

Análisis y Resolución de la Ec. de Navier Stokes

Fundamentos de Dinámica de Fluidos Computacional: Tarea Grupal 1

Jean Pierre Rojas & Byron Alexander Vega Lagos
Dr. Ing. Christoper Cooper - Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Ingeniería Mecánica, Valparaiso, Chile
jean.rojas@sansano.usm.cl & byron.vega@sansano.usm.cl

Abstract

El siguiente informe corresponde a la resolución de la ecuación de Navier Stokes y continuidad para modelar el caso de un flujo que recorre una cavidad de dos dimensiones cuya pared inferior está inmovilizada y la pared superior se mueve con una cierta velocidad. Debido a la condición de no-deslizamiento, el movimiento de esta pared superior arrastra al fluido y se genera estructuras vórticales dentro de la cavidad, dependientes del número de Reynolds.

Lamentablemente los resultados obtenidos no coinciden con los propuestos académicamente, y resultó ser una problemática estudiada por bastantes días sin éxito. Es por ello, y dado las opciones de análisis disponible, que se propuso un estudio detallado de cada sección con el objetivo de que se pueda acceder sin problema a la teoría del caso.

Insistir en que la deficiencia del programa es mínima y tiene relación con las condiciones de contorno, que no se ven reflejadas necesariamente en dos de los costados, generando un "escape de flujo" por medio de estas directrices

El presente documento muestra un análisis detallado de la situación dispuesta, así como la discretización adecuada para su realización en software junto a un resumen algorítmico y esquemas de ayuda para su implementación en python.

Otros tópicos a tratar tienen relación con la variabilidad del código, aspectos como el aumento temporal de las mediciones, cambios físicos como el reynolds, las dimensiones de malla utilizadas y un análisis detallado de inestabilidad de código.

Enviado en Noviembre del 2021

Palabras Claves: *CFD, Discretización, Navier Stokes*

Contents

1	Enunciado	3
2	Desarrollo	3
2.1	Ecuación de convección-difusión bidimensional y continuidad	3
2.1.1	Paso de Predicción	3
2.1.2	Divergencia y Presión:	4
2.1.3	Cálculo de Divergencia:	4
2.1.4	Cálculo de la presión:	5
2.1.5	Cálculo de Gradiente de Presión	6
2.1.6	Etapa de Corrección	6
3	Resumen del Algoritmo:	6
4	Resultados	7
4.1	Esquemas numéricos en MatLab y Justificación de resultados	7
4.2	Descripción general del flujo para varios pasos de tiempo. ¿Cuándo se estabiliza el flujo?	11
4.3	¿Es capaz de reproducir las estructuras del flujo que aparecen en la publicación de Guia, Ghia y Shin	13
4.4	Efecto de variar el número de Reynolds. ¿Cómo varía la estructura del flujo? . .	17
4.5	¿Qué ocurre al variar Δt y Δx ? ¿En qué casos la inestabilidad es debido al término difusivo y en cuales al convectivo?	18
4.6	¿Qué ocurre al modificar la geometría de la cavidad? , ¿Se observa efectos similares a la publicación de Omari ?	19
5	Referencias	20

1 Enunciado

Se requiere modelar el caso de un flujo que pasa por una cavidad cuya pared inferior está inmovilizada y su pared superior se encuentra en movimiento con velocidad u_0 .

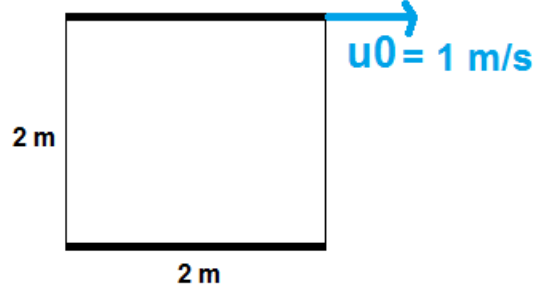


Figure 1: Esquema del Flujo que pasa por la cavidad

2 Desarrollo

2.1 Ecuación de convección-difusión bidimensional y continuidad

2.1.1 Paso de Predicción

Ocupando la ecuación de convección-difusión en dos dimensiones, realizaremos el paso de predicción con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} = -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Con las siguientes condiciones de borde :

- $u^* = 0, v^* = 0$ en $x = 0, y = 0, x = L$
- $u^* = u_0, v = 0$ en $y = L$

La forma discretizada para el u^* resulta de la siguiente manera:

$$u^* = u^n + \Delta t \left(-u^n \frac{du^n}{dx} - v^n \frac{du^n}{dy} + \nu \left(\frac{d^2 u^n}{dx^2} + \frac{d^2 u^n}{dy^2} \right) \right) \quad (3)$$

Y suponiendo diferencias atrasadas:

$$u^* = u^n + \Delta t \left(-u^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v^n \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \nu \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (4)$$

El caso de v^* es análogo.

$$v^* = v^n + \Delta t \left(-u^n \frac{dv^n}{dx} - v^n \frac{dv^n}{dy} + \nu \left(\frac{d^2 v^n}{dx^2} + \frac{d^2 v^n}{dy^2} \right) \right) \quad (5)$$

$$v^* = v^n + \Delta t \left(-u^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v^n \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \nu \left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (6)$$

2.1.2 Divergencia y Presión:

Dado que asumimos flujo incompresible para el caso estudiado, la presión pierde su sentido termodinámico y a la siguiente relación forzaremos la incompresibilidad.

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \quad (7)$$

Con las siguientes condiciones de borde:

- $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} = 0$: $x=0$, $x=L$.
- $\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = 0$: $y=0$, $y=L$.

2.1.3 Cálculo de Divergencia:

Podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente manera, donde el lado derecho de la ecuación será fundamental para obtener la **divergencia** de V^* .

$$\frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \text{div} \quad (8)$$

Realizamos la discretización de primer orden con diferencias centradas:

$$\text{div} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (9)$$

La ecuación obtenida es importante ya que la usaremos para calcular la divergencia de V^* necesaria en el lado derecho de la ecuación. (Lo solicita el ítem 2 del enunciado). Por lo tanto, la relación obtenida en el lado derecho de la ecuación resulta:

$$\frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (10)$$

2.1.4 Cálculo de la presión:

En cuanto al lado izquierdo de la ecuación, Realizando una discretización de segundo orden, se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (11)$$

Luego al juntar ambas relaciones obtenidos a la izquierda y a la derecha de la ecuación, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) \quad (12)$$

Suponiendo un tamaño de refinación de malla del eje x de la misma magnitud que el eje y, tenemos:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \quad (13)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{\rho \Delta^2}{-4t} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta} \right) - p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1} \quad (14)$$

A pesar que la ecuación anterior es la forma discretizada para obtener p^{n+1} en cada elemento \mathbf{i}, \mathbf{j} . Nos conviene más resolver el lado izquierdo primero(en la ecuación 12) generando una matriz del siguiente tipo, donde se fuerza una condición de borde en la diagonal, necesaria para resolver el lado izquierdo.

$$[A] [p^{n+1}] = [f] + [c.b.]. \quad (15)$$

2.1.5 Cálculo de Gradiente de Presión

Una vez obtenida la presión p^{n+1} procedemos a calcular el gradiente. Recordar que teníamos el arreglo de presión en una dimensión, por lo tanto debemos transformarlo a un campo de presión de dos dimensiones y esto lo haremos con la función `map1Dto2D()` ya vista en el Laboratorio 6. Una vez realizada la transformación a dos dimensiones, se calcula el gradiente de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} = \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta} \quad (16)$$

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta} \quad (17)$$

2.1.6 Etapa de Corrección

Finalmente, se calcula u^{n+1} y v^{n+1} utilizando el gradiente de presión obtenido anteriormente. La ecuación a utilizar es la siguiente:

$$u^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + v^* \quad (18)$$

$$v^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\rho} \cdot \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + u^* \quad (19)$$

3 Resumen del Algoritmo:

Anteriormente explicamos en detalle las discretizaciones y ecuaciones a ocupar para modelar este problema. Ahora lo resumiremos en el siguiente pseudo-código:

```
Mientras que iteracion t sea menor a una determinada cantidad de pasos temporales
    Calcular u asterisco y v asterisco (Paso de prediccion).
    Calcular Divergencia de V asterisco.
    Calcular Presion mediante matriz de Poisson.
    Determinar el gradiente de la presion.
    Calcular u y v en el paso temporal siguiente ( Paso de correccion).
    Aumentar en uno la magnitud de la cantidad de iteraciones llevadas a cabo.
Graficar presion y velocidad
```

¡Y ya está!, aplicando toda la teoría explicada anteriormente podemos obtener el gráfico de presión con líneas de flujo que modela la situación enunciada.

4 Resultados

4.1 Esquemas numéricos en MatLab y Justificación de resultados

Como se ha mencionado anteriormente en el *Abstract* de la tarea, los resultados esperados del informe no han dado iguales, es cuestión de revisar el gráfico adjunto para entender fácilmente donde radica el problema, pero eso se conversará en breve. A modo de justificativo se expliquen los procedimientos tomados para el desarrollo de los códigos.

Con el objetivo de programar eficientemente, se optó por tomar en cuenta la recomendación de evitar el doble uso del ciclo for, y en vez de eso trabajar con arreglos. Se realizó varios ensayos previos para evitar conflictos y entender bien cómo trabajar con los arreglos, identificando una forma de anexar valores a la matriz que va generando Python. En la figura 2 se ilustra el uso correcto para los elementos que se utilizan en diferencias centradas, notar que Python ubica los elementos de la abscisa en la ordenada y viceversa. Además tiene el efecto de que el vertice está ubicado en la parte superior izquierda. Estos detalles son importantes meramente a nivel de programación en python.

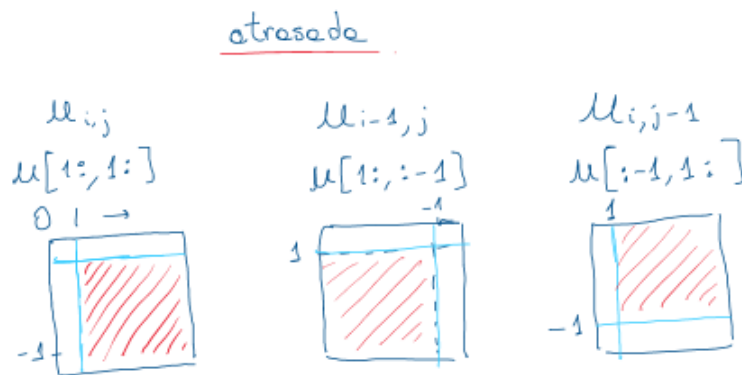


Figure 2: Cuadros guías para diferencias atrasadas

Además se ilustra en la figura 3 los cuadros guías para diferencias centradas, que tomaron mucha más relevancia en el desarrollo del código.

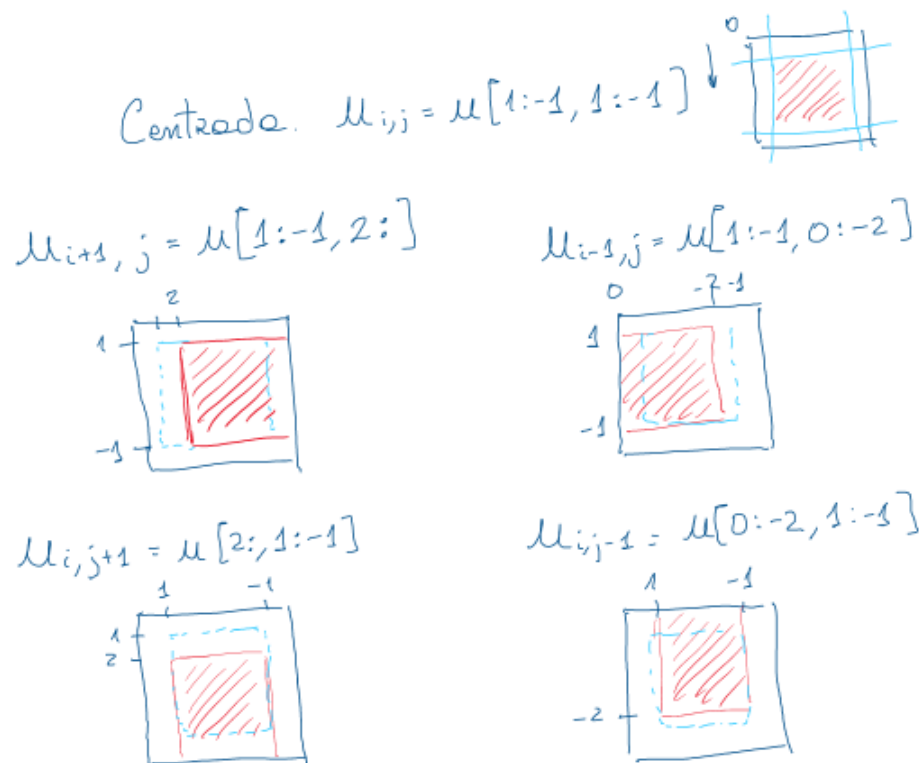


Figure 3: Cuadros guías para diferencias centradas

Los códigos escritos se encuentran en el archivo .ipynb, corresponde hablar sobre detalles relevantes en el desarrollo de cada uno de ellos. Pues se obtuvo un resultado que no coincide al de la guía, se tomó una metodología super estricta de revisión y no se logró encontrar el error respectivo.

Sección de Código	Comentarios
Función Prediccion	Resultó ser el eje central del proceso dado que se identificó los elementos característicos, la composición de la función viene del laboratorio de burgers
Función DivergenciaV	Dado las estipulaciones tratadas en las figuras superiores con respecto a predicción se efectúa la función divergenciaV. Inicialmente se realizó un análisis que incluye bordes y puntas, pero los requerimientos del código no terminaban por utilizar estos valores laterales. Se compara con otras formas de realizar el código de divergencia obteniendo diferencias con la versión 2 pero valores similares con la versión 3.
Función map_1Dto2D	Se hace uso de la función entregada en el laboratorio de Poisson, tomando las modificaciones adecuadas para las condiciones de Dirichlet del problema
Función generateMatrix	Se hace uso de la función entregada en el laboratorio de Poisson para la determinación de la matriz M, pues se observa el mismo tipo de problema del gradiente de la función phi.
Función generateRHS	Se hace uso de la función entregada en el laboratorio de Poisson para el reordenamiento de la matriz de divergencia, simplificando a su mínima expresión, dada la naturaleza del problema, que no contiene condiciones distintas de cero.
Función gradienteP	Dada diferencias centradas es fácil de determinar.
Función correccion	Dada diferencias centradas es fácil de determinar.
Lineas de Resolución	Persigue el procedimiento disputado anteriormente por medio de un iterador de tiempo. Además de permitir la gráfica del cuerpo en cuestión.

De los proceso de codificación en Jupyter Notebook se obtiene la siguiente figura 4 donde notamos que el comportamiento en las esquinas superior y derecha corresponden con lo estipulado en la predicción del enunciado y también con lo mostrado en las referencias de Ghia U.,Ghia K. as Shin. Lamentablemente, faltó identificar y poner adecuadamente condiciones inferiores, y también las del lado lateral izquierdo.

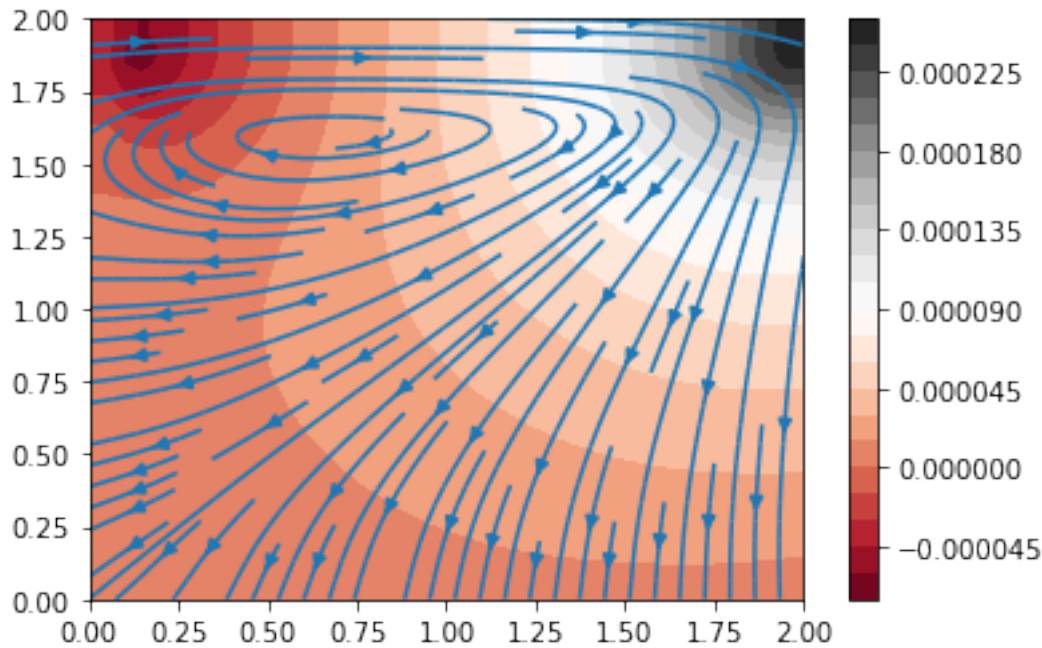


Figure 4: Comportamiento obtenido, no se valida con los resultados reales

De hecho es fácil de observar que al anular el gradiente en estos lados el flujo tendera a subir por las paredes del depósito, formándose el vortice central de flujo. Problematicamente se ha hecho un desafío largo el análisis de error para encontrar estas columnas de datos que no están siendo medidas, o que se están repitiendo de manera erronea.

Además se hace notar que de cerrar efectivamente la caja de flujos el vortice central superior tenderá al equilibrio en el centro para el Re utilizado.

4.2 Descripción general del flujo para varios pasos de tiempo. ¿Cuándo se estabiliza el flujo?

Se vuelve problemático el análisis del caso, pero se ilustran a continuación el flujo para varios pasos de tiempo, tomado 50 300 y 600 instantes de tiempo donde se puede ver el vortice que se genera centralmente en el fluido debido al flujo constante del líquido en la parte superior hacia el este versus la distribución de flujo que intenta moverse en contra de este, claramente al aumentar el tiempo se observa un vortice central muy marcado.

Como nota, se desprecia para el análisis toda información que venga desde la parte inferior y lateral izquierda, aunque esta da la sensación de que el gráfico no está dimensionado a las medidas correctas.

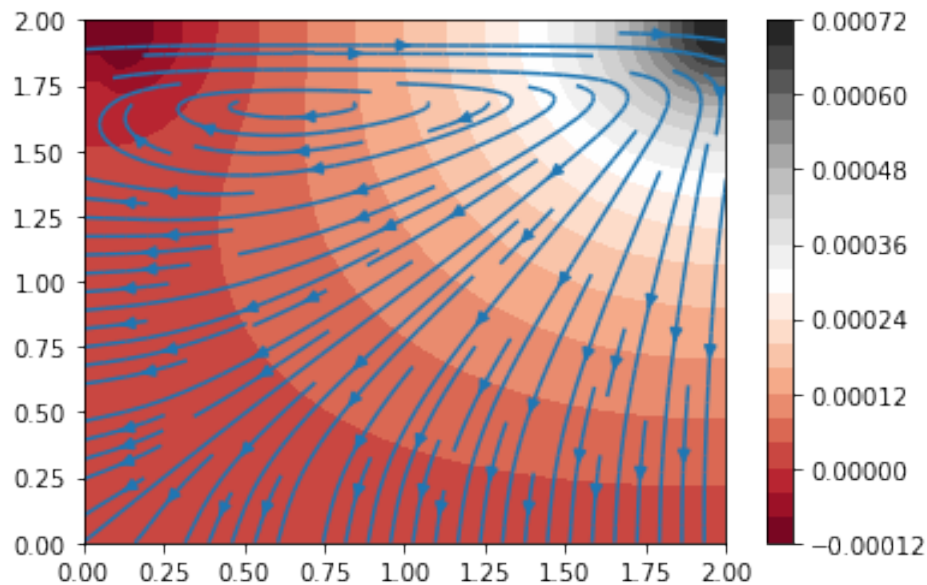


Figure 5: Toma de muestras a 50 instantes de tiempo

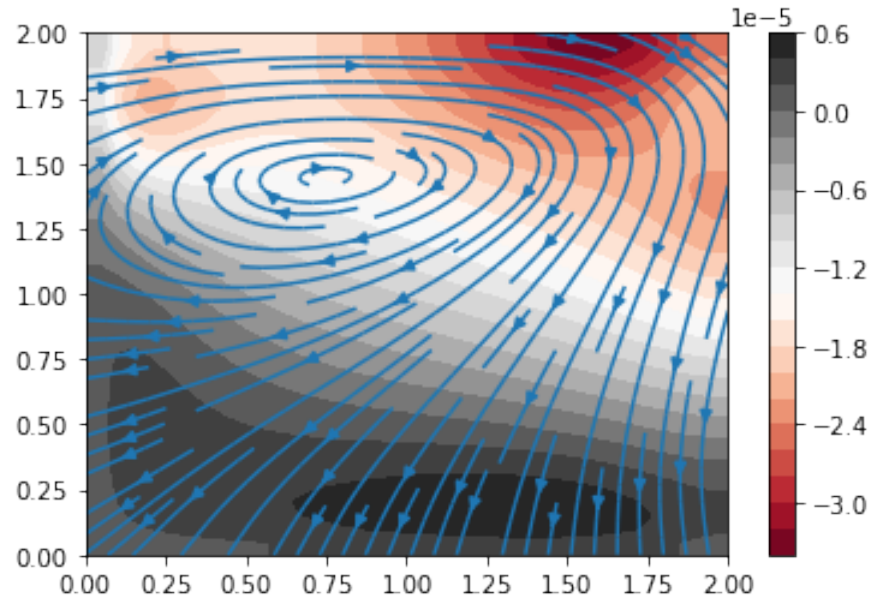


Figure 6: Toma de muestras a 300 instantes de tiempo

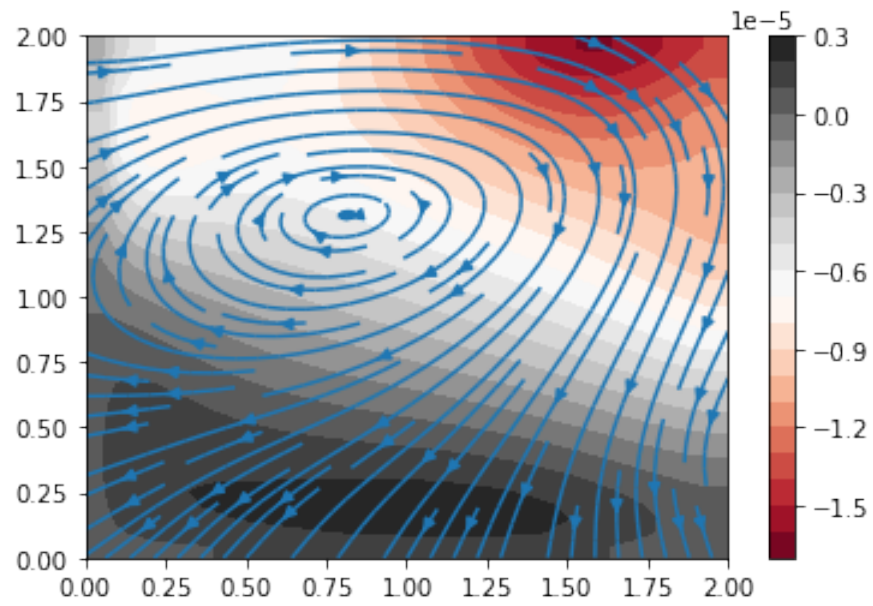


Figure 7: Toma de muestras a 600 instantes de tiempo

4.3 ¿Es capaz de reproducir las estructuras del flujo que aparecen en la publicación de Guia, Ghia y Shin

Las estructuras de flujo que aparecen en la publicación de Ghia, Guia y Shin en el Paper titulado "High Re Solutions for incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*" son las siguientes:

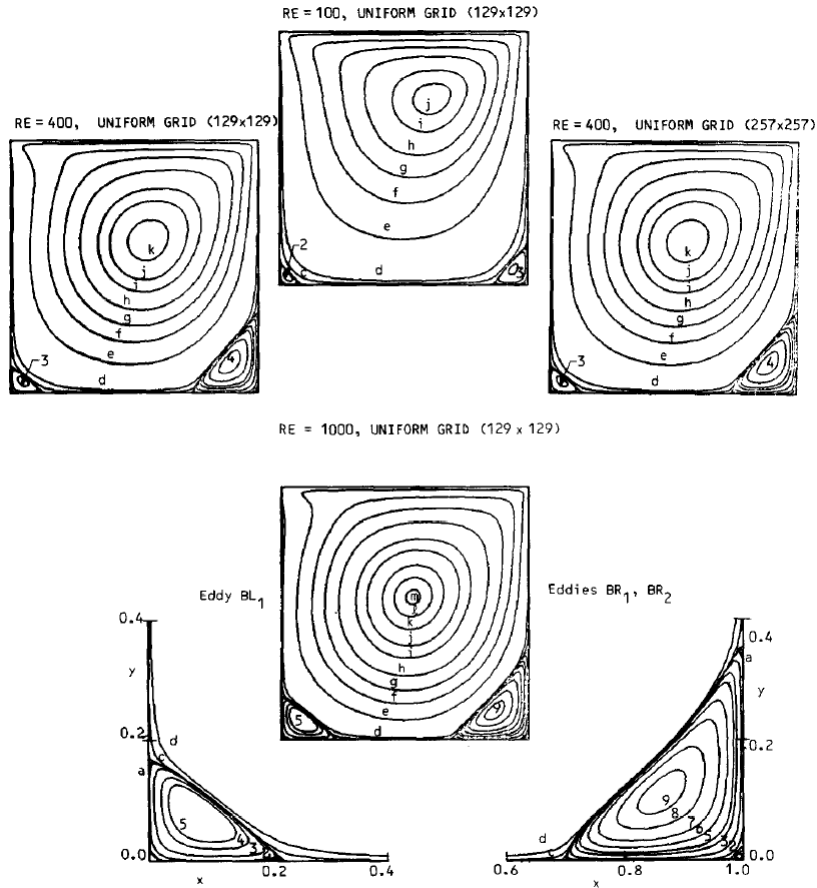


FIG. 3. Streamline pattern for primary, secondary, and additional corner vortices.

Figure 8: Esquema de líneas de corriente para bajo Re (Ghia, 1982)

Podemos notar que los vortices ubicados en el centro obtenidos con nuestro código se asemejan a los obtenidos por Ghia et al. Sin embargo son sólo los vortices que están al centro, a medida que se alejan del centro pierden la forma. La razón por la que ocurre esto es que es posible que sea debido a que nuestro código presenta errores en los cálculos.

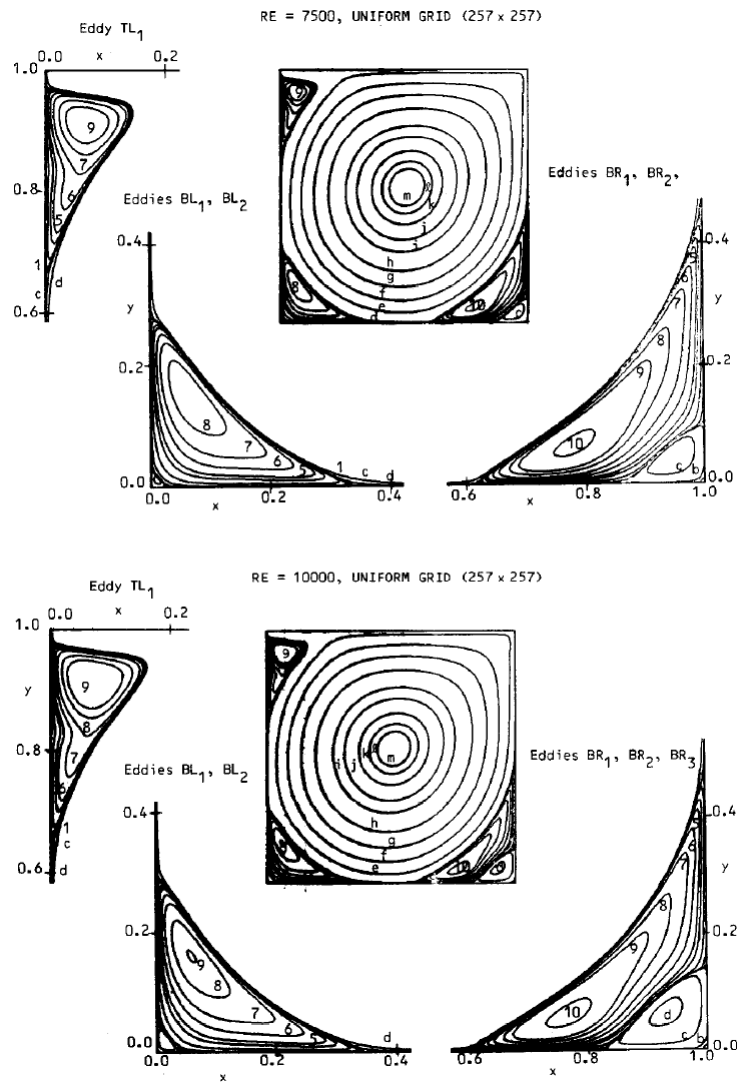
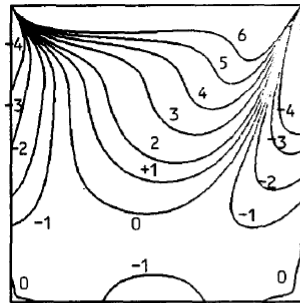
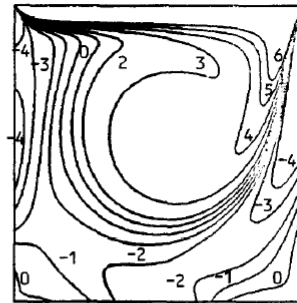


Figure 9: Esquema de lineas de corriente para alto Re (Ghia, 1982)

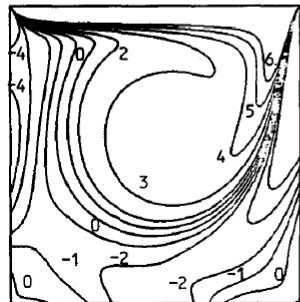
RE = 100, UNIFORM GRID (129 x 129)



RE = 400, UNIFORM GRID (129 x 129)



RE = 400, UNIFORM GRID (257 x 257)



RE = 1000, UNIFORM GRID (129 x 129)

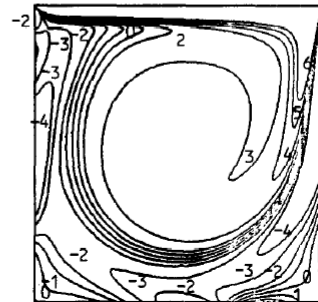
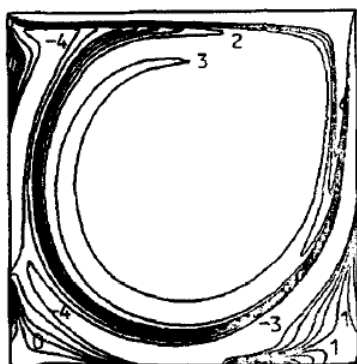


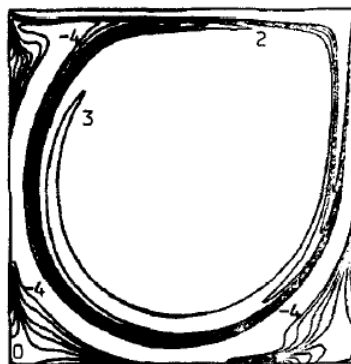
FIG. 4. Vorticity contours for flow in driven cavity.

Figure 10: Esquema de vortices de contorno para bajo Re (Ghia, 1982)

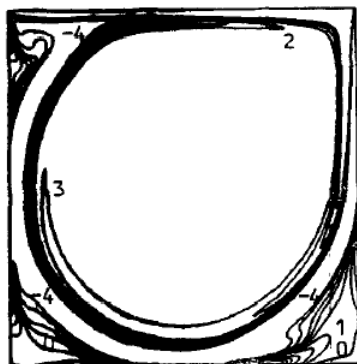
RE = 3200, UNIFORM GRID (129 x 129)



RE = 5000, UNIFORM GRID (257 x 257)



RE = 7500, UNIFORM GRID (257 x 257)



RE = 10000, UNIFORM GRID (257 x 257)

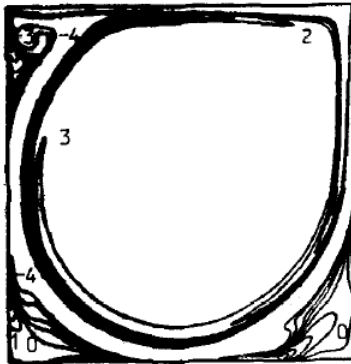


FIGURE 4 (continued)

Figure 11: Esquema de vortices de contorno para alto Re (Ghia, 1982)

4.4 Efecto de variar el número de Reynolds. ¿Cómo varía la estructura del flujo?

Para determinar el Número de Reynolds ocuparemos la siguiente relación:

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (20)$$

Donde U corresponde a la velocidad del fluido, D el diámetro hidráulico de la cavidad y ν es el coeficiente de viscosidad cinemática del fluido.

Como podemos notar, el número de Reynolds está relacionado con el coeficiente de viscosidad cinemática ν , al aumentar el Reynolds, disminuye el coeficiente ν .

A continuación se ilustran dos figuras, la primera de ellas contiene Reynolds bajo, dado que el flujo va relativamente lento, este se mueve más regularmente hasta que da contra la pared derecha.

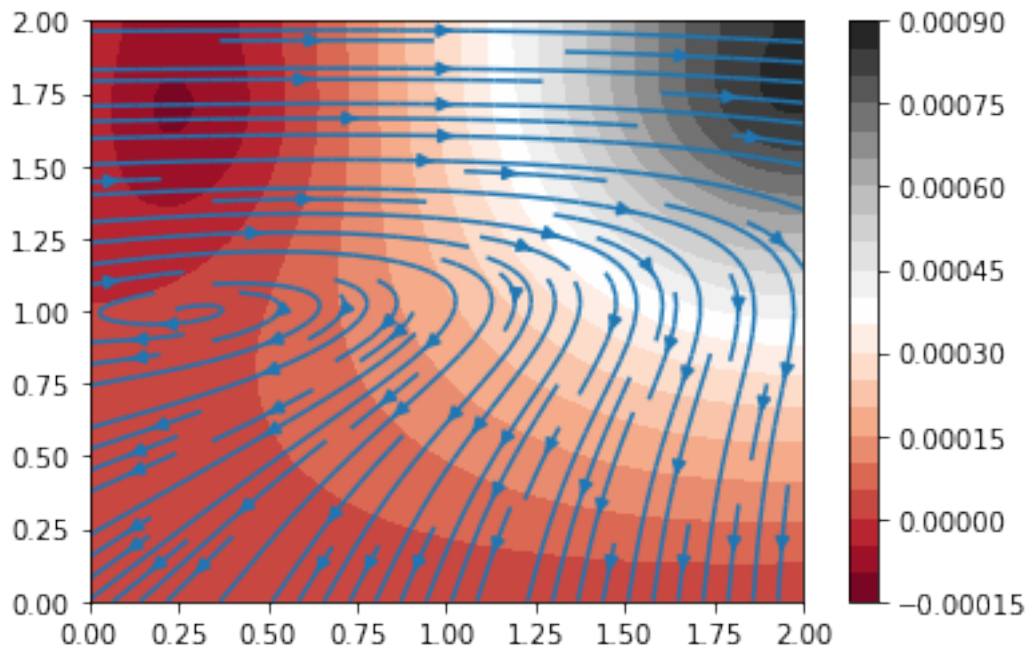


Figure 12: Esquema producto de bajar el Reynolds promedio

La figura 13 muestra el resultado de elevar el Reynolds drásticamente, notamos que en el vortice superior se tiene una alta presión debido a la velocidad del fluido.

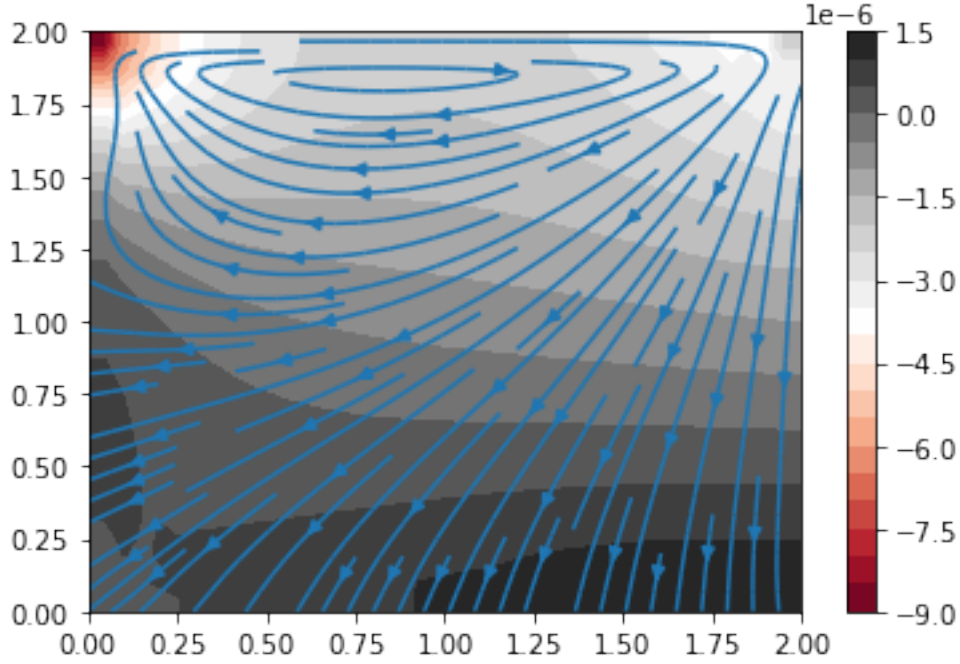


Figure 13: Esquema producto de elevar el Reynolds promedio

4.5 ¿Qué ocurre al variar Δt y Δx ? ¿En qué casos la inestabilidad es debido al término difusivo y en cuales al convectivo?

Variar Δt y Δx significa modificar el refinamiento espacial y temporal en la malla, lo que también cambia la cantidad de nodos en el problema. La consecuencia más inmediata de esto es que **una elección incorrecta de Δt y Δx puede producir inestabilidades en el flujo**. Esto se encuentra determinado por el número de Courant-Friedrichs-Levy **CFL**, el cual es una condición de convergencia de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales solucionadas mediante algoritmos del tipo explícito.

Existen dos condiciones que aseguran estabilidad para los distintos términos de la ecuación.

Para el caso de los términos difusivos, se tiene:

$$CFL_{difusion} = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2} \quad (21)$$

Relación que ignora los términos convectivos y en el caso que su magnitud fuese mayor a $\frac{1}{2}$, podríamos asociar la inestabilidad debido al término difusivo.

En cuanto a los términos convectivos, tenemos la siguiente relación:

$$CFL_{conveccion} = \frac{u_{i,j} \Delta t}{(\Delta x)} < 1 \quad (22)$$

Podemos notar que en este caso cada elemento de la velocidad $u_{i,j}$ multiplicado por el factor $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ debe ser menor a $\frac{1}{2}$ para la estabilidad. En caso contrario la inestabilidad la podemos asociar al término convectivo.

4.6 ¿Qué ocurre al modificar la geometría de la cavidad? , ¿Se observa efectos similares a la publicación de Omari ?

Modificar la geometría de la cavidad

Los efectos que ocurren en la publicación de Omari al variar el AR (Aspect Ratio - Relación Ancho-Alto) son los que podemos apreciar en la siguiente figura

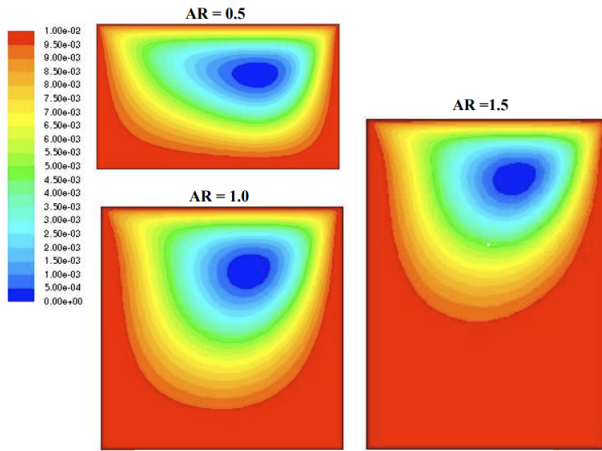


Figure 12: Contours of stream function at different aspect ratio for $Re = 100$.

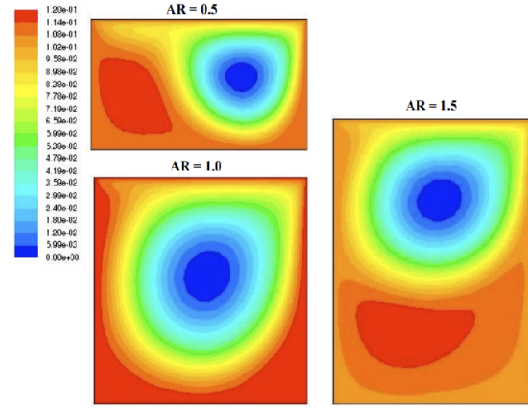


Figure 13: Contours of stream function at different aspect ratio for $Re = 1000$.

Figure 14: Esquema de líneas de contorno con distinta relación de aspecto para $Re=100$ y $Re=1000$ (Omari, 2013)

Podemos notar que en el caso de un Reynolds pequeño $Re=100$, sucede lo siguiente

- Un poco más arriba del centro de la figura, existe una zona ovalada de baja presión, a medida que nos alejamos de este centro la presión empieza a aumentar manteniendo una forma ovalada, hasta llegar a los extremos donde se encuentra la zona de alta presión (de color rojo). Esta zona de alta presión abarca mayor "terreno" en el extremo inferior, que si lo comparasemos con el extremo superior. La descripción anterior corresponde cuando la relación Altura-Ancho AR es de magnitud 1.

- Cuando AR es menor a uno, podemos notar que la estructura ovalada de los distintos ovalos de presión se mantiene, sin embargo la zona de alta presión se reduce.
- Cuando AR es mayor a uno, la zona de alta presión aumenta de tamaño, sin embargo la estructura ovalada de distintas presiones mantiene su forma en el mismo lugar.

En cuanto a un Reynolds un poco más grande, $Re=1000$, tenemos:

- En el centro de la figura, existe una zona circular de baja presión que va creciendo a medida que el radio crece. Los extremos fuera del centro corresponden a zona de media-alta presión(Distinto a la zona de alta presión en el caso de $Re=100$)
- Cuando AR es menor a uno, podemos notar que se mantiene la estructura circular de baja presión que aumenta su magnitud a medida que el raddio crece. Sin embargo podemos notar que cuando la relación de altura ancho es 0.5, la zona circular se desplaza hacia la derecha y a la izquierda se genera una zona de alta presión.
- Cuando AR es mayor a uno, pasa exactamente lo mismo que si fuese AR menor a uno, sólo que la zona de alta presión se desplaza hacia abajo, manteniendo los márgenes con una zona de Alta-media presión y la zona circular de baja presión se desplaza hacia arriba.

5 Referencias

1. Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin C. T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. J. Comput. Phys. 48 387-411 (1982)
2. Chorin, A. J. The numerical solution of the Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. Bull. Am. Math. Soc. 73 928-931 (1967)
3. Chorin, A. J. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. Math. Comp. 22 745-762 (1968) doi:10.1090/s0025-5718-1968-0242392-2
4. Reyad Omari CFD simulations of lid driven cavity ow at moderate Reynolds number European Scienti Journal9 15 (2013)