Operations Research for Health Care 20 (2019) 25–32

Contents lists available at ScienceDirect

Operations Research for Health Care

journal homepage: www.elsevier.com/locate/orhc

A variability reduction method for the operating room scheduling problem under uncertainty using CVaR

Amirhossein Najjarbashi, Gino J. Lim *

Department of Industrial Engineering, University of Houston, 4800 Calhoun Road, Houston, TX 77204, United States

Motivação

- Salas cirúrgicas representam $> 30\%$ dos custos hospitalares
- Incerteza nas durações de cirurgias gera:
  - Horas extras
  - Tempo ocioso
  - Perda de receita
- Necessidade de maior previsibilidade

Objetivo

Propor um modelo que reduza a variabilidade dos custos operacionais sob incerteza:

- Minimizar custos de horas extras e ociosidade de salas
- Melhorar desempenho em cenários críticos

Problema Estudado

- Conjunto de pacientes eletivos
- Conjunto de salas cirúrgicas
- Durações cirúrgicas não determinísticas
- Decisões:
  - Alocação às salas
  - Sequenciamento cirúrgico
  - Tempos de início (usado somente para avaliar o custo)
- Ou seja, dadas as durações cirúrgicas, como alocar e sequenciar pacientes nas salas?

Incerteza nas Durações

- Distribuições probabilísticas (assumem lognormal)
- Monte Carlo para gerar cenários
  - Cada cenário = uma possível realização (sorteio) das durações dos pacientes
  - Exemplo: 100 cenários simulados

Otimização por Valor Esperado (EV): Limitação

- Modelo "neutro ao risco"
- Apenas minimiza valor esperado do custo (média ponderada)
- Ignora variabilidade e extremos

O que é VaR?

- Value-at-Risk
- Usado em finanças para medir risco de perdas
- Limiar que cobre α da distribuição
- Exemplo:
  - Distribuição de durações de cirurgias: $[30, 35, 60, 70, 85, 87, 89, 91, 95, 121]$
  - VaR 80% ($\alpha = 0.8$) $=$ 91 minutos
  - 20% das durações excedem esse valor
- Limitação: não informa sobre a gravidade das perdas além do VaR

O que é CVaR?

- Conditional Value-at-Risk
- Custo médio dos piores cenários (cauda da distribuição)
- Foca em minimizar perdas extremas
- Exemplo:
  - Usando o exemplo anterior com VaR 80% $=$ 91 minutos
  - CVaR 80% $=$ 108 minutos
  - i.e., a média das durações que excedem 91 minutos é 108 minutos

Modelo CVaR

- Formulação SMILP (Stochastic MILP)
- Variável ζ: aproximador de VaR
- Minimiza custo esperado acima de ζ

Modelo CVaR

Sets:

$\mathcal{I}$ set of elective patients $\quad \mathcal{I} = \{1, \ldots, \text{I}\}$
$\mathcal{R}$ set of operating rooms $\quad \mathcal{R} = \{1, \ldots, \text{R}\}$
$\mathcal{S}$ set of scenarios $\quad \mathcal{S} = \{1, \ldots, \text{S}\}$

Indices:

i, j, k elective patients $\quad i, j, k \in \mathcal{I}$
r operating rooms $\quad r \in \mathcal{R}$
s scenarios $\quad s \in \mathcal{S}$

Parameters:

E_{ir} incidence matrix for eligible patient-to-OR assignments
d_{is} surgery duration for patient i under scenario s
μ_i mean value of surgery duration for patient i
c_r expected open time of operating room r
w_r operation cost per minute for the surgeon working in room r during regular hours
π overtime cost coefficient, $\pi > 1$
α probability level, $\alpha \in (0, 1)$
M a sufficiently large number

Variables:

$$x_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{if patient } i \text{ is assigned to room } r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y_{ijr} = \begin{cases} 1 & \text{if patient } i \text{ precedes patient } j \text{ in room } r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

t_{is} surgery start time for patient i under scenario s
ov_{rs} overtime of room r under scenario s
id_{rs} idle time of room r under scenario s
ζ VaR of total overtime and idle time costs
z^s amount of cost exceeding the threshold value ζ under scenario s

Modelo CVaR

$$Min \left[\zeta + \frac{1}{|\mathcal{S}|(1-\alpha)} \sum_{s \in \mathcal{S}} z^s \right] \tag{5}$$

$$\zeta + z^s \geq \sum_r \pi\, w_r ov_{rs} + \sum_r w_r id_{rs}, \qquad \forall s \in \mathcal{S} \tag{6}$$

$$ov_{rs} \geq \sum_{i \in \mathcal{I}} x_{ir} d_{is} - c_r, \qquad \forall r \in \mathcal{R},\ s \in \mathcal{S} \tag{7}$$

$$id_{rs} \geq c_r - \sum_{i \in \mathcal{I}} x_{ir} d_{is}, \qquad \forall r \in \mathcal{R},\ s \in \mathcal{S} \tag{8}$$

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} x_{ir} = 1, \qquad \forall i \in \mathcal{I} \tag{9}$$

$$x_{ir} \leq E_{ir}, \qquad \forall i \in \mathcal{I},\ r \in \mathcal{R} \tag{10}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \mu_i x_{ir} \leq c_r, \qquad \forall r \in \mathcal{R} \tag{11}$$

$$y_{ijr} + y_{jir} \leq \frac{1}{2}(x_{ir} + x_{jr}), \qquad \forall i \neq j \in \mathcal{I},\ r \in \mathcal{R} \tag{12}$$

$$y_{ijr} + y_{jir} \geq x_{ir} + x_{jr} - 1, \qquad \forall i \neq j \in \mathcal{I},\ r \in \mathcal{R} \tag{13}$$

Modelo CVaR

$$y_{ijr} + y_{jkr} - 1 \leq y_{ikr}, \qquad \forall i \neq j \neq k \in \mathcal{I},\ r \in \mathcal{R} \quad (14)$$

$$t_{is} + d_{is} - t_{js} \leq M(1 - y_{ijr}), \qquad \forall i \neq j \in \mathcal{I}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S} \quad (15)$$

$$z^s \geq 0, \qquad \forall s \in \mathcal{S} \quad (16)$$

$$\zeta \qquad \textit{unrestricted} \quad (17)$$

$$x_{ir}, y_{ijr} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \neq j \in \mathcal{I}, r \in \mathcal{R} \quad (18)$$

$$ov_{rs}, id_{rs} \geq 0, \qquad \forall r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S} \quad (19)$$

$$t_{is} \geq 0, \qquad \forall i \in \mathcal{I}, s \in \mathcal{S} \quad (20)$$

Parâmetros:

Table 1
Numerical instances and parameter settings.

Problem instance ID	1	2	3	4	5	6	7	8
Number of patients	9	22	34	40	63	74	89	101
Number of ORs	5	5	5	10	20	20	15	20
Average CV	0.667	0.628	0.579	0.617	0.551	0.713	0.605	0.585
Probability distribution	Three-parameter Log-normal							
OR time limit (minute)	540							

Comparação de custos associados entre as abordagens:

- Modelo por Valor Esperado (EV) – só definir o $\alpha = 0$ na formulação CVaR
- Modelo CVaR

Vetor de Utilização (τ)

- Um único planejamento é gerado pelo modelo (alocação + sequência)
- Os tempos de cirurgia variam em cada cenário
- Para cada cenário, calcula-se:
  - tempo extras das salas (multiplicado por um custo)
  - tempo ocioso das salas (multiplicado por um custo)
- A soma desses valores em cada cenário forma um vetor:

$$\tau = [\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{|S|}]$$

- O vetor τ representa como o plano se comporta em todos os futuros possíveis
- Então os autores calculam a média (μ_{CVaR}) e o desvio padrão (σ_{CVaR}) desse vetor para análise

Resultados

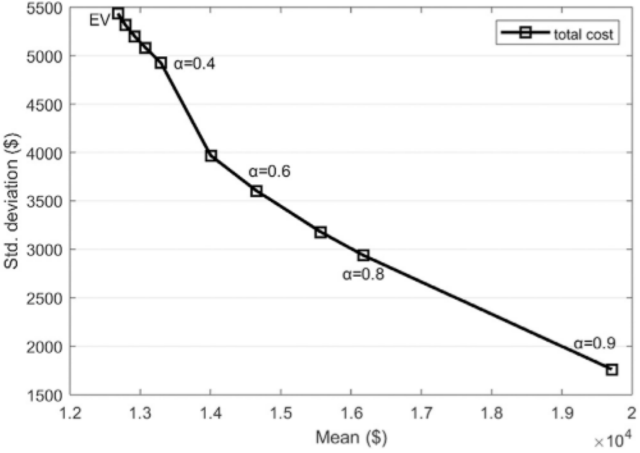

Fig. 2. Pareto frontier schedules given by the SDORS-CVaR model.

Quanto maior o α, menor a variabilidade e maior o custo médio

Melhoria em Piores Cenários

- Redução **9%** no pior caso
- 2.5% a 4% de economia concentrada nos piores cenários

Complexidade Computacional

Table 2
Computational complexity of SDORS-CVaR model.

Problem instance ID	1	2	3	4	5	6	7	8
Number of patients	9	22	34	40	63	74	89	101
Number of ORs	5	5	5	10	20	20	15	20
Binary variables	405	2420	5950	16,400	80,640	111,000	120,150	206,040
Constraints	40,040	280,748	747,660	2,171,422	12,622,268	18,698,210	22,092,250	40,408,424

Table 3
CVaR vs. EV: solution time comparison.

Problem instance	CPU Time (sec)			Optimality Gap (%)		
	EV	CVaR ($\alpha = 50\%$)	CVaR ($\alpha = 90\%$)	EV	CVaR ($\alpha = 50\%$)	CVaR ($\alpha = 90\%$)
1	3.36	2.82	2.32	0.0	0.0	0.0
2	3352	1868	389	0.0	0.0	0.0
3	3600[a]	2909	451	4.5	0.0	0.0
9	2.5	4.2	2.3	0.0	0.0	0.0
10	1065	119	99	0.0	0.0	0.0

[a]Stopped due to exceeding the solution time limit and not solved to optimality.

Contribuições Científicas

- 1ª aplicação de CVaR em OR scheduling *(não mais...)*
- Melhor desempenho sob incerteza
- Flexibilidade de decisão baseada em risco
- CVaR $\rightarrow$ escalonamentos mais estáveis e realistas
- Reduz a imprevisibilidade operacional