

Problema del tubo Sod por medio de ecuaciones conservativas

Fundamentos de Dinámica de Fluidos Computacional: Tarea Grupal 2

Jean-Pierre Rojas & Byron Alexander Vega Lagos
Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Mecánica, Valparaíso, Chile
jean-pierre.rojas@sansano.usm.cl & byron.vega@sansano.usm.cl
Profesor Dr. Ing Christoper Cooper

Abstract

El presente informe corresponde a la resolución algorítmica del problema de Newton aplicado al tubo de Sod, en el que se da énfasis al análisis diferencial del cambio de presión y su efecto sobre el comportamiento de la función, además de realizar un análisis para el cambio relativo entre mallas gruesas y finas. Como resultado se obtiene que las mallas finas representan algo mucho más cercano dado que la variabilidad es menor que con una malla gruesa, obviando un poco el tema del costo computacional, además de que al tener un mayor diferencial de presión el efecto de la onda suele ser creciente en todas sus magnitudes analizadas, presión, velocidad y densidad.

El análisis consiste en dos etapas, la primera de ellas usando malla gruesa, nos demuestra que el método de Lax-Friedrichs es bastante eficiente y funciona como una muy buena primera aproximación, mientras que Richtmyer's demuestra demasiada difusividad

El segundo eje comparativo tiene lugar en las mallas finas, donde si bien, Lax-Friedrichs tiende a una aproximación buena, uno pensaría que lo obtenido de Richtmyers es mejor, porque el efecto difusivo se minimiza

En la tercera parte del informe se hace un análisis comparativo para los resultados obtenidos anteriormente, donde varios elementos del resumen son concluidos en base a la investigación previa. Además de entregar un sección con los códigos implementados en Python - Jupyter

Enviado en Diciembre del 2021

Palabras Claves: *CFD, Ecuación de Euler, Tubo Sod*

Contents

1	Enunciado	2
2	Teoría	3
3	Metodología	4
3.1	Método Lax-Friedrichs	4
3.2	Método Richtmyer's	4
4	Análisis de Resultados Malla Gruesa	6
4.1	Mediante Método Lax-Friedrichs	6
4.1.1	Resultados con una diferencia de presión de 0.9	6
4.1.2	Resultados con una diferencia de presión de 0.8	9
4.1.3	Resultados con una diferencia de presión de 1.1	10
4.2	Mediante Método Richtmyer's	11
4.2.1	Resultados con una diferencia de presión de 0.9	11
4.2.2	Resultados con una diferencia de presión de 0.8	13
4.2.3	Resultados con una diferencia de presión de 1.1	15
5	Análisis de Resultados Malla Fina	17
5.1	Mediante Método Lax-Friedrichs	17
5.1.1	Resultados con una diferencia de presión de 0.9	17
5.1.2	Resultados con una diferencia de presión de 0.8	20
5.1.3	Resultados con una diferencia de presión de 1.1	21
5.2	Mediante Método Richtmyer's	22
5.2.1	Resultados con una diferencia de presión de 0.9	22
5.2.2	Resultados con una diferencia de presión de 0.8	24
5.2.3	Resultados con una diferencia de presión de 1.1	26
6	Conclusiones y análisis finales en relación a los distintos casos estudiados	28
7	Anexo	30
7.1	Código Método Lax-Friedrichs	30
7.2	Código Método Richtmyer's	33

1 Enunciado

Se quiere modelar el flujo desarrollado al interior de un tubo de largo 2 metros, el cual está lleno de un as ideal ($\gamma = 1.4$ en reposo). Al tiempo $t = 0$ segundos, la distribución de la densidad ϕ

, presión p y velocidad u son:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (2)$$

2 Teoría

Vamos a modelar la situación anterior suponiendo que el flujo es compresible y además no viscoso. En esta situación nos conviene utilizar la ecuación de euler que proviene de la conservación de la cantidad de movimiento de un fluido no viscoso.

Considerando tambien la conservación de masa y la conservación de la energía, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = 0 \quad (3)$$

Lo que en el caso de una sólo dimensión se escribe de la siguiente manera:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(E + P) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Se tiene que considerar una ecuación de estado que nos permita relacionar las variables termodinámicas resueltas con la presión del fluido. Para esto utilizaremos la siguiente relación de ley de estado de un gas ideal:

$$P = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2) \quad (6)$$

Donde γ es el ratio de calores específicos, ρ densidad del flujo, u la velocidad axial y E la energía total

3 Metodología

La metodología utilizada para el desarrollo del código se puede resumir algorítmicamente de la siguiente manera

1. Generar condiciones y datos iniciales considerando distintos tiempos de análisis por medio de una lista.
2. Hacer *for* en los tiempos de la lista requerida.
3. Hacer *while* desde el tiempo cero al tiempo correspondiente del *for*
4. Inicializar las matrices U y F mostradas en las ecuaciones 4 y 5 con ρ , u, E y P.
5. Inicializar el cálculo de alguno de los dos métodos, Lax-Friedrichs o Richtmyer's.
6. Reescribir los valores ρ , u, E y P.
7. Incrementar el tiempo.
8. Terminado el while, entregar información a la curva del gráfico.
9. Terminado el for entregar el gráfico para cada instante de tiempo.

3.1 Método Lax-Friedrichs

El método de Lax-Friedrichs consiste en una variación del método de centros, el resultado es directo y permite curvas sin difusión pero menos exactas. Donde notamos que el U intenta representar el cambio medio entre dos puntos aledaños al punto de interés donde se adiciona los efectos de la matriz F que depende de la subdivisión geométrica y temporal.

Su aplicación en el método es directa

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i-1}^n + U_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) \quad (7)$$

3.2 Método Richtmyer's

Para el método de Richtmyer's se determina el cambio usando un método alternativo de adelanto y atraso de la matriz U, denominada $n+1/2$ dado que supone tomar el punto medio entre dos puntos contiguos. La primera fase consiste en un método de predictor que permite predecir los elementos $F_{i+1}^{n+1/2}$ y $F_{i-1}^{n-1/2}$ usador en el método corrector. Su aplicación en el algoritmo quedaría dado por.

1. Determinar $U_{i+1}^{n+1/2}$ y $U_{i-1}^{n-1/2}$

2. Encontrar los valores para ρ , u , E y P . respectivos para cada caso.
3. Escribir $F_{i+1}^{n+1/2}$ y $F_{i-1}^{n+1/2}$ dando fin al método predictivo
4. Utilizar método correctivo
5. La iteración queda en la metodología nombrada anteriormente

$$U_{i+1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_i^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (8)$$

$$U_{i-1}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_i^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (F_i^n - F_{i-1}^n) \quad (9)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^{n+1/2} - F_{i-1}^{n+1/2}) \quad (10)$$

4 Análisis de Resultados Malla Gruesa

4.1 Mediante Método Lax-Friedrichs

4.1.1 Resultados con una diferencia de presión de 0.9

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas obtenidas en diferentes tiempos con un intervalo de tiempo $dt = 0.0005$ [s] y 300 nodos.

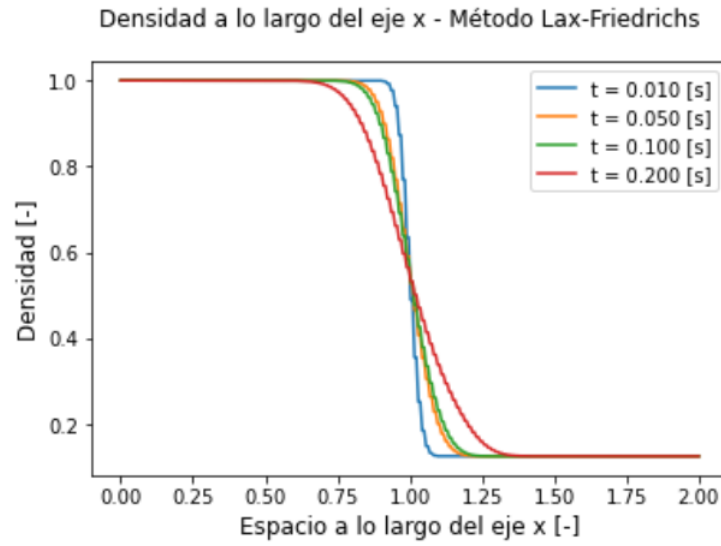


Figure 1: Densidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo.

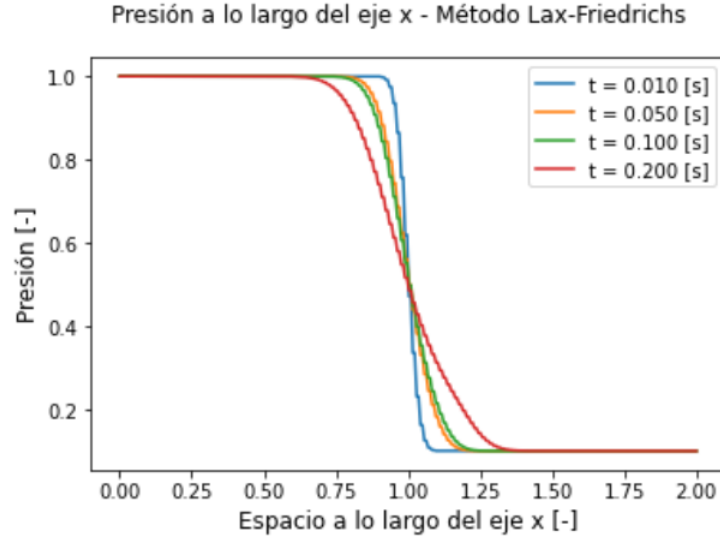


Figure 2: Presión a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo.

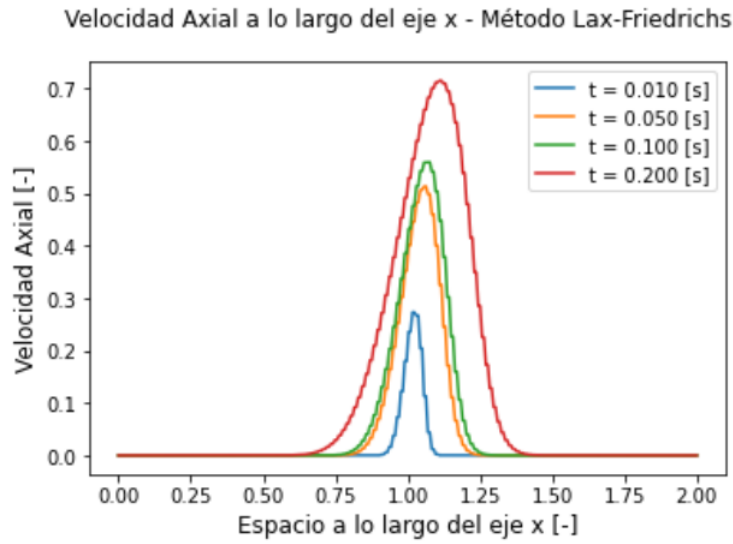


Figure 3: Velocidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo.

Se puede observar que la cantidad de ondas que se propagan son dos. Si nos situamos justo al medio de nuestro espacio ($x=1$ [m]), nos podemos imaginar que la situación vista de una manera física es parecida a la de una burbuja que se rompe en el instante $t=0$ [s], esta genera

dos ondas de presión, una hacia la izquierda y otra a la derecha que se van transmitiendo a lo largo del espacio hasta llegar a los extremos.

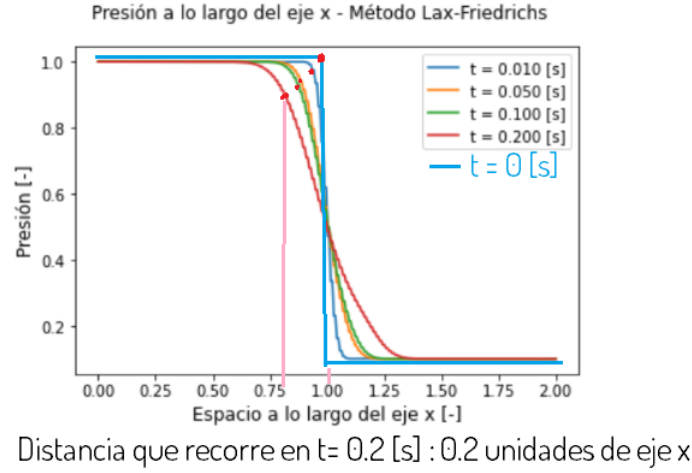


Figure 4: Diagrama explicativo de la estimación del Frente de presión respecto al eje x. Para estimar la velocidad de propagación de las ondas a partir de las simulaciones veremos cuanto es la distancia que recorre el frente de presión respecto a un determinado tiempo.

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.05
$t = 0.050$	0.15
$t = 0.100$	0.16
$t = 0.200$	0.28

Table 1: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs con $dP = 0.9$

4.1.2 Resultados con una diferencia de presión de 0.8

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (12)$$

Notar que el cambio es que la presión tiene magnitud **P=0.9** cuando $x < 1$, de esta manera se cumple que **dP=0.8**. Los resultados son los siguientes:

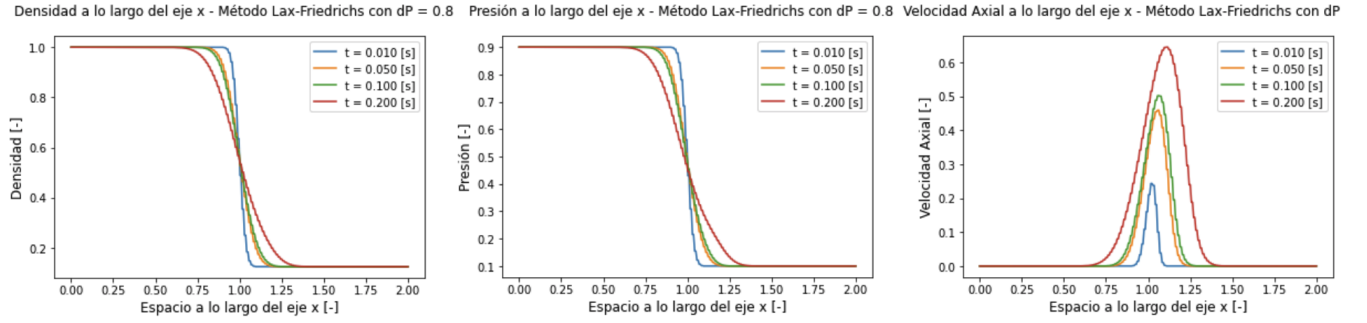


Figure 5: Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 0.8

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.06
$t = 0.050$	0.15
$t = 0.100$	0.16
$t = 0.200$	0.28

Table 2: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs con $dP = 0.8$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión cambia a 0.8 ocurre lo siguiente:

- La Densidad respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud **dP=0.9**, el rango de valores de la ordenada se mantiene.
- La Presión respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud **dP=0.9**, sin embargo el rango de valores de la ordenada cambia desde [0.1: - 1] a [0.1: - 0.9]
- En cuanto a la velocidad axial, se mantiene la forma de la onda y también la magnitud.
- Por lo tanto no cambia la cantidad de ondas y la velocidad de propagación se mantiene.

4.1.3 Resultados con una diferencia de presión de 1.1

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.2 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (14)$$

Para que el cambio de presión tenga magnitud **dP=1.2**, la presión tiene magnitud **P=1.2** cuando $x < 1$

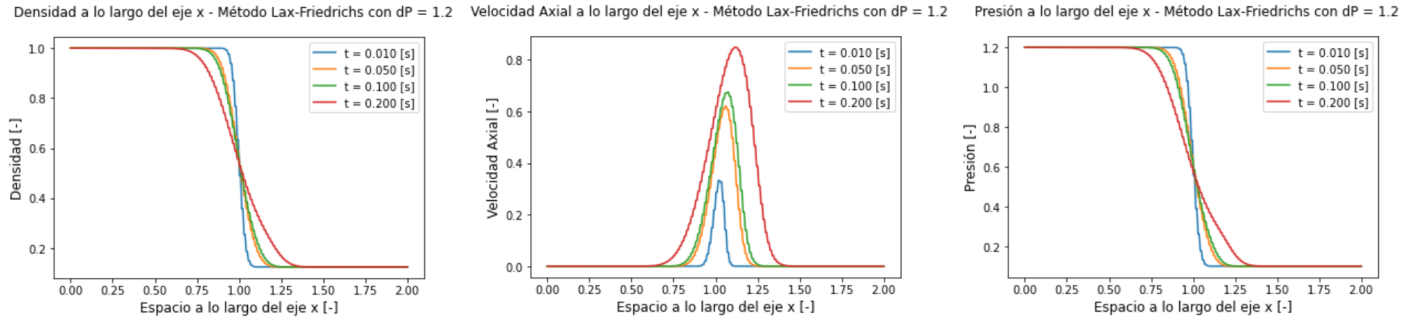


Figure 6: Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 1.1

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.05
$t = 0.050$	0.15
$t = 0.100$	0.16
$t = 0.200$	0.28

Table 3: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs con $dP=1.1$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión es de 1.1 ocurre lo mismo que en el caso anterior, es decir:

- La Densidad respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud $dP=0.9$, el rango de valores de la ordenada se mantiene.
- La Presión respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud $dP=0.9$, sin embargo el rango de valores de la ordenada cambia desde $[0.1: -1]$ a $[0.1: -1.2]$
- En cuanto a la velocidad axial, se mantiene la forma de la onda y también la magnitud.
- Por lo tanto no cambia la cantidad de ondas y la velocidad de propagación se mantiene.

4.2 Mediante Método Richtmyer's

4.2.1 Resultados con una diferencia de presión de 0.9

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas obtenidas en diferentes tiempos con un intervalo de tiempo $dt = 0.0005$ [s] y 300 nodos.

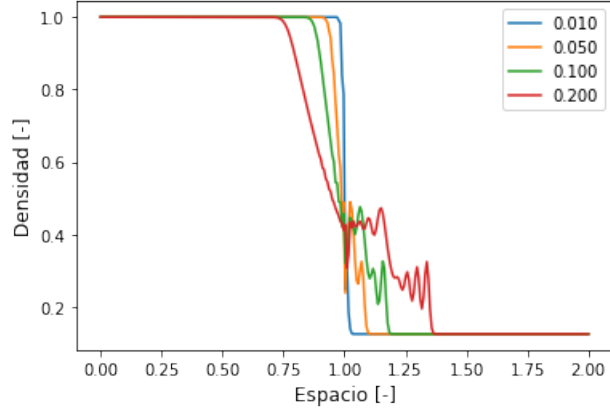


Figure 7: Densidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

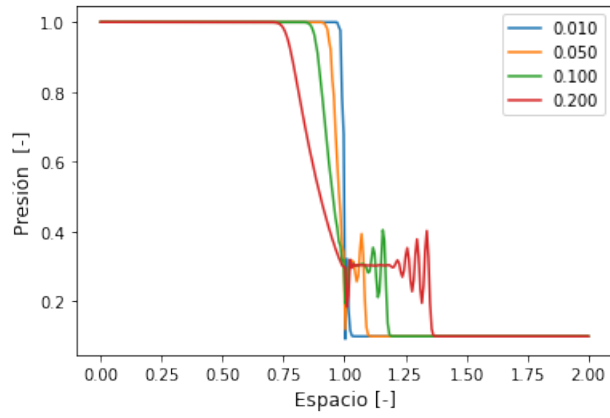


Figure 8: Presión a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

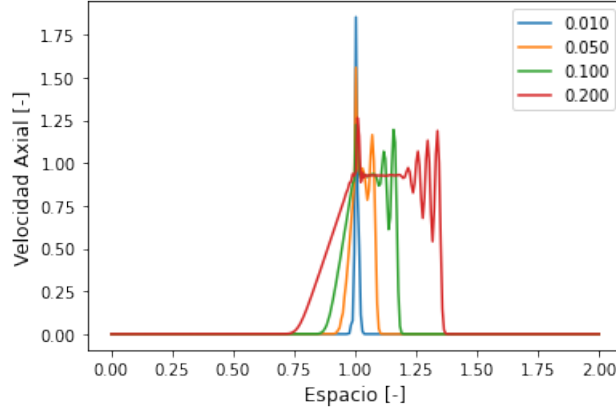


Figure 9: Velocidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.08
$t = 0.100$	0.13
$t = 0.200$	0.28

Table 4: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Richtmyer's con $dP = 0.9$

Se puede observar nuevamente que la cantidad de ondas que se propagan son dos. En donde predominan los elementos difusivos de la ecuación a cambio de una supuesta mayor precisión, sobre todo se ven radicales en los cambios de gradiente que sufre, donde notamos que tiene problemas con curvas que no son suaves, es decir que su derivada no es continua.

4.2.2 Resultados con una diferencia de presión de 0.8

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (16)$$

Notar que el cambio es que la presión tiene magnitud $\mathbf{P=0.9}$ cuando $x < 1$, de esta manera se cumple que $\mathbf{dP=0.8}$. Los resultados son los siguientes:

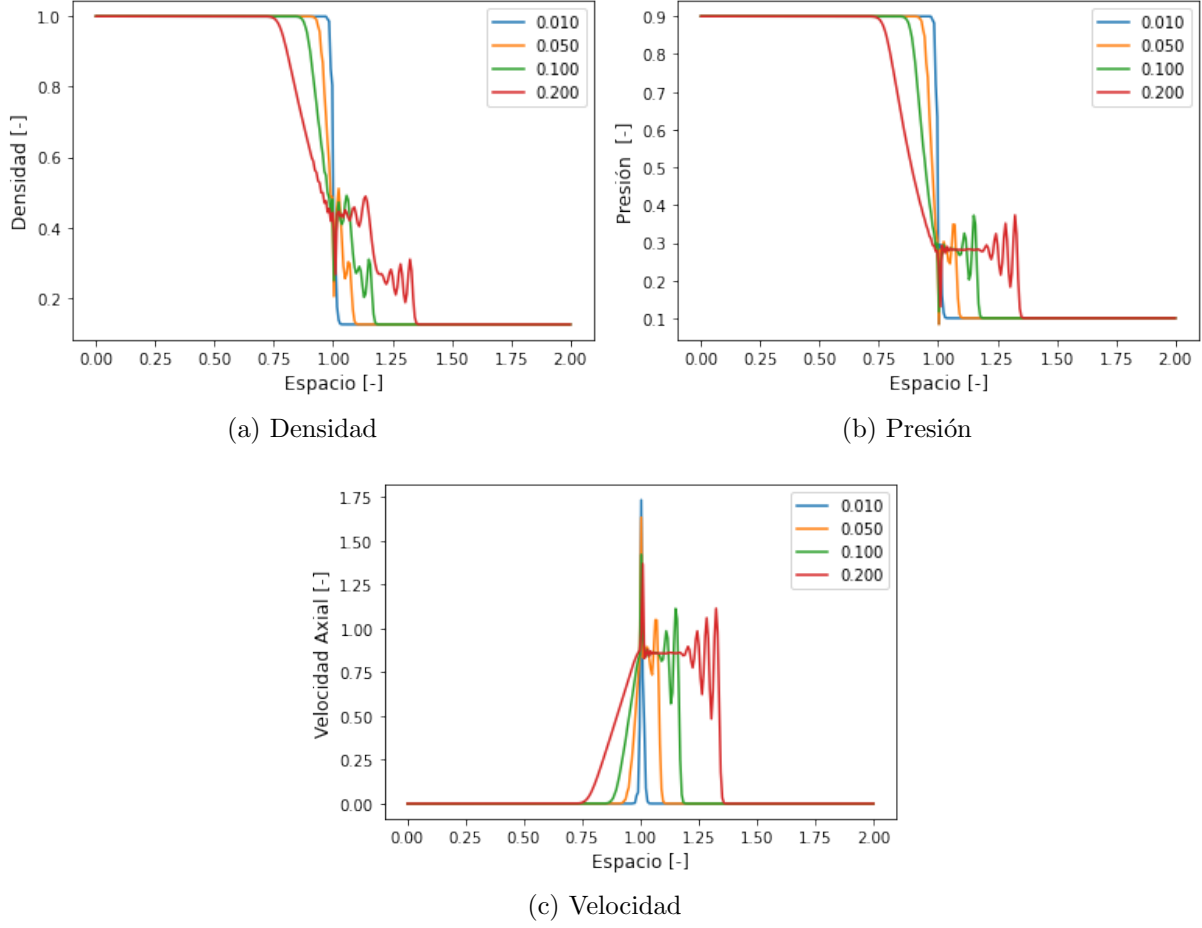


Figure 10: *Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 0.9. Richtmyer's.*

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.07
$t = 0.100$	0.11
$t = 0.200$	0.25

Table 5: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Richtmyer's con $dP=0.8$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión cambia a 0.8 ocurre lo siguiente:

- La Densidad respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud **$dP=0.9$** , el rango de valores de la ordenada se mantiene. pero contiene una desestabilización antes de llegar al punto central, el método *vibra* antes por la menor variación de presión.
- La Presión mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud **$dP=0.9$** , sin embargo el método parece ser inestable en el borde de la EDP donde se ve mucho más pronunciada la punta que marca el inicio de la sección $< 1m$.
- En cuanto a la velocidad axial, se mantiene la forma de la onda pero disminuye su magnitud levemente y también el rango al que llega en el espaciado.

4.2.3 Resultados con una diferencia de presión de 1.1

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.2 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (18)$$

Para que el cambio de presión tenga magnitud **$dP=1.2$** , la presión tiene magnitud **$P=1.2$** cuando $x < 1$

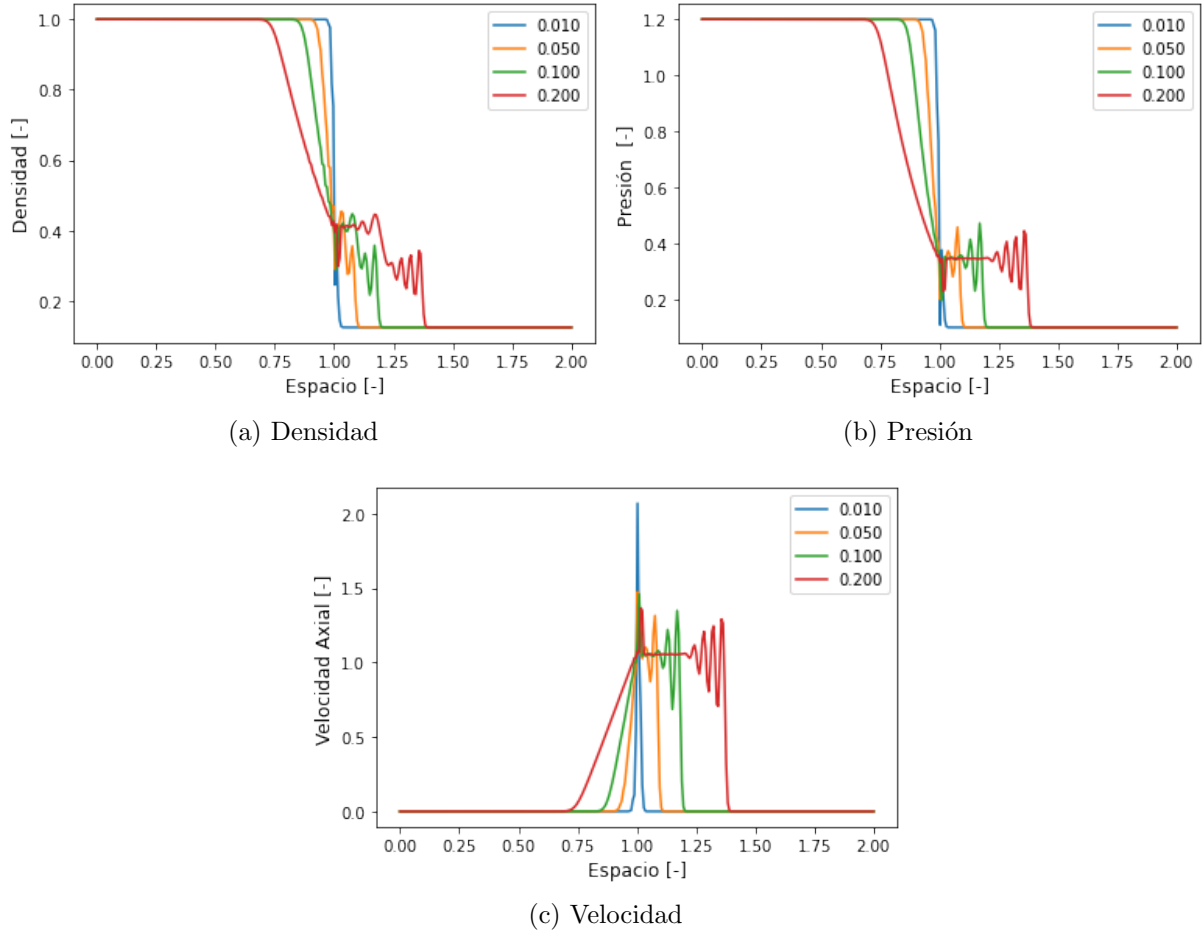


Figure 11: *Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 1.2. Richtmyer's.*

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.07
$t = 0.100$	0.15
$t = 0.200$	0.25

Table 6: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Richtmyer's con $dP=1.1$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión es de 1.1 ocurre que:

- La Densidad respecto al eje x mantiene su forma respecto a cuando tenía magnitud **$dP=0.9$** , pero la vibración presente en la curva disminuye en comparación al caso base, siendo mucho más suave el traspaso.
- La Presión se desplaza levemente a la derecha y disminuye la difusión.
- La onda explosiva alcanza una mayor distancia a mayor velocidad debido al aumento de delta de presión ΔP .

5 Análisis de Resultados Malla Fina

5.1 Mediante Método Lax-Friedrichs

5.1.1 Resultados con una diferencia de presión de 0.9

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas obtenidas en diferentes tiempos con un intervalo de tiempo $dt = 0.0001$ [s] y 1500 nodos.

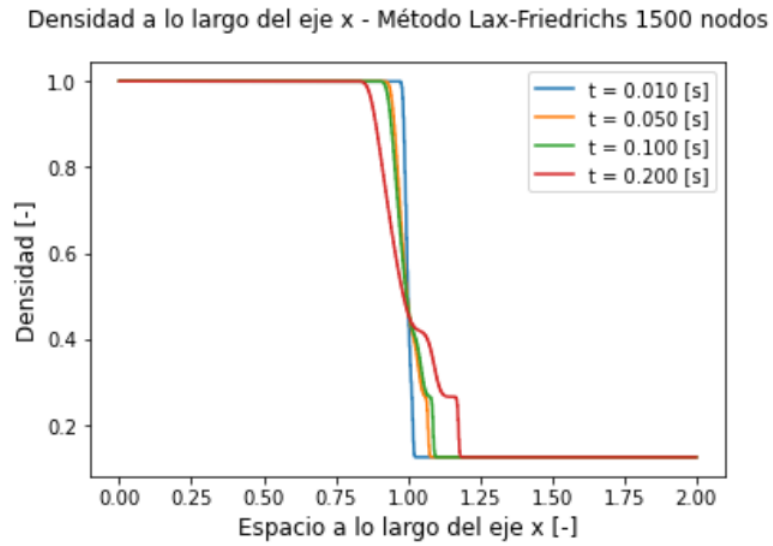


Figure 12: Densidad a lo largo del eje x utilizando 1500 nodos y $dt=0.0001$ [s].

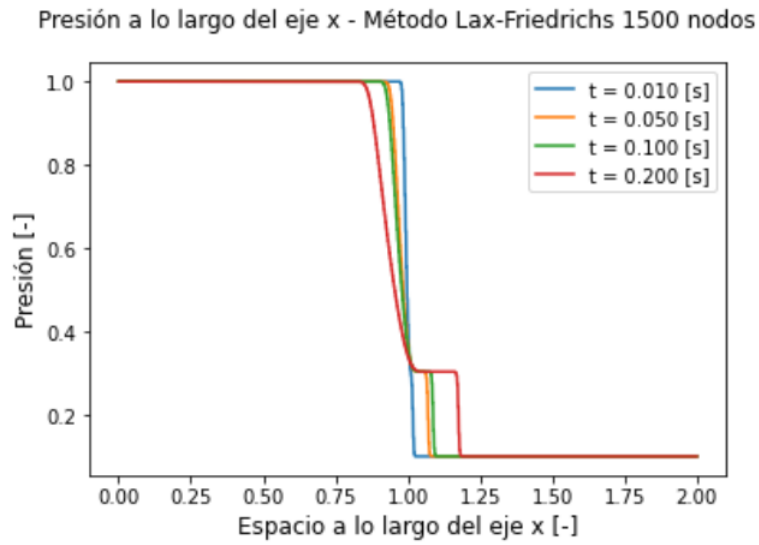


Figure 13: Presión a lo largo del eje x utilizando 1500 nodos y $dt=0.0001$ [s].

Velocidad Axial a lo largo del eje x - Método Lax-Friedrichs 1500 nodos

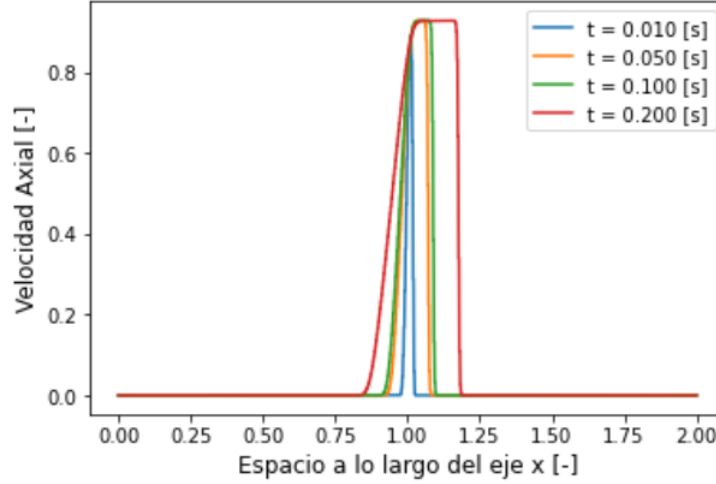


Figure 14: Velocidad a lo largo del eje x utilizando 1500 nodos y $dt=0.0001$ [s].

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.10
$t = 0.100$	0.11
$t = 0.200$	0.2

Table 7: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs Malla fina con $dP=0.9$

Se puede observar que la cantidad de ondas que se propagan son dos. Si nos situamos justo al medio de nuestro espacio ($x=1$ [m]), nos podemos imaginar que la situación vista de una manera física es parecida a la de una burbuja que se rompe en el instante $t=0$ [s], esta genera dos ondas de presión, una hacia la izquierda y otra a la derecha que se van transmitiendo a lo largo del espacio hasta llegar a los extremos.

5.1.2 Resultados con una diferencia de presión de 0.8

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (20)$$

Notar que el cambio es que la presión tiene magnitud **P=0.9** cuando $x < 1$, de esta manera se cumple que **dP=0.8**. Los resultados son los siguientes:

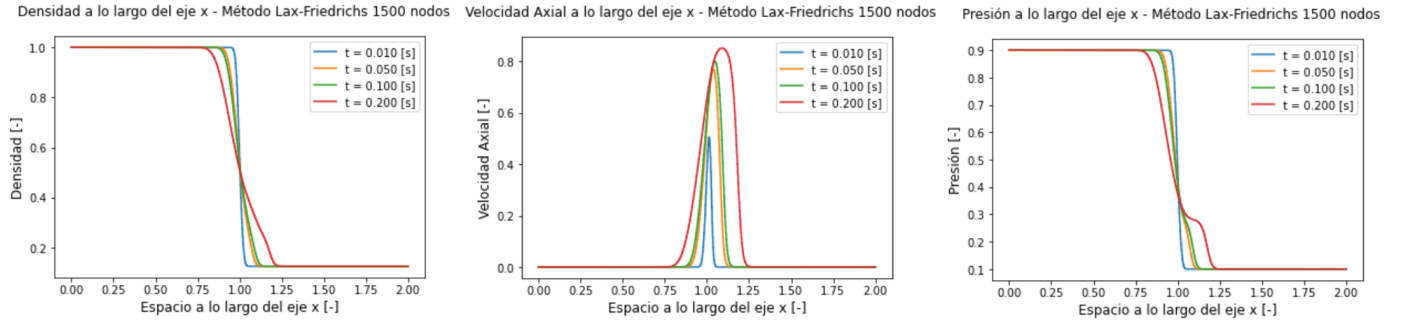


Figure 15: Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento con 1500 nodos y $dt=0.0001$ [s] cuando la diferencia de presión es 0.8

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.10
$t = 0.100$	0.11
$t = 0.200$	0.2

Table 8: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs Malla fina con $dP=0.8$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión cambia a 0.8 ocurre lo siguiente:

- La Densidad respecto al eje x cambia notablemente su forma respecto a cuando tenía magnitud $dP=0.9$, esto se puede ver ya que la curva obtenida es mucho más suave y no se observa un cambio brusco de presión. el rango de valores de la ordenada se mantiene.
- tambien ocurre algo similar al caso anterior en el gráfico de la Presión respecto al eje x, pues se observa que es mucho menos pronunciado el cambio de presión en la curva.
- En cuanto a la velocidad axial, la forma de la onda es mucho más suave y no tiene presenta un cambio brusco en la velocidad.y tambien la magnitud.
- Por lo tanto se puede concluir que cuando se utiliza una cantidad de nodos mayor y un intervalo de tiempo más fino, el valor de cambio de presión en las condiciones iniciales afecta mucho más a la curvas obtenidas de presión, velocidad axial y densidad.

5.1.3 Resultados con una diferencia de presión de 1.1

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.2 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (22)$$

Para que el cambio de presión tenga magnitud $dP=1.2$, la presión tiene magnitud $P=1.2$ cuando $x < 1$

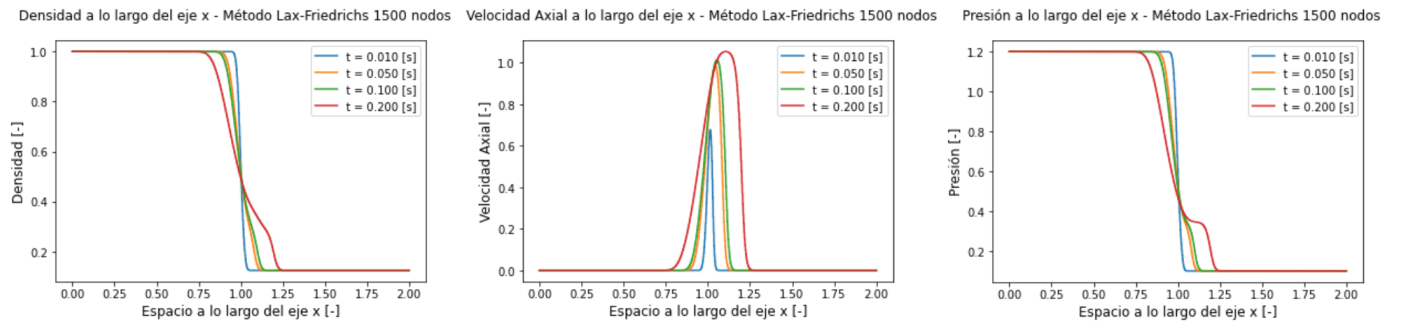


Figure 16: Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 1.1

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.10
$t = 0.100$	0.011
$t = 0.200$	0.2

Table 9: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Lax-Friedrichs Malla fina con $dP = 1.1$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión es de 1.1 ocurre lo mismo que en el caso anterior, es decir:

- La Densidad respecto al eje x "corrige" su forma ya que es más "suave" respecto a cuando tenía magnitud $dP = 0.9$, el rango de valores de la ordenada se mantiene.
- La Presión respecto al eje x pierde en cierto intervalo la "suavidad" de la curva respecto a cuando tenía magnitud $dP = 0.9$, sin embargo el rango de valores de la ordenada cambia desde $[0.1: -1]$ a $[0.1: -1.2]$
- En cuanto a la velocidad axial, se mantiene la forma de la onda, sin embargo la velocidad axial es mayor, cabe destacar que para el instante $t = 0.2$ [s] se observa un intervalo del eje x cerca de 0.15 [m] donde la velocidad axial es máxima $u = 0.9$ [m] y la derivada es cero.
- Por lo tanto se notan cambios más pronunciados respecto a una $dP = 0.8$ y $dP = 0.9$. En este caso la gráfica de velocidad axial para el instante $t = 0.2$ [s] pierde la curva en forma mitad-elíptica.

5.2 Mediante Método Richtmyer's

5.2.1 Resultados con una diferencia de presión de 0.9

Las siguientes figuras corresponden a las gráficas obtenidas en diferentes tiempos con un intervalo de tiempo $dt = 0.0001$ [s] y 1500 nodos.

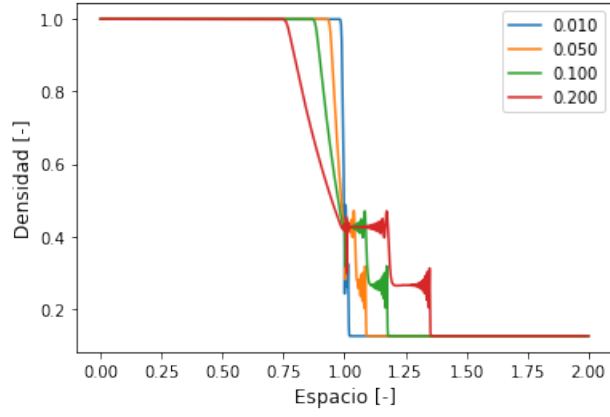


Figure 17: Densidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

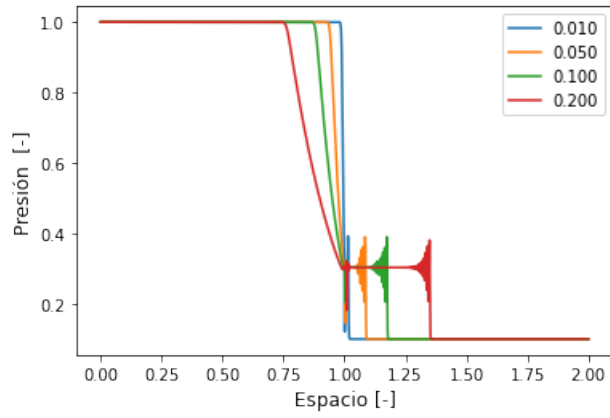


Figure 18: Presión a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

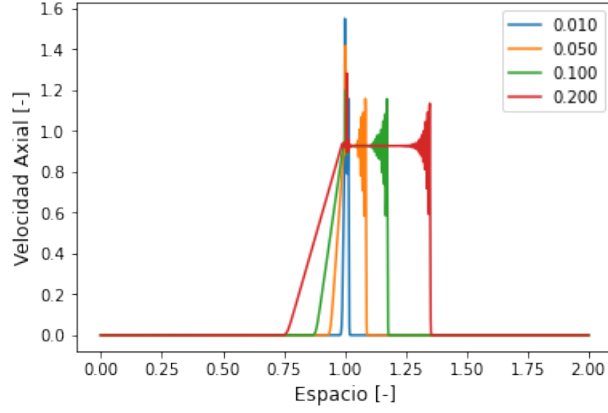


Figure 19: Velocidad a lo largo del eje x para diferentes instantes de tiempo. Richtmyer's.

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.10
$t = 0.100$	0.11
$t = 0.200$	0.25

Table 10: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Richtmyer's Malla fina con $dP = 0.9$

Se puede observar nuevamente que la cantidad de ondas que se propagan son dos. En donde predominan los elementos difusivos de la ecuación pero a diferencia de la malla gruesa, parece estar mucho más controlado la vibración de la difusión de la solución en las curvas que no son suaves.

5.2.2 Resultados con una diferencia de presión de 0.8

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (24)$$

Notar que el cambio es que la presión tiene magnitud $\mathbf{P=0.9}$ cuando $x < 1$, de esta manera se cumple que $\mathbf{dP=0.8}$. Los resultados son los siguientes:

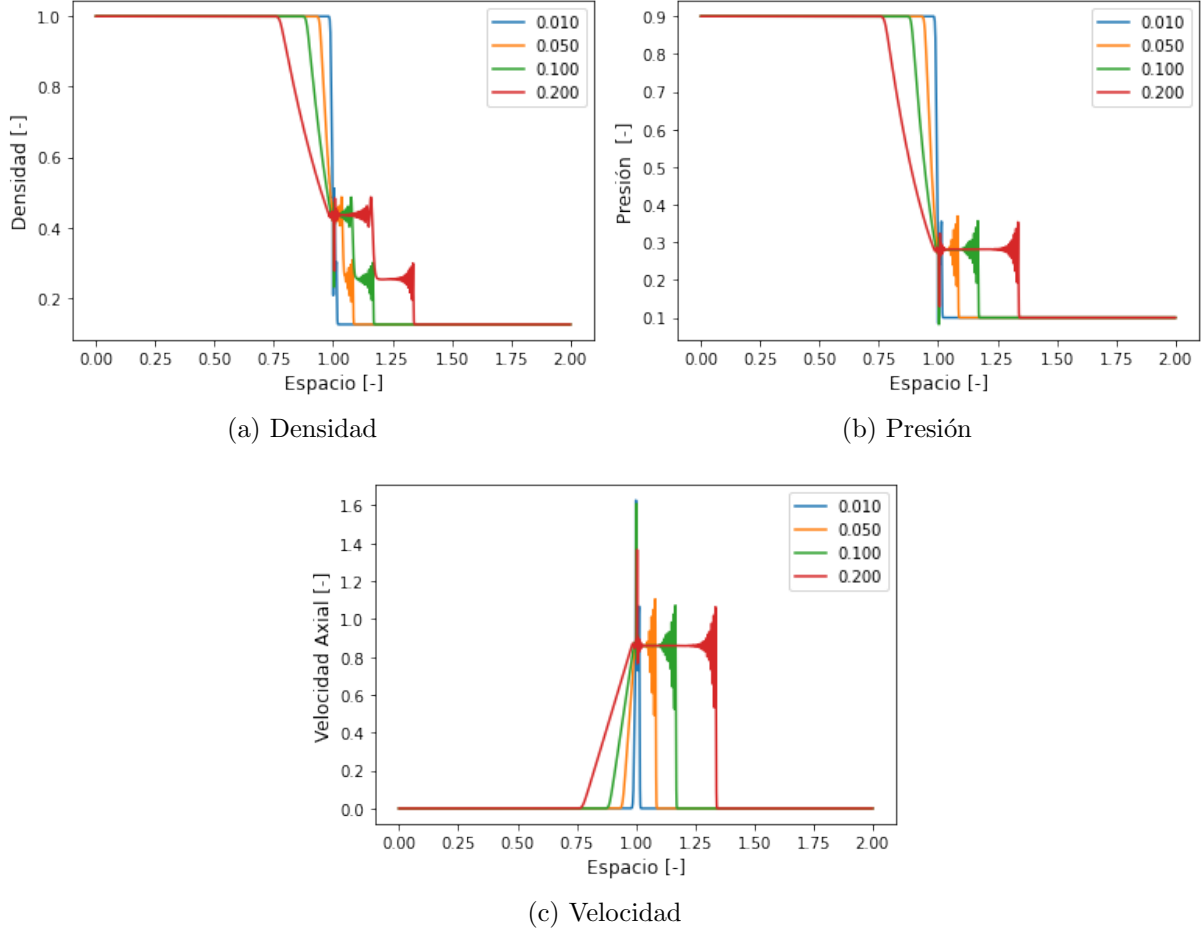


Figure 20: *Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 0.9. Richtmyer's.*

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
t = 0	0
t = 0.010	0.02
t = 0.050	0.10
t= 0.100	0.0.11
t=0.200	0.25

Table 11: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en t= 0 [s] para Método Richtmyer's Malla fina con dP=0.8

Se puede observar que cuando la diferencia de presión cambia a 0.8 ocurre lo siguiente:

- La diferencia de densidad con respecto a la malla gruesa es mucho más notoria, anteriormente no se detectó algún cambio significativo, ahora es posible comparar entre mallas finas que la densidad disminuye levemente más rápido en relación al espacio, alcanzando menores valores en las cercanías del metro o punto de partida.
- Tanto la presión como la velocidad también tienen el mismo análisis, en el que es más efectivo identificar la merma de presión o velocidad en comparación al caso base.

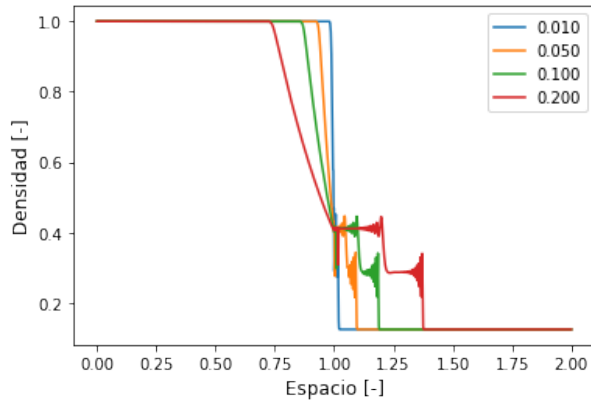
5.2.3 Resultados con una diferencia de presión de 1.1

Cambiando las condiciones iniciales de la siguiente manera, tenemos:

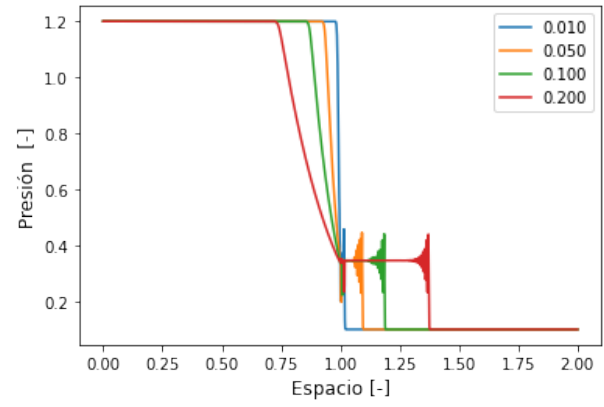
$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.2 \end{pmatrix} : x < 1 \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ v \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} : x \geq 1 \quad (26)$$

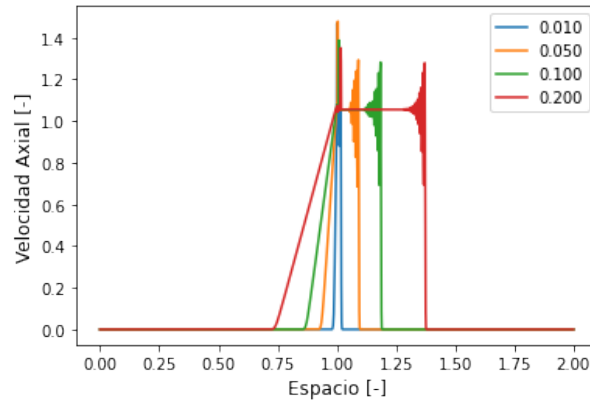
Para que el cambio de presión tenga magnitud **dP=1.2**, la presión tiene magnitud **P=1.2** cuando $x < 1$



(a) Densidad



(b) Presión



(c) Velocidad

Figure 21: *Gráficas de la densidad, Presión y velocidad axial del modelamiento cuando la diferencia de presión es 1.2. Richtmyer's.*

Tiempo Transcurrido [s]	Distancia Recorrida [-]
$t = 0$	0
$t = 0.010$	0.02
$t = 0.050$	0.10
$t = 0.100$	0.11
$t = 0.200$	0.25

Table 12: Distancia que recorre el frente de presión de la onda cuando pasa una cierta cantidad de tiempo, respecto a la onda en $t = 0$ [s] para Método Richtmyer's Malla fina con $dP = 1.1$

Se puede observar que cuando la diferencia de presión es de 1.1 ocurre que:

- Notamos que la velocidad a cortos instantes de tiempo alcanza un máximo mucho menor pero termina estabilizandose a una altura levemente mayor al caso base, disminuyendo los efectos de vibración-difusión.
- mismo análisis para la densidad y presión, donde que alcanzan valores mayores a un espacion mayor de efecto.

6 Conclusiones y análisis finales en relación a los distintos casos estudiados

Dado que se detalla anteriormente los cambios que sufren las curvas ante el cambio del delta de presión ΔP , es concluyente mencionar que ante una variación mayor en el tubo SOD, las velocidades, desidades y presiones tienden a ir a la alta y que ese detalle es mucho más visible para el caso de Richtmyer's.

Comparativamente podemos realizar distintos análisis cruzados entre los 4 casos estudiados. Para ambos en malla gruesa, notamos que Lax-Friedrich resulta mucho más eficiente, dado que no presenta efectos difusivos tan pronunciados como son en el caso de Richtmyer's.

Para malla fina, Lax-Friedrich no genera cambio en su desarrollo, haciendo que los efectos observables en Richtmyer's sean mucho más importantes a la hora de realizar un correcto análisis.

Para los dos casos de Lax-Friedrich notamos como se ven reflejados efectos que antes no se

disponían dada la magnitud de los nodos, obteniendo estos cambios en el lado derecho, pasando de tener una única curva a dos semi curvas que caen a cero en el mismo tiempo.

Para los dos casos de richtmyers se tiene la muestras de las ondas en ambas, pero la difusión para malla gruesa tiene una alta vibración debido al cambio abrupto en una curva no suave, este efecto se ve disminuido para malla fina, se supone que bajo efectos de una malla más fina irían desapareciendo o minimizandose, el costo computacional solo crece.

En cuanto al estimación de la velocidad del frente de onda en las curvas de presión obtenidas, se debe destacar que en la mayoría de los casos fueron medidas desde $x=1$ [m] hasta $x = 0$ [m], es decir desde el centro del espacio hacia la izquierda, esto es algunas gráficas presentaban desviaciones en la parte derecha. Para el método de Lax-Friedrichs el cambio de la velocidad del frente de la onda respecto al cambio de presión es practicamente inexistente, mientras que para el método de Richtmyer's era ligeramente más observable.

7 Anexo

7.1 Código Método Lax-Friedrichs

```
1  # Llamado de librerías
2  import numpy
3  from math import pi
4  from scipy import linalg
5  from scipy.linalg import solve
6  from scipy import sparse
7  from scipy.sparse.linalg import spsolve
8  import matplotlib.pyplot as plt
9  import matplotlib.gridspec as gridspec
10 # Datos Iniciales
11 k = 1.4
12 gamma = 1.4
13 x_min = 0
14 x_max = 2
15 x_med = 1
16
17 N = 1500
18 dt = 0.0001 # 0.0005
19 dx = (x_max-x_min)/(N-1)
20
21 x = numpy.linspace(x_min,x_max,N)
22
23 rho = numpy.zeros(len(x))
24 u = numpy.zeros(len(x))
25 p = numpy.zeros(len(x))
26 E = numpy.zeros(len(x))
27
28 def CondInicial(x,gamma):
29     for i in range(0,len(x)):
30         x[i] = i*dx
31
32         if (x[i] < 1):
33             rho[i] = 1.0
34             u[i] = 0.0
35             p[i] = 1.0
```

```

36         else:
37             rho[i] = 0.125
38             u[i] = 0.0
39             p[i] = 0.1
40
41             E[i] = p[i]/(gamma-1) + 0.5*rho[i]*u[i]**2
42         return rho,u,p,E
43     time = 0.
44     t_max = [0.01, 0.05, 0.1, 0.2]
45
46     #Creamos el cuerpo de los gráficos
47     fig1=plt.figure()
48     ax1=fig1.add_subplot(1,1,1)
49
50     plt.xlabel('Espacio [-]', fontsize=12)
51     plt.ylabel('Energía Interna [-]', fontsize=12)
52
53     fig2=plt.figure()
54     ax2=fig2.add_subplot(1,1,1)
55     plt.xlabel('Espacio [-]', fontsize=12)
56     plt.ylabel('Densidad x Velocidad Axial [-]', fontsize=12)
57
58     fig3=plt.figure()
59     ax3=fig3.add_subplot(1,1,1)
60     fig3.suptitle('Densidad a lo largo del eje x - Método Lax-Friedrichs 1500 nodos')
61     plt.xlabel('Espacio a lo largo del eje x [-]', fontsize=12)
62     plt.ylabel('Densidad [-]', fontsize=12)
63
64     #!
65     fig7=plt.figure()
66     ax7=fig7.add_subplot(1,1,1)
67     fig7.suptitle('Velocidad Axial a lo largo del eje x - Método Lax-Friedrichs 1500 nodos')
68     plt.xlabel('Espacio a lo largo del eje x [-]', fontsize=12)
69     plt.ylabel('Velocidad Axial [-]', fontsize=12)
70     #!!
71
72     #!
73     fig8=plt.figure()
74     ax8=fig8.add_subplot(1,1,1)

```

```

75 fig8.suptitle('Presión a lo largo del eje x - Método Lax-Friedrichs 1500 nodos')
76 plt.xlabel('Espacio a lo largo del eje x [-]', fontsize=12)
77 plt.ylabel('Presión [-]', fontsize=12)
78 ###
79
80 # Inicimos el loop para todos los tiempos solicitados
81 for i in range(len(t_max)):
82     U = numpy.zeros((len(x),3))
83     F = numpy.zeros((len(x),3))
84     rho,u,p,E = CondInicial(x,gamma)
85     while (time < t_max[i]):
86         U[:,0] = rho[:]
87         U[:,1] = rho[:] * u[:]
88         U[:,2] = E[:]
89
90         F[:,0] = U[:,1]
91         F[:,1] = rho[:] * u[:] * u[:] + p[:]
92         F[:,2] = u[:] * (E[:] + p[:])
93     ##LAX FRIEDRICHS
94     Un = numpy.zeros((len(x),3))
95     Un[1:len(x)-1,:] = 0.5*(U[0:len(x)-2,:]+U[2:len(x),:])-dt/(2*dx)*(F[2:len(x),:]-F
96     #Condiciones de Borde
97     Un[0,:] = Un[1,:] #Neumann, gradiente = 0
98     Un[len(x)-1,:] = Un[len(x)-2,:] #Neumann, gradiente = 0
99     ##Reescritura de las variables en el instante dt*n
100     time += dt
101     U = Un
102
103     rho[:] = Un[:,0]
104     u = Un[:,1]/Un[:,0]
105     E = Un[:,2]
106     p = (gamma-1.0)*(E - 0.5*rho[:] * u[:]**2)
107
108
109
110     ax1.plot(x,U[:,2], label='%1.3f'%time , ) #1 string 3 decimales, f = flotante % as
111     ax2.plot(x,U[:,1], label='%1.3f'%time )
112     ax3.plot(x,U[:,0], label='t = '%1.3f'%time+' [s]' )
113

```



```

114     ax7.plot(x,U[:,1]/U[:,0], label='t = '%1.3f'%time+' [s]' )
115     ax7.legend()
116
117     ax8.plot(x,p[:], label='t = '%1.3f'%time+' [s]' )
118     ax8.legend()
119
120     ax1.legend()
121     ax2.legend()
122     ax3.legend()

```

7.2 Código Método Richtmyer's

```

1  rhor = numpy.zeros(len(x))
2  ur = numpy.zeros(len(x))
3  pr = numpy.zeros(len(x))
4  Er = numpy.zeros(len(x))
5
6  time=0
7  t_max=[0.01, 0.05, 0.1, 0.2]
8  dt = 0.0005
9
10 # Inicialización gráficas
11 fig4=plt.figure()
12 ax4=fig4.add_subplot(1,1,1)
13 plt.xlabel('Espacio [-]', fontsize=12)
14 plt.ylabel('Energía Interna [-]', fontsize=12)
15
16 fig5=plt.figure()
17 ax5=fig5.add_subplot(1,1,1)
18 plt.xlabel('Espacio [-]', fontsize=12)
19 plt.ylabel('Densidad x Velocidad Axial [-]', fontsize=12)
20
21 fig6=plt.figure()
22 ax6=fig6.add_subplot(1,1,1)
23 plt.xlabel('Espacio [-]', fontsize=12)
24 plt.ylabel('Densidad [-]', fontsize=12)
25
26 # Iniciamos el loop para todos los tiempos solicitados
27

```

```

28 for i in range(len(t_max)):
29     time=0
30     Ur = numpy.zeros((len(x),3))
31     Fr = numpy.zeros((len(x),3))
32     rhor,ur,pr,Er = CondInicial(x,gamma)
33
34     while (time < t_max[i]):
35         Ur[:,0] = rhor[:]
36         Ur[:,1] = rhor[:] * ur[:]
37         Ur[:,2] = Er[:]
38
39         Fr[:,0] = Ur[:,1]
40         Fr[:,1] = rhor[:] * ur[:] * ur[:] + pr[:]
41         Fr[:,2] = ur[:] * (Er[:] + pr[:])
42
43         ##Richmyers
44
45         ##Inicializamos matrices de paso
46         Umas = numpy.zeros((len(x),3))
47         Umenos = numpy.zeros((len(x),3))
48         Fmas = numpy.zeros((len(x),3))
49         Fmenos = numpy.zeros((len(x),3))
50
51         Umas[1:-1,:] = 0.5 * (Ur[2:,:] + Ur[1:-1,:]) - (dt/(2*dx)) * (Fr[2:,:] - Fr[1:-1,:])
52         Umenos[1:-1,:] = 0.5 * (Ur[1:-1,:] + Ur[:-2,:]) - (dt/(2*dx)) * (Fr[1:-1,:] - Fr[:-2,:])
53
54         ##Condiciones de borde de U, Neumann = 0
55         Umas[0,:] = Umas[1,:]
56         Umas[-1,:] = Umas[-2,:]
57         Umenos[0,:] = Umenos[1,:]
58         Umenos[-1,:] = Umenos[-2,:]
59
60         ##Constantes para Fmas
61         rhor[:] = Umas[:,0] #
62         ur[:] = Umas[:,1]/Umas[:,0]
63         Er[:] = Umas[:,2]
64         pr[:] = (gamma-1.0) * (Er[:] - 0.5 * rhor[:] * ur[:] ** 2)
65
66         ##Cálculo de Fmas

```

```

67     Fmas[:,0] = Umas[:,1]
68     Fmas[:,1] = rhor[:,0]*ur[:,1]*ur[:,1] + pr[:,1]
69     Fmas[:,2] = ur[:,1]*(Er[:,1] + pr[:,1])
70
71     #Constante para Fmenos, reescribimos
72     rhor[:,0] = Umenos[:,0] #
73     ur[:,1] = Umenos[:,1]/Umenos[:,0]
74     Er[:,1] = Umenos[:,2]
75     pr[:,1] = (gamma-1.0)*(Er[:,1] - 0.5*rhor[:,0]*ur[:,1]**2)
76
77     ##Cálculo de Fmenos
78     Fmenos[:,0] = Umenos[:,1]
79     Fmenos[:,1] = rhor[:,0]*ur[:,1]*ur[:,1] + pr[:,1]
80     Fmenos[:,2] = ur[:,1]*(Er[:,1] + pr[:,1])
81
82     ##Corrección
83     Ur[1:-1,:] = Ur[1:-1,:] - (dt/dx)*(Fmas[1:-1,:] - Fmenos[1:-1,:])
84
85     ##Condiciones de borde
86     Ur[0,:] = Ur[1,:]
87     Ur[-1,:] = Ur[-2,:]
88
89     #Reescribimos las constantes
90     rhor[:,0] = Ur[:,0]
91     ur[:,1] = Ur[:,1]/Ur[:,0]
92     Er[:,1] = Ur[:,2]
93     pr[:,1] = (gamma-1.0)*(Er[:,1] - 0.5*rhor[:,0]*ur[:,1]**2)
94
95     time += dt
96
97     ax4.plot(x,Ur[:,2], label='%1.3f'%time ) #1 string 3 decimales, f = flotante % asig
98     ax5.plot(x,Ur[:,1], label='%1.3f'%time )
99     ax6.plot(x,Ur[:,0], label='%1.3f'%time )
100    ax4.legend()
101    ax5.legend()
102    ax6.legend()

```