

João Pedro Frare - 281260

EA614

04 de setembro de 2025

Relatório Atividade 2 - Série de Fourier

Introdução:

Para a realização deste relatório, um arquivo .ipynb foi enviado em anexo ao documento, nele constam as bibliotecas e funções utilizadas para a geração dos gráficos e valores calculados para cada item mencionado no enunciado.

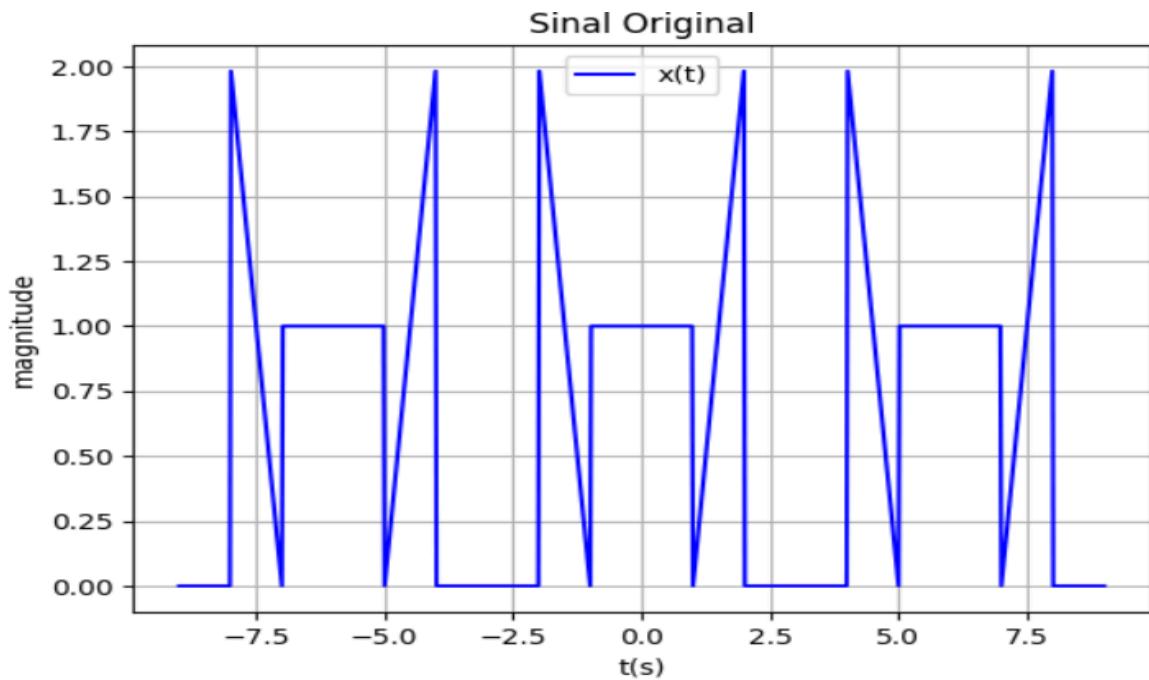
Para a geração dos gráficos temporais, foi utilizado um vetor de tempo com 1000 pontos uniformemente distribuídos no intervalo de -9 a 9 , cobrindo três períodos completos do sinal. Considerando que o período fundamental é $T = 6s$, cada período contém aproximadamente 333 pontos, o que garante boa resolução para análise espectral e reconstrução por série de Fourier.

Parte Teórica

a) Para a função periódica pedida, os coeficientes da série de fourier são da forma:

$$c_k = \begin{cases} \frac{2 \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)}{k\pi} + \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{k\pi} - \frac{12 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{k^2\pi^2} & k \neq 0 \\ \frac{2}{3} & k = 0 \end{cases}$$

obs: consta no apêndice o desenvolvimento do cálculo dos coeficientes



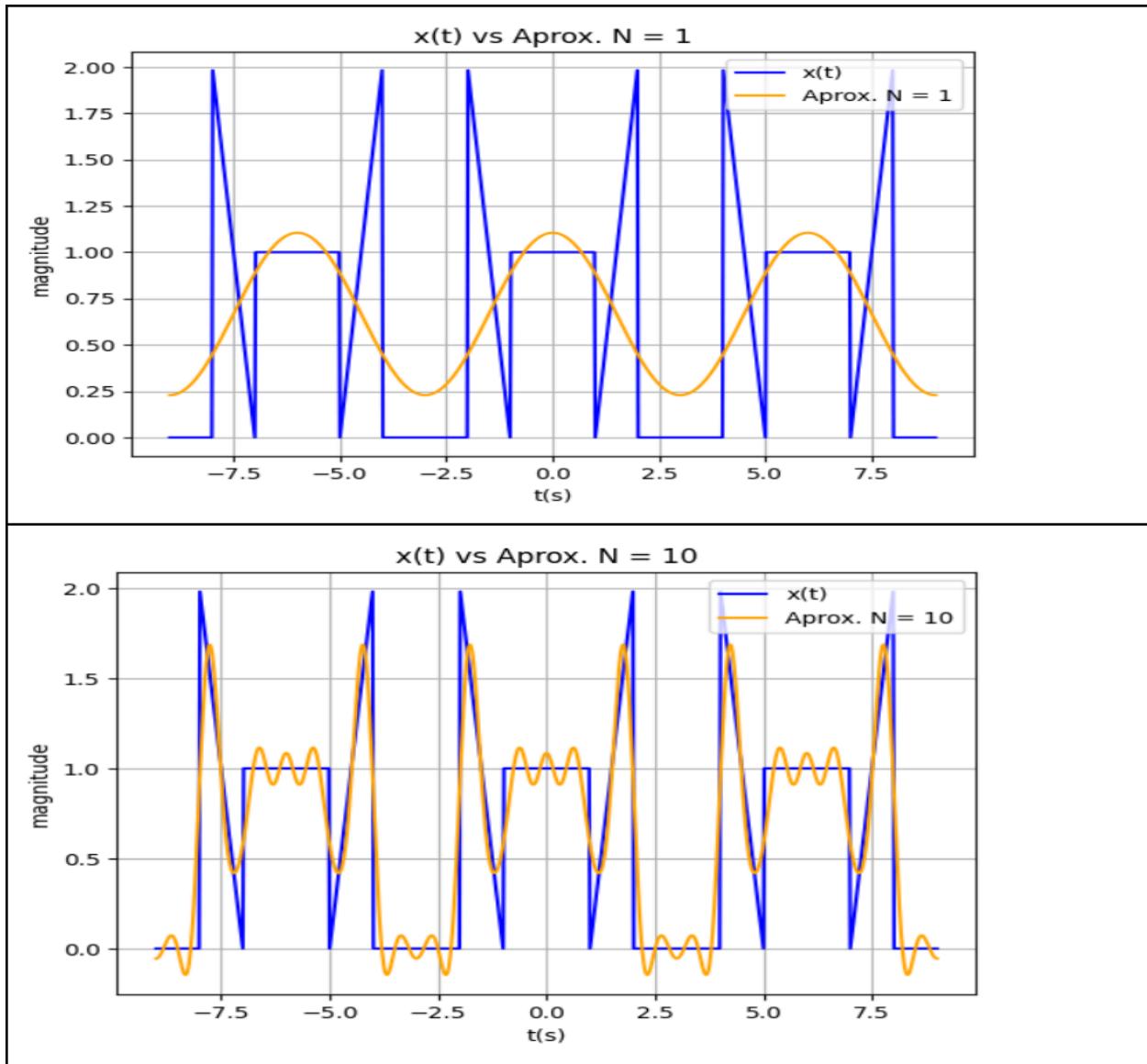
Parte Computacional:

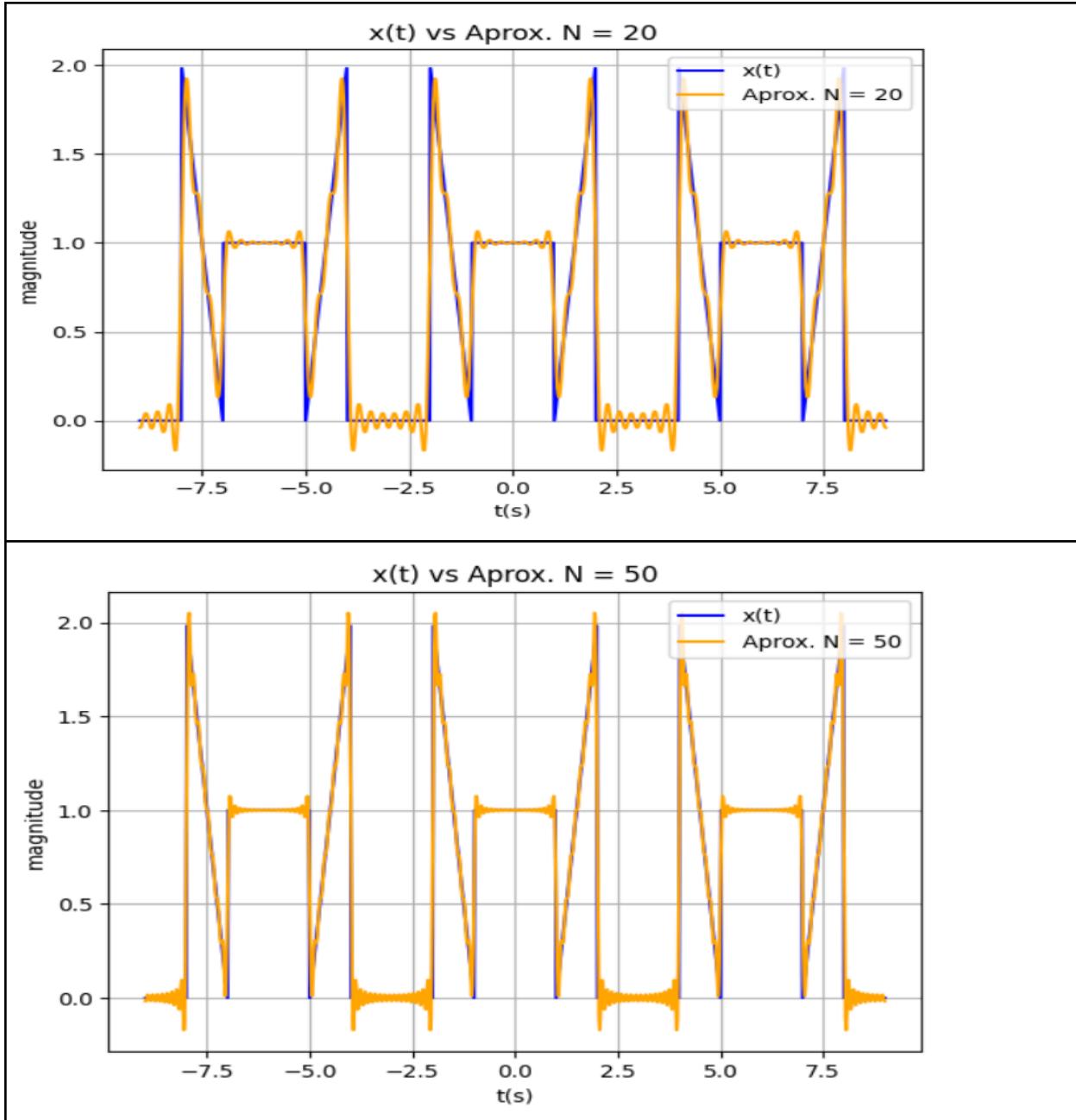
b) A expressão $\bar{x}_N(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{jk\omega_o t}$ foi utilizada como base para o cálculo da

aproximação em série de Fourier. Para tal, uma versão computacional (que utiliza a definição via

integração $c_k = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt$) de cálculo dos coeficientes c_k foi criada ($c(k)$) e utilizada

na função fourierSeries(t, N), que usa a relação acima para calcular a aproximação da série numa soma de $2N + 1$ exponenciais complexas. Os gráficos para diferentes valores de N podem ser vistos a seguir:





- c) Para o cálculo da potência média do erro P_N , a função `mean()` da biblioteca `numpy` foi utilizada, pois é levado em consideração que estes sinais estão discretizados (apesar da impressão de continuidade em virtude da escolha de aproximadamente 333 valores de t para cada período).

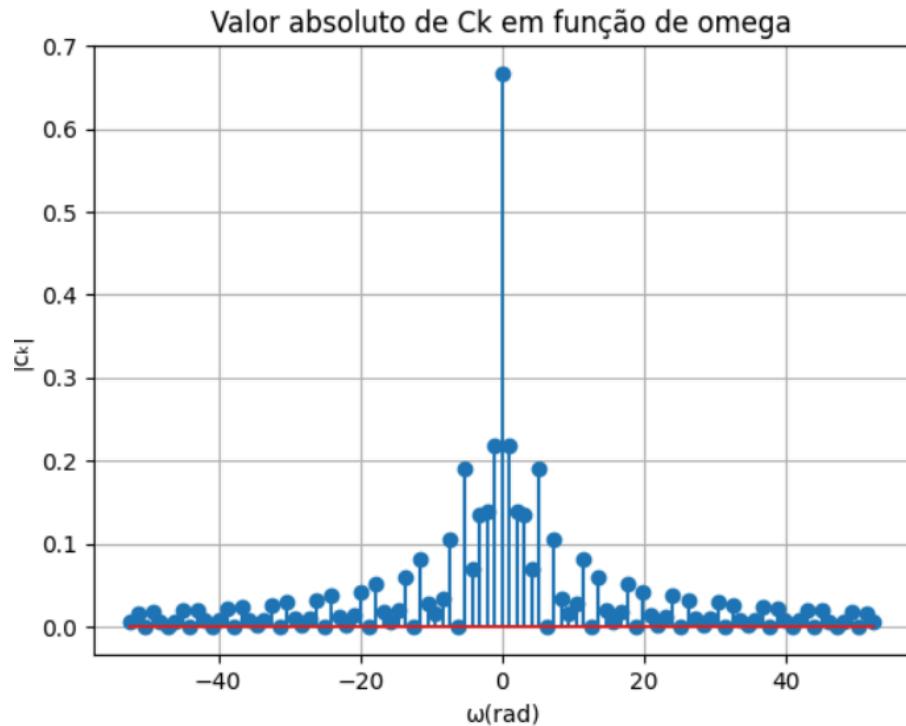
Os resultados, vistos abaixo, foram calculados utilizando os valores da energia do erro

$(\bar{x}_N(t) - x(t))^2$ como entrada da função dada acima:

Potência média do erro para N = 1: 0.2395
 Potência média do erro para N = 10: 0.0550
 Potência média do erro para N = 20: 0.0243
 Potência média do erro para N = 50: 0.0097

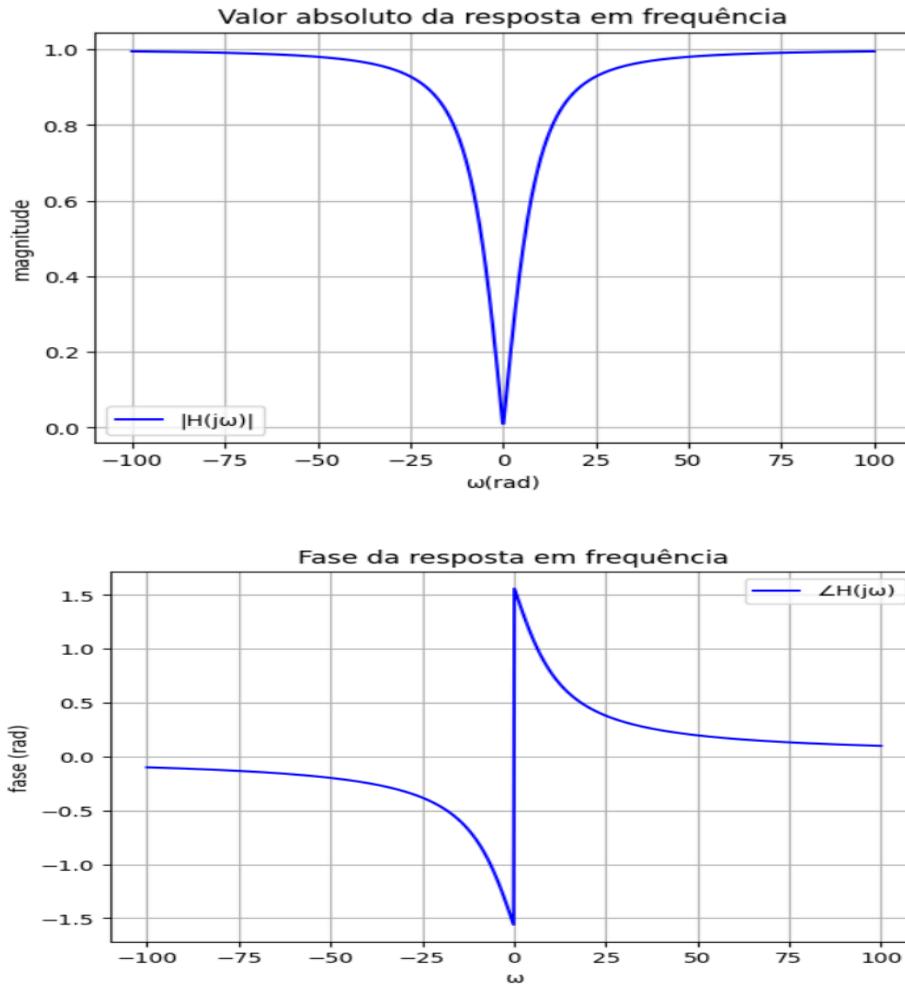
Observa-se que a potência média do erro diminui conforme o aumento de N, o que era esperado, pois a aproximação é tão boa quanto maior o valor de N.

d) Sabe-se que, se $\omega = k\omega_o$, como $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$ e $-50 \leq k \leq 50$ com k inteiro, então $\frac{-50\pi}{3} \leq k\omega_o \leq \frac{50\pi}{3} \Rightarrow \frac{-50\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{50\pi}{3}$, utilizando estes intervalos, foi possível gerar a relação discreta de $|c_k|$ em função de ω :



Nota-se que há simetria par no gráfico, o que é esperado, dado que o sinal de entrada é real e par, e portanto $c_{-k} = c_k$, com k inteiro e pertencente ao intervalo dado.

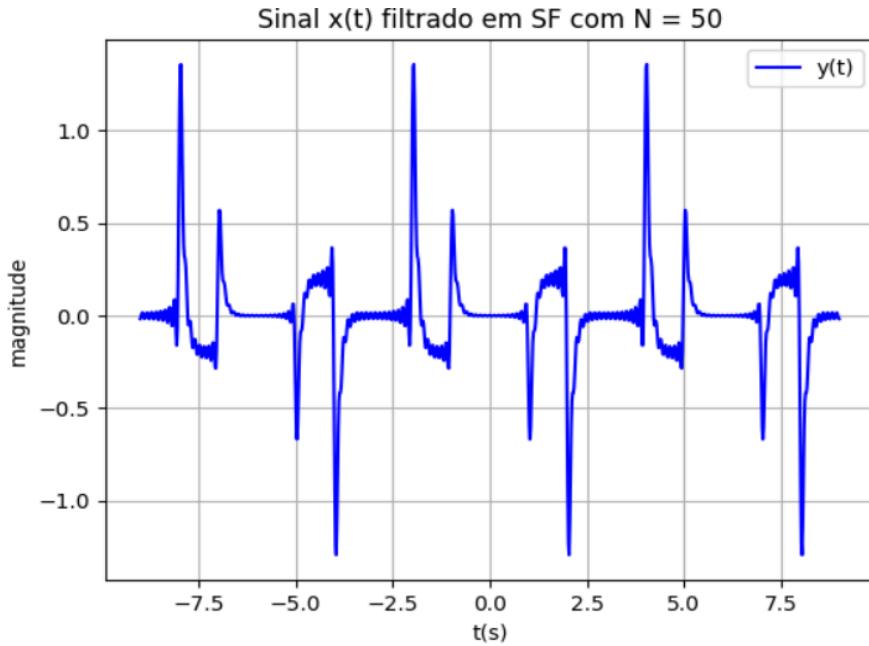
e) Dado que $C = 10^{-6}F$ e $R = 10^5\Omega \Rightarrow \frac{1}{RC} = 10 \frac{rad}{s}$, a função frequencyResponse(omega) foi criada utilizando a relação dada no enunciado e o valor numérico calculado acima, além disso, valores de ω entre -100 e 100 com espaçamento de 1000 unidades foram utilizados para a construção do gráfico do valor absoluto (np.abs()) e fase (np.angle()) da resposta em frequência, como pode ser observado nas figuras abaixo:



Pelas imagens, é possível observar que o módulo da resposta em frequência indica que este filtro é um passa altas não ideal, pois valores de frequência em torno da origem se aproximam de zero, além disso, dado que a fase não varia linearmente com ω , podemos deduzir que o filtro não preservará a forma do sinal de entrada.

f) Dado que $x(t)$ é um sistema LIT, a filtragem do sinal $H(x(t)) = y(t)$ é uma autofunção em sua representação de série de Fourier do tipo $y(t) = \sum_{k=-N}^N c_k H(jk\omega_o) e^{jk\omega_o t}$.

Assim, a implementação da função que calcula a série de Fourier do sinal foi modificada com a multiplicação por $H(j\omega) = H(jk\omega_o) = frequencyResponse(k\omega_o)$ por iteração em k, graficamente, $N = 50$, obteve-se o resultado abaixo:

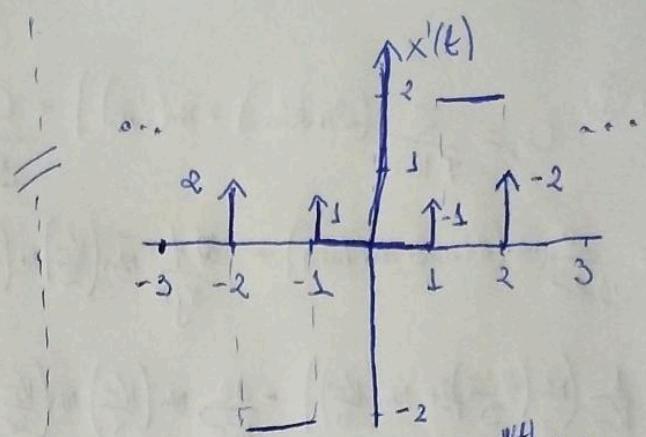
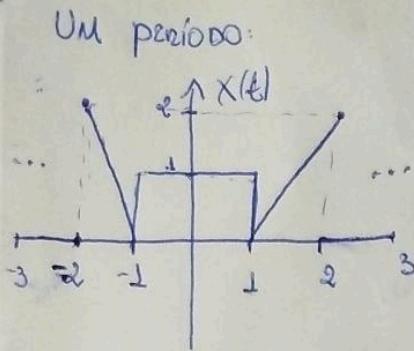


Nota-se a confirmação do que foi assumido pela análise da resposta em frequência: há considerável atenuação dos componentes de baixa frequência e preservação dos de alta

frequência. Além disso, observa-se uma variação na forma da curva em relação ao sinal original, evidenciada por uma suavização nas transições. Essa alteração é consequência direta da não linearidade da fase, que provoca distorção temporal ao modificar o alinhamento entre os componentes harmônicos do sinal.

g) O sinal resultante original, quando comparado àquele obtido por aproximação via Série de Fourier, apresenta valores de pico mais elevados em valor absoluto e ausência de oscilações internas ao período, o que se explica pela limitação no número de exponenciais complexas utilizadas na reconstrução harmônica. Além disso, observa-se a presença de overshoot nas regiões de descontinuidade do sinal aproximado, fenômeno característico da Série de Fourier conhecido como efeito de Gibbs. Apesar dessas diferenças pontuais, ambas as curvas mantêm forma semelhante e magnitudes proporcionais, o que evidencia a eficácia da aproximação harmônica adotada, especialmente para valores elevados de N.

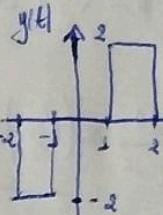
Apêndice: cálculo manual dos coeficientes c_k do sinal dado:



$$\text{Período } T = 6$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$$

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2 \delta(t+2+kT) + \delta(t+1+kT) - 1 \delta(t-1+kT) - 2 \delta(t-2+kT)] +$$

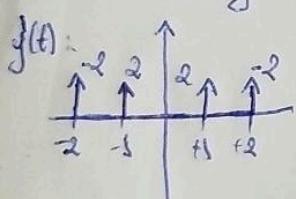


∴ pela propriedade da derivada e deslocamento:

$$C_{10} = \frac{2 \cdot \frac{1}{T} e^{j\omega_0 t}}{j\omega_0} + \frac{1}{T} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{T} e^{j\omega_0 t} - \frac{2 e^{-j\omega_0 t}}{T} + C_{10g}$$

$$C_{10} = \frac{2 \cdot (2 \sin(2j\omega_0) + j)}{j\omega_0} + \frac{1}{T} (2 \sin(j\omega_0)) j + C_{10g} = \frac{2}{T\omega_0} (\sin(2j\omega_0) + j\sin(j\omega_0)) + \frac{C_{10g}}{j\omega_0} \quad (1)$$

Cálculo de C_{10g} :



$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [-2 \delta(t+2+kT) + 2 \delta(t+1+kT) + 2 \delta(t-1+kT) - 2 \delta(t-2+kT)]$$

pela propriedade da derivada e do deslocamento:

$$C_{10g} = \frac{-2}{T} e^{j\omega_0 t} + \frac{2}{T} e^{j\omega_0 t} + \frac{2}{T} e^{-j\omega_0 t} - \frac{2}{T} e^{-2j\omega_0 t} = \frac{2}{T j\omega_0} (-2 \cos(2j\omega_0))$$

$$+ 2 \cos(j\omega_0)) = - \frac{4 \cos(2j\omega_0) + 4 \cos(j\omega_0)}{j\omega_0 T} = + \frac{4 \cdot 2 \sin\left(\frac{j\omega_0}{2}\right) \sin\left(\frac{j\omega_0}{2}\right)}{j\omega_0 T} = \frac{4}{j\omega_0 \pi} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{j\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Im (1)}: C_K = \frac{2}{T K \omega_0} (\text{Im}(K\omega_0) + \text{Re}(K\omega_0)) + \frac{C_0 y}{j K \omega_0} \\
 &= \frac{2}{j K \pi} (\text{Im}(K\omega_0) + \text{Re}(K\omega_0)) + \frac{1}{K \pi} \text{Im}\left(\frac{K\pi}{2}\right) \text{Im}\left(\frac{K\pi}{6}\right) \frac{1}{j K \omega_0} = \\
 & \frac{\frac{1}{j} \left(\text{Im}\left(\frac{2K\pi}{3}\right) j + \text{Re}\left(\frac{K\pi}{3}\right) \right) - \frac{32}{K^2 \pi^2} \text{Im}\left(\frac{K\pi}{2}\right) \text{Im}\left(\frac{K\pi}{6}\right)}{j K \omega_0} = \frac{2}{K \pi} \text{Im}\left(\frac{2K\pi}{3}\right) + \frac{1}{K \pi} \text{Im}\left(\frac{K\pi}{3}\right) \\
 & - \frac{12}{K^2 \pi^2} \text{Im}\left(\frac{K\pi}{2}\right) \text{Im}\left(\frac{K\pi}{6}\right)
 \end{aligned}$$

p/ $K=0$, podemos usar a definição:

$$\text{a) } C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j K \omega_0 t} dt \xrightarrow{K=0} \frac{1}{6} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{6} I = C_0$$

onde I é a área do gráfico no primeiro período, $I = \frac{2+1}{2} + 2 \cdot \frac{2+1}{2} = 4$

$$\therefore C_0 = \frac{4}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$