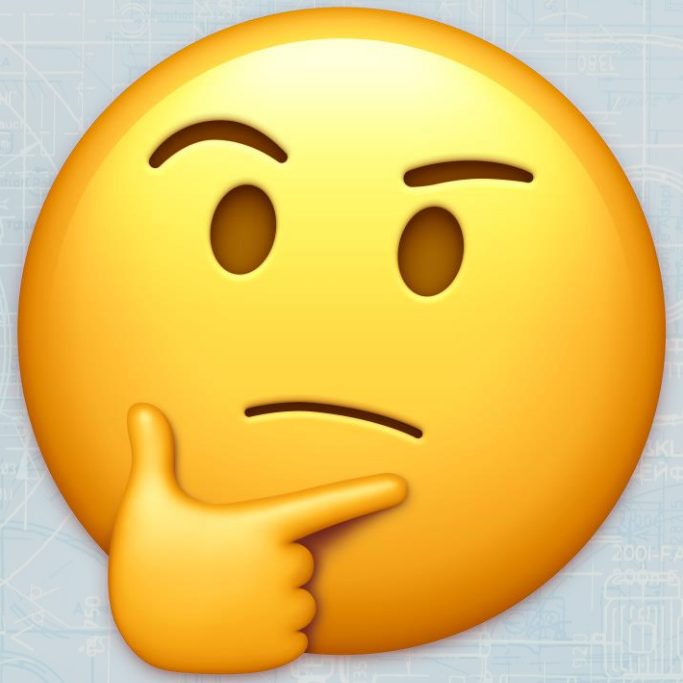
Matriz de incidência em grafos direcionados

- Nesse caso, se usa os valores:
  - **-1**, se a aresta **diverge** (sai) do vértice
  - **1** se a aresta **converge** (entra) para o vértice
  - **2** quando há um **laço** no vértice
  - 0 se não há incidência



	s	t	u	v	w	x	y	z
A	-1	1	0	0	0	0	0	0
B	1	0	2	-1	0	0	0	0
C	0	-1	0	0	1	-1	0	0
D	0	0	0	1	-1	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1	-1	2

Considerações



- Complexidade de espaço: $\Theta(|V| \times |A|)$
  - A adição de um novo vértice ao grafo implica a adição de uma nova linha
  - A adição de uma nova aresta ao grafo implica a adição de uma nova coluna
- **Adequada** para representar **grafos esparsos** (em que $|A| \ll |V|^2$)
- Só é possível construir a matriz de incidência para grafos ponderados se estes forem não direcionados
- É possível construir uma **lista de incidência** para **grafos não direcionados**, a fim de diminuir a complexidade de espaço

Para saber mais

- BOAVENTURA NETTO, P.O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos**: introdução e prática. 2. ed. Rio de Janeiro: Blucher, 2017, p. 17-20
- SIMÕES-PEREIRA, J. M. S. **Grafos e redes**: teoria e algoritmos básicos. Rio de Janeiro: Interciência, 2014, p. 199-256