

εωρίσημη

pour
I am

IMP2I

par JPG

ε δ εινού

Introduction

Le programme de ce livre

Ce livre traite du programme de Physique de la voie MP2I. À chaque chapitre, le programme officiel est rappelé. Dans l'ensemble j'essaye de me tenir proche du programme, mais en allant parfois plus loin dans un but de culture générale. Certaines parties sont totalement hors programme, cela est alors signalé.

Le programme de physique de MPSI est quasiment identique ; par contre il y a en plus de la Chimie en MPSI, qui n'est pas traitée ici.

Le programme de PCSI est composé pour l'essentiel des mêmes chapitres, avec en plus des notions sur les ondes stationnaires qui ne sont pas traitées ici.

L'organisation de ce livre

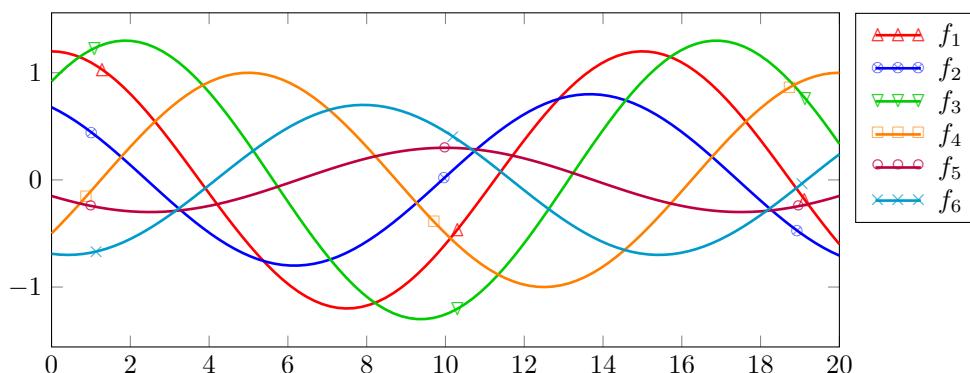
Les chapitres ne sont pas traités exactement dans l'ordre du programme, mais dans l'ordre dans lequel je les aborde avec mes élèves, qui me paraît plus logique. De manière générale, les principaux thèmes (Optique, Électricité, Mécanique et Thermodynamique) sont traités en deux fois, ce qui aide à l'assimilation des méthodes.

Dans chaque chapitre, on trouvera :

- le cours avec ses illustrations et des exemples ;
- le programme officiel correspondant à ce chapitre ;
- des QCMs permettant de s'entraîner sur les formules et notions de base du cours. Ils sont essentiels pour bien vérifier que le cours est compris ;
- des exercices pour s'entraîner, de difficultés variables, avec les réponses succinctes. Il n'est pas nécessaire de tous les faire, les exercices [***] sont là pour amuser ceux qui s'ennuient ;
- des TD numériques permettant d'aller plus loin en mettant en équation des problèmes, puis en utilisant le langage Python pour les résoudre et tracer des courbes. Les courbes qu'il faut obtenir sont données à la fin.

À propos des graphiques

Dans graphiques contenant plusieurs courbes, les courbes de différentes couleurs sont marquées de symboles discrets afin d'aider les personnes daltoniennes à mieux les distinguer.

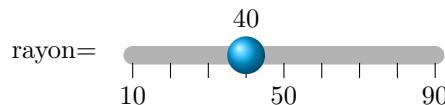
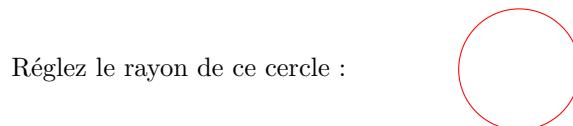


À propos des animations

Les cours sont illustrés avec des animations de deux types :

- des animations comme un film qui se joue, avec parfois des boutons de contrôle au-dessous :

- des animations avec un curseur dans lesquelles on peut faire varier un paramètre et observer la figure qui change :



Malheureusement, elles ne sont pas supportées par tous les lecteurs PDF. Voici, actuellement, ce que j'ai constaté :

Lecteur	Animations "film"	Animations "curseur"
Adobe Acrobat Reader	✓	✓
Okular	✓	✓
Firefox	✓	✓
Evince	✗	✓

JPG, 2 septembre 2025

Ce document est distribué sous licence [Creative Commons - Attribution — Utilisation non commerciale - Partage à l'identique](#).



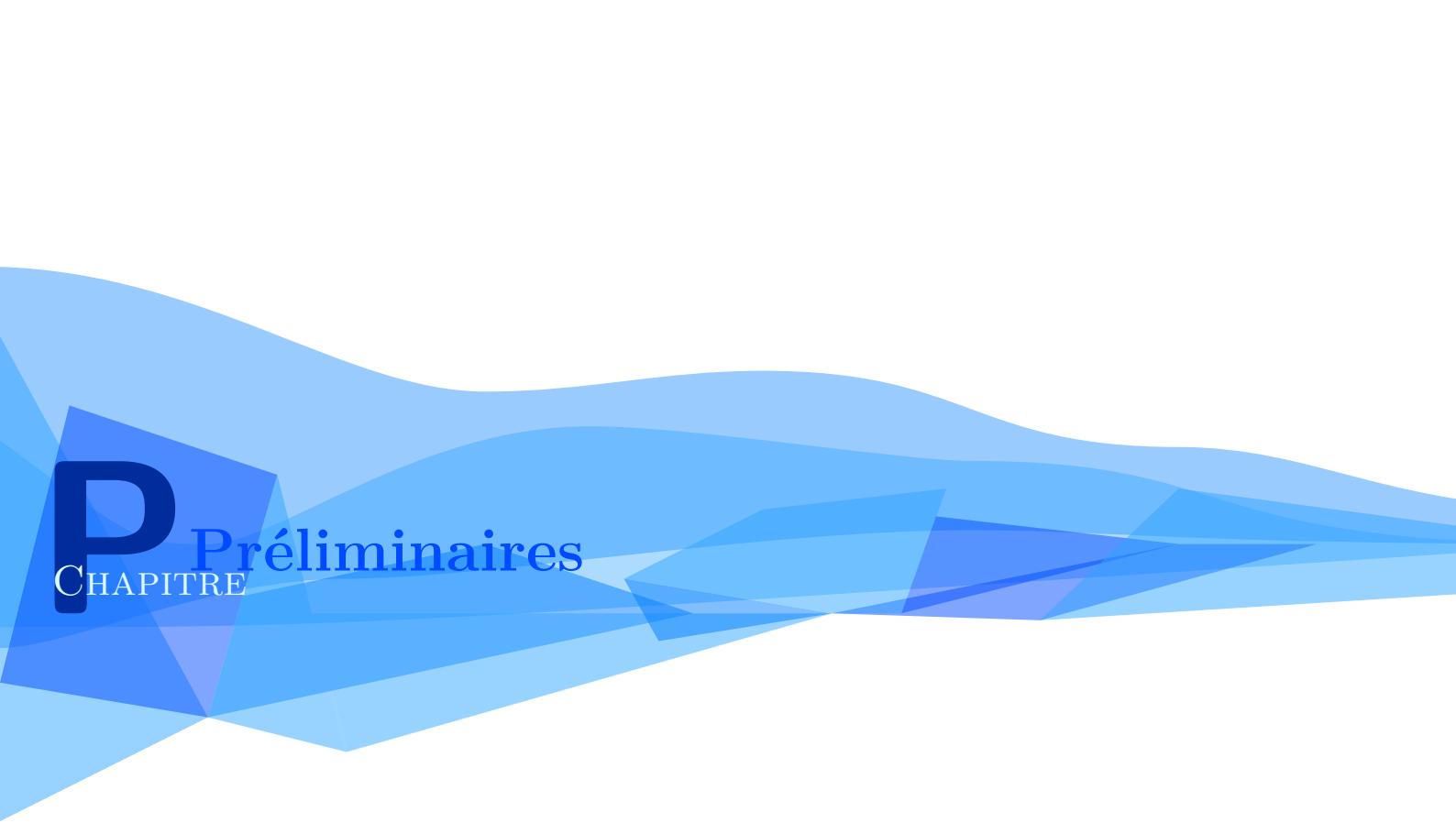
Table des matières

	Page
P Préliminaires	11
A. Dimensions et unités	12
B. Annexe	13
 Optique	 23
O0 Prérequis mathématiques pour l'optique	25
A. Géométrie de base	26
B. Trigonométrie	28
C. Fonctions	28
O1 Bases de l'optique géométrique	35
A. Description de la lumière	36
B. Propagation des rayons lumineux	39
O2 Systèmes optiques	63
A. Étude de systèmes optiques à l'aide de tracés de rayons	64
B. Les lentilles sphériques minces	71
C. Notions sur les miroirs sphériques	81
O3 Systèmes de lentilles	103
A. Quelques conséquences des lois de conjugaison	104
B. La vision humaine	108
C. Exemple d'instruments optique	112
O4 Propagation des ondes	137
A. Ondes progressives	138
B. Interférences de deux ondes	146
 Électricité	 169
E0 Prérequis mathématiques pour l'électricité	171
A. Fonctions	172
B. Trigonométrie	174
E1 Lois des circuits électriques	179
A. Intensité et tension	180
B. Les dipôles fondamentaux	185
C. Puissance électrique	193
E2 Circuits linéaires en régime continu	211
A. Association de résistances ; ponts diviseurs	212
B. Autres lois des circuits linéaires	216
C. L'Amplificateur Linéaire ou Amplificateur Opérationnel	220
E3 Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1	239
A. Équations différentielles	240
B. Circuit RC série	243

C.	Circuit RL série	246
D.	Résolution générale d'équations différentielles d'ordre 1	247
E4	Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2	269
A.	Modèle de circuit linéaire d'ordre 2 : le RLC série	270
B.	Solution d'un circuit LC sans amortissement	271
C.	Solutions du circuit RLC amorti	272
D.	Stabilité des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2	278
E.	Résolution numérique	279
	Mécanique	299
M0	Prérequis mathématiques pour la mécanique	301
A.	Vecteurs	302
M1	Cinématique du point	307
A.	Référentiel	308
B.	Position, vitesse, accélération	309
M2	Dynamique newtonienne	325
A.	Référentiels galiléens	326
B.	Principe fondamental de la dynamique	327
C.	Modèle pour quelques forces	329
D.	Exemples	333
M3	Liaisons mécaniques	353
A.	Contact sans frottements avec un support	354
B.	Contact avec frottements avec un support	357
C.	Oscillateur harmonique	361
M4	Énergie mécanique	377
A.	Énergie cinétique et travaux des forces	378
B.	Forces conservatives et énergie mécanique	380
C.	Étude des systèmes conservatifs à 1 degré de liberté	386
	Thermodynamique	413
T1	Bases de la thermodynamique	415
A.	Description d'un système thermodynamique	416
B.	Le premier principe de la thermodynamique	422
C.	Étude des transformations classiques	428
T2	Thermodynamiques des liquides et des solides	447
A.	Modèles pour un liquide ou un solide	448
B.	Calorimétrie	449
C.	Évolution temporelle d'un système sous pression constante	451
T3	Thermodynamique des gaz	469
A.	Modèles pour les gaz	470
B.	Énergie des gaz	475
C.	Étude des transformations classiques	479
	Électricité	507
E5	Régime Sinusoïdal Forcé	509
A.	Comportement d'un système soumis à un signal sinusoïdal	510
B.	Cas des circuits électriques en RSF	514
C.	Aspect énergétique	521
E6	Résonances	543

A.	Équations du RLC et de l'OH en RSF	544
B.	Étude de la résonance aux bornes de la résistance, ou résonance en vitesse	545
C.	Étude de la résonance aux bornes du condensateur, ou résonance en position	548
D.	Étude de la résonance aux bornes de la bobine, ou résonance en accélération	552
E.	Résonance en puissance	554
F.	Autres exemples de résonances	555
E7	Filtres linéaires	569
A.	Les filtres	570
B.	Étude des filtres linéaires	571
C.	Filtrage d'un signal périodique quelconque	582
E8	Filtres électroniques	605
A.	Étude de filtres simples	606
B.	Filtres en cascade	614
C.	Filtres actifs avec AOp	617
D.	Annexe : Bande passante et temps de réponse d'un filtre	618
	Mécanique	635
M5	Coordonnées cylindriques	637
A.	Coordonnées polaires	638
B.	Le pendule simple	640
C.	Coordonnées cylindriques	645
M6	Mouvements de particules chargées	663
A.	Forces s'exerçant sur une particule chargée	664
B.	Mouvement dans un champ électrique uniforme constant	666
C.	Mouvement dans un champ magnétique uniforme constant	669
D.	Mouvement dans des champs électrique et magnétique uniformes constants	676
M7	Dynamique des systèmes matériels	695
A.	Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction	696
B.	Théorème de la quantité de mouvement et variations	696
C.	TEC pour un système matériel	699
D.	Utilisation des lois de conservation	702
M8	Dynamique des solides	717
A.	Caractéristiques d'un solide indéformable	718
B.	Mouvement de translation	719
C.	Mouvement de rotation autour d'un axe fixe	721
D.	Conservation du moment cinétique	731
E.	Annexe : Calculs de moments d'inertie par intégration (Hors programme)	732
M9	Mouvements à force centrale	751
A.	Coordonnées sphériques	752
B.	Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe	756
C.	Principe de l'étude d'un mouvement à force centrale conservative	758
M10	Mouvements képlériens	779
A.	Potentiel newtonien	780
B.	Étude qualitative du mouvement	781
C.	Étude des orbites circulaires	784
D.	Étude des orbites elliptiques	785
E.	Annexe : établissement de l'équation des trajectoires (hors programme)	788
	Thermodynamique	807
T4	Changements d'état	809
A.	Description des transitions de phases / changements d'état d'un corps pur	810

B.	Enthalpie de changement d'état	816
T5	Machines thermiques	833
A.	Avancement historique de l'étude des machines thermiques	834
B.	Le second principe de la thermodynamique	839
T6	Bilans d'entropie	865
A.	Le second principe de la thermodynamique (rappel)	866
B.	Bilans d'entropie sans changement d'état	866
C.	Bilans d'entropie avec changement d'état	867
T7	Systèmes en écoulement	881
A.	Étude de la détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin)	882
B.	Étude énergétique d'un système quelconque en écoulement	884
C.	Bilans entropiques des systèmes en écoulement (Hors programme)	886
D.	Utilisation d'un diagramme enthalpique	887
	Électromagnétisme	905
EM1	Champs magnétiques et courants	907
A.	Généralités sur le champ magnétique	908
B.	Action d'un champ magnétique sur un courant	914
EM2	Phénomènes d'induction	931
A.	Les lois de l'induction	932
B.	Inductances	934
EM3	Systèmes électromécaniques	951
	Mécanique quantique	967
MQ1	Introduction à la mécanique quantique	969
A.	Quantification de la lumière	970
B.	Description des particules quantiques	976



P Préliminaires

CHAPITRE

P.A. Dimensions et unités

A.1. Dimensions

Définition : Dimension d'une grandeur

La *dimension* d'une grandeur physique est ce qui caractérise sa nature physique : un temps, une longueur, une tension,... Toutes les grandeurs physiques ont une dimension qui peut s'exprimer en fonction d'un nombre restreint choisi de sept dimensions de base (cf. tableau ??).

Toutes les autres dimensions peuvent s'exprimer par combinaison des dimensions de base. Par exemple, par la relation $E = m \cdot c^2$ on détermine la dimension de l'énergie E , ce qu'on notera $[E] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$.

Remarque : Il existe des grandeurs sans dimension, comme les angles.

dimension	masse	longueur	temps	intensité électrique	température	intensité lumineuse	quantité de matière
notation	M	L	T	I	Θ	J	N
unité SI	kilogramme (kg)	mètre (m)	seconde (s)	Ampère (A)	Kelvin (K)	candela (cd)	mole (mol)

TABLEAU P.1 – Les 7 dimensions de base et leur unité SI.

A.2. Unités

Définition : Unité

Chaque dimension peut être exprimée dans différentes *unités*; on peut passer d'une unité à l'autre grâce à un facteur de conversion. Pour exprimer une grandeur, il faut une valeur suivie d'une unité.

Le tableau ?? indique les unités du *Système Internationnal* qui est celui qu'on utilisera ; mais il en existe d'autres, par exemple le système CGS utilisé par les anglo-saxons.

Grandeur	Dimension	Unité S.I.	Symbol	Définition	Autre unité courante
Temps	T	Seconde	s	À partir des vibrations d'un atome de césum	Jour solaire : 1j = 86 400 s
Longueur	L	Mètre	m	Vitesse de la lumière dans le vide : $299\,792\,458\, m \cdot s^{-1}$	Année : 1an = 365, 26j
Masse	M	Kilogramme	kg	Une mole de carbone 12 a pour masse 12g exactement	Unité astronomique : 1ua = $1,5 \times 10^{11}\, m$
Énergie	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$	Joule	J	$1\, J = 1\, kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	Electron-Volt : $1\, eV = 1,6 \times 10^{-19}\, J$
Puissance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$	Watt	W	$1\, W = 1\, J \cdot s^{-1}$	Cheval : 1ch = 736 W
Force	$M \cdot L \cdot T^{-2}$	Newton	N	$1\, N = 1\, J \cdot m^{-1}$	
Pression	$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$	Pascal	Pa	$1\, Pa = 1\, N \cdot m^{-2} = 1\, J \cdot m^{-3}$	Bar : 1 bar = $1 \times 10^5\, Pa$
Intensité	I	Ampère	A	À partir de la force entre 2 fils électriques	
Charge	$I \cdot T$	Coulomb	C	$1\, C = 1\, A \cdot s$	
Tension	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-1}$	Volt	V	$1\, V = 1\, W \cdot A^{-1}$	
Résistance électrique	$M \cdot L^2 \cdot T^{-3} \cdot I^{-2}$	Ohm	Ω	$1\, \Omega = 1\, V \cdot A^{-1}$	
Capacité électrique	$M^{-1} \cdot L^{-2} \cdot T^4 \cdot I^2$	Farad	F	$1\, F = 1\, A \cdot s \cdot V^{-1} = 1\, s \cdot \Omega^{-1}$	
Inductance	$M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot I^{-2}$	Henry	H	$1\, H = 1\, V \cdot s \cdot A^{-1} = 1\, s \cdot \Omega$	
Champ magnétique	$M \cdot T^{-2} \cdot I^{-1}$	Tesla	T	$1\, T = 1\, V \cdot s \cdot m^{-2}$	Gauss : $1\, G = 1 \times 10^{-4}\, T$
Température	Θ	Kelvin	K	Compliquée	
Quantité de matière	N	mole	mol	$\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}$ entités	

TABLEAU P.2 – Principales unités du système SI.

On note **unités de base du système SI** celles correspondant aux 7 dimensions de base ; à partir de ces unités, on peut reconstruire toutes les autres. Mais on utilisera de nombreuses unités SI pour les grandeurs qui ne sont pas de base dans le système SI, par exemple le Joule pour l'énergie.

! Il ne faut pas confondre unité et dimension. Une grandeur a une seule dimension, qui peut s'exprimer dans différentes unités.

nom	symbole	valeur	nom	symbole	valeur
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^3
micro	μ	10^{-6}	méga	M	10^6
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^9
pico	p	10^{-12}	téra	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	péta	P	10^{15}

TABLEAU P.3 – Principaux préfixes multiplicatifs.

Remarque : 0 est la seule valeur pour laquelle il n'est pas nécessaire de préciser l'unité.

A.3. Homogénéité d'une expression

Il existe trois règles fondamentales concernant les expressions en physique, appelées *règles d'homogénéité* :

Propriété : Règles d'homogénéité

- on ne peut ajouter que des grandeurs de même dimension
- dans une équation, les deux côtés de l'égalité doivent avoir la même dimension
- les arguments des fonctions transcendantes (cosinus, sinus, exponentielle, logarithme, ...) doivent être sans dimension

Il faut donc toujours vérifier l'homogénéité de ses résultats avant de les encadrer. Exemples :

- si on écrit $\ell_2 = 1 + \ell_1$ où ℓ_1, ℓ_2 sont des longueurs : c'est forcément faux, on n'ajoute pas 1 (sans dimension) avec une longueur
- on écrit l'association de deux lentilles accolées : $f' = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ où les trois f' sont des longueurs : c'est faux, on s'est trompé dans le terme de gauche, c'est sans doute $\frac{1}{f'}$
- si on obtient l'altitude d'un point en chute libre : $z = h - \frac{1}{2}gt$ où h est une longueur, g une accélération en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et t le temps : c'est faux, car $\frac{1}{2}gt$ est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, ce n'est pas une longueur ; on a sûrement oublié un carré à t
- en électricité on écrira souvent des fonctions en $\cos(2\pi ft)$ où f est une fréquence, en Hertz c'est-à-dire en s^{-1} ; donc $2\pi ft$ est sans dimension, c'est correct
- selon certains modèles, la pression dans l'atmosphère varie comme $P(z) = P(0)e^{-\frac{Mg}{RT}z}$ où z est l'altitude, M est une masse molaire, g une accélération, R une constante et T une température ; on peut alors affirmer que $\frac{RT}{Mg}$ est une longueur, car l'argument de l'exponentielle doit être sans dimension

P.B. Annexe

Un simple tableau pour rappeler les lettres grecques, qu'on utilisera beaucoup.

Nom	Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule
alpha	α	A	iota	ι	I	rho	ρ	P
beta	β	B	kappa	κ	K	sigma	σ	Σ
gamma	γ	Γ	lambda	λ	Λ	tau	τ	T
delta	δ	Δ	mu	μ	M	upsilon	υ	Υ
epsilon	ϵ	E	nu	ν	N	phi	ϕ	Φ
dzeta	ζ	Z	xi	ξ	Ξ	khi	χ	X
êta	η	H	omicron	\o	O	psi	ψ	Ψ
theta	θ	Θ	pi	π	Π	oméga	ω	Ω

TABLEAU P.4 – Les lettres grecques.

Préliminaires

QCMs

réponses page ??

 QCM : Équivalence entre unités

Q1.

D'après la formule : énergie cinétique = $\frac{1}{2}$ masse × vitesse², un Joule (unité d'énergie) est équivalent à

- (a). $1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ (b). $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
 (c). $1 \text{ g} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ (d). $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Q2.

Donc dans la formule : énergie potentielle = masse × g × altitude, on peut savoir que g :

- (a). a la dimension d'une accélération (b). a pour unité SI des $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (c). a pour unité SI des $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (d). a la dimension d'une vitesse
 (e). peut avoir comme unité des $\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ (f). peut avoir comme unité des $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q3.

D'après la formule : force = masse × accélération,

- (a). $[\text{force}] = M \cdot L \cdot T^{-2}$ (b). $[\text{force}] = M \cdot L \cdot T^{-1}$
 (c). $[\text{force}] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$ (d). $[\text{force}] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$

Q4.

L'énergie électrique reçue par une résistance vaut : énergie = tension × intensité × temps. La tension s'exprime en Volts ; donc

- (a). $1 \text{ V} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$ (b). $1 \text{ V} = 1 \text{ g} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
 (c). $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ (d). $1 \text{ V} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{A}^{-1}$

 QCM : Manipulation des multiples

Les multiples doivent être connus par cœur, et leurs conversions maîtrisées. Ce qui pose le plus de problèmes, ce sont les multiples au dénominateur ; pour ne pas faire d'erreur, il faut écrire l'unité comme un quotient. Par exemple, on veut convertir $4,1 \text{ mV} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ en $\text{V} \cdot \text{s}^{-1}$; on écrit alors

$$4,1 \text{ mV} \cdot \mu\text{s}^{-1} = \frac{4,1 \text{ mV}}{1 \mu\text{s}} = \frac{4,1 \times 10^{-3} \text{ V}}{1 \times 10^{-6} \text{ s}} = 4,1 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q5.

$3,2 \text{ mm} =$

- (a). $32 \times 10^{-3} \text{ m}$ (b). $3200 \mu\text{m}$
 (c). $3,2 \times 10^{-2} \text{ m}$ (d). $0,32 \text{ cm}$

Q6.

$53 \mu\text{s} =$

- (a). $5,3 \times 10^7 \text{ ps}$ (b). $53 \times 10^{-6} \text{ s}$
 (c). $0,53 \text{ ms}$ (d). 53000 ns

Q7.

$2,3 \text{ cm}^2 =$

- (a). $2,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ (b). $2,3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
 (c). $2,3 \times 10^2 \mu\text{m}^2$ (d). 23 mm^2

Q8.

$$5,1 \text{ km}^3 =$$

- (a). $5,1 \times 10^9 \text{ m}^3$
 (c). $5,1 \times 10^8 \text{ m}^3$
 (b). $5,1 \times 10^{15} \text{ cm}^3$
 (d). $5,1 \times 10^{15} \text{ dm}^3$

Q9.

$$23 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} =$$

- (a). $23 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{ms}^{-1}$
 (c). $23 \text{ mm} \cdot \text{ms}^{-1}$
 (e). $6,39 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
 (b). $23 \times 10^{-3} \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$
 (d). $23 \times 10^3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$
 (f). $82,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Q10.

$$9,1 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \mu\text{s}^{-2} =$$

- (a). $9,1 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 (c). $9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 (b). $9,1 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 (d). $9,1 \times 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Q11.

$$13,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} =$$

- (a). $13\,600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 (c). $13,6 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$
 (b). $13,6 \mu\text{g} \cdot \text{m}^{-3}$
 (d). $13\,600 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}$

QCM : Vérification d'homogénéité des formules X

Dans ce QCM, les ℓ et les x sont des longueurs, les t des temps, les m des masses.

Q12.

L'expression $\frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = 3$ est-elle homogène ?

- (a). Oui
 (b). Non

Q13.

L'expression $\frac{m_1}{1+m_1} = 0$ est-elle homogène ?

- (a). Non
 (b). Oui

Q14.

Pour que l'expression $\ell = \frac{3x}{x+\frac{y}{x}}$ soit homogène, il faut que y ait la dimension :

- (a). d'une longueur
 (c). d'un volume
 (b). d'une surface

Q15.

L'expression $m_1gx + m_2g \left(1 + \frac{\ell_1}{\ell_2}\right) = 0$ est-elle homogène ?

- (a). Non
 (b). Oui

Q16.

L'expression $m' = \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1} \times \frac{1}{m_2}}$ est-elle homogène ?

- (a). Oui
 (b). Non

Q17.

L'expression $\ell = x \cos(4t)$ est-elle homogène ?

- (a). Oui
 (b). Non

Q18.

Dans l'expression $\cos(\alpha) = 3e^{-k\ell/t}$, le coefficient k a pour dimension :

- (a). vitesse
- (b). on n'en sait rien
- (c). distance/temps
- (d). temps/distancce

TDs numériques

réponses page ??

TD numérique : Introduction aux outils numériques pour la Physique

Ce TD a pour but de mettre en place les outils qu'on utilisera au cours de l'année pour étudier toutes sortes de systèmes physiques. Le langage utilisé sera Python.

La bibliothèque Numpy

Python possède des listes qui permettent de stocker plusieurs valeurs : `liste=[1,2,3,5.2,"quatre"]` ; elles sont souples, permettant de mélanger toutes sortes d'objets dans la même liste, et d'ajouter/enlever des éléments. Mais elles ne sont pas performantes pour les calculs.

On va alors utiliser la bibliothèque Numpy qui implémente des tableaux de longueur fixe, contenant un seul type de valeurs numériques (entiers, réels ou complexes), et permettant d'effectuer dessus des calculs vectoriels très performants. Les exemples suivant illustrent le fonctionnement des tableaux Numpy, entrez les lignes dans l'interpréteur Pyzo ou dans une cellule de Notebook et exécutez-les.

Avant toutes choses, on importe la bibliothèque, et souvent, on raccourcit son nom pour gagner du temps : `import numpy as np`.

Création d'un tableau

Pour créer un tableau, on a essentiellement deux solutions :

- soit on le crée à partir d'une liste (tableau 1D) ou d'une liste de listes (tableau 2D) :

```

1 a=np.array([1,2,4,6,3])
2 print(a)
3 b=np.array([[1,2,3],[6,5,4]])
4 print(b)
```

- soit on crée un tableau de zéros en donnant ses dimensions :

```

1 c=np.zeros(20)
2 print(c)
3 d=np.zeros( (2,3) ) # 2 lignes, 3 colonnes
4 print(d)
```

- enfin, il existe une fonction très pratique, `np.linspace`, qui crée un tableau 1D de valeurs régulièrement espacées entre deux bornes :

```

1 e=np.linspace(1,5,20) # 20 points entre 1 et 5
2 print(e)
```

Accès à une case

Les cases d'un tableau sont repérées par un index, la première case étant repérée par l'index 0. Pour un tableau 2D, on doit donner l'index de la ligne, puis de la colonne :

```

1 print(a[2])
2 print(b[1,0])
```

On peut s'en servir pour modifier une valeur :

```

1 d[1,1]=3
2 print(d)
```

Si on a besoin de connaître les dimensions d'un tableau, il y a 2 possibilités :

- pour un tableau 1D, avec `len(tableau)`
- pour tous les tableaux, avec `tableau.shape` qui renvoie une liste (un tuple en fait...) des dimensions

```

1 print(len(a))
2 print(b.shape)

```

Opérations vectorielles

Avec Numpy, toutes les opérations ou presque sont vectorielles, c'est-à-dire qu'elles s'appliquent terme à terme :

- ajout/soustraction d'un nombre, multiplication/division par un nombre

```

1 print(a)
2 print(a+1)
3 print(b)
4 print(2*b)

```

- addition/soustraction/multiplication/division terme à terme de deux tableaux **de mêmes dimensions** :

```

1 print(b)
2 print(d)
3 print(b+d)

```

sinon on a un message d'erreur

```

1 print(a)
2 print(c)
3 print(a+c)

```

- application d'une fonction mathématique à tous les termes du tableau grâce aux fonctions de la bibliothèque Numpy :

```

1 print(np.cos(a))
2 print(np.exp(b))

```

La bibliothèque Matplotlib

Matplotlib est une bibliothèque de tracé de courbes à partir de tableaux ou de listes. On commence par l'importer avec `import matplotlib.pyplot as plt` pour faire court.

Tracé de courbes simples

Matplotlib ne trace pas des courbes de fonctions, mais des points dont on lui donne les coordonnées sous forme de deux tableaux. La syntaxe de base est constituée de 3 instructions : `plt.figure()` qui crée une nouvelle figure (facultatif si on ne veut faire qu'une seule figure), `plt.plot(x,y)` qui trace la courbe mais ne l'affiche pas, et `plt.show()` qui affiche le résultat (facultatif sous Jupyterlab, mais conseillé quand même) :

```

1 a=np.array([1,2,4,5])
2 b=np.array([2,3,2,4])
3 plt.figure()
4 plt.plot(a,b)
5 plt.show()

```

Pour tracer la courbe représentant une fonction, on procèdera toujours en créant d'abord le tableau des abscisses avec la commande `np.linspace` puis en calculant les ordonnées grâce au calcul vectoriel :

```

1 tab_x=np.linspace(0,2*np.pi,20) # 20 points entre 0 et 2 pi
2 tab_y=np.cos(tab_x) # fonction cosinus
3 plt.figure()
4 plt.plot(tab_x,tab_y)
5 plt.show()

```

Ajout de labels, modification du style

Testez, sur l'exemple précédent, les possibilités suivantes :

- entre le `plot` et le `show` on peut ajouter des instructions qui ajoutent des détails ; en voici quelques-uns :

- * `plt.xlabel("texte")` ou `plt.ylabel("texte")` qui ajoutent des labels sur les axes
- * `plt.title("texte")` qui ajoute un titre
- * `plt.xlim([xmin,xmax])` ou `plt.ylim([ymin,ymax])` qui modifient l'échelle
- dans la commande `plot`, après les tableaux d'abscisse et d'ordonnée, on peut ajouter des options qui modifient l'aspect du tracé de la courbe ; en voici quelques-uns (cf. l'aide sur internet pour voir toutes les valeurs possibles de ces options) :
 - * `color="red"` trace la courbe en rouge
 - * `marker="+"` ajoute des croix aux points de données (ou bien `"x"`, `"*"`...)
 - * `linestyle="--"` trace la courbe en tiretés (ou bien `":"` en pointillés ; si on met une chaîne vide `""`, la courbe disparaît)
 - * `linewidth=3` trace une courbe de 3 pixels de large
 - * `markersize=20` trace de gros marqueurs de 20 pixels

Tracé de plusieurs courbes

Pour tracer plusieurs courbes, il suffit de mettre plusieurs `plot` avant le `show`. Pour les distinguer, on peut ajouter l'option `label="texte"` à chaque courbe, et ajouter une légende avec `plt.legend()` qui peut prendre un paramètre `loc` pour changer sa position :

```

1 tab_x=np.linspace(0,2*np.pi,100) # 100 points entre 0 et 2 pi
2 plt.figure()
3 plt.plot(tab_x,np.cos(tab_x),color="red",label="cosinus")
4 plt.plot(tab_x,np.sin(tab_x),color="green",label="sinus")
5 plt.legend(loc=3)
6 plt.show()

```

Ajout de texte ou de traits

On peut ajouter du texte sur le tracé avec `plt.text(x,y,texte)`.

On peut tracer une ligne horizontale avec `plt.axhline(y)` ou verticale avec `plt.axvline(x)`.

Exercices simples

1. Tracez la courbe de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ entre -2 et 2 .
2. Tracez les courbes de $x \mapsto e^x$, $x \mapsto e^{x+0,5}$ et $x \mapsto e^{x+1}$ entre 0 et 2 en ajoutant une légende.
3. Le calcul vectoriel (sur un tableau) ne fonctionne pas s'il y a des branchements conditionnels, par exemple. Dans ce cas, le tableau des ordonnées doit être calculé avec une boucle. On commence par créer un tableau de N zéros avec la commande `tab_y=np.zeros(N)` puis on remplit les cases `tab_y[i]` dans une boucle `for i in range(len(tab_x))`.

Tracez par exemple la courbe de la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ entre -2 et 2 .

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Équivalence entre unités

??(b)

Attention, l'unité SI est le kilogramme ; or le Joule est une unité SI.

??(a) ET ??(c) ET ??(e)

L'unité SI est $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ mais d'autres unités sont permises, en particulier avec des multiples.

??(a)

??(c)

Réponses au QCM : Manipulation des multiples

??(b) ET ??(d)

??(a) ET ??(b) ET ??(d)

??(b)

??(a) ET ??(b)

??(a) ET ??(b) ET ??(c) ET ??(d) ET ??(f)

??(a)

??(a) ET ??(d)

Réponses au QCM : Vérification d'homogénéité des formules

??(a)

??(a)

??(b)

??(b)

Inutile ici de connaître l'unité de g .

??(a)

??(b)

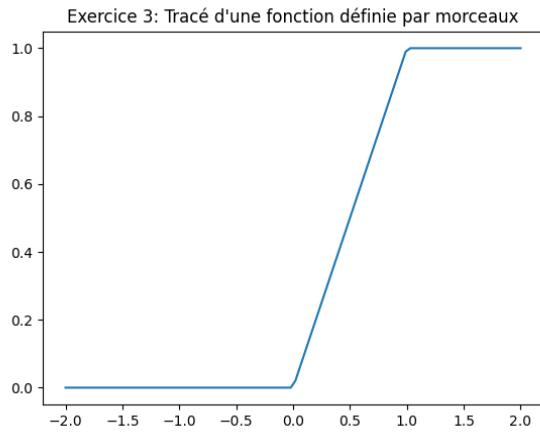
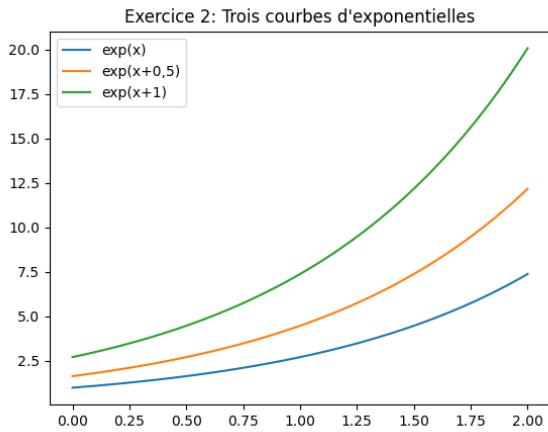
L'argument du cosinus doit être sans dimension.

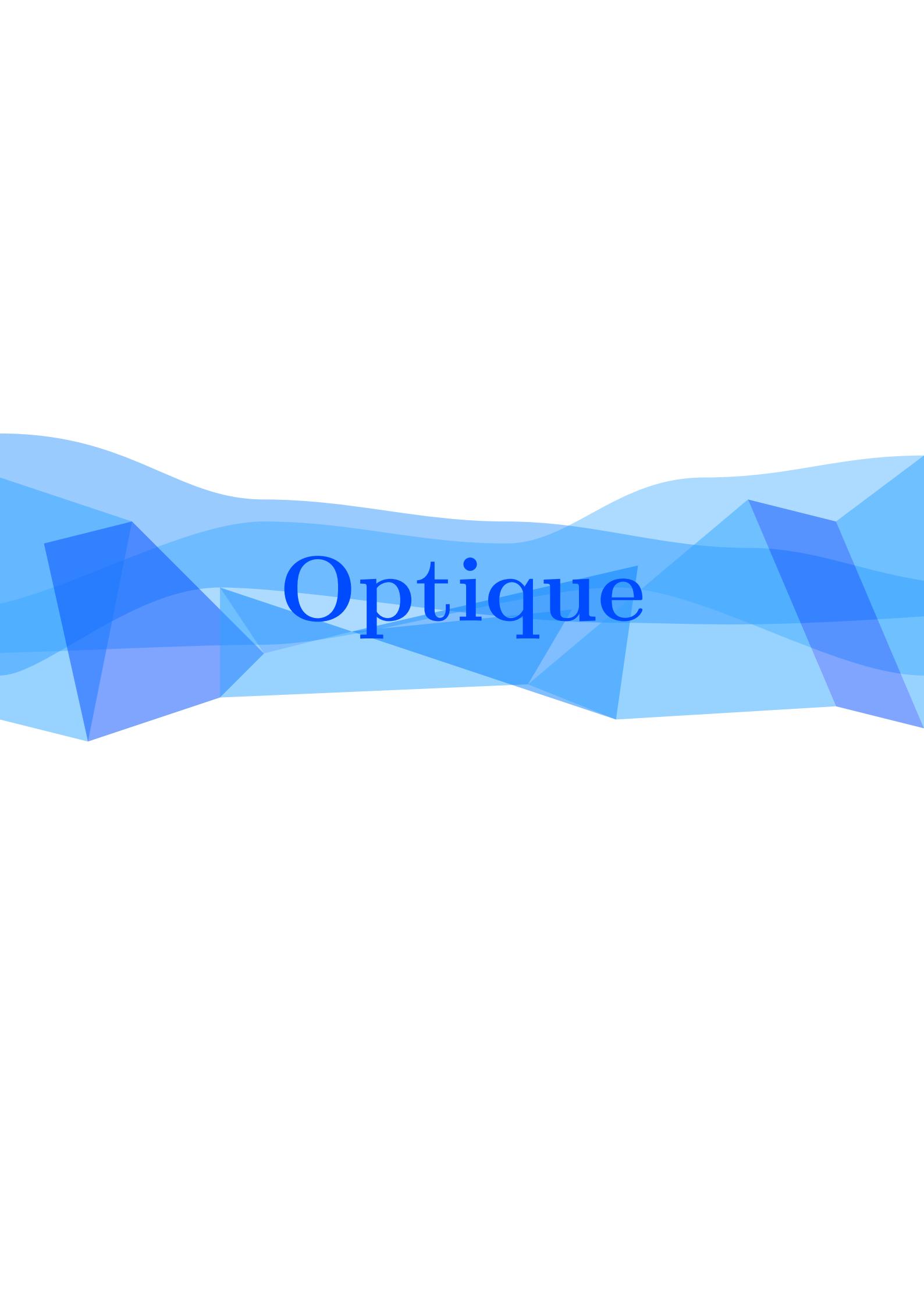
??(d)

Remarquez aussi que α doit être sans dimension.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Introduction aux outils numériques pour la Physique



The background features a complex, abstract design composed of numerous blue and light blue triangles of varying sizes. These triangles are arranged in several distinct, wavy horizontal bands that curve from left to right. The colors transition from a deep navy blue at the edges to a pale, almost white, shade in the center. The overall effect is one of depth and motion, resembling a stylized landscape or a microscopic view of a crystal lattice.

Optique

00

Préquis mathématiques pour l'optique

CHAPITRE

Prérequis mathématiques pour l'optique

Cours

O0.A. Géométrie de base

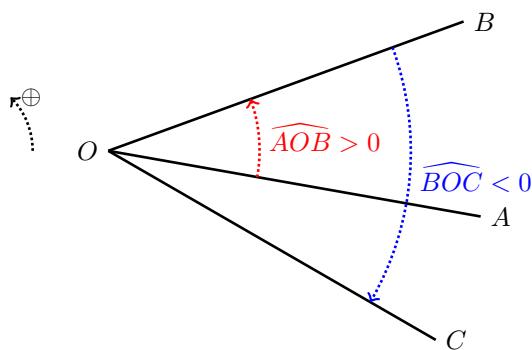
Propriété : Degrés et radians

Un angle peut se mesurer en degrés ou en radians. Un tour complet vaut 360° ou 2π rad ; on passe donc de l'un à l'autre par une règle de proportionnalité :

$$\frac{\text{angle}(\text{°})}{\text{angle}(\text{rad})} = \frac{360^\circ}{2\pi \text{rad}} \quad (\text{O0.1})$$

Propriété : Angles orientés

Un angle orienté est un angle avec un sens indiqué par une flèche. Le plan lui-même doit être orienté, c'est-à-dire qu'on lui associe un sens de rotation positif (par défaut, le sens trigonométrique). Si l'angle tourne dans le même sens que le sens positif, sa valeur est positive ; sinon, sa valeur est négative.



Les angles orientés vérifient

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{AOC} \quad (\text{relation de Chasles}) \quad (\text{O0.2a})$$

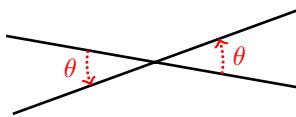
$$\widehat{AOB} = -\widehat{BOA} \quad (\text{O0.2b})$$

Propriété : Angles d'un triangle

La somme des angles (non orientés) d'un triangle vaut 180° ou π rad.

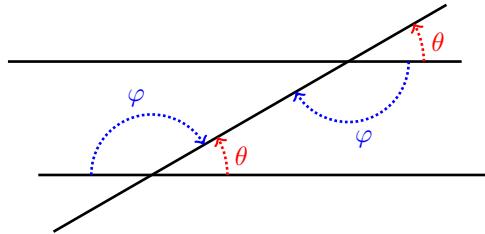
Propriété : Angles opposés par le sommet

Des angles opposés par le sommet sont égaux.



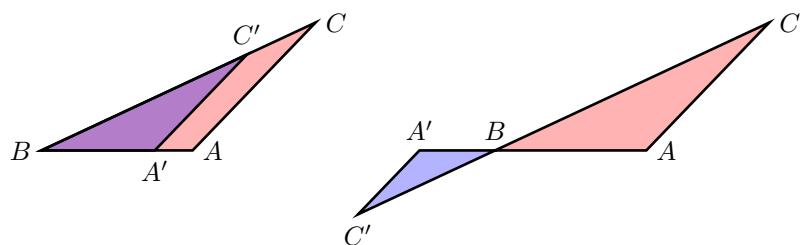
Propriété : Angles alternes-internes et correspondants

Lorsqu'une droite coupe deux droites parallèles, cela fait apparaître des angles correspondants (θ) et alternes-internes (φ) qui sont égaux.



Théorème de Thalès

Soient deux triangles semblables :



Alors peut écrire des rapports égaux soit entre les côtés parallèles des deux triangles

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BA}{BA'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (\text{O0.3a})$$

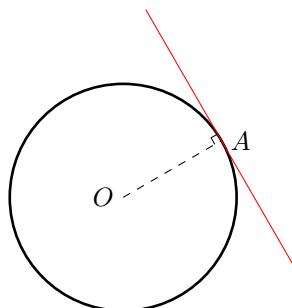
soit entre les côtés semblables de chaque triangle

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'} \quad \text{etc.} \quad (\text{O0.3b})$$

Enfin, une propriété importante concernant les cercles :

Propriété : Tangente à un cercle

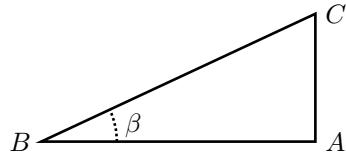
La tangente à un cercle en un de ses points est orthogonale au rayon du cercle aboutissant à ce point.



O0.B. Trigonométrie

Définition : Sinus, cosinus, tangente

Dans un triangle rectangle, soit β un des deux angles non droit.



On définit les rapports

$$\sin \beta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AC}{BC} \quad \cos \beta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{AB}{BC} \quad \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB} \quad (\text{O0.4})$$

Par le théorème de Pythagore, on montre facilement que

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad (\text{O0.5})$$

Il est important de connaître les formules de trigonométrie de base :

Propriété : Somme d'angles

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{O0.6a})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{O0.6b})$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad (\text{O0.6c})$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \quad (\text{O0.6d})$$

Des formules précédentes, on déduit plusieurs formules très importantes :

Propriété : Angles complémentaires

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad (\text{O0.7a})$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad (\text{O0.7b})$$

Propriété : Angles doubles

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (\text{O0.8a})$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha \quad (\text{O0.8b})$$

O0.C. Fonctions

Une fonction est une entité mathématique qui reçoit des *arguments* appartenant à son espace de départ, et renvoie des *valeurs* qui appartiennent à son espace d'arrivée. Il est important de bien comprendre la différence entre f , qui est une fonction, et $f(x)$, qui est le résultat renvoyé par la fonction si on lui donne l'argument x .

En maths, l'argument de f est une variable muette ; ainsi, on peut écrire indifféremment $f : x \mapsto x^2$ ou $f : t \mapsto t^2$; en physique par contre, les arguments ont un sens, et une fonction qui dépend du temps n'est pas la même chose qu'une fonction qui dépend de la position. On écrira donc de façon équivalente (et mathématiquement inexacte) f ou $f(x)$, la deuxième notation servant à rappeler ici que f dépend de x et non pas d'une autre variable.

On associe à une fonction sa dérivée, notée différemment en physique et en maths ; en physique, l'argument est fixé, et on indique par rapport à quel argument on dérive :

Définition : Dérivée d'une fonction

On définit la dérivée d'une fonction en une valeur x_0 comme la limite du taux d'accroissement

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \quad (\text{O0.9})$$

Là, on peut introduire une notation importante en physique : si x est une variable, on notera dx une petite variation de x , «petite» dans le sens de «qui tend vers 0» ; autrement dit, il y a une notion de limite implicite. Ainsi, en physique, au lieu d'écrire $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$, on écrira $\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx}$ (la limite est sous-entendue par le dx).

On en déduit la propriété suivante :

Propriété : Approximation d'une fonction par sa tangente (ou développement limité d'ordre 1)

Au voisinage d'une valeur x_0 , la fonction f vaut approximativement

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dx \cdot \frac{df}{dx}(x_0) \quad (\text{O0.10})$$

Or on connaît les dérivées des fonctions trigonométriques :

Propriété : Dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{d \sin \alpha}{d \alpha} = \cos \alpha \quad (\text{O0.11a})$$

$$\frac{d \cos \alpha}{d \alpha} = -\sin \alpha \quad (\text{O0.11b})$$

$$\frac{d \tan \alpha}{d \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (\text{O0.11c})$$

En appliquant la relation (??) aux fonctions trigonométriques, on obtient :

Propriété : Fonctions trigo pour de petits angles

Pour des angles petits ($\ll 1$ rad soit environ $< 15^\circ$), on a les égalités suivantes EN RADIANS :

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad (\text{O0.12a})$$

$$\cos \alpha \approx 1 \quad (\text{O0.12b})$$

$$\tan \alpha \approx \alpha \quad (\text{O0.12c})$$

En physique, les fonctions dépendent d'une variable précise ; mais cette variable peut être elle-même une fonction d'une autre variable : on a alors une fonction composée. Par exemple, une fonction f peut dépendre de la position x qui elle-même dépend du temps t . On notera alors, suivant le besoin de clarté, f ou $f(x)$ ou $f(x(t))$.

En maths, on peut considérer qu'on effectue la composition de f par x , notée $f \circ x$. Si on veut dériver cette fonction composée par rapport à sa variable t , alors $(f \circ x)' = x' \times (f' \circ x)$, autrement dit, avec les notations de la physique, $\frac{d(f(x(t)))}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \times \frac{df(x)}{dx}$. Ainsi, on obtient la notation abrégée et facile à retenir :

Propriété : Déivation d'une fonction composée

Si f est une fonction qui dépend de g qui elle-même dépend de t , alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dg} \times \frac{dg}{dt} \quad (\text{O0.13})$$

Exemple : Dérivée d'une fonction composée

Dériver $t \mapsto \cos(3t^2)$ par rapport à t .

On peut considérer qu'il s'agit de la fonction cosinus composée par $t \mapsto 3t^2$; la dérivée de cosinus est sinus, et la dérivée de $t \mapsto 3t^2$ est $t \mapsto 6t$; donc $\frac{d\cos(3t^2)}{dt} = \sin(3t^2) \times 6t$.

L'intérêt de cette façon de l'écrire, c'est que la généralisation à des composées de composées est immédiate. Il faut bien maîtriser en particulier les dérivées de fonctions de la forme $\cos(\omega t)$ ou $e^{\alpha t}$; cf. les QCM pour s'entraîner.

Prérequis mathématiques pour l'optique

QCMs

réponses page ??

 QCM : Trigonométrie

Q1.

$$\cos 0 + \sin \frac{\pi}{4} =$$

- (a). $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
 (c). $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (b). $\frac{1}{2}$
 (d). $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q2.

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

- (a). $\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 (c). $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$
- (b). $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 (d). $\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta$

Q3.

$$\cos(2\alpha) =$$

- (a). $1 - 2 \cos^2 \alpha$
 (c). $2 \cos^2 \alpha - 1$
- (b). $2 \sin^2 \alpha - 1$
 (d). $1 - 2 \sin^2 \alpha$

Q4.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

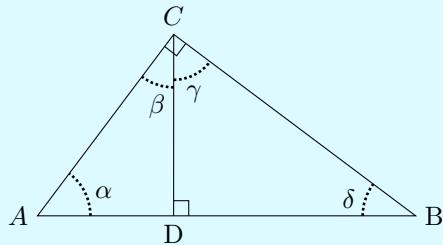
- (a). $\sin(2\alpha)$
 (c). $\sin \alpha$
- (b). $2 \cos \alpha$
 (d). $\frac{\sin \alpha}{2}$

Q5.

$$\sin^2 \alpha =$$

- (a). $\frac{1-2 \cos(2\alpha)}{2}$
 (c). $\frac{1+2 \cos(2\alpha)}{2}$
- (b). $\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$
 (d). $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

Q6.

Dans la figure ci-dessous, quel angle est égal à α ?

- (a). β
 (c). δ
- (b). γ

Q7.

En déduire quelles égalités sont justes :

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| (a). $CD = BD \cdot \tan \alpha$ | (b). $AC = \frac{BC}{\tan \alpha}$ |
| (c). $BC = AB \cdot \sin \alpha$ | (d). $CB = AB \cdot \cos \alpha$ |
| (e). $AB = AC \cdot \cos \alpha$ | (f). $AC = AB \cdot \sin \alpha$ |
| (g). $CD = AC \cdot \cos \alpha$ | (h). $CD = BC \cdot \cos \alpha$ |
| (i). $DB = CD \cdot \tan \alpha$ | |

✓ QCM : Approximation d'une fonction par sa tangente ✗

Q8.

Soit $f : x \mapsto x^2$; au voisinage de 1, on peut écrire

- (a). $f(1 + dx) \approx 1 + 2.dx^2$
 (c). $f(1 + dx) \approx 1 + 2.dx$
 (b). $f(1 + dx) \approx 1 + dx$
 (d). $f(1 + dx) \approx 2.dx$

Q9.

$$\sqrt{2 + dx} \approx$$

- (a). $1 + \frac{dx}{2}$
 (c). $\sqrt{2} + \frac{dx}{2}$
 (b). $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}dx}$
 (d). $\sqrt{2} + \frac{dx}{2\sqrt{2}}$

Q10.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + dx\right) =$$

- (a). $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}dx$
 (c). $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}dx$
 (b). $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}dx$
 (d). $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}dx$

✓ QCM : Dérivation de fonctions composées ✗

Pour dériver, vous êtes libre d'utiliser la formule façon maths ou façon physique, tant que c'est juste.

Q11.

Que vaut la dérivée de $\exp(a.t)$ par rapport à t , avec $a = cst$?

- (a). $a.t.e^{a.t}$
 (c). $a.e^{a.t}$
 (b). $a.e^a$
 (d). $e^{a.t}$

Q12.

Que vaut la dérivée de $2 \cos(\omega t + \varphi)$ par rapport à t , avec ω et φ des constantes ?

- (a). $-2 \sin(\omega t + \varphi)$
 (c). $2(\omega + \varphi) \sin(\omega t + \varphi)$
 (b). $-2\omega \sin(\omega t + \varphi)$
 (d). $2\omega \sin(\omega t + \varphi)$

Q13.

Que vaut la dérivée de $\cos^2(t)$?

- (a). $-2 \sin(t)$
 (c). $2 \cos(t)$
 (b). $-2 \sin(t) \cos(t)$
 (d). $\sin(t) \cos(t)$

Q14.

Que vaut la dérivée de $\cos^2(\omega t)$ par rapport à t ?

- (a). $-2\omega^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$
 (c). $-2\omega \sin(\omega t) \cos(\omega t)$
 (b). $-2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)$
 (d). $-2 \cos(\omega t)$

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Trigonométrie

??(a)

??(b)

??(c) ET (d)

??(d)

??(d)

??(b)

$$\beta = \delta = 90^\circ - \alpha$$

??(b) ET (c) ET (h) ET (i)

Réponses au QCM : Approximation d'une fonction par sa tangente

??(c)

$$f(1) = 1 \text{ et } \frac{df}{dx}(1) = 2.$$

??(d)

$$\text{La dérivée de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

??(d)

$$\text{La dérivée de } x \mapsto \sin(x) \text{ est } x \mapsto \cos(x)$$

Réponses au QCM : Dérisation de fonctions composées

??(c)

??(b)

??(b)

??(c)

01

CHAPITRE

Bases de l'optique géométrique

Bases de l'optique géométrique**Cours**

Dans ce chapitre, nous allons poser les bases qui vont nous permettre d'étudier plus tard les systèmes optiques : lunette, appareil photo, microscope,... Les lois fondamentales qui y seront présentées ne serviront que rarement telles quelles, mais nous permettront de comprendre les principes de la manipulation de la lumière.

O1.A. Description de la lumière

La lumière est un phénomène physique perçu par le moyen de la vue. L'expérience que nous en avons chaque jour nous permet d'en développer des idées quant à sa nature. Au fur et à mesure de l'histoire, des expériences ont amené à découvrir des aspects plus complexes de la lumière. Au final, trois grands modèles ont été développés pour expliquer la propagation de la lumière, du plus simple, décrivant les phénomènes basiques, au plus compliqué.

A.1. Modèles de propagation

La première expérience que nous faisons de la propagation de la lumière est celle de *rayons lumineux* passant par exemple à travers les nuages (figure O1.1), ces mêmes rayons que l'on imagine reliant les bords d'un objet aux bords de son ombre. C'est donc la première description possible pour la lumière, celle qui est la plus simple, mais suffisante pour expliquer de nombreux phénomènes :



FIGURE O1.1 – Rayons du soleil à travers les nuages.

Définition : Optique géométrique

L'optique géométrique considère la lumière comme étant constituée de **rayons lumineux** qui sont indépendants les uns des autres (ils se croisent sans interagir).

De plus, les rayons lumineux possèdent une couleur, notion peu définie mais qui traduit la façon dont nos yeux la perçoivent. Newton a montré, en faisant passer un rayon de lumière solaire à travers un prisme (figure O1.2), que ces couleurs suivent un ordre particulier, qu'on retrouve aussi dans l'arc-en-ciel : rouge, orange, jaune, vert, bleu, violet. En appliquant cette décomposition par un prisme à la lumière émise par différentes sources, on se rend compte qu'il existe 4 familles de sources de lumière.



FIGURE O1.2 – Isaac Newton décomposant la lumière blanche. (Crédit : The Spalenka Letters)

Définition : Spectre d'une source lumineuse

On appelle **spectre** d'une source lumineuse, l'ensemble fréquences contenues dans la lumière émise par cette source. On distingue 4 grandes familles de spectres (cf. figure O1.3) :

- les *spectres monochromatiques* ou *spectres harmoniques* ne contenant quasiment qu'une seule longueur d'onde ; c'est par exemple le spectre d'un laser
- les *spectres de raies* ou *spectres discrets* ne contenant qu'un nombre fini de longueurs d'onde ; c'est par exemple le spectre des lampes à décharge
- les *spectres continus* contenant toutes les longueurs d'ondes dans un intervalle donné ; c'est par exemple le spectre d'un objet chauffé (comme une ampoule halogène)
- les *spectres à raies d'absorption* contenant toutes les longueurs d'ondes dans un intervalle donné, sauf un nombre fini d'entre elles ; c'est par exemple le spectre du Soleil

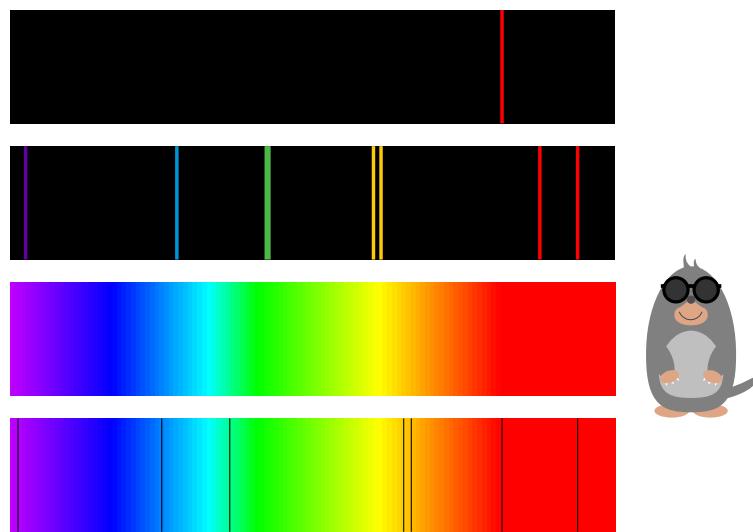


FIGURE O1.3 – Spectre monochromatique, discret (Hg ici), continu ou de raies d'absorption.

Cette approche de la propagation de la lumière, soutenue par Newton, est très simple car la propagation des rayons lumineux n'est décrite que par des lois géométriques ; mais elle ne peut cependant pas expliquer certains phénomènes qui apparaissent à de petites échelles : la diffraction en particulier, phénomène qui apparaît lorsqu'on fait passer un rayon lumineux à travers un trou de petite taille (cf. chapitre O4). En effet, après le trou, le faisceau lumineux s'élargit, et cela d'autant plus que le trou était petit. Un autre phénomène du même genre se voit lorsqu'on observe une source lumineuse ponctuelle à travers des rideaux très fins (figure O1.4).

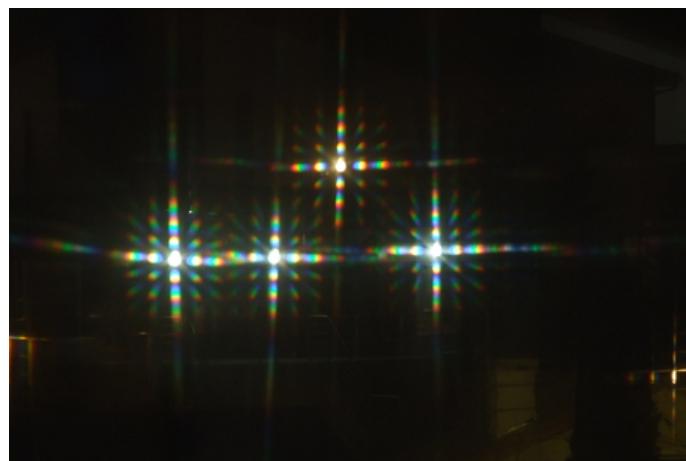


FIGURE O1.4 – Diffraction à travers des rideaux fins.

A.2. Optique ondulatoire

C'est Huygens qui montra que ces phénomènes peuvent se comprendre en considérant la lumière comme une *onde*, à l'image des vagues à la surface de l'océan.

Définition : Optique ondulatoire

L'optique ondulatoire considère la lumière comme une **onde**, c'est-à-dire un phénomène physique qui se propage en vibrant. À une lumière de couleur donnée, on peut associer :

- une fréquence f en Hertz (Hz) qui représente le nombre de vibrations par seconde
- une période $T = \frac{1}{f}$ en secondes qui représente la durée d'une vibration
- une période spatiale appelée **longueur d'onde** qui représente la distance entre deux maxima de l'onde dans l'espace

La longueur d'onde de la lumière dans le vide est reliée à sa fréquence par la relation

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \quad (\text{O1.1})$$

avec $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

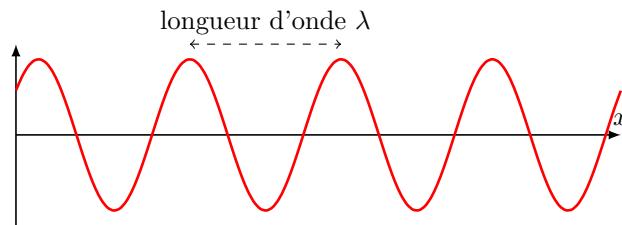


FIGURE O1.5 – Propagation d'une monochromatique dans l'espace.

C'est une approche plus précise des propriétés exactes de la lumière, mais qui, en contrepartie, est plus complexe et plus calculatoire : au lieu de ne faire intervenir que les lois de la géométrie, elle fait intervenir des intégrales compliquées.

Dans cette approche, on constate que la couleur de la lumière est associée à la fréquence de l'onde qui la compose. En pratique, on donne plutôt la longueur d'onde λ_0 de la lumière dans le vide. La lumière visible par l'œil humain correspond à des longueurs d'onde dans le vide comprises entre 400 nm (violet) et 800 nm (rouge – cette limite diminue avec l'âge). Mais on a découvert de nombreuses autres ondes lumineuses, non visibles.

Les ondes lumineuses ayant des longueurs d'onde proches ont des propriétés proches aussi. On les regroupe alors en *domaines* représentés sur la figure O1.6. On y voit au centre la bande de longueurs d'onde que notre œil est capable de voir : le *visible*; de part et d'autre se trouvent les rayonnements infrarouge et ultraviolets, puis encore d'autres.

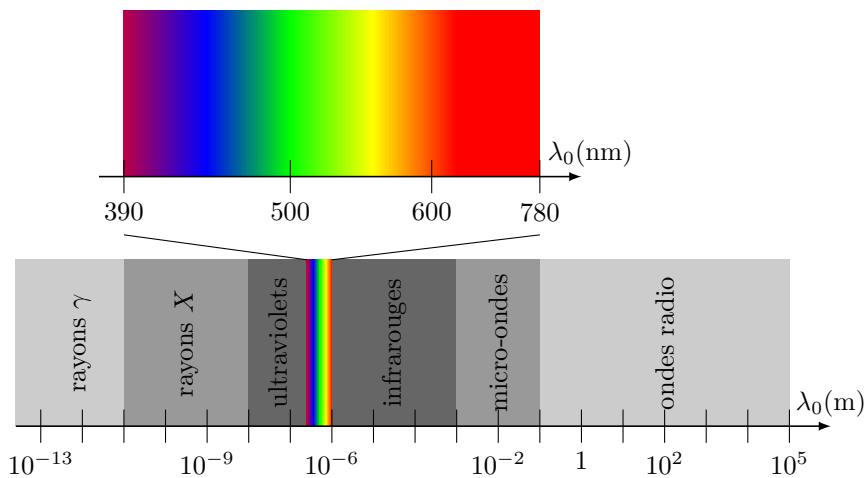


FIGURE O1.6 – Domaines des ondes électromagnétiques.

A.3. L'optique quantique, ou photonique

Ce modèle ondulatoire de la lumière a permis de décrire la majorité des propriétés observées au XIX^{ème} siècle ; cependant, l'étude des échanges d'énergie entre la lumière et la matière a montré la nécessité d'un modèle encore plus précis aux très petites échelles et/ou aux courtes longueurs d'onde :

Définition : Optique quantique ou photonique

L'optique quantique considère la lumière comme des particules appelées **photons** d'énergie

$$E = h \cdot f \quad (\text{relation d'Einstein}) \quad (\text{O1.2})$$

avec $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ la *constante de Planck*.

Si la description exacte des photons est très largement hors de portée d'un élève de prépa, on retiendra néanmoins la relation d'Einstein qui sert pour des calculs simples.

O1.B. Propagation des rayons lumineux

On se place désormais dans le cadre de l'optique géométrique.

B.1. Lois générales de propagation

Propriété : Propagation en ligne droite

Dans un milieu transparent homogène (dont les propriétés sont les mêmes partout) et isotrope (dont les propriétés sont les mêmes quelle que soit la direction), la lumière se propage en ligne droite.

C'est ce qui a donné naissance à la notion de rayon lumineux. Néanmoins, l'observation montre que les différents milieux transparents ont une propriété qui diffère :

Définition : Indice optique

Dans un milieu transparent, la lumière de longueur d'onde λ se déplace à une vitesse v différente de sa vitesse dans le vide c . On définit alors l'indice optique du milieu à la longueur d'onde λ :

$$n(\lambda) = \frac{c}{v} \quad (\text{O1.3})$$

Remarque : On considèrera souvent que n est à peu près constant sur l'étendue du spectre visible pour un milieu donné. Néanmoins, dans tous les milieux matériels usuels, $n(\text{bleu}) > n(\text{rouge})$.

Remarque : Contrairement à ce que l'on lit souvent, n n'a aucune raison d'être supérieur à 1. En effet, la théorie de la relativité indique qu'aucune *information* ne peut se propager à une vitesse supérieure à c ; mais vous verrez plus

tard, en étudiant les ondes plus en détail, qu'un flash lumineux est un *paquet d'onde* dont la vitesse est différente de celle d'une *onde monochromatique* (onde qui ne contient qu'une seule longueur d'onde et n'a ni début, ni fin). C'est ce paquet d'onde qui ne peut pas aller plus vite que c , mais rien n'empêche la vitesse d'une onde parfaitement monochromatique (objet théorique qui n'existe pas) d'être supérieur à c .

Il existe même des milieux étranges où l'indice est négatif...mais dans tous les cas qu'on rencontrera cette année, on aura $n \geq 1$.

Le tableau O1.1 donne la valeur des indices optiques de milieux usuels pour la lumière jaune. Il est bon de retenir l'air ($n \approx 1$), l'eau ($n = 1,33$) et le verre ($1,5 < n < 1,7$ selon la composition).

Air	1,0003	Verre crown	1,52
Glace	1,31	Chlorure de sodium	1,544
Eau	1,33	Verre flint léger	1,58
Saccharose	1,34	Polystyrène	1,59
Éthanol	1,36	Verre flint lourd	1,66
Quartz fondu	1,458	Zircon	1,923
Benzène	1,501	Diamant	2,417
Plexiglass®	1,51	GaP (semiconducteur)	3,50

TABLEAU O1.1 – Indices à 589nm ; les milieux sont considérés dans les conditions d'utilisation courantes. Source : Hecht, *Optique*.

Mais la lumière ne se propage pas seulement dans des milieux transparents homogènes : parfois, l'indice du milieu change. Les cas les plus simples qu'on va étudier, sont ceux où il existe plusieurs milieux transparents bien séparés.

Définition : Miroir

Un miroir est une surface qui limite un milieu transparent et renvoie la lumière qui lui arrive dessus dans le milieu d'où elle vient.

Définition : Dioptre

Un dioptre est une surface qui sépare deux milieux transparents différents.

Avant de considérer les lois de passage sur les miroirs et les dioptres, on va énoncer un principe général :

Propriété : Principe de retour inverse

Si la lumière va d'un point A à un point B en suivant un certain chemin, elle peut aller de B à A en suivant le même chemin en sens inverse.

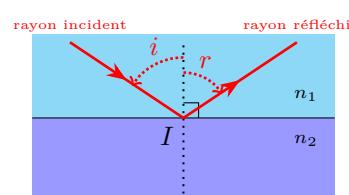
Ce principe traduit le fait que, si A peut voir B, alors B peut voir A. Comme toute loi, elle possède des exceptions, très rares : les matériaux magnétiques.

Lois de Snell-Descartes pour la réflexion

Un rayon est réfléchi lorsqu'il arrive sur un dioptre ou un miroir et qu'il repart en arrière dans le milieu d'où il vient.

Le **rayon réfléchi** frappe le miroir ou le dioptre au **point d'incidence** I ; on appelle **plan d'incidence** le plan qui contient le rayon incident et la normale au miroir/dioptre en I . Alors le rayon réfléchi vérifie les lois de Snell-Descartes :

- il est contenu dans le plan d'incidence
- l'angle entre le rayon réfléchi et la normale (angle réfléchi) est égal à l'angle entre le rayon incident et la normale (angle d'incidence) : $r = i$ pour des angles non orientés

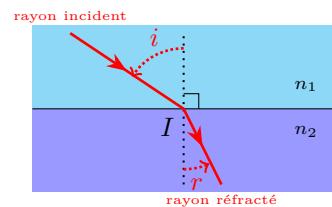


Remarque : Avec des angles orientés : $r = -i$.

Lois de Snell-Descartes pour la réfraction

Un rayon est réfracté lorsqu'il arrive sur un dioptre et qu'il le traverse en passant en changeant de direction. Le **rayon réfracté** frappe le dioptre au **point d'incidence** I ; on appelle **plan d'incidence** le plan qui contient le rayon incident et la normale au dioptre en I . Alors le rayon réfracté vérifie les lois de Snell-Descartes :

- il est contenu dans le plan d'incidence
- l'angle r entre le rayon réfracté et la normale (angle réfracté) est relié à l'angle i entre le rayon incident et la normale (angle d'incidence) par la loi : $n_1 \sin i = n_2 \sin r$

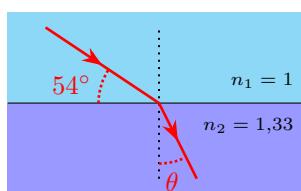


Remarque : Lorsque de la lumière arrive sur un dioptre, une partie est réfléchie, une autre partie est transmise (réfractée).

Remarque : Si le dioptre n'est pas plan, on prend le plan tangent au dioptre au niveau du point d'impact, et on trace la normale à celui-ci.

Exemple : Réfraction à la surface de l'eau

Un rayon lumineux passe de l'air ($n = 1$) dans l'eau ($n = 1,33$). Il arrive avec un angle 54° par rapport à la surface de l'eau. Déterminer l'angle θ de réfraction.



Cet exemple est là simplement pour bien insister que les angles d'incidence et de réfraction sont mesurés par rapport à la normale, et non pas au dioptre. Ainsi, ici l'angle d'incidence n'est pas 54° , mais son complémentaire, soit $90 - 54 = 36^\circ$. La loi de Snell-Descartes indique alors que $1 \cdot \sin 36^\circ = 1,33 \cdot \sin \theta$ soit $\theta = 26^\circ$.

B.2. Étude du comportement d'un rayon lumineux réfracté

Nous allons étudier plus en détail les lois de la réfraction, en faisant attention à distinguer le passage vers un indice plus fort ou vers un indice plus faible.

Propriété : Position du rayon réfracté par rapport au rayon incident

- si la lumière passe d'un indice faible à un indice fort, le rayon réfracté se rapproche de la normale
- si la lumière passe d'un indice fort à un indice faible, le rayon réfracté s'éloigne de la normale

Démonstration

Avec les notations vues précédemment : i l'angle d'incidence, r l'angle de réfraction, n_1 et n_2 les indices des deux milieux, alors la loi de Snell-Descartes indique que $n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin r$ soit $\sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i$.

- si $n_2 > n_1$ alors $\frac{n_1}{n_2} < 1$ donc $\sin r \leq \sin i$. Or la fonction sinus est croissante sur $[0^\circ; 90^\circ]$ donc cela implique que $r \leq i$: le rayon réfracté est plus proche de la normale que le rayon incident.
- si $n_2 < n_1$ alors $\frac{n_1}{n_2} > 1$ donc $\sin r \geq \sin i$. Or la fonction sinus est croissante sur $[0^\circ; 90^\circ]$ donc cela implique que $r \geq i$: le rayon réfracté est plus éloigné de la normale que le rayon incident.

Propriété : Variation de l'angle réfracté en fonction de l'angle d'incidence

Si le rayon incident arrive en incidence normale ($i = 0^\circ$) alors il n'est pas dévié : $r = 0^\circ$. Si l'angle d'incidence se met à croître, alors l'angle de réfraction r croît aussi.

Un peu de maths : Fonctions trigonométriques réciproques

Quand vous connaissez le sinus ou le cosinus d'un angle, vous utilisez la touche \cos^{-1} ou \sin^{-1} de votre calculatrice pour obtenir l'angle. Les vraies fonctions mathématiques associées s'appellent en réalité arcsinus (notée \arcsin) et arccosinus (notée \arccos). Nous n'allons pas étudier en détail ces fonctions, vous le ferez en maths, mais on va simplement en retenir deux propriétés importantes :

- pour des angles compris entre 0° et 90° , arcsinus (resp. arccosinus) est la réciproque de sinus (resp. cosinus), donc

$$\begin{cases} \forall \theta \in [0^\circ; 90^\circ], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta \text{ et } \arccos(\cos(\theta)) = \theta \\ \forall x \in [0; 1], \sin(\arcsin(x)) = x \text{ et } \cos(\arccos(x)) = x \end{cases} \quad (\text{O1.4})$$

- les fonctions réciproques ont la même monotonie que les fonctions directes : arcsinus est croissante sur $[0; 1]$, et arccosinus est décroissante.

Démonstration

Il est évident que si $i = 0^\circ$ alors $\sin i = 0$ donc par les lois de Snell-Descartes $\sin r = 0$ donc $r = 0^\circ$: le rayon continue tout droit.

Soient deux angles d'incidence i_1 et $i_2 > i_1$. Alors $\sin i_2 > \sin i_1$ car la fonction sinus est croissante (toujours sur $[0^\circ; 90^\circ]$). Donc $\frac{n_1}{n_2} \sin i_2 > \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ puisque n_1 et n_2 sont positifs. Donc $\sin r_2 > \sin r_1$ où r_2 et r_1 sont les angles réfractés correspondants à i_1 et i_2 . On applique la fonction arcsinus qui est croissante et on trouve $r_2 > r_1$: donc si l'angle d'incidence est plus grand, alors l'angle de réfraction est plus grand.

On peut alors tracer le rayon réfracté pour i variant de 0° à 90° (figure O1.7).

FIGURE O1.7 – Évolution de l'angle réfracté en fonction de l'angle d'incidence.

En fait, on voit apparaître deux comportements différents. Dans le cas du passage d'un indice *faible à fort*, on sait que $r \leq i$ donc quand i croît de 0° à 90° alors r croît de 0° à une valeur maximale appelée *angle maximal de réfraction* et dont on montre facilement qu'il vaut $\arcsin \frac{n_1}{n_2}$ (pour $i = 90^\circ$).

Tableau de variation de r pour un passage d'un indice faible à fort.

i	0°	90°
r	0°	$\arcsin \frac{n_1}{n_2}$

Par contre, lorsque la lumière passe d'un indice *fort à faible*, l'angle r croît plus vite que i , et atteint la valeur 90° pour $\sin i = \frac{n_2}{n_1}$. Si i continue de croître, la relation de Snell-Descartes donne $\sin r > 1$ ce qui est impossible : la réfraction n'est plus possible.

Propriété : Réflexion totale (interne)

Lorsque la lumière passe d'un milieu d'indice fort à un autre d'indice plus faible, il existe un angle d'incidence maximal, nommé **angle limite de réflexion totale**, de valeur $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$, au-delà duquel la lumière ne peut plus être réfractée : elle est alors entièrement réfléchie.

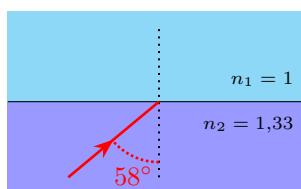
Pour retrouver la condition de réflexion totale, on doit écrire que l'angle de réfraction n'existe que si $\sin r \leq 1$.

Démonstration

La réfraction n'est possible que si l'angle de réfraction existe, donc si $\sin r \leq 1$. D'après la loi de Snell-Descartes, cela est équivalent à $n_1 \cdot \sin i \leq n_2$ soit $\sin i \leq \frac{n_2}{n_1}$ soit $i \leq \arcsin \frac{n_2}{n_1}$.

Exemple : Réflexion totale à la surface de l'eau

Un rayon lumineux dans l'eau ($n = 1,33$) arrive sur un dioptre eau/air en faisant un angle de 32° par rapport à la surface. Montrez qu'il subit une réflexion totale.



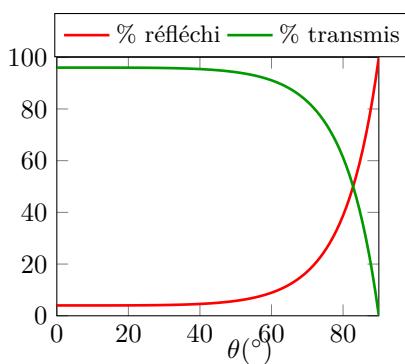
L'angle d'incidence vaut 58° . Supposons que le rayon soit réfracté ; alors d'après les lois de Snell-Descartes, en notant r l'angle de réfraction, on a $1,33 \cdot \sin 58^\circ = 1 \cdot \sin r$ soit $\sin r = 1,13$ ce qui est impossible : il y a donc réflexion totale.

Le tableau de variation est alors le suivant :

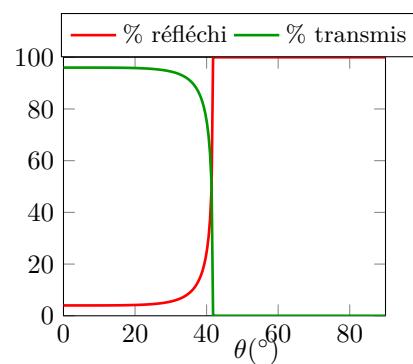
Tableau de variation de r pour un passage d'un indice fort à faible

i	0°	$\arcsin \frac{n_2}{n_1}$	90°
r	0°	90°	Hatched region

Remarque : En réalité, même lorsqu'il y a de la lumière réfractée, il y a aussi de la lumière réfléchie. Quand l'angle d'incidence augmente, la proportion de lumière réfléchie augmente aussi. Dans le cas du passage d'un indice fort à faible, cette proportion atteint 100 % à l'angle limite de réflexion totale. Le calcul des proportions de lumière réfléchie ou transmise (appelés coefficients de Fresnel) est compliqué ; leur profil est représenté figure O1.8. L'animation de la figure O1.9 montre ainsi l'évolution de la quantité de lumière réfléchie et transmise lorsque l'angle augmente.



(a) Passage air→verre



(b) Passage verre→air

FIGURE O1.8 – Coefficients de Fresnel pour un passage entre l'air ($n = 1$) et le verre ($n = 1,5$).

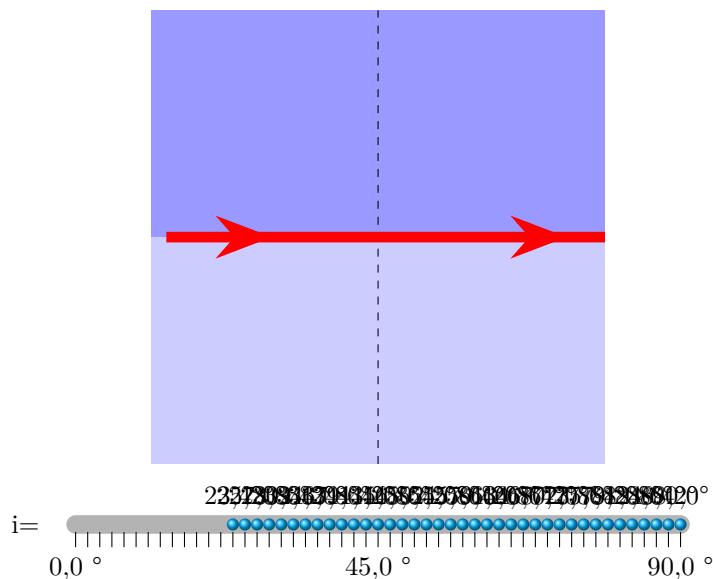


FIGURE O1.9 – Animation de l'évolution de la quantité de lumière transmise et réfléchie lorsque l'angle d'incidence sur l'interface eau/air augmente (cliquez en un point du glisseur pour modifier l'angle) : juste avant la réflexion totale, la quantité de lumière transmise diminue fortement.

B.3. Exemple d'application de la réflexion totale : la fibre optique

Une fibre optique est un fil transparent qui sert à conduire la lumière sur de longues distances. Il peut servir soit à faire de l'imagerie (par exemple, pour des examens de l'estomac,...) soit à transmettre de l'information.

Pour guider la lumière, on utilise le principe de réflexion totale sur les parois. Cela conduit à fabriquer une fibre dans laquelle le centre a un indice optique plus élevé que le bord. Deux grandes familles de fibres existent :

- les fibres à *saut d'indice*, formées d'un cœur d'indice constant entouré d'une gaine d'indice plus faible ;
- les fibres à *gradient d'indice*, formées d'un cœur dans lequel l'indice décroît de façon continue du centre vers les bords.

Pour cette année, on se limitera aux fibres à saut d'indice, car elles sont assez simples à étudier.

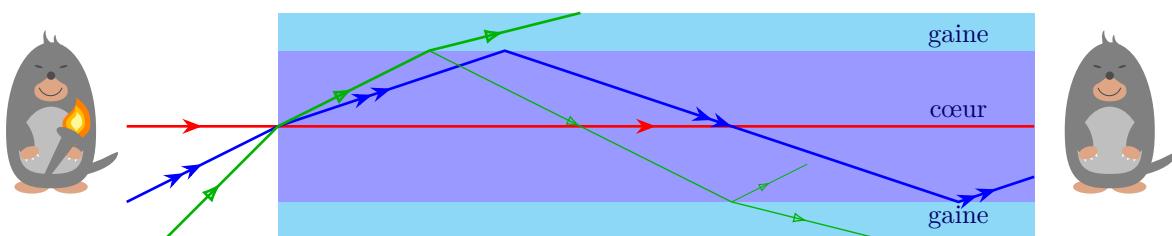


FIGURE O1.10 – Principe de propagation de la lumière dans une fibre à saut d'indice.

Le principe de la propagation est illustré sur la figure O1.10. En entrée de la fibre (à gauche), on envoie plein de lumière avec un peu toutes les directions. Considérons alors les 3 rayons représentés :

- le rayon rouge est parallèle à l'axe de la fibre : il n'est pas dévié sur la face d'entrée et continue tout droit à travers la fibre ; ce rayon est idéal, en réalité aucun rayon n'est ainsi parfaitement parallèle à l'axe, et aucune fibre n'est parfaitement rectiligne ;
- le rayon bleu est un peu incliné. Sur la face d'entrée, il est réfracté et pénètre dans le cœur. Une fois arrivé à l'interface cœur/gaine, il arrive avec une incidence tellement rasante qu'il subit une réflexion totale, et repart dans le cœur, subissant régulièrement d'autres réflexions ;
- le rayon vert est plus incliné. Sur la face d'entrée, il subit une réfraction, pénètre dans le cœur, puis arrive à l'interface cœur/gaine où il est à nouveau réfracté. Une grande partie de la lumière part donc dans la gaine, tandis qu'une toute petite partie est réfléchie. Au bout de quelques réflexions, il ne reste quasiment plus de lumière dans le cœur.

Ainsi, on voit que seuls les rayons pas trop inclinés par rapport à l'axe de la fibre pourront se propager sur de longues distances.

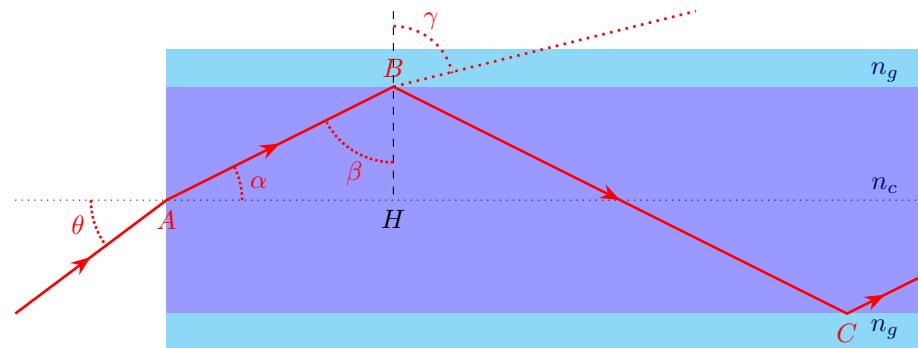
Propriété : Cône d'acceptance et ouverture numérique

Dans une fibre optique, un rayon ne peut se propager sur de longues distances que si le rayon incident sur la face d'entrée fait partie du *cône d'acceptance* correspondant à un angle θ par rapport à l'axe de la fibre inférieur à une certaine valeur θ_m . On définit l'ouverture numérique de la fibre comme le sinus de cet angle maximal. Pour une fibre optique à saut d'indice, dont le cœur a pour indice n_c et la gaine $n_g < n_c$, et placée dans de l'air d'indice 1, l'ouverture numérique vaut

$$ON = \sin \theta_m = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \quad (\text{O1.5})$$

Démonstration

Commençons par un schéma où on nomme les points où il y a des réfractions/réflexions, et où on place les normales :



Ce qu'on cherche, c'est la condition pour qu'il y ait réflexion totale à l'interface cœur/gaine, c'est-à-dire en B . On a placé l'angle d'incidence en B , noté β . **La condition de réflexion totale se trouve toujours avec un raisonnement par l'absurde** : on suppose qu'il y a réfraction, et on cherche quand c'est impossible. Supposons donc que la réfraction est possible en B , et notons γ l'angle réfracté. Alors, d'après les lois de Snell-Descartes : $n_c \cdot \sin \beta = n_g \cdot \sin \gamma$ avec $\sin \gamma \leq 1$ donc $n_c \cdot \sin \beta \leq n_g$ soit $\beta \leq \arcsin \frac{n_g}{n_c}$: c'est la condition pour qu'il y ait un rayon réfracté ; à l'inverse, il y a réflexion totale si $\beta > \arcsin \frac{n_g}{n_c}$. Maintenant, on cherche à traduire cela par une condition sur l'ouverture numérique, donc sur $\sin \theta$. Pour cela, il faut d'abord relier β à α par des lois de géométrie. Il est facile de voir que le triangle ABH est rectangle en H , donc α et β sont complémentaires : $\alpha = 90^\circ - \beta$. La condition de réflexion totale s'écrit donc $\alpha < 90^\circ - \arcsin \frac{n_g}{n_c}$. Or au point A il y a réfraction, le rayon passant de l'air d'indice 1 au cœur, donc d'après les lois de Snell-Descartes : $1 \cdot \sin \theta = n_c \cdot \sin \alpha$. Il y a donc réflexion totale si $\sin \theta < n_c \cdot \sin [90^\circ - \arcsin \frac{n_g}{n_c}]$ puisque la fonction sinus est croissante sur les angles entre 0° et 90° . On peut simplifier cette expression à condition de connaître soit les formules du genre $\sin(a + b) = \dots$, ou bien en se souvenant des formules sur les angles complémentaires : $\sin(90^\circ - x) = \cos(x)$ et $\cos(90^\circ - x) = \sin(x)$. Ici on a donc $n_c \cdot \sin [90^\circ - \arcsin \frac{n_g}{n_c}] = n_c \cdot \cos [\arcsin \frac{n_g}{n_c}]$. Il existe des formules toutes prêtes pour $\cos(\arcsin \dots)$, ou bien on utilise le fait que $\cos^2 [\arcsin \frac{n_g}{n_c}] + \sin^2 [\arcsin \frac{n_g}{n_c}] = 1$ donc $\cos^2 [\arcsin \frac{n_g}{n_c}] + \frac{n_g^2}{n_c^2} = 1$ soit $\cos [\arcsin \frac{n_g}{n_c}] = \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$ d'où $n_c \cdot \sin [90^\circ - \arcsin \frac{n_g}{n_c}] = n_c \cdot \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$. On trouve donc bien que la lumière se propage dans la fibre si et seulement si $\sin \theta < \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$ ce qui correspond à l'ouverture numérique recherchée.

Remarque : En fait, ce n'est pas la seule condition pour que la lumière se propage. Des considérations sur les interférences entre les rayons lumineux conduisent à montrer que seuls certains angles particuliers, correspondant à ce qu'on appelle des *modes*, peuvent se propager dans la fibre. Mais ces modes vérifient tous la condition imposée par l'ouverture numérique.

Plus la différence entre n_c et n_g sera grande, plus l'ouverture numérique de la fibre sera grande, et plus on pourra faire entrer de la lumière dans la fibre. Mais cela a une contrepartie :

Propriété : Dispersion intermodale

On appelle **dispersion intermodale** de la fibre, la différence de temps entre le rayon le plus lent et le rayon le plus rapide qui parcourent la fibre.

Pour une fibre à saut d'indice, en négligeant les avances dues aux réflexions totales, cette dispersion vaut

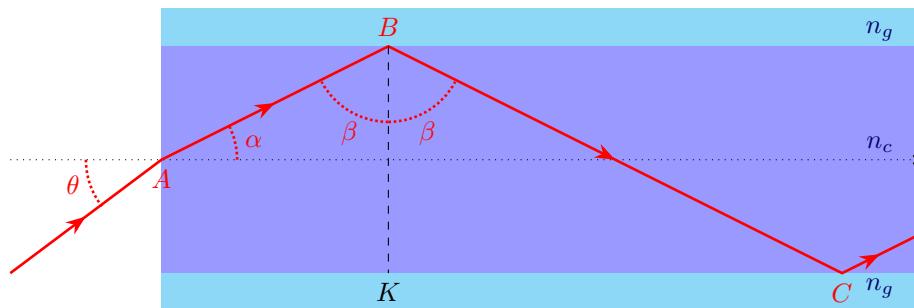
$$\Delta t = \frac{L \cdot n_c}{c} \frac{n_c - n_g}{n_g}$$

avec L la longueur de la fibre et $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide.

Remarque : Avant de démontrer cette relation, on peut faire remarquer qu'elle est totalement fausse, car les réflexions totales sur les bords amènent des gain de temps qui ne sont pas explicable par l'optique géométrique, et qu'en réalité le rayon qui zigzag le plus est le plus rapide. Mais comme c'est marqué au programme que vous devez savoir refaire ce calcul, on le fait !

Démonstration

Reprendons le schéma de la démonstration précédente, en ajoutant l'angle réfléchi en B :



Considérons ce qui se passe entre les points B et C . La lumière parcourt la longueur BC , mais en réalité, dans le sens de la fibre elle n'a avancé que de la longueur KC ; le fait qu'elle zigzague n'importe pas, c'est du temps perdu. On peut alors appliquer une règle de proportionnalité : si la lumière parcourt une distance BC pour avancer de KC , alors pour avancer de la longueur L de la fibre, elle devra parcourir la distance $d = \frac{BC \times L}{KC}$. Or il est facile de voir sur le schéma que, dans le triangle BKC , $\frac{KC}{BC} = \sin \beta$ (côté opposé/hypothénuse) donc $d = \frac{L}{\sin \beta}$. Ce trajet est parcouru à la vitesse $\frac{c}{n_c}$, donc le temps de parcours vaut $t = \frac{L \cdot n_c}{c \cdot \sin \beta}$. Or les deux rayons extrêmes sont :

- celui qui va tout droit, parallèle à l'axe, pour lequel $\beta = 90^\circ$ donc $\sin \beta = 1$ donc $t = \frac{L \cdot n_c}{c}$;
- celui qui est le plus incliné, à la limite de la réflexion totale, vérifie $\sin \beta = \frac{n_g}{n_c}$ (cf. démo précédente) donc $t = \frac{L \cdot n_c}{c} \frac{n_c}{n_g}$.

La dispersion intermodale vaut donc bien $\frac{L \cdot n_c}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$ ce qui correspond à la formule proposée.

Prenons un exemple : une fibre avec un cœur d'indice $n_c = 1,530$ et une gaine d'indice $n_g = 1,525$, de longueur $L = 100 \text{ m}$, possède une ouverture numérique $ON = 0,124 = \sin 7,1^\circ$ et une dispersion intermodale $\Delta t = 1,7 \times 10^{-9} \text{ s}$ suffisamment courte pour permettre des débits de plusieurs dizaines de gigabits par seconde.

Ainsi, plus l'écart d'indice entre le cœur et la gaine est grand, plus la dispersion est grande. Or cette dispersion est importante, car quand on transmet des informations par fibre optique sous forme de flashes lumineux, elle limite l'écart temporel entre deux flashes, autrement dit, le débit. On choisira donc :

- des fibres de grande ouverture numérique pour faire de l'observation
- des fibres de petite ouverture numérique pour transmettre de l'information.

Évidemment, il y a beaucoup d'autres problèmes qui vont se poser : le manque de luminosité, l'absorption par la fibre, ...

B.4. Exemple d'application : les mirages

Les mirages sont une autre application du phénomène de réflexion totale. Ils sont basés sur la très faible variation de l'indice optique de l'air avec la température : quand la température de l'air augmente, son indice optique diminue. Il existe alors principalement deux configurations :

- les *mirages chauds* apparaissent lorsque le sol est fortement chauffé par le soleil. L'air près du sol est chaud donc d'indice faible ; un rayon lumineux arrivant peu incliné sur cette couche sera alors réfléchi (figure O1.11) : le sol ressemble à un miroir.

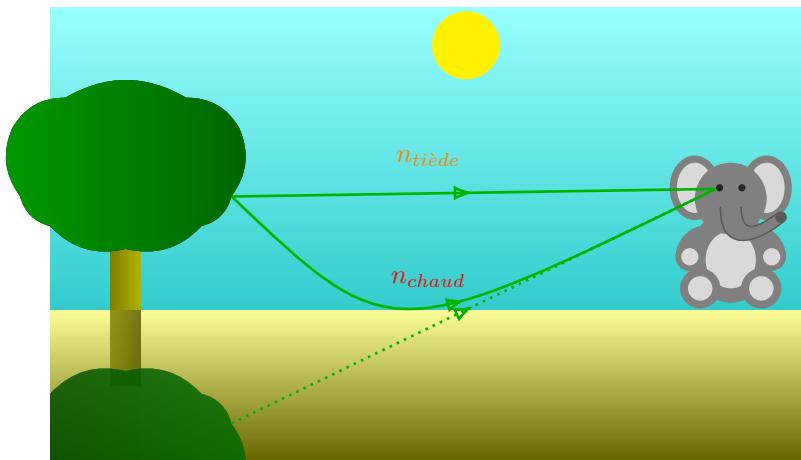


FIGURE O1.11 – Principe d'un mirage chaud.



(a) Mirage chaud dans le désert (Crédit : Wikipedia/B.Inaglory)



(b) Mirage chaud dans le grand lac salé (Crédit : Wikipedia/Galvin)

FIGURE O1.12 – Mirages chauds.

- les *mirages froids* apparaissent au contraire lorsque le sol est froid, donc l'air proche du sol a un indice plus élevé que les couches supérieures ; par exemple, en Antarctique, ou en bord de mer froide (figure O1.13).

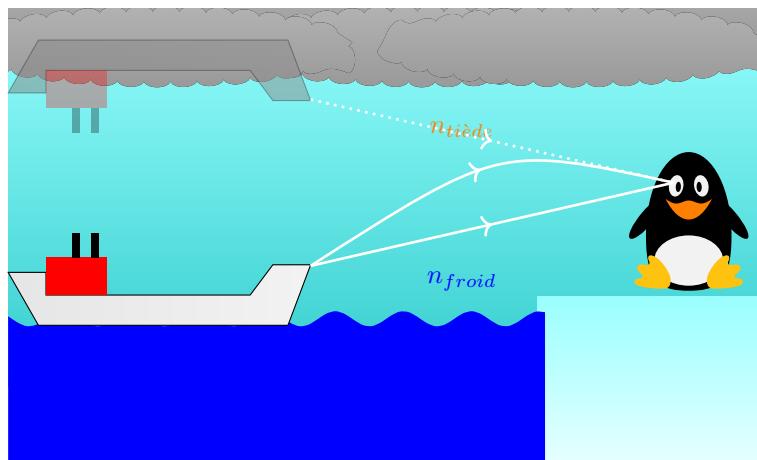


FIGURE O1.13 – Principe d'un mirage froid.

- on peut avoir parfois une combinaison des deux. Ce phénomène apparaît particulièrement dans le détroit de Messine, faisant apparaître des constructions fabuleuses appelées *Fata Morgana*.



(a) Mirage froid sur la mer. (Crédit : Wikipedia/Kervam3)



(b) Mirage froid vu de la Croix de Chaubouret (Mont Pilat)



(c) Mirage froid sur le village de Salers en 1900 (Crédit : Abbé Gély)

FIGURE O1.14 – Mirages froids.

Bases de l'optique géométrique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Sources lumineuses	
Modèle de la source ponctuelle monochromatique. Spectre.	Caractériser une source lumineuse par son spectre. Relier la longueur d'onde dans le vide et la couleur.
Modèle de l'optique géométrique	
Modèle de l'optique géométrique. Notion de rayon lumineux. Indice d'un milieu transparent.	Définir le modèle de l'optique géométrique. Indiquer les limites du modèle de l'optique géométrique.
Réflexion, réfraction. Lois de Snell-Descartes. La fibre optique à saut d'indice.	Établir la condition de réflexion totale. Établir les expressions du cône d'acceptance et de la dispersion intermodale d'une fibre à saut d'indice.

Bases de l'optique géométrique

QCMs

réponses page 60

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1.

Le «rayon lumineux» est une modélisation toujours valable pour décrire la propagation de la lumière.

Q2.

Un photon de longueur d'onde $\lambda = 540 \text{ nm}$ a pour énergie :

- (a). $3,7 \times 10^{-19}$ J (b). 2,3 eV
 (c). $5,8 \times 10^{-20}$ J (d). 1,4 eV

Q3.

De la lumière de longueur d'onde 1200 nm appartient :

- (a). au domaine ultraviolet
(c). au domaine infrarouge

(b). au domaine visible
(d). au ondes radio

Q4.

La réflexion totale interne peut apparaître lorsque la lumière passe d'un milieu vers un autre milieu :

Q5.

Lorsque la lumière passe vers un milieu d'indice plus fort, le rayon :

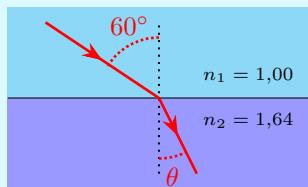
Q6.

Un rayon lumineux incident sur un dioptre en incidence normale :

QCM : Lois de la réfraction

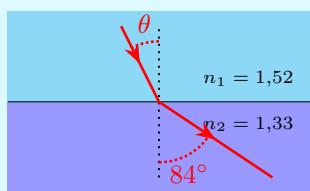
Calculez l'angle θ à l'aide des lois de la réflexion.

Q7.



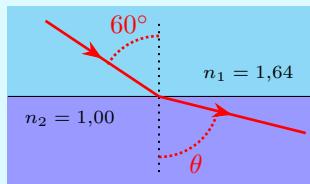
- (a). $31,9^\circ$ (b). $46,2^\circ$
(c). impossible (d). $82,4^\circ$

Q8.



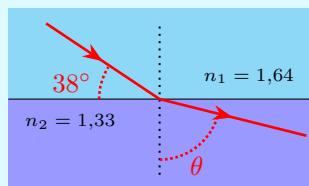
- (a). $18,1^\circ$
 (b). $60,5^\circ$
 (c). impossible
 (d). $35,5^\circ$

Q9.



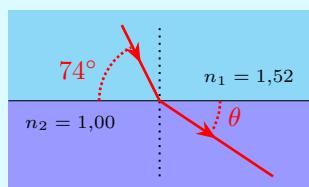
- (a). impossible
 (b). $82,4^\circ$
 (c). $31,9^\circ$
 (d). $46,2^\circ$

Q10.



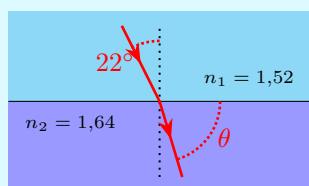
- (a). 38°
 (b). impossible
 (c). $88,1^\circ$
 (d). $76,3^\circ$

Q11.



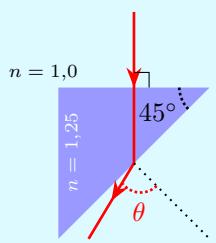
- (a). $28,1^\circ$
 (b). $46,0^\circ$
 (c). $13,8^\circ$
 (d). $65,2^\circ$

Q12.



- (a). $23,8^\circ$
 (b). $69,7^\circ$
 (c). $66,2^\circ$
 (d). $20,3^\circ$

Q13.



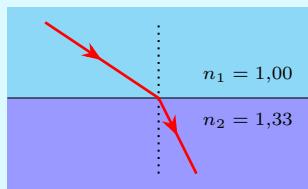
- (a). $62,5^\circ$
 (c). $38,8^\circ$

- (b). $62,1^\circ$
 (d). $65,2^\circ$

QCM : Position du rayon réfracté

Pour chaque schéma, indiquez si le rayon réfracté est bien positionné (plus proche ou plus loin de la normale).

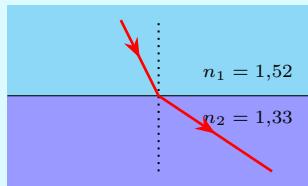
Q14.



- (a). Incorrect

- (b). Correct

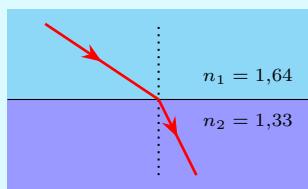
Q15.



- (a). Correct

- (b). Incorrect

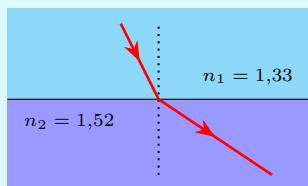
Q16.



- (a). Correct

- (b). Incorrect

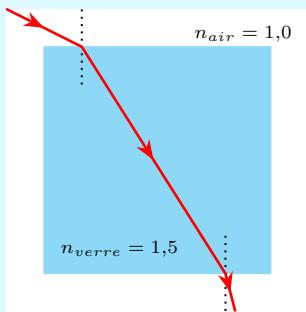
Q17.



- (a). Correct

- (b). Incorrect

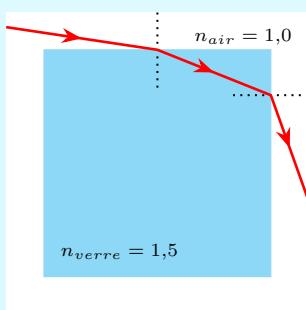
Q18.



(a). Correct

(b). Incorrect

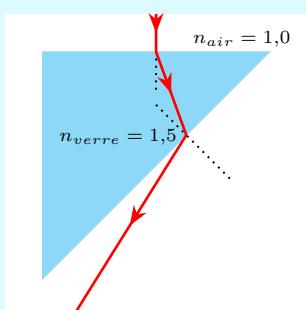
Q19.



(a). Correct

(b). Incorrect

Q20.



(a). Correct

(b). Incorrect

 QCM : Réflexion totale

Indices de quelques matériaux :

Air	1,00
Eau	1,33
Verre crown	1,52
Verre flint	1,62

Q21.

Un rayon lumineux passe de verre flint vers du verre crown. L'angle limite de réflexion totale vaut :

- (a). $43,2^\circ$
 (c). $69,8^\circ$
- (b). Il n'y en a pas
 (d). $20,2^\circ$

Q22.

Un rayon lumineux se propage dans le cœur d'une fibre optique d'indice 1,48 ; la gaine de la fibre

a pour indice 1,54. L'angle maximal de réflexion totale à cette interface vaut :

- (a). 76,8° (b). 40,5°
(c). 42,5° (d). Il n'y en a pas

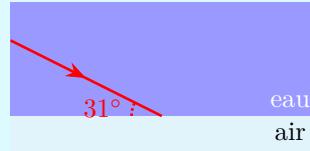
Q23.

Un rayon lumineux se propage dans l'eau d'un lac et arrive à sa surface supposée plane. Pour qu'il puisse passer dans l'air, son angle d'incidence doit être :

- (a). inférieur à 41,2° (b). inférieur à 48,8°
(c). supérieur à 41,2° (d). supérieur à 48,8°

Q24.

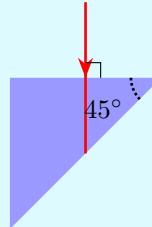
Y a-t-il réflexion totale ?



- (a). Oui (b). Non

Q25.

À quelle condition sur l'indice du verre y a-t-il réflexion totale ?



- (a). $n < 1,18$ (b). $n > 1,18$
(c). Impossible (d). $n > 1,41$

Bases de l'optique géométrique

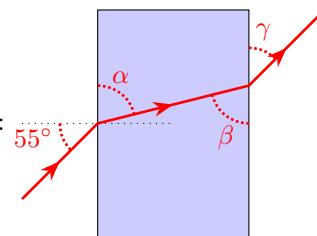
Exercices

réponses page 61

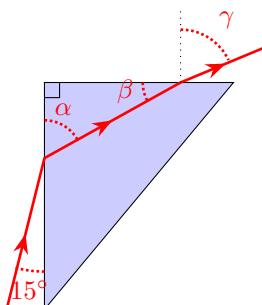
Exercice O1.1 : Trajectoires de quelques rayons [*]

Déterminez les angles inconnus (le rayon arrive depuis l'air d'indice 1) :

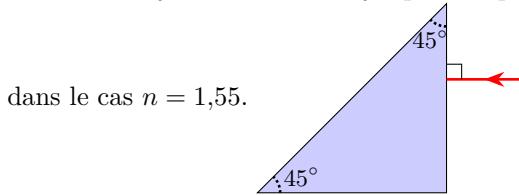
1. le rectangle a pour indice $n = 1,33$:



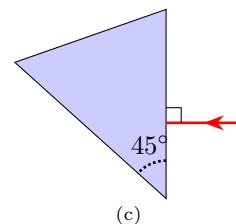
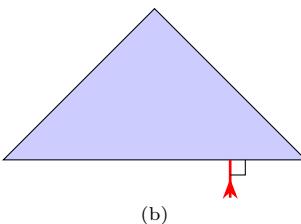
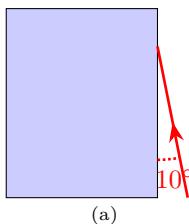
2. Le prisme est un triangle rectangle d'indice $n = 1,25$:



3. Tracez le trajet de la lumière jusqu'à ce qu'elle sorte du prisme, dans le cas d'un indice $n = 1,25$ puis



Exercice O1.2 : Trajet d'un rayon [**]



Dans chaque cas, tracez la trajectoire du rayon lumineux en indiquant les angles. Le verre a pour indice $n = 1,5$, et l'eau $n = 1,33$; dans les cas où la réfraction est possible, on négligera la réflexion.

- (a) Le rayon arrive pas trop loin de l'angle en haut à droite de l'aquarium rempli d'eau (on oublie les parois en verre).
- (b) Le prisme de verre est un triangle rectangle isocèle.
- (c) Le prisme de verre est un triangle isocèle d'angle au sommet 45° .

Exercice O1.3 : Piscine [*]

Quand on est sous l'eau et qu'on regarde vers le haut, on voit ceci au niveau de la surface :

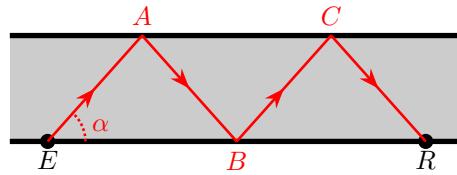
- Un disque à l'intérieur duquel on aperçoit les objets qui se trouvent à l'extérieur, au-dessus de la piscine (arbres, oiseaux, ciel bleu,...)

- Autour de ce disque, on observe la réflexion des objets qui sont dans l'eau (fond, poissons,...) Comment expliquer ce phénomène ?

Exercice O1.4 : DéTECTEUR DE PLUIE [**]

Pour détecter la pluie sur le pare-brise d'une voiture et déclencher les essuie-glaces, une solution utilise le principe de réflexion totale.

Dans le schéma ci-contre, la vitre est représentée par une lame de verre d'indice $n = 1,52$ et d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$ placée dans l'air d'indice 1. Une LED émet en E un rayon lumineux incliné de α par rapport à la vitre. Ce rayon se propage alors dans la vitre par réflexion totale jusqu'en R où se trouve un détecteur.



1. Déterminez la condition sur l'angle α pour qu'il y ait réflexion totale en A .
2. On suppose qu'une goutte d'eau (indice $n' = 1,33$) vient se poser sur la vitre en A ; justifiez qu'il n'y a plus réflexion totale si α est supérieur à une certaine limite.
3. Déduisez-en le principe de la détection de la pluie.

Exercice O1.5 : Le prisme [**]

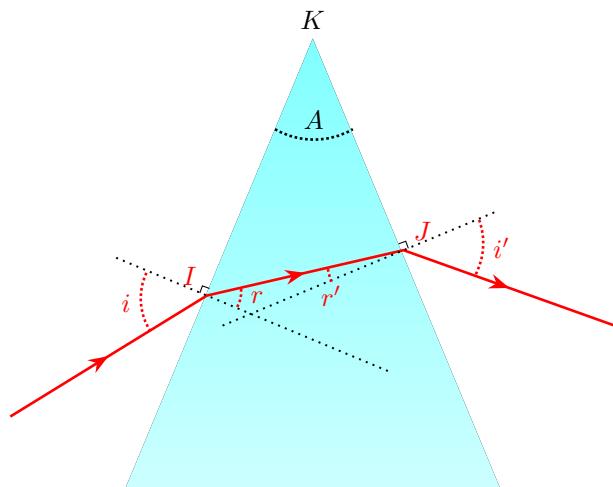
Un prisme est un triangle fait d'une matière d'indice n et placé dans l'air d'indice 1. On va l'utiliser en travaillant sur deux de ses faces, séparées par un angle A qu'on appelle l'angle au sommet du prisme :

- la lumière arrive sur la première face au point I avec un angle d'incidence i ; il est réfracté avec un angle r ;
- la lumière arrive sur la seconde face au point J avec un angle d'incidence r' ; on suppose qu'il est réfracté avec un angle de réfraction i' . On fera attention à l'inversion des notations sur la seconde face, destinée à assurer une certaine symétrie dans les lettres.

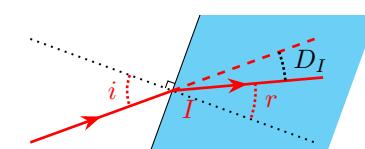
On effectuera l'étude suivante avec des **angles non orientés**; cela ne fonctionnera que si le rayon incidence arrive en-dessous de la normale (pointillé sur la figure); si on veut traiter le cas général, il faut utiliser des angles orientés.

On va commencer par établir les 4 équations du prisme, puis on va les utiliser.

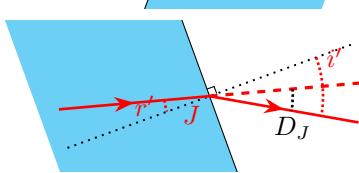
1. Pour commencer, écrivez les équations de la réfraction en I , puis en J (2 équations).
2. La troisième équation se trouve en écrivant que la somme des angles du triangle KIJ vaut 180° ; montrez que $r + r' = A$.
3. On appelle *angle de déviation* du prisme l'angle dont a été dévié le rayon lumineux entre l'entrée et la sortie. Cet angle D est la somme :



- d'un angle de déviation D_I en I :



- et d'un angle de déviation D_J en J :



Exprimez D en fonction de i , i' , r et r' , puis en fonction de i , i' et A .

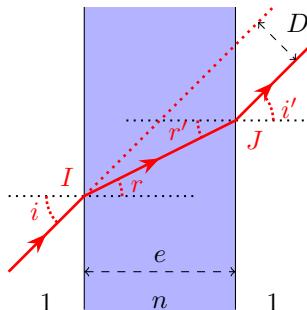
4. Déduisez-en que

$$D = i + \arcsin \left(n \sin \left[A - \arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right] \right) - A$$

5. Tracez la courbe $D(i)$ pour $A = 50^\circ$, $n = 1,5$, i variant entre 15° et 90° . Observez qu'elle possède un minimum qu'on reverra en TP.
6. La théorie indique que ce minimum a lieu pour un trajet symétrique : lorsque $i = i'$ (notés i_m) et $r = r'$ (notés r_m). Exprimez r_m en fonction de A , puis i_m en fonction de A et D , et déduisez-en que $n \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{D+A}{2}$. Cette formule sera utilisée en TP pour mesurer l'indice n .
7. On se place à $i = 60^\circ$ pour $A = 50^\circ$; verre a pour indice $n_r = 1,489$ dans le rouge et $n_b = 1,503$ dans le bleu. Calculez les deux angles de déviation ; quelle est la couleur la plus déviée ?

Exercice O1.6 : Lame à faces parallèles [***]

On s'intéresse à une lame à faces parallèles, c'est-à-dire un morceau de matière transparent, d'indice $n > 1$, limité par deux faces planes parallèles, séparées d'une épaisseur e . Elle est placée dans l'air.



- Montrez que le rayon incident et le rayon émergent sont parallèles entre eux.
 - Exprimez le distance D entre ces deux rayons, en fonction de i (angle d'incidence sur la face d'entrée), e et n .
- Indication :* calculez IJ en fonction de e et r ; appelez H le projeté orthogonal de J sur le rayon incident ; calculez \widehat{HIJ} , puis faites un peu de trigono dans le triangle IJH . Utilisez enfin les formules de trigono et les lois de Descartes pour exprimer r en fonction de i .
- On envoie un faisceau de lumière blanche. La lame est constituée d'un verre ayant pour indice 1,514 pour le rouge et 1,522 pour le bleu; elle a pour épaisseur $e = 5,000$ mm. Calculez D pour le rouge et le bleu, dans le cas d'un angle d'incidence de 60° .

La différence est-elle perceptible ?

Exercice O1.7 : L'arc-en-ciel [***]

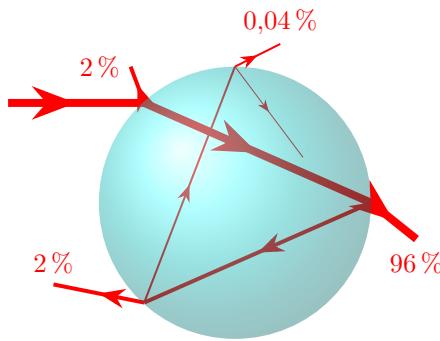
Lorsque le soleil éclaire un rideau de pluie, on peut apercevoir, en fonction de sa position, un arc-en-ciel faisant apparaître les différentes couleurs de la lumière.



Arc-en-ciel (crédit : Wikipedia/O.Solstad)

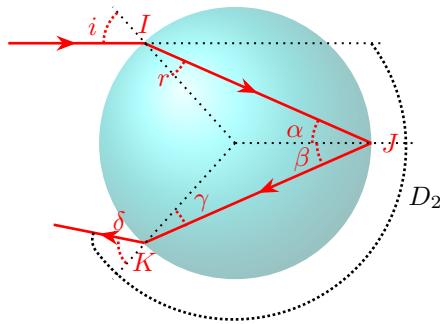
Pour expliquer l'arc-en-ciel, on considère une goutte d'eau sphérique, sur laquelle arrive un rayon lumineux ;

suivant les réflexions et les réfractions qu'elle subit, la lumière peut connaître plusieurs trajets.



1. Lumière réfléchie une fois

On commence par considérer le cas où la lumière subit une seule réflexion. On travaille avec des angles non orientés ; n est l'indice de l'eau, l'indice de l'air vaut 1.



- (a) À l'aide d'un peu de géométrie, reliez les angles α , β , γ et δ à i et r . Montrez que $\delta = i$.
- (b) Déduisez-en l'angle de déviation D_2 en fonction de i et r seulement.

Indication : calculez la déviation à chaque changement de direction du faisceau, puis ajoutez ces différentes contributions.

- (c) Montrez que $\frac{dD_2}{di} = 2 - \frac{4 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$

Indication : admettez cette question si vous n'avez pas encore vu les dérivations de fonctions composées, et/ou la dérivée de la fonction arcsinus.

- (d) Montrez qu'il existe une valeur i_2 de l'angle i pour laquelle la dérivée de la déviation s'annule. On exprimera $\sin i_2$ en fonction de l'indice n .

- (e) L'indice de l'eau vaut 1,3317 pour le rouge à 700 nm et 1,3448 pour le violet à 400 nm.

Pour ces deux couleurs, calculez l'angle i_2 , puis l'angle r_2 correspondant, et enfin la déviation D_{2m} associée.

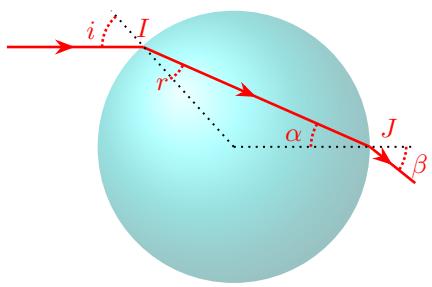
- (f) En réalité, lorsque le soleil éclaire la goutte, il arrive sur cette goutte un ensemble de rayons tous parallèles entre eux, mais qui frappent la goutte sur l'intégralité de sa surface, donc avec tous les angles d'incidence possibles entre 0° et 90° .

On considère une longueur d'onde donnée. Expliquez pourquoi il y a plus de lumière qui repart déviée avec l'angle D_{2m} correspondant, qu'avec un autre angle.

En déduire qu'un observateur voit de la lumière provenant d'un ensemble de gouttes situées sur un cône d'angle au sommet $180^\circ - D_{2m}$; en déduire aussi la position du violet et du rouge dans l'arc-en-ciel.

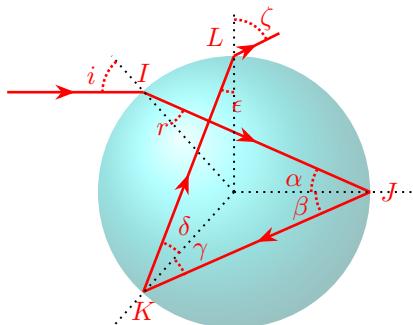
2. Lumière réfléchie aucune fois

Recommencez les mêmes questions dans le cas où la lumière ne subit aucune réflexion. Montrez qu'il n'apparaît pas d'arc-en-ciel.



3. Lumière réfléchie deux fois

Recommencer les mêmes questions dans le cas où la lumière subit deux réflexions. Montrez qu'il apparaît un arc-en-ciel secondaire situé au-dessus du primaire, avec des couleurs en ordre inverse.



Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Elle n'est pas valable pour des faisceaux trop fins, quand le phénomène de diffraction apparaît.

Q2.(a) ET (b)

$$E = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda}$$

Q3.(c)

Q4.(a)

Q5.(a)

Q6.(d)

Réponses au QCM : Lois de la réfraction

Q7.(a)

lois de Snell-Descartes : $1,00 \times \sin 60^\circ = 1,64 \times \sin \theta$

Q8.(b)

lois de Snell-Descartes : $1,52 \times \sin \theta = 1,33 \times \sin 84^\circ$

Q9.(a)

lois de Snell-Descartes : $1,64 \times \sin 60^\circ = 1,00 \times \sin \theta$ n'a pas de solution.

Q10.(d)

lois de Snell-Descartes : $1,64 \times \sin (90^\circ - 38^\circ) = 1,33 \times \sin \theta$

Q11.(d)

lois de Snell-Descartes : $1,52 \times \sin (90^\circ - 74^\circ) = 1,00 \times \sin (90^\circ - \theta)$

Q12.(b)

lois de Snell-Descartes : $1,52 \times \sin 22^\circ = 1,64 \times \sin (90^\circ - \theta)$

Q13.(b)

lois de Snell-Descartes : $1,52 \times \sin 45^\circ = \sin \theta$.

Réponses au QCM : Position du rayon réfracté

Q14.(b)

Q15.(a)

Q16.(b)

Q17.(b)

Q18.(b)

La première réfraction est correcte, mais pas la seconde : le rayon devrait d'écartier de la normale.

Q19.(a)

Q20.(b)

La première réfraction est incorrecte : en incidence normale, le rayon n'est pas dévié. La seconde est correcte.

Réponses au QCM : Réflexion totale

Q21.(c)

Q22.(d)

Il n'y a de réflexion totale que lorsqu'on passe d'un indice fort à un indice faible. Cette fibre a donc été construite à l'envers.

Q23.(b)

Q24.(a)

$$1,33 \times \sin(90^\circ - 31^\circ) = 1,14 > 1$$

Q25.(d)

Il faut que $n \cdot \sin 45^\circ > 1$.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice O1.1 : Trajectoires de quelques rayons [*]

1. $\gamma = 55^\circ$
2. $\gamma = 52,5^\circ$
3. si $n = 1,55$ il y a réflexion totale, sinon émergence avec un angle de réfraction de $62,1^\circ$.

Réponses de l'exercice O1.2 : Trajet d'un rayon [**]

- (a) Le rayon ressort par la face de droite avec un angle réfracté de 80° .
- (b) Le rayon fait demi-tour.
- (c) Le rayon ressort par la face du haut, il a tourné de $102,5^\circ$.

Réponses de l'exercice O1.3 : Piscine [*]

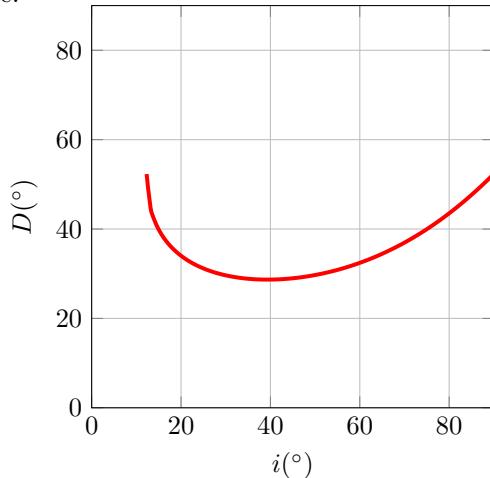
Il y a un phénomène de réflexion totale.

Réponses de l'exercice O1.4 : Détecteur de pluie [**]

1. $\alpha < \arccos \frac{1}{n} = 48,9^\circ$
2. $\alpha > \arccos \frac{n'}{n} = 29,0^\circ$
3. On prend un α intermédiaire.

Réponses de l'exercice O1.5 : Le prisme [**]

Après avoir écrit les deux lois de la réfraction, et montré que $r + r' = A$, on montre que $D_I = i_r$ et $D_J = i' - r'$ et on aboutit à la formule demandée.



On trace alors la courbe :

À la fin on trouve $D_r = 31,8^\circ$ et $D_b = 32,6^\circ$: le bleu est plus dévié.

Réponses de l'exercice O1.6 : Lame à faces parallèles [***]

1. Il faut appliquer deux fois les lois de la réfraction, ainsi que les propriétés des angles alternes-internes.
2.
$$D = e \left(\sin i - \cos i \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right)$$
3. $D_{rouge} = 2,587 \text{ mm}$ et $D_{bleu} = 2,600 \text{ mm}$.

Réponses de l'exercice O1.7 : L'arc-en-ciel [***]

1. Lumière réfléchie une fois

- (a) $\alpha = \beta = \gamma = r$ et $\delta = i$
- (b) $D_2 = 180^\circ + 2i - 4r$
- (c) $\frac{dD_2}{di} = 0 + 2 - 4 \frac{\sin'(i)}{n} \arcsin'\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ d'où on tire la réponse.
- (d) $\sin i_2 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$
- (e) $D_{2m}^{rouge} = 137,73^\circ$ et $D_{2m}^{violet} = 139,61^\circ$
- (f) L'ensemble des rayons émerge dans un peu toutes les directions, mais il y en a beaucoup dans la direction D_{2m} .

2. Lumière réfléchie aucune fois

Cette fois, $D_1 = 2i - 2r$ donc $\frac{dD_1}{di} = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ce qui n'est pas le cas.

3. Lumière réfléchie deux fois

$$D_3 = 2i - 6r \text{ et } \frac{dD_3}{di} = 0 \Leftrightarrow \sin i = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}.$$

On calcule $D_{3m}^{rouge} = 230,55^\circ$ et $D_{3m}^{violet} = 233,94^\circ$

02

CHAPITRE Systèmes optiques

Systèmes optiques

Cours

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment les lois de propagation de la lumière permettaient de prévoir la trajectoire d'un rayon lumineux. Néanmoins, l'étude de la trajectoire de chaque rayon lumineux est fastidieuse. On va donc, dans ce chapitre, s'intéresser à des ensembles de dioptres et de miroirs conçus pour réaliser certaines transformations à la lumière, et analyser les fonctions de ces systèmes non plus en terme de rayons, mais en terme de points objet et image.

Définition : Système optique

Un système optique est une portion de l'espace contenant des dioptres et des miroirs. Il possède une *face d'entrée* et une *face de sortie* (figure O2.1). Les *rayons incidents* arrivent sur la face d'entrée et les *rayons émergents* sortent par la face de sortie. Il possède parfois un axe particulier.

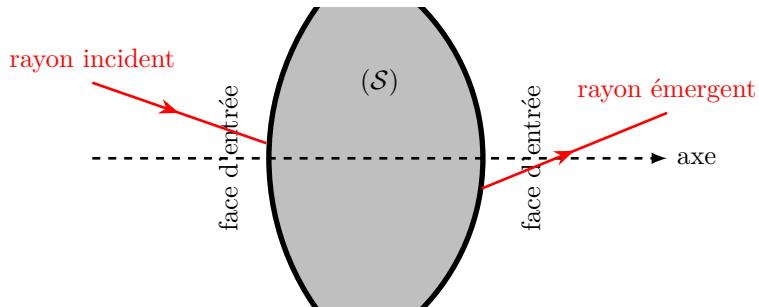


FIGURE O2.1 – Représentation générale d'un système optique (\mathcal{S}). Ici la face de sortie est du côté opposé à la face d'entrée, mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour les miroirs.

Définition très générale, qu'on pourrait aussi écrire : «un système optique est un système destiné à faire de l'optique...»

Définition : Faisceau lumineux

Un faisceau lumineux est un ensemble de rayons lumineux. S'ils s'écartent, on a un faisceau *divergent*; s'ils se rapprochent, un faisceau *convergent*; s'ils sont parallèles, un faisceau *parallel* ou *collimaté*.

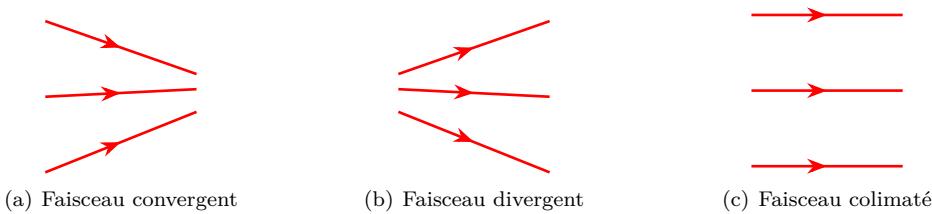


FIGURE O2.2 – Faisceaux lumineux.

O2.A. Étude de systèmes optiques à l'aide de tracés de rayons

A.1. Objet et image d'un système optique

Définition : Objet/image

On appelle *objet ponctuel* d'un système optique, le point où se coupent les rayons incidents.

On appelle *image ponctuelle* d'un système optique, le point où se coupent les rayons émergents.

Remarque : Un objet étendu sera simplement considéré comme un ensemble d'objets ponctuels.

La figure O2.3 montre par exemple une simulation d'un objet ponctuel qui émet des rayons lumineux en direction d'une sphère. Après deux réfractions, on constate que les rayons lumineux émergents se coupent approximativement au même point : l'image du système.

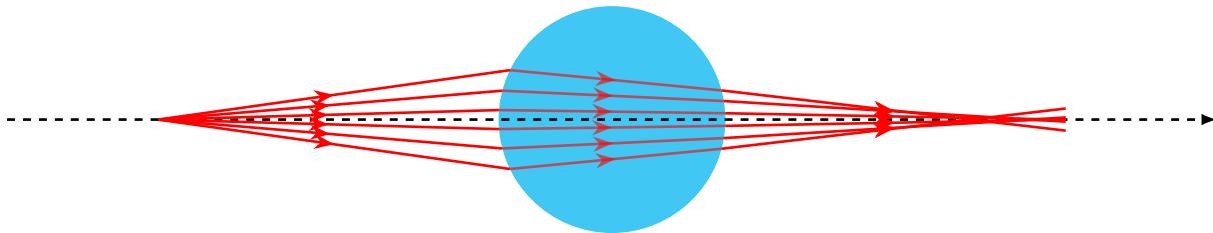


FIGURE O2.3 – Déviation d'un faisceau lumineux émis par un objet ponctuel, par une sphère d'indice 1,6.

Définition : Stigmatisme

Considérons un système éclairé par un objet ponctuel :

- si les rayons émergents se coupent exactement en un même point, on dit que le système est *rigoureusement stigmatique*
- si les rayons émergents se coupent approximativement en un même point, on dit que le système est *approximativement stigmatique*.

Dans les deux cas, on dit que l'objet et l'image sont des *points conjugués* par le système optique.

Remarque : D'après le principe de retour inverse de la lumière, si l'objet A donne une image A' par un système, alors en inversant le trajet des rayons, A' devient l'objet et A devient son image conjuguée.

Considérons maintenant un autre système : un simple dioptre plan (figure O2.4). Un objet émet des rayons vers ce dioptre, qui sont réfractés. Les rayons qui émergent du dioptre divergent et ne se couperont jamais ; cependant, ils semblent provenir tous d'un même point. En prolongeant en arrière ces rayons, on constate que leurs prolongements se coupent approximativement en un même point : c'est donc une image ponctuelle, mais comme les rayons ne passent pas réellement par ce point, on dit qu'elle est virtuelle.

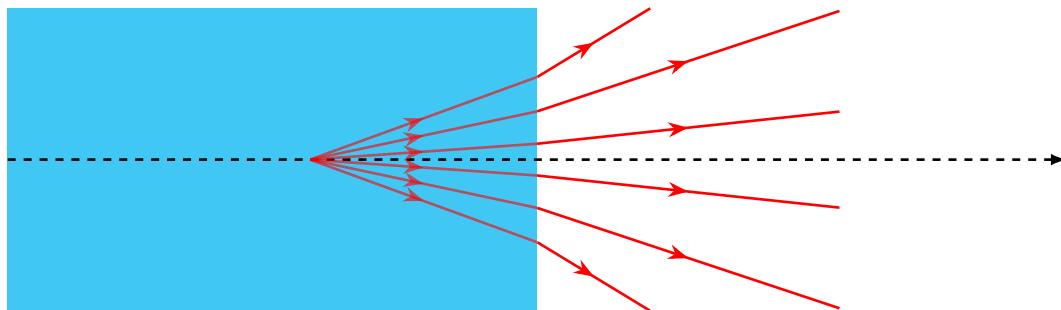


FIGURE O2.4 – Déviation d'un faisceau lumineux par dioptre plan.

Définition : Réel/virtuel

Un objet ou une image est réel(le) si les rayons passent vraiment par ce point, et virtuel(le) si ce sont seulement leurs prolongements qui passent par ce point.

La figure O2.5 illustre les 4 combinaisons possibles. L'objet réel est un objet qui émet de la lumière, comme une lampe, ou tout objet éclairé ; l'objet virtuel n'existe pas en tant que tel, c'est forcément l'image (réelle) d'un système précédent qui peut devenir l'objet virtuel du système suivant. La figure O2.6 illustre ce cas ; il est important de remarquer que le caractère réel/virtuel n'est pas intrinsèque à l'objet/l'image, mais est relatif au système : l'image réelle d'un système peut devenir pour le système suivant un objet réel ou virtuel, suivant où il est placé.

Quant à l'image, il faut retenir la différence suivante : une image réelle s'observe en plaçant un écran à l'endroit où elle se forme ; tandis qu'une image virtuelle ne peut être observée sur un écran, mais on la voit très bien en regardant simplement avec son œil lacé en sortie du système.

Ces illustrations permettent de donner une autre façon de caractériser le caractère réel ou virtuel d'un objet ou d'image, en fonction de leur place.

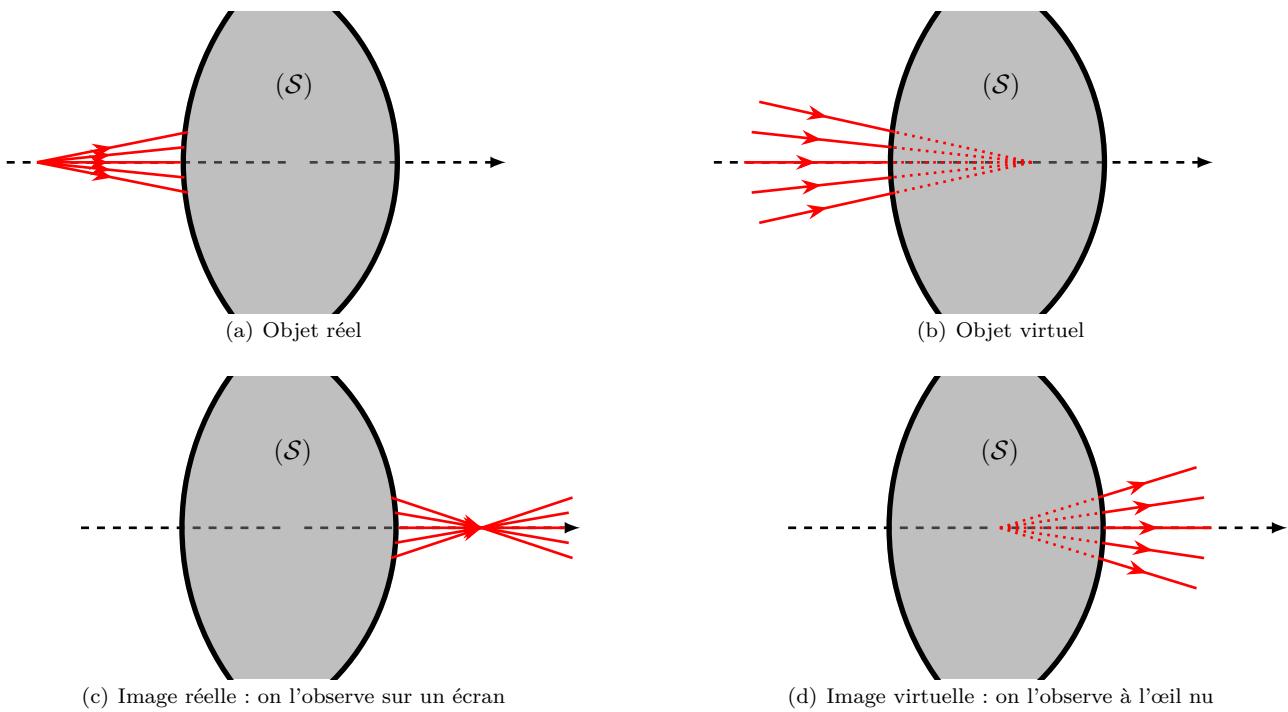
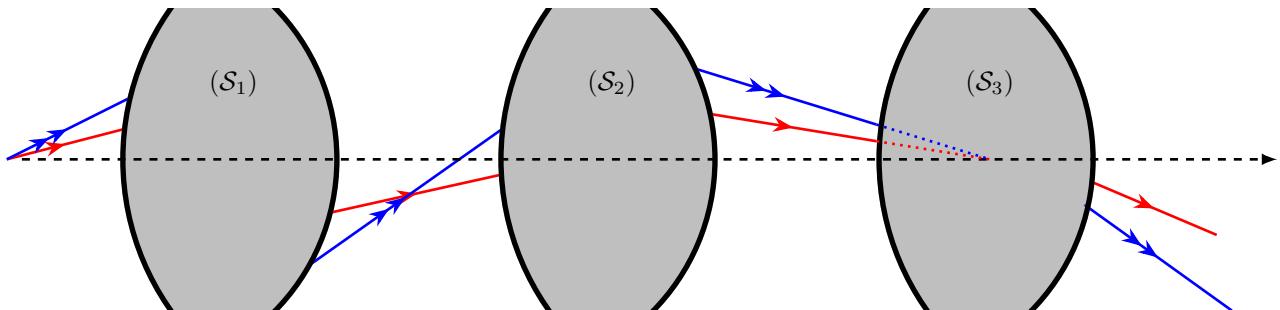


FIGURE O2.5 – Réel ou virtuel.

FIGURE O2.6 – Exemple de systèmes à la suite : le système (S_1) a un objet réel et une image réelle, qui devient l'objet réel du système (S_2) ; ce système a une image réelle qui devient l'objet virtuel du système (S_3) , qui en donne une image virtuelle.

Propriété : Espace objet/image

Un objet est réel si et seulement s'il est situé *avant la face d'entrée* : on appelle cette zone *l'espace objet*.

Une image est réelle si et seulement si elle est située *après la face de sortie* : on appelle cette zone *l'espace image*.

A.2. Objets et images à l'infini

À partir de maintenant, on ne va étudier que des systèmes qui possèdent une propriété amenant quelques simplifications.

Définition : Système centré

On appelle *système centré* un système qui possède un *axe optique*, c'est-à-dire un axe particulier tel que le système ne change pas si on le fait tourner autour de cet axe.

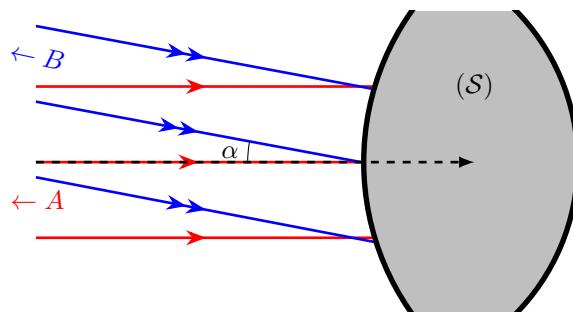
Par exemple, la sphère et le dioptrre plan simulés précédemment sont des systèmes centrés.

Définition : Objet à l'infini

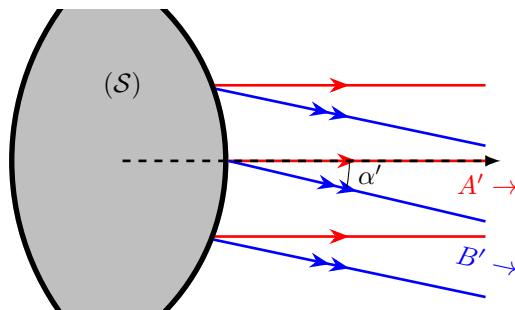
Un objet est considéré comme étant à l'infini s'il est à une distance très grande devant les dimensions caractéristiques du système. Le faisceau lumineux qu'il émet arrive sur le système sous forme d'un faisceau quasiment collimaté. Si ce faisceau arrive parallèle à l'axe, on dit qu'on a un objet à l'infini sur l'axe ; s'il est incliné, on a un objet à l'infini hors de l'axe, repéré par l'angle que fait son faisceau avec l'axe optique (figure O2.7).

Définition : Image à l'infini

Une image est considérée comme étant à l'infini si elle est à une distance très grande devant les dimensions caractéristiques du système. Le faisceau lumineux émerge du système sous forme d'un faisceau quasiment collimaté. Si ce faisceau part parallèle à l'axe, on dit qu'on a une image à l'infini sur l'axe ; s'il est incliné, on a une image à l'infini hors de l'axe, repérée par l'angle que fait son faisceau avec l'axe optique (figure O2.7).



(a) Objets à l'infini : A sur l'axe, B hors de l'axe, incliné d'un angle α par rapport à l'axe.



(b) Images à l'infini : A' sur l'axe, B' hors de l'axe, inclinée d'un angle α' par rapport à l'axe.

FIGURE O2.7 – Objets et images à l'infini.

Remarque : Des rayons parfaitement parallèles ne se couperaient jamais, il n'y aurait pas d'objet/image ; des rayons quasiment parallèles se coupent à très grande distance, quasiment à l'infini.

Remarque : Un objet à distance finie est caractérisé par sa *taille* ; un objet à l'infini est caractérisé par sa *taille angulaire*, c'est-à-dire l'angle entre les faisceaux parallèles provenant de deux points extrêmes. Par exemple, le Soleil a, depuis la Terre, une taille angulaire d'environ $1/2^\circ$.

Comme tout objet, un objet à l'infini peut donner, par un système, une image. La figure O2.8 montre ainsi, sur la partie de gauche, de rayons incidents provenant de l'infini sur l'axe, et les rayons émergents correspondant se coupant en un point particulier. À l'inverse, à droite, on voit qu'il existe un objet particulier tel que les rayons émergents sont parallèles à l'axe.

Définition : Foyer image

On appelle foyer image (ou point focal image) d'un système, souvent noté F' , l'image par le système d'un objet à l'infini sur l'axe : $\infty \xrightarrow{(S)} F'$. Il peut être réel ou virtuel.

Par conséquent, tout rayon incident parallèle à l'axe ressortira en passant par le foyer image.

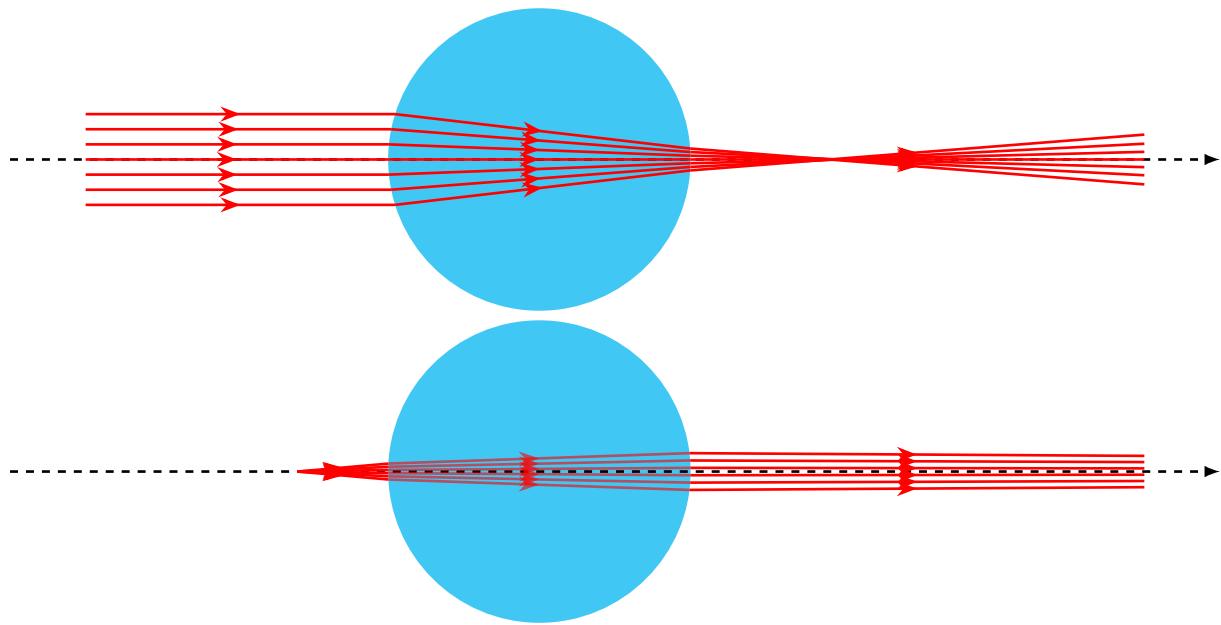


FIGURE O2.8 – Foyers d'une sphère d'indice 1,6.

Définition : Foyer objet

On appelle foyer objet (ou point focal objet) d'un système, souvent noté F , l'objet dont l'image par le système est à l'infini sur l'axe : $F \xrightarrow{(S)} \infty$. Il peut être réel ou virtuel.

Par conséquent, tout rayon incident passant par le foyer objet émerge parallèle à l'axe.

Remarque : Un système tel qu'un objet à l'infini donne une image à l'infini est appelé *système afocal*.

A.3. Conditions de Gauss

Jusqu'à présent, on s'est contenté de définir l'image d'un système de façon plus ou moins approchée : si les rayons passent approximativement par le même point, c'est l'image. Mais si on souhaite avoir des images de bonne qualité, il faut que chaque objet ponctuel donne une image la plus ponctuelle possible.

Les simulations de systèmes centrés montrent clairement (figures O2.9 et O2.10) que la qualité de l'image devient mauvaise lorsque les rayons incidents s'écartent trop de l'axe. Pour que le système soit bien stigmatique, il faudra donc utiliser des rayons qui ne s'écartent pas trop de l'axe.

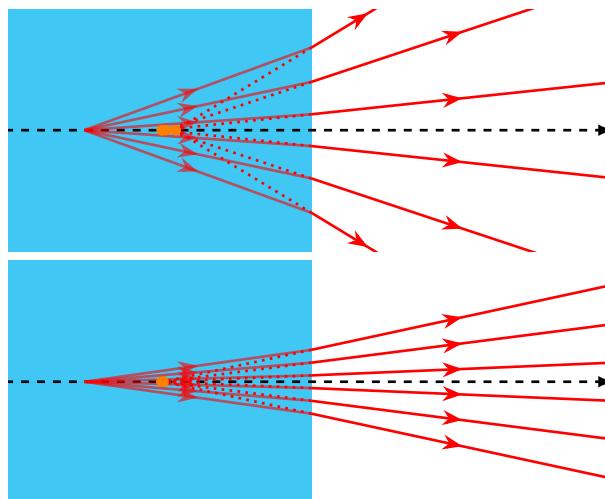


FIGURE O2.9 – Dioptre plan. En haut, on n'est pas dans les conditions de Gauss : les rayons semblent provenir de plusieurs points images (cercles oranges), le stigmatisme est très approximatif ; en bas, on est plus proche des conditions de Gauss, et les rayons proviennent quasiment tous du même point.

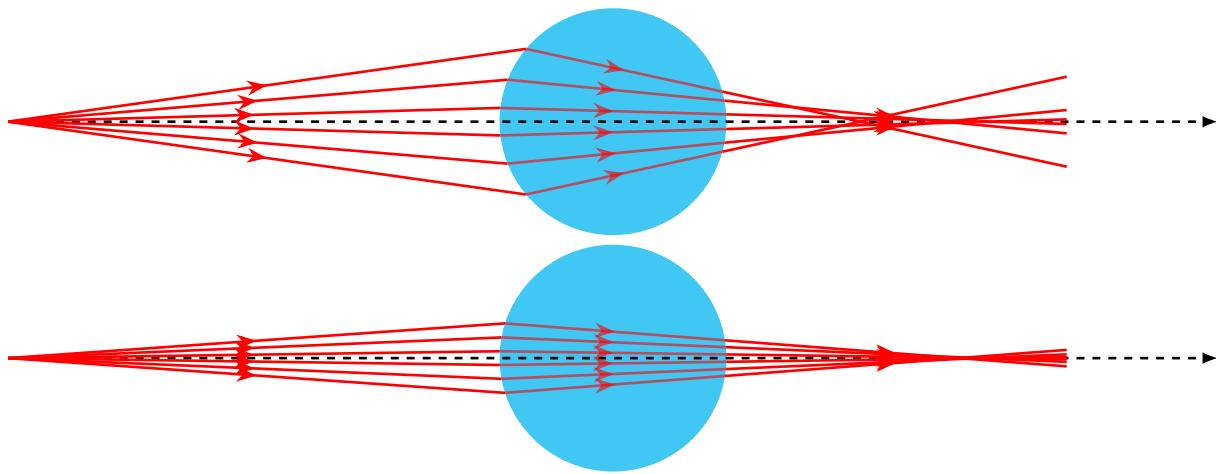


FIGURE O2.10 – Sphère d'indice 1,6 dans les conditions de Gauss (en bas).

Définition : Conditions de Gauss

Un système centré est utilisé dans les conditions de Gauss si tous les rayons incidents sont *paraxiaux*, c'est-à-dire qu'ils sont *proches de l'axe optique* et *peu inclinés par rapport à l'axe optique*.

Remarque : Dans les conditions de Gauss, les angles sont petits ; pour de tels angles, on peut écrire **en radians** : $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$ et $\tan \theta \approx \theta$.

Cette définition reste vague : pour les angles, on peut donner comme ordre de grandeur $< 15^\circ$, mais qu'est-ce que « proche » ? On peut quantifier cela par rapport aux dimensions caractéristiques du système ; mais il est plus intéressant de se souvenir que les conditions de Gauss sont une limite idéale : plus on s'en approche, meilleure sera la qualité des images ; plus on s'en éloigne, moins belles seront les images. Tout est alors une question de compromis : si on ne prend que des rayons proches de l'axe optique, on captera peu de lumière dans le système ; si on ne prend que des rayons très peu inclinés par rapport à l'axe, on n'observera que des objets très proches de l'axe. Si on veut s'écartez de cet idéal, on a une image de moins bonne qualité, mais on a quand même une image.

Dans les études qu'on va effectuer dans la suite, on supposera toujours qu'on est dans les conditions de Gauss ; mais dans la pratique, la plupart de instruments d'optique ont besoin de dépasser ces limites. Une lunette astronomique a besoin d'une large ouverture pour capter beaucoup de lumière ; un microscope, placé très près de l'objet à observer, a besoin de capter des rayons avec des angles le plus large possible, souvent très proches de 90° . C'est alors tout le travail des ingénieurs opticiens, de concevoir des systèmes qui donnent de très bonnes qualités d'images même lorsque les conditions de Gauss ne sont pas respectées.

Pour exprimer précisément les conséquences des conditions de Gauss, il faut encore quelques définitions :

Définition : Plan transverse

On appelle plan transverse tout plan orthogonal à l'axe optique.

Définition : Aplanétisme

Un système centré est aplanétique, si l'image de tout plan transverse est un plan transverse.

La figure O2.11 illustre cette propriété.

Propriété : Systèmes centrés dans les conditions de Gauss

Dans les conditions de Gauss, les systèmes centrés :

- sont approximativement stigmatiques ;
- sont aplanétiques ;
- donnent d'un objet étendu orthogonal à l'axe, une image qui s'en déduit par une homothétie.

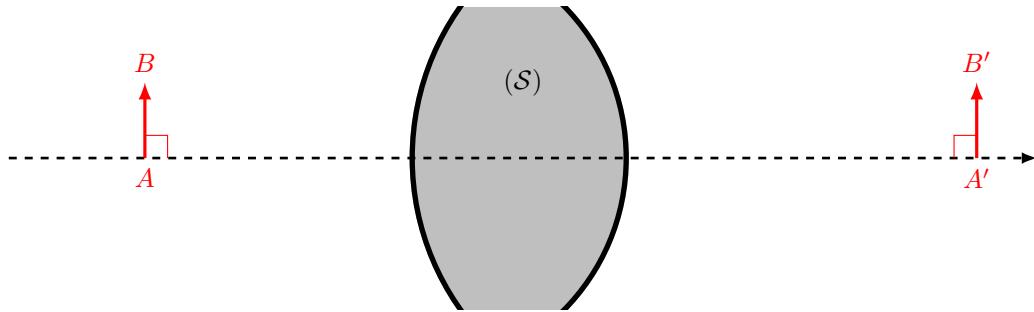
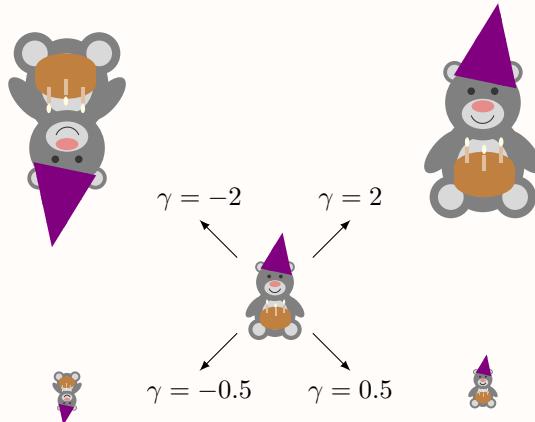


FIGURE O2.11 – Système aplanétique : l’objet est orthogonal à l’axe, donc son image est aussi orthogonale à l’axe.

Un peu de maths : Homothétie

Une homothétie est une opération de dilatation dans le plan. Elle est caractérisée par un centre (ici toujours un point de l’axe optique, on ne le cite jamais) et un rapport (noté γ sur la figure ci-dessous) qui indique de combien est agrandie la figure. Si le rapport est négatif, alors il y a une symétrie centrale en plus.



Définition : Grandissement

Le rapport de l’homothétie s’appelle le *grandissement*, souvent noté γ .

- si $\gamma > 0$, l’image est *droite* ; si $\gamma < 0$, l’image est *renversée* ;
- si $|\gamma| > 1$, l’image est *agrandie* ; si $|\gamma| < 1$, l’image est *rapetissée/réduite*.

Remarque : Attention à ne pas confondre le *grandissement*, qui est un rapport de distances (taille de l’image / la taille de l’objet) avec le *grossissement* qu’on définira dans certains systèmes optiques particuliers comme un rapport d’angles (taille angulaire de l’image / taille angulaire de l’objet).

Ayant ainsi introduit la notion de grandissement, on voit apparaître un cas particulier : si $|\gamma| = 1$ alors l’image a la même taille que l’objet. De telles situations jouent un rôle important dans les systèmes optiques.

Définition : Plans principaux et antiprincipaux (Hors programme)

On appelle *plans principaux* d’un système optique, deux plans qui sont conjugués avec un grandissement $\gamma = 1$.
On appelle *plans antiprincipaux* d’un système optique, deux plans qui sont conjugués avec un grandissement $\gamma = -1$.

La propriété d’aplanétisme implique une propriété importante pour les plans transverses contenant les foyers :

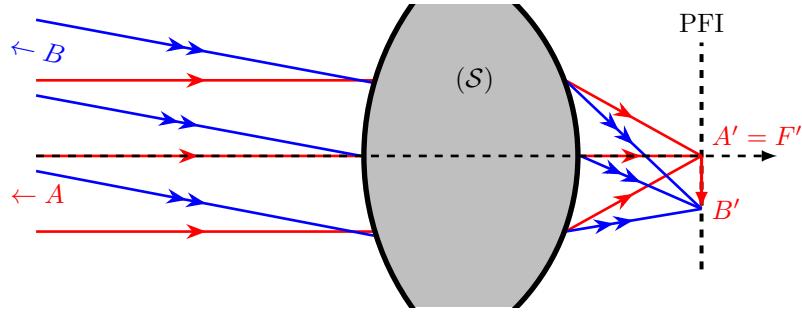
Définition : Plan focal objet/image

On appelle *plan focal objet* (PFO) le plan transverse contenant le foyer objet.
On appelle *plan focal image* (PFI) le plan transverse contenant le foyer image.

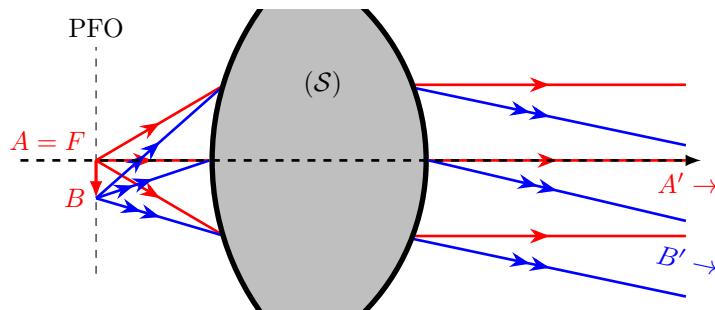
Propriété : Propriété des plans focaux

Pour un système aplanétique (cf. figure O2.12) :

- tout objet à l'infini hors de l'axe a son image dans le plan focal image.
- tout objet dans le plan focal objet a son image à l'infini hors de l'axe.



(a) Deux objets à l'infini ont leurs images dans le plan focal image.



(b) Deux objets dans le plan focal objet ont leurs images à l'infini.

FIGURE O2.12 – Propriété des plan focal objet et image.

O2.B. Les lentilles sphériques minces

On va désormais s'intéresser, cette année, à un type particulier et très courant de systèmes optiques : les lentilles sphériques minces.

B.1. Points spéciaux et types de lentilles

Définition : Lentille mince sphérique

Une lentille sphérique est une portion de verre limitée par deux dioptrés sphériques. Elle est mince si son épaisseur au centre est petite devant les rayons des faces (voir figure O2.13 et O2.14).

Propriété : Points particuliers

Toute lentille sphérique mince possède un foyer objet F , un foyer image F' , et un centre optique O tel que tout rayon incident passant par O émerge non dévié. O est l'intersection de la lentille mince avec l'axe optique, et F et F' sont symétriques de part et d'autre de O : le centre optique O est le milieu de $[FF']$.

Pour une lentille mince sphérique, il suffit donc de connaître la distance entre O et un des foyers pour savoir où placer tous les points importants.

Définition : Distance focale

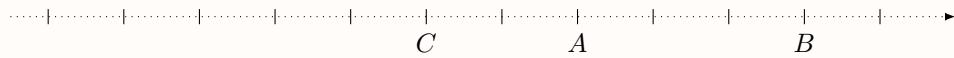
On définit la distance focale d'une lentille mince sphérique par : $f' = \overline{OF'}$

Un peu de maths : Distances algébriques

À partir de maintenant, on va commencer à repérer des points sur l'axe optique, et à mesurer des distances. La distance entre deux points est importante, mais aussi leur position : un point à 2 cm de O peut être situé soit à droite, soit à gauche, ce n'est pas pareil.

On oriente donc l'axe optique, le plus souvent de la face d'entrée vers la face de sortie. Si on dispose de deux points A et B , au lieu de donner leur distance AB , on donnera leur *distance algébrique* (ou longueur algébrique) \overline{AB} . La barre au-dessus signifie qu'on donne un signe à la distance : positive si on se déplace dans le sens de l'axe en allant de A à B , négative sinon.

Par exemple, dans le dessin ci-dessous gradué en centimètres, $\overline{AB} = +3$ cm et $\overline{AC} = -2$ cm.



Les distances algébriques ont l'avantage de vérifier la relation de Chasles : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$; de plus, $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

Remarque : Certains livres appellent f' la *distance focale image* et définissent également la *distance focale objet* $f = \overline{OF}$, avec la relation $f = -f'$.

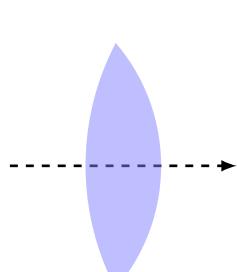
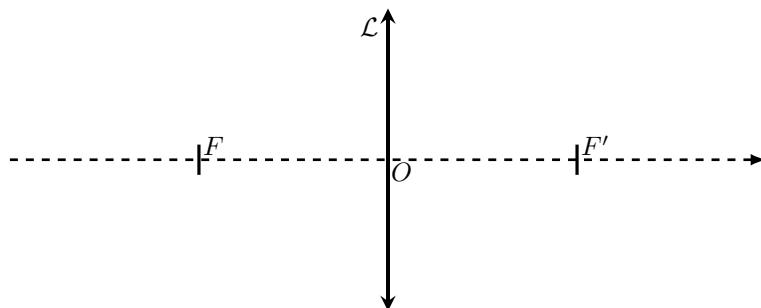
Attention à ne pas confondre f' qui est une distance, et F' qui est un point.

Définition : Types de lentilles

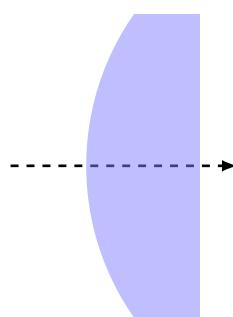
On appelle *lentilles convergentes* les lentilles pour lesquelles $f' > 0$ et *lentilles divergentes* les lentilles pour lesquelles $f' < 0$.

Propriété : Lentilles minces convergentes

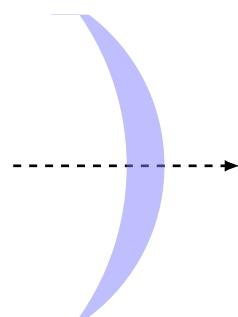
Les lentilles minces convergentes sont celles qui sont plus épaisses au centre qu'au bord (figure O2.13). On les symbolise par une double flèche :



(a) Lentille convergente biconvexe



(b) Lentille convergente plan-convexe

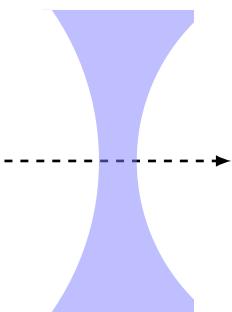
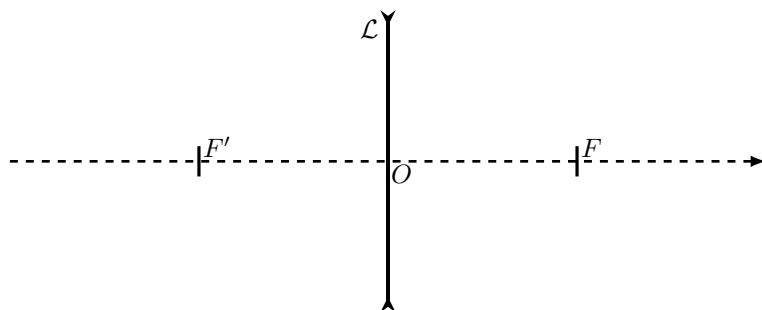


(c) Ménisque convergent

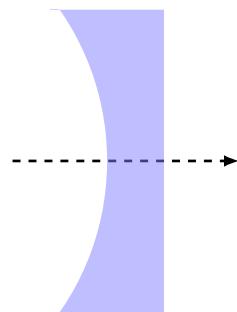
FIGURE O2.13 – Familles de lentilles convergentes.

Propriété : Lentilles minces divergentes

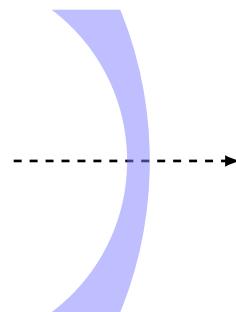
Les lentilles minces divergentes sont celles qui sont plus épaisses au bord qu'au centre (figure O2.14). On les symbolise par une double flèche inversée :



(a) Lentille divergente biconcave



(b) Lentille divergente plan-concave



(c) Ménisque divergent

FIGURE O2.14 – Familles de lentilles divergentes.

B.2. Tracés géométriques

Méthode : Tracé géométrique de l'image d'un objet par une lentille

Si on possède un objet AB (le plus souvent A est sur l'axe et B hors de l'axe), on peut trouver son image $A'B'$ par une lentille en traçant deux des trois rayons suivants passant par B :

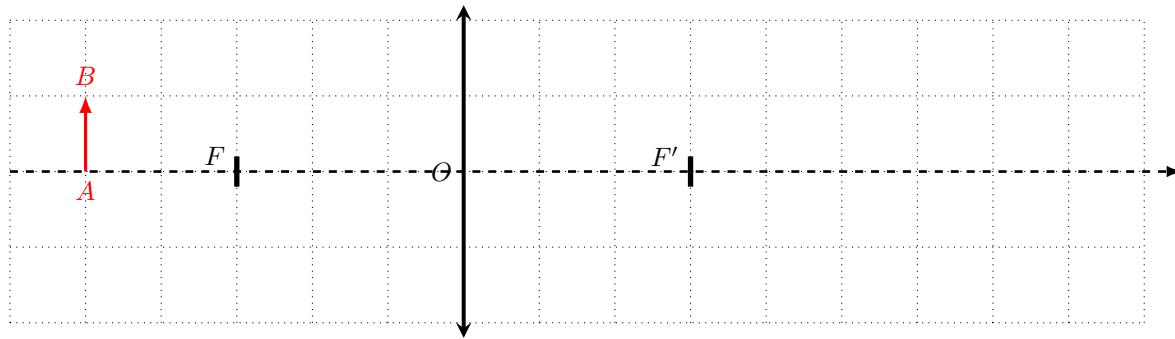
- le rayon incident parallèle à l'axe ressort en passant par F' ;
- le rayon incident passant par O n'est pas dévié ;
- le rayon incident passant par F ressort parallèle à l'axe.

Si les rayons émergents se coupent, le point d'intersection est l'image réelle ; sinon, on les prolonge en pointillés avant la lentille pour localiser l'image virtuelle.

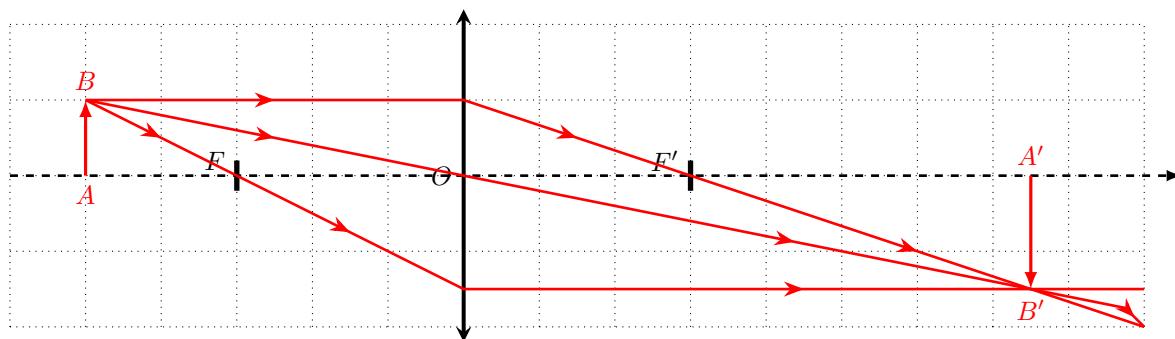
Une fois B' trouvé, on place A' sur l'axe par aplanétisme.

Exemple : Tracé de l'image d'un objet réel par une lentille convergente

Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



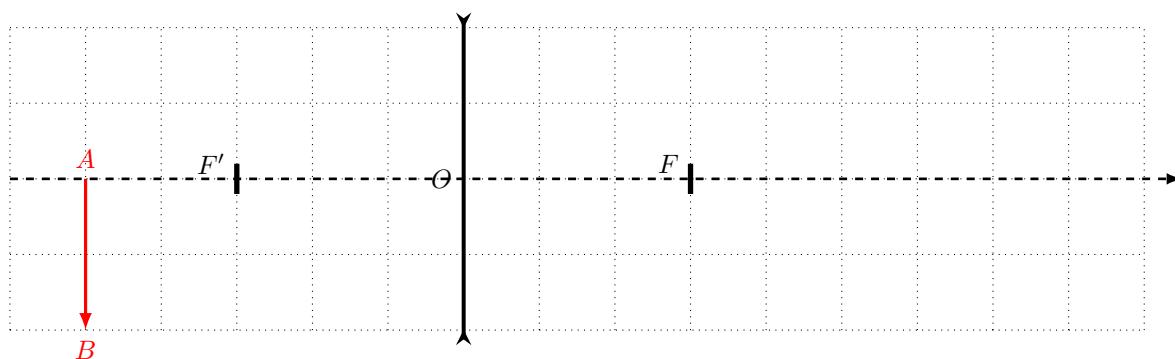
Pour l'exemple on trace les 3 rayons issus de B , mais deux suffisent :



Le rapport des dimensions de l'image sur celle de l'objet vaut 1,5 ; or l'image est de sens opposé à l'objet, donc $\gamma = -1,5$.

Exemple : Tracé de l'image d'un objet réel par une lentille divergente

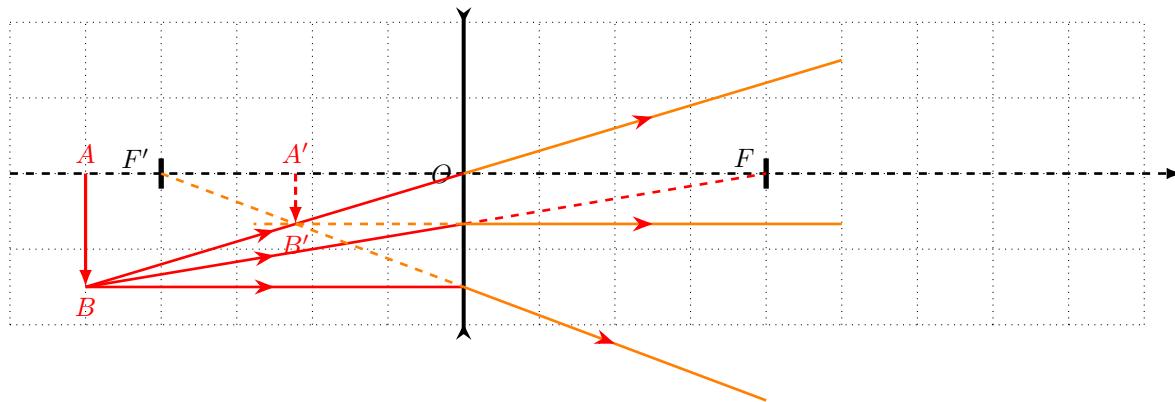
Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



Avec une lentille divergente, il faut faire attention :

- le rayon issu de B et passant par O est normal, il n'est pas dévié.
- le rayon issu de B et allant vers F ne pourra pas passer par F , car il sera dévié avant ; on le prolonge donc en pointillés pour indiquer qu'il passerait par F .
- le rayon incident parallèle à l'axe ne peut pas ressortir vraiment par F' , car F' n'est pas du côté de la face de sortie. On le fait donc partir comme s'il provenait de F' , en prolonger en pointillés.

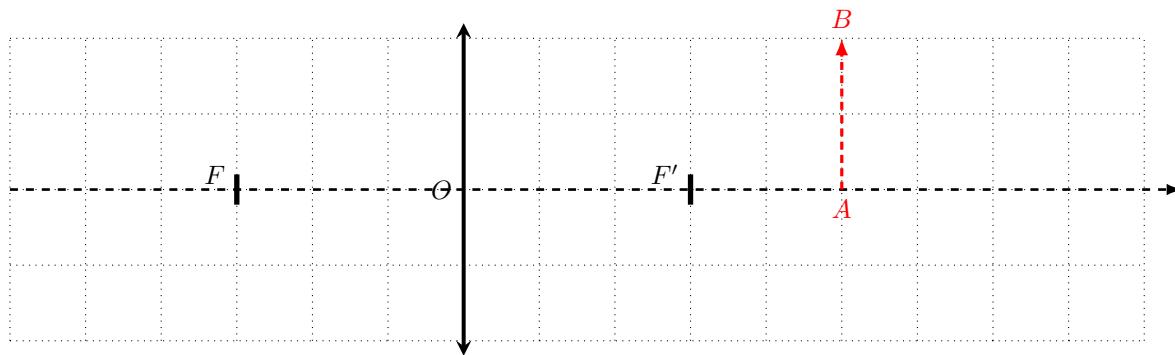
Pour clarifier le schéma ci-dessous, les rayons incidents sont en rouge et les rayons émergents en orange.



On constate que les rayons émergents ne se coupent pas ; on les prolonge donc en pointillé avant la lentille pour trouver l'image virtuelle. On mesure $\gamma = 0,44$.

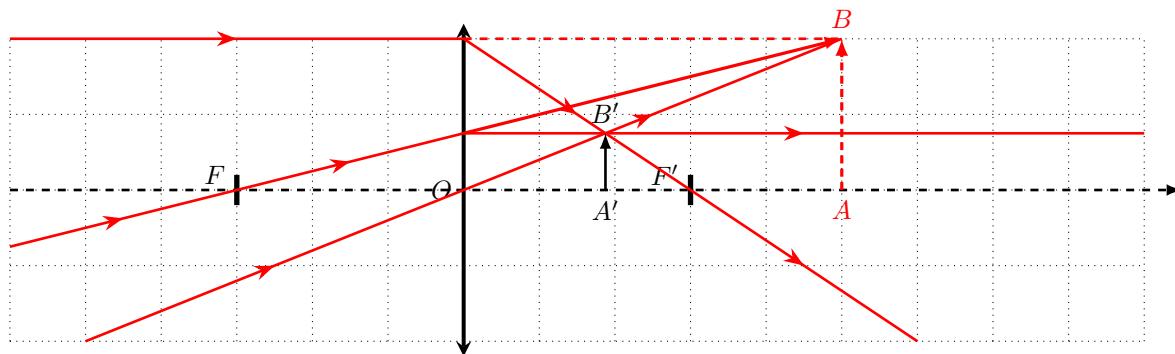
Exemple : Tracé de l'image d'un objet virtuel par une lentille convergente

Tracez l'image $A'B'$ de l'objet AB par la lentille, et mesurez le grandissement.



Les objets virtuels posent souvent problème. L'objet n'émet pas de rayons : il ne faut surtout pas faire partir les rayons de B . Ici, les rayons proviennent comme toujours de la gauche (face d'entrée) et *convergent* vers B . Voilà donc comment on trace les 3 rayons :

- on met la règle entre O et B et on trace un rayon non dévié.
- on met la règle parallèle à l'axe et passant par B ; on fait provenir un rayon de la gauche, en trait plein jusqu'à la lentille, puis prolongé en pointillé pour monter qu'il passerait par B ; mais le rayon émergent repart par F' .
- on met la règle entre F et B ; on fait provenir un rayon de la gauche, en trait plein jusqu'à la lentille, puis prolongé en pointillé pour monter qu'il passerait par B ; le rayon émergent repart parallèle à l'axe.



L'image est réelle, et $\gamma = 0,38$.

B.3. Tracé géométrique d'un rayon émergent d'une lentille

Si on dispose d'une lentille, et d'un rayon incident arrivant sur cette lentille, alors on souhaite tracer le rayon émergent avec le moins de traits de construction possible.

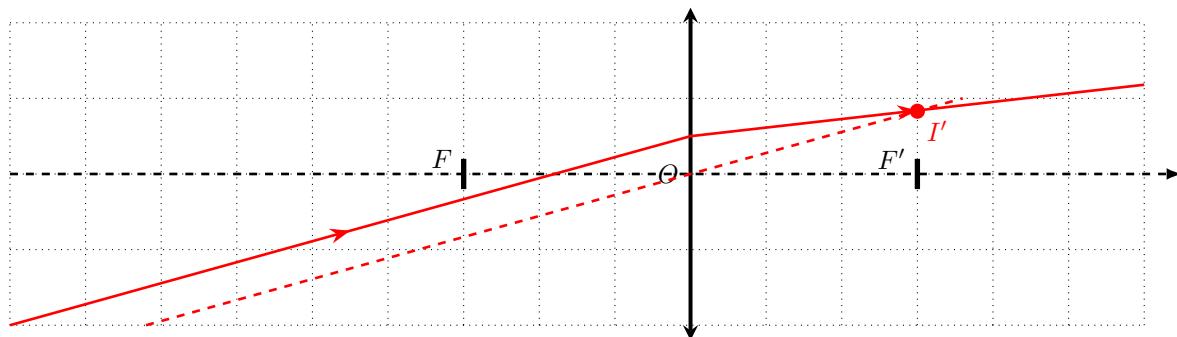
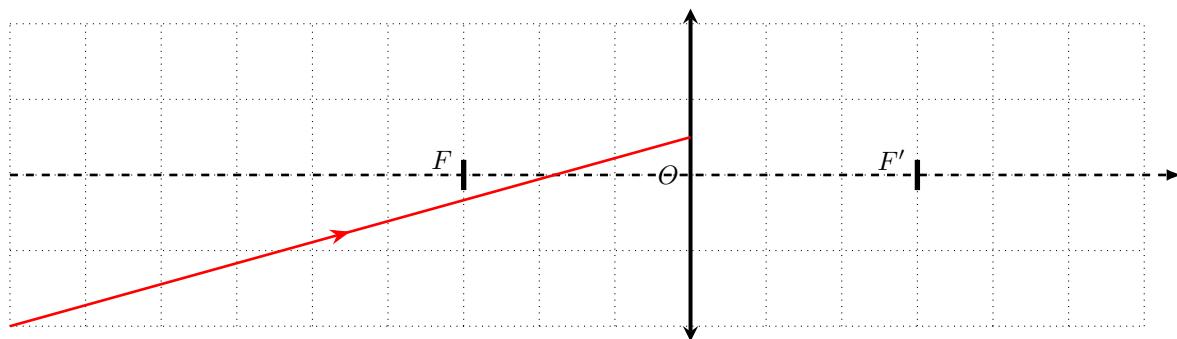
Méthode : Tracé d'un rayon émergent à l'aide d'un objet à l'infini

Si on imagine que ce rayon a été émis par un objet situé à l'infini, alors l'image de cet objet se trouve dans le plan focal image. La méthode est alors la suivante :

- on trace en pointillés le rayon parallèle au rayon incident passant par O ;
- on note I' le point où ce rayon pointillé coupe le plan focal image ; ce point est l'image de l'objet imaginaire à l'infini qui a émis les deux rayons ;
- alors le rayon émergent passe (ou son prolongement) par I' .

Exemple : Tracé d'un rayon émergent

Tracez le rayon émergent.



Il existe une autre méthode possible :

Méthode : Tracé d'un rayon émergent à l'aide d'un objet dans le PFO

Si on imagine que ce rayon a été émis par un objet situé dans le plan focal objet, alors l'image de cet objet se trouve à l'infini. La méthode est alors la suivante :

- on note I le point où le rayon incident coupe le plan focal objet ;
- on trace en pointillés le rayon passant par I et le centre O de la lentille ; ce rayon donne la direction de l'image de l'objet I qui a émis les deux rayons ;
- alors le rayon émergent ressort parallèle au pointillé précédent.

B.4. Lois de conjugaison et de grandissement

Pour pouvoir étudier des systèmes formés de plusieurs lentilles, il faut aller plus loin que de simples constructions géométriques, et traduire les propriétés des lentilles en lois mathématiques ; on va en établir de deux sortes : des *lois*

de conjugaison, qui relient les positions respectives de l'objet et de l'image, et des *lois de grandissement*, qui relient les dimensions respectives de l'objet et de l'image.

Il existe deux familles de lois : celles qui repèrent l'objet et l'image par rapport aux foyers de la lentille, et celles qui les repèrent par rapport au centre de la lentille.

Propriété : Lois de conjugaison et de grandissement de Newton (origine aux foyers)

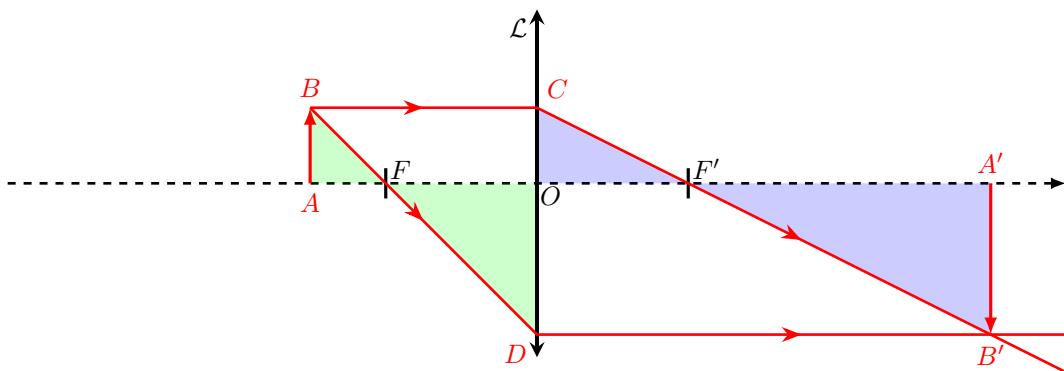
Soit AB un objet avec A sur l'axe optique d'une lentille, et $A'B'$ son image par la lentille ; alors :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \text{ (loi de conjugaison)} \quad (\text{O2.1a})$$

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \text{ (lois de grandissement)} \quad (\text{O2.1b})$$

Démonstration

Pour la démonstration, on effectue le dessin dans un cas particulier simple : un objet réel qui donne, par une lentille convergente, une image réelle. On construit l'image à l'aide des deux rayons particuliers qui font intervenir les foyers.



La démonstration repose que l'application du théorème de Thalès dans des triangles semblables. On applique le théorème de Thalès (cf. encadré ci-après) :

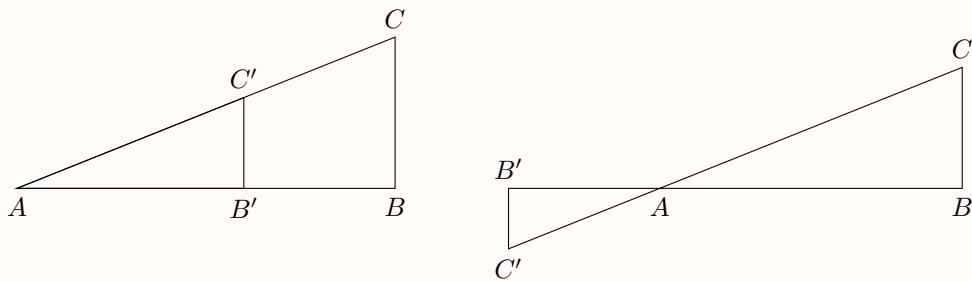
- dans les triangles FAB et FOD : $\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$
- dans les triangles $F'A'B'$ et $F'OC$: $\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Or le grandissement vaut par définition $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$. On a donc déjà établi les relations $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$.

En effectuant le produit en croix des deux fractions, on obtient $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FO} \cdot \overline{F'O}$. Or $\overline{FO} = f'$ et $\overline{F'O} = -f'$. Donc $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2$.

Un peu de maths : Théorème de Thalès

Le théorème de Thalès s'applique dans deux triangles semblables comme ci-dessous :



Il y a alors deux façons d'écrire le théorème de Thalès dans les triangles ABC et $AB'C'$ (on ne s'intéresse qu'aux côtés verticaux et horizontaux en optique) :

- soit on écrit que les rapports des côtés sont identiques dans les deux triangles : $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C'}}$

— soit on écrit que les rapports des côtés identiques des deux triangles sont les mêmes : $\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'}$

En optique, on ne travaille pas avec des longueurs, mais avec des longueurs algébriques. Pour pouvoir écrire des signes justes, il faut absolument écrire la deuxième méthode en faisant attention au sens des longueurs : si on écrit le rapport des côtés horizontaux dans le même sens, alors il faut faire de même pour les côtés verticaux : $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ par exemple, pour le schéma de gauche, ou bien $\frac{\overline{AB}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{C'B'}}$ pour le schéma de droite. Ou bien on peut écrire les deux rapport en sens opposés, par exemple $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ pour le schéma de droite. Les formules ainsi écrites sont identiques.

Propriété : Lois de conjugaison et de grandissement de Descartes (origine au centre)

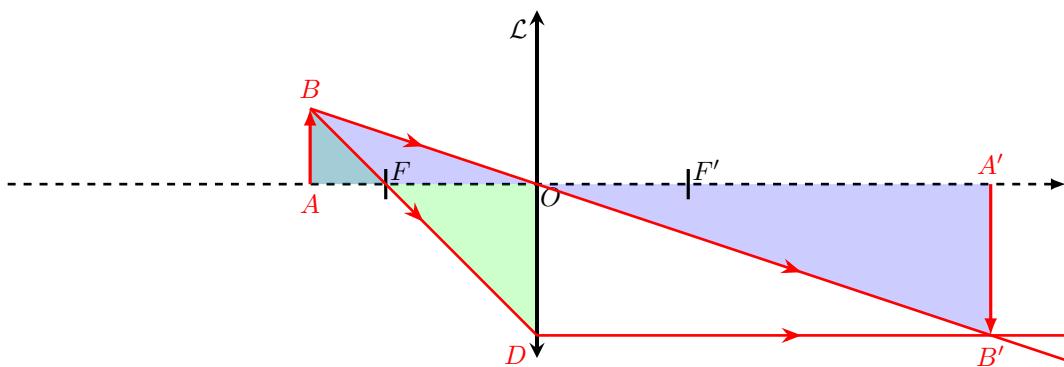
Soit AB un objet avec A sur l'axe optique d'une lentille, et $A'B'$ son image par la lentille ; alors :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \quad (\text{loi de conjugaison}) \quad (\text{O2.2a})$$

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad (\text{loi de grandissement}) \quad (\text{O2.2b})$$

Démonstration

Pour la démonstration, on effectue encore le dessin dans le cas particulier d'un objet réel qui donne, par une lentille convergente, une image réelle ; mais cette fois on utilise le rayon qui passe par le centre, et un autre au choix.



On applique deux fois le théorème de Thalès :

— dans les triangles FAB et FOD : $\frac{FA}{FO} = \frac{AB}{OD} = \frac{AB}{A'B'}$

— dans les triangles OAB et $OA'B'$: $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$

De la deuxième, on tire facilement $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

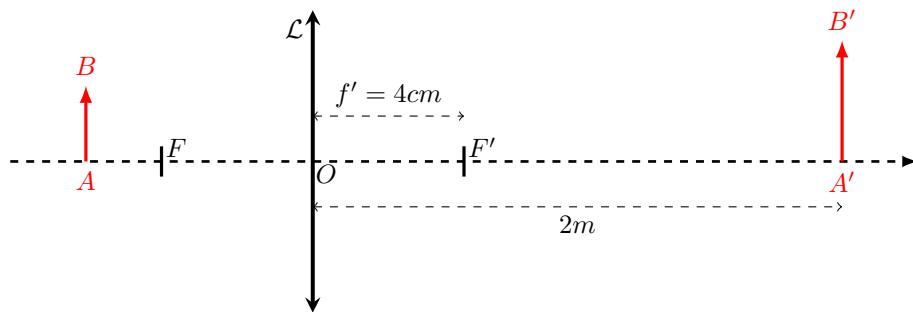
En combinant les deux égalités : $\frac{FA}{FO} = \frac{OA}{OA'}$. Or par la relation de Chasles : $\frac{FA}{FO} = \frac{FO+OA}{FO} = 1 + \frac{OA}{FO}$, donc $1 + \frac{OA}{FO} = \frac{OA}{OA'}$. En divisant tous les termes par \overline{OA} , on obtient $\frac{1}{OA} + \frac{1}{FO} = \frac{1}{OA'}$ soit $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{FO} = \frac{1}{f}$.

Exemple : Calcul de la position et de la taille d'une image

On place une diapositive de dimensions $AB = 24 \text{ mm}$ devant une lentille convergente de focale $f' = 4 \text{ cm}$. L'image doit être nette sur un écran situé 2 m après la lentille.

1. À l'aide des lois de Descartes, calculez la distance à mettre entre la diapositive et la lentille, ainsi que la taille de l'image.
2. Reprendre le même calcul à l'aide des lois de Newton.

Pour ne pas se tromper dans les signes des longueurs algébriques, il peut être utile de faire un schéma.



Remarque : le schéma est faux, $A'B'$ est normalement renversé par rapport à AB , mais peu importe pour le moment.

1. On connaît $\overline{OA'} = 2\text{ m}$ et $f' = 0,04\text{ m}$. Par la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}$ d'où on tire $\overline{OA} = 4,08\text{ cm}$.

On peut alors calculer le grandissement $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -49$ (il est négatif, donc le schéma est faux, $A'B'$ devrait être à l'envers). Or $\overline{A'B'} = \gamma \overline{AB}$ donc en prenant la valeur absolue : $A'B' = 1176\text{ mm} = 1,2\text{ m}$.

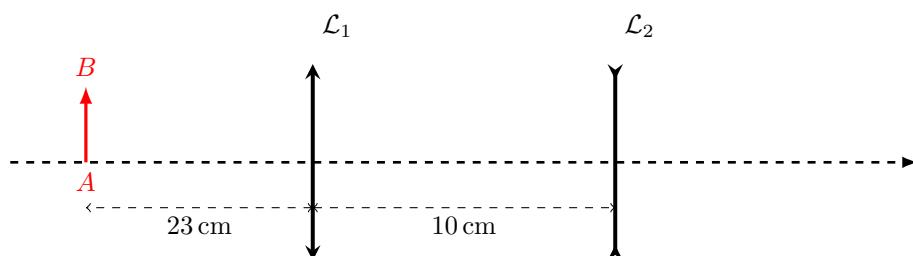
2. Par la relation de Chasles : $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'} = -0,04 + 2 = 1,96\text{ m}$. Par la loi de conjugaison de Newton : $\overline{FA} = -\frac{f'^2}{\overline{F'A'}} = -0,8\text{ mm}$ ce qui redonne bien $\overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA} = -4,08\text{ cm}$.

Pour le grandissement : $\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{1,96}{-0,04} = -49$ et on retrouve les mêmes résultats que précédemment.

Exemple : Image d'un objet par un doublet

On dispose deux lentilles, une de focale $f'_1 = 8\text{ cm}$ et de centre O_1 , l'autre de focale $f'_2 = -6\text{ cm}$ et placée en O_2 situé 10 cm après la première.

On place un objet A à une distance de 23 cm avant la première lentille. Déterminez la position de A'' , image de A par l'ensemble des deux lentilles.



Il faut bien comprendre que les rayons lumineux traversent les lentilles l'une après l'autre, chaque lentille donnant d'un objet une image qui servira d'objet à la lentille suivante. Ainsi on peut écrire : $A \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_2} A''$.

On applique les lois de conjugaison de Descartes à la lentille 1 qui a pour centre O_1 , pour objet A et pour image A' : $\frac{1}{\overline{O_1A}} - \frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1}$ d'où on tire $\overline{O_1A'} = 12,3\text{ cm}$.

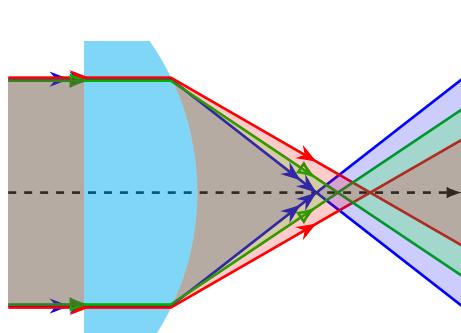
On applique les lois de conjugaison de Descartes à la lentille 2 qui a pour centre O_2 , pour objet A' et pour image A'' : $\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A''}} = \frac{1}{f'_2}$; on trouve par la relation de Chasles : $\overline{O_2A'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A'} = -10 + 12,3 = 2,3\text{ cm}$; on en déduit alors $\overline{O_2A''} = 3,6\text{ cm}$.

B.5. Défauts des lentilles sphériques

Les lentilles sphériques que nous avons étudiées sont supposées parfaites ; en réalité, ce n'est pas le cas. Elles réalisent donc les tracés que nous avons faits de façon approchée, et divers défauts apparaissent.

Propriété : Aberration chromatique

Une lentille n'a pas la même distance focale pour les différentes longueurs d'ondes, ce qui crée des irrégularités de l'image : c'est l'aberration chromatique (figure O2.15).



(a) Principe



(b) Aberration chromatique sur une photo de la Lune. (Crédit : Wikipedia/B.Inaglory)

FIGURE O2.15 – Aberration chromatique.

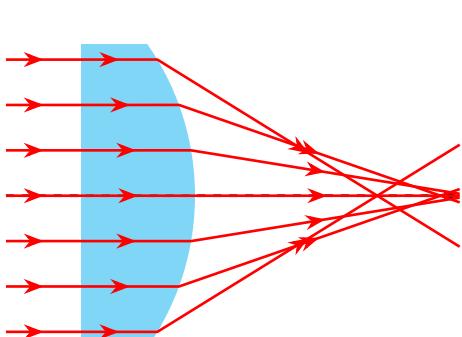
Remarque : Ce défaut vient de l'indice optique du matériau de la lentille : il dépend de la longueur d'onde.

Propriété : Aberration sphérique

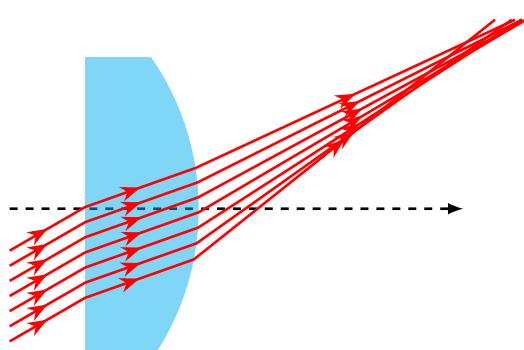
Les rayons lumineux qui passent au bord d'une lentille sphérique sont plus déviés que ceux qui passent près du centre. Du coup, si on utilise la totalité de la lentille, l'image est floue : c'est l'aberration sphérique (figure O2.16 à gauche).

Propriété : Aberration de coma

Les rayons fortement inclinés par rapport à l'axe ne se coupent pas bien en un même point, donnant à l'image l'aspect d'une comète : c'est l'aberration de coma (figure O2.16 à droite).



(a) Aberration de sphéricité



(b) Aberration de coma

FIGURE O2.16 – Aberrations géométriques.

Remarque : l'aberration sphérique et l'aberration de coma forment, à elles deux, les *aberrations géométriques*. Ce sont elles qu'on diminue en travaillant dans les conditions de Gauss ; par contre, les conditions de Gauss n'influent en rien sur les aberrations chromatiques.

Puisqu'il faut travailler dans les conditions de Gauss, il faut limiter la lumière qui passe sur les bords de la lentille, donc on place un diaphragme, c'est-à-dire un trou réglable. Cependant, suivant où se situe ce diaphragme, il va tordre l'image, effet qui est particulièrement visible sur les appareils photographiques et les caméras.

Propriété : Distorsions

La présence d'un diaphragme devant la lentille tend à déformer l'image en coussinet ; un diaphragme après la lentille la déforme en barillet (figure O2.17).

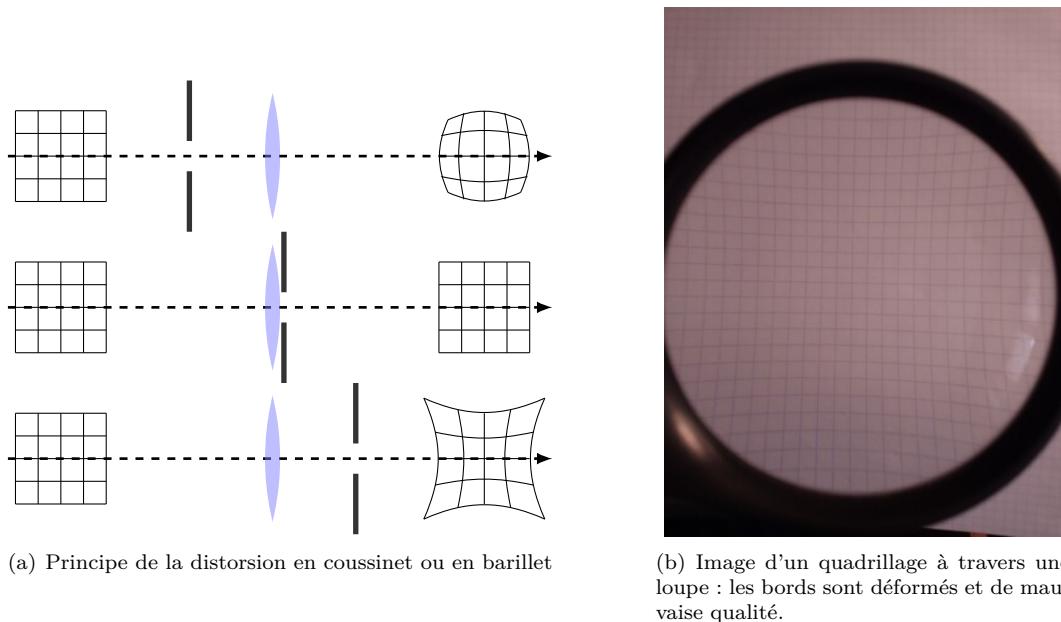


FIGURE O2.17 – Distortions.

O2.C. Notions sur les miroirs sphériques

Les miroirs sphériques ont des propriétés assez proches de lentilles, mais ont l'avantage de ne pas être sujets à l'aberration chromatique (car la loi de la réflexion ne dépend pas de l'indice). Cependant leurs tracés géométriques sont plus compliqués. Cette année, seul les propriétés du miroir plan sont à connaître.

C.1. Miroir plan

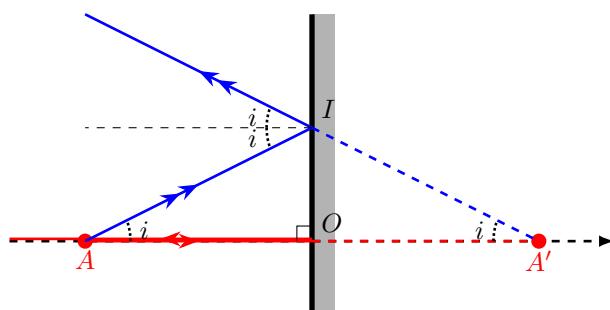
Propriété : Image par un miroir plan

L'image d'un objet par un miroir plan est le symétrique de ce point par rapport au miroir. On a donc $\overline{OA} = -\overline{OA'}$.

Démonstration

On place un objet A devant un miroir plan, et O le projeté orthogonal de A sur le miroir.

- le rayon issu de A et orthogonal au miroir rebondit et repart parallèle à sa direction d'émission.
- on trace un autre rayon quelconque issu de A et frappant le miroir en I avec un angle d'incidence i . On peut tracer le rayon réfléchi avec le même angle i .



Les rayons émergents ne se coupent pas à gauche ; on les prolonge donc à droite pour faire apparaître l'image A' .

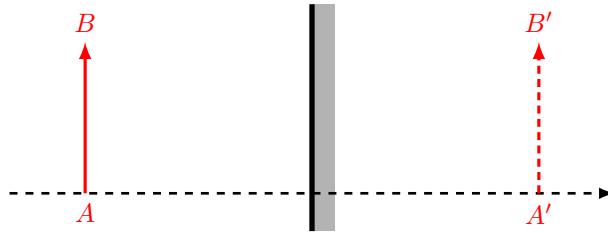
Il est facile de voir, par les lois de la géométrie, que l'angle $\widehat{OA'I}$ vaut i , de même que l'angle \widehat{OAI} . Les triangles OAI et $OA'I$, qui ont un côté commun et un angle identique, sont donc identiques ; donc $OA = OA'$.

Propriété : Propriétés du miroir plan

Le miroir plan réalise le stigmatisme rigoureux entre un objet et son image. Il est aplanétique, et son grandissement vaut 1.

Démonstration

Évident avec un schéma, ou par les propriétés de la symétrie :



C.2. Miroirs sphériques non plans (Hors programme)

Propriété : Image par un miroir sphérique concave

Un miroir sphérique concave se comporte optiquement comme une lentille convergente, mais l'espace image se trouve du même côté que l'espace objet.

Propriété : Image par un miroir sphérique convexe

Un miroir sphérique convexe se comporte optiquement comme une lentille divergente, mais l'espace image se trouve du même côté que l'espace objet.

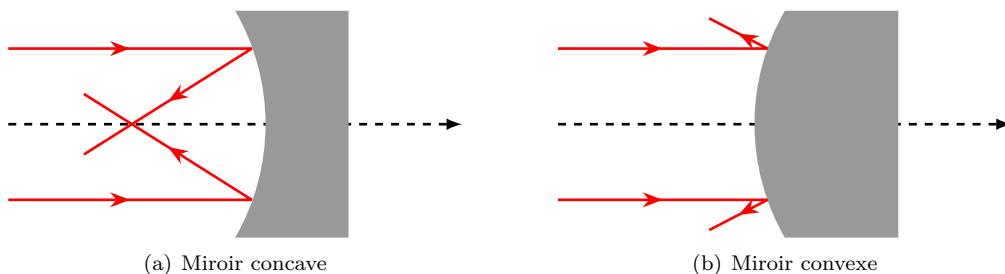


FIGURE O2.18 – Miroirs sphériques non plans.


Systèmes optiques

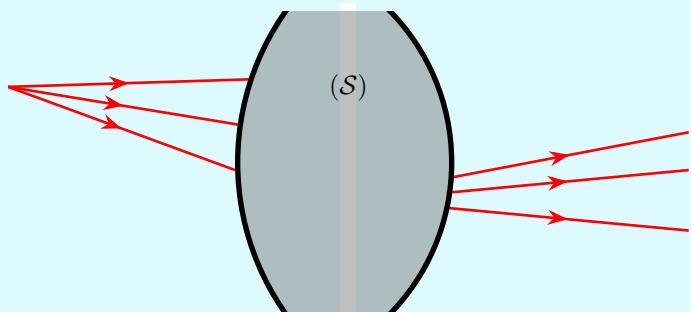

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Image d'un objet	
Stigmatisme approché.	TESTER, À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION, LE STIGMATISME APPROCHÉ D'UNE LENTILLE DEMI-BOULE POUR LES RAYONS PROCHES DE L'AXE OPTIQUE.
Lentilles minces.	Exploiter les propriétés du centre optique, des foyers principaux et secondaires, de la distance focale, de la vergence. Construire l'image d'un objet situé à distance finie ou infinie à l'aide de rayons lumineux, identifier sa nature réelle ou virtuelle. Exploiter les formules de conjugaison et de grandissement transversal de Descartes et de Newton. Établir et utiliser la condition de formation de l'image réelle d'un objet réel par une lentille convergente. Former l'image d'un objet dans des situations variées.
Miroir plan.	Construire l'image d'un objet par un miroir plan.

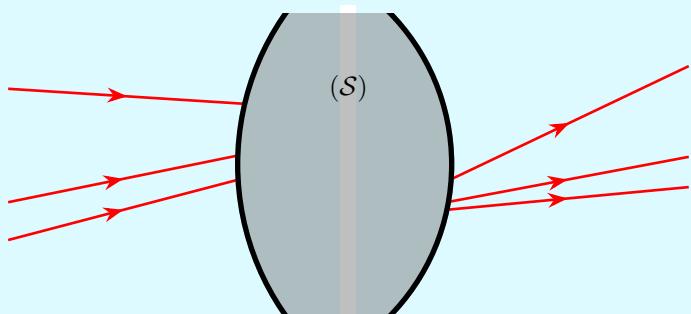
QCM : Réel ou virtuel ?

Q11.



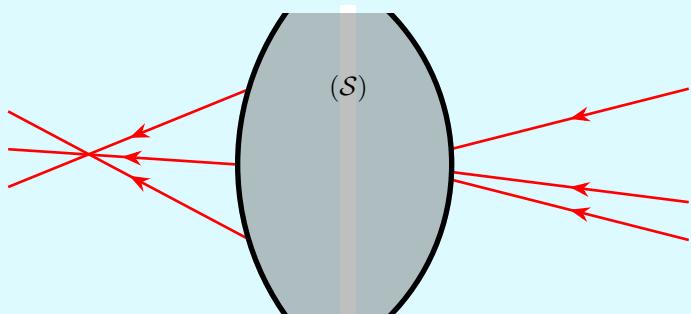
- (a). objet réel, image réelle
(c). objet virtuel, image virtuelle
- (b). objet virtuel, image réelle
(d). objet réel, image virtuelle

Q12.



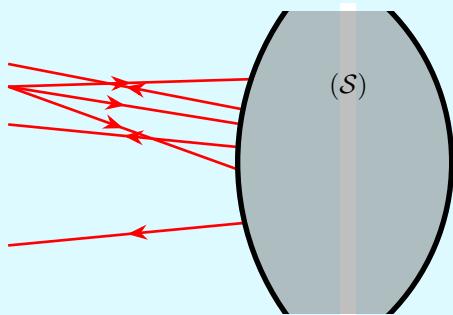
- (a). objet virtuel, image virtuelle
(c). objet réel, image virtuelle
- (b). objet réel, image réelle
(d). objet virtuel, image réelle

Q13.



- (a). objet virtuel, image virtuelle
(c). objet réel, image virtuelle
- (b). objet réel, image réelle
(d). objet virtuel, image réelle

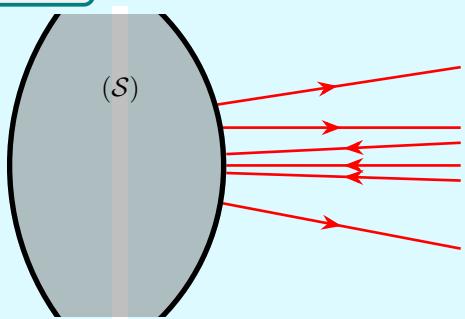
Q14.



- (a). objet virtuel, image réelle
 - (c). objet réel, image virtuelle

- (b). objet réel, image réelle
 - (d). objet virtuel, image virtuelle

Q15.

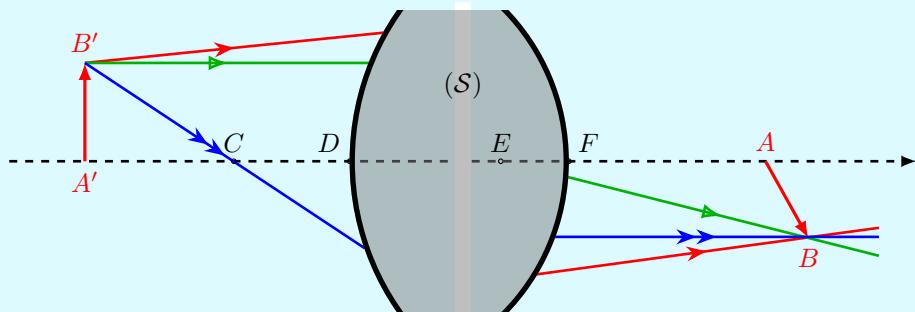


- (a). objet réel, image réelle
 - (c). objet virtuel, image réelle

- (b). objet virtuel, image virtuelle
 - (d). objet réel, image virtuelle

✓ QCM : Propriétés des systèmes optiques ✗

On considère le système optique ci-dessous à le trajet de 3 rayons est tracé :



Q16.

AB est pour le système :

Q17.

B est conjugué avec B' par le système.

Q18.

Le système est aplanétique.

Q19.

On nous dit que le système possède un foyer objet. Il s'agit du point

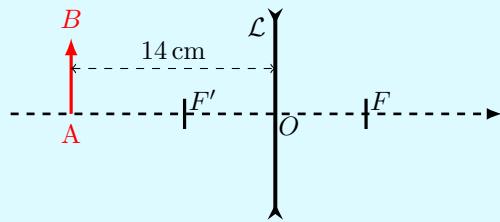
Q20.

On nous dit que le système possède un foyer image. Il s'agit du point

✓ QCM : Lois de conjugaison et de grandissement ✗

Dans ce QCM, AB désigne un objet et $A'B'$ son image par la lentille.

- Q21.** Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8 \text{ cm}$,
 $\overline{OA'} =$

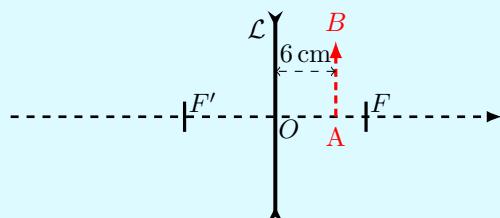


- (a). $-18,7 \text{ cm}$ (b). $-5,1 \text{ cm}$
(c). $18,7 \text{ cm}$ (d). $5,1 \text{ cm}$

- Q22.** Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

- (a). 0,57 (b). 1,75
(c). 0,36 (d). $-1,75$

- Q23.** Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8 \text{ cm}$,
 $\overline{F'A'} =$

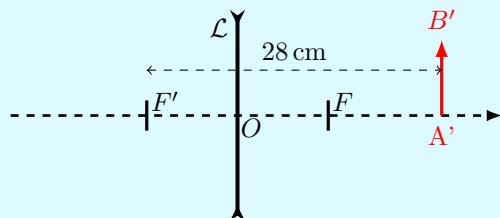


- (a). 24 cm (b). 32 cm
(c). 4,6 cm (d). 16 cm

- Q24.** Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

- (a). -4 (b). 4
(c). -3 (d). 3

- Q25.** Sur le schéma ci-contre avec $f' = -8 \text{ cm}$,
 $\overline{FA} =$

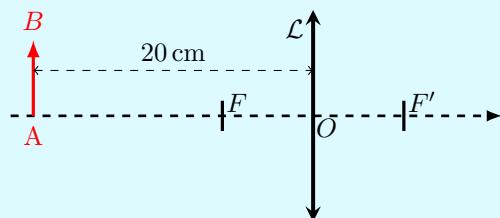


- (a). $-2,3 \text{ cm}$ (b). 2,3 cm
(c). $-5,3 \text{ cm}$ (d). 5,3 cm

- Q26.** Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

- (a). 2,5 (b). 1,5
(c). $-1,5$ (d). 3,5

- Q27.** Sur le schéma ci-contre avec $f' = +8 \text{ cm}$,
 $\overline{OA'} =$



- (a). 5,7 cm
 (c). -2,1 cm

- (b). 8,5 cm
 (d). 13,3 cm

Q28.

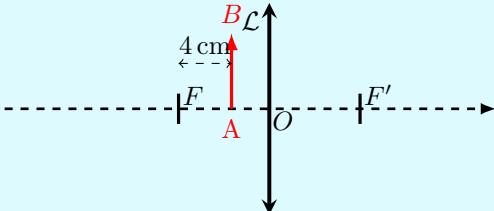
Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

- (a). -0,4
 (c). -2,5
- (b). -1,5
 (d). -0,67

Q29.

Sur le schéma ci-contre avec $f' = +8 \text{ cm}$,

$$\overline{F'A'} =$$



- (a). 2 cm
 (c). -2 cm

- (b). 16 cm
 (d). -16 cm

Q30.

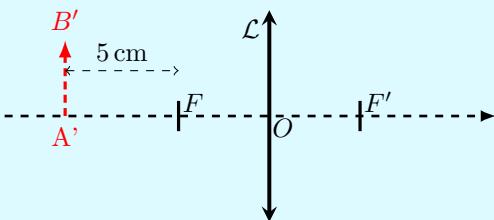
Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

- (a). -2
 (c). 2
- (b). -4
 (d). -0,25

Q31.

Sur le schéma ci-contre $f' = +8 \text{ cm}$,

$$\overline{FA} =$$



- (a). 11 cm
 (c). -5 cm

- (b). 3 cm
 (d). 12,8 cm

Q32.

Dans la configuration de la question précédente, $\gamma =$

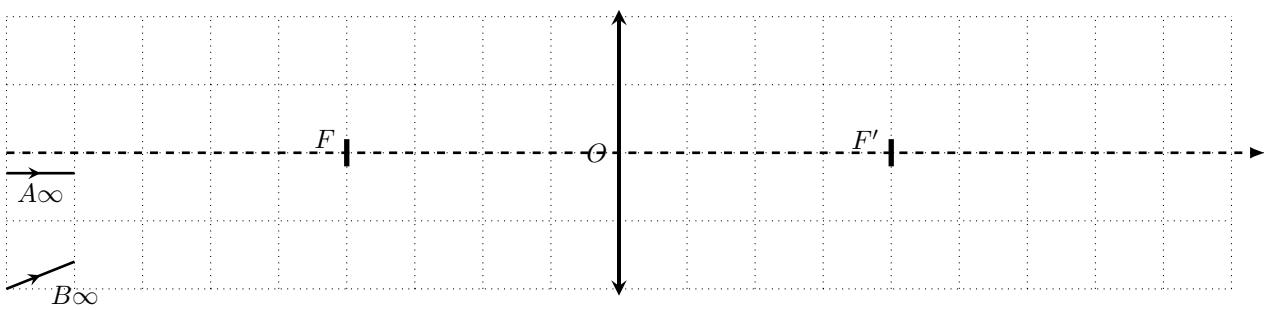
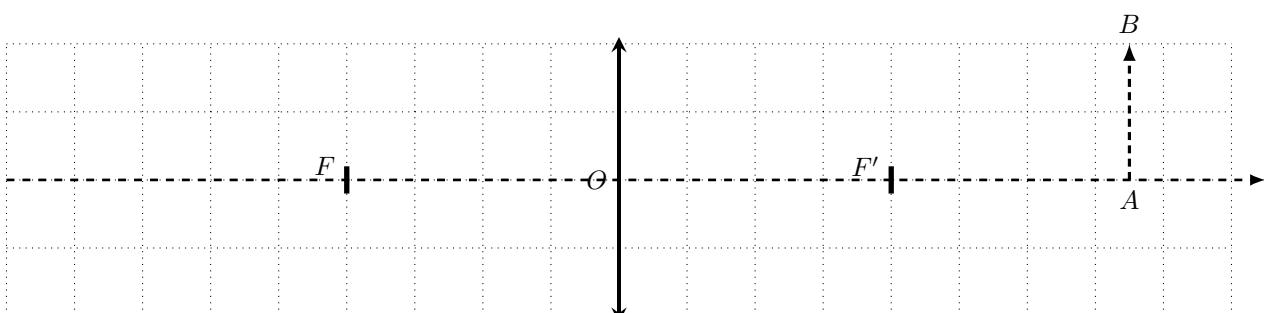
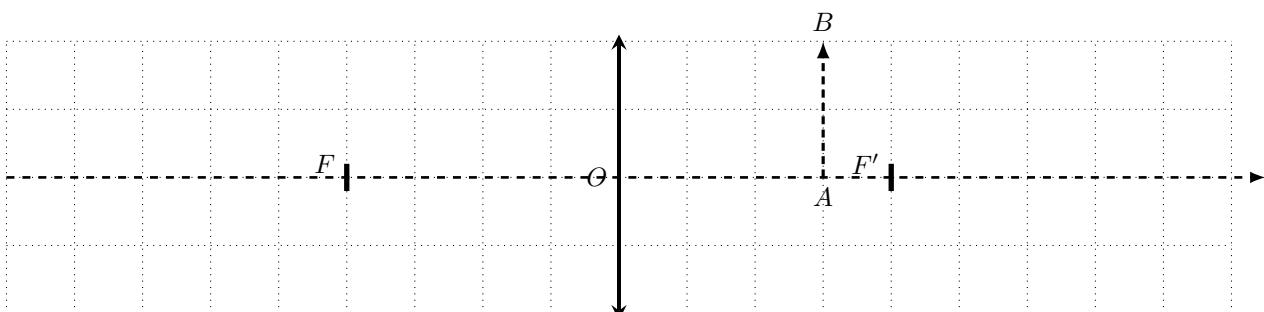
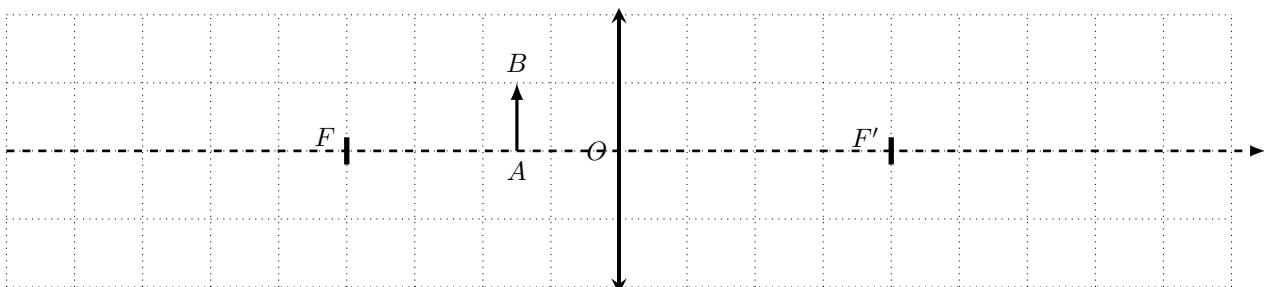
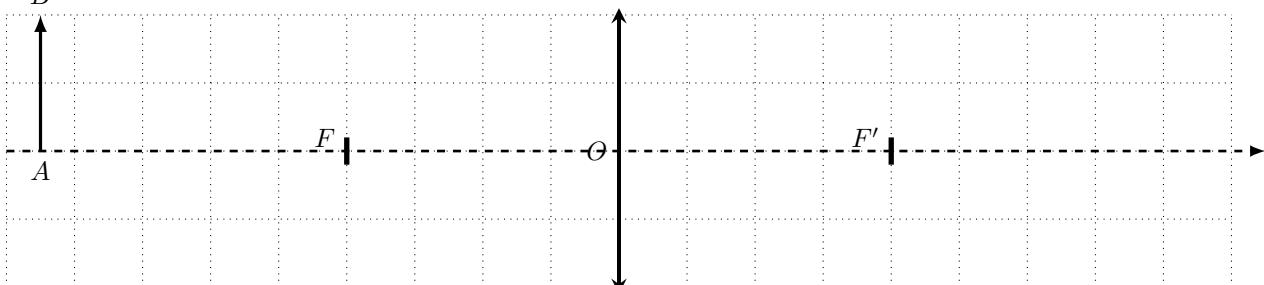
- (a). 0,61
 (c). 2,6
- (b). -1,6
 (d). 1,7

Systèmes optiques

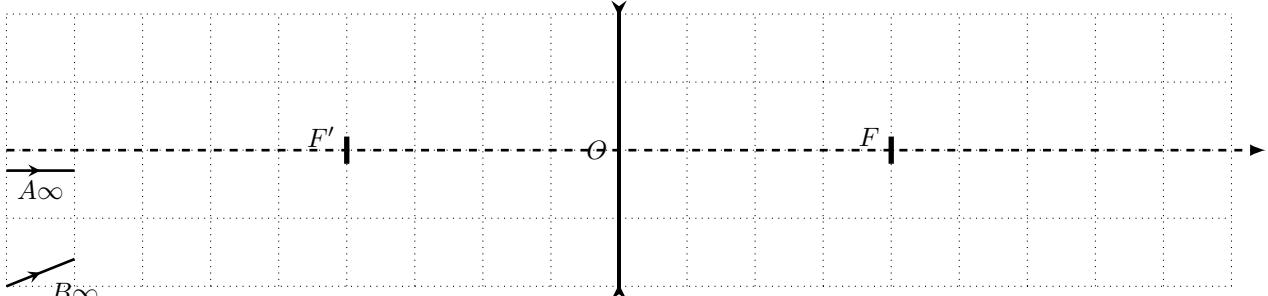
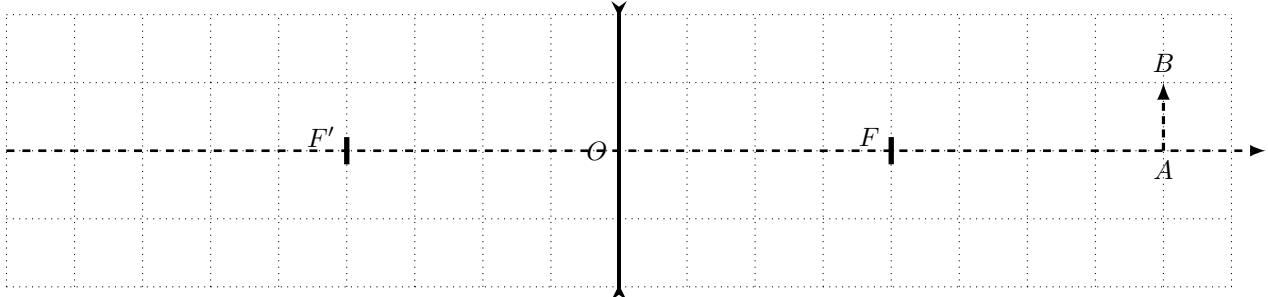
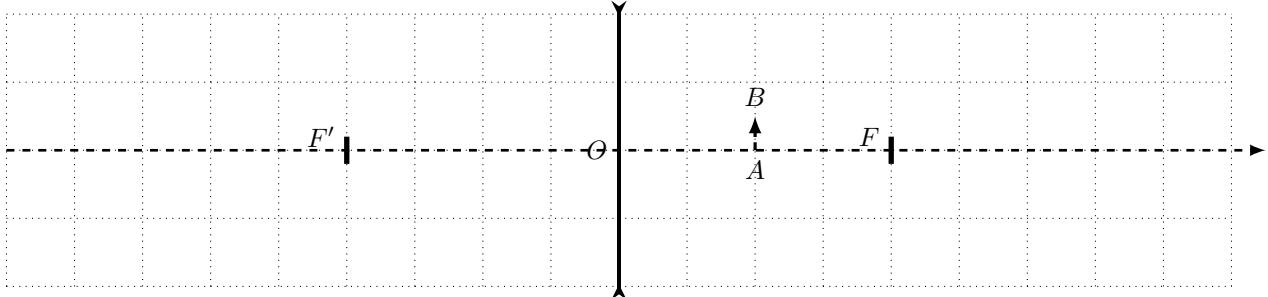
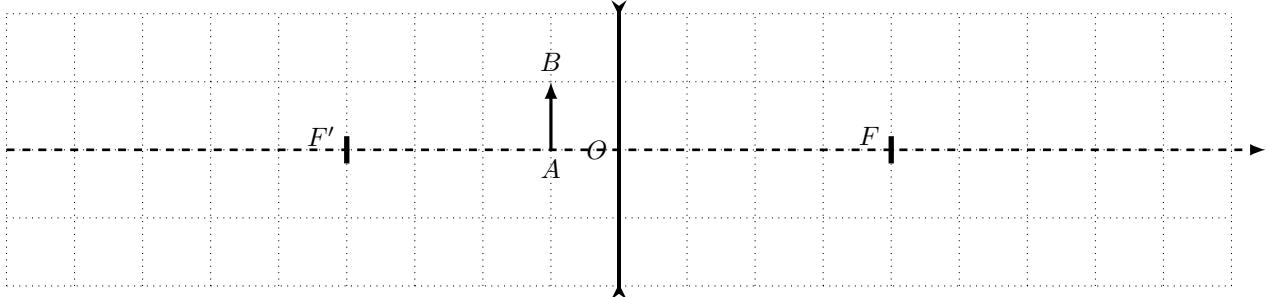
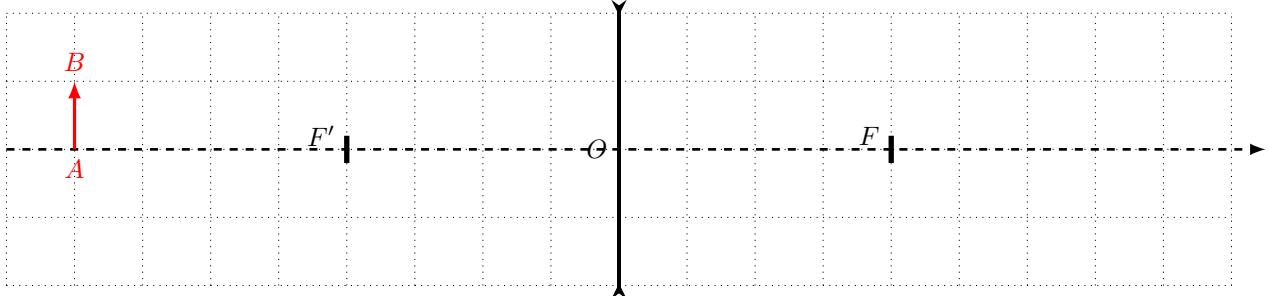
Exercices

réponses page 100

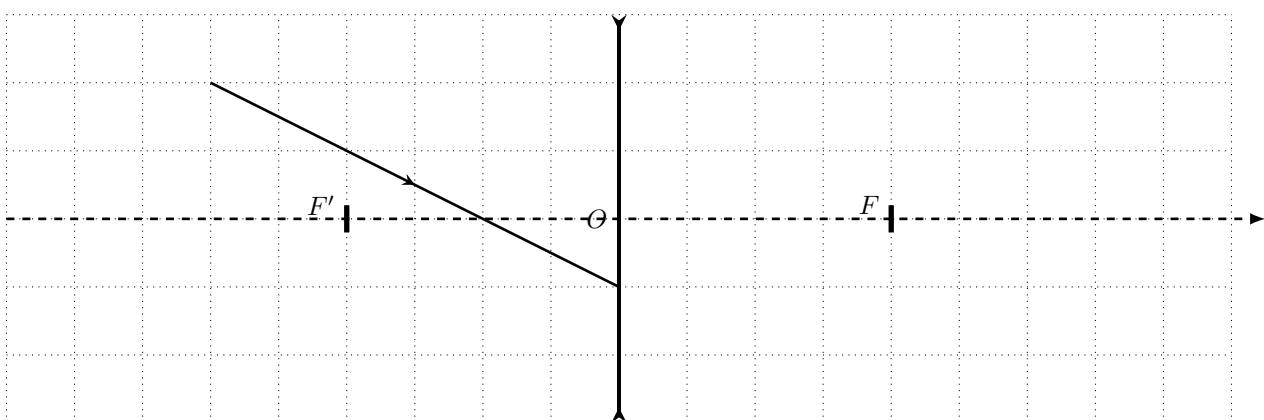
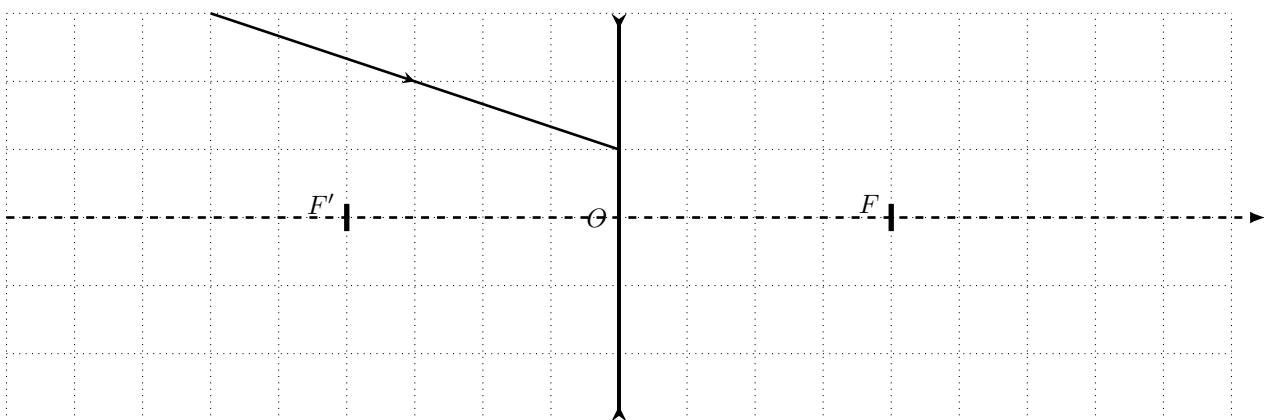
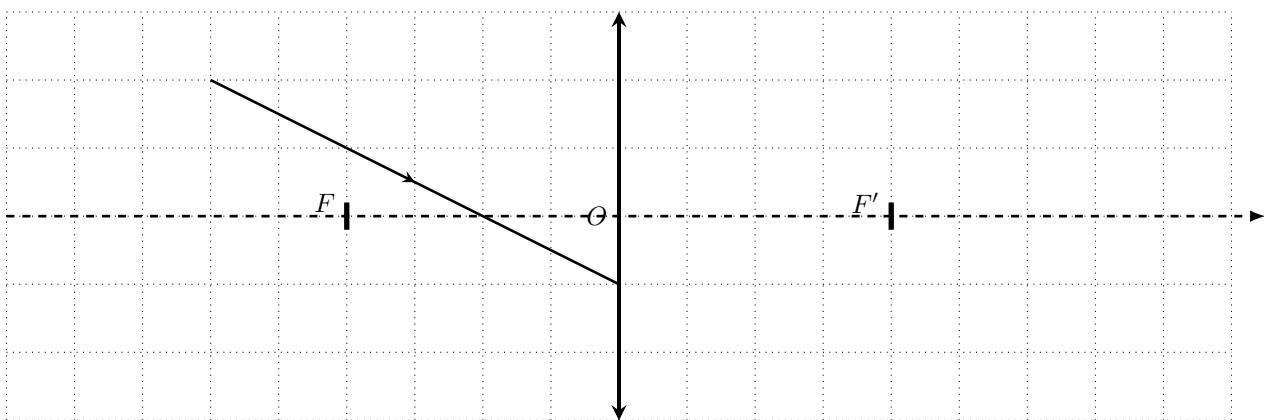
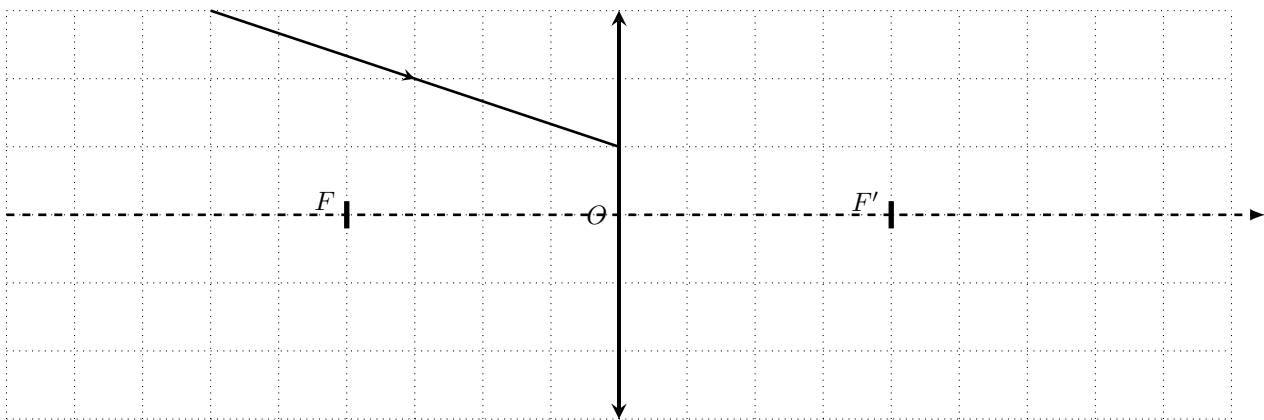
Exercice O2.1 : Exercices graphiques sur les lentilles [**]

Lentilles convergentes : tracez l'image $A'B'$ 

Lentilles divergentes : tracez l'image $A'B'$

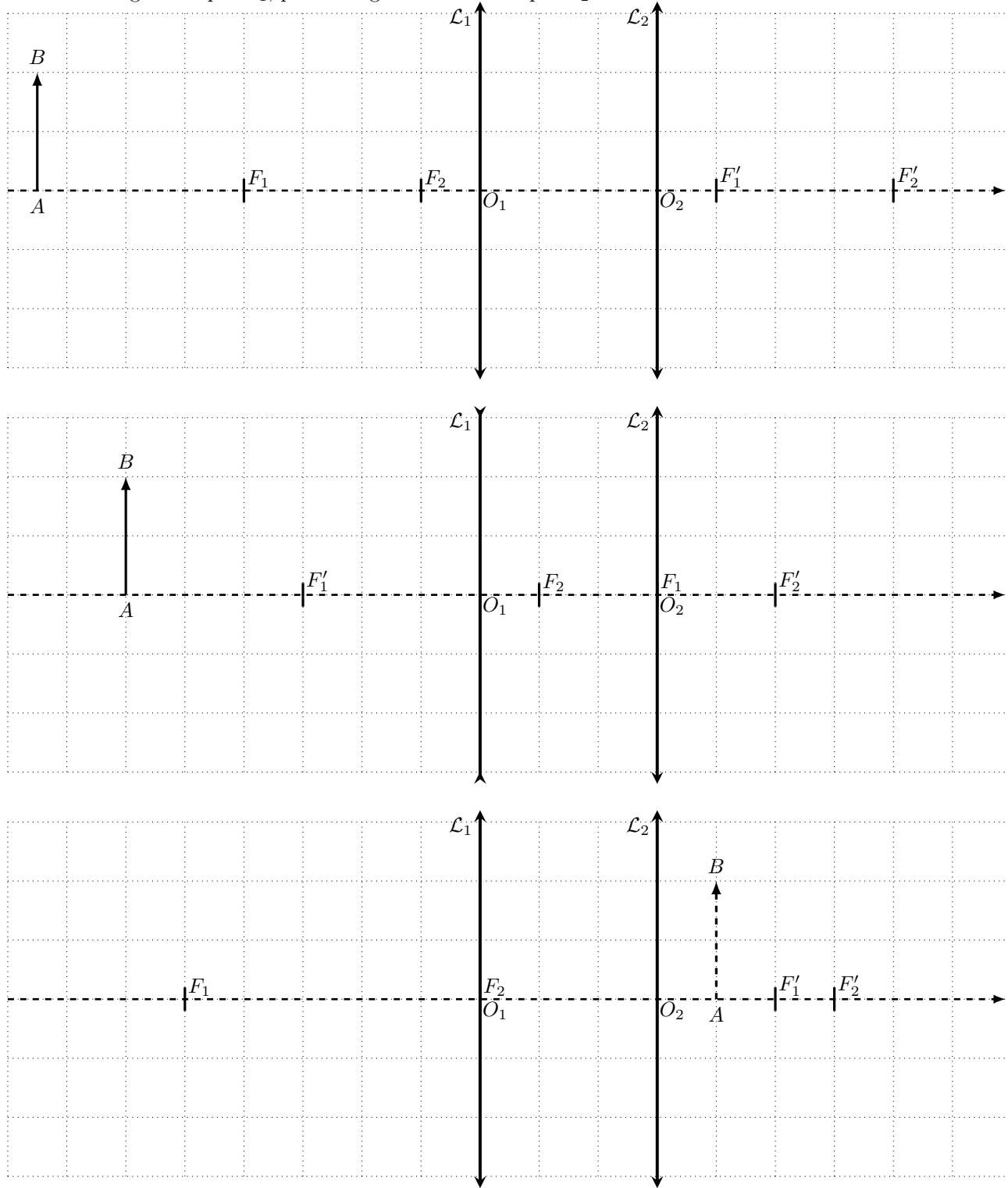


Tracez le rayon émergent



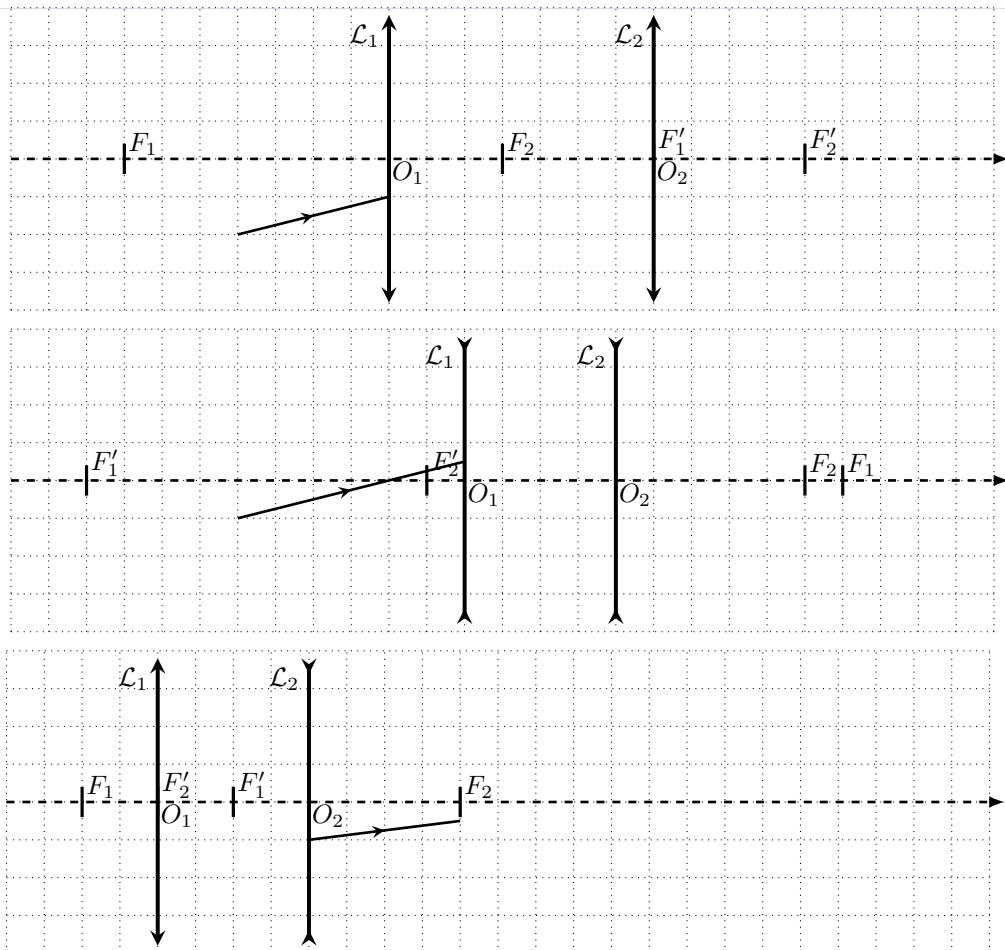
Exercice O2.2 : Image à travers deux lentilles [**]

Tracez l'image $A'B'$ par \mathcal{L}_1 , puis l'image $A''B''$ de $A'B'$ par \mathcal{L}_2 .



Exercice O2.3 : Tracés de rayons à travers deux lentilles [***]

Tracez le trajet complet du rayon lumineux à travers chaque système.



Exercice O2.4 : Diamètre apparent du Soleil [*]

Le Soleil a un rayon égal à 696×10^3 km. Calculez son diamètre apparent vu depuis la Terre, soit à une distance égale à 150×10^6 km.

Indication : faites un schéma, puis de la trigo pour trouver le rayon apparent, puis le diamètre.

Exercice O2.5 : Configuration de Silberman [*]

On considère un abjet réel AB dont on veut faire sur un écran une image $A'B'$ de même dimensions.

1. Justifier le signe de γ ; en déduire la valeur de γ .
2. En déduire une relation entre \overline{OA} et $\overline{OA'}$. En la renvoyant dans la loi de conjugaison de Descartes, exprimez \overline{OA} et $\overline{OA'}$ en fonction de f' .
3. Faites un dessin de cette configuration.

Exercice O2.6 : Vidéoprojecteur [*]

On dispose d'une lentille de focale $f' = 4$ cm. On souhaite projeter sur un écran une image d'un objet avec un grandissement égal à -80 .

1. Calculez la distance lentille-écran nécessaire. *Indication :* calculez d'abord $\overline{FA'}$, puis $\overline{OA'}$.
2. Calculez la distance lentille-objet.

Exercice O2.7 : Obtention d'un grandissement donné [**]

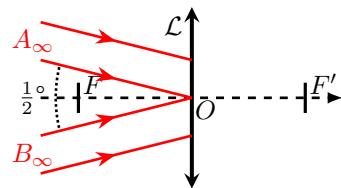
On veut projeter un objet sur un mur; l'image doit être renversée et 12 fois plus grande.

On dispose d'une lentille de focale $f' = 8$ cm. Calculez la distance \overline{OA} nécessaire, puis la distance objet-écran.

Exercice O2.8 : Projection du soleil [*]

Le soleil est considéré à l'infini ; son diamètre apparent vaut $\frac{1}{2}^\circ$. On forme l'image du soleil sur un écran à l'aide d'une lentille de distance focale 10 cm.

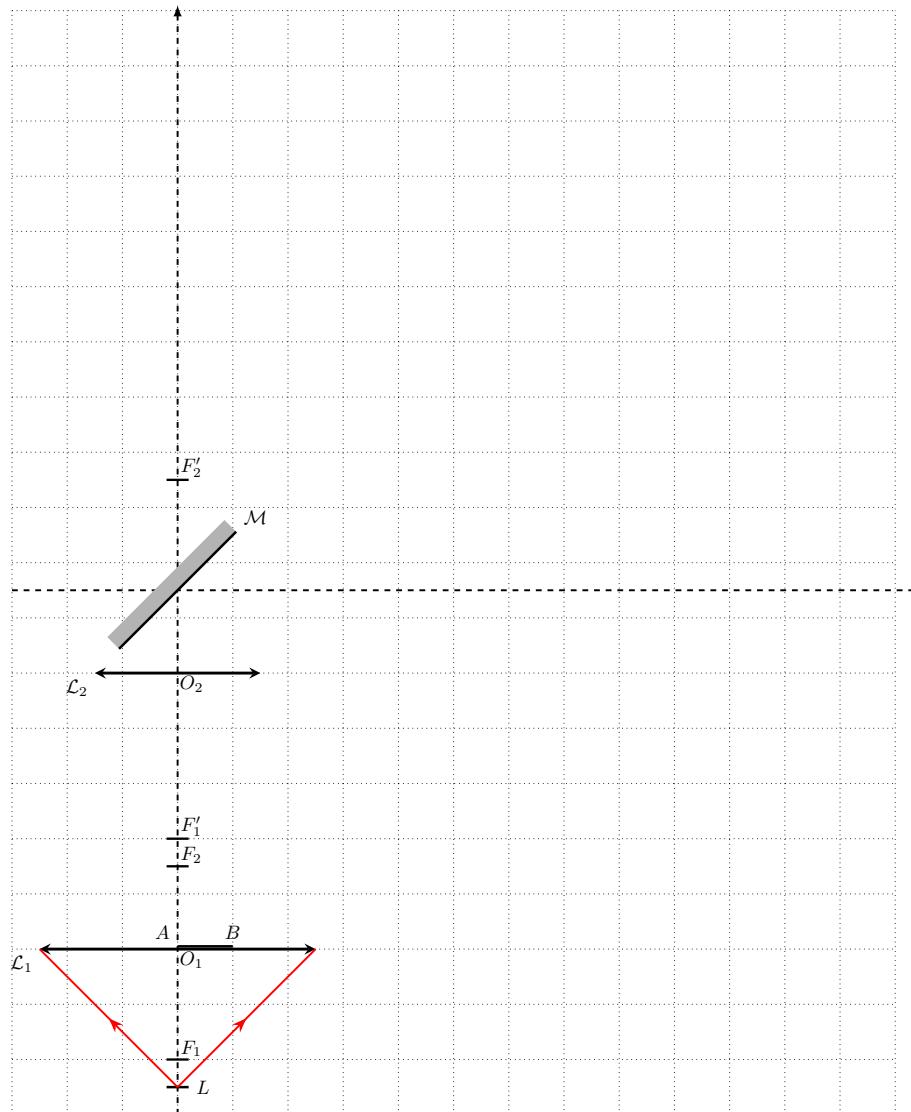
Calculez le diamètre de l'image.



Exercice O2.9 : Rétroprojecteur [**]

Un rétroprojecteur est constitué de :

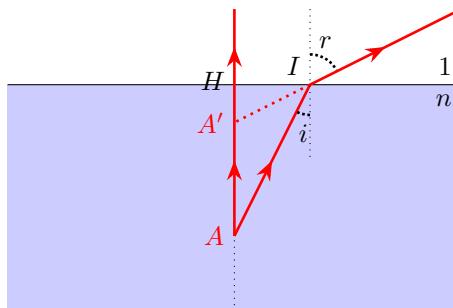
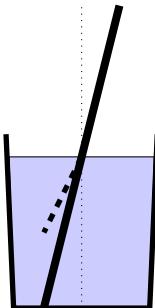
- une lampe L
- une lentille convergente \mathcal{L}_1 appelée *condenseur* horizontale, sur laquelle on pose un objet AB (le transparent à projeter)
- une lentille de projection \mathcal{L}_2
- un miroir \mathcal{M} incliné à 45° qui envoie l'image sur un écran



1. Dessinez l'image $A'B'$ de AB par la lentille de projection, puis l'image finale $A''B''$ donnée par le miroir. Déduisez-en où on doit placer l'écran.
2. On a tracé les deux rayons extrêmes issus de la lampe et frappant le condenseur. Tracez le trajet de ces rayons jusqu'à l'écran et déduisez-en la portion de l'écran qui est éclairée.

Exercice O2.10 : La paille dans le verre [***]

Quand on place une paille dans un verre, et qu'on la regarde de dessus, on la voit «cassée» (figure de gauche). Considérons une paille penchée. Au-dessus du dioptre, il y a de l'air d'indice 1; au-dessous, il y a de l'eau d'indice $n = 1,33$.



On part d'abord d'un point A de la paille (figure de droite). Ce point émet des rayons vers le dioptre : c'est un objet.

1. Que dire du rayon issu de A et frappant le dioptre orthogonalement ?
2. Soit un rayon issu de A et faisant un angle i avec la normale au dioptre. Soit I le point où il frappe le dioptre ; il ressort avec un angle r .
On appelle H le projeté orthogonal de A sur le dioptre.
Par une relation de trigonométrie, relier i , AH et HI .
3. Soit A' le point où le rayon émergent coupe AH . Relier r , $A'H$ et HI .
4. Écrivez la relation de Descartes au point I .
5. On se place dans le cas de petits angles : $\tan \theta \approx \theta$ et $\sin \theta \approx \theta$. À partir des 3 équations précédentes, montrez que $A'H = \frac{AH}{n}$.
6. En déduire pourquoi la paille apparaît cassée.

Systèmes optiques

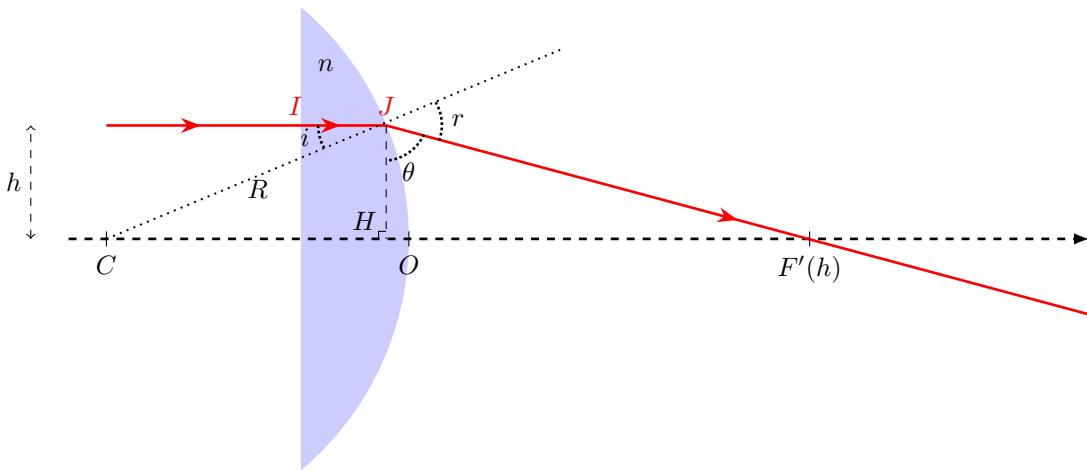
TDs numériques

réponses page 102

TD numérique : Lentille plan-convexe

On s'intéresse à une lentille plan-convexe, c'est-à-dire une portion de verre d'indice n comprise entre un plan et une sphère de rayon R . Les notations sont placées ci-dessous :

- l'axe optique est perpendiculaire au plan
- le centre C de la sphère de rayon R est situé sur l'axe optique
- on repère les distances par rapport au sommet O de la sphère



Un rayon incident arrive parallèle à l'axe à une distance h de l'axe, et entre dans la lentille. Après deux réfractions en I puis en J , il ressort et coupe l'axe en un point noté $F'(h)$. Le but de ce TD est de trouver la position de $F'(h)$, plus précisément de déterminer $f'(h) = \overline{OF'(h)}$, afin de voir si elle dépend de h ou pas (condition de stigmatisme).

1. Justifiez l'allure du dessin, en particulier ce qui se passe en I et en J .
 2. En faisant de la trigonométrie dans le triangle CHJ , reliez l'angle i à h et R .
 3. Reliez l'angle r à i et n .
 4. Reliez l'angle θ à r et i .
 5. Exprimez la distance $\overline{HF'}$ en fonction de h et θ , et la distance \overline{CH} en fonction de R et i . Déduisez-en l'expression de $f' = \overline{OF'}$ en fonction de h , i , θ et R .
 6. À l'aide des questions 3 et 2, justifiez que le rayon réfracté en J n'existe que si $h < h_{max} = \frac{R}{n}$.
 7. On va maintenant simuler cela avec Python pour une lentille telle que $n = 1,52$ et $R = 12\text{ cm}$. Commencez par importer `numpy` et `matplotlib.pyplot`, définir les constantes et calculer h_{max} .
 8. Créez, à l'aide de la fonction `numpy.linspace`, un tableau de 100 valeurs espacées entre $0.0001 \times h_{max}$ et $0.9999 \times h_{max}$ (on s'arrête avant h_{max} , car les arrondis risquent de le faire dépasser ; quant à $h = 0$, c'est l'axe, il y a des formes indéterminées).
- À l'aide des formules des questions 2 à 5, créez successivement les tableaux `tab_i`, `tab_r`, `tab_theta`, `tab_fp` contenant les valeurs de i , r , θ puis f' . Par exemple, l'équation de la question 2 indique que $i = \arcsin \frac{h}{R}$ ce qui se traduira par `tab_i=numpy.arcsin(tab_h/R)`, etc.
- Attention* pour θ , car Python/Numpy travaille en radians ! On obtient π avec `np.pi`.
9. Tracez alors $f'(h)$, c'est-à-dire un graphique Matplotlib avec `tab_h` en abscisses et `tab_fp` en ordonnées.
 10. Sur le graphique précédent, mesurez :
 - la distance focale de cette lentille dans les conditions de Gauss
 - la valeur maximale de h pour laquelle f' ne diffère de la valeur précédente que par moins de 5 %
- Indication* : vous pouvez ajouter une grille avec `plt.grid()` pour mieux lire les valeurs.
Quelle aberration a-t-on mis en évidence ici ?

11. En réalité, l'indice du verre dépend de la longueur d'onde selon la relation $n(\lambda) = 1,4989 + \frac{4550}{\lambda^2}$ avec λ en nm.
Créez une fonction `n(λ)` qui calcule l'indice à la longueur d'onde donnée en argument.
12. On va alors calculer la distance focale dans les conditions de Gauss (on prendra par exemple $h = 0,1$ mm) pour différentes longueurs d'ondes.
Pour cela, créez un tableau de longueurs d'ondes parcourant tout le spectre visible, puis, par calculs successifs, calculez les distances focales dans les conditions de Gauss correspondantes, notées f'_0 . Tracez $f'_0(\lambda)$ et commentez : quelle aberration a-t-on mis en évidence ?
13. En reprenant les équations des questions 2 à 5 et en les simplifiant pour de petits angles, montrez que $f'_0 = \frac{R}{n-1}$.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

C'est le point où se coupent les rayons incidents ; les rayons émergents se coupent sur l'image.

Q2.(a) ET (b) ET (c)

Si l'objet est réel, le faisceau incitant diverge car il provient de ce point.

Q3.(d)

C'est la définition du foyer image.

Q4.(d)

C'est la définition du foyer objet.

Q5.(a) ET (d)

Q6.(a)

Ce n'est vrai que si le système est aplanétique.

Q7.(b)

Q8.(c)

Q9.(c)

Q10.(d)

Réponses au QCM : Réel ou virtuel ?

Q11.(d)

Q12.(a)

Q13.(d)

Attention, les rayons incidents sont à droite et les rayons émergents à gauche, ici.

Q14.(c)

Ici, la face d'entrée et la face de sortie sont du même côté.

Q15.(b)

Réponses au QCM : Propriétés des systèmes optiques

Q16.(b)

C'est l'intersection des rayons émergents...peu importe la notation !

Q17.(a)

B' est l'objet et B l'image.

Q18.(a)

L'objet $A'B'$ est orthogonal à l'axe, l'image AB ne l'est pas.

Q19.(b)

Le rayon émergent bleu est parallèle à l'axe, donc le rayon incident bleu passe par le foyer objet, qui est donc le point C où il coupe l'axe.

Q20.(c)

Le rayon incident vert est parallèle à l'axe, donc le rayon émergent vert passe par le foyer objet, qui est donc le point E où il coupe l'axe (après l'avoir prolongé).

Réponses au QCM : Lois de conjugaison et de grandissement

Q21.(b)

Attention aux signes : $\overline{OA} = -14 \text{ cm}$.

Q22.(c)

Q23.(b)

Ici $\overline{FA} = -2 \text{ cm}$ puis on applique la loi de conjugaison de Newton ; ou bien $\overline{OA} = +6 \text{ cm}$ et on trouve \overline{OA}' puis on utilise la relation de Chasles.

Q24.(b)

Q25.(b)

Les lois de Newton sont ici les plus rapides.

Q26.(d)

Q27.(d)

Attention aux signes : $\overline{OA} = -20 \text{ cm}$.

Q28.(d)

Q29.(d)

Ici, lois de Newton.

Q30.(c)

Q31.(b)

Par exemple, $\overline{OA'} = -13 \text{ cm}$ donc $\overline{OA} = -5 \text{ cm}$ donc $\overline{FA} = +3 \text{ cm}$ par la relation de Chasles.

Q32.(c)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice [O2.1](#) : Exercices graphiques sur les lentilles [**]

Lentilles convergentes

- premier dessin : l'image est tout à droite et mesure environ deux carreaux vers le bas
- deuxième dessin : l'image est virtuelle, un peu avant l'objet, et un peu plus grande
- troisième dessin : l'image est environ à mi-chemin entre la lentille et l'objet
- quatrième dessin : l'image est virtuelle, un peu avant F' , de taille environ le tiers de l'objet
- cinquième dessin : l'image est sur le plan focal image, de un carreau et demi environ vers le haut

Lentilles divergentes

- premier dessin : l'image est virtuelle, un gros carreau à droite de F' , et droite
- deuxième dessin : l'image est virtuelle, à droite de l'objet mais très proche
- troisième dessin : l'image est réelle, à une distance de la lentille double de l'objet
- quatrième dessin : l'image est virtuelle, symétrique de l'objet par rapport à la lentille
- cinquième dessin : l'image est sur le plan focal image, virtuelle, de un carreau et demi environ vers le bas

Rayon émergent

- premier dessin : le rayon est dévié vers le bas
- deuxième dessin : le rayon est dévié vers le haut, mais continue à descendre
- troisième dessin : le rayon est dévié vers le haut, il part presque à l'horizontale
- quatrième dessin : le rayon est dévié vers le bas

Réponses de l'exercice [O2.2](#) : Image à travers deux lentilles [**]

- première figure : $A''B''$ est situé quasiment entre F'_1 et F'_2 et mesure environ un carreau vers le bas.
- deuxième figure : $A''B''$ est situé deux carreaux avant O_1 et mesure un peu moins d'un carreau vers le haut.
- troisième figure : $A''B''$ est situé un carreau avant O_2 et mesure environ un carreau et demi vers le haut.

Réponses de l'exercice [O2.3](#) : Tracés de rayons à travers deux lentilles [***]

- premier dessin : le rayon ressort à peine incliné vers le bas
- deuxième dessin : le rayon ressort dévié vers le haut
- troisième dessin : le rayon ressort légèrement incliné vers le haut, il coupe l'axe environ quatre carreaux à droite de F_2

Réponses de l'exercice [O2.4](#) : Diamètre apparent du Soleil [*]

Le diamètre apparent vaut $0,53^\circ$.

Réponses de l'exercice [O2.5](#) : Configuration de Silberman [*]

1. $\gamma = -1$.
2. $\overline{OA} = -2f'$ et $\overline{OA'} = 2f'$; on a aussi $\overline{AA'} = 4f'$.
- 3.

Réponses de l'exercice [O2.6](#) : Vidéoprojecteur [*]

1. $\overline{OA'} = 3,24 \text{ m}$
2. $\overline{OA} = -4,05 \text{ cm}$

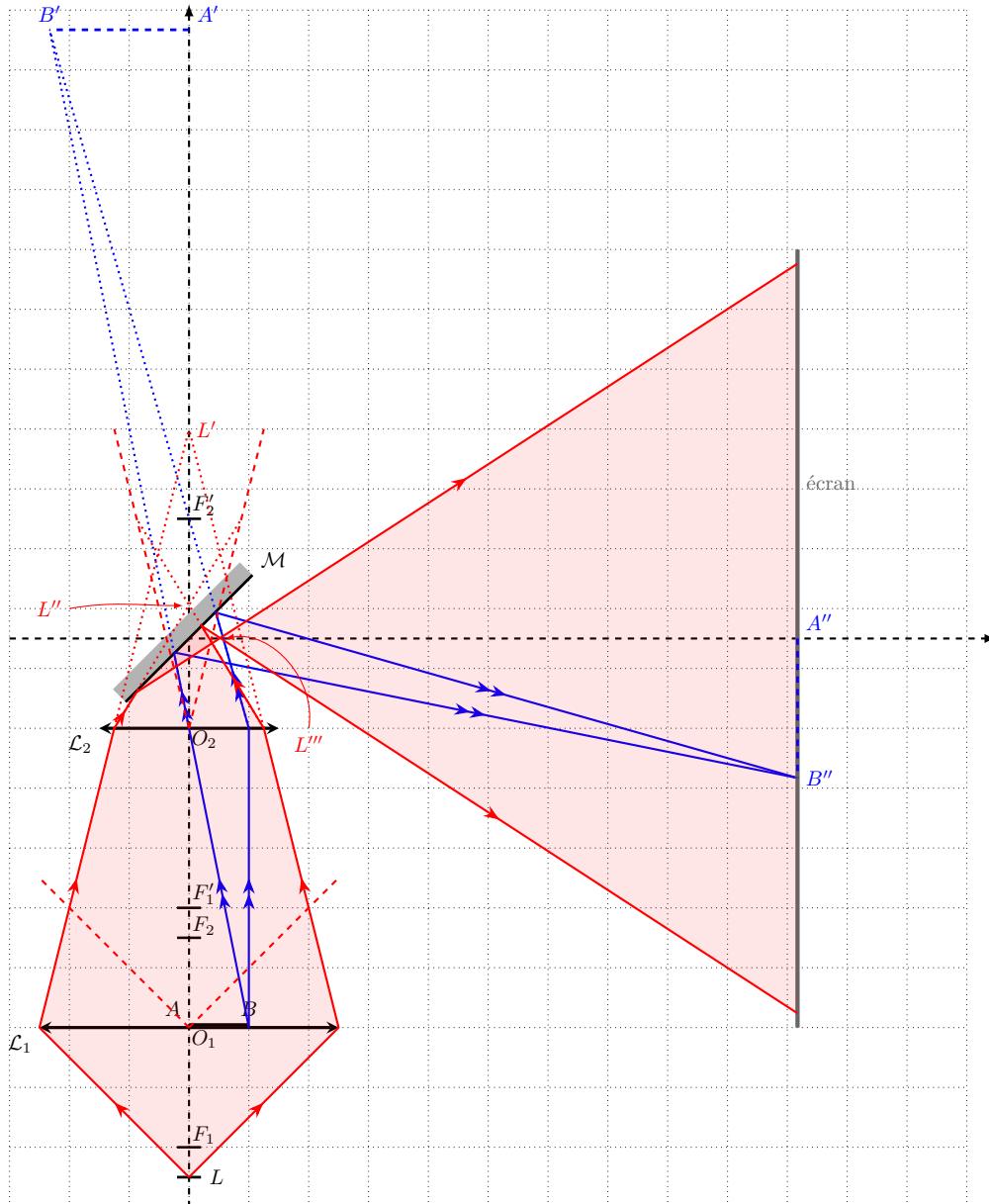
Réponses de l'exercice O2.7 : Obtention d'un grandissement donné [**]

La distance objet-écran vaut 112,7 cm.

Réponses de l'exercice O2.8 : Projection du soleil [*]

$$A'B' = 0,87 \text{ mm}$$

Réponses de l'exercice O2.9 : Rétroprojecteur [**]



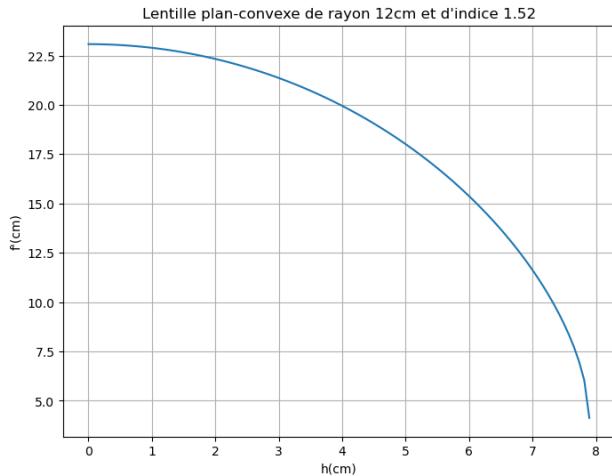
Réponses de l'exercice O2.10 : La paille dans le verre [***]

À partir des lois de trigonométrie donnant $\tan i$ dans le triangle AHI et $\tan r$ dans $A'HI$, ainsi que la loi de la réfraction, écrites pour de petits angles ($\tan i \approx \sin i \approx i$), on trouve $A'H = \frac{AH}{n}$ qui montre que la paille apparaît rapprochée d'un facteur 3/4 environ.

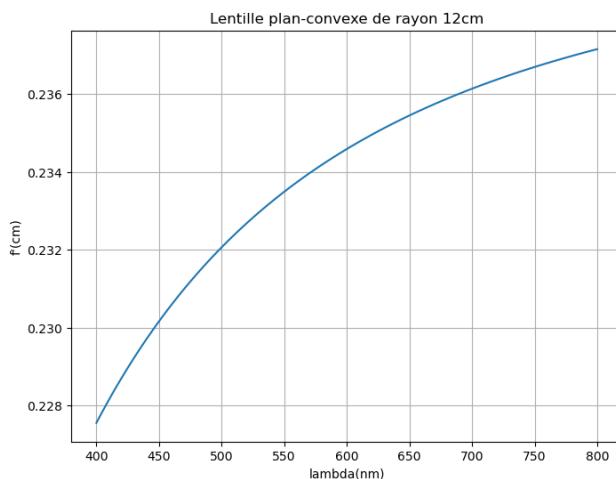
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Lentille plan-convexe

On trouve que $f' = \overline{OF'} = -R + R \cdot \cos i + h \cdot \tan \theta$ pour $0 \leq h \leq h_{max} = \frac{R}{n}$:



La distance focale dans les conditions de Gauss est la limite de f' lorsque h tend vers 0. On voit que quand les rayons sont plus loin de l'axe, la distance focale diminue : c'est l'aberration sphérique.



La distance focale dépend de la longueur d'onde : c'est l'aberration chromatique.

Systèmes de lentilles

Cours

Nous avons vu dans le chapitre précédent les caractéristiques des systèmes optiques, et particulièrement des lentilles. Nous allons maintenant pouvoir combiner ces lentilles pour construire des systèmes plus complexes.

Dans tout ce chapitre, on supposera que les lentilles sont idéales, parfaitement stigmatiques, sans défauts. Cela est suffisant pour comprendre le fonctionnement général des systèmes étudiés ; mais dans la réalité, quand on voudra réaliser un système optique de qualité, il faudra tenir compte de ces défauts, sans que cela n'en change le principe général. Pour cela, on va le plus souvent remplacer une lentille par un ensemble de lentilles dont les défauts se compensent dans la configuration choisie, de manière à obtenir une image de bonne qualité. Il faut bien comprendre qu'il n'y a pas de combinaison idéale de lentilles : chaque cas est différent et nécessite une étude particulière.

O3.A. Quelques conséquences des lois de conjugaison

Avant d'étudier des combinaisons de lentilles pour obtenir des instruments d'optique avancés, nous allons étudier un peu plus en détail quelques implications des lois de conjugaison et de grandissement pour une lentille.

A.1. Projection d'un objet sur un écran

Pour projeter un objet sur un écran, il faut en donner une image réelle, avec des caractéristiques qui dépendent de l'application recherchée. Nous allons donc commencer par étudier la position et la taille de l'image en fonction de la position de l'objet, pour les deux familles de lentilles.

Calcul : Place et taille de l'image d'une lentille convergente

Considérons une lentille convergente de centre O et de focale $f' > 0$; on va s'intéresser à la position et à la taille de l'image en fonction de la position où on place l'objet A de la lentille.

Pour cela : on va exprimer \overline{OA}' et γ en fonction de la variable \overline{OA} . À l'aide des lois avec origine au centre :

- $\frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{f' + \overline{OA}}{f'.\overline{OA}}$ donc $\overline{OA}' = \frac{f'.\overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$
- $\gamma = \frac{\overline{OA}'}{\overline{OA}}$, ce qui donne d'après l'égalité ci-dessus : $\gamma = \frac{f'}{f' + \overline{OA}}$

Pour tracer le tableau de variation de \overline{OA}' et γ , il faut étudier le signe de leur dérivée :

- $\frac{d\overline{OA}'}{d\overline{OA}} = \frac{f'(f' + \overline{OA}) - f'.\overline{OA}.1}{(f' + \overline{OA})^2} = \frac{f'^2}{(f' + \overline{OA})^2} > 0$
- $\frac{d\gamma}{d\overline{OA}} = \frac{-f'}{(f' + \overline{OA})^2} < 0$ car $f' > 0$

On peut alors tracer le tableau de variations suivant, en ajoutant les valeurs particulières :

\overline{OA}	$-\infty$	$-2f'$	$-f'$	0	$+\infty$
\overline{OA}'	f'	$2f'$	$+\infty$	0	f'
γ	0	-1	$-\infty$	$+\infty$	1

Il est alors facile d'analyser ce tableau à l'aide de trois règles simples :

- l'image est réelle si et seulement si $\overline{OA}' > 0$
- l'image est droite si et seulement si $\gamma > 0$
- l'image est agrandie si et seulement si $|\gamma| > 1$

On peut repérer alors les domaines correspondant à un appareil photo, un vidéoprojecteur, une loupe,...

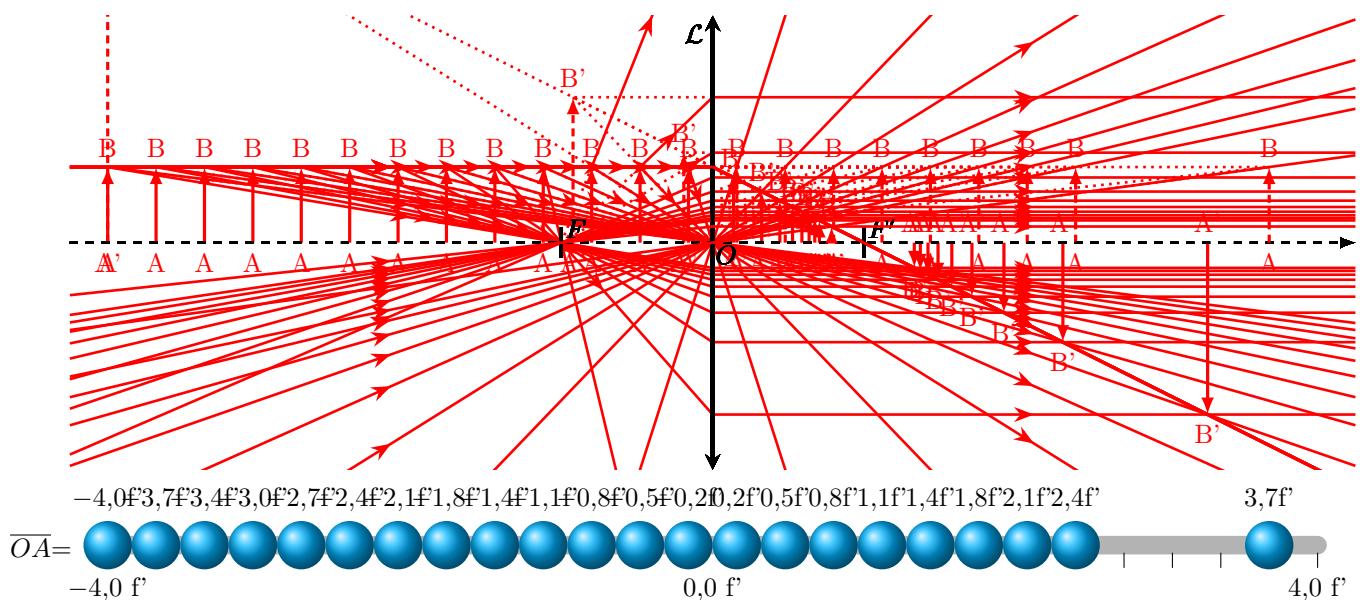


FIGURE O3.1 – Image par une lentille convergente (cliquez sur le curseur pour déplacer l'objet).

Calcul : Place et taille de l'image d'une lentille divergente

Dans le cas d'une lentille divergente, les calculs sont identiques, mais cette fois $f' < 0$, donc : $\frac{d\overline{OA}'}{d\overline{OA}} = \frac{f'^2}{(f'+\overline{OA})^2} > 0$ et $\frac{d\gamma}{d\overline{OA}} = -\frac{f'}{(f'+\overline{OA})^2} > 0$. Le tableau de variations est donc le suivant :

\overline{OA}	$-\infty$	0	$-f'$	$-2f'$	$+\infty$
\overline{OA}'	f'	0	$+\infty$	$-\infty$	$2f'$
γ	0	1	$+\infty$	$-\infty$	0

On déduit de ces résultats que :

- les plans principaux d'une lentille mince sont le plan de la lentille compté deux fois (conjugué avec lui-même)
- les plans antiprincipaux d'une lentille mince sont situés de part et d'autre de celle-ci à une distance $2f'$.

Si on s'intéresse à la projection d'un objet réel sur un écran, on retient les résultats suivants :

Propriété : Projection d'un objet réel sur un écran

Supposons qu'on dispose d'un objet réel, et qu'on veuille en faire son image sur un écran ; l'image doit donc être réelle. Pour ce faire, il faut :

- choisir une lentille **convergente** ($f' > 0$)
- placer l'objet devant la lentille à une distance **supérieure à f'**

L'image sera **renversée** ; de plus elle sera **agrandie si l'écran est à plus de $2f'$ de distance de la lentille** (l'objet est alors à une distance inférieure à $2f'$ de la lentille) et **réduite** dans le cas contraire.

Démonstration

On peut retrouver certains de ces résultats rapidement sans refaire toute l'étude précédente. D'abord, on veut un objet réel, donc $\overline{OA} < 0$, et l'image sur un écran, donc réelle, donc $\overline{OA}' > 0$. D'après la loi de conjugaison de Descartes, $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA}'} - \frac{1}{\overline{OA}} > 0$ donc $f' > 0$: il faut une lentille convergente.

De plus $\frac{1}{\overline{OA}'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}+f'}{\overline{OA}.f'}$ doit être positif, or $\overline{OA} < 0$, ce qui implique que $\overline{OA}+f' < 0$ donc $\overline{OA} < -f'$:

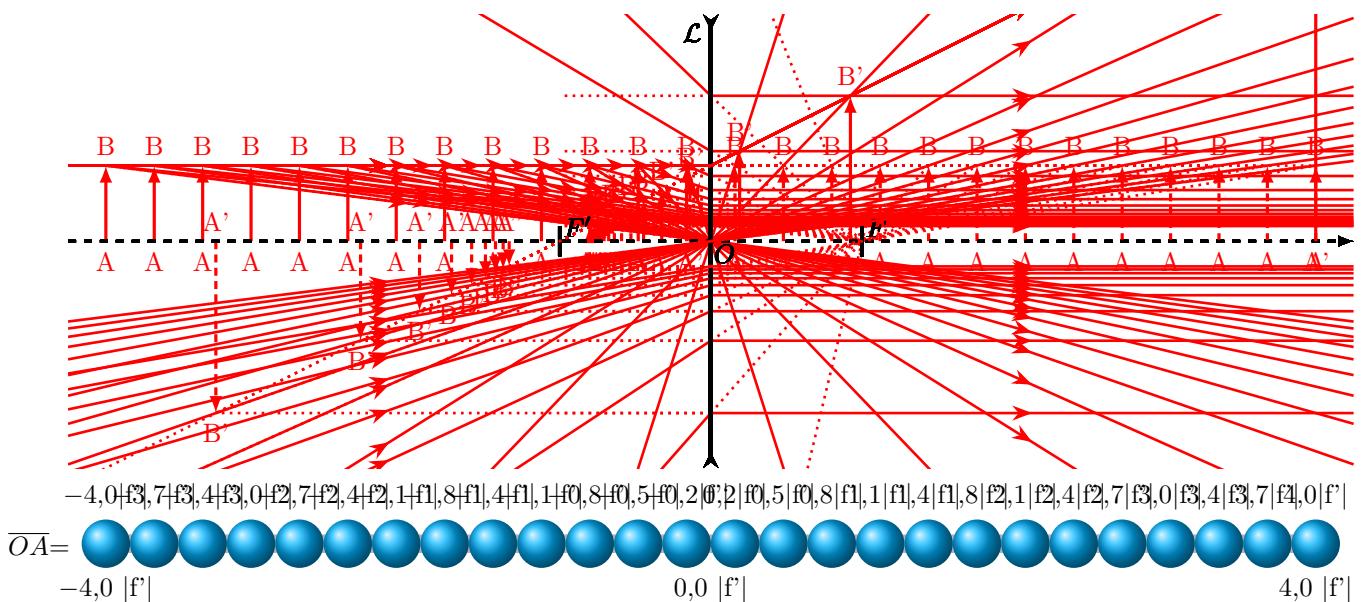


FIGURE O3.2 – Image par une lentille divergente (cliquez sur le curseur pour déplacer l'objet).

la distance objet-lentille doit être supérieure à f' .

Exemple : Choix d'une lentille pour une projection

On veut projeter un objet sur un écran situé à une distance $d = 6\text{m}$ avec un grandissement $|\gamma| = 120$.

1. Calculez les distances objet-lentille et objet-écran qu'il faut prendre.
2. Déduisez-en la distance focale de la lentille à choisir.

1. On sait que $\overline{AO} + \overline{OA'} = d = 6\text{ m}$ et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{AO}} = -120$ d'où on tire après quelques manipulations $\overline{AO} = \frac{d}{|\gamma|+1} = 5,0\text{ cm}$ et $\overline{OA'} = 5,95\text{ m}$.

2. Par la relation de conjugaison de Descartes, on trouve $f' = 4,9\text{ cm}$.

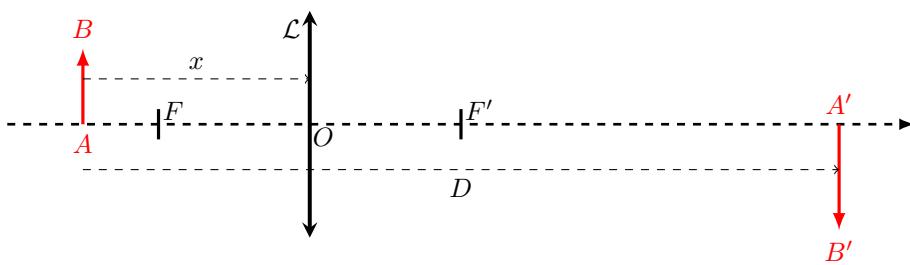
Néanmoins, les propriétés précédentes ne disent rien sur la distance focale f' à choisir. Nous allons donc établir une propriété importante quand au choix de f' :

Propriété : Choix de la distance focale pour projeter un objet sur un écran

Si on dispose d'un objet réel et qu'on veuille le projeter sur un écran situé à une distance D , alors il faut choisir une lentille telle que $D \geq 4f'$.

Démonstration

Pour cette démonstration, il suffit de mettre en équation le problème à l'aide d'une des lois de conjugaison. Commençons par un dessin : on place l'objet A , l'image A' à une distance $\overline{AA'} = D$; et la question est : où doit-on placer la lentille de distance focale f' pour que A' soit l'image de A par la lentille ?



On va donc poser comme inconnue $x = \overline{AO}$. Pour établir l'équation que doit résoudre x , on peut utiliser :

- ou bien la loi avec origine au centre : avec $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = -x + D$, la relation s'écrit $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ soit $\frac{x+D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'}$ donc $\frac{D}{D.x-D^2} = \frac{1}{f'}$; on en tire $D.f' = x.D - x^2$
- ou bien la loi avec origine aux foyers : avec $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA} = f' - x$ et $\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA} + \overline{AA'} = -f' - x + D$. La relation s'écrit alors $(f' - x).(D - f' - x) = -f'^2$ soit $D.f' - D.x - f'^2 + x.f' - x.f' + x^2 = 0$; on simplifie : $D.f' - D.x + x^2 = 0$

Les deux méthodes aboutissent à la même équation : $x^2 - D.x + D.f' = 0$ de discriminant $\Delta = D^2 - 4D.f' = D(D - 4f')$. Donc :

- si $D > 4f'$ alors l'équation a 2 solutions : il existe 2 positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran ;
- si $D = 4f'$ alors l'équation a une solution : il existe une seule position de la lentille qui donne une image nette sur l'écran ; on pourrait montrer par le calcul qu'elle se trouve au milieu ;
- si $D < 4f'$ alors l'équation n'a aucune solution : il est impossible d'obtenir une image nette sur l'écran.

Cette démonstration est importante, car elle permet de résoudre des exercices dans lesquels on demande de trouver explicitement la position de la lentille.

Exemple : Position d'une lentille pour une projection

On dispose d'une diapositive qu'on veut projeter sur un écran situé à une distance $D = 70\text{ cm}$ à l'aide d'une lentille de distance focale $f' = 8\text{ cm}$. Déterminez la position de la lentille pour tenir une image nette et agrandie.

On pose $x = \overline{AO}$; on sait que $\overline{AA'} = D$. On en déduit que $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = D - x$. La loi de conjugaison de Descartes indique alors que $\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$ soit $\frac{x+D-x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'}$. On en déduit que $x.f' = D.x - x^2$ donc x est solution de l'équation du second degré : $x^2 - D.x + D.f' = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = D^2 - 4.D.f' = 2660 > 0$ donc on trouve deux solutions : $x_1 = 9,2\text{ cm}$ et $x_2 = 60,8\text{ cm}$.

Dans le premier cas, $\overline{OA} = -9,2\text{ cm}$ et $\overline{OA'} = +60,8\text{ cm}$ donc $\gamma = -6,6$; dans le second cas, $\overline{OA} = -60,8\text{ cm}$ et $\overline{OA'} = +9,2\text{ cm}$ donc $\gamma = -0,15$. On choisit donc la première : on place la lentille $9,2\text{ cm}$ après l'objet.

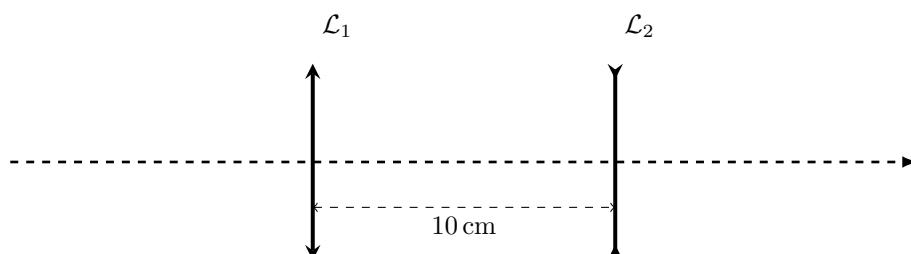
Remarque : C'est un résultat général : quand il existe deux positions possibles pour la lentille, celle qui est la plus proche de l'objet est celle qui donne l'image grandie.

A.2. Lentilles accolées

On a vu dans le chapitre précédent un exemple de doublet, c'est-à-dire d'un système constitué de 2 lentilles. Il existe de nombreuses combinaisons de 2 lentilles permettant de faire différents instruments : lunette astronomique, microscope,... Dans le cas général, il faut donc toujours prendre l'objet, puis chercher l'image de l'objet par la première lentille, et ensuite l'image de cette image intermédiaire par la seconde lentille. Cet ensemble de plusieurs lentilles n'a en effet a priori aucune propriété particulière ; en particulier, si on veut trouver ses foyers, il faut revenir à la définition.

Exemple : Foyers d'un doublet

On dispose deux lentilles, une de focale $f'_1 = 8\text{ cm}$ et de centre O_1 , l'autre de focale $f'_2 = -6\text{ cm}$ et placée en O_2 situé 10 cm après la première.



1. Déterminez par le calcul la position du foyer image F' de ce système.
2. Déterminez par le calcul la position du foyer objet F de ce système.

1. Le foyer image du système $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\}$ est l'image par ce système d'un objet à l'infini sur l'axe : $\infty \xrightarrow{\mathcal{S}} F'$.

Comme le système est constitué de deux lentilles, on peut écrire $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} X \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'$.

On part de la gauche : si l'objet de \mathcal{L}_1 est à l'infini, alors son image est le foyer image de cette lentille, donc $X = F'_1$.

Pour la seconde lentille, l'objet $X = F'_1$ ne joue aucun rôle particulier ; on applique donc la loi de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{O_2F'} - \frac{1}{O_2X} = \frac{1}{f'_2}$ avec $f'_2 = -6$ cm et $\overline{O_2X} = \overline{O_2F'} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'} = -2$ cm.

On en tire que $\overline{O_2F'} = -1,5$ cm : le foyer image du système est donc situé 1,5 cm avant la seconde lentille, ou encore 8,5 cm après la première lentille.

2. On procède de la même manière : par définition, $F \xrightarrow{\mathcal{S}} \infty$ donc $F \xrightarrow{\mathcal{L}_1} Y \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$.

Cette fois on part de la droite : par définition, $Y = F_2$ donc la loi de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille \mathcal{L}_1 indique que $\frac{1}{O_1Y} - \frac{1}{O_1F} = \frac{1}{f'_1}$ avec $\overline{O_1Y} = \overline{O_1F_2} = 16$ cm d'où on tire $\overline{O_1F} = -16$ cm.

On constate que les foyer ne sont pas du tout symétriques par rapport à un éventuel centre optique.

Il existe cependant un cas particulier à connaître : le cas où les deux lentilles sont très proches ; idéalement, parfaitement collées.

Propriété : Lentilles accolées

Deux lentilles de distances focales f'_1 et f'_2 collées l'une à l'autre sont équivalentes à une seule lentille de focale f' telle que $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$

Démonstration

Considérons deux lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , de focales f'_1 et f'_2 , de centres optiques O_1 et O_2 tellement proches qu'on peut les confondre : on les notera O . Soit A un objet ; alors $A \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A' \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A''$. On peut donc écrire les relations de conjugaison de Descartes :

- pour la lentille 1 : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1}$
- pour la lentille 2 : $\frac{1}{OA''} - \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'_2}$

On somme les deux relations : les termes $\frac{1}{OA'}$ se simplifient et on obtient $\frac{1}{OA''} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

Si on considère le système \mathcal{S} formé de $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, alors on peut écrire $A \xrightarrow{\mathcal{S}} A''$ et on constate que \mathcal{S} vérifie une loi de conjugaison équivalente à une relation de Descartes avec une distance focale f' telle que $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

Remarque : On constate que ce sont les inverses des distances focales qui s'ajoutent. On leur donne un nom :

Définition : Vergence d'une lentille

La vergence d'une lentille de distance focale f' est définie par

$$V = \frac{1}{f'} \quad (\text{O3.1})$$

Elle se mesure en *dioptries* : $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$.

Pour des lentilles accolées, on a alors : $V = V_1 + V_2$.

Remarque : On peut aussi écrire $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}}$ et $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \gamma_2 = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A'}}$ donc par multiplication $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = \frac{\overline{O_1A'} \cdot \overline{O_2A'}}{\overline{O_1A} \cdot \overline{O_2A'}}$. Si les lentilles sont accolées, deux termes se simplifient et on obtient $\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \gamma = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{OA}}$

O3.B. La vision humaine

Avant de comprendre le fonctionnement de systèmes plus complexes, nous allons analyser l'œil humain comme un système optique et en comprendre ses principaux défauts.

L'œil humain est représenté schématiquement sur la figure O3.3. Il est constitué essentiellement comme un appareil photo : une lentille convergente (constituée de l'humeur vitreuse ou vitrée, du cristallin et de l'humeur aqueuse) projette une image sur un écran (la rétine).

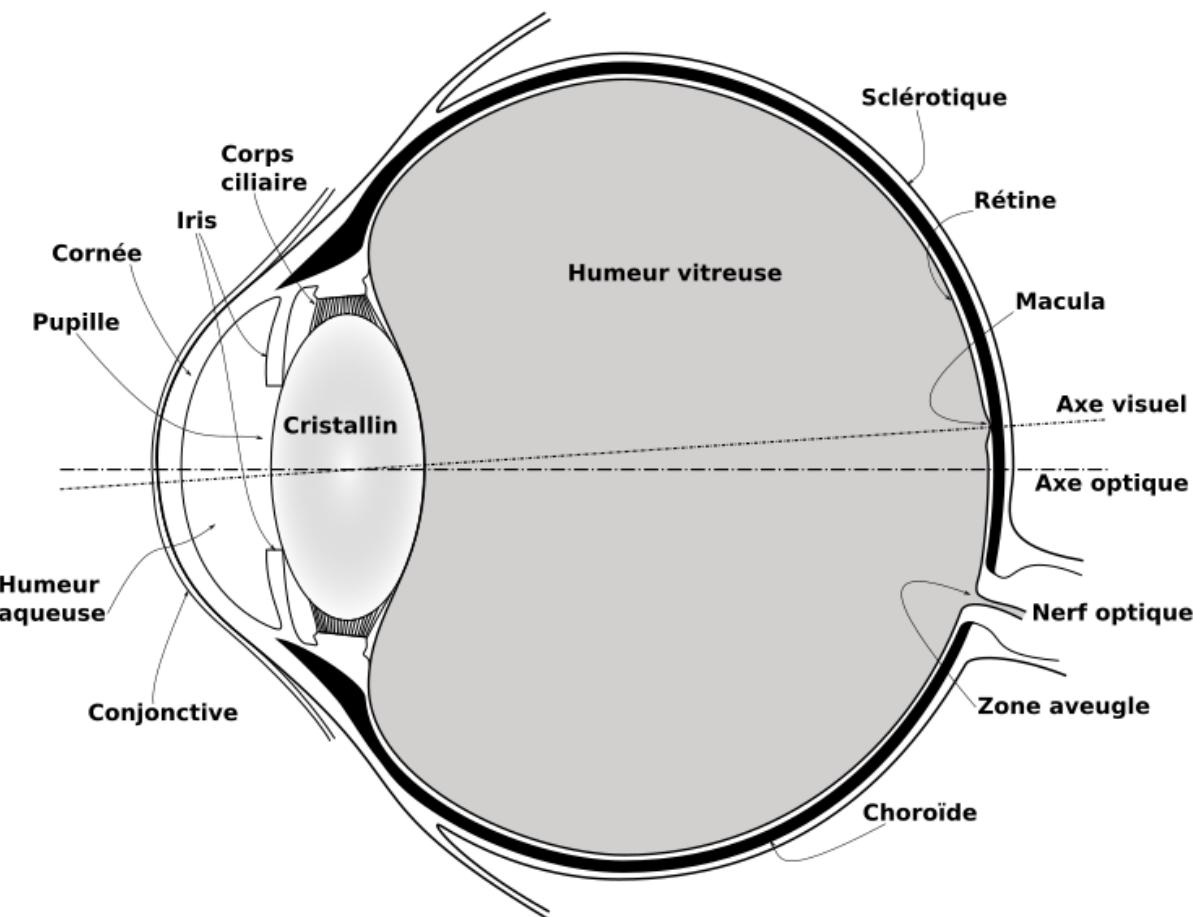


FIGURE O3.3 – Anatomie de l'œil.

B.1. Accommodation de l'œil

Parmi les 3 parties qui constituent la lentille convergente de l'œil, le cristallin est très particulier : il est déformable, au moyen de muscles situés sur les côtés qui peuvent le rendre plus ou moins bombé, et modifier sa distance focale : c'est l'*accommodation*.

Définition : Punctum remotum

Lorsque le cristallin est le plus fin, l'œil donne sur la rétine une image nette pour un objet situé au *punctum remotum* (figure O3.4) ; pour un œil normal, ce point est à l'infini.

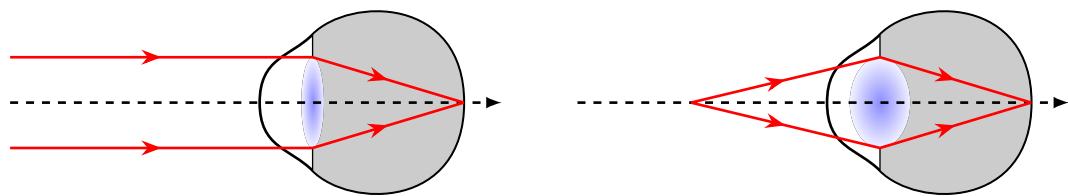
Lorsque l'œil accorde sur le punctum remotum, les muscles du cristallin sont au repos.

Définition : Punctum proximum

Lorsque le cristallin est le plus gros, l'œil donne sur la rétine une image nette pour un objet situé au *punctum proximum* (figure O3.4) ; pour un œil normal, ce point est à une distance moyenne de 25 cm (qui augmente avec l'âge : c'est la presbytie).

Lorsque l'œil accorde sur le punctum proximum, les muscles du cristallin font des efforts et se fatiguent.

Cependant, l'œil, au cours de sa croissance, ne prend pas toujours la forme idéale. Le défaut le plus courant est celui d'un œil trop convergent, ou bien trop allongé (figure O3.5). L'image a alors tendance à se former avant la rétine par rapport à un œil normal.



(a) Punctum Remotum

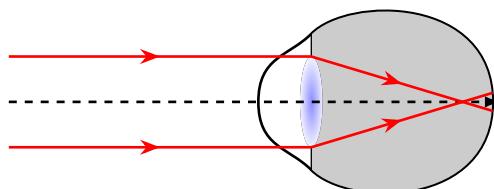
(b) Punctum Proximum

FIGURE O3.4 – Accommodation d'un œil normal.

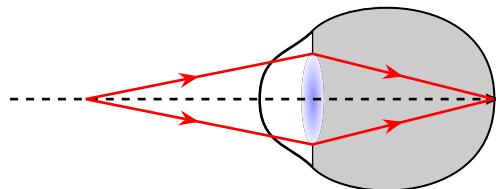
Définition : Œil myope

Un œil myope est trop convergent ; son punctum remotum est située à une distance de quelques mètres, et son punctum proximum est situé à une distance très faible (figure O3.5).

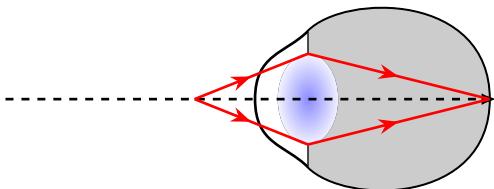
Pour corriger ce défaut et rendre une vue normale, on place une lentille divergente devant l'œil (figure O3.6).



(a) Oeil myope regardant à l'infini

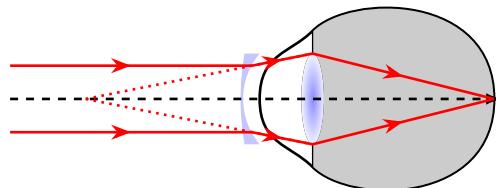


(b) Punctum Remotum

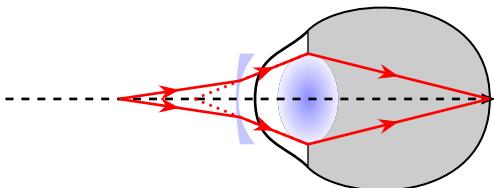


(c) Punctum Proximum

FIGURE O3.5 – Accommodation d'un œil myope.



(a) Punctum Remotum



(b) Punctum Proximum

FIGURE O3.6 – Correction d'un œil myope.

À l'inverse, l'œil peut être trop peu convergent, ou trop court. L'image se forme alors en arrière de la rétine.

Définition : Œil hypermétrope

Un œil hypermétrope est trop peu convergent ; son punctum remotum est située à l'infini (voire virtuel dans le dos de l'observateur), et son punctum proximum est situé à quelques mètres (figure O3.7).

Pour corriger ce défaut et rendre une vue normale, on place une lentille convergente devant l'œil (figure O3.8).

Le principal problème d'un œil hypermétrope est le fait qu'il voit mal de près, par exemple pour lire; à grande distance, peu de choses changent.

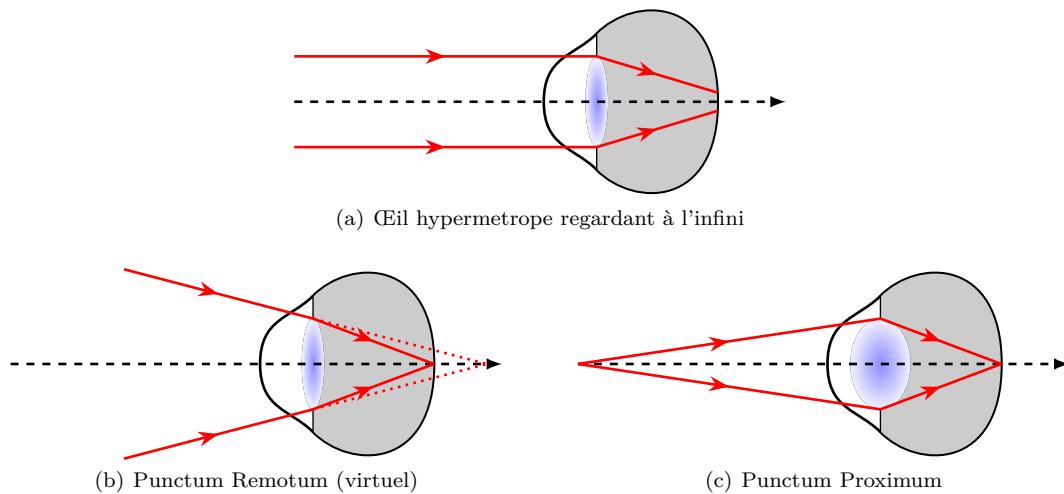


FIGURE O3.7 – Accommodation d'un œil hypermétrope.

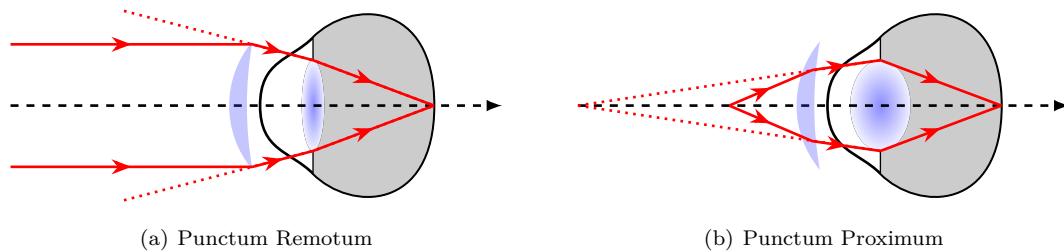


FIGURE O3.8 – Correction d'un œil hypermétrope.

B.2. Acquisition de l'image

La rétine est tapissée de capteurs sensibles à la lumière. Il en existe deux types :

- Les bâtonnets : ils sont environ 120 millions par œil, et captent l'intensité de la lumière sans distinguer les couleurs. Ils sont très sensibles à la lumière.
- Les cônes : ils sont environ 5 millions par œil, et distinguent les couleurs de la lumière visible. Ils sont situés essentiellement au centre de la rétine, dans une zone appelée *macula* (figure O3.9), et sont moins sensibles que les bâtonnets.



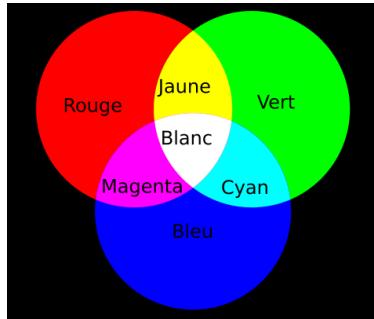
FIGURE O3.9 – Photographie de la rétine d'un œil humain ; on distingue la macula (tache noire à gauche du centre) et le départ du nerf optique (tache blanche). (Crédit : Wikipedia/Ske)

La macula correspond à ce qui est au centre de notre champ de vision, c'est une zone où on perçoit beaucoup de détails avec toutes les couleurs. La vision périphérique est plus floue, peu colorée, et possède même un trou (au niveau du départ du nerf optique) mais notre cerveau agit comme un logiciel de traitement d'image et recompose une image complète et en couleur.

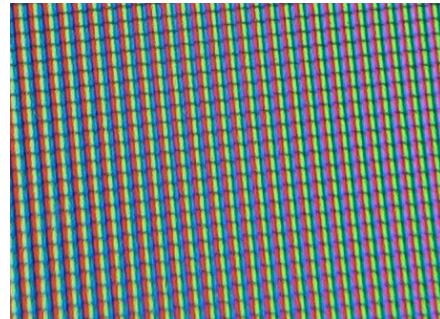
Définition : Pouvoir séparateur de l'œil

Le pouvoir séparateur est l'angle entre deux points que l'œil est capable de distinguer. Il est environ égal à une minute d'arc : $1' = \frac{1}{60}^\circ = 3 \times 10^{-4}$ rad

Pour capter la couleur de la lumière, l'œil utilise une technique simple : il existe 3 types de cônes, les premiers sensibles au rouge, les seconds au vert, les troisièmes au bleu. Ensuite, le cerveau recompose les couleurs à partir du schéma de la figure O3.10. C'est ainsi qu'un écran peut recomposer un grand nombre de couleurs (mais pas toutes) à partir simplement de pixels rouges, verts et bleus.



(a) Principe de la synthèse additive



(b) Pixels colorés d'un écran d'ordinateur

FIGURE O3.10 – Synthèse des couleurs par le cerveau humain.

O3.C. Exemple d'instruments optique

En combinant deux lentilles, il existe toute une variété d'instruments qu'on peut fabriquer. Nous allons en présenter quelques-uns.

C.1. Lunette astronomique et télescope

Définition : Lunette astronomique

Une lunette astronomique est un doublet de lentilles *afocal* :

- la première lentille \mathcal{L}_1 , de grande distance focale, est appelée *objectif*
- la deuxième lentille \mathcal{L}_2 , de courte distance focale, est appelée *oculaire*
- elles sont placées à une distance égale à la somme de leurs distances focales, de sorte que $F'_1 = F_2$

Alors tout faisceau collimaté entrant dans l'objectif ressort collimaté de l'oculaire (figure O3.11).

Démonstration

Le caractère afocal (collimaté \rightarrow collimaté) de la lunette astronomique se justifie facilement : $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$ par définition de F'_1 et de F_2 .

Propriété : Grossissement d'une lentille astronomique

Soit un faisceau collimaté entrant dans la lentille en faisant un angle α avec l'axe optique ; il ressort collimaté en faisant un angle α'' avec l'axe optique. On définit le *grossissement* de la lunette par

$$G = \frac{\alpha''}{\alpha}$$

Si f'_1 est la distance focale de l'objectif et f'_2 celle de l'oculaire, alors, dans les conditions de Gauss :

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

Il est négatif, ce qui signifie que l'image finale est renversée.

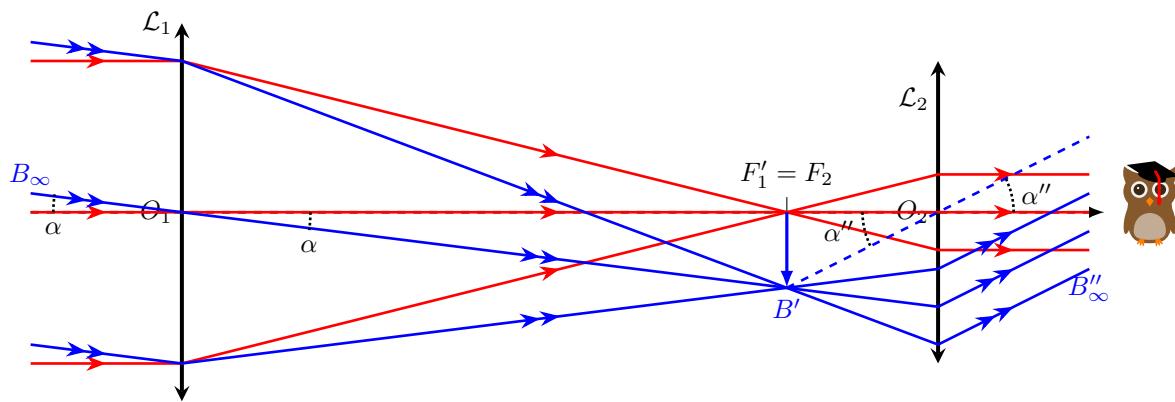


FIGURE O3.11 – Trajet de 2 faisceaux incidents provenant de l'infini, à travers une lunette astronomique.

Démonstration

Considérons le schéma de la figure O3.11. L'angle α en entrée de l'objectif se retrouve aussi de l'autre côté de l'objectif (angles opposés par le sommet). Si on considère le triangle $O_1F'_1B_1$, il est rectangle en F'_1 , donc on peut écrire $\tan \alpha = \frac{F'_1 B_1}{O_1 F'_1} = \frac{F'_1 B_1}{f'_1}$ sans tenir compte des signes pour le moment (angles non orientés).

De même, l'angle α'' en sortie se retrouve dans le triangle $O_2 F_2 B_1$ rectangle en F_2 , et on peut écrire $\tan \alpha'' = \frac{F_2 B_1}{O_2 F_2} = \frac{F'_1 B_1}{f'_2}$.

Dans les conditions de Gauss, les angles sont petits, donc $\alpha \approx \tan \alpha$ et $\alpha'' = \tan \alpha''$ donc $|G| = \frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{\frac{F'_1 B_1}{f'_2}}{\frac{F'_1 B_1}{f'_1}} = \frac{f'_1}{f'_2}$.

En regardant le schéma, on voit que le faisceau bleu incident va vers le bas, et le faisceau bleu émergent va vers le haut, donc l'image est inversée, le grossissement est donc négatif. On a donc bien finalement $G = -\frac{f'_1}{f'_2}$.

La lunette astronomique inverse les images, elle est donc peu adaptée pour l'observation terrestre. La lunette de Galilée, qui utilise un oculaire divergent, permet d'avoir un grossissement positif, donc une image droite.

La modélisation de la lunette par deux lentilles est évidemment un peu simpliste. Pour corriger les défauts des lentilles, il va falloir utiliser des groupes de lentilles dont les défauts se corrigent l'une l'autre. Le premier de ces systèmes est le doublet achromatique, inventé en 1729 par C.M.Hall, qui combine deux lentilles accolées, une convergente en verre léger, l'autre divergente en verre lourd, de sorte que les aberrations chromatiques de l'une sont compensées par celles de l'autre. Avec un tel doublet achromatique comme objectif et comme oculaire, on peut grandement améliorer la qualité des images.

Cependant, cela n'est pas suffisant pour l'oculaire. En effet, celui-ci reçoit des rayons fortement inclinés par rapport à l'axe optique, donc pas du tout dans les conditions de Gauss. On va donc combiner encore plus de lentilles pour compenser non seulement les aberrations chromatiques, mais aussi les aberrations géométriques. La figure O3.12 montre ainsi 3 types d'oculaires de lunettes, contenant de plus en plus de lentilles, et pouvant ainsi observer des champs de plus en plus grands.



(a) Oculaire de type Kellner, à 3 lentilles (champ max : 30°). (Crédit : MatP/Wikipedia)



(b) Oculaire de type orthoscopique, à 4 lentilles (champ max : 50°). (Crédit : MatP/Wikipedia)



(c) Oculaire de type Vixen à champ large, à 8 lentilles (champ max : 65°). (Crédit : MatP/Wikipedia)

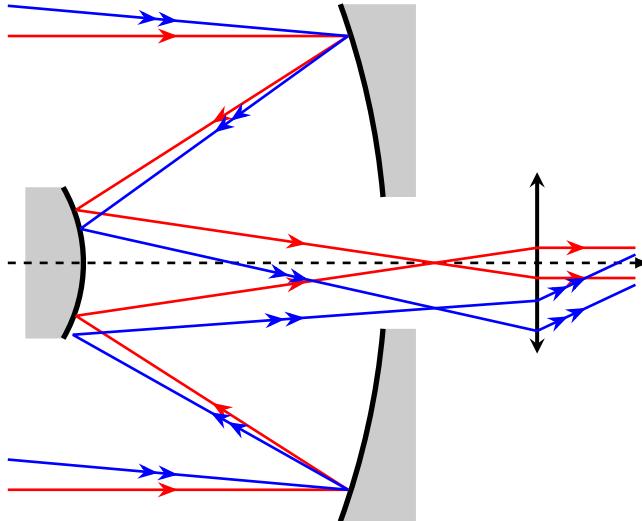
FIGURE O3.12 – Quelques oculaires.

Cependant, quand on veut obtenir des instruments de plus en plus performant, il faut des instruments de plus en plus grands. En effet, d'une part, pour grossir et voir des détails sur les planètes par exemple, il faut augmenter f'_1 , donc la longueur totale de la lunette, conduisant à des instruments de longueur peu pratique (figure O3.13) ; d'autre part, pour observer des objets lointains et donc peu lumineux, il faut une lunette de grand diamètre qui capte beaucoup de lumière, conduisant à des objectifs de grande taille et donc extrêmement lourds. Ainsi, l'objectif le plus grand jamais construit ne mesurait que 1,25 m de diamètre.



FIGURE O3.13 – Grande lunette de l'Observatoire de Nice, de 76 cm de diamètre. (Crédit : Ericd/Wikipedia)

La solution à ces deux problèmes se trouve dans le télescope, qui remplace l'objectif par deux miroirs sphériques. Un grand miroir primaire collecte la lumière et la concentre sur un miroir secondaire, qui la renvoie dans un trou percé au centre du miroir primaire. Là, un oculaire classique collecte la lumière. Avec un tel dispositif, on peut atteindre de très grands diamètres, et de grands grossissements pour un encombrement raisonnable (figure O3.14).



(a) Principe d'un télescope Schmidt-Cassegrain.



(b) Miroir primaire d'un des télescopes de 8 m de diamètre du VLT. (Crédit : Wikipedia)

FIGURE O3.14 – Télescopes.

Aujourd'hui, les télescopes terrestres les plus grands font de l'ordre de 10 m de diamètre, tandis que dans l'espace se trouve le télescope spatial James Webb de 6,5 m de diamètre. De plus, en combinant la lumière provenant de plusieurs télescopes proches, on arrive à avoir des images de très grande qualité.

C.2. Loupe et miscroscope

La loupe et le microscope ont pour but d'observer des objets proches mais petits. Si on observe un tel objet à l'œil nu, on essaye de le voir au mieux en l'approchant de notre œil à la plus petite distance possible, savoir $\delta = 25$ cm.

Ainsi, la plus grand angle sous lequel on peut observer un objet AB à l'œil nu vaudra $\alpha_{oeil} = \arctan \frac{AB}{\delta}$ (cf. figure O3.15(a)) ; dans le cas de petits angles on pourra faire l'approximation $\alpha_{oeil} \approx \frac{AB}{\delta}$.

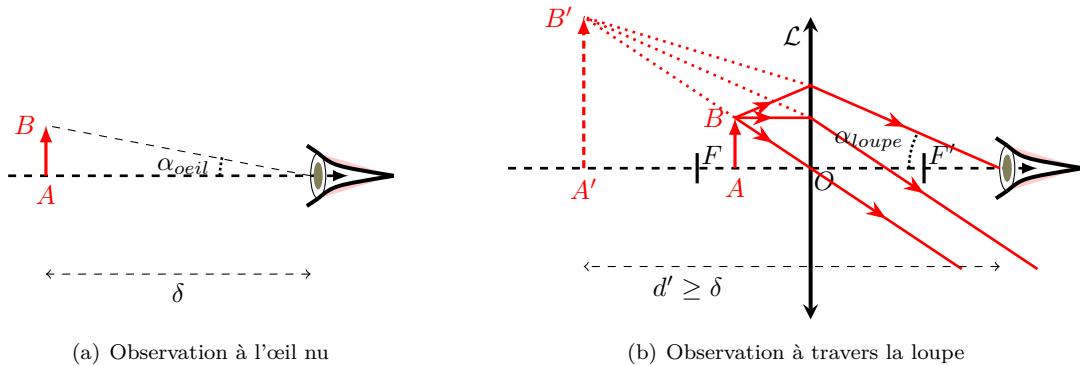


FIGURE O3.15 – Principe d'utilisation de la loupe.

La loupe est une lentille convergente qui va donner de l'objet une image agrandie et placée plus loin. Pour cela l'objet doit être placé entre le foyer objet et la loupe. Si $d' > \delta$, l'œil voit alors l'image nette et agrandie, sous un angle $\alpha_{loupe} = \arctan \frac{A'B'}{d'}$. On définit le grossissement commercial (ou puissance) de la loupe comme le rapport $G_c = \frac{\alpha_{loupe}}{\alpha_{oeil}}$. La figure O3.16 trace par exemple le grossissement commercial d'une loupe en fonction de la position de l'objet : on voit que le grossissement idéal est obtenu pour un objet proche du plan focal objet. De plus, si l'objet est trop proche de la loupe, l'image sera à moins de 25 cm de l'œil et sera donc vue floue.

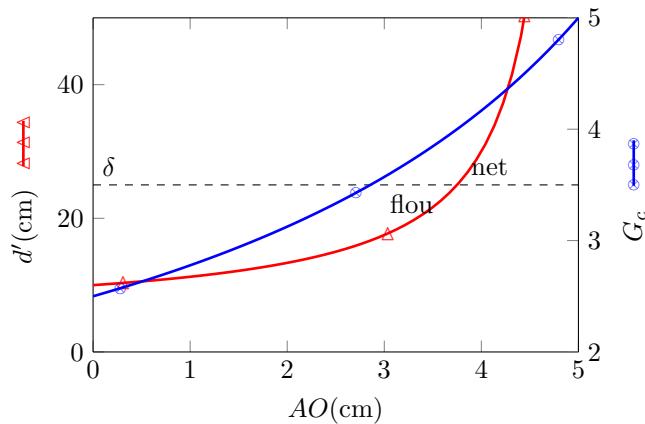


FIGURE O3.16 – Position de l'image et grossissement d'une loupe de vergence $V = +20 \delta$ avec un œil placé à 10 cm de la loupe, en fonction de la place de l'objet.

Pour grossir plus, on utilise un microscope, formé de deux lentilles : la première, l'objectif, de très courte distance focale, forme de l'objet une image intermédiaire $A'B'$ fortement agrandie, située dans le plan focal objet d'une seconde lentille, l'oculaire, jouant le rôle d'une loupe, et donnant, dans le cas idéal, une image finale située à l'infini.

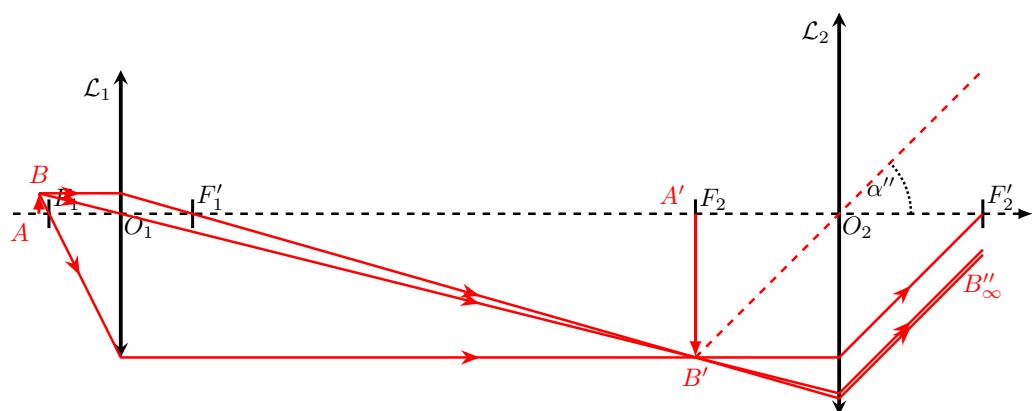


FIGURE O3.17 – Principe d'un microscope.

Systèmes de lentilles

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Modèles de quelques dispositifs optiques	
L'œil.	Modéliser l'œil comme l'association d'une lentille de vergence variable et d'un capteur plan fixe. Citer les ordres de grandeur de la limite de résolution angulaire et de la plage d'accommodation.
Lunette astronomique avec objectif et oculaire convergents. Grossissement.	Représenter le schéma d'une lunette afocale modélisée par deux lentilles minces convergentes ; identifier l'objectif et l'oculaire. Représenter le faisceau émergent issu d'un point objet situé «à l'infini» et traversant une lunette afocale. Établir l'expression du grossissement d'une lunette afocale. Exploiter les données caractéristiques d'une lunette commerciale. Étudier une maquette de lunette astronomique ou une lunette commerciale pour en déterminer le grossissement.

Systèmes de lentilles

QCMs

réponses page 129

QCM : Compréhension du cours

Q1.

Les lois de conjugaison de Descartes et de Newton disent la même chose, mais en repérant les points objets/image par rapport à des références différentes.

Q2.

Seule une lentille convergente peut avoir une image réelle.

Q3.

Pour projeter un objet réel sur un écran, il faut le placer devant une lentille convergente à une distance :

Q4.

Peut-on projeter un objet réel sur un écran situé à 2 m à l'aide d'une lentille de focale $f' = 14 \text{ cm}$?

Q5.

Si on accolé deux lentilles de distances focales $f'_1 = 8\text{ cm}$ et $f'_2 = 12\text{ cm}$, on obtient une lentille de distance focale :

Q6.

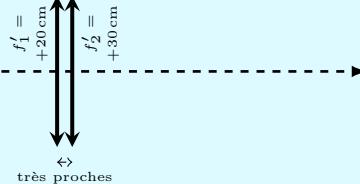
Une lentille de vergence $+5\delta$ a pour distance focale :

QCM : Doublets de lentilles

Quelques questions pour reconnaître certains cas vus en cours.

Q7.

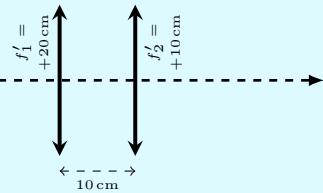
Le système ci-contre est équivalent à :



- (a). Une lentille de focale $f' = +12\text{ cm}$ (b). Rien de spécial
(c). Une lentille de focale $f' = +8,3\text{ cm}$ (d). Une lentille de focale $f' = +50\text{ cm}$
(e). Un système afocal

Q8.

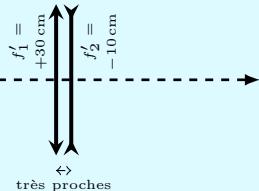
Le système ci-dessous est équivalent à :



- (a). Rien de spécial
- (b). Une lentille de focale $f' = +6,7\text{ cm}$
- (c). Un système afocal
- (d). Une lentille de focale $f' = +15\text{ cm}$
- (e). Une lentille de focale $f' = +30\text{ cm}$

Q9.

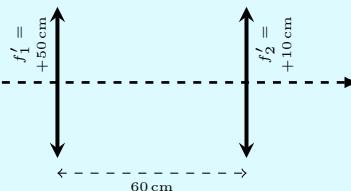
Le système ci-dessous est équivalent à :



- (a). Une lentille de focale $f' = -15\text{ cm}$
- (b). Rien de spécial
- (c). Une lentille de focale $f' = -6,7\text{ cm}$
- (d). Une lentille de focale $f' = +20\text{ cm}$
- (e). Un système afocal

Q10.

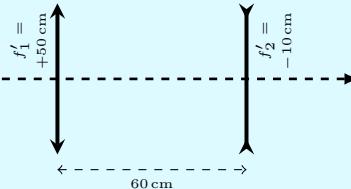
Le système ci-dessous est équivalent à :



- (a). Un système afocal
- (b). Une lentille de focale $f' = +60\text{ cm}$
- (c). Une lentille de focale $f' = +8,3\text{ cm}$
- (d). Rien de spécial
- (e). Une lentille de focale $f' = +40\text{ cm}$

Q11.

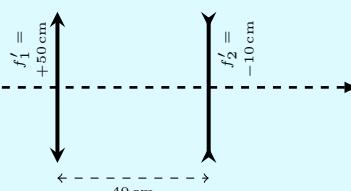
Le système ci-dessous est équivalent à :



- (a). Rien de spécial
- (b). Une lentille de focale $f' = +40\text{ cm}$
- (c). Une lentille de focale $f' = -12,5\text{ cm}$
- (d). Un système afocal

Q12.

Le système ci-dessous est équivalent à :



- (a). Un système afocal
- (b). Une lentille de focale $f' = +12,5\text{ cm}$
- (c). Une lentille de focale $f' = +40\text{ cm}$
- (d). Rien de spécial

Systèmes de lentilles

Exercices

réponses page 130

Exercice O3.1 : Distance entre un objet réel et l'écran [**]

On désire projeter un objet réel de hauteur $AB = 3\text{ cm}$ sur un écran situé à une distance $D = 2,8\text{ m}$, à l'aide d'une lentille convergente de distance focale $f' = 7\text{ cm}$. L'objet est orthogonal à l'axe. On note $A'B'$ l'image.

1. Comment doit être l'image (réelle/virtuelle) pour être visible sur l'écran ? Où doit se trouver AB par rapport au plan focal objet de la lentille ?
2. Calculez la distance \overline{AO} entre l'objet et le centre de la lentille. On prendra la plus petite des deux solutions.
3. Calculez la taille de l'image sur l'écran. Est-elle droite ou renversée ?

Exercice O3.2 : Projecteur de cinéma [**]

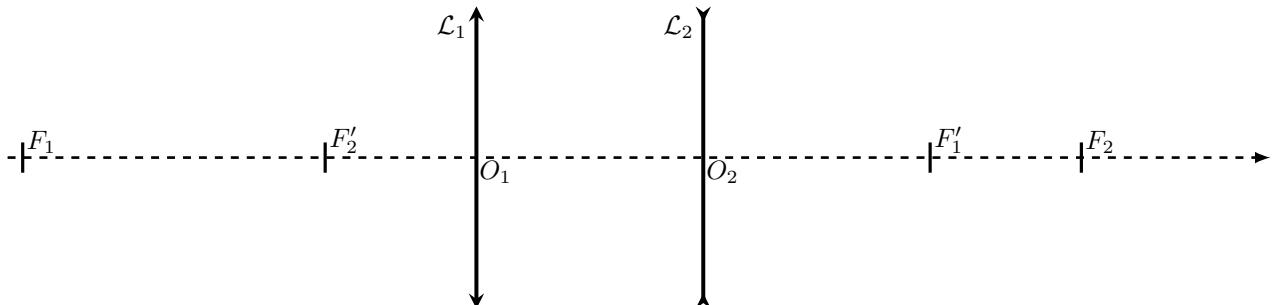
Dans une salle de cinéma, chaque photo de taille $AB = 35\text{ mm}$ est projetée sur un écran situé à une distance $L = 28\text{ m}$ de l'objet.

On choisit de projeter avec une lentille convergente de focale $f' = 7\text{ cm}$

1. Calculez la distance à mettre entre l'objet et la lentille ; on prendra la plus petite des deux solutions.
Remarque : gardez beaucoup de chiffres significatifs en vue de la question suivante.
2. Calculez la taille de l'image sur l'écran.

Exercice O3.3 : Foyers d'un téléobjectif [***]

On considère un doublet optique formé d'une lentille convergente de focale $f'_1 = 6\text{ cm}$ et d'une lentille divergente de focale $f'_2 = -5\text{ cm}$ placée 3 cm après la première.

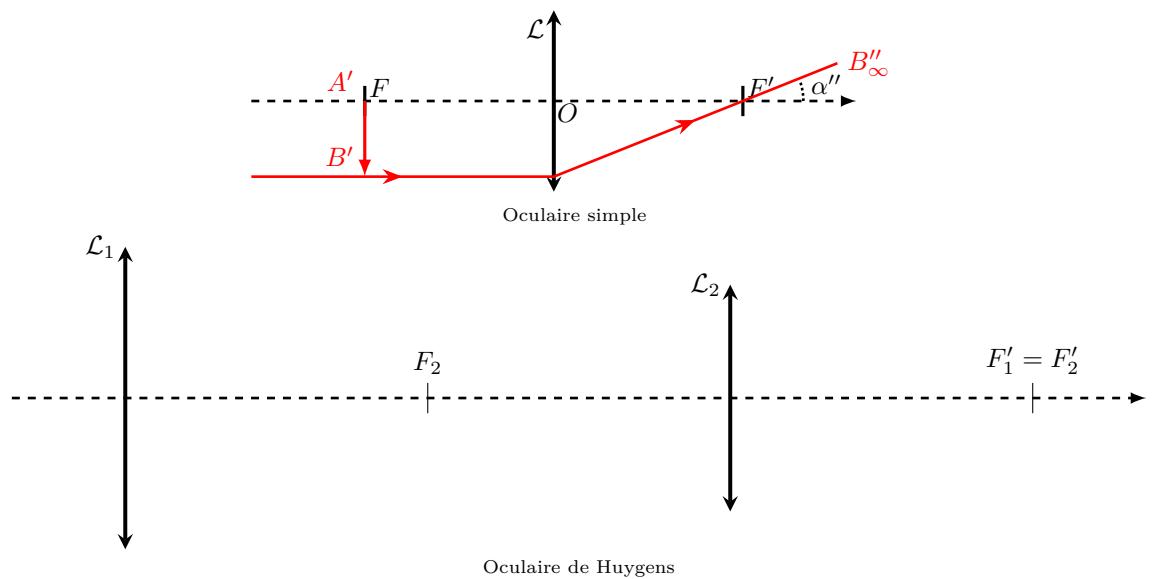


1. On prend en photo un objet $AB = 8\text{ m}$ situé à une distance $AO_1 = 160\text{ m}$ avant la lentille ; calculez la position et la taille de l'image.
2. Déterminez, par le calcul puis par le dessin, la position du foyer image de ce doublet.
3. Déterminez, par le calcul puis par le dessin, la position du foyer objet de ce doublet.

Exercice O3.4 : Oculaire de Huygens [**]

Le but d'un oculaire est de donner de l'image intermédiaire d'un système optique, tel qu'un microscope ou un télescope, une image finale à l'infini. Dans tout cet exercice, $A'B'$ désignera l'image intermédiaire formée par l'objectif ; ce sera l'objet de l'oculaire.

Un oculaire classique est constitué d'une seule lentille convergente de focale f'_s . On place $A'B'$ au foyer objet, et l'image finale est à l'infini.



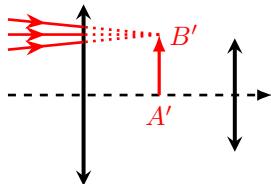
L'oculaire de Huygens est composé simplement de deux lentilles convergentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 placées comme sur la figure : la première a pour focale $3f'$, la seconde f' , et la distance entre les deux vaut $2f'$. On notera D le diamètre de \mathcal{L}_1 .

1. Déterminez par le dessin et par le calcul la position du foyer image F' de ce système.
2. Déterminez par le dessin et par le calcul la position du foyer objet F de ce système.

3. [***] L'oculaire de Huygens est utilisé dans des lunettes astronomiques et les télescopes, dans des conditions telles que les rayons qui convergent sur $A'B'$ (objet de la lentille \mathcal{L}_1 , placé dans le plan focal objet) font tous un angle très faible avec l'axe optique.

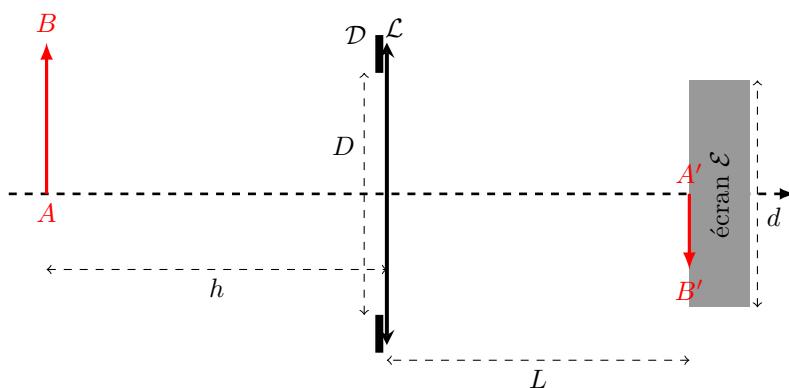
L'image de l'objet $A'B'$ est vue à travers l'oculaire à l'infini, et avec un angle apparent (α'' sur le premier schéma) qui dépend de $A'B'$ et des caractéristiques des lentilles. On assimilera les angles à leur tangente.

Exprimez cet angle pour l'oculaire simple (en fonction de $A'B'$ et f'_s), puis pour l'oculaire de Huygens (en fonction de $A'B'$ et f') et déduisez-en comment choisir f' pour que l'oculaire de Huygens donne le même grossissement qu'un oculaire simple de focale f'_s .



Exercice O3.5 : L'appareil photo [***]

Le principe d'un appareil photographique est représenté sur la figure ci-dessous.



Une lentille \mathcal{L} appelée *objectif*, de focale $f' > 0$, donne d'un objet réel placé à une distance h une image réelle. Un écran \mathcal{E} sert à projeter cette image ; c'est sur cet écran qu'on met le capteur, à savoir la pellicule photo ou la matrice CCD. Au niveau de la lentille se trouve un cache avec une ouverture circulaire \mathcal{D} appelé *diaphragme*. On supposera que le diaphragme est quasiment collé à l'objectif.

On note L la distance objectif-écran, D le diamètre du diaphragme, et d la taille du capteur (lequel est en réalité rectangulaire, mais ça ne change pas grand chose). La distance h dépend de l'objet ; L et D sont réglables par l'utilisateur.

Pour les AN : $f' = 50 \text{ mm}$ et $d = 24 \text{ mm}$.

1. Mise au point

La mise au point consiste à changer la distance L pour que l'image se forme bien sur l'écran. Exprimez la distance L à mettre pour voir net un objet situé à h .

AN pour $h = 5 \text{ m}$ et $h = \infty$.

2. Largeur de champ de l'image

Exprimez le grandissement. AN pour $h = 5 \text{ m}$.

Déduisez-en la largeur de champ à 5 m , c'est-à-dire la taille du plus gros objet situé à 5 m dont on peut voir l'image entière sur le capteur.

3. Profondeur de champ

Le premier calcul montre que L est très proche pour $h = \infty$ ou $h = 5 \text{ m}$. Si l'appareil est mis au point sur l'infini, un objet ponctuel situé à 5 m aura son image après l'écran : il apparaîtra donc comme une tache floue.

(a) Faites un schéma d'un appareil mis au point sur l'infini, placez un objet A à distance finie sur l'axe, et tracez le rayon issu de A et qui frappe la lentille en son bord supérieur (point C). Tracez, par la construction géométrique, le rayon émergent ; on notera E le point où ce rayon frappe l'écran. Tracez aussi la même chose symétrique en-dessous de l'axe.

(b) On cherche à exprimer la taille a de la tache lumineuse sur l'écran. À l'aide du théorème de Thalès appliqué aux triangles AOC et $OF'E$, exprimez a en fonction de h , D et f' .

(c) Le capteur est formé de petits détecteurs de taille b . Si la tache est plus petite qu'un détecteur, l'image restera nette ; si elle s'étale sur plusieurs détecteurs, elle apparaîtra floue.

Déduisez-en la condition sur h pour que l'image soit nette (en fonction de b , f' et D).

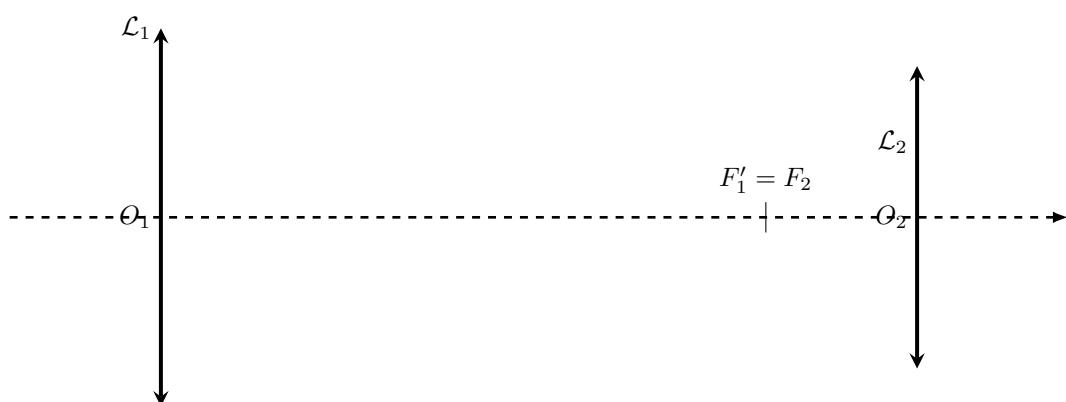
AN pour $b = 10 \mu\text{m}$ et $D = 10 \text{ mm}$.

(d) On appelle *profondeur de champ* la plage de valeurs de h pour lesquelles l'image reste nette, la mise au point étant faite sur l'infini.

Comment modifier D pour avoir une grande profondeur de champ ? Quelle inconvénient cela amène-t-il ?

Exercice O3.6 : La lunette astronomique [**]

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes, l'une notée \mathcal{L}_1 et appelée *objectif*, de focale $f'_1 = 50 \text{ cm}$, et l'autre notée \mathcal{L}_2 et appelée *oculaire*, de focale $f'_2 = 2 \text{ cm}$. Le plan focal image de \mathcal{L}_1 est confondu avec le plan focal objet de \mathcal{L}_2 .



La lunette est utilisée dans les conditions de Gauss. Les angles sont orientés.

1. Soit A un objet à l'infini sur l'axe. Où se trouve son image A'' par la lunette ?

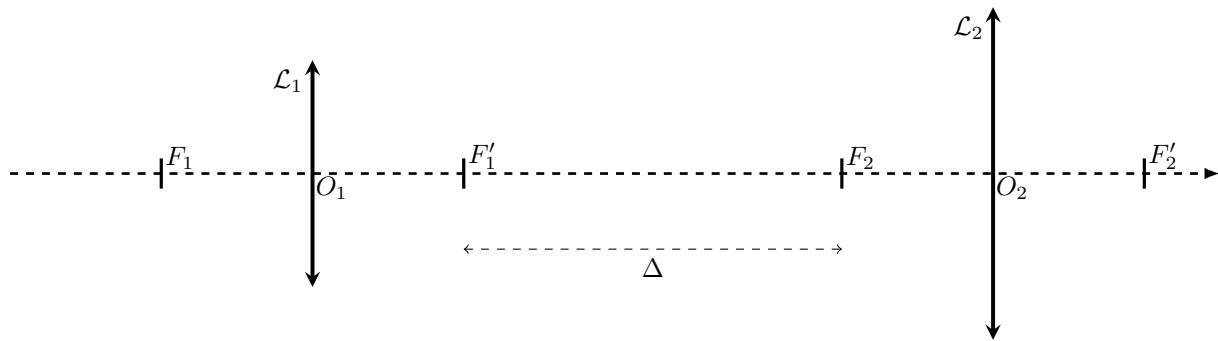
Un tel système optique est dit *afocal*.

2. Représentez le trajet des rayons émergents associés à un faisceau incident parallèle à l'axe optique.

3. Représentez le trajet des rayons émergents associés à un faisceau incident parallèle qui fait un angle orienté α avec l'axe optique. On notera B_1 le point d'intersection de ce rayon avec le plan focal image de \mathcal{L}_1 et α' l'angle que fait le rayon émergent de \mathcal{L}_2 avec l'axe optique.
4. Déterminez le grossissement (angulaire) : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ en fonction de f'_1 et f'_2 . Faire l'AN.
5. La lunette est en fait mal réglée : $\overline{F'_1 F_2} = -1$ mm. Calculez la position de l'image finale A'' . L'œil collé à l'oculaire la voit-elle nette ?
6. Écrivez un programme en Python qui trace $\overline{O_2 A''}$ en fonction de $\overline{F'_1 F_2}$ variant entre -5 mm et $+5$ mm. Commentez.

Exercice O3.7 : Le microscope [***]

Le principe d'un microscope est représenté sur la figure ci-dessous.



Deux lentilles convergentes \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , appelées *objectif* et *oculaire*, sont alignées ; on appelle *intervalle optique* la distance Δ qui sépare les foyers F'_1 et F_2 .

Un objet AB situé avant le foyer F_1 donne par \mathcal{L}_1 une image intermédiaire $A'B'$; \mathcal{L}_2 donne alors de $A'B'$ une image $A''B''$ située à l'infini lorsque le microscope est bien réglé.

Pour les AN : $\Delta = 16$ cm.

1. Où doit se trouver $A'B'$ pour que $A''B''$ soit à l'infini ?
Placez alors $A'B'$ dans ce plan, puis déduisez-en l'objet AB qui donne une telle image par \mathcal{L}_1 .
Tracez le **trajet complet** à travers le microscope de deux rayons issus de B .
2. Sur l'objectif, on peut lire : grossissement $60\times$. Il s'agit de l'opposé du grossissement γ de cette lentille lorsque l'intervalle optique vaut la valeur standard $\Delta = 16$ cm et que le microscope est bien réglé.
Calculez f'_1 à l'aide d'une formule de Newton.
Déduisez-en $\overline{F_1 A}$.
3. Sur l'oculaire, on peut lire ; grossissement $8\times$. Il s'agit du *grossissement commercial* G_o de cet oculaire, qui est défini comme le rapport entre :
 - l'angle α_a sous lequel on voit l'image $A''B''$ lorsque le microscope est bien réglé, et
 - l'angle α_s sous lequel on verrait $A'B'$ à l'œil nu à une distance égale à $\delta = 25$ cm.

On suppose dans tous ces calculs qu'on est dans les conditions de Gauss.

Montrez que $G_o = \frac{\delta}{f'_2}$. Déduisez-en f'_2 .

4. Montrez que le grossissement commercial du microscope complet (défini comme précédemment) est donné par $G_m = \gamma G_o$. AN pour G_m .
5. *Cercle oculaire*
Montrez par un raisonnement que tous les rayons lumineux qui passent par \mathcal{L}_1 puis \mathcal{L}_2 passent ensuite par l'image de \mathcal{L}_1 par \mathcal{L}_2 . Cette image est appelée *cercle oculaire* ; c'est l'endroit où il faut placer son œil pour optimiser la luminosité et le champ de vision.
6. *Latitude de mise au point*
L'œil peut voir net l'image $A''B''$ si elle est située entre l'infini et une distance de 25 cm environ. Calculez la plage de positions de l'objet AB pour lesquelles l'œil (placé en F'_2) peut voir nette l'image $A''B''$. Que peut-on en conclure sur la mise au point du microscope ?

Exercice O3.8 : Lunette de Galilée

Une lunette de Galilée est un système optique constitué d'une lentille convergente L_1 (l'objectif) suivie d'une lentille divergente L_2 (l'oculaire), de focales respectives f'_1 et f'_2 , placées de manière à ce que le foyer image de L_1 soit confondu avec le foyer objet de L_2 .

- Dessinez le système à l'échelle 1/2 avec $f'_1 = 16\text{ cm}$ et $f'_2 = -4\text{ cm}$.

Faites arriver un faisceau incident parallèle à l'axe (source A à l'infini sur l'axe), et tracez son trajet jusqu'à la sortie. Comment peut-on qualifier ce système ?

- Faites arriver un faisceau incident parallèle légèrement incliné par rapport à l'axe optique (source B à l'infini hors de l'axe). Tracez son trajet jusqu'à la sortie.

- On note α l'angle entre les faisceaux issus de A et de B ; on note α'' l'angle en sortie entre les faisceaux allant vers A'' et B'' . On se place dans les conditions de Gauss.

Par de la trigonométrie, reliez α et α'' à $A'B'$, f'_1 et f'_2 . Déduisez-en l'expression du grossissement $G = \frac{\alpha''}{\alpha}$. Faites l'AN. Précisez son signe.

- L'intérêt de la lunette de Galilée est que l'image est droite. On peut donc s'en servir pour une observation terrestre.

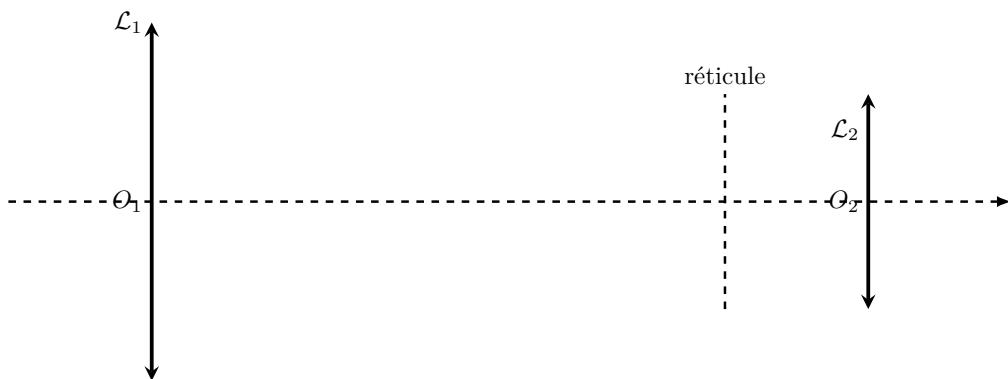
Supposons que l'objet A soit maintenant situé à 20 m de l'objectif. Calculez la position de l'image intermédiaire A' puis de l'image finale A'' .

Indication : gardez bien tous les chiffres indiqués par la calculatrice pour la position de A' .

L'œil de l'observateur est placé 0,5 cm après l'oculaire. Peut-il voir cette image A'' nette ?

Exercice O3.9 : Lunette et viseur à frontale fixe (d'après ICARE 1997 et ESIM 2000) [***]

On étudie un viseur à frontale fixe. Il s'agit d'un système optique permettant de pointer un objet, c'est-à-dire de déterminer sa position par rapport au viseur. Ce système est dérivé d'une lunette qui est étudiée dans la partie 1.



1. Caractéristiques de la lunette

Une lunette est constituée d'un objectif, d'un réticule (croix servant d'objet pour les réglages), et d'un oculaire, dans cet ordre. On admettra, pour simplifier, que l'objectif et l'oculaire sont des lentilles minces de centres respectifs O_1 et O_2 et de focales respectives f'_1 et f'_2 . L'axe optique est orienté de l'objectif vers l'oculaire.

- L'utilisateur veut observer sans effort le réticule à travers l'oculaire ; pour cela, il faut que son image soit à l'infini. Quelle est alors la position du plan du réticule par rapport à l'oculaire ?
- Le réglage de la lunette doit permettre l'observation sans fatigue de l'image d'un objet situé à grande distance (infini) à travers le système {objectif+oculaire} ; pour cela, il faut que l'image soit à l'infini. Quelle est la distance $\overline{O_1O_2}$ dans ce cas ? Comment qualifie-t-on le système ainsi réalisé ?
- Représentez sur un schéma, *sans respecter les échelles*, le devenir d'un faisceau parallèle incident faisant un angle α avec l'axe optique, et émergeant sous un angle α' .

Etablissez l'expression du grossissement G de la lunette dans les conditions de Gauss, défini par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

A.N. : calculez $\overline{O_1O_2}$ et G pour $f'_1 = 8,0\text{ cm}$ et $f'_2 = 3,0\text{ cm}$.

- (d) Lorsqu'on observe une étoile à l'œil, elle paraît ponctuelle ; à l'aide de la lunette, l'image paraît encore ponctuelle. Quel est alors l'intérêt de la lunette ?
- (e) *Limite de résolution* : le pouvoir séparateur est l'angle minimal que doivent avoir deux faisceaux parallèles entrant dans l'objectif pour qu'on puisse les distinguer en sortie. On admet qu'il est donné théoriquement par $\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$, où λ est la longueur d'onde et D le diamètre de l'objectif.
- Quel est le phénomène responsable de cette limite ?
 - Quelles sont les autres causes de limitation du pouvoir séparateur réel ?
- (f) *Cercle oculaire* : on appelle cercle oculaire l'image de l'objectif (supposé de forme circulaire) par l'oculaire.
- Justifiez soigneusement que tout rayon qui entre par l'objectif et qui passe par l'oculaire passe ensuite par le cercle oculaire.
 - Etablissez la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif, et le grossissement G (conseil : utilisez l'expression du grandissement par les relations de Newton).
 - Exprimez et calculez la position du centre C du cercle oculaire par rapport au foyer image de l'oculaire.
2. **Transformation en viseur à frontale fixe par déplacement de l'objectif**
- Le but d'un viseur est de viser des objets à distance finie, c'est-à-dire de donner d'un objet à une distance finie de l'objectif, une image à l'infini en sortie de l'oculaire. On gardera les mêmes distances focales qu'à la question 1c.
- Pour cela, on éloigne l'objectif de l'oculaire, de telle sorte qu'un objet situé à une distance $H > 0$ en avant de l'objectif, donne à travers le viseur une image que l'observateur observe sans effort.
- Exprimer la nouvelle distance $\Delta = \overline{O_1 O_2}$ en fonction de H .
A.N. : $H = 24\text{cm}$
 - Latitude de mise au point* : on admet que l'observateur peut voir nettes des images situées entre l'infini et $d_m = 25\text{ cm}$. Les positions respectives des lentilles ne sont pas modifiées (Δ garde la valeur précédente).
L'œil est placé au foyer image de l'oculaire. Quelles sont les positions extrêmes de l'objet réel A pour lesquelles l'observateur voit nette l'image donnée par le viseur ? En déduire la taille de la plage de positions de l'objet pour lesquelles on voit net.
Ne pas chercher pas une expression littérale complète, mais des valeurs numériques.

Systèmes de lentilles

TDs numériques

réponses page 134

TD numérique : Doublet achromatique

Dans ce TD, on considérera comment la combinaison de deux lentilles bien choisies permet de diminuer considérablement l'aberration chromatique.

1. Aberration chromatique d'une lentille simple

- (a) On admet que la distance focale d'une lentille varie proportionnellement à $\frac{1}{n-1}$ où n est l'indice du verre qui la compose. Si on prend une référence à la longueur d'onde $\lambda_D = 589 \text{ nm}$, et si on note f'_D la distance focale à cette longueur d'onde, alors la distance focale f' à la longueur d'onde λ vaut

$$f'(\lambda) = f'_D \frac{n(\lambda_D) - 1}{n(\lambda) - 1} \quad (\text{O3.2})$$

Écrivez une fonction `fprime(fpD, nD, n)` qui calcule cette distance focale, où `n` représente $n(\lambda)$ et `nD` représente $n(\lambda_D)$.

- (b) L'indice d'un verre est donné par la relation de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (\text{O3.3})$$

avec λ en nm et A et B deux constantes qui dépendent du type de verre. Pour un verre Crown, $A = 1,46$ et $B = 5200 \text{ nm}^{-2}$; pour un verre Flint, $A = 1,62$ et $B = 18000 \text{ nm}^{-2}$.

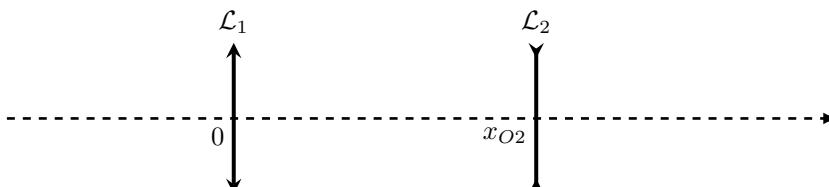
Écrivez deux fonctions `nC(lam)` et `nF(lam)` qui renvoient les indices optiques de ces deux verres à la longueur d'onde `lam` en nm.

- (c) On considère une lentille convergente de distance focale $f'_D = 11 \text{ cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown.
- Générez un tableau de longueurs d'ondes couvrant tout le visible (en nm); ne lappelez pas `lambda`, ce terme est réservé par Python; appelez-le plutôt `tab_lambda` ou `tab_1`.
 - Générez le tableau des indices du verre Crown pour ces longueurs d'onde, puis le tableau des distances focales de la lentille.
 - Tracez la distance focale en fonction de la longueur d'onde. Mesurez l'écart entre la valeur maximale et la valeur minimale; commentez.

2. Doublet achromatique

Pour diminuer l'aberration chromatique, on remplace cette lentille par un doublet constitué :

- d'une lentille convergente de focale $f'_{1D} = 6 \text{ cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown, placée en $x_{O1} = 0 \text{ cm}$
- d'une lentille divergente de focale $f'_{2D} = -12 \text{ cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Flint, placée en $x_{O2} = 0,5 \text{ cm}$



- (a) À partir du tableau des longueurs d'ondes, générez les tableaux des indices des verres Crown et Flint, et les tableaux des distances focales des deux lentilles aux longueurs d'ondes correspondantes.
- (b) Pour trouver la position du foyer image de ce doublet, on va partir d'un objet à l'infini :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2$$

Où se trouve le point A_1 ? Construisez le tableau `tab_x1` des positions correspondantes.

- (c) On sait par la loi de conjugaison de Descartes que $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{\overline{O_2A_1}}$. Si on note x_1 l'abscisse de A_1 , x_{O2} l'abscisse de la lentille et x_2 l'abscisse de l'image, alors on peut écrire que $\overline{O_2A_1} = x_1 - x_{O2}$ et $\overline{O_2A_2} = x_2 - x_{O2}$; la relation de Descartes devient alors $\frac{1}{x_2 - x_{O2}} = \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{x_1 - x_{O2}}$. Après quelques calculs (admis), on en déduit que

$$x_2 = x_{O2} + \frac{(x_1 - x_{O2}) \cdot f'_2}{x_1 - x_{O2} + f'_2} \quad (\text{O3.4})$$

Calculez alors le tableau `tab_x2` des positions de A_2 . Que représente ce point pour le doublet ?

- (d) Tracez la position de A_2 en fonction de la longueur d'onde ; commentez.

3. Oculaire de Ramsden

Avant l'invention du doublet achromatique, Ramsden avait proposé un oculaire qui réduisait légèrement l'aberration chromatique. Il peut être utilisé avec différentes valeurs de focales, mais pour cet étude on prendra la configuration suivante :

- une lentille convergente de focale $f'_{1D} = 12 \text{ cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown, placée en $y_1 = 0 \text{ cm}$
- une lentille convergente de focale $f'_{2D} = 12 \text{ cm}$ (à λ_D), taillée dans du verre Crown, placée en $y_1 = 8 \text{ cm}$

Étudiez de la même manière la position du foyer image de ce doublet.

TD numérique : Zoom

Un zoom est un assemblage lentilles dont on peut faire bouger une des lentilles, de manière à modifier la taille de l'image finale. On va, dans ce TD, étudier deux zooms simples. Comme ils contiennent plusieurs lentilles, on va utiliser Python pour calculer les positions et les dimensions des images successives. Pour cela, en repartant des lois de Descartes $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ et $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$, et en écrivant que $\overline{OA} = x_A - x_O$ et $\overline{OA'} = x_{A'} - x_O$ pour une lentille de focale f' placée en x_O donnant d'un objet à l'abscisse x_A une image à l'abscisse $x_{A'}$, alors on obtient les relations suivantes ;

$$x_{A'} = x_O + \frac{(x_A - x_O) \cdot f'}{x_A - x_O + f'} \quad (\text{O3.5})$$

$$\gamma = \frac{x_{A'} - x_O}{x_A - x_O} \quad (\text{O3.6})$$

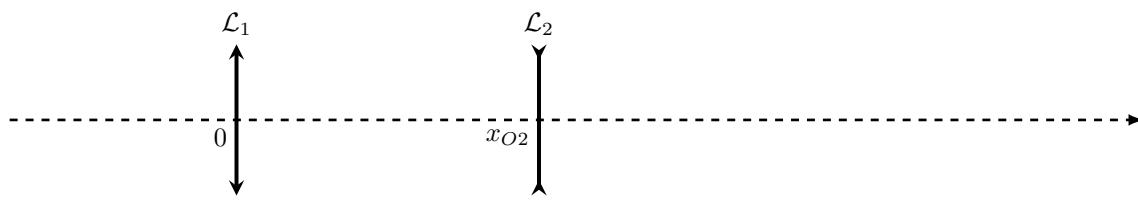
1. Préliminaires

- Définissez une fonction `xImg(xObj, xLen, fp)` qui renvoie la position de l'image en fonction de la position de l'objet et celle de la lentille, en utilisant la formule (O3.5).
- Écrivez une fonction `gamma(xObj, xLen, xImg)` qui renvoie le grossissement à l'aide de la formule (O3.6).

2. Zoom à deux lentilles

Ce zoom n'est pas utilisé tel quel, mais il montre le principe de base de tout zoom.

On considère un système de deux lentilles : la lentille 1 à l'abscisse $x_{O1} = 0 \text{ mm}$ de focale $f'_1 = 36 \text{ mm}$, et une lentille 2 à une abscisse x_{O2} variable, de focale $f'_2 = -60 \text{ mm}$.



On observe un arbre de taille $A_0B_0 = 16 \text{ m}$ situé à une distance de 400 m **avant** la lentille. Cet objet donne image par la lentille 1, puis par la lentille 2, selon le schéma :

$$A_0B_0 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1B_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_2B_2$$

- Que vaut x_{A0} ? Calculez, à l'aide des deux fonctions préliminaires, la position `xA1` et la taille `h1 = A1B1` de cette image.

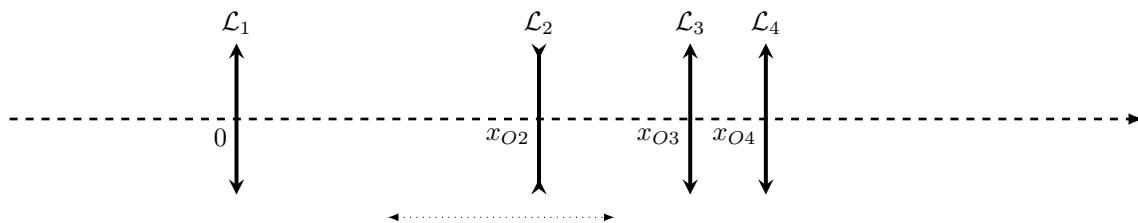
Rappel : par définition, $\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{A_0B_0}$.

- (b) Créez un tableau `tab_x02` représentant les différentes positions possibles de la lentille 2, qu'on fera varier entre 2 mm et 34 mm.
- (c) La lentille 2 donne de A_1B_1 une image A_2B_2 ; chaque position de la lentille 2 donne une image différente.
Créez deux tableaux `tab_xA2` et `tab_h2` contenant la position et la taille de l'image finale pour chaque valeur de x_{O2} .
- (d) Tracez ces deux tableaux en fonction de la position de la lentille. A-t-on bien réalisé un zoom à grandissement variable ? La mise au point est-elle faisable ?

3. Zoom à 4 lentilles

Le zoom le plus simple qui soit utilisable est constitué de 4 lentilles ; on considère ici :

- une lentille 1 en $x_{O1} = 0$ mm de focale $f'_1 = 72$ mm
- une lentille 2 en x_{O2} variant entre 4 mm et 32 mm de focale $f'_2 = -27$ mm
- une lentille 3 en $x_{O3} = 36$ mm de focale $f'_3 = 72$ mm
- une lentille 4 en $x_{O4} = 40$ mm de focale $f'_4 = 36$ mm



Reprenez la même étude, jusqu'à l'image finale de la lentille 4.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a)

Une lentille divergente peut avoir une image réelle si son objet est virtuel et situé pas trop loin ; mais si l'objet est réel, alors seule la lentille convergente peut en donner une image réelle.

Q3.(b)

Q4.(a)

Oui car $D > 4f'$.

Q5.(b)

$$f' = \left(\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \right)^{-1}$$

Q6.(b)

Réponses au QCM : Doublets de lentilles

Q7.(a)

Les lentilles sont accolées, donc $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$.

Q8.(a)

Q9.(a)

Les lentilles sont accolées.

Q10.(a)

Il est facile de voir que la distance entre les deux lentilles est égale à la somme des distances focales, de sorte que $F'_1 = F_2$.

Q11.(a)

Q12.(a)

La distance entre les deux lentilles est égale à la somme des distances focales, de sorte que $F'_1 = F_2$; et cela même si la seconde lentille est divergente. Il s'agit, non pas d'une lunette astronomique, mais d'une lunette de Galilée.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice O3.1 : Distance entre un objet réel et l'écran [**]

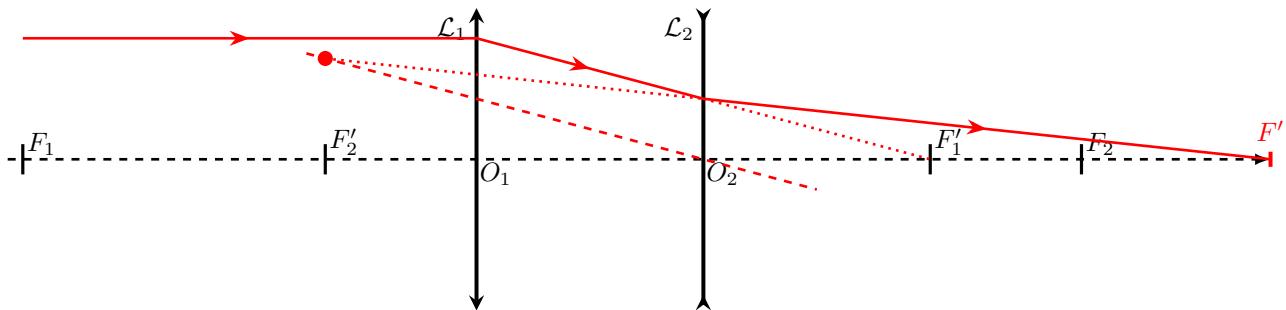
1. AB doit être situé avant le foyer objet de la lentille.
2. $\overline{AO} = 7,18 \text{ cm}$
3. L'image a pour hauteur $1,14 \text{ m}$.

Réponses de l'exercice O3.2 : Projecteur de cinéma [**]

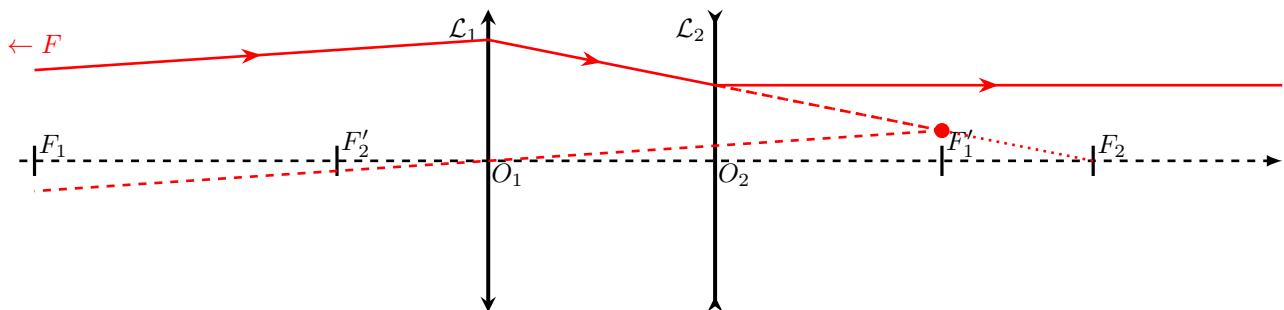
1. $7,0176 \text{ cm}$
2. $A'B' = 13,9 \text{ m}$.

Réponses de l'exercice O3.3 : Foyers d'un téléobjectif [***]

1. $\overline{O_2A''} = 7,5 \text{ cm}$ et $A''B'' = 7,5 \text{ mm}$.
2. Par définition de F' : $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} F'$. Par les relations de conjugaison : $\overline{O_2F'} = 7,5 \text{ cm}$.

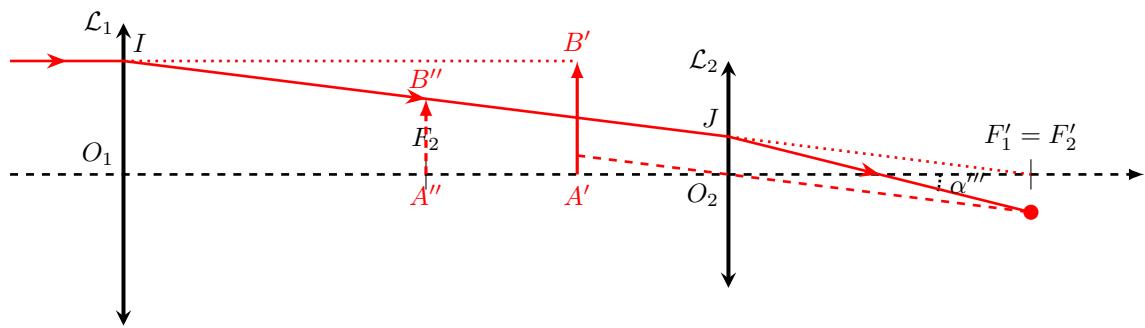


3. Par définition de F : $F \xrightarrow{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} \infty$. Par les relations de conjugaison : $\overline{O_1F} = -24 \text{ cm}$.



Réponses de l'exercice O3.4 : Oculaire de Huygens [**]

1. Par définition de F' : $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} F'$. Par les lois de conjugaison on trouve $\overline{O_2F'} = \frac{f'}{2}$.
Par le dessin, faites arriver un rayon de la gauche parallèle à l'axe.
2. Par définition de F : $F \xrightarrow{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} \infty$. Par les lois de conjugaison on trouve $\overline{O_1F} = \frac{3f'}{2}$.
Par le dessin, faites partir un rayon à droite parallèle à l'axe.
3. $\alpha'' \approx \frac{f'}{f_s}$.
Pour l'oculaire de Huygens :



$$\text{alors } \alpha''' \approx \frac{2}{3} \frac{A'B'}{f'}.$$

Donc on aura le même angle en sortie si on choisit $f' = \frac{2}{3} f_s$.

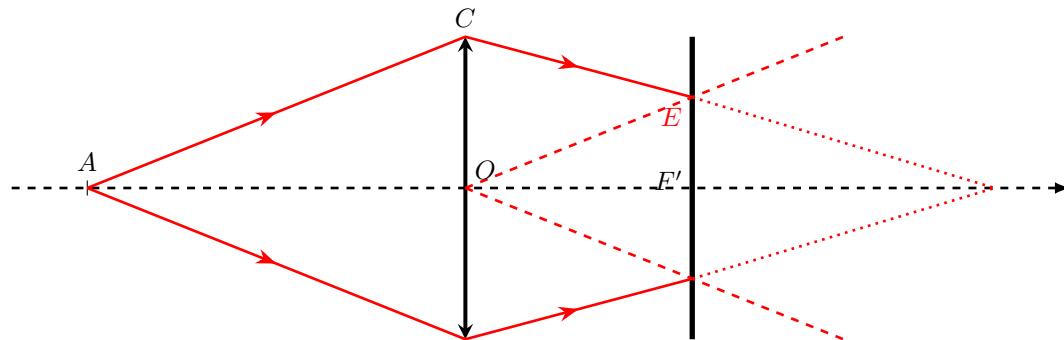
Réponses de l'exercice O3.5 : L'appareil photo [***]

1. $L = \frac{h \cdot f'}{h - f'}$. Si $h = 5 \text{ m}$ alors $L = 50,5 \text{ mm}$

2. $\frac{d}{|\gamma|} = 2,4 \text{ m}$

- 3.

(a)



- (b) $a = \frac{D \cdot f'}{h}$.

- (c) $h > \frac{D \cdot f'}{b} = 50 \text{ m}$.

- (d) Il faut diminuer D .

Réponses de l'exercice O3.6 : La lunette astronomique [**]

1. $\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} F'_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} \infty$.

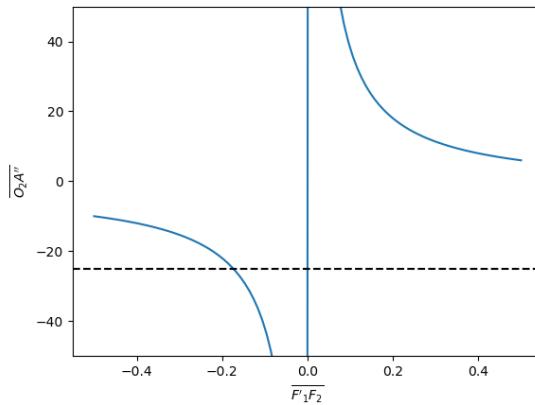
2. Tracé vu en cours, à savoir absolument refaire.

3. Tracé vu en cours, à savoir absolument refaire.

4. Par deux relation de trigonométrie et pour de petits angles : $G = -\frac{f'_1}{f'_2} = -25$

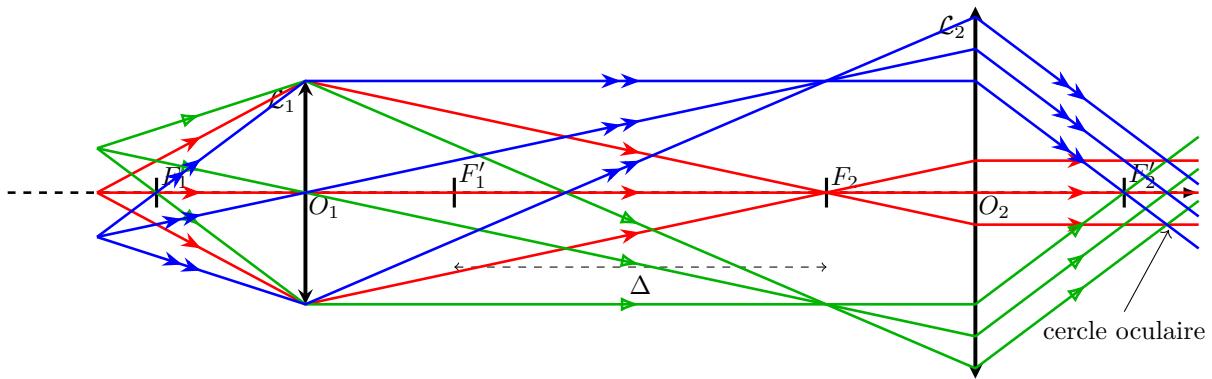
5. $\overline{O_2 A''} = -42 \text{ cm}$: l'œil la verra nette puisqu'elle est virtuelle et située à plus de 25 cm.

6. L'œil voit net si $\overline{O_2 A''} < -25 \text{ cm}$ soit $\overline{F'_1 F_2} \in [-1,7 \text{ mm}; 0 \text{ mm}]$: la précision du réglage est importante.



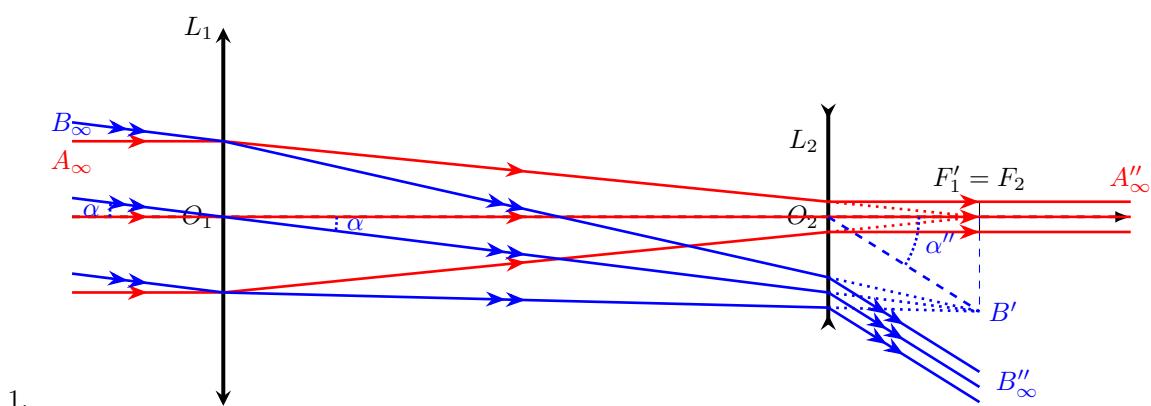
Réponses de l'exercice O3.7 : Le microscope [***]

1. Il faut placer A' sur F_2 , puis remonter les rayons pour trouver A .
2. $f'_1 = 2,67 \text{ mm}$ et $\overline{F_1 A} = -44,4 \mu\text{m}$
3. $f'_2 = 31,3 \text{ mm}$
4. $G_m = 480\times$
5. Ce n'est pas la réponse à la question, mais le schéma ci-dessous peut aider :



6. $-44,4 \mu\text{m} < \overline{F_1 A} < -43,4 \mu\text{m}$

Réponses de l'exercice O3.8 : Lunette de Galilée



- 1.
2. Cf. question précédente.
3. $\alpha \approx \frac{A'B'}{f'_1}$ et $\alpha'' \approx \frac{A''B'}{|f''_2|}$ donc $G = \frac{f'_1}{|f''_2|}$; pour le signe, on voit que c'est bien positif, car les rayons incidents se dirigeant vers le bas émergent en se dirigeant encore vers le bas.
4. $\overline{F'_2 A''} = -1,24 \text{ m}$: l'œil de l'observateur voit A'' nette (car située à plus de 25 cm)

Réponses de l'exercice [O3.9](#) : Lunette et viseur à frontale fixe (d'après ICARE 1997 et ESIM 2000) [***]

1. Caractéristiques de la lunette

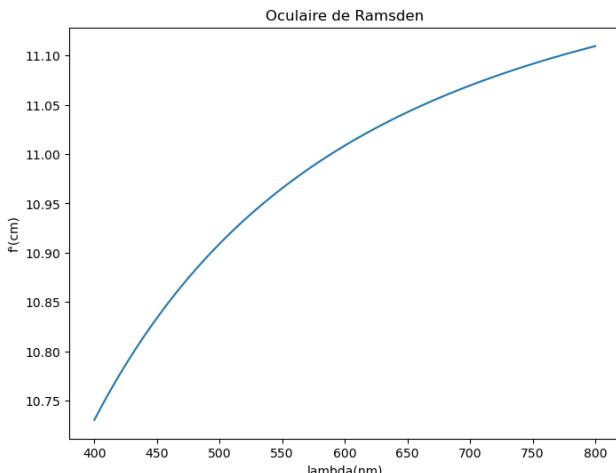
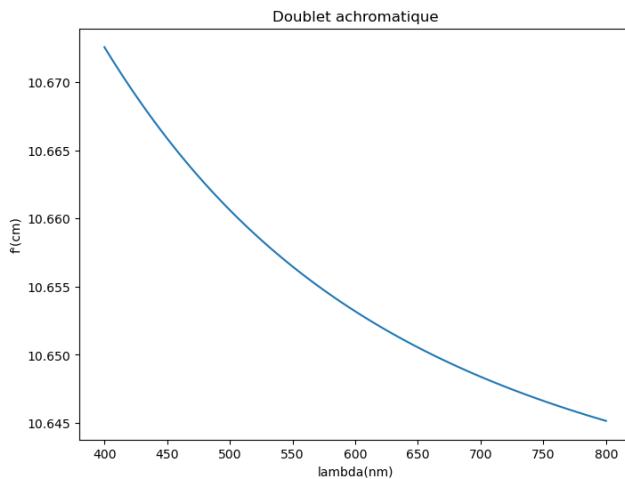
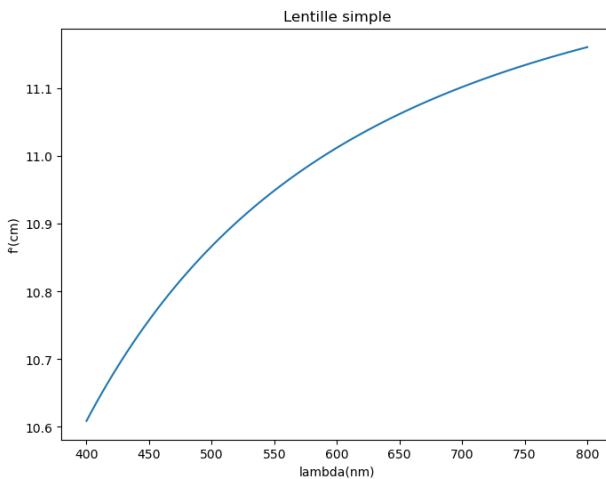
- (a) Le réticule doit être dans le plan focal objet de l'oculaire.
- (b) $\overline{O_1 O_2} = f'_1 + f'_2$: système afocal.
- (c) Schéma vu en cours. $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -2,7$
- (d) Séparer des étoiles doubles, ou observer des planètes.
- (e)
 - i. La diffraction
 - ii. Aberrations des lentilles, turbulence atmosphérique.
- (f)
 - i. Il faut partir du fait que tout rayon entrant dans la lunette passe par un point de l'objectif.
 - ii. $d = \frac{D}{|G|}$
 - iii. $\overline{F'_2 C} = \frac{(f'_2)^2}{f'_1} = 1,1 \text{ cm}$

2. Transformation en viseur par déplacement de l'objectif

- (a) $\Delta = f'_2 + \frac{H f'_1}{H - f'_1} = 15,0 \text{ cm}$
- (b) $22,7 \text{ cm} < \overline{AO_1} < 24 \text{ cm}$

Réponses aux TDs numériques

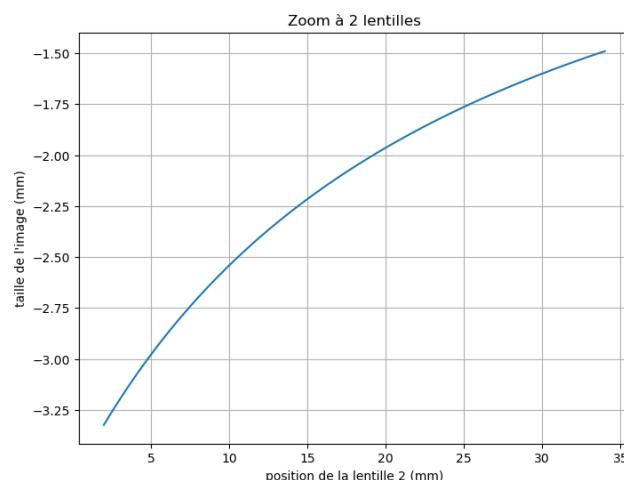
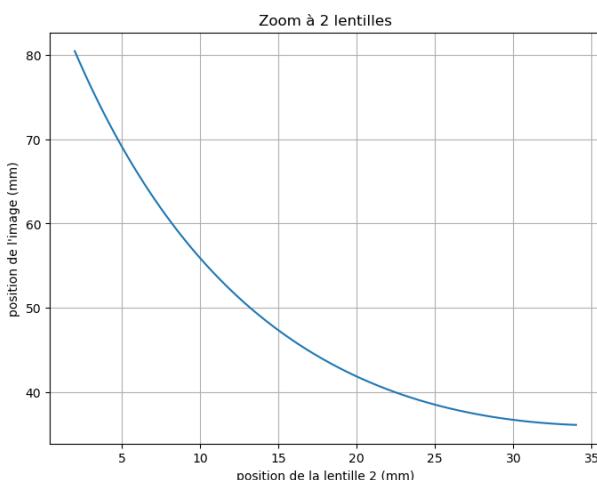
Réponses au TD d'info : Doublet achromatique



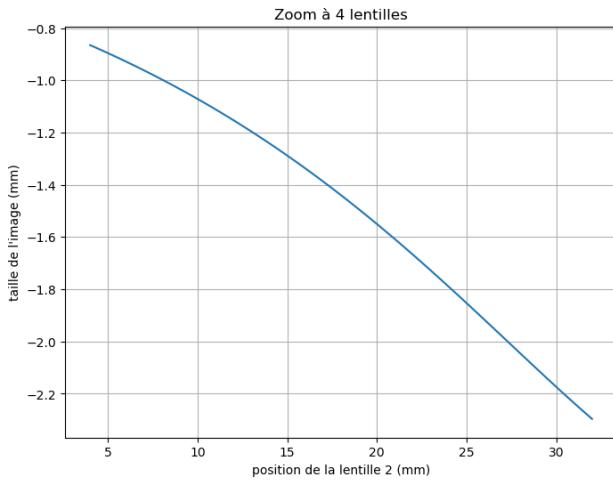
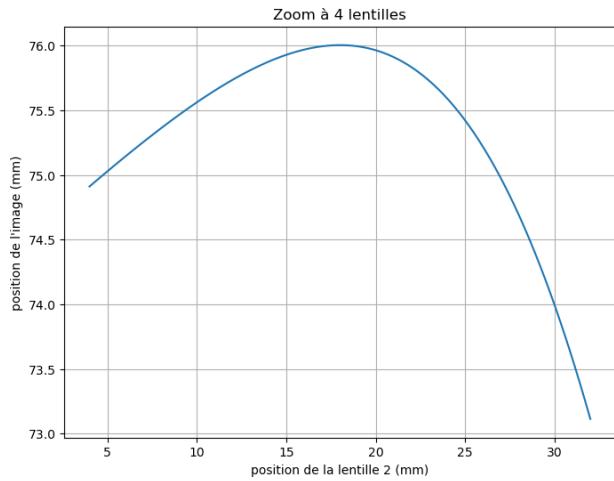
On voit que ces 3 systèmes ont à peu près la même distance focale à 589 nm ($f'_D = 11 \text{ cm}$), mais l'écart de distances focales sur la plage du visible vaut :

- 5,5 mm pour la lentille simple
- 0,27 mm pour le doublet achromatique
- 3,8 mm pour l'oculaire de Ramsden

Réponses au TD d'info : Zoom



On a bien un dispositif qui fait varier la taille de l'image, mais la variation de positions de l'image (plus de 40 mm) rend la mise au point difficile.



Ce dispositif permet de faire varier la taille de l'image pour une amplitude de mise au point beaucoup plus faible (environ 3 mm).

Propagation des ondes

Cours

L'optique géométrique, en traitant la lumière comme des rayons lumineux, laisse de côté certains phénomènes caractéristiques de la nature ondulatoire de la lumière. Dans ce chapitre, nous allons effleurer certaines de ces caractéristiques, qui se généralisent à d'autres types d'ondes.

O4.A. Ondes progressives

A.1. Exemples d'ondes

Une onde est un signal dépendant du temps qui se propage dans l'espace. Il en existe de différents types.

Au chapitre précédent, nous avons vu la lumière, qui est en réalité une *onde électromagnétique* : deux signaux, le champ électrique et le champ magnétique, avancent ensemble. Le champ électrique est responsable de la mise en mouvement de particules chargées, c'est pour cela qu'on verra plus tard que ce sont aussi ces ondes électromagnétiques qui se propagent dans les fils des circuits électriques.

Mais nos sens sont aussi sensibles aux *ondes sonores*, autrement dit au son : il s'agit d'une onde de surpression, c'est-à-dire qu'une zone de pression plus forte se déplace dans l'air. De telles ondes se propagent aussi dans les liquides et les solides, mais dans ce dernier cas, il existe d'autres types d'ondes mécaniques (figure O4.1), qui se manifestent en particulier lors des tremblements de terre, lorsque les ondes transportent l'énergie du mouvement des plaques tectoniques jusqu'au sol et secouent les constructions existantes.

(a) Ondes de compression (ou onde sonore)
dans les solides et les fluides.

(b) Ondes de cisaillement dans les solides.

FIGURE O4.1 – Exemples d'ondes mécaniques.

Ces ondes mécaniques se manifestent aussi sur d'autres systèmes, par exemple les cordes des instruments à cordes. Il existe encore d'autres ondes mécaniques, par exemple les *ondes de gravité* à la surface d'un fluide (les vagues).

A.2. Forme mathématique d'une onde progressive

Une onde est donc un signal qui dépend du temps et de la position ; on la notera $s(x, t)$ de façon générique dans la suite, en se limitant à une seule dimension x . Pour observer cette onde, il existe deux points de vue (figure O4.2) :

- soit on prend une photographie de l'onde à un instant t fixée ; on voit alors la dépendance de l'onde par rapport à la position ;
- soit on se place en un point fixe et on enregistre l'onde qui arrive en ce point ; on voit alors la dépendance de l'onde par rapport au temps.

Lorsqu'une onde se propage, il peut lui arriver différents phénomènes qui la modifient. Les ondes qu'on va étudier cette année sont les plus simples : celles qui se déplacent sans se déformer : les *ondes progressives*.

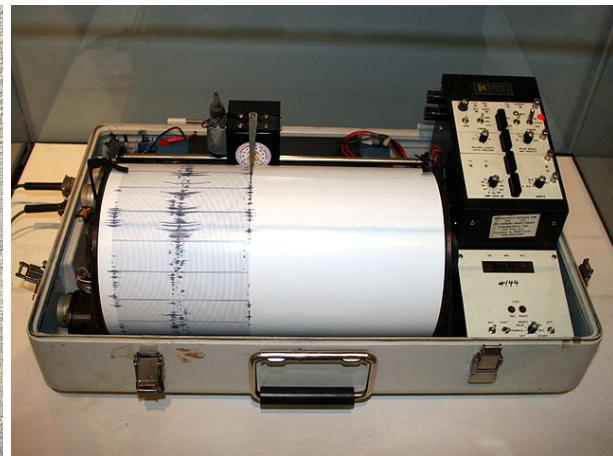
Propriété : Forme mathématique d'une onde progressive

Une onde progressive se déplaçant à la vitesse v vers les x croissants peut s'écrire sous la forme $s(x, t) = g(x - v \cdot t)$ où g est la fonction représentant le profil de l'onde.

Une onde progressive se déplaçant à la vitesse v vers les x décroissants peut s'écrire sous la forme $s(x, t) = g(x + v \cdot t)$ où g est la fonction représentant le profil de l'onde.



(a) Vagues sur l'océan. (Crédit : Wikipedia/S.Beobachtery)

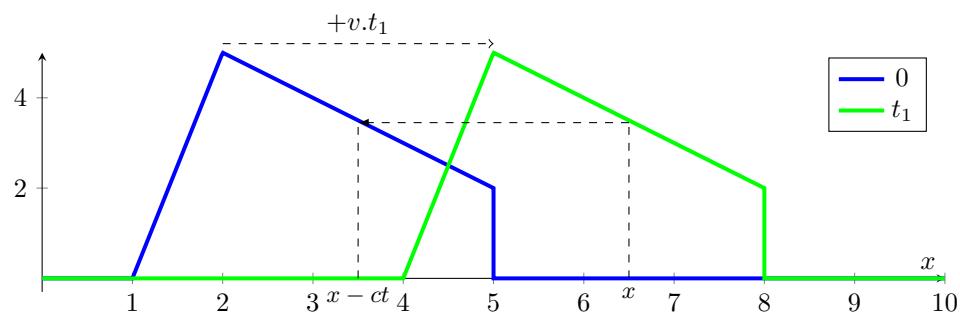


(b) Sismographe (Crédit : Wikipedia/Yamaguchi)

FIGURE O4.2 – Deux observations possibles d'une onde : à un instant fixé (à gauche) ou en un point fixé (à droite).

Démonstration

Considérons le schéma ci-dessous sur lequel on a représenté une onde de forme quelconque qui se déplace entre deux instants vers $+x$ à la vitesse v :



Prenons l'instant $t = 0$ comme référence. Si on fixe le temps à cette valeur, l'onde ne dépend plus que de la position x . Posons $g(x) = s(x, 0)$ la fonction qui décrit l'onde à $t = 0$, c'est une fonction d'une seule variable. Regardons maintenant ce qui se passe à l'instant $t_1 > 0$, l'onde s'est déplacée de $v.t_1$, donc au point d'abscisse x , à l'instant t_1 , la valeur de l'onde est la même que celle qu'elle avait à l'instant 0 à une distance ct_1 plus à gauche, c'est-à-dire à l'abscisse $x - v.t_1$; on a donc bien $s(x, t_1) = g(x - v.t_1)$.

Si l'onde se déplace dans l'autre sens, il suffit de changer v et $-v$.

Remarque : Par un simple changement de variable, on peut aussi écrire ces ondes sous la forme $g(t \pm \frac{x}{v})$.

(a) Onde progressive quelconque

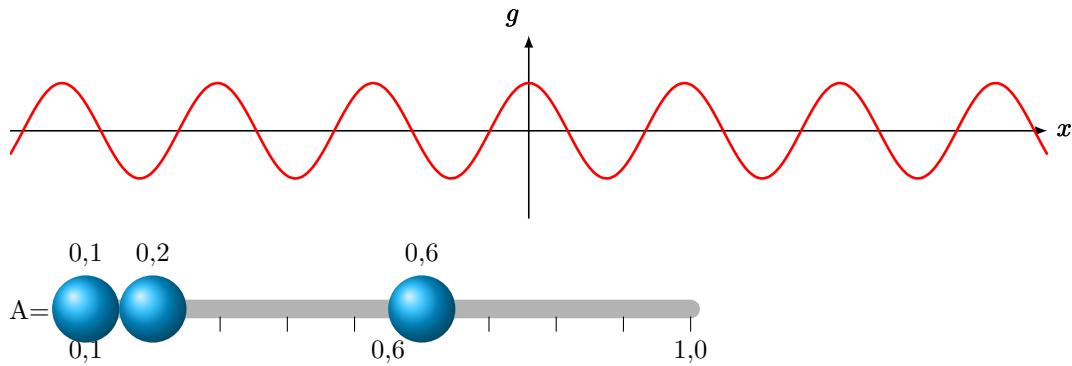
(b) Onde progressive harmonique

FIGURE O4.3 – Ondes progressives.

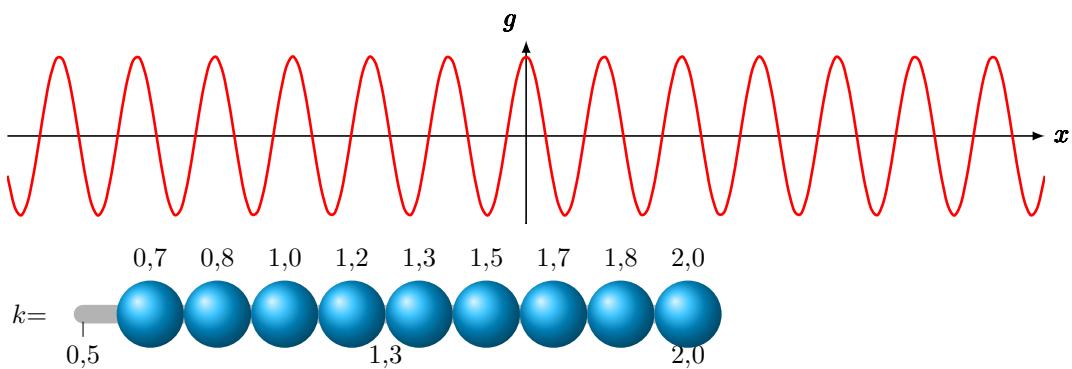
Parmi toutes les formes d'ondes progressives possibles, les ondes sinusoïdales jouent un rôle particulier.

Une fonction sinusoïdale a pour forme générale $g(x) = A \cos(k.x + \varphi_0)$ ou $g(x) = A \sin(k.x + \varphi_0)$; on a plutôt l'habitude d'utiliser des cosinus. Ce cosinus est modifié par 3 paramètres (cf. figure O4.4) :

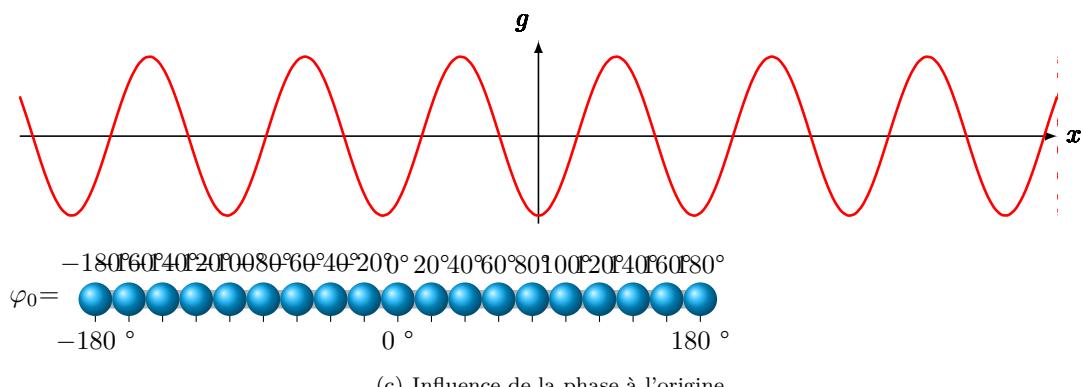
- le facteur A devant le cosinus est l'*amplitude* : la fonction oscillera entre $+A$ et $-A$
- le facteur k qui multiplie x est la *pulsation spatiale* : si $x \mapsto \cos(x)$ est 2π -périodique, alors $x \mapsto \cos(k.x)$ est $\frac{2\pi}{k}$ -périodique. La pulsation spatiale est donc reliée à la période spatiale λ par la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- le facteur φ_0 qui s'ajoute dans le cosinus est la *phase à l'origine*. Il traduit un décalage horizontal de la courbe : plus φ_0 est grand, plus la courbe est en avance (décalée à gauche).



(a) Influence de l'amplitude



(b) Influence de la pulsation



(c) Influence de la phase à l'origine

FIGURE O4.4 – Fonction sinusoïdale de la forme $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Propriété : Onde progressive harmonique (1D)

Une onde progressive harmonique (OPH) (ou sinusoïdale) est une onde progressive dont le profil est sinusoïdal. Une OPH se dirigeant vers les x croissants à la vitesse v s'écrira sous la forme $s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ où A représente son *amplitude*, ω sa *pulsation*, k sa *pulsation spatiale* et φ sa *phase à l'origine*. De même, une OPH se dirigeant vers les x décroissants à la vitesse v s'écrira sous la forme $s(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$. De plus :

- ω (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) est relié à la fréquence f et à la période T par la relation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (O4.1a)

- k (en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$) est relié à la longueur d'onde par la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (O4.1b)

- k et ω sont reliés par la relation $\omega = v.k$ donc $f = \frac{v}{\lambda}$ (O4.1c)

Démonstration

Une onde sinusoïdale correspond à une onde de profil (co)sinusoïdal, donc pour une onde progressive allant vers $+x$, elle sera de la forme $s(x, t) = A \cos(-k.(x - vt) + \varphi_0)$ (on prend ici comme convention $-k$ pour que le coefficient devant t soit positif, ce n'est qu'un choix). On a donc $s(x, t) = A \cos(-k.x + k.v.t + \varphi_0)$ ce qui correspond bien à la forme proposée avec $\omega = v.k$.

On sait que la fonction cosinus est 2π -périodique, donc :

- si x augmente de $\frac{2\pi}{k}$ alors ce qui est dans la parenthèse augmente de $-k \cdot \frac{2\pi}{k} = -2\pi$ ce qui correspond à la période du cosinus ; la période spatiale de cette onde vaut donc bien $\frac{2\pi}{k}$
- si t augmente de $\frac{2\pi}{\omega}$ alors ce qui est dans la parenthèse augmente de $\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$ ce qui correspond à la période du cosinus ; la période temporelle de cette onde vaut donc bien $\frac{2\pi}{\omega}$

On peut alors réécrire la relation $\omega = v.k$ sous la forme $2\pi f = c \frac{2\pi}{\lambda}$ donc $f = \frac{v}{\lambda}$.

Remarque : En réalité, la vitesse introduite ici (parfois appelée célérité de l'onde) est ce qu'on appellera plus tard la *vitesse de phase* par opposition à la *vitesse de groupe*.

Les fréquences des ondes ($f = \frac{\omega}{2\pi}$) varient selon les ondes considérées :

- les ondes lumineuses visibles ont des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz
- les ondes sonores audibles ont des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz
- les ondes mécaniques sont souvent lentes, quelques Hz au maximum

Les milieux les plus simples sont ceux où la vitesse v est constante ; mais ce n'est pas toujours le cas :

Définition : Milieu dispersif

On dit qu'un milieu est dispersif si la vitesse varie en fonction de la pulsation ω ou de la pulsation spatiale k . On appelle *relation de dispersion* la relation qui relie ω et k . Si elle est linéaire, le milieu est non dispersif, sinon il est dispersif.

Démonstration

On a toujours $\omega = v.k$. Si le milieu est non dispersif, alors $v = cst$ donc cette relation est linéaire.

Lorsque le milieu est non dispersif, on note souvent c la vitesse des ondes. Par exemple, le vide est un milieu non dispersif pour les ondes lumineuses, avec $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans les milieux matériels, la vitesse vaut $v = \frac{c}{n}$ et le milieu est dispersif si n dépend de la longueur d'onde, donc de k .

L'air est un milieu peu dispersif pour les ondes sonores aux fréquences audibles ; dans le domaine des ultrasons il devient plus dispersif.

Les ondes à la surface de l'eau sont très dispersives ; leur relation de dispersion s'écrit $\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma \cdot k^3}{\rho} \right) \cdot \tanh(h.k)$ avec g la pesanteur, h la hauteur d'eau, γ la tension superficielle de l'eau et ρ sa masse volumique.

On pratique, on peut montrer que la dispersion s'accompagne toujours d'un autre phénomène : l'absorption.

Enfin, on n'a pour le moment parlé que d'ondes scalaires. Pour des ondes vectorielles, il existe deux familles :

- les ondes transverses pour lesquelles le vecteur est parallèle à la direction de propagation
- les ondes transverses pour lesquelles le vecteur est perpendiculaire à la direction de propagation

A.3. Diffraction des ondes

La forme $A \cos(\omega t - kx + \varphi)$ que nous avons proposé pour une onde progressive harmonique est valable uniquement dans le cas unidimensionnel ; par exemple une onde sur une corde, un fil électrique,... En 2D ou en 3D, les choses se compliquent, car les ondes progressives harmoniques peuvent prendre diverses formes. On rencontrera notamment plus tard :

- les *ondes planes* qui se dirigent en tout point dans la même direction, comme les vagues sur la plage ;
- les *ondes circulaires* (en 2D, comme les ronds créés par un caillou à la surface de l'eau) ou *sphériques* (en 3D).

Si on considère une onde plane, elle a une certaine extension latérale, une certaine largeur. Si on cherche à limiter cette largeur, on voit apparaître le phénomène de diffraction, comme on le voit par exemple sur la figure O4.5 : une fois le trou passé, les vagues s'écartent à nouveau et occupent une largeur plus grande que le trou initial.

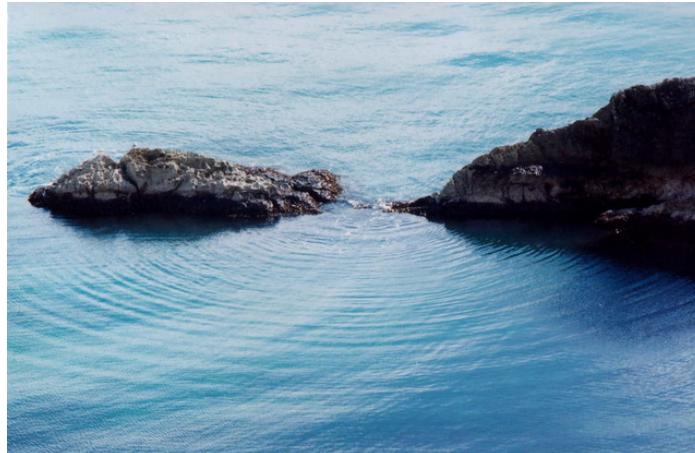


FIGURE O4.5 – Diffraction des vagues au passage d'un trou. (*Crédit : Inconnu*)

C'est Huygens qui s'est penché le premier sur ce problème, en observant les vagues dans le port d'Amsterdam. Il a alors imaginé le principe suivant :

Principe de Huygens

Si une onde traverse une ouverture, chaque point de cette ouverture émet vers l'avant une onde circulaire (ou sphérique) appelée *ondelette* qui se propage dans toutes les directions vers l'avant.

Ce principe est plus connu sous le nom de «principe de Huygens-Fresnel», car Fresnel l'a légèrement corrigé en ajoutant un terme indiquant que l'ondelette n'a pas la même intensité dans toutes les directions.

Ainsi, chaque point du trou émet une ondelette, et toutes ces ondelettes se mélangent de façon un peu compliquée pour nous pour le moment. On se contentera donc, pour cette année, d'observations expérimentales. On procède donc ainsi : on éclaire une fente de largeur a par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ ; on place un écran à une distance D derrière la fente, et on observe l'éclairage lumineux sur l'écran. On peut alors faire varier deux types de paramètres.

La figure O4.6 montre ce qu'on observe lorsque l'écran est fixe, et qu'on diminue la largeur de la fente ; on observe deux comportements différents :

- au début (a), la fente est large, et la zone éclairée sur l'écran est quasiment de largeur égale à la fente. On observe cependant, sur les bords, une ou deux alternances de franges sombres/brillantes ;
- quand on réduit la largeur de la fente (b-d), la largeur de la zone éclairée sur l'écran diminue aussi. Les franges persistent sur les bords ;
- en continuant de rétrécir, il arrive un moment où les franges de chaque côté se rejoignent (e) ; on observe alors une zone éclairée étroite avec une structuration compliquée de franges à l'intérieur ;
- si on continue à rétrécir la fente (f), la tache sur l'écran se met à grandir et prend une forme plus simple : une grande tache centrale éclairée, et des taches d'éclairage plus faibles sur les côtés ;
- à partir de là, si on rétrécit encore la fente (g-h), les taches se dilatent et sont de plus en plus larges, mais leur forme générale ne varie plus.

La figure O4.7 montre la même chose pour une fente de largeur fixée, quand on fait varier la distance de l'écran. On en déduit donc l'existence de deux régimes de diffraction :

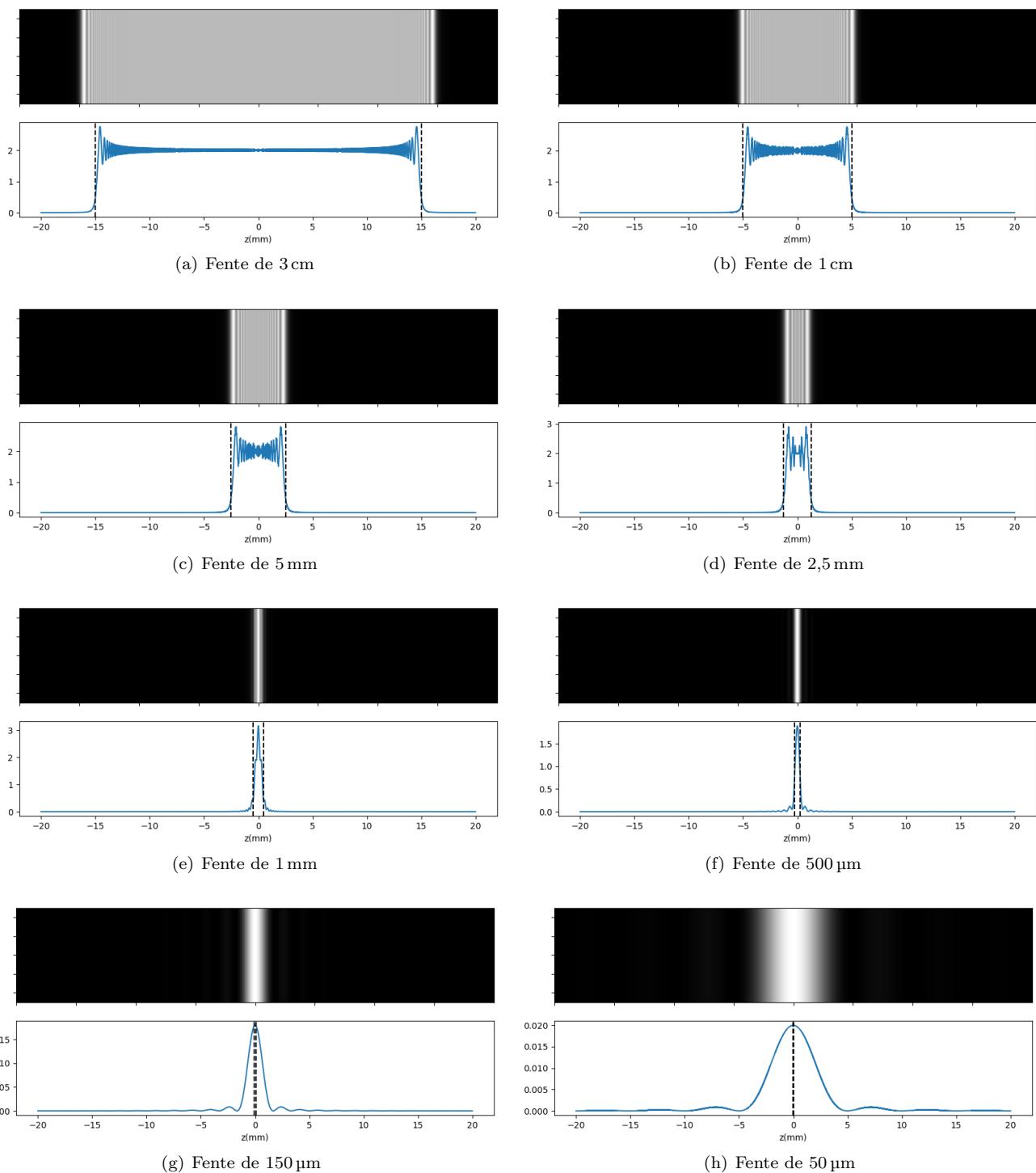


FIGURE O4.6 – Images d'une fente éclairée à $\lambda = 500 \text{ nm}$ et observée à une distance de 50 cm. Les pointillés représentent les bords de la fente.

Propriété : Diffraction de Fresnel et de Fraunhofer

Il existe deux régimes de diffraction par une fente :

- la *diffraction de Fresnel* ou *diffraction à courte distance* s'observe pour des fentes larges et/ou des écrans placés à courte distance ; dans ce régime, la largeur de la tache est à peu près égale à la largeur de la fente et ne dépend pas de la distance de l'écran ; la diffraction fait apparaître des franges sur les bords.
 - la *diffraction de Fraunhofer* ou *diffraction à l'infini* s'observe pour des fentes étroites et/ou des écrans placés à grande distance ; dans ce régime, la largeur de la tache est inversement proportionnelle à celle de la fente, et proportionnelle à la distance de l'écran ; la forme des taches ne dépend que de la forme de la fente.

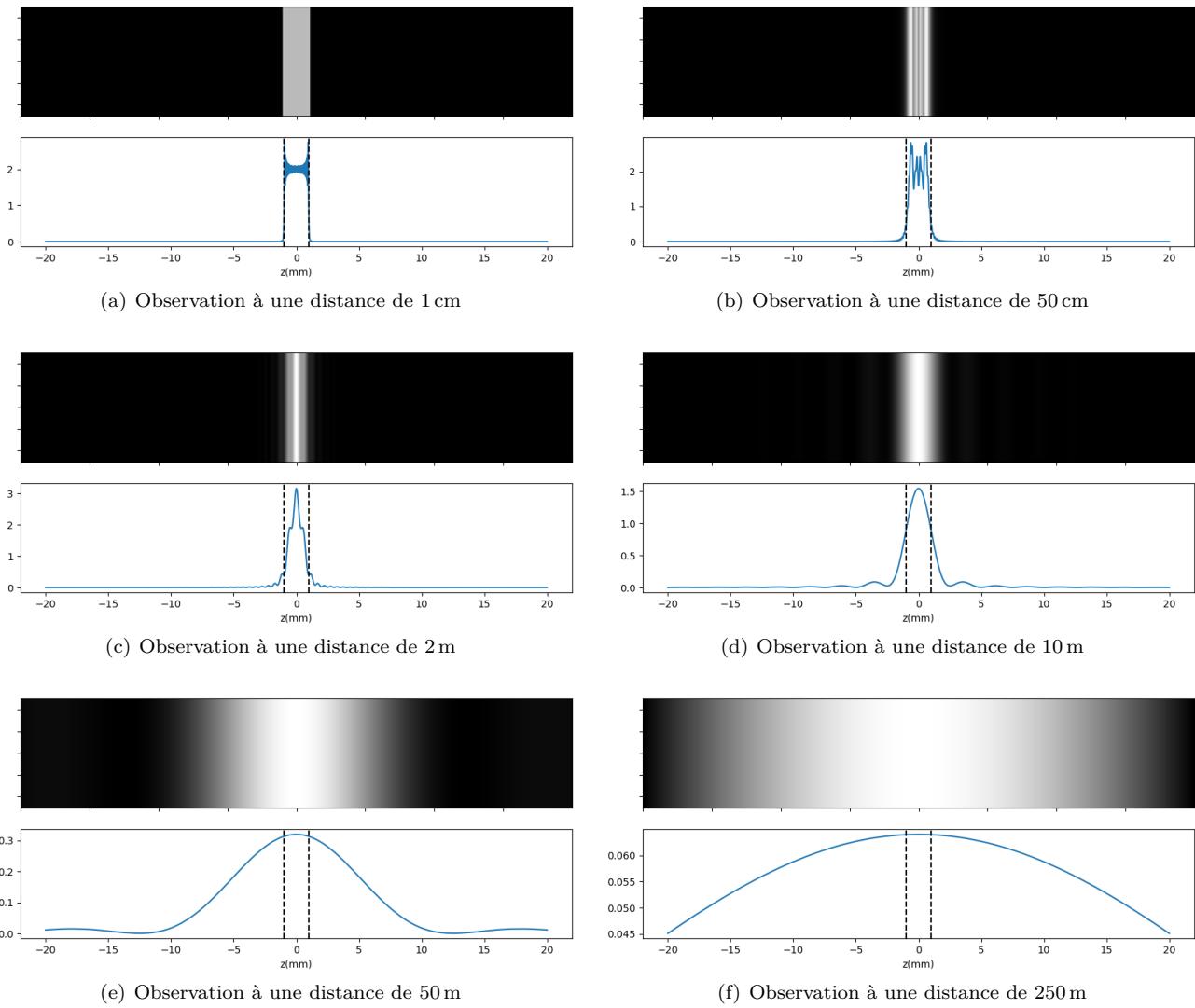


FIGURE O4.7 – Images d'une fente de 2 mm de large éclairée à $\lambda = 500 \text{ nm}$. Les pointillés représentent les bords de la fente.

Pour cette année, il n'y a aucun calcul à connaître concernant la diffraction, simplement les caractéristiques de la diffraction à l'infini (ou diffraction de Fraunhofer) :

Propriété : Diffraction à l'infini par une fente

La diffraction à l'infini par une fente de largeur a fait apparaître des annulations d'intensité aux angles θ_p tels que

$$\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a}, p \in \mathbb{Z}^* \quad (\text{O4.2a})$$

Par conséquent, on observe une tache centrale ayant pour demi-angle au sommet

$$\theta_1 = \arcsin \frac{\lambda}{a} \quad (\text{O4.2b})$$

et des taches secondaires sur les côtés de largeur égale à la moitié de la tache centrale (figure O4.8).

Remarque : Le plus souvent, $\lambda \ll a$ et alors $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$ en radians.

On peut alors donner un critère quantitatif pour savoir si on est en régime de diffraction à l'infini :

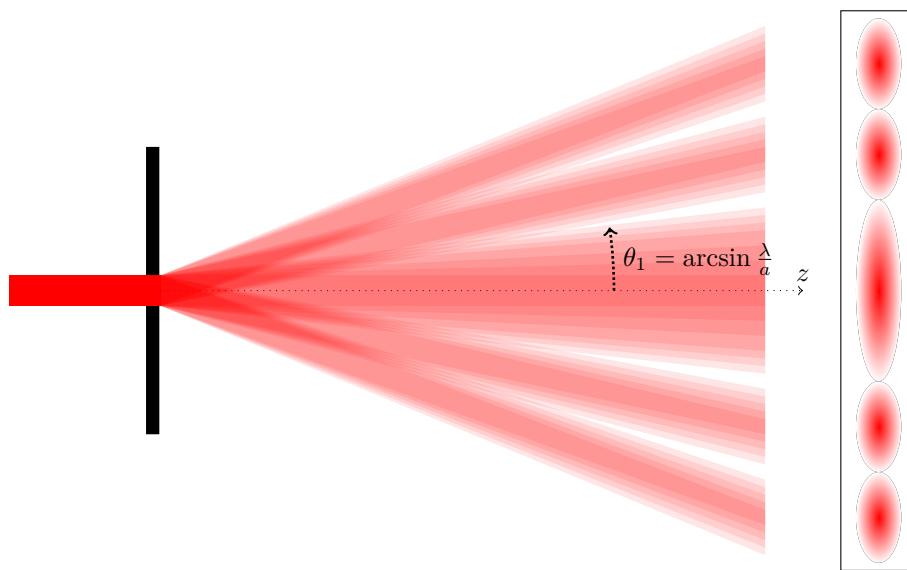


FIGURE O4.8 – Figure de diffraction par une fente à grande distance.

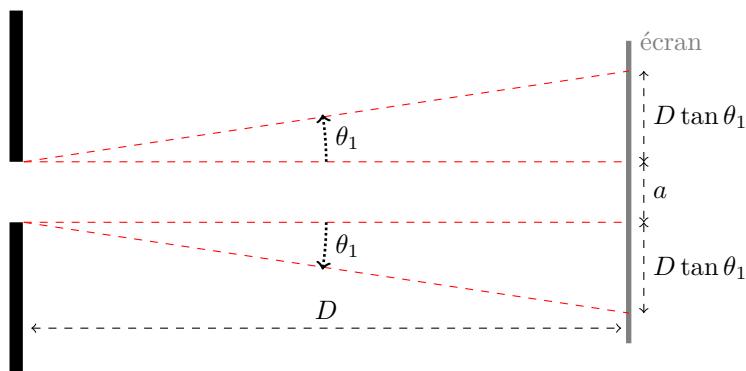
Propriété : Diffraction à l'infini

On peut considérer qu'on est dans le régime de diffraction à l'infini si on observe sur un écran situé à une distance D telle que

$$D \gg \frac{a^2}{\lambda} \quad (\text{O4.3})$$

Démonstration

La fente a pour largeur a . La diffraction fait diverger la lumière d'un angle $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$, ce qui donne au bout d'une distance D une tache de taille $a + 2D \tan \theta_1 \approx a + 2D \frac{\lambda}{a}$:

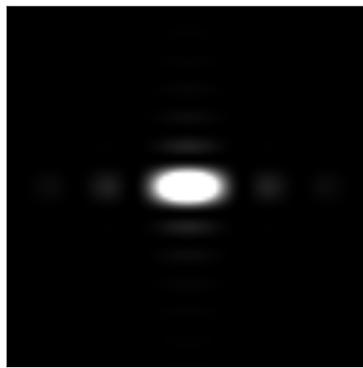


On considère qu'on est en régime de diffraction à l'infini lorsque la taille de la tache de diffraction devient grande devant la taille de la fente : $2D \frac{\lambda}{a} \gg a$ soit $D \gg \frac{a^2}{2\lambda}$; le facteur 2 peut être négligé en ordre de grandeur.

Par exemple, pour une fente de 1 mm éclairée à $\lambda = 500 \text{ nm}$, on observera la diffraction à l'infini à partir de 2 m environ.

En 2D, les calculs sont plus compliqués ; deux cas sont représentés sur la figure O4.9 :

- pour un trou rectangulaire, on observe les taches rectangulaires, la largeur de la tache dans la direction x/y étant donnée par la relation $\sin \theta = p \frac{\lambda}{a_{x,y}}$ où a_x/a_y sont les dimensions du trou ;
- pour un trou circulaire, on observe une figure avec une tache centrale circulaire et des anneaux autour, appelée *tache d'Airy*. Le rayon de la tache centrale vaut $r_1 = 1,22 \frac{\lambda}{d}$ où d est le diamètre du trou.



(a) Diffraction par un trou rectangulaire



(b) Diffraction par un trou circulaire

FIGURE O4.9 – Diffraction par un trou.

O4.B. Interférences de deux ondes

B.1. Principe de superposition des ondes

Lorsque deux faisceaux lumineux se croisent, chacun continue son chemin en ignorant l'autre. De même, les sons se croisent le plus souvent sans interagir. Par contre, quand plusieurs vagues se croisent, leurs hauteurs s'ajoutent localement et cela peut modifier les propriétés des vagues, donnant lieu par exemple à une vague qui déferle. Ainsi dans certains cas l'ajout de plusieurs ondes ne donne pas seulement la somme des deux ondes initiales, mais modifie les caractéristiques des deux ondes.

Propriété : Principe de superposition

Si deux émetteurs envoient deux ondes dans une zone *linéaire* de l'espace, les *signaux* dus à chaque onde s'ajoutent.

Dans le milieux non-linéaires, cette propriété n'est pas vérifiée, mais nous n'en étudierons pas. On peut se souvenir que les effets non-linéaires apparaissent à haute intensité : quand deux lasers très puissants se croisent dans de la matière ; ou deux ondes de choc sonores,...

B.2. Énergie d'une onde

Une onde transporte un signal ; elle transporte aussi de l'énergie. On peut définir deux grandeurs relative à cette énergie en fonction du point de vue :

- si on prend une «photo» de l'onde à un instant t , on observe une répartition d'énergie en fonction de la position. On peut alors définir une énergie par unité de longueur, ou *énergie linéique*, en $\text{J} \cdot \text{m}^{-1}$, en 1D (en 3D cela devient une *énergie volumique* en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$).
- si on se place en un point fixe et qu'on observe l'onde qui arrive, celle-ci apporte une énergie par unité de temps, c'est-à-dire une *puissance* en W , en 1D ; en 3D, la puissance est répartie sur une surface, donc on parle de *puissance surfacique* en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Propriété : Énergie d'une onde progressive

Toute onde progressive transporte de l'énergie. L'énergie linéique moyenne $\langle e \rangle$ de l'onde, et la puissance moyenne rayonnée \mathcal{P} , sont proportionnelle au signal de l'onde au carré.

Pour un système non dispersif, $\mathcal{P} = \langle e \rangle \cdot c$.

Ainsi, pour une onde sonore, l'intensité est proportionnelle à la vitesse au carré, ou encore à la surpression au carré ; pour une onde sur une corde, au déplacement transverse au carré ; pour la lumière, au champ électrique au carré ;...

Quand nous observons une vague, qui oscille lentement, nous voyons de nos yeux l'amplitude de l'onde. Par contre, pour des signaux plus rapides, comme les sons ou la lumière, nos capteurs ne sont pas assez rapides pour les fréquences

de ces ondes : ils se contentent donc d'en mesurer la moyenne. Mais le signal étant sinusoïdal, sa moyenne est nulle ; par conséquent, nos capteurs sont sensibles à la valeur moyenne de la puissance reçue.

Définition : DéTECTEUR quadratique

On appelle détecteur quadratique un détecteur qui capte la moyenne de la puissance ou de l'énergie de l'onde. Dans la suite, on considérera de façon générale qu'il mesure l'*intensité* de l'onde, proportionnelle à sa valeur efficace au carré.

Remarque : L'intensité sera parfois nommée *éclairement* dans le cas des ondes lumineuses.

Donc pour une onde $s(x, t)$, le détecteur captera $I(x, t) = K \cdot \langle s^2 \rangle$ où K est une constante.

B.3. Interférences à 2 ondes

Considérons donc un détecteur quadratique placé en un point M où deux ondes se superposent (figure O4.10) :

- une onde 1 émise par un émetteur A_1 , de pulsation ω_1
- une onde 2 émise par un émetteur A_2 , de pulsation ω_2

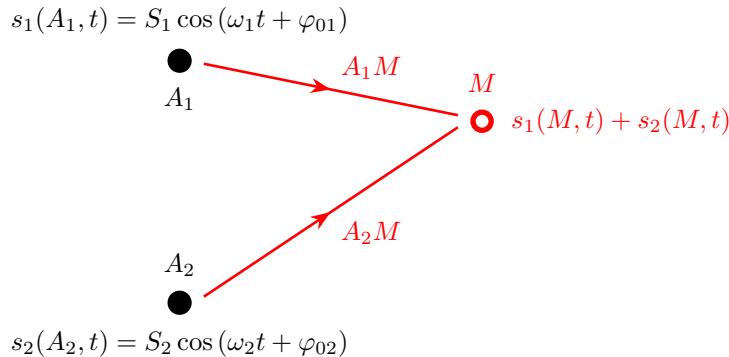


FIGURE O4.10 – Interférences à 2 ondes.

En A_1 , la première onde s'écrit $s_1(A_1, t) = S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01})$ où S_1 est son amplitude et φ_{01} sa phase à l'origine. Cette onde avance jusqu'à M . Supposons pour simplifier qu'elle aille en ligne droite ; plaçons un axe x selon la droite A_1M avec $x(A_1) = 0$; l'onde se propage alors selon la loi $s_1(x, t) = S_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_{01})$ avec k_1 sa pulsation spatiale, si on néglige l'atténuation. En M , on aura donc $s_1(M, t) = S_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x(M) + \varphi_{01})$. Comme on a pris $x(A_1) = 0$, on peut dire que $x(M)$ est égal à la longueur A_1M . Finalement :

$$s_1(M, t) = S_1 \cos(\omega_1 t - k_1 \cdot A_1 M + \varphi_{01})$$

Propriété : Déphasage d'une onde progressive

Une onde $s(A, t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ émise au point A acquiert, en se propageant jusqu'à un point M , une phase supplémentaire $-k \cdot AM = -\frac{2\pi}{\lambda} AM$, de sorte que $s(M, t) = S \cos(\omega t - k \cdot AM + \varphi)$

De même, la seconde onde s'écrit

$$s_2(M, t) = S_2 \cos(\omega_2 t - k_2 \cdot A_2 M + \varphi_{02})$$

Calculons donc maintenant l'intensité captée en M .

Un peu de maths : Valeurs moyennes de fonctions sinusoïdales

- une fonction de la forme $\cos(\omega t + cst)$ (ou sinus) a une valeur moyenne nulle
- $\cos^2(\omega t + cst) = \frac{1+\cos(2\omega t+2cst)}{2}$ donc la valeur moyenne d'un cosinus au carré est $\frac{1}{2}$
- $\sin^2(\omega t + cst) = \frac{1-\cos(2\omega t+2cst)}{2}$ donc la valeur moyenne d'un sinus au carré est $\frac{1}{2}$
- $\cos(\omega t + cst) \cdot \sin(\omega t + cst) = \frac{\sin(2\omega t+2cst)}{2}$ donc la valeur moyenne d'un produit de sinus par un cosinus

est 0

Propriété : Condition d'interférences

On dit que deux ondes interfèrent au point M si l'intensité I lorsque ces deux ondes sont présentes est différente de la somme des intensités I_1 et I_2 qu'il y aurait si une seule des ondes était présente.

- si les deux ondes ont des pulsations différentes, il n'y a pas d'interférences : $I = I_1 + I_2$
- si les deux ondes ont des pulsations rigoureusement égales, il y a des interférences : $I \neq I_1 + I_2$

Démonstration

Considérons d'abord le cas où il n'y a que l'onde 1 ; alors $I_1 = K \langle S_1 \cos(\omega_1 t - k_1 A_1 M + \varphi_{01})^2 \rangle$ et comme la moyenne d'un cosinus au carré vaut $\frac{1}{2}$, on trouve $I_1 = \frac{KS_1^2}{2}$ (K est un coefficient caractéristique du détecteur). De même, $I_2 = K \cdot \frac{S_2^2}{2}$.

Avec les deux ondes, par le principe de superposition, $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$ donc

$$\begin{aligned} I &= K \langle (s_1(M, t) + s_2(M, t))^2 \rangle \\ &= K \langle s_1^2(M, t) \rangle + K \langle s_2^2(M, t) \rangle + K \langle 2s_1(M, t)s_2(M, t) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + K \langle 2S_1 S_2 \cos(\omega_1 t - k_1 A_1 M + \varphi_{01}) \cos(\omega_2 t - k_2 A_2 M + \varphi_{02}) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + KS_1 S_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_1 A_1 M - k_2 A_2 M + \varphi_{01} + \varphi_{02}) \\ &\quad + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 A_1 M + k_2 A_2 M + \varphi_{01} - \varphi_{02}) \rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule $2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Or la moyenne d'un cosinus dépendant du temps est nulle. Donc $\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - k_1 A_1 M - k_2 A_2 M + \varphi_{01} + \varphi_{02}) \rangle = 0$; pour l'autre terme, cela dépend : $\langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - k_1 A_1 M + k_2 A_2 M + \varphi_{01} - \varphi_{02}) \rangle$ est nulle si ce cosinus dépend du temps, donc si $\omega_1 \neq \omega_2$; dans le cas contraire, ce terme est constant donc sa moyenne est non nulle.

Si la moyenne de ce terme est nulle, alors $I = I_1 + I_2$.

Remarque : En pratique, deux sources différentes n'ont aucune chance d'avoir exactement la même pulsation. Les interférences ne sont donc possibles, en pratique, que lorsqu'une même source est séparée en plusieurs sources secondaires de même pulsation.

Propriété : Formule de Fresnel d'interférences à 2 ondes

Si deux émetteurs A_1 et A_2 émettent deux ondes d'intensités respectives I_1 et I_2 , **de même pulsation**, de pulsations spatiales k_1 et k_2 , et de phases à l'origine φ_{01} et φ_{02} , alors l'intensité en un point M vaut

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) \quad (O4.4)$$

où $\Delta\varphi = (\varphi_{01} - k_1 A_1 M) - (\varphi_{02} - k_2 A_2 M) = (\varphi_{01} - \varphi_{02}) - \frac{2\pi}{\lambda_1} A_1 M + \frac{2\pi}{\lambda_2} A_2 M$

$\Delta\varphi$ représente le déphasage entre les deux ondes en M , qui prend en compte les déphasages à l'origine, et les déphasages $-k \times distance$ accumulés par les ondes lors de leur propagation.

Le terme $2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$ s'appelle le *terme d'interférences*.

Démonstration

On repart de la démonstration suivante dans le cas où $\omega_1 = \omega_2$; on a alors

$$I = I_1 + I_2 + KS_1 S_2 \cos(-k_1 A_1 M + \varphi_{01} + k_2 A_2 M - \varphi_{02})$$

Or $I_1 I_2 = K \frac{S_1^2}{2} K \frac{S_2^2}{2} = \frac{K^2 S_1^2 S_2^2}{4}$ donc $2\sqrt{I_1 I_2} = KS_1 S_2$ ce qui donne bien la formule recherchée.

Remarque : Souvent, on travaillera avec une seule source déparée en deux, ou bien deux sources de même intensité. Dans ce cas, si $I_1 = I_2 = I_0$, la formule de Fresnel devient

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos \Delta\varphi$$

Remarque : Le plus souvent, les deux sources sont en phases, ou bien les deux ondes ont la même source, ce qui revient au même ; de sorte que $\Delta\varphi = -k_1 \cdot A_1 M + k_2 \cdot A_2 M$

Définition : Différence de marche

On appelle différence de marche la différence des distances parcourues par les deux ondes : $\delta = A_2 M - A_1 M$. Si les deux ondes traversent des milieux ayant des vitesses de phase identiques, alors le déphasage vaut

$$\Delta\varphi = k \cdot \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad (\text{O4.5})$$

plus éventuellement un déphasage à l'origine.

Démonstration

Si les ondes interfèrent, c'est qu'elles ont la même pulsation ω . Si en plus elles ont la même vitesse de phase, alors leurs pulsations spatiales k sont identiques, donc $-k_1 \cdot A_1 M + k_2 \cdot A_2 M = k(A_2 M - A_1 M) = k \cdot \delta$.

Définition : Différence de chemin optique

Dans le cas des ondes lumineuses, on remplace la notion de *différence de marche*, par celle de *différence de chemin optique* : $\delta = (A_2 M) - (A_1 M)$ où les chemins optiques ($A_i M$) sont définis comme le produit de la longueur $A_i M$ par l'indice optique du milieu traversé entre A_i et M . Le déphasage vaut alors $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$ où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide.

Démonstration

On sait que dans un milieu d'indice n , on a $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{n \cdot f} = \frac{\lambda_0}{n}$. Donc on peut écrire, en notant n_1 et n_2 les milieux traversés par les deux ondes, que $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_2} A_2 M - \frac{2\pi}{\lambda_1} A_1 M = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 A_2 M - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_2 A_2 M = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 A_2 M - n_1 A_1 M)$

Définition : Interférence constructive/destructive

On dit que l'interférence en un point M est constructive si le terme d'interférences est maximum, donc lorsque $\cos \Delta\varphi = 1$ soit $\Delta\varphi = 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où les ondes traversent le même milieu et n'ont pas de déphasage initial, cela correspond à $\delta = p\lambda, p \in \mathbb{Z}$.

On dit que l'interférence en un point M est destructive si le terme d'interférences est minimum, donc lorsque $\cos \Delta\varphi = -1$ soit $\Delta\varphi = \pi + 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$. Dans le cas où les ondes traversent le même milieu et n'ont pas de déphasage initial, cela correspond à $\delta = \frac{\lambda}{2} + p\lambda, p \in \mathbb{Z}$.

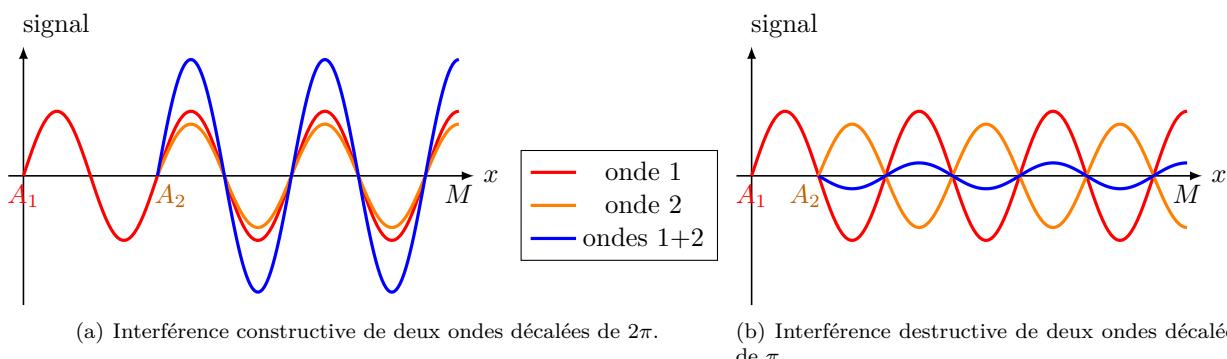


FIGURE O4.11 – Addition constructive ou destructive de deux ondes.

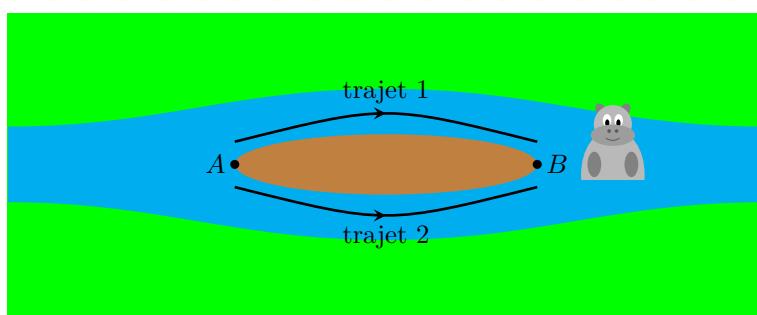
Pour deux sources données, il y aura donc des points où l'interférence sera constructive, d'autres où elle sera destructive.

Définition : Franges et interfrange

Par analogie avec l'optique, on appelle *frange brillante* une courbe reliant des points où l'interférence est constructive, et *frange sombre* une courbe reliant des points où l'interférence est destructive.

La distance entre deux franges brillantes consécutives s'appelle l'*interfrange*.

Exemple : Interférence de vagues de part et d'autre d'une île



Une vague se propage sur un fleuve ; sa relation de dispersion s'écrit $c = \sqrt{gh}$ où $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et h est la profondeur du fleuve. Au départ, là où le fleuve a pour profondeur $h_0 = 6,2 \text{ m}$, elle a pour longueur d'onde $\lambda_0 = 12 \text{ m}$. Elle arrive alors au niveau d'une île (point A) qui la sépare en deux : d'un côté le fleuve a pour profondeur $h_1 = 4,3 \text{ m}$, de l'autre $h_2 = 4,9 \text{ m}$.

Au bout de l'île de longueur $L = 312 \text{ m}$, les deux ondes se retrouvent au point B et interfèrent.

1. À partir de la relation de dispersion, reliez la longueur d'onde λ_1 dans le côté de profondeur h_1 , à λ_0 , h_0 et h_2 . Reliez de même λ_2 à λ_0 , h_0 et h_2 .
2. Exprimez puis calculez le déphasage en B entre les deux ondes. Commentez.
3. Pour quelles longueurs de l'île y a-t-il interférence destructive en B ?

1. $c_1 = \sqrt{gh_1} = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega\lambda_1}{2\pi}$ et de même $\sqrt{gh_0} = \frac{\omega\lambda_0}{2\pi}$.

En faisant le quotient des deux équations : $\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_0}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ (car c'est la **même pulsation** ω) donc $\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$.

De même $\lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{h_2}{h_0}}$

2. $\Delta\varphi = 2\pi L \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{2\pi L \sqrt{h_0}}{\lambda_0} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h_2}} \right) = 12,4 \text{ rad} \approx 2\pi$ donc l'interférence est constructive.

3. $\Delta\varphi = (2p+1)\pi$ donc $\lambda = 79 + 158.p$, $p \in \mathbb{N}$ mètres (79 m, 237 m, 395 m, 553 m, ...)

Remarque : On trouve des interférences dans tous les domaines de la physique :

- en optique : sur les ailes des papillons et d'autres insectes, les plumes d'oiseaux, les couches minces (hydrocarbures à la surface de l'eau, films de savon),...
- en acoustique : dans les salles de concert, les atténuateurs sonores à opposition de phase,...
- en mécanique quantique : les électrons interfèrent comme des ondes, conduisant à des phénomènes étranges (effet Aharonov-Bohm,...) lors de la conduction électrique dans des conducteurs quantiques

B.4. Exemple d'interférences : les fentes d'Young

Il existe deux dispositifs modèle pour étudier les interférences : les fentes d'Young¹, et l'interféromètre de Michelson. Cette année, nous allons juste voir le premier.

Dans l'expérience des fentes d'Young, on considère un écran percé de deux fentes très fines (de taille a) séparées d'une distance e (figure O4.12) selon l'axe x . Ces fentes sont très longues dans la direction y .

Cette double fente, placée dans l'air d'indice 1, est éclairée par une onde progressive monochromatique (une seule longueur d'onde λ) arrivant perpendiculairement à l'écran. La lumière passe à travers les deux fentes, et diffracte largement selon x , car ces fentes sont fines (de largeur $a \ll e$) ; là où la lumière diffractée par chacune des fentes se recouvre, il y a des interférences. Pour le calcul, on va considérer la figure O4.13 dans laquelle on ne considère que les deux ondes qui arrivent en un point P de l'écran repéré par sa hauteur x ; l'écran est situé à une distance D après les fentes.

1. Les fentes d'Young sont de simples fentes. C'est Young qui a étudié les interférences produites par ces fentes, ce qui a donné le nom d'«expérience des fentes d'Young» ; au cours du temps, le complément du nom «d'Young», qui s'appliquait à l'expérience, s'est mis à s'appliquer aux fentes, même si ça n'a aucun sens de parler des «fentes d'Young».

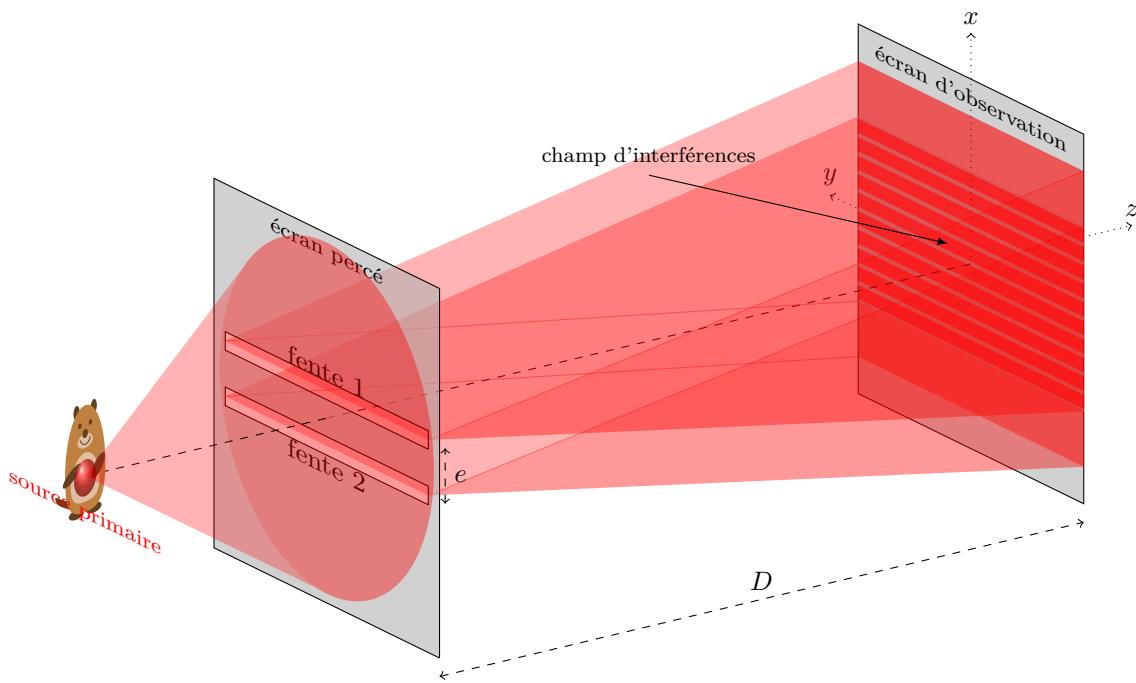


FIGURE O4.12 – Double fente dans l'expérience d'Young.

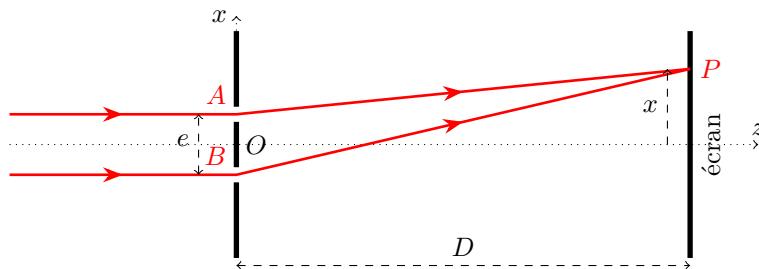


FIGURE O4.13 – Schéma de la diffraction à travers les fentes d'Young.

Propriété : Figure d'interférence des fentes d'Young

La figure de diffraction des fentes d'Young fait apparaître des franges rectilignes parallèles à la direction des fentes. Si l'écran est situé à une distance $D \gg a$, alors l'interfrange vaut

$$i = \frac{\lambda D}{e} \quad (\text{O4.6})$$

Démonstration

On part des notations de la figure O4.13. Tout se passe comme si les deux points A et B émettaient deux ondes lumineuses en phases, de même pulsation et se propageant dans le même milieu. On peut donc écrire que le déphasage vaut $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$ avec $\delta = BP - AP$ la différence de marche.

Pour calculer AP , notons O le centre de $[AB]$, et prenons-le comme origine des coordonnées. Alors le point A a pour coordonnées $(\frac{e}{2}, 0, D)$ et le point P a pour coordonnées $(x, 0, D)$. D'après le théorème de Pythagore, on a donc $AP = \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}$. De même, on peut montrer que $BP = \sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2}$ (on change e en $-e$).

On a donc $\delta = \sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} - \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}$ qui ne dépend que de x ; il en va de même pour $\Delta\varphi$. Les franges étant des courbes le long desquelles le déphasage est constant, ce sont des courbes $x = cst$, donc des droites parallèles aux fentes.

En multipliant au numérateur et au dénominateur par la somme des racines carrées, on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\left(\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} - \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}\right)\left(\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} + \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}\right)}{\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} + \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}} \\ &= \frac{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2 - (x - \frac{e}{2})^2 - D^2}{\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} + \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}} = \frac{x^2 + e.x + \frac{e^2}{4} - x^2 + e.x - \frac{e^2}{4}}{\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} + \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}} \\ &= \frac{2.e.x}{\sqrt{(x + \frac{e}{2})^2 + D^2} + \sqrt{(x - \frac{e}{2})^2 + D^2}}\end{aligned}$$

Dans le cas où $D \gg e$ et en restant proche de l'axe ($x \ll D$), les deux racines du dénominateur sont quasiment égales à D , donc le dénominateur égal à $2D$. On peut alors écrire $\delta \approx \frac{e.x}{D}$ donc $\Delta\varphi = \frac{2\pi e.x}{\lambda.D}$.

Les franges brillantes sont celles vérifiant $\Delta\varphi = 2\pi.p$ avec p un entier, donc la position x_p de la p -ième fringe brillante vérifie $\frac{2\pi e.x_p}{\lambda.D} = 2\pi.p$ soit $x_p = p\frac{\lambda D}{e}$. L'interfrange (distance entre deux franges brillantes consécutives) vaut donc bien $i = \frac{\lambda D}{e}$.

Si on veut tracer l'intensité lumineuse sur l'écran, on applique la formule de Fresnel : $I = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi e.x}{\lambda D}\right)$ avec I_0 l'intensité émise par une seule fente (figure O4.14). En réalité, cette intensité n'est pas constante, mais varie comme l'intensité diffractée par la fente. De plus, quand on s'éloigne du centre de la figure, l'interfrange change.

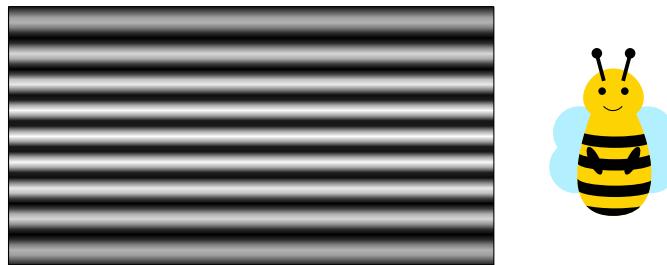


FIGURE O4.14 – Figure d'interférence des fentes d'Young sur l'écran.

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Exemples de signaux.	Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent	
Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive. Célérité, retard temporel.	<p>Écrire les signaux sous la forme $f(x - ct)$ ou $g(x + ct)$.</p> <p>Écrire les signaux sous la forme $f(t - x/c)$ ou $g(t + x/c)$.</p> <p>Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.</p>
Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.	<p>Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique.</p> <p>Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase.</p> <p>Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation.</p> <p>Mesurer la vitesse de phase, la longueur d'onde et le déphasage dû à la propagation d'un phénomène ondulatoire.</p>
Phénomène de diffraction	
Diffraction d'une onde par une ouverture : conditions d'observation et caractéristiques. Angle caractéristique de diffraction.	<p>Caractériser le phénomène de diffraction dans des situations variées et en citer des conséquences concrètes.</p> <p>Exploiter la relation exprimant l'angle caractéristique de diffraction en fonction de la longueur d'onde et de la taille de l'ouverture.</p> <p>Illustrer et caractériser qualitativement le phénomène de diffraction dans des situations variées.</p>
Phénomène d'interférences	
Interférences de deux ondes de même fréquence. Interférences constructives, Interférences destructives	<p>Caractériser le phénomène d'interférences de deux ondes et en citer des conséquences concrètes.</p> <p>Établir les conditions d'interférences constructives et destructives de deux ondes issues de deux sources ponctuelles en phase dans le cas d'un milieu de propagation homogène.</p>
Interférences de deux ondes lumineuses de même fréquence, différence de chemin optique, conditions d'interférences constructives ou destructives. Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique.	<p>Déterminer les lieux d'interférences constructives et les lieux d'interférences destructives dans le cas des trous d'Young.</p> <p>Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.</p> <p>Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique linéarisée entre les deux ondes.</p> <p>Établir l'expression de l'interfrange.</p> <p>Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour visualiser le phénomène d'interférences de deux ondes.</p>

Propagation des ondes

QCMs

réponses page 163

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Une onde progressive harmonique se dirigeant vers $+x$ peut s'écrire sous la forme :

- (a). $A \cos(\omega t - kx)$
 (b). $B \cos(-\omega t + kx)$
 (c). $C \cos(\omega t + kx)$
 (d). $D \cos(\omega t) \cos(kx)$

Q2.

La vitesse (de phase) d'une onde de pulsation $\omega = 2\pi f$ et de pulsation spatiale $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ vérifie :

- (a). $v = \frac{\omega}{k}$
 (b). $v = \frac{k}{\omega}$
 (c). $v = \frac{\lambda}{f}$
 (d). $v = \lambda \cdot f$

Q3.

La tache centrale de diffraction après passage dans une fente de largeur a a pour demi-ouverture angulaire :

- (a). $\arcsin \frac{a}{\lambda}$
 (b). $\frac{\lambda}{a}$
 (c). $\arcsin a$
 (d). $\arcsin \frac{\lambda}{a}$

Q4.

Les taches de diffraction autour de la tache centrale ont une largeur égale :

- (a). à la moitié de la tache centrale
 (b). au double de la tache centrale
 (c). à celle de la tache centrale

Q5.

On observe des interférences lorsqu'on mélange des ondes issues :

- (a). d'une seule source, séparée en deux
 (b). de deux sources quelconques
 (c). de deux sources de même pulsation
 (d). de deux sources de même intensité

Q6.

Deux ondes 1 et 2 issues de la même source et qui se superposent après avoir accumulé un déphasage $\Delta\phi$ donnent une onde d'intensité :

- (a). $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)$
 (b). $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Delta\phi$
 (c). $I = I_1 + I_2 + 2I_1 I_2 \cos(\Delta\phi)$
 (d). $I = I_1 I_2 \cos(\Delta\phi)$

Q7.

Si deux ondes issues d'une même source se retrouvent en M après avoir parcouru deux chemins de différence de marche δ dans un milieu où leur longueur d'onde est λ , alors le déphasage $\Delta\phi =$

- (a). δ
 (b). $\frac{\lambda}{\delta}$
 (c). $\frac{2\pi}{\lambda} \delta$
 (d). $\frac{\delta \omega}{\lambda}$

Q8.

Après passage de la lumière à travers deux fentes séparées de a , on observe sur l'écran à une grande distance D :

- (a). d'interfrange $i = \frac{\lambda a}{D}$
 (b). d'interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$
 (c). des franges circulaires
 (d). des franges rectilignes

Propagation des ondes

Exercices

réponses page 164

Exercice O4.1 : Diffraction des ondes sonores [*]

On prendra $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pour la vitesse du son dans l'air.

1. Une onde sonore de fréquence 440 Hz passe à travers une porte de largeur $l = 80 \text{ cm}$. Calculez l'angle sous lequel l'onde va être diffractée à grande distance.
2. Un émetteur à ultrasons de largeur 1 cm envoie des ondes à 40 kHz. Calculez l'angle de diffraction à grande distance.

Exercice O4.2 : Émission par une sonde spatiale [*]

La sonde Juice a été lancée le 14 avril 2023 en direction de Jupiter ; elle va étudier pendant plusieurs années certains satellites de cette planète. Pour transmettre les données vers la Terre, elle dispose d'une antenne parabolique de $d = 2,54 \text{ m}$ de diamètre.

Données :

- distance Soleil-Terre : 1 u.a. = $1,5 \times 10^8 \text{ km}$; distance Soleil-Jupiter : 5,2 u.a.
- angle de diffraction à grande distance par une ouverture circulaire : $\arcsin \frac{1,22\lambda}{d}$
- fréquences d'émission : $f_1 = 10 \text{ GHz}$ et $f_2 = 30 \text{ GHz}$

1. Calculez la distance maximale possible entre la sonde Juice et la Terre lorsque la sonde sera en orbite autour de Jupiter.
2. La sonde émet un signal via son antenne parabolique. Pour les deux fréquences d'émission, calculez l'angle de diffraction.
3. Déduisez-en la taille maximale du faisceau lorsqu'il atteindra la Terre (pour chaque fréquence).
4. Calculez la fraction de signal qui sera captée par une antenne réceptrice de diamètre 8 m.

Exercice O4.3 : Mesure de la distance Terre-Lune par un laser [**]

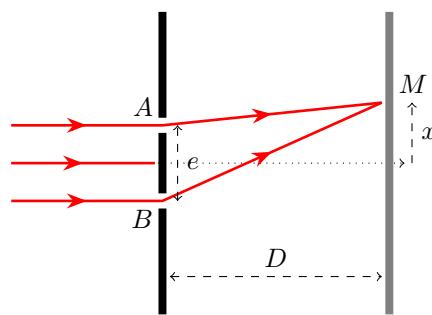
Pour mesurer la distance Terre-Lune, les missions Apollo ont disposé à sa surface des réflecteurs. Un laser situé sur Terre envoie une impulsion qui se réfléchit et revient. La mesure du temps d'aller-retour permet de connaître la distance Terre-Lune.

1. Un jour, on trouve que le temps mis par la lumière pour faire un aller-retour vaut 2,588 s. Sachant que la vitesse de la lumière vaut $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, calculez la distance Terre-Lune à ce moment-là.
2. Le faisceau laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$) a initialement une section circulaire de diamètre 60 mm. Calculez l'angle de diffraction correspondant, en radians.
Indication : pour une ouverture *circulaire* de diamètre a , l'angle de diffraction vaut $\arcsin(1,22\frac{\lambda}{a})$. Déduisez-en le diamètre du faisceau laser lorsqu'il atteint la Lune.
3. Le réflecteur déposé par Lunokhod 1 a un diamètre égal à 11 cm. Supposons que N photons soient partis de la Terre, combien vont atteindre le détecteur ?
4. Le signal réfléchi a pour diamètre initial 11 cm ; calculez de la même manière son angle de diffraction, la taille de la tache en retour sur la Terre, puis le nombre de photons captés par le télescope d'observation qui fait 1,54 m de diamètre. Commentez.

Exercice O4.4 : Fentes d'Young [*]

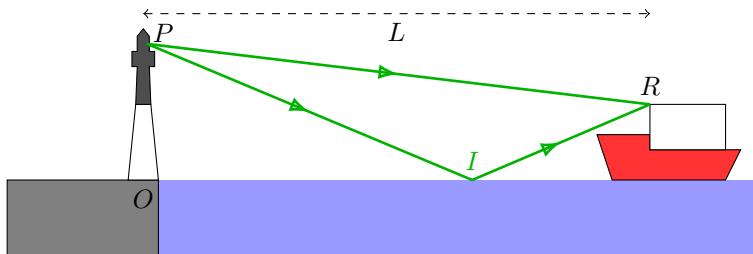
On envoie de la lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 613 \text{ nm}$ sur une plaque percée de deux fentes séparés d'une distance $e = 0,6 \text{ mm}$. On observe les interférences sur un écran situé à une distance $D = 80 \text{ cm}$.

1. Soit M un point de l'écran repéré par x . Exprimez les distances AM et BM .
2. Déduez-en l'intensité $I(M)$ en supposant que la même intensité I_0 passe par les deux trous.
3. En $x = 0$, a-t-on une frange brillante ou sombre ? Établissez l'expression de l'interfrange dans le cas où D est grand, et calculez-le.



Exercice O4.5 : Émission radio par un phare [**]

Certains phares, en plus d'émettre de la lumière visible, émettent aussi des ondes radios permettant d'être localisés depuis de grandes distances et même par temps de brouillard. On considère ici le premier grand phare de l'île de Sein, de hauteur $h = 43 \text{ m}$ émettant des ondes de fréquence $f = 2 \text{ MHz}$ se déplaçant à $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



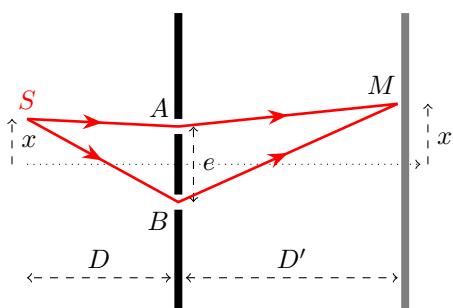
Le phare émet dans toutes les directions depuis le point P . Un bateau, à une distance L , possède un récepteur R qui capte ces ondes à une altitude z au-dessus du niveau de l'océan. Ce récepteur reçoit deux ondes :

- l'onde qui est allée directement en ligne droite de P à R
 - l'onde qui atteint R après une réflexion à la surface de la mer en I
1. Calculez la longueur d'onde dans l'air (indice 1) des ondes émises par le phare.
 2. On considère le rayon PIR . Montrez par une construction simple que, pour calculer la distance parcourue par ce rayon, on peut faire comme s'il s'était propagé en ligne droite jusqu'à R depuis une source secondaire P' se déduisant de P .
 3. Calculez alors la différence de chemin optique entre les deux rayons, en fonction de z et des constantes.
 4. Comment est l'interférence si $z = 0$? Quelle est l'altitude de la première interférence destructive si $L = 6 \text{ km}$ (on simplifiera l'équation avant de la résoudre en tenant compte du fait que $L \gg h, z$)? Commentez.

Exercice O4.6 : Trous d'Young avec un émetteur à distance finie [**]

Une source ponctuelle S de lumière monochromatique de longueur d'onde λ envoie de la lumière sur une plaque percée de deux trous séparés d'une distance e . La source est située à une distance D devant les fentes, à une distance x de l'axe; on observe les interférences sur un écran situé à une distance D' , en un point situé à une distance x' de l'axe. On se place dans des conditions telles que x, x' et e sont petits devant D et D' .

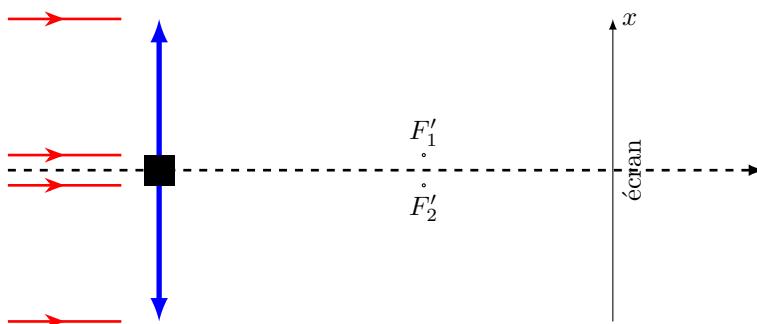
1. Exprimez les longueurs SA, SB, AM et BM .



2. Déduisez-en la différence de chemin optique entre les deux rayons.
3. Déduisez-en l'intensité $I(M)$ en supposant que la même intensité I_0 passe par les deux trous.
4. Exprimez l'interfrange ; est-il le même que pour une source à l'infini ?
5. Exprimez la valeur de x' correspondant à une différence de chemin optique nulle. Commentez.
6. Que se passe-t-il si on ajoute une deuxième source S_2 située dans le même plan transverse que S , mais à un x différent ?

Exercice O4.7 : Bilentilles de Billet [**]

Le dispositif d'interférences proposé par Billet consiste à prendre une lentille convergente de distance focale f' , de la scier en 2, et d'écarter les deux moitiés d'une petite distance e .



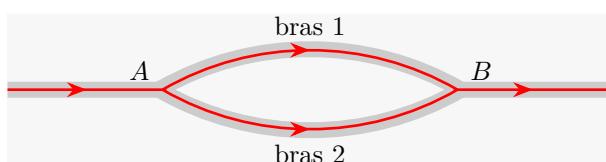
Chaque demi-lentille agit comme la lentille initiale, mais les deux foyers images sont décalés de e (on les note F'_1 et F'_2).

1. On envoie sur le système un faisceau monochromatique parallèle à l'axe. Desinez le trajet des rayons en sortie de chaque lentille, en allant plus loin que les foyers.
On place un écran à une distance d après les foyers ; quelle est la zone de l'écran où on peut observer des interférences ?
2. Les deux foyers agissent comme des sources secondaires qui émettent de la lumière. Déterminez l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran, en fonction de x ; on supposera que $e \ll d$.
3. Combien de franges brillantes sont visibles ? AN pour $\lambda = 600 \text{ nm}$, $d = 1 \text{ m}$ et $e = 2 \text{ mm}$.
4. Considérez ce qui change si, au lieu d'écarter les deux demi-lentilles, on en avance une de e .

Exercice O4.8 : Interféromètre de Mach-Zehnder [**]

En introduisant des impuretés à la surface d'un matériau comme le silicium, on peut fabriquer des canaux qui guident la lumière comme des fibres optiques.

On considère un composant dans lequel la lumière est séparée en deux voies (en A), puis parcourt deux bras différents de même longueur $L = 500 \mu\text{m}$ avant de se recombiner en B .



Dans le bras 1, la lumière se propage dans un indice $n_1 = 1,532$ tandis que dans le bras 2 l'indice vaut $n_2 = 1,534$.

1. On note λ_0 la longueur d'onde de la lumière dans le vide, et λ_1 dans un milieu d'indice n_1 . Reliez λ_0 , λ_1 et n_1 . Faites de même pour λ_2 .
2. Exprimez le déphasage $\Delta\phi$ des deux ondes en B .
3. Calculez les longueurs d'onde λ_0 du domaine visible qui donnent une interférence destructive en B .

Exercice O4.9 : Des ronds dans la mare [***]

Les ondes se déplaçant à la surface de l'eau obéissent à l'équation de dispersion

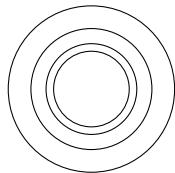
$$\omega^2 = \left(g.k + \frac{\gamma k^3}{\rho} \right) \cdot \tanh(k.h)$$

où $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur ; $\gamma = 76 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ est la tension superficielle de l'eau ; $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau ; \tanh est la fonction tangente hyperbolique définie par $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

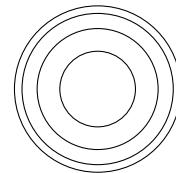
1. Eau profonde

On est en régime d'eau profonde lorsque la longueur d'onde λ est très inférieure à la profondeur h .

- Que peut-on dire de $h.k$ dans ce régime ? Sachant que $\tanh x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ (ce que vous pouvez montrer facilement), simplifiez la relation de dispersion.
- Exprimez alors la vitesse des ondes en fonction de k . Étudiez ses variations et tracez son tableau de variations.
- Calculez numériquement la vitesse minimale et la longueur d'onde associée.
- Quand on jette un caillou (de plusieurs centimètres) dans une mare, on crée des ondes dont la longueur d'onde est de l'ordre grandeur de la taille du caillou. Dans quelle partie de la courbe est-on ? Expliquez pourquoi, si on observe les distances entre les cercles créés, elle augmente quand on part du centre vers les bords (figure de gauche).
- Dans le cas d'une goutte d'eau, c'est l'inverse : la distance diminue du centre vers les bords (figure de droite). Expliquez.



Ondes circulaires dans le cas d'un caillou



Ondes circulaires dans le cas d'une goutte

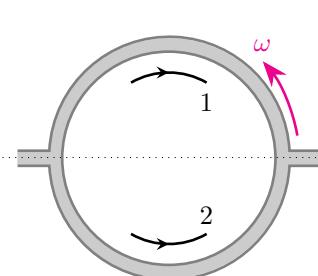
2. Eau peu profonde

On est dans ce régime lorsque $\lambda \gg h$.

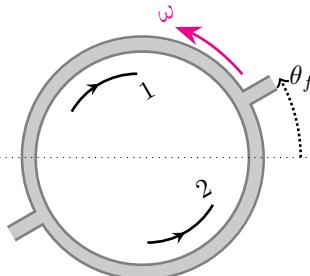
- Sachant que $\tanh x \approx x$ pour $x \ll 1$, simplifiez la relation de dispersion.
- Étudiez les variations de v en fonction de k .
- Pour une longueur d'onde fixée, comment varie v avec la profondeur ?
- Quand une vague se déplace en eau très peu profonde, le centre de la vague (bosse) voit une profondeur plus grande ; va-t-il plus ou moins vite ? Quelle conséquence cela a-t-il ?

Exercice O4.10 : Effet Sagnac [***]

Un interféromètre de Sagnac est constitué de deux chemins différents pour la lumière, ayant chacun la forme d'un demi-cercle de rayon R . De la lumière monochromatique de fréquence f arrive de la droite ; elle est séparée en deux, une partie va dans le demi-cercle supérieur (chemin 1), une autre dans le demi-cercle inférieur (chemin 2), puis les deux sont mélangées dans la sortie.



Instant d'entrée



Instant de sortie

1. Calculez le déphasage subit par la lumière dans chaque bras lorsque l'interféromètre est immobile (imaginez la figure de gauche immobile) et que la lumière circule dans du vide.
L'interférence est-elle constructive ou destructive ?
2. On met en rotation l'interféromètre à la vitesse angulaire ω . À l'instant $t = 0$, la lumière entre dans l'interféromètre (à gauche). On suppose pour le moment que les deux branches de l'interféromètre sont constituées de vide (vitesse de la lumière : c).
Soit t_1 le temps mis par la lumière passant par le bras 1 pour arriver à la sortie; pendant ce temps l'interféromètre a tourné de $\theta_f = \omega t_1$. Quelle distance a donc parcouru la lumière dans le bras 1 ? déduisez-en le déphasage de l'onde 1 (en fonction aussi de λ_0 , longueur d'onde dans le vide).
3. Même question avec l'onde 2.
4. Montrez que, pour de vitesses de rotation faibles ($R\omega \ll c$), le déphasage entre les deux bras est proportionnel à la vitesse de rotation ω . Pour un rayon $R = 5$ cm, et une lumière de longueur d'onde 614 nm dans le vide, calculez la vitesse ω donnant lieu à la première interférence destructive en sortie. Commentez.
5. Souvent la lumière circule dans un milieu matériel d'indice n . Dans ce cas, le mouvement du milieu entraîne la lumière avec lui. La loi de l'entraînement de Fresnel-Fizeau indique que la vitesse de la lumière devient $\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_e$ où v_e est la vitesse du matériau, comptée algébriquement dans le sens de propagation. Ici, $v_e = \pm R\omega$ suivant la branche.
Recalculez le déphasage entre les deux bras, et montrez qu'il est indépendant de n .
6. Ce système est peu sensible. Comment peut-on le modifier pour augmenter sa sensibilité ?

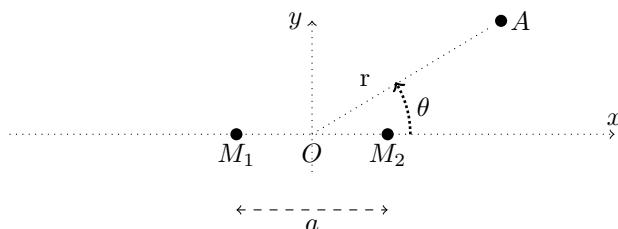
Propagation des ondes

TDs numériques

réponses page 166

TD numérique : Émission par deux antennes

On considère deux antennes qui émettent des ondes (radio, ou de téléphone). Ces deux antennes sont séparées d'une distance a . On prend les notations de la figure ci-dessous, où M_1 et M_2 sont les deux antennes qui émettent deux signaux identiques $s(M_i, t) = S_0 \cos(\omega t)$; le point A est celui où on capte les deux ondes, il est repéré par la longueur $r = OA$ (avec O le milieu de $[M_1 M_2]$) et l'angle θ entre l'axe Ox et OA .



1. Écrivez les coordonnées des points M_1 , M_2 et A en fonction de a , r et θ .
2. Exprimez les longueurs M_1A et M_2A , puis la différence de marche.
3. Exprimez alors l'intensité captée au point A , en notant I_0 l'intensité captée si une seule des deux antennes émet.
4. On fait émettre par ces antennes des ondes de fréquence $f = 96$ MHz; elles se déplacent à la vitesse $c = 3 \times 10^8$ m · s⁻¹. Calculez longueur d'onde dans le vide λ de ce signal.
5. Numériquement, générez un tableau `tab_theta` d'angles compris entre 0 et 2π , et calculez la tableau `tab_I` des intensités correspondantes avec les valeurs suivantes : $I_0 = 1$ (unités arbitraires), $a = 5\lambda$ et $r = 300$ m.

Tracez alors la **courbe polaire** d'émission avec le programme suivant :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 plt.polar()
3 plt.plot(tab_theta,tab_I)
4 plt.show()
```

Interprétez la courbe obtenue (pensez aux trous d'Young).

6. On prend maintenant $a = \frac{\lambda}{2}$. Tracez la courbe ; quel est l'intérêt de cette configuration ?
7. Que devient la courbe si on ajoute à l'émetteur 2 un déphasage à l'origine égal à $\frac{\pi}{2}$? à π ?
8. On admet que la formule de Fresnel pour 2 ondes se généralise pour 3 ondes : en notant $\Delta\phi_{ij}$ le déphasage entre l'onde émise par l'émetteur i et celle émise par l'émetteur j , et I_i l'intensité émise par l'émetteur i , on a

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi_{12}) + 2\sqrt{I_1 I_3} \cos(\Delta\phi_{13}) + 2\sqrt{I_2 I_3} \cos(\Delta\phi_{23})$$

Tracez la courbe polaire d'émission de trois antennes en phase placées en $(-\lambda/2; 0)$, $(0; 0)$ et $(+\lambda/2; 0)$.

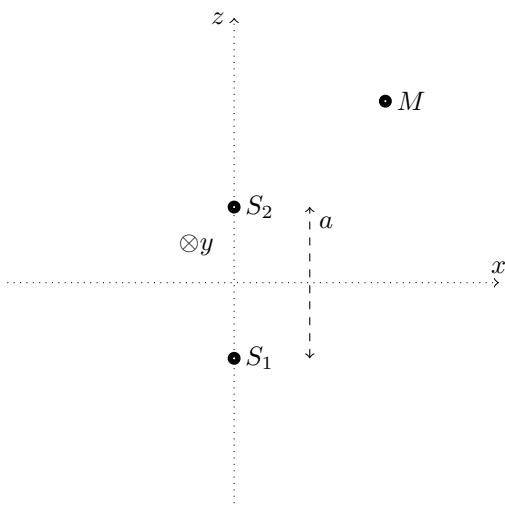
Vous pouvez vous amuser avec d'autres configurations, par exemple un carré d'antennes de côté $\lambda/4$ avec un déphasage de $\pi/2$ pour celles du bas.

TD numérique : Trous d'Young

Le calcul vu en cours montre que, pour deux fentes d'Young séparées de a , on observe sur un écran placé à grande distance D face aux fentes une figure formée de franges brillantes et sombres rectilignes, avec un interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$. On va ici simuler les figures d'interférences dans le cas général.

Dans ce TD, on considère non plus des fentes, mais de simples trous. Plus généralement, on va considérer deux sources ponctuelles S_1 et S_2 placées comme sur la figure. Pour les AN : $a = 0,4$ mm et $\lambda = 612$ nm,

et on considérera que les deux sources émettent dans toutes les directions la même intensité $I_0 = 1$ (unités arbitraires).



1. Donner les 3 coordonnées des points S_1 et S_2 .

On considère un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) . Exprimez les longueurs S_1M et S_2M , puis la différence de chemin optique δ en supposant qu'on est dans l'air d'indice 1.

2. Écran parallèle à S_1S_2

On place tout d'abord un écran dans le plan perpendiculaire à x à une distance $D = 2\text{ m}$ du plan des sources.

- (a) On va d'abord tracer le profil selon l'axe z pour $y = 0$. On considère donc des points de coordonnées $(D, 0, z)$ pour z variant entre -2 cm et $+2\text{ cm}$.

Créez le tableau des valeurs de z , puis le tableau des différences de marches δ correspondant, enfin le tableau contenant l'intensité donnée par la formule de Fresnel.

- (b) Tracez le profil d'intensité en fonction de z . Mesurez l'interfrange au centre et comparez à la théorie.

- (c) On veut maintenant avoir non pas un profil mais une image en 2D de l'intensité (ou éclairement).

Pour cela, il faut commencer par générer deux tableaux 2D donnant les coordonnées y et z des points de l'écran (la coordonnée x est fixée à D). On utilise la fonction `np.meshgrid(tab_colonnes, tab_lignes)` qui crée deux tableaux ; pour cela, testez le programme :

```

1 import numpy as np
2 tab_lignes=np.linspace(1,5,5) # les coordonnées des lignes vont de 1 à 5
3 tab_colonnes=np.linspace(3,6,5) # les coordonnées des colonnes vont de 3 à 6
4 mesh_colonnes,mesh_lignes=np.meshgrid(tab_colonnes,tab_lignes)
5 print(mesh_lignes)
6 print(mesh_colonnes)

```

À partir de là, écrivez un programme qui génère deux tableaux `mesh_y` et `mesh_z` contenant les coordonnées des points de l'écran, pour z variant entre -2 cm et $+2\text{ cm}$ et y entre -3 cm et $+3\text{ cm}$ (pas plus de 300 points pour chaque direction).

- (d) À l'aide des tableaux de la question précédente, générez le tableau `mesh_delta` contenant les différences de chemin optique, puis `mesh_I` contenant l'intensité.

Affichez alors ce tableau comme une image à l'aide du programme suivant :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 plt.figure()
3 plt.imshow(mesh_I,cmap="gray",aspect=4/6,extent=[-30,30,-20,20])
4 plt.show()

```

Remarque : `plt.imshow` affiche un tableau 2D comme une image. L'option `cmap` indique la palette, c'est-à-dire la correspondance valeur/couleur, il en existe d'autres que "gray". L'option `aspect` indique le rapport d'aspect, c'est-à-dire le rapport des échelles verticale:horizontale de l'image. L'option `extent` donne les limites des axes.

(e) Modifiez le programme pour que y varie entre -2 m et $+2\text{ m}$. Observez comment la figure change quand on s'éloigne du centre.

3. Écran perpendiculaire à S_1S_2

On place maintenant l'écran dans le plan $z = D$ avec $D = 50\text{ cm}$. Tracez la figure d'interférence sur l'écran sur un carré de taille $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (b)

La fonction cosinus est paire.

Q2.(a) ET (d)

Q3.(d)

La réponse $\frac{\lambda}{a}$ est juste pour $a \gg \lambda$.

Q4.(a)

Q5.(a) ET (c)

Le cas de deux sources de même pulsation est très rare.

Q6.(a)

Q7.(c)

Q8.(b) ET (d)

C'est la seule solution, et elle est souvent compliquée, sauf numériquement.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice 04.1 : Diffraction des ondes sonores [*]

1. 74°
2. 58°

Réponses de l'exercice 04.2 : Émission par une sonde spatiale [*]

1. $6,2 \text{ u.a.} = 9,3 \times 10^{11} \text{ m}$
2. $\alpha_1 = 0,0144 \text{ rad}$ et $\alpha_2 = 0,0048 \text{ rad}$
3. $d_1 = 2,7 \times 10^{10} \text{ m}$ et $d_2 = 8,9 \times 10^9 \text{ m}$
4. 9×10^{-20} pour f_1 et 8×10^{-19} pour f_2 .

Réponses de l'exercice 04.3 : Mesure de la distance Terre-Lune par un laser [**]

1. 388 000 km
2. 8400 m
3. $N \left(\frac{0,11}{8400} \right)^2 = 1,7 \times 10^{-10} N$
4. On trouve une tache de 4600 m de diamètre et un nombre final de photons égal à $1,9 \times 10^{-17} N$.

Réponses de l'exercice 04.4 : Fentes d'Young [*]

1. $AM = \sqrt{D^2 + (x - e/2)^2}$ et $BM = \sqrt{D^2 + (x + e/2)^2}$
2. $I = 2I_0 + 2I_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (BM - AM) \right)$
3. Au centre, frange brillante. Interfrange $i = \frac{\lambda D}{e} = 0,8 \text{ mm}$

Réponses de l'exercice 04.5 : Émission radio par un phare [**]

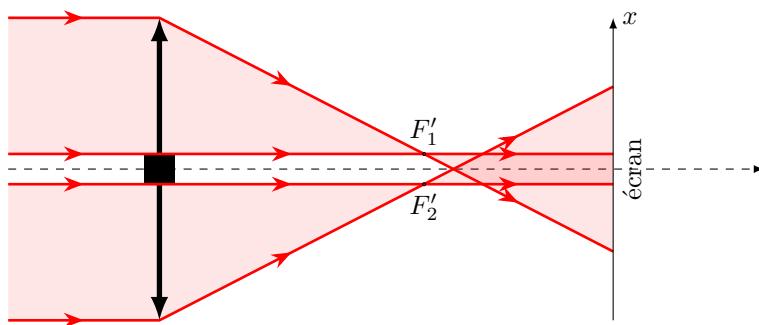
1. $\lambda = 150 \text{ m}$
2. P' est le symétrique de P par rapport au niveau de la mer.
3. Comme des fentes d'Young : $\delta = \sqrt{(z+h)^2 + L^2} - \sqrt{(z-h)^2 + D^2}$
4. Interférence constructive en $z = 0 \text{ m}$; destructive en $z = 5200 \text{ m}$.

Réponses de l'exercice 04.6 : Trous d'Young avec un émetteur à distance finie [**]

1. Appliquer le théorème de Pythagore.
2. $\delta \approx \frac{xe}{D} + \frac{x'e}{D'}$
3. $I = 2I_0 + 2I_0 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{xe}{D} + \frac{x'e}{D'} \right) \right)$
4. $i = \frac{\lambda D'}{e}$, identique au cas d'une source à l'infini.
5. $p = 0$ pour $x'_0 = -\frac{D'}{D}x$
6. Les deux sources n'interfèrent pas.

Réponses de l'exercice 04.7 : Bilentilles de Billet [**]

- 1.



2. $I(x) = 2I_0 + 2I_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{e \cdot x}{d}\right)$
3. $\frac{e}{i} = \frac{e^2}{\lambda d} = 6,7$ franges dans 2 mm
4. Les franges seront des cercles.

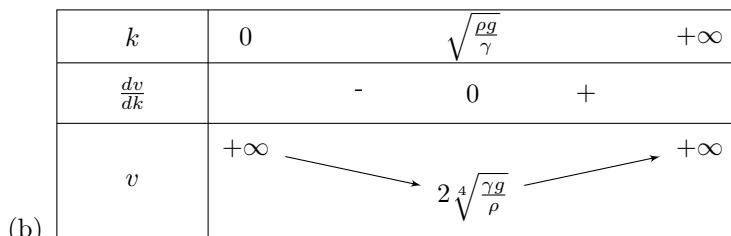
Réponses de l'exercice O4.8 : Interféromètre de Mach-Zehnder [**]

1. $\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{n_1}$
2. $\Delta\phi = \frac{2\pi L}{\lambda_0} (n_2 - n_1)$
3. 667 nm et 400 nm

Réponses de l'exercice O4.9 : Des ronds dans la mare [***]

1. Eau profonde

(a) $\omega^2 = g \cdot k + \frac{\gamma k^3}{\rho}$



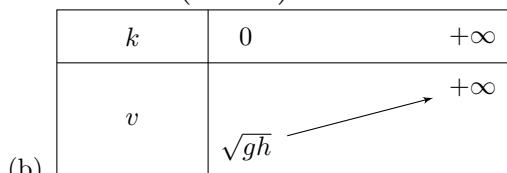
(c) $v_{min} = 33 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ pour $\lambda = 1,7 \text{ cm}$

(d) Zone où v décroît avec k .

(e) Zone où v croît avec k .

2. Eau peu profonde

(a) $\omega^2 = h \cdot k^2 \left(g + \frac{\gamma k^2}{\rho}\right)$



(c) si k est fixé, la vitesse augmente avec la profondeur h .

(d) Déferlement des vagues.

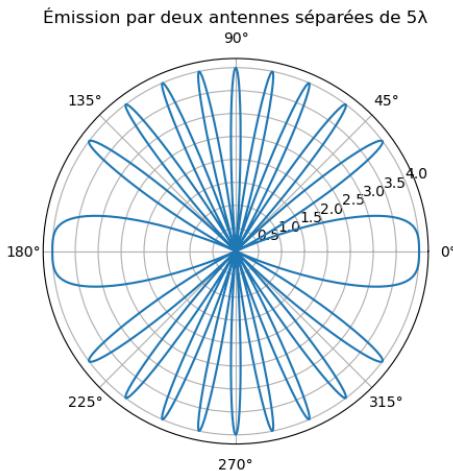
Réponses de l'exercice O4.10 : Effet Sagnac [***]

1. $\delta_1 = \frac{2\pi R f}{c}$
2. $\frac{2\pi}{\lambda_0} \pi R \frac{c}{c+R\omega}$
3. $\frac{2\pi}{\lambda_0} \pi R \frac{c}{c-R\omega}$
4. Pour des vitesses de rotation faibles : $\delta = \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda_0 c} \omega$
5. $\delta = \pi$ lorsque $\omega = 5860 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 930 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$
6. Après des calculs un peu lourds : $\delta = \frac{4\pi^2 R^2}{\lambda_0 c} \omega$: l'indice n n'apparaît pas.
7. On fait plusieurs tours de fibre.

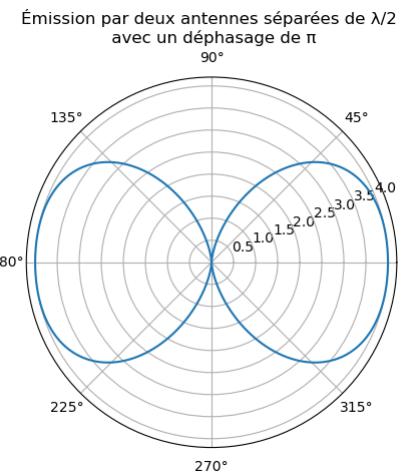
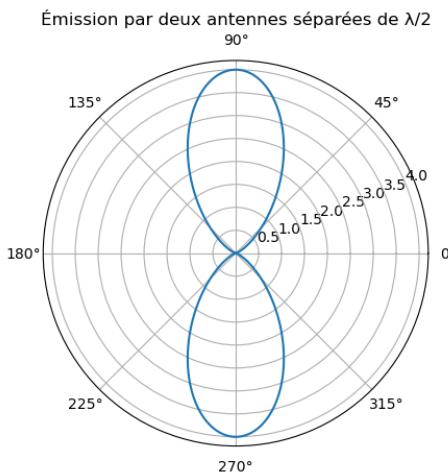
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Émission par deux antennes

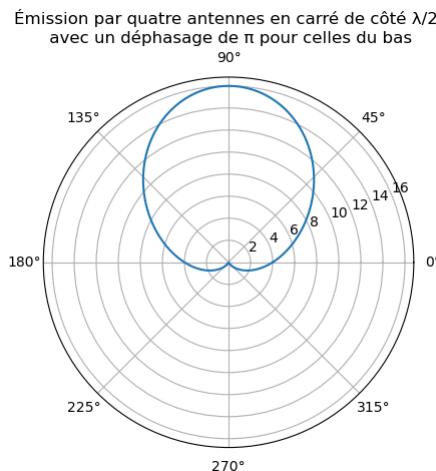
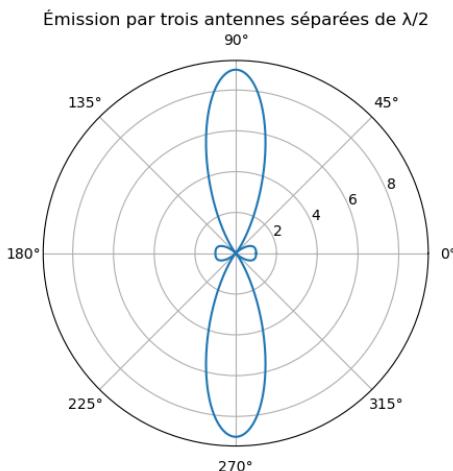
$\delta = M_1 A - M_2 A = \sqrt{(r \cdot \cos \theta + \frac{a}{2})^2 + (r \cdot \sin \theta)^2} - \sqrt{(r \cdot \cos \theta - \frac{a}{2})^2 + (r \cdot \sin \theta)^2}$ qu'on envoie dans la formule de Fresnel.



Avec 2 antennes déparées de 5λ on observe des oscillations de l'intensité émise. Si on place un écran dans un plan $y = cst$ on verra des franges sombres et lumineuses qui s'alternent.

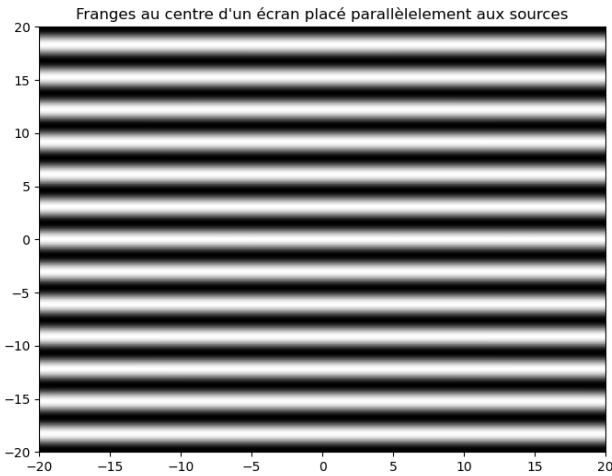
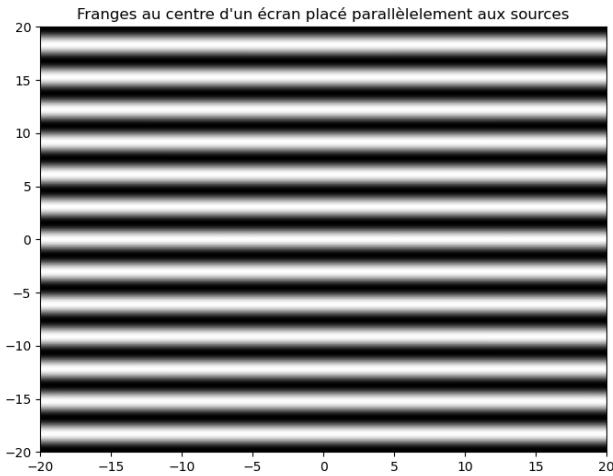


Si on rapproche les antennes à $\lambda/2$, l'émission ne se fait plus que dans deux directions opposées. L'ajout d'un déphasage de π permet de tourner la direction d'émission.

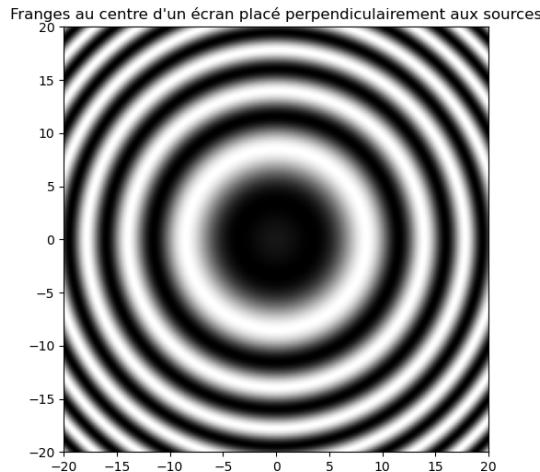


Avec 3 antennes on peut avoir des faisceaux plus fins; avec 4 antennes on arrive à n'émettre plus que dans une seule direction.

Réponses au TD d'info : Trous d'Young



Au centre on retrouve bien des franges rectilignes; si on s'écarte, les droites deviennent des hyperboles.



Si l'écran est perpendiculaire à la direction reliant les deux trous, on observe des anneaux, semblables à ceux qu'on observe sur l'interféromètre de Michelson (2ème année).

Prérequis mathématiques pour l'électricité

Cours

E0.A. Fonctions

On a déjà parlé de la notion de fonction et de celle de dérivée ; on rappelle une formule très utile :

Propriété : Approximation d'une fonction par sa tangente (ou développement limité d'ordre 1)

Au voisinage d'une valeur x_0 , la fonction f vaut approximativement

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dx \cdot \frac{df}{dx}(x_0) \quad (\text{E0.1})$$

A.1. Primitive

La relation de dérivation peut s'inverser avec la relation d'intégration :

Définition : Primitive

Soit f une fonction de x ; toute fonction F telle que $\frac{dF}{dx} = f$ est une *primitive* de f .

Si on connaît une primitive F_0 de f , alors l'ensemble des primitives de f est $\{F = F_0 + cst, cst \in \mathbb{R}\}$.

On note $\int f(x).dx$ une primitive quelconque de f .

A.2. Intégrale

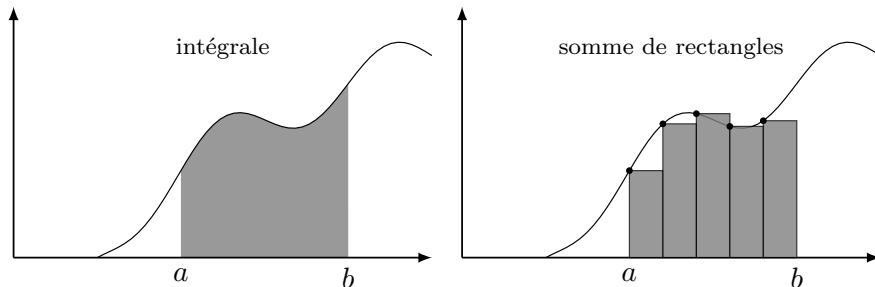
Définition : Intégrale

Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}^2$; l'intégrale de f entre a et b est l'aire de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses si $a < b$, ou son opposé sinon ; on la note $\int_a^b f(x).dx$.

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a)$, qu'on note $[F]_a^b$, ou encore en physique $\Delta^{a \rightarrow b} F$ qui se lit : la variation de F lorsqu'on passe de a à b :

$$\int_a^b f(x).dx = [F]_a^b = \Delta^{a \rightarrow b} F = F(b) - F(a) \quad (\text{E0.2})$$

La notation $\int_a^b f'(x).dx$ représente une somme infinie de termes : si on divise l'aire sous la courbe en un grand ($\rightarrow \infty$) nombre de rectangles de largeur dx et de hauteur $f(x)$, la somme des aires de ces rectangles tend vers $\int_a^b f'(x).dx$.



! Il ne faut pas confondre une primitive, qui est une fonction, avec une intégrale, qui est un nombre.

Cette notion d'intégrale permet de définir une grandeur importante : la valeur moyenne :

Définition : Valeur moyenne d'une fonction périodique

Soit f une fonction T -périodique. On définit sa valeur moyenne par

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x).dx \quad (\text{E0.3})$$

Cette définition consiste à prendre l'aide sous la courbe pendant une période, et à la diviser par la largeur d'une période ; ainsi, l'aide sous la courbe sur une période vaut $T \times \langle f \rangle$.

Propriété : Linéarité de la valeur moyenne

La valeur moyenne est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que :

- si f et g sont 2 fonctions de même période, $\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$
- si f est une fonction périodique et λ une constante, $\langle \lambda f \rangle = \lambda \langle f \rangle$

Démonstration

Cela vient du fait que l'intégrale est linéaire.

Il faut connaître quelques valeurs moyennes importantes :

Propriété : Valeurs moyennes de fonctions trigonométriques

$$\forall \omega \neq 0, \langle \cos(\omega t) \rangle = 0 \quad (\text{E0.4a})$$

$$\forall \omega \neq 0, \langle \sin(\omega t) \rangle = 0 \quad (\text{E0.4b})$$

Démonstration

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega t).dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sin(2\pi) - \sin(0)}{2\pi\omega} = 0$$

$$\langle \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t).dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{2\pi} = \frac{\cos(2\pi) - \cos(0)}{2\pi\omega} = 0$$

Remarque : Si $\omega = 0$ dans les expressions précédentes, on a une constante, et la valeur moyenne d'une fonction constante est bien évidemment sa valeur : 1 pour le cosinus et 0 pour le sinus.

A.3. Séparation des variables

Pour calculer des intégrales, il est parfois pratique d'utiliser deux techniques mathématiques : l'intégration par parties, et le changement de variable. Ce dernier est assez utilisé en physique, sous une forme un peu bizarre.

Soit $f \circ g$ une fonction composée de variable x . Supposons que g soit bijective sur $[a; b]$ (et que sa dérivée ne s'annule jamais sur cet intervalle) et qu'on connaisse sa réciproque g^{-1} (fonction telle que $g \circ g^{-1}$ et $g^{-1} \circ g$ soient l'identité). Alors on peut prendre $g(x)$ comme nouvelle variable (notée simplement g), et écrire $x = g^{-1}(g)$ donc $dx = g^{-1}'(g).dg = \frac{dg}{g'(g^{-1}(g))}$ puis transformer l'intégrale ainsi : $\int_a^b f(x).dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g) \frac{dg}{g'(g^{-1}(g))}$.

En physique, cette relation prend une forme particulière :

Méthode : Séparation des variables

Soit g une fonction de la variable x . Si on connaît une relation entre la dérivée de g , g et x sous la forme $\frac{dg}{dx} = \alpha(g) \times \beta(x)$ où α et β sont deux fonctions, alors on peut passer tout ce qui dépend de g à gauche, tout ce qui dépend de x à droite, et intégrer chaque côté entre les bornes correspondantes :

$$\frac{dg}{\alpha(g)} = \beta(x).dx \text{ donc } \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{dg}{\alpha(g)} = \int_a^b \beta(x).dx$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer la formule du changement de variable à l'intégrale $\int_a^b \beta(x).dx$ avec β en place de f .

Inutile de trop travailler ça pour le moment, on le reverra en moment voulu.

Exemple : Séparation des variables

Appliquez la méthode de séparation des variables entre 0 et t à la relation $\frac{df}{dt} = 3t^2 f$ et en déduire $f(t)$ à une constante près.

$$\frac{df}{f} = 3t^2 dt \text{ donc en intégrant entre } 0 \text{ et } t \text{ : } \int_{f(0)}^{f(t)} \frac{1}{f} df = \int_0^t 3t^2 dt \text{ soit } [\ln f]_{f(0)}^{f(t)} = [t^3]_0^t \text{ soit } \ln \frac{f(t)}{f(0)} = t^3 \text{ donc } f(t) = f(0)e^{t^3}.$$

a. En maths, on ne donne pas le même nom à la variable t dans la borne et à la variable d'intégration t dans l'intégrale ; en physique, tant qu'on comprend...

E0.B. Trigonométrie

On a déjà revu les formules de cosinus et sinus d'une somme :

$\cos(\alpha + \beta)$	=	$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha - \beta)$	=	$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\sin(\alpha + \beta)$	=	$\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
$\sin(\alpha - \beta)$	=	$\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$

En les sommant, on peut établir des formules très importantes :

Propriété : Formules de linéarisation des sinus et cosinus

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \quad (\text{E0.5a})$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad (\text{E0.5b})$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{2} \quad (\text{E0.5c})$$

Démonstration

Pour la première, on somme : $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 2 \cos \alpha \cos \beta$ d'où le résultat affirmé.

On fait pareil pour les autres.

Il est essentiel de retenir la première au moins.

Parfois, c'est l'inverse, on a une somme de deux cosinus, et on veut un produit. On peut alors montrer que :

Propriété : Formule de factorisation des sinus et cosinus

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \quad (\text{E0.6a})$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \quad (\text{E0.6b})$$

Démonstration

À partir des formules précédentes, en posant $\alpha = \frac{p+q}{2}$ et $\beta = \frac{p-q}{2}$.

On tire de ces propriétés des valeurs moyennes :

Propriété : Moyenne de sinus et cosinus au carré

$$\forall \omega \neq 0, \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{E0.7a})$$

$$\forall \omega \neq 0, \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{E0.7b})$$

$$\forall \omega \neq 0, \langle \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \rangle = 0 \quad (\text{E0.7c})$$

Démonstration

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{1+\cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{1-\cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{\cos(2\omega t)}{2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) \rangle = \left\langle \frac{\sin(2\omega t)}{2} \right\rangle = 0$$

Enfin, un résultat à retenir :

Propriété : Somme d'un cosinus et d'un sinus

Toute expression de la forme $A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t)$ avec $A, B \in \mathbb{R}^2$ peut aussi être mise sous la forme $D \cos(\alpha t + \varphi)$ avec $D, \varphi \in \mathbb{R}^2$

Démonstration

On peut développer la seconde en $D \cos(\alpha t) \cos(\varphi) - D \sin(\alpha t) \sin(\varphi)$ donc on voit que les deux expressions sont équivalentes si et seulement si $\begin{cases} A = D \cos \varphi \\ B = -D \sin \varphi \end{cases}$. On en tire $D^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2 + B^2$ et $-\tan \varphi = \frac{B}{A}$.

Il est alors facile de montrer que $\begin{cases} D = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi = \arctan(-\frac{B}{A}) \end{cases}$ fonctionnent, ce qui démontre l'implication énoncée.

Prérequis mathématiques pour l'électricité

QCMs

réponses page 178

 QCM : Trigonométrie

Q1.

$$\cos(3t) \cdot \cos(5t) =$$

- (a). $\cos(5t) + \cos(3t)$
 (c). $\cos(8t) + \cos(2t)$
 (b). $\cos(8t) - \cos(-2t)$
 (d). $\cos(8t)$

Q2.

$$\text{Si } \omega \text{ et } \varphi \text{ sont des constantes, alors } \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) =$$

- (a). $\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)$
 (c). $\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(-\varphi)$
 (b). $\cos(2\omega t) + \cos(\varphi)$
 (d). $\cos(2\omega t + \varphi)$

Q3.

$$\text{Si } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ sont deux constantes, alors } 2 \cos(\omega_1 t) + 2 \cos(\omega_2 t) =$$

- (a). $\cos((\omega_1 + \omega_2)t) \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$
 (c). $4 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$
 (b). $4 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$
 (d). $\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$

 QCM : Primitives et intégrales

Q4.

Quelle est la primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui vaut 2 lorsque $t = 1$?

- (a). $t \mapsto \frac{4}{3} - \frac{1}{3t^3}$
 (c). $t \mapsto 3 - \frac{1}{t}$
 (b). $t \mapsto -\frac{1}{t}$
 (d). $t \mapsto 5 - \frac{3}{t^3}$

Q5.

Quelle est la primitive de la fonction $t \mapsto e^{4t}$ qui s'annule en 0 ?

- (a). $t \mapsto \frac{e^{4t}-1}{4}$
 (c). $t \mapsto 4e^{4t}$
 (b). $t \mapsto \frac{e^{4t}}{4}$
 (d). $t \mapsto 4(e^{4t} - 1)$

Q6.

Que vaut la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ qui est π -périodique ?

- (a). 0
 (c). $\frac{1}{2}$
 (b). $\frac{2}{\pi}$
 (d). $\frac{\pi}{4}$

Q7.

Que vaut la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$ avec $\omega \neq 0$?

Indication : linéariser l'expression puis prenez la valeur moyenne de chaque terme obtenu ; inutile ici de passer par l'intégrale.

- (a). 0
 (c). $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (b). $\frac{1}{2}$
 (d). $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Q8.

Quelles fonctions peuvent être des primitives de la fonction $t \mapsto 0$?

- (a). 0
 (c). 1
 (b). une constante quelconque
 (d). -1

Q9.

Que peut valoir l'intégrale de la fonction $t \mapsto 0$ entre a et b ?

- (a). une constante quelconque
- (b). 1
- (c). $b - a$
- (d). 0

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Trigonométrie

Q1.(c)

Q2.(a) ET (c)

Eh oui, cosinus est paire.

Q3.(b)

Réponses au QCM : Primitives et intégrales

Q4.(c)

Q5.(a)

Q6.(b)

$$\langle |\sin(t)| \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(t)| .dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t).dt = \frac{1}{\pi} [-\cos(t)]_0^\pi = \frac{1+1}{\pi}$$

Q7.(d)

$$\langle \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \rangle = \left\langle \frac{\cos(2\omega t + \frac{\pi}{4}) + \cos(-\frac{\pi}{4})}{2} \right\rangle = \frac{0 + \cos(-\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Q8.(a) ET (b) ET (c) ET (d)

Q9.(d)

Attention à l'erreur classique «une constante.» Une intégrale n'est pas définie à une constante près!

Lois des circuits électriques

Cours

Ce chapitre est l'introduction d'une nouvelle partie du cours : l'électricité. Il s'agit d'une partie très importante, car elle va nous permettre d'introduire de très nombreux outils qui seront utiles par la suite en physique, en particulier les équations différentielles et, plus tard, la notation complexe. Elle permet d'illustrer des notions importantes et universelles sur des systèmes modèles simples, et possède de très nombreuses applications que nous ne ferons qu'effleurer.

Si l'électricité statique était connue depuis longtemps, l'essor de l'électricité a commencé lorsqu'on a pu la créer de manière continue dans le temps : d'abord par la pile (découverte par Volta vers 1800) puis les alternateurs/dynamos vers la fin du XIX^e siècle.

Dans ce chapitre nous allons nous contenter d'établir les lois fondamentales de l'électricité.

E1.A. Intensité et tension

A.1. Le courant électrique

L'électricité est la science qui étudie les phénomènes associés à des transports de charges électriques. La matière est constituée de particules élémentaires chargées : électrons, protons, ou bien d'édifices plus gros et chargés tels que les ions.

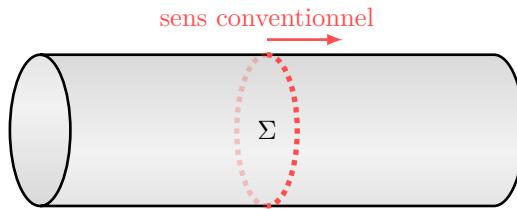
Définition : Charge élémentaire

La charge élémentaire est la charge du proton (ou bien l'opposé de la charge de l'électron) ; elle vaut $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Une charge qui circule, c'est comme de l'eau qui circule dans un tuyau. La première chose qui nous intéresse, c'est le débit de ces charges : on l'appelle le courant électrique.

Définition : Courant électrique

Considérons un fil parcouru par des charges, et une section Σ de ce fil ; on choisit un sens d'orientation du fil, appelé *sens conventionnel du courant*.



On compte, pendant un petit temps dt , la charge totale δq qui va traverser la section Σ , avec la convention suivante :

- si une charge q_i traverse la section dans le même sens que le sens conventionnel, on compte $+q_i$
- si une charge q_i traverse la section dans le sens opposé au sens conventionnel, on compte $-q_i$

Alors on définit le courant à travers la section Σ par

$$i = \frac{\delta q}{dt} \text{ (en Ampères)} \quad (\text{E1.1})$$

Remarque : Pourquoi écrit-on δq et non pas dq ? C'est un peu compliqué pour le moment. Si vous écrivez dq , pour le moment ce n'est pas grave.

Remarque : Cette définition s'utilisera surtout ainsi : en un temps dt , la charge qui traverse la section Σ vaut $\delta q = i.dt$.

Remarque : Le courant électrique a un signe : s'il est positif, c'est que le courant va dans le même sens que le sens conventionnel, sinon c'est qu'il va en sens inverse ; on parle parfois du «sens réel» du courant (figure E1.1). Mais cela n'indique rien sur le sens de déplacement des charges, car si elles sont positives, elles vont dans le même sens que le courant, si elles sont négatives, elles vont en sens inverse (figure E1.2).

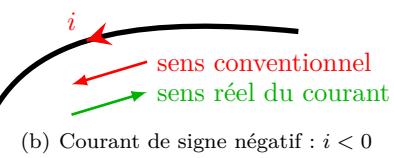
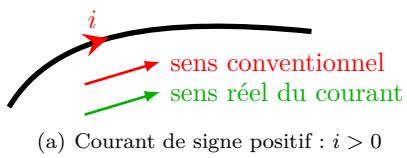
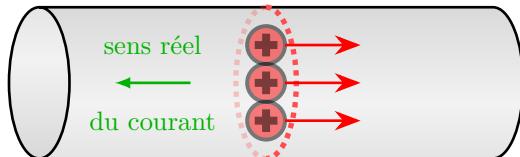
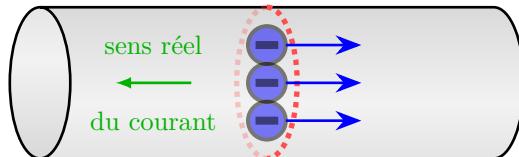


FIGURE E1.1 – Sens conventionnel et sens réel.



(a) Courant de charges positives



(b) Courant de charges négatives

FIGURE E1.2 – Sens du courant en fonction du déplacement des charges.

Ainsi, la figure E1.3 montre les différents cas possibles de déplacements de charges et les signes correspondants.



(a) Courant de charges positives se déplaçant dans le sens conventionnel (cliquer pour voir l'animation)

(b) Courant de charges positives se déplaçant dans le sens opposé au sens conventionnel (cliquer pour voir l'animation)



(c) Courant de charges négatives se déplaçant dans le sens conventionnel (cliquer pour voir l'animation)

(d) Courant de charges négatives se déplaçant dans le sens opposé au sens conventionnel (cliquer pour voir l'animation)

FIGURE E1.3 – Signe de comptage des charges.

Les porteurs de charges sont de nature diverses. Dans les métaux, ce sont des *électrons libres* qui se déplacent, de charge $-e$; c'est le cas le plus habituel. Il existe d'autres matériaux solides appelés semiconducteurs, comme le silicium, dans lesquels les électrons se déplacent, mais aussi des manques d'électrons appelés *trous*, de charge $+e$. Dans les solutions ioniques, ce sont les *ions* qui conduisent le courant, de charge positive ou négative égale à un nombre entier de fois la charge élémentaire. Enfin, à très basse température, des phénomènes bizarres apparaissent : des paires d'électrons (paires de Cooper) dans les supraconducteurs, ou encore des fractions d'électrons dans les semiconducteurs à basse température.

À priori, dans la plupart des phénomènes électriques, la nature des charges qui transportent le courant n'importe pas : le signe de la charge n'intervient pas dans les lois. Vous verrez l'an prochain un phénomène électromagnétique, l'effet Hall, qui permet de distinguer le signe des porteurs de charges.

Remarque : Les courants électriques utilisés en TP seront de l'ordre de quelques dizaines de mA jusqu'à quelques A. Dans un réseau domestique, on peut monter jusqu'à quelques dizaines d'Ampères. Pour des machines de forte puissance on monte à quelques centaines d'Ampères pour une voiture électrique, quelques milliers pour un train. Les plus forts courants, de plusieurs centaines de milliers d'Ampères, sont utilisés pour la fabrication de l'aluminium. À l'inverse, en électronique, on cherche à minimiser la consommation électrique, et les courants sont de l'ordre du mA, pouvant même descendre jusqu'au μA ou au nA dans les applications cherchant à vraiment économiser l'énergie (cf. tableau E1.1).

Système	Intensité
puce RFID	$\approx 1\text{mA}$
smartphone (veille)	$\approx 10\text{mA}$
smartphone (utilisation)	jusqu'à 0mA
smartphone (charge)	10A
éclairage domestique LED	$\approx 50\text{mA}$
cuisinière à induction	$\approx 10\text{A}$
voiture électrique Zoé	160A
TGV M	400A
métallurgie de l'aluminium	300kA
pile AA	$\approx 1\text{A}$
panneau photovoltaïque 1 m ²	$\approx 10\text{A}$

TABLEAU E1.1 – Valeur de quelques intensités usuelles.

Définition : Nœud et branche

Un nœud est une portion de circuit où plusieurs fils se rejoignent.

Une branche est une portion de circuit entre deux nœuds consécutifs (figure E1.4).



FIGURE E1.4 – Nœud et branche dans une portion de circuit.

Définition : Régime continu

En électricité, le terme de *régime continu* désigne un mode de fonctionnement où toutes les grandeurs sont **constants**; cela n'a rien à voir avec la notion de continuité en mathématiques.

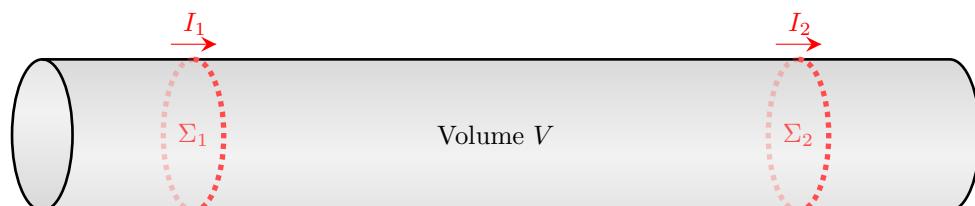
En régime continu, les différentes variables qui apparaissent (courants, tensions,...) seront notées par une lettre majuscule.

Propriété : Courant dans une branche

En régime continu, le courant est le même à travers toutes les sections d'une même branche.

Démonstration

Considérons une branche et deux sections Σ_1 et Σ_2 orientées dans le même sens; on note I_1 et I_2 les intensités qui les traversent.



On va noter V le volume de fil contenu entre les sections Σ_1 et Σ_2 ; ce volume contient une charge électrique qu'on va noter q_V et qui dépend a priori du temps, pour le moment. Notons donc $q_V(t)$ cette charge à l'instant

t , et $q_V(t + dt)$ à l'instant $t + dt$. Alors on peut faire un bilan entre ces deux instants t et $t + dt$:

- à travers Σ_1 , une charge $\delta q_1 = I_1 \cdot dt$ est **entrée** dans le volume V ;
- à travers Σ_2 , une charge $\delta q_2 = I_2 \cdot dt$ est **sortie** du volume V .

On peut donc écrire que la charge à l'instant $t + dt$ est égale à la charge qui était là à l'instant t , plus celle qui est entrée, moins celle qui est sortie : $q_V(t + dt) = q_V(t) + I_1 \cdot dt - I_2 \cdot dt$ soit $\frac{q_V(t+dt)-q_V(t)}{dt} = I_1 - I_2$. À gauche, on reconnaît le taux d'accroissement entre t et $t + dt$, et comme $dt \rightarrow 0$, ce taux tend vers la dérivée :

$$\frac{dq_V}{dt} = I_1 - I_2$$

Cette loi est toujours vraie ; dans le cas particulier du régime continu, toutes les grandeurs sont constantes, entre autres $q_V = cst$ donc $\frac{dq_V}{dt} = 0$ ce qui prouve bien que $I_1 = I_2$.

Loi des noeuds

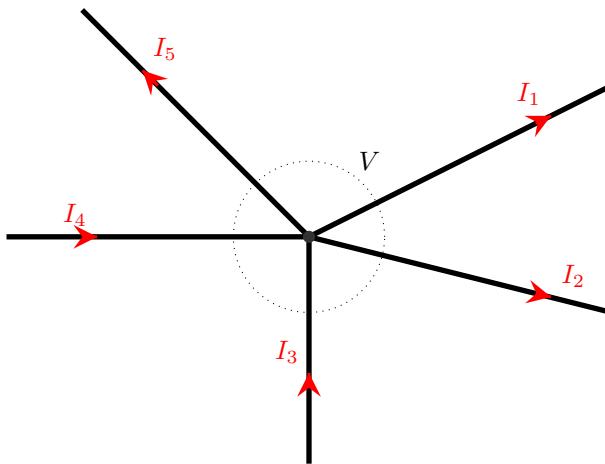
En régime continu, la somme des intensités qui arrivent à un noeud est égale à la somme des intensités qui partent de ce noeud.

En notant les intensités qui arrivent ou partent d'un noeud avec un indice k , on peut écrire cette loi sous la forme :

$$\sum_k \epsilon_k I_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } I_k \text{ va vers le noeud et } -1 \text{ sinon} \quad (\text{E1.2})$$

Démonstration

La démonstration ressemble à la précédente. Considérons un exemple avec un noeud où 5 branches se rejoignent, avec des courants I_1 à I_5 :



On note V un volume quelconque qui englobe le noeud, et q_V la charge électrique qu'il contient. Alors un bilan entre t et $t + dt$ indique que

- des charges $\delta q_3 = I_3 \cdot dt$ et $\delta q_4 = I_4 \cdot dt$ sont entrées dans V ;
- des charges $\delta q_1 = I_1 \cdot dt$, $\delta q_2 = I_2 \cdot dt$ et $\delta q_5 = I_5 \cdot dt$ sont sorties de V .

Donc $q_V(t + dt) = q_V(t) - I_1 \cdot dt - I_2 \cdot dt + I_3 \cdot dt + I_4 \cdot dt - I_5 \cdot dt$ soit

$$\frac{dq_V}{dt} = -I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5$$

En régime continu : $-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$ ou encore $I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4$.

Cependant, on n'utilise pas les circuits électriques uniquement en régime continu, mais aussi en régime variable. Dans ce cas, la loi des noeuds n'est plus exactement vraie, mais elle reste quasiment valable si les grandeurs du circuit ne varient pas trop rapidement. On appelle cela l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

Définition : ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) est une approximation qui consiste à considérer que la loi des noeuds reste valable si les temps de variations des grandeurs dans ce circuit sont grands par rapport au temps que met la lumière pour parcourir le circuit. On peut alors écrire en ARQS :

$$\sum_k \epsilon_k i_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } i_k \text{ va vers le noeud et } -1 \text{ sinon} \quad (\text{E1.3})$$

Remarque : Pour un circuit de taille ℓ en régime variable à la fréquence f , l'ARQS est donc valable si $\frac{1}{f} \gg \frac{\ell}{c}$ soit $\ell \ll \frac{c}{f} = \lambda$: le circuit doit être petit devant la longueur d'un de la lumière à la fréquence f .

Par exemple, considérons un circuit pour lequel le courant varie en 1 ms. Pendant ce temps, la lumière parcourt $1 \times 10^{-3}c = 300 \text{ km}$ donc si le circuit est petit devant 300 km, l'ARQS est valide.

En TP, on construira des circuits de taille maximale 2 m environ ; or $\frac{2}{3 \times 10^8} \approx 10 \text{ ns}$ donc il ne faudra pas que les grandeurs varient en moins de 100 ns environ. Par exemple, si on alimente le circuit en régime sinusoïdal, la période devra être supérieure à 100 ns, donc la fréquence inférieure à 10 MHz. C'est pour cela que les générateurs utilisés en TP (Générateurs Basses Fréquences) ne dépassent pas 10 MHz.

Dans les processeurs d'ordinateur, on travaille à plusieurs GHz, donc en 1 période la lumière parcourt quelques centimètres ; on est à la limite de l'ARQS.

A.2. Le potentiel électrique

Pour le moment, nous nous sommes intéressés à décrire et à quantifier le courant électrique qui circule, sans nous demander pourquoi il circule. Pour faire circuler de l'eau dans un tuyau, il faut une cause : une différence d'altitude, ou bien une différence de pression ; pour faire circuler les charges, il faut une différence de quelque chose d'invisible et d'abstrait : le potentiel électrique.

Définition : Potentiel électrique

En tout point de l'espace, il existe un champ (c'est-à-dire une grandeur qui dépend de la position) appelé potentiel électrique, note v , qui s'exprime en Volts (V). Les charges positives sont attirées vers les potentiels bas, et les charges négatives vers les potentiels élevés.

Ce qui attire les charges, c'est la recherche de potentiels plus bas (pour les charges positives) ou plus élevés (pour les charges négatives). Autrement dit, la valeur du potentiel ne compte pas, ce qui compte, c'est la valeur relative des potentiels en différents points. Si on ajoute 1 V à tous les potentiels en tout point, on ne change rien : on dit parfois que le potentiel est défini à une constante près. Par conséquent on peut très bien choisir où se trouve le potentiel de référence, 0 V.



Définition : Masse

La masse est le point de potentiel nul. On peut choisir sa position, et on la symbolise par ||||| .

Définition : Tension

Une tension est une différence de potentiel entre deux points ; on la symbolise par une flèche :

$$A \cdot \leftarrow \overset{u_{AB} = v_A - v_B}{\longrightarrow} \cdot B$$

Remarque : Les tensions manipulées en TP seront de l'ordre de quelques Volts. Au-delà de 100 V environ, on passe aux grandes tensions, qui sont dangereuses pour l'homme. Les prises du secteur fournissent des tensions de 220 V alternatif ($f = 50 \text{ Hz}$), tandis que le transport de l'électricité sur de grandes distances se fait à de très hautes tensions (400 kV). À l'inverse, les capteurs fournissent souvent des tensions de l'ordre du mV qu'il faut amplifier avant de les mesurer (cf. tableau E1.2).

Propriété : Loi d'additivité des tensions

Les tensions, qu'on symbolise par des flèches, vérifient la relation de Chasles : $u_{AB} + u_{BC} = u_{AC}$.

Démonstration

$$u_{AB} + u_{BC} = (v_A - v_B) + (v_B - v_C) = v_A - v_C = u_{AC}$$

Système	Tension
thermocouple	$\approx 1\text{mV}$
puce RFID	2V
smartphone	5V
éclairage domestique LED	220V
cuisinière à induction	220V
voiture électrique Zoé	400V
TGV M	25kV
pile AA	1,50V
panneau photovoltaïque 1 m ²	30V

TABLEAU E1.2 – Valeur de quelques tensions usuelles.

Remarque : Il est aussi évident, d'après la définition, que $u_{AB} = -u_{BA}$.

Définition : Maille

Une maille est un ensemble de branches qui forment un circuit fermé.

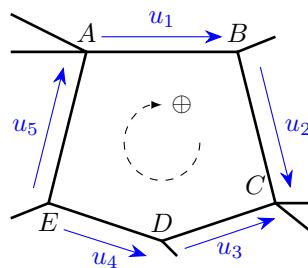
Propriété : Loi des mailles

Considérons une maille d'un circuit ; on l'oriente, c'est-à-dire qu'on choisit un sens de parcours. Alors la somme des tensions orientées autour de cette maille est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k u_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si la tension } u_k \text{ tourne dans le sens de la maille et } -1 \text{ sinon} \quad (\text{E1.4})$$

Démonstration

Considérons une nouvelle fois un exemple particulier d'une maille constituée de 5 branches :



On choisit d'orienter la maille dans le sens $ABCDE$ par exemple. Alors il est facile de voir (en plaçant les tensions dans le sens $ABCDE$) que $u_{BA} + u_{CB} + u_{DC} + u_{ED} + u_{AE} = u_{AA} = v_A - v_A = 0$. Or d'après la figure : $u_1 = u_{BA}$, $u_2 = u_{CB}$, $u_3 = -u_{DC}$, $u_4 = -u_{ED}$ et $u_5 = u_{AE}$ donc $u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 = 0$: c'est la loi des mailles appliquée à cette maille.

La loi d'additivité et la loi des mailles sont vraies même si on n'est pas en ARQS ; le seul cas où elles changent un peu, c'est en présence de champs magnétiques variables (cf. fin de l'année). Par conséquent, les lois précédentes s'écrivent aussi bien avec des minuscules.

On admettra également la propriété suivante :

Propriété : Fil idéal en ARQS

La tension aux bornes d'un fil idéal est nulle en régime continu ou en ARQS. Autrement dit, si deux points A et B sont reliés par un fil, ils sont au même potentiel ; on peut considérer que c'est le même point.

E1.B. Les dipôles fondamentaux

On a vu qu'une différence de potentiel (ou une tension) amène l'apparition d'un courant électrique. Mais quelle est la relation entre la tension et le courant ? Cela va dépendre de ce qui se trouve dans le circuit. Chaque portion de circuit a un rôle, et on définit un certain nombre de composants modèles qui servent beaucoup ; chaque composant impose sa propre relation entre u et i .

Dans la suite, on va s'intéresser aux composants les plus simples : les dipôles.

B.1. Propriété générales d'un dipôle

Définition : Dipôle électrique

Un dipôle est une portion d'un circuit qui est reliée au reste du circuit par deux bornes.

Un dipôle possède deux bornes entre lesquelles on applique une tension, ou différence de potentiel ; cette tension va faire circuler des charges électriques, donc un courant, à travers ce dipôle. Les lois physiques internes qui régissent ce dipôle vont déterminer le courant qui traverse le dipôle pour une tension donnée.

Définition : Convention d'orientation

Un dipôle est traversé par un courant i et possède une tension u à ses bornes. Il existe deux façons d'orienter les flèches de i et u (figure E1.5) :

- si les flèches représentant u et i sont tête-bêche, on dit que le dipôle est orienté en *convention récepteur*
- si les flèches représentant u et i sont dans le même sens, on dit que le dipôle est orienté en *convention générateur*

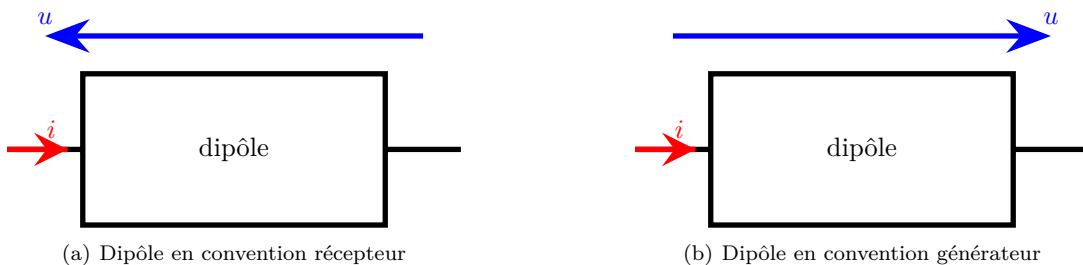


FIGURE E1.5 – Convention d'orientation d'un dipôle.

Définition : Caractéristique d'un dipôle

La caractéristique d'un dipôle est le tracé de $I = f(U)$ ou $U = g(I)$ en régime continu.

La figure E1.6 montre des exemples de caractéristiques de dipôles courants.

En régime variable, non seulement u et i interviennent, mais leurs dérivées également. Par conséquent, la loi qui caractérise un dipôle en régime variable est une équation qui fait intervenir u et ses dérivées ($\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, ...) et i et ses dérivées ($\frac{di}{dt}$, $\frac{d^2i}{dt^2}$, ...) : on appelle cela une *équation différentielle*.

À partir de l'observation des caractéristiques des dipôles, on déduit un certain nombre de définitions sur les dipôles en régime continu, qu'on peut étendre au régime variable :

Définition : Dipôle passif ou actif

En régime continu, un dipôle est *passif* si sa caractéristique passe par $(0, 0)$; de manière plus générale, un dipôle est passif s'il n'est parcouru par aucun courant lorsqu'on impose une tension nulle à ses bornes. Dans le cas contraire, il est *actif*.

Par exemple, sur la figure E1.6, la résistance, la lampe et la LED sont des dipôles passifs, et la pile est active.

Définition : Dipôle symétrique ou polarisé

En régime continu, un dipôle est *symétrique* si sa caractéristique est impaire ; de manière plus générale, un dipôle est symétrique si sa loi reste vraie lorsqu'on change en même temps les signes de i et u . Dans le cas contraire, il est *polarisé*.

Par exemple, sur la figure E1.6, la résistance et la lampe sont symétriques, tandis que la LED et la pile sont polarisées.

Remarque : On choisira toujours un symbole qui indique si le dipôle est symétrique ou pas. Quant au vrai composant, s'il est polarisé, il y aura un symbole dessus qui permettra de reconnaître ses deux côtés.

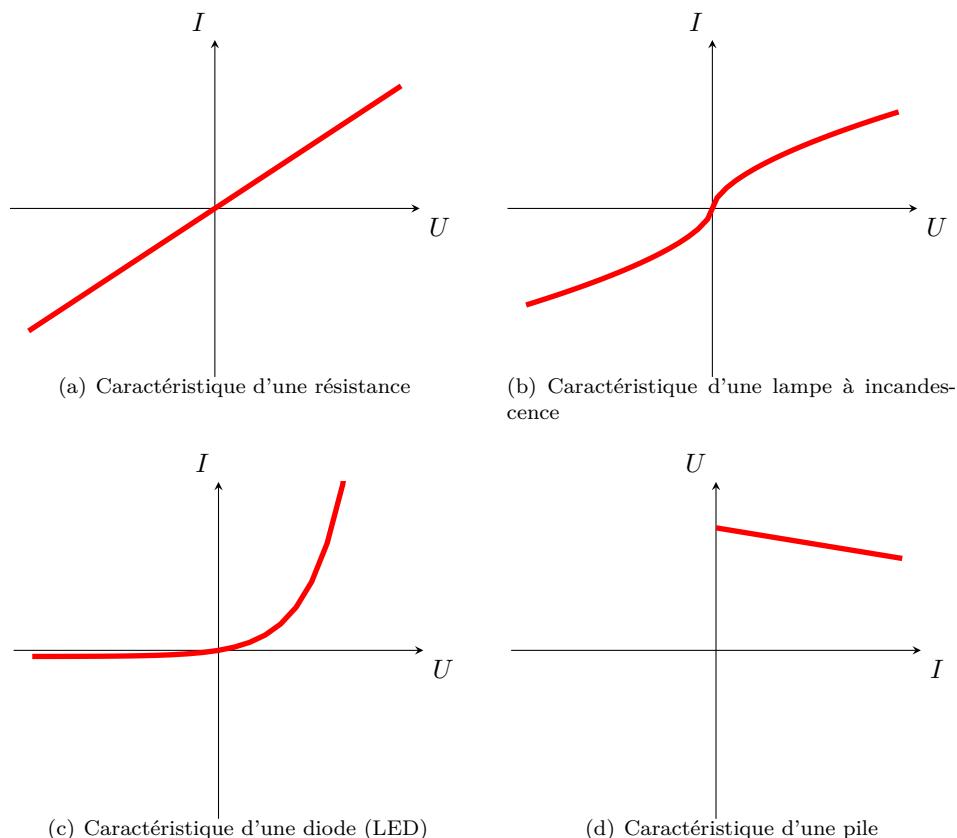


FIGURE E1.6 – Caractéristiques de quelques dipôles.

Définition : Dipôle linéaire

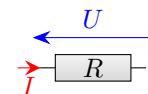
En régime continu, un dipôle est *linéaire* si la relation entre I et U suit une loi linéaire (ou plus exactement affine). En régime variable, un dipôle est *linéaire* si la loi entre u et i est linéaire (ou affine), c'est-à-dire de la forme $a_0 u + a_1 \frac{du}{dt} + a_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \dots = b_0 i + b_1 \frac{di}{dt} + \dots + C$

Par exemple, sur la figure E1.6, la résistance et la pile sont linéaires, tandis que la lampe et la LED sont non linéaires.

On verra au cours de l'année que les lois linéaires sont beaucoup plus faciles à traiter que les autres. Par conséquent, pour cette année, nous allons étudier surtout les dipôles linéaires fondamentaux.

B.2. Les résistors, ou conducteurs ohmiques**Définition : Résistor**

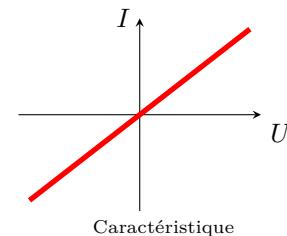
Un résistor (souvent appelé résistance électrique, ou encore conducteur ohmique) est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

**Loi d'Ohm**

Le coefficient de proportionnalité entre la tension et l'intensité s'appelle la *résistance* R , en Ohm (Ω). On a donc la loi d'Ohm en convention récepteur :

$$U = R \cdot I \text{ ou } I = G \cdot U \quad (\text{E1.5})$$

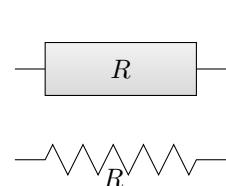
où $G = \frac{1}{R}$ est la conductance, en Siemens (S).



Le modèle du conducteur ohmique est un modèle théorique, mais qui modélise assez bien un fil ; vous montrerez l'année prochaine qu'un fil de longueur L et de section S a pour résistance $R = \frac{\rho L}{S}$ où ρ est la *résistivité électrique* du matériau qui constitue le fil. Par exemple, en travaux pratiques, on utilise des fils de 1 m de long et $0,75 \text{ mm}^2$ de section, en cuivre de résistivité $\rho = 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$; ce fil a donc une résistance $R = 23 \text{ m}\Omega$ qui est très faible : même si on fait passer un fort courant de 2 A dans ce fil, la tension à ses bornes ne sera que de 46 mV : on voit qu'on peut la négliger, comme on en a fait la remarque précédemment.

Pour fabriquer des composants de résistance plus forte, on utilise souvent des pistes en carbone, de résistivité plus élevée ($\rho = 4 \times 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$) et de faible section. En TP, on utilisera souvent des résistances comprises entre 10Ω et $1 \text{ M}\Omega$.

Remarque : Le rectangle est le symbole européen du résistor ; le symbole américain est un zigzag (figure E1.7).



(a) Symbole (européen en haut, américain en bas)



(b) Résistances classiques au carbone ; la valeur de la résistance est représentée par un code de couleurs.

FIGURE E1.7 – Résistance électrique.

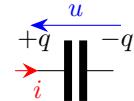
B.3. Les condensateurs

Le condensateur a été découvert en 1745 sous la forme de la bouteille de Leyde. À l'époque où on ne disposait pas encore de sources de charges continues, et où seule l'électricité statique était manipulée, on découvrit qu'en plaçant deux feuilles métalliques de part et d'autres d'une plaque en verre, on pouvait stocker des charges électriques.

Définition : Condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux plaques métalliques placées l'une vis-à-vis de l'autre (les *armatures*). Il est capable de stocker deux charges électriques opposées $+q$ et $-q$ sur ces armatures, proportionnelles à la tension u entre les plaques selon la loi

$$q = C.u \quad (\text{E1.6a})$$



où C est la capacité du condensateur, en Farads (F). On en déduit la relation

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad (\text{E1.6b})$$

Démonstration

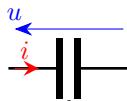
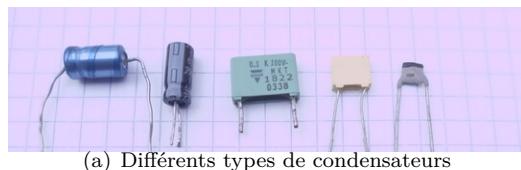
Si on admet la relation $q = C.u$ (que vous démontrerez l'année prochaine), alors un bilan de charge entre t et $t + dt$ indique que $q(t + dt) = q(t) + \text{la petite charge qui entre en un temps } dt = q(t) + i.dt$ donc $\frac{dq}{dt} = i$ soit $i = \frac{d(C.u)}{dt} = C \frac{du}{dt}$ si $C = cst$.

Remarque : Un condensateur est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

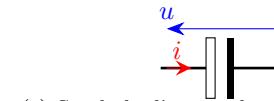
Remarque : La capacité classique d'un condensateur utilisé en TP varie entre le pF ($1 \times 10^{-12} \text{ F}$) et le μF ($1 \times 10^{-6} \text{ F}$). Quand on a besoin de capacités plus fortes, on utilise des condensateurs particuliers, les condensateurs chimiques, mais qui ont la particularité d'être polarisés (la tension u à leur bornes ne doit pas être trop négative). Cf. figure E1.8.

Propriété : Continuité de la tension aux bornes d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours **continue mathématiquement**.



(b) Symbole d'un condensateur non polarisé



(c) Symbole d'un condensateur polarisé

FIGURE E1.8 – Condensateurs.

Démonstration

D'après la loi du condensateur, la tension à ses bornes est dérivable, donc continue mathématiquement.

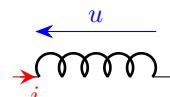
Cette propriété indique une première utilité d'un condensateur : il peut servir à supprimer les discontinuités (ou les variations brusques) de tension ; par exemple les pics de tension dus à des décharges d'électricité statique. Il sert également à stocker de l'énergie, comme on le verra à la fin de ce chapitre.

B.4. Les bobines (ou inductances)

Définition : Inductance

Une bobine est un enroulement de fil formant un grand nombre de tours. On la modélise par un composant idéalisé (inductance) dont la loi est

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (\text{E1.7})$$



où L est l'inductance, en Henry (H).

Remarque : Une inductance est un dipôle passif, symétrique et linéaire.

Remarque : Les bobines utilisées en TP ont des inductances de l'ordre de quelques dizaines de mH.

Nous démontrerons à la fin de l'année la loi de l'inductance écrite ci-dessus. On peut simplement retenir pour le moment que :

- plus une bobine a de tours de fils, plus son inductance L est grande
- on peut augmenter beaucoup l'inductance d'une bobine en mettant en son milieu un matériau magnétique comme du fer (cf. figure E1.9)



FIGURE E1.9 – Bobines ou inductances (torique à gauche, axiale à droite).

Remarque : Pour faire une bobine, il faut une grande longueur de fil ; du coup, la résistance de ce fil n'est pas toujours négligeable. La modélisation d'une bobine par une simple inductance est le modèle le plus simple ; parfois, pour plus de réalisme, on modélisera une bobine par une inductance L en série avec une résistance R ; en notant u la tension aux bornes de l'ensemble, on a alors la relation $u = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i$.

Propriété : Continuité de l'intensité à travers une bobine

L'intensité qui traverse une bobine est toujours **continue mathématiquement**.

Démonstration

D'après la loi de la bobine, l'intensité qui la traverse est dérivable, donc continue mathématiquement.

Cette propriété indique que le courant qui traverse une bobine ne peut pas s'éteindre instantanément ; ainsi, lorsqu'on débranche un moteur (constitué de plusieurs bobines), une étincelle apparaît dans le circuit pour que le courant décroisse de façon continue.

Une bobine peut donc être utilisée pour éviter les variations de courant ; mais elle a une autre utilité : elle stocke de l'énergie, comme on le verra à la fin du chapitre.

B.5. Les générateurs linéaires

Il existe de nombreuses sources d'énergie électrique ; la figure E1.10 en représente quelques-uns qui créent du continu ; les tensions alternatives sont produites par des alternateurs ou des onduleurs (figure E1.11).

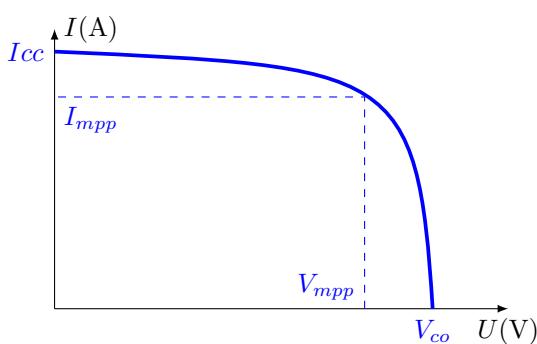


FIGURE E1.10 – Générateurs continus.



FIGURE E1.11 – Générateurs alternatifs.

De telles alimentations sont des dipôles actifs : même si aucun courant ne circule, il existe une tension à leurs bornes ; mais lorsqu'un courant circule, cette tension change : la figure E1.12 montre un exemple de documentation technique d'un panneau solaire. On voit que la caractéristique est une courbe non linéaire, mais qu'on peut modéliser assez bien par deux morceaux, un au voisinage de I_{cc} , et un autre au voisinage de V_{co} .



(a) Caractéristique courant-tension d'une cellule photovoltaïque

Caractéristiques Photovoltaïques	
Puissance nominale	500 W
Tolérance de puissance en sortie	+/-3%
Rendement minimum garanti du module	20,06 %
Tension à puissance nominale (V_{mpp})	37,84 V
Intensité à puissance nominale (I_{mpp})	13,22 A
Tension en circuit ouvert (V_{co})	45,6 V
Intensité de court-circuit (I_{cc})	14,07 A

* Conditions STC (AM 1,5 – 1000 W/m² – 25°C)
Tolérance de mesure : +/- 3%

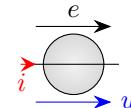
(b) Caractéristiques d'un panneau Dualsun™ Flash® 500.

FIGURE E1.12 – Exemples de caractéristiques techniques de cellules photovoltaïques.

On propose donc deux modèles idéaux de générateurs, qui seront valables uniquement dans une certaine plage de fonctionnement.

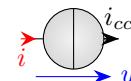
Définition : Générateur idéal de tension

Un générateur idéal de tension impose entre ses bornes une tension constante quel que soit le courant qu'il débite : $u = e$.
 e s'appelle la force électromotrice.



Définition : Générateur idéal de courant

Un générateur idéal de courant débite une intensité constante quelle que soit la tension à ses bornes : $i = i_{cc}$.
 i_{cc} s'appelle le courant de court circuit.



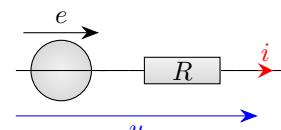
Remarque : Parfois on voit le symbole du générateur idéal de courant avec la flèche i_{cc} à côté, comme une tension, ce qui prête à confusion.

Dans un générateur réel de tension, quand on demande plus de courant, la tension baisse un peu. On peut modéliser cela par une loi linéaire grâce au modèle de Thévenin :

Définition : Modèle du générateur de Thévenin

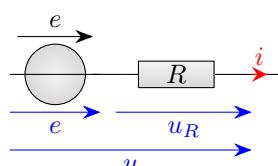
Un générateur linéaire peut être modélisé par un modèle de Thévenin : un générateur idéal de tension de fem e en série avec une résistance R ; on a alors la relation caractéristique

$$u = e - R.i \quad (\text{E1.8})$$



Démonstration

Notons u_R la tension aux bornes de la résistance :



Alors d'après la loi d'additivité des tensions, $u = e + u_R$. Or d'après la loi d'Ohm, $u_R = -R.i$ (le signe $-$ vient de ce que la résistance est orientée en convention générateur et non pas récepteur), ce qui donne bien $u = e - R.i$.

Remarque : On appelle *intensité de court-circuit* d'un générateur le courant qu'il débite si on impose une tension nulle entre ses bornes. Dans le cas d'un générateur de Thévenin de fem e et de résistance interne R , on voit que $u = 0 \Leftrightarrow i = \frac{e}{R}$.

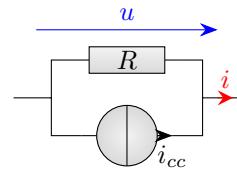
Exemple : Pile

Une pile électrique a pour fem 1,5 V et pour intensité de court-circuit 8 A ; calculez sa résistance interne.

La fem correspond au modèle de Thévenin : $E = 1,5$ V. L'intensité de court-circuit vaut $\frac{E}{R}$ (un schéma où on referme le générateur par un fil le montre facilement) donc $R = \frac{1,5}{8} = 0,19\Omega$.

Remarque : Pour les générateurs se comportant comme des générateurs de courant presque idéaux, il existe un autre modèle, celle du générateur de Norton, qui met un générateur idéal de courant en parallèle avec une résistance interne ; on a alors la loi caractéristique

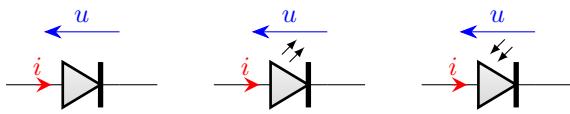
$$i = i_{cc} - \frac{u}{R}$$



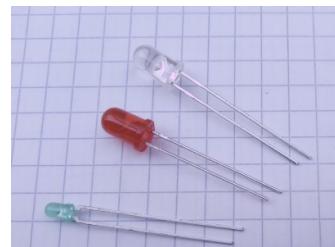
B.6. Les diodes (Hors programme)

Les diodes sont des composants non linéaires, donc très intéressants mais qui rendent l'analyse des circuits plus difficiles. Elles ne sont pas au programme, j'en parle ici uniquement dans un but de culture générale mais rien n'est à savoir à leur sujet.

Les diodes sont des composants utilisés dans de très nombreux domaines ; la figure E1.13 en montre différents types. Les diodes les plus simples sont les diodes de redressement, utilisées entre autres dans la conversion de puissance (tension continue/alternative) et dans l'électronique numérique (portes logiques). Les diodes électroluminescentes (LED) se comportent de la même manière mais émettent de la lumière lorsqu'un courant les traverse ; les photodiodes, quant à elles, permettent en plus de convertir la lumière reçue en courant, de manière à former des unités photovoltaïques.



(a) De gauche à droite : diode de redressement, diode électroluminescente et photodiode.



(b) Diodes électroluminescente (LED)

FIGURE E1.13 – Différents types de diodes.

La caractéristique générale d'une diode est représentée sur la figure E1.14 : c'est une courbe d'allure à peu près exponentielle, avec un courant très faible pour des tensions négatives, et qui devient très important pour des tensions positives. Pour pouvoir traiter ce composant, on va proposer un modèle idéalisé permettant de conserver le comportement général de la diode.

Modèle de la diode idéale

On modélise une diode idéale de tension seuil U_s par deux régimes de fonctionnement (figure E1.14) :

- tant que la tension reste inférieure à la tension seuil U_s de l'ordre du Volt, la diode est *bloquée* et aucun courant ne passe : $U < U_s$ et $I = 0$ en régime bloqué
- si la tension atteint la tension seuil, alors la diode est *passante* et l'intensité passe dans un seul sens : $U = U_s$ et $I > 0$ en régime passant.

Remarque : Pour les diodes au silicium (les plus courantes), $U_s \approx 0,7$ V.

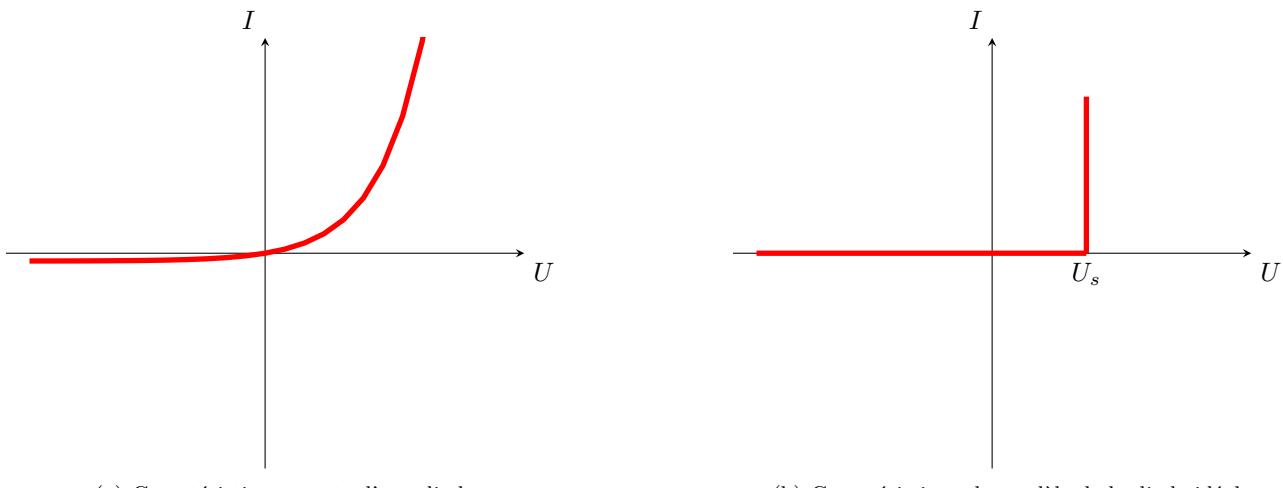


FIGURE E1.14 – Caractéristiques de diodes.

Le traitement des circuits à diode est compliqué à cause des deux régimes de fonctionnement distincts : il faut émettre une hypothèse sur le régime de fonctionnement de la diode, puis calculer les caractéristiques du circuit, et à la fin vérifier si l'hypothèse de départ était juste ; si ce n'est pas le cas, on repart sur l'autre hypothèse.

E1.C. Puissance électrique

L'électricité consiste donc à faire passer du courant dans des composants à l'aide d'une tension imposée. Ce courant, ou charge électriques en mouvement, apporte avec lui une énergie.

C.1. Lois générales

Définition : Énergie et puissance

Une énergie est une grandeur que possède un système et qu'il peut échanger pour réaliser certaines actions ; elle se mesure en Joules (J).

Un travail W représente une énergie échangée, par exemple par le moyen de l'électricité. Il se mesure aussi en Joules.

Une puissance moyenne est le quotient d'un travail par le temps mis pour l'échanger : $\mathcal{P}_{moy} = \frac{W}{\Delta t}$; il se mesure en Watts ($1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$).

Une puissance (instantanée) est la puissance moyenne calculée sur un temps très court : $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\delta t}$.

La définition de l'énergie est vague. Quelles actions ? Mettre en mouvement, éclairer, chauffer,... Pour faire tout cela, il faut de l'énergie.

Remarque : La relation $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\delta t}$ peut être inversée : le travail échangé entre deux instants t_1 et t_2 vaut $W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$; si $\mathcal{P} = cst$ alors $W = \mathcal{P} \cdot (t_2 - t_1)$.

Définition : Puissance reçue/fournie par un dipôle

Pour un dipôle orienté en *convention récepteur*, la puissance électrique *reçue* vaut $\mathcal{P}_{recue} = u.i$; c'est l'opposé de la puissance fournie.

Pour un dipôle orienté en *convention générateur*, la puissance électrique *fournie* vaut $\mathcal{P}_{fournie} = u.i$; c'est l'opposé de la puissance reçue.

Définition : Caractère récepteur ou générateur

Un dipôle a un caractère récepteur si la puissance qu'il reçoit est positive, et générateur dans le cas contraire.

La puissance consommée par un récepteur varie sur de grands ordres de grandeur. Le Watt est une unité assez petite ; par exemple un téléphone portable en utilisation consomme de l'ordre du Watt ; en veille il tombe en-dessous

de 100 mW. Pour des systèmes électroniques fonctionnant sur batterie avec de grandes durées de vie, on peut tomber sous le µW. À l'opposé, les systèmes électriques de puissance consomment rapidement plusieurs kW (cf. tableau E1.3).

Système	Puissance
puce RFID	≈1mW
smartphone (veille)	≈50mW
smartphone (utilisation)	≈500mW
smartphone (charge)	jusqu'à 50W
éclairage domestique LED	≈10W
cuisinière à induction	2kW
voiture électrique Zoé	65kW
TGV M	9MW
pile AA	≈1W
panneau photovoltaïque 1 m ²	≈100W
éolienne	10MW
tranche de centrale nucléaire	1GW

TABLEAU E1.3 – Valeur de quelques puissances usuelles.

C.2. Puissance consommée par une résistance

Commençons par le dipôle le plus universel, la résistance (car on rappelle que tout fil réel possède une résistance, même faible).

Propriété : Puissance Joule

La puissance reçue par une résistance vaut $\mathcal{P} = R.i^2 = \frac{u^2}{R}$, elle est toujours positive. Une résistance a donc toujours un caractère récepteur.

Démonstration

En convention récepteur, $\mathcal{P} = u.i$; or $u = R.i$ par la loi d'Ohm, donc $\mathcal{P} = R.i^2$.

On peut aussi écrire $i = \frac{u}{R}$ ce qui donne bien $\mathcal{P} = \frac{u^2}{R}$.

Une résistance consomme donc de la puissance électrique ; elle la convertit en une élévation de température. C'est le principe de base d'un radiateur ; mais le plus souvent, cette perte d'énergie est un défaut qu'on cherche à minimiser en ayant des résistances faibles. On le voit en particulier sur le bilan de puissance d'un générateur de Thévenin :

Propriété : Puissance fournie par un générateur linéaire

La puissance fournie par un générateur de Thévenin vaut $\mathcal{P} = e.i - R.i^2$: $e.i$ représente la puissance fournie par le générateur idéal de tension, et $-R.i^2$ la puissance perdue dans la résistance interne.

C.3. Énergie stockée par un condensateur ou une bobine

Contrairement à la résistance qui reçoit toujours de l'énergie, un condensateur ou une bobine peuvent en recevoir, la stocker, puis la rendre : ils ont parfois un caractère récepteur, parfois un caractère générateur.

Propriété : Énergie stockée par un condensateur

Un condensateur de capacité C ayant une tension u à ses bornes stocke une énergie

$$E_C = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (\text{E1.9})$$

Démonstration

En convention récepteur, la puissance reçue par le condensateur vaut $\mathcal{P} = u.i = u.C \frac{du}{dt}$. On rencontrera souvent dans la suite des dérivées de cette forme : $u \cdot \frac{du}{dt}$, il faut apprendre à les reconnaître : en multipliant et en divisant

par 2, on obtient $\frac{1}{2} \cdot 2.u \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt}$. Donc $\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$.

La puissance reçue par le condensateur est donc la dérivée d'une quantité qui ne dépend que de l'état du condensateur : cette quantité représente l'énergie stockée par le condensateur.

Un condensateur stocke donc de l'énergie électrique au même titre qu'une batterie, mais il y a des différences :

- une batterie stocke l'énergie avec une tension quasiment constante (sauf quand elle est vraiment à plat) ; alors que la tension d'un condensateur croît beaucoup quand on le charge
- une batterie stocke l'énergie électrique sur un temps assez long, alors qu'un condensateur a des «fuites» de charges entre ses armatures qui font qu'il ne peut pas la stocker sur des temps longs
- en contrepartie, un condensateur est capable de recevoir de très fortes puissances et donc de stocker de l'énergie très rapidement, alors qu'une batterie a une vitesse de charge limitée sous peine de gros dégâts.

Propriété : Énergie stockée par une inductance

Une inductance L parcourue par un courant i stocke une énergie

$$E_L = \frac{1}{2} L i^2 \quad (\text{E1.10})$$

Démonstration

En convention récepteur, la puissance reçue par l'inductance vaut $\mathcal{P} = u \cdot i = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i$. On reconnaît $i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{1}{2} \frac{di^2}{dt}$ donc $\mathcal{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)$.

La puissance reçue par l'inductance est donc la dérivée d'une quantité qui ne dépend que de l'état de l'inductance : cette quantité représente l'énergie stockée par l'inductance.



Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Grandeurs électriques	
Charge électrique, intensité du courant électrique. Régime variable et régime continu.	Relier l'intensité d'un courant électrique au débit de charges.
Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance électrique.	Utiliser la loi des nœuds et la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer des ordres de grandeur d'intensités, de tensions et de puissances dans différents domaines d'application.
Dipôles électriques usuels	
Source de tension.	Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin. Évaluer la résistance de sortie d'une source de tension réelle.
Système à comportement résistif.	Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance.
Système à comportement capacitif; modèle du condensateur idéal. Relation entre charge et tension ; capacité d'un condensateur. Énergie stockée.	Établir l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur. Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur en fonction de ses caractéristiques.
Système à comportement inductif : modèle de la bobine idéale. Relation entre intensité et tension ; inductance d'une bobine.	Établir l'expression de l'énergie stockée dans une bobine.

- (a). $-0,1 \text{ A}$
 (c). $0,1 \text{ A}$

- (b). $0,7 \text{ A}$
 (d). $-0,7 \text{ A}$

Q9.

$I_5 =$

- (a). $0,8 \text{ A}$
 (c). $-0,8 \text{ A}$

- (b). $-1,6 \text{ A}$
 (d). $1,6 \text{ A}$

Q10.

$I_{11} =$

- (a). $1,3 \text{ A}$
 (c). $1,7 \text{ A}$

- (b). $1,2 \text{ A}$
 (d). $0,9 \text{ A}$

Q11.

$I_{12} =$

- (a). $0,7 \text{ A}$
 (c). 0 A

- (b). $0,2 \text{ A}$
 (d). $-0,5 \text{ A}$

Q12.

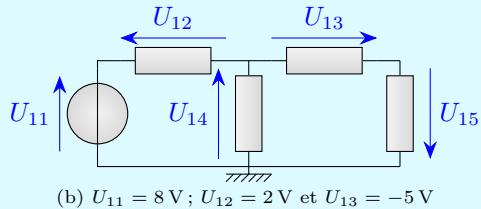
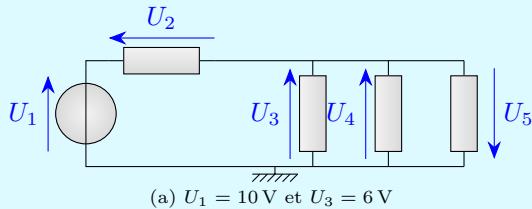
$I_{15} =$

- (a). $1,5 \text{ A}$
 (c). 0 A

- (b). $1,0 \text{ A}$
 (d). $0,5 \text{ A}$

QCM : Loi des mailles, tensions

On travaille sur les deux circuits suivants, où certaines tensions (indiquées en-dessous) sont connues.



Q13.

$U_4 =$

- (a). -2 V
 (c). 2 V

- (b). 10 V
 (d). 6 V

Q14.

$U_5 =$

- (a). -2 V
 (c). -6 V

- (b). 2 V
 (d). 6 V

Q15.

$U_2 =$

- (a). -4 V
 (c). 4 V

- (b). 6 V
 (d). -2 V

Q16.

$U_{14} =$

- (a). 6 V
 (c). 8 V

- (b). 2 V
 (d). 4 V

Q17.

$$U_{15} =$$

- (a). -1 V (b). 4 V
 (c). 2 V (d). -3 V

✓ QCM : Puissance électrique ✗

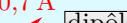
Q18.

 $1,1 \text{ A}$


 $-3,2 \text{ V}$

- (a). ce dipôle est un récepteur
 (c). $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = 3,5 \text{ W}$
- (b). ce dipôle est un générateur
 (d). $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = 3,5 \text{ W}$

Q19.

 $0,7 \text{ A}$


 $-2,4 \text{ V}$

- (a). $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = -1,7 \text{ W}$
 (c). $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = 1,7 \text{ W}$
- (b). ce dipôle est orienté en convention génératrice
 (d). ce dipôle est orienté en convention récepteur

Q20.

 $0,35 \text{ A}$


 $5,2 \text{ V}$

- (a). $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = 1,8 \text{ W}$
 (c). ce dipôle est un récepteur
- (b). $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = -1,8 \text{ W}$
 (d). ce dipôle est un générateur

Q21.

 $-2,2 \text{ A}$


 $-4,1 \text{ V}$

- (a). ce dipôle est orienté en convention génératrice
 (c). ce dipôle est un générateur
- (b). $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = -9 \text{ W}$
 (d). $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = 9 \text{ W}$

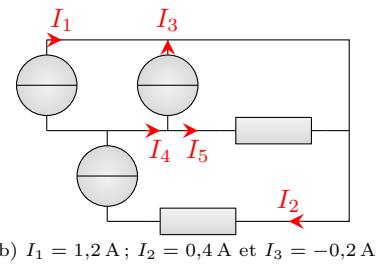
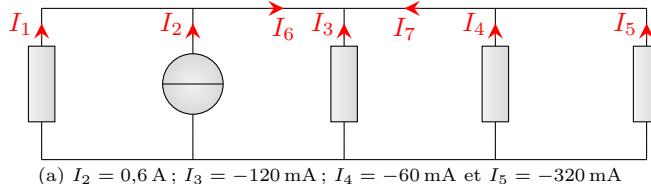
Lois des circuits électriques

Exercices

réponses page 207

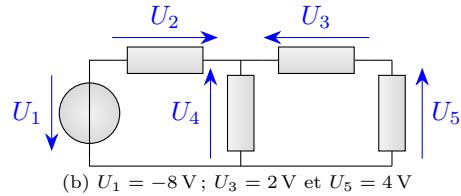
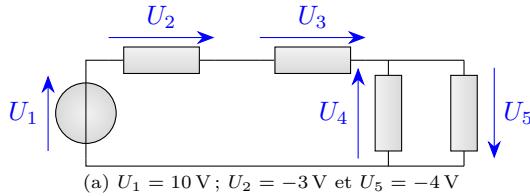
Exercice E1.1 : Application de la loi des nœuds [*]

Pour chaque figure, trouvez les valeurs de tous les courants inconnus.



Exercice E1.2 : Loi des mailles ou loi d'additivité [*]

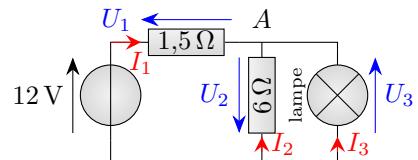
Pour chaque figure, trouvez les valeurs des tensions inconnues.



Exercice E1.3 : Calcul d'une tension et d'un courant

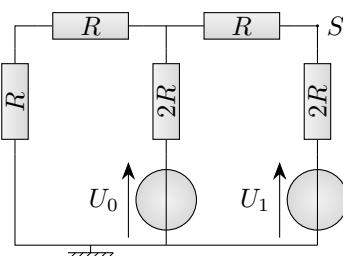
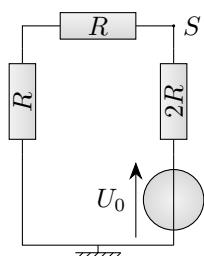
Dans le circuit ci-contre, la lampe est assimilable électriquement à une résistance $R_l = 3,5 \Omega$.

1. Écrivez les lois des mailles appliquées à chaque maille, en fonction des tensions U_k puis des courants I_k (attention aux signes!).
2. Écrivez la loi des nœuds au nœud A .
3. Résolvez le système pour calculer I_3 .



Exercice E1.4 : Convertisseur Numérique-Analogique [**]

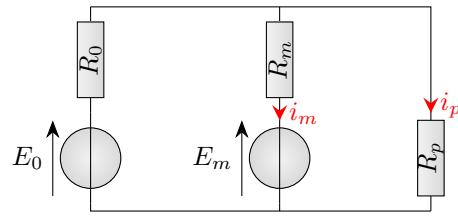
On considère les deux circuits suivants :



1. Circuit de gauche : placez les tensions et les intensités inconnues, puis appliquez la loi des mailles et la loi d'Ohm. Déduisez-en le courant, puis le potentiel V_S du point S , en fonction de U_0 et R .
2. Circuit de droite : par la même méthode, écrivez 2 lois des mailles et 1 loi des nœuds, et déduisez-en un système de 3 équations ayant 3 intensités comme inconnues. Déduisez-en l'intensité dans la branche de droite, puis montrez que $V_S = \frac{2U_1 + U_0}{4}$.
3. Essayez de deviner ce que vaudra V_S si on met des générateurs U_0, U_1, \dots, U_k . À quoi sert un tel montage ?

Exercice E1.5 : Voiture radiocommandée [**]

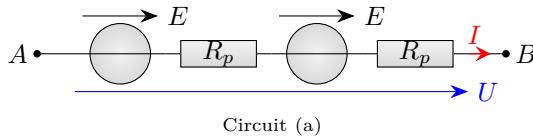
Dans une voiture radiocommandée, les piles (représentées par un générateur de Thévenin de fem $E_0 = 6\text{ V}$ et de résistance interne $R_0 = 1,5\Omega$) alimentent un moteur (représenté électriquement par un générateur de tension $E_m = 0,7\text{ V}$ et une résistance $R_m = 0,6\Omega$) et des ampoules de phares (représentés électriquement par une résistance $R_p = 110\Omega$).



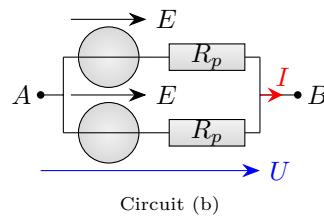
- Exprimez et calculez le courant i_m à travers le moteur et le courant i_p à travers les phares.
- Exprimez et calculez la puissance reçue par le moteur et celle reçue par les phares.
- Les piles peuvent débiter $8,8\text{ A} \cdot \text{h}$; pendant combien de temps la voiture fonctionnera-t-elle?

Exercice E1.6 : Association de piles [**]

On dispose de piles électriques qu'on modélisera par des générateurs de Thévenin de fem $E = 1,5\text{ V}$ et de résistance interne $R_p = 0,6\Omega$. On souhaite associer deux piles de deux manières schématisées sur les deux circuits ci-dessous :



Circuit (a)



Circuit (b)

Dans les deux cas, on cherche à établir la relation entre la tension U et le courant I de manière à trouver le générateur équivalent aux deux piles ; on remarquera que rien n'est dessiné entre A et B , mais il peut se trouver toutes sortes de circuits.

- Circuit (a) : montrer que, dans une telle disposition, la fem vaut $2E$ et la résistance interne $2R_p$; quel est l'intérêt de cette configuration ?
- Circuit (b) : montrer que, dans une telle disposition, la fem vaut E et la résistance interne $R_p/2$; quel est l'intérêt de cette configuration ?
- Dans chaque cas, on branche entre A et B une résistance $R = 1\Omega$. Calculez le courant qui la traverse dans les deux cas.

Exercice E1.7 : Caractéristiques d'une alimentation électrique [**]

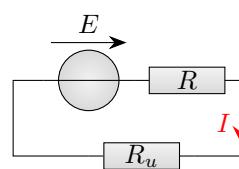
On dispose au laboratoire d'une série de générateurs du même modèle; on cherche à les modéliser par un générateur de Thévenin.

- Lorsqu'on mesure sa tension avec un voltmètre (aucun courant ne la traverse alors) on trouve 10 V
- Lorsqu'on court-circuite les deux bornes par un fil, l'intensité débitée vaut 200 mA .

Déduisez-en les caractéristiques de ce générateur.

Exercice E1.8 : Adaptation d'impédance [**]

On veut alimenter une résistance R_u à l'aide d'un générateur de Thévenin de fem E et de résistance interne R .



- Exprimez l'intensité I qui traverse le circuit.
- En déduire la puissance \mathcal{P} reçue par la résistance R_u .
- On fait varier la valeur de la résistance R_u . Tracez le tableau de variations de \mathcal{P} en fonction de R_u , et vérifiez que \mathcal{P} passe par un maximum lorsque $R_u = R$ (on dit alors qu'on a «adapté les impédances»).

Exercice E1.9 : Puissance délivrée par une pile [**]

On relève les points suivants de la caractéristique d'une pile électrochimique $4,5V$:

$U(V)$	4,52	4,45	4,39	4,32	4,26	4,15	3,41	1,27
$I(mA)$	0	50	100	150	200	250	300	350

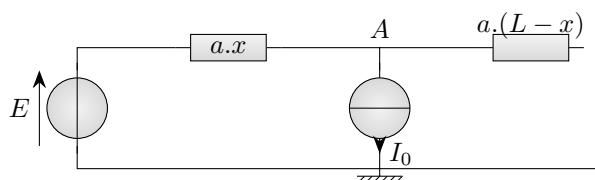
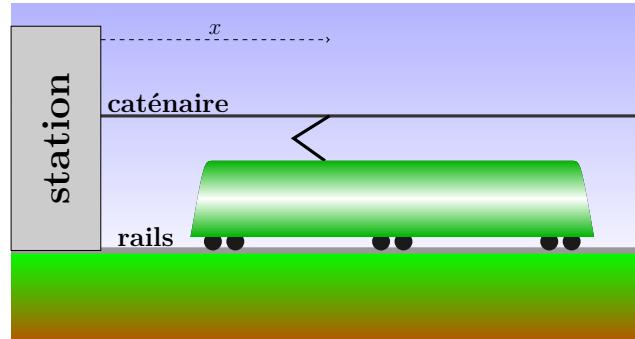
- Tracez la caractéristique $U(I)$ de la pile. Jusqu'à quel courant peut-on la modéliser par un générateur linéaire de Thévenin ?
- Par une régression linéaire, déterminez sa fem et sa résistance interne.
- Complétez la dernière ligne du tableau, et déduisez-en la puissance maximale que peut fournir cette pile.

Exercice E1.10 : Alimentation d'un tramway [***]

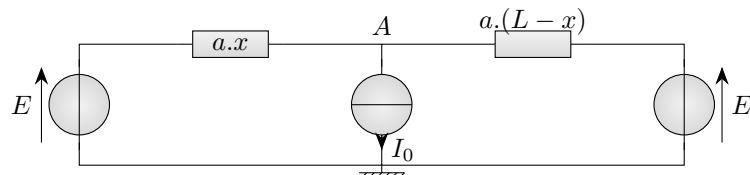
Un tramway est alimenté par l'intermédiaire de deux conducteurs électriques : la caténaire, au-dessus de lui, et les rails sur lesquels il repose.

À un bout de la ligne est installée une station d'alimentation. On la modélisera par un générateur idéal de tension de fem $E = 750\text{ V}$. Le tramway consomme une intensité $I_0 = 800\text{ A}$. Les rails ont une résistance négligeable ; par contre, la résistance de la caténaire n'est pas négligeable. On note a la résistance par unité de longueur de la caténaire. On note x la distance entre le tramway et la station d'alimentation, et $L = 2\text{ km}$ la longueur totale de la ligne.

Le schéma électrique équivalent est alors le suivant (la partie de droite ne sert à rien pour le moment) :



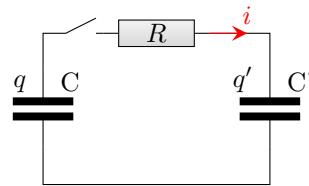
- Exprimez la tension V_A aux bornes du tramway à la position x .
- On mesure $V_A(L) = 450\text{ V}$; calculez a .
- Tracez l'allure de V_A en fonction de x .
- Exprimez la puissance consommée par le tramway en fonction de la position. Calculez numériquement sa valeur au milieu de la ligne.
- Pour que le tramway fonctionne, la tension ne doit pas passer en-dessous de 500 V . On ajoute donc une deuxième station en bout de ligne. Le schéma électrique équivalent est le suivant :



Exprimez $V_A(x)$. Calculez numériquement $V_A(L/2)$, et tracez l'allure de la courbe donnant V_A en fonction de la position.

Exercice E1.11 : Décharge d'un condensateur dans un autre [***]

On considère la figure ci-contre contenant 2 condensateurs de capacités C et C' et une résistance. Initialement le condensateur C possède une charge q_0 , l'autre est déchargé. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur ; après un bref instant on obtient un état continu où les condensateurs ont des charges q_1 et q'_1 .



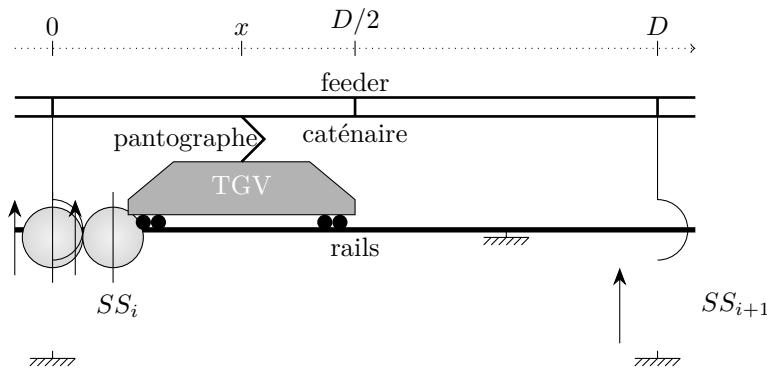
1. En appliquant deux fois la loi caractéristique du condensateur, montrer qu'au cours du temps, $q+q' = cst.$
Que vaut cette constante ?
2. Une fois que le système a atteint son équilibre, que vaut i ? En déduire une relation reliant q_1 et q'_1 .
3. En combinant les deux questions précédentes, montrer que $q_1 = \frac{C}{C+C'}q_0$; exprimez aussi q'_1 .
4. Par un bilan d'énergie, montrez que l'énergie finale est strictement inférieure à l'énergie initiale. Expliquez la cause.

Lois des circuits électriques
TDs numériques

réponses page 209

TD numérique : Alimentation électrique d'un TGV

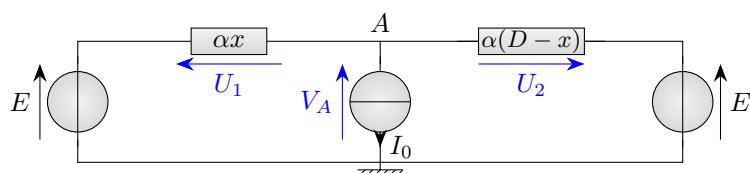
La puissance électrique est fournie aux TGV à partir de sous stations électriques $SS_{i=1,\dots,n}$ que l'on assimilera à des générateurs idéaux de tension continue $E = 25 \text{ kV}$ (en réalité, c'est de l'alternatif, mais cela ne change rien à l'étude). Ces sous stations sont implantées le long de la voie et espacées d'une distance $D = 60 \text{ km}$. Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au-dessus des rails. La motrice TGV reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe situé sur son toit. Tous les moteurs de la motrice sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la Terre. On peut schématiser le circuit d'alimentation par la figure ci-dessous :



Pour l'étude nous nous plaçons dans les conditions suivantes : le fil de la caténaire de section $s = 1,47 \text{ cm}^2$ est en cuivre de résistivité $\rho = 1,72 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$; la résistance d'une longueur x de caténaire aura donc une résistance $\frac{\rho x}{s} = \alpha x$ en notant $\alpha = \frac{\rho}{s}$. On néglige la résistance des rails. La tension des sous-stations étant nominale ($E = 25 \text{ kV}$), on suppose que l'intensité du courant qui circule dans les moteurs est $I_0 = 600 \text{ A}$. Le rail rectiligne est confondu avec l'axe Ox dont l'origine est placé à la dernière sous station électrique atteinte par le TGV. La variable x est donc définie modulo D .

1. Alimentation sans feeder

Si la caténaire est simple, le schéma électrique équivalent est le suivant :



- Appliquez la loi des mailles dans les deux mailles.
- Placez les courants I_1 et I_2 à travers les deux résistances. Par la loi des noeuds, écrivez une relation reliant ces deux intensités avec I_0 .
- Grâce à la loi d'Ohm, transformez cette relation en une relation entre U_1 , U_2 , I_0 , α , D et x .
- On a donc écrit en tout 3 équations sur les 3 inconnues U_1 , U_2 et V_A . Notre premier but va être d'évaluer V_A lorsque $x = \frac{D}{2}$. Pour cela, on va écrire le système sous forme matricielle. Pour cela, réarrangez les 3 équations sous la forme :

$$\begin{cases} a.U_1 + b.U_2 + c.V_A = d \\ e.U_1 + f.U_2 + g.V_A = h \\ i.U_1 + j.U_2 + k.V_A = l \end{cases}$$

Définissez alors deux tableaux sous Python : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} d & h & l \end{pmatrix}$.

Indication : On peut définir à la main un tableau 1D avec `np.array([d,h,l])` et 2D avec `np.array([[a,b,c],[e,f,g],[i,j,k]])` (à remplacer par leurs valeurs).

- (e) On résout alors ce système par la commande `solution=np.linalg.solve(A,B)` qui renvoie un tableau contenant les valeurs des trois inconnues. Dédouisez-en V_A .
- (f) Complétez alors le programme suivant pour calculer la tension V_A pour différentes valeurs réparties sur la ligne (on évite $x = 0$ et $x = D$ car on obtient parfois des divisions par 0).

```

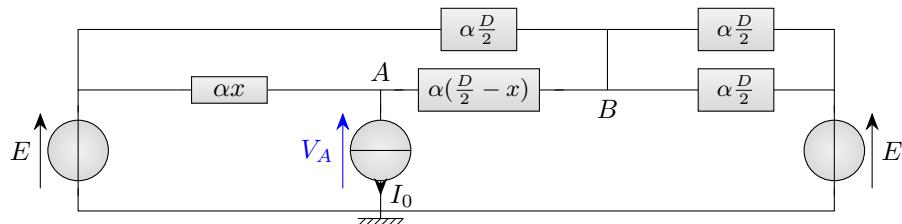
1 N=100
2 tab_x=np.linspace(D*0.001,D*0.999,N)
3 tab_VA=np.zeros(N)
4 for i in range(N):
5     x=tab_x[i]
6     ... calcul de VA
7     tab_VA[i]=VA

```

Tracez alors la courbe $V_A(x)$.

2. Alimentation avec feeder

Pour avoir moins de perte de tension, on ajoute un second câble au-dessus de la caténaire, le feeder, qui est relié à la caténaire en ses deux bouts et en son milieu. Le schéma électrique équivalent devient alors (dans le cas $x < \frac{D}{2}$, sinon il faut faire une symétrie droite/gauche) :



- (a) Simplifiez le circuit en associant 2 résistances.
- (b) Placez les tensions aux bornes de toutes les résistances.
- (c) Écrivez 3 lois des mailles et deux lois de nœuds (aux deux nœuds proches du centre, les nœuds des bords ne servent pas) exprimées en fonction des tensions grâce à la loi d'Ohm.
- (d) Résoudre le système obtenu de 5 équations à 5 inconnues pour x variant de $0,001D$ à $0,499D$. Tracez la courbe obtenue.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)

Le sens conventionnel du courant peut être choisi dans n'importe quel sens ; si le sens réel est opposé, le courant sera négatif.

Q2.(a)

Q3.(b)

Ce n'est vrai que pour une résistance orientée en convention récepteur.

Q4.(d)

Q5.(a) ET (b) ET (c)

Q6.(a)

Réponses au QCM : Loi des noeuds

Q7.(b)

$$I_1 = I_4 - I_2$$

Q8.(a)

$$I_3 = I_2 + I_6$$

Q9.(a)

$$I_5 = I_4 + I_6$$

Q10.(b)

Dans le gros noeud en haut à droite : $I_{11} + I_{13} + I_{17} = I_{16} + I_{18}$

Q11.(d)

$$I_{12} = I_{14} - I_{11}$$

Q12.(b)

$$I_{15} + I_{12} = I_{13} + I_{14}$$

Réponses au QCM : Loi des mailles, tensions

Q13.(d)

$$U_4 - U_3 = 0$$

Q14.(c)

$$U_5 + U_3 = 0$$

Q15.(c)

$$U_2 + U_3 - U_1 = 0$$

Q16.(a)

$$U_{14} + U_{12} - U_{11} = 0$$

Q17.(a)

$$U_{15} + U_{14} + U_{13} = 0$$

Réponses au QCM : Puissance électrique

Q18.(a) ET (c)

Q19.(b) ET (c)

Q20.(b) ET (c)

Q21.(a) ET (b) ET (c) ET (d)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E1.1 : Application de la loi des nœuds [*]

$$(a) \begin{cases} I_7 = -380 \text{ mA} \\ I_6 = 500 \text{ mA} \\ I_1 = -600 \text{ mA} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} I_4 = -0,8 \text{ A} \\ I_5 = -0,6 \text{ A} \end{cases}$$

Réponses de l'exercice E1.2 : Loi des mailles ou loi d'additivité [*]

$$(a) \begin{cases} U_4 = 4 \text{ V} \\ U_3 = -3 \text{ V} \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} U_2 = -2 \text{ V} \\ U_4 = 6 \text{ V} \end{cases}$$

Réponses de l'exercice E1.3 : Calcul d'une tension et d'un courant

1. $12 - 1,5I_1 + 6I_2 = 0$ et $6I_2 - 3,5I_3 = 0$ (en unités SI).
2. $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
3. $I_3 = -\frac{48}{23,5} = 2,0 \text{ A}$

Réponses de l'exercice E1.4 : Convertisseur Numérique-Analogique [**]

1. $V_S = \frac{U_0}{2}$.
2. $V_S = \frac{2U_1+U_0}{4}$.
3. $V_S = \frac{2^k U_k + \dots + 2^1 U_1 + 2^0 U_0}{2^{k+1}}$. Ce circuit sert à transformer un nombre binaire en une tension analogique.

Réponses de l'exercice E1.5 : Voiture radiocommandée [**]

1. Il faut établir un système de 2 équations à trois inconnues, d'où on tire

$$\begin{cases} i_m &= \frac{E_0 - E_m - E_m \frac{R_0}{R_p}}{R_0 + R_m + \frac{R_m R_0}{R_p}} = 2,50 \text{ A} \\ i_p &= \frac{E_m + R_m \cdot i_m}{R_p} = 20 \text{ mA} \end{cases}$$

2. $\mathcal{P}_m = R_p \cdot i_p^2 = 44 \text{ mW}$ et $\mathcal{P}_m = (E_m + R_m \cdot i_m) \cdot i_m = 5,5 \text{ W}$
3. $12500 \text{ s} = 3 \text{ j}29 \text{ min}$

Réponses de l'exercice E1.6 : Association de piles [**]

1. Écrire la loi d'additivité des tensions.
2. Écrire la loi des nœuds.
3. $I = 1,36 \text{ A}$ dans le premier cas et $I = 1,15 \text{ A}$ dans le second.

Réponses de l'exercice E1.7 : Caractéristiques d'une alimentation électrique [**]

$E = 10 \text{ V}$ et $R = 50 \Omega$.

Réponses de l'exercice E1.8 : Adaptation d'impédance [**]

1. $I = \frac{E}{R+R_u}$.
2. $\mathcal{P} = R_u \cdot I^2 = E^2 \frac{R_u}{(R+R_u)^2}$

R_u	0	R	$+\infty$
\mathcal{P}	0	$\frac{E^4}{4R}$	0

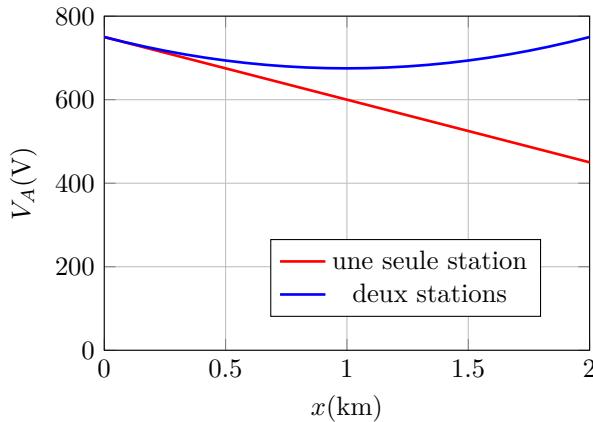
3.

Réponses de l'exercice E1.9 : Puissance délivrée par une pile [**]

1. On peut considérer que c'est linéaire jusqu'à $I = 250 \text{ mA}$.
2. Par régression linéaire, la fem vaut $4,53 \text{ V}$ et la résistance interne $1,4 \Omega$ (attention aux unités !)
3. $P_{max} = P(4,15 \text{ V}) = 1,04 \text{ W}$

Réponses de l'exercice E1.10 : Alimentation d'un tramway [***]

1. $E - a.x.I_0$
2. $a = 0,188 \Omega \cdot \text{km}^{-1}$
3. C'est une fonction linéaire (en rouge ci-dessous).



4. Au milieu de la ligne : $\mathcal{P} = 480 \text{ kW}$
5. $V_A = E - I_0.a.\frac{x(L-x)}{L}$. C'est un polynome d'ordre 2, dont on montre facilement qu'il atteint son minimum en $L/2$. La courbe est tracée en bleu sur le graphique précédent.

Réponses de l'exercice E1.11 : Décharge d'un condensateur dans un autre [***]

1. $q + q' = cst = q_0$.
2. À l'équilibre, $i = 0$. On en déduit que $C'.q_1 = C.q'_1$.
3. $q_1 = \frac{C}{C+C'}q_0$ et $q'_1 = \frac{C'}{C+C'}q_0$.
4. $E_c(\text{final}) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C+C'} < E_c(\text{initial}) = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$: de l'énergie a été dissipée par la résistance lors du transfert de charges.

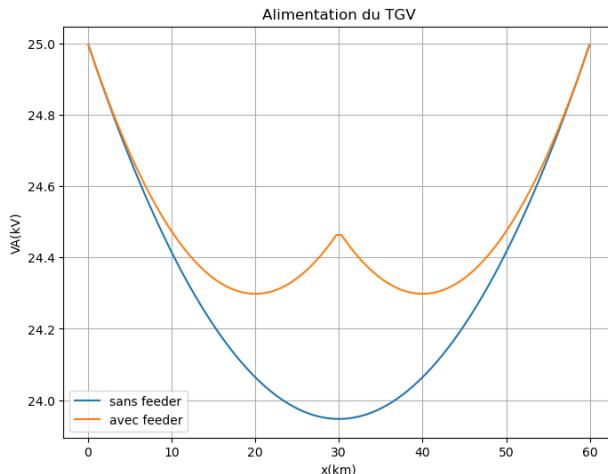
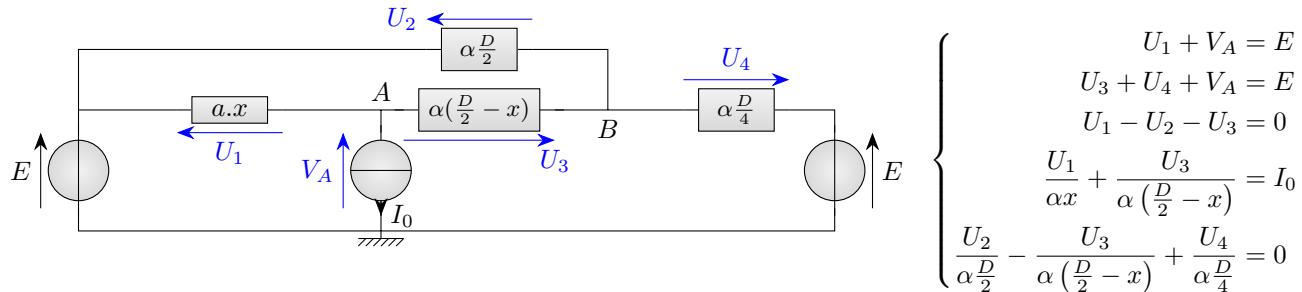
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Alimentation électrique d'un TGV

Sans feeder, on obtient les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} U_1 + V_A = E \\ U_2 + V_A = E \\ \frac{U_1}{\alpha x} + \frac{U_2}{\alpha(D-x)} = I_0 \end{cases}$$

Avec feeder, avec les notations ci-dessous, on obtient le système d'équations :



Sans le feeder, la tension au milieu de la ligne descend à 23,9 kV ; le feeder fait remonter cette valeur à 24,3 kV.

Circuits linéaires en régime continu

Cours

Dans le chapitre précédent, nous avons vu les lois fondamentales et les dipôles les plus utiles. Nous allons maintenant les mettre ensemble pour fabriquer des circuits. Il existe plusieurs conditions d'utilisation de ces circuits :

- le *régime continu*, lorsque toutes les tensions et intensités sont constantes, que nous allons étudier dans ce chapitre
- le *régime transitoire*, qui existe un court instant lorsqu'on allume les générateurs, le temps que les tensions et les courants s'établissent
- le *régime sinusoïdal*, que nous étudierons au second semestre.

Dans ce chapitre, nous n'utiliserons que des résistances et des générateurs linéaires, et à la fin un autre composant, l'amplificateur linéaire. Quant aux condensateurs et aux bobines, ils «disparaissent» en régime continu :

Propriété : Condensateurs et bobines en régime continu

En régime continu, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En régime continu, une bobine est équivalente à un fil.

Démonstration

Pour un condensateur, $i = C \frac{du}{dt}$. En régime continu, $u = cst$ donc $\frac{du}{dt} = 0$ donc $i = 0$: aucun courant ne passe, c'est comme un interrupteur ouvert.

Pour une bobine, on a de même $u = L \frac{di}{dt} = 0$ donc le courant circule sans aucune tension à ses bornes : c'est comme un fil.

E2.A. Association de résistances ; ponts diviseurs

Il existe des configurations simples, que nous rencontrerons souvent, dans lesquelles les circuits peuvent être simplifiés par association des résistances qui le composent.

Remarque : Les lois de cette section restent vraies même en régime non continu.

A.1. Résistances en série

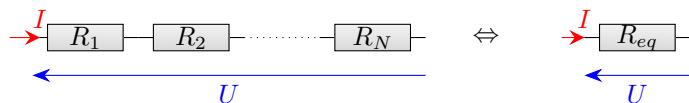
Définition : Association en série

On dit que des dipôles sont placés *en série* s'ils sont placés à la suite l'un de l'autre, dans la même branche. Des dipôles en série sont traversés par le même courant.

Propriété : Association de résistances en série

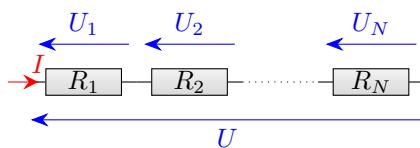
Des résistances R_k placées en série sont équivalentes à une seule résistance équivalente R_{eq} telle que

$$R_{eq} = \sum_k R_k \quad (\text{E2.1})$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les tensions aux bornes de chaque résistance :



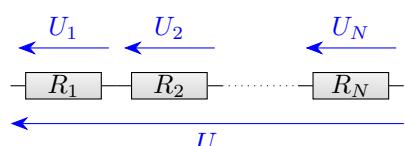
$$\begin{aligned}
 \text{On peut alors écrire : } U &= \sum_{k=1}^N U_k \text{ (loi d'additivité des tensions)} \\
 &= \sum_{k=1}^N R_k \cdot I \text{ (loi d'Ohm)} \\
 &= R_{eq} \cdot I \text{ avec } R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k
 \end{aligned}$$

Remarque : La résistance équivalente est toujours plus forte que les résistances initiales.

Cette propriété permet donc parfois de simplifier les circuits en remplaçant plusieurs résistances par une seule. Mais si on fait cela, on perd la tension aux bornes des différentes résistances. Si, au contraire, on cherche à connaître la tension aux bornes d'une seule résistance, il existe une loi extrêmement pratique :

Loi du pont diviseur de tension

Soient N résistances en série ; on met une tension U aux bornes de l'ensemble. Alors la tension aux bornes de la n -ième résistance vaut



$$U_n = U \frac{R_n}{\sum_{k=1}^N R_k} \quad (\text{E2.2})$$

Démonstration

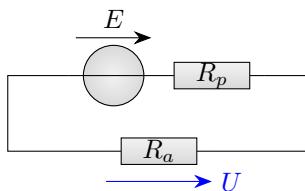
Plaçons le courant I pour que les résistances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm, $U_n = R_n \cdot I$. Or l'ensemble des résistances est équivalent à une seule résistance $R_{eq} = \sum_{k=1}^N R_k$, donc $U = R_{eq} \cdot I$. On en déduit que $I = \frac{U}{R_{eq}}$ donc $U_n = U \frac{R_n}{R_{eq}}$.

Remarque : Attention aux signes : ici, U_n et U sont dans le même sens ; s'ils sont en sens opposé, il faut ajouter un signe $-$ dans la loi.

Exemple : Alimentation d'une lampe de poche

On considère une lampe de poche ancienne (à ampoule à incandescence) alimentée par une pile. La pile est modélisée par un générateur de fem $e = 4,5 \text{ V}$ et de résistance interne $R_p = 1,5 \Omega$; l'ampoule est équivalente, électriquement, à une résistance $R_a = 6 \Omega$. Calculez la tension aux bornes de l'ampoule.

On commence par un schéma du circuit :



Dans ce circuit, les résistances R_p et R_a sont en série. La tension totale aux bornes de ces deux résistances est E . Le diviseur de tension indique donc que

$$U = E \frac{R_a}{R_a + R_p} = 3,6 \text{ V}$$

A.2. Résistances en parallèle/dérivation

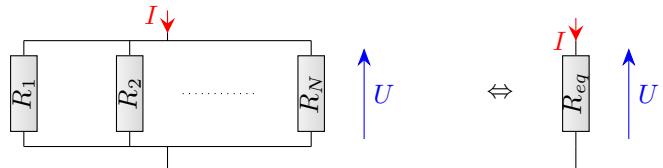
Définition : Association en parallèle

On dit que des dipôles sont en parallèle (ou en dérivation) s'ils sont branchés entre les mêmes noeuds du circuit. Des dipôles en parallèle ont la même tension entre leurs bornes.

Propriété : Association de résistances en parallèle

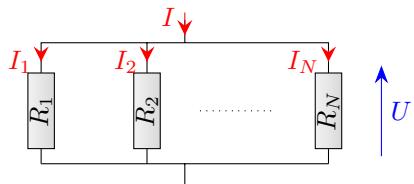
Des résistances R_k placées en parallèle sont équivalentes à une seule résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \text{ soit } G_{eq} = \sum_k G_k \quad (\text{E2.3})$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les courants qui traversent chaque résistance :



$$\text{On peut alors écrire : } I = \sum_{k=1}^N I_k \text{ (loi des noeuds)}$$

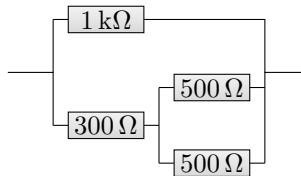
$$= \sum_{k=1}^N \frac{U}{R_k} \text{ (loi d'Ohm)}$$

$$= \frac{U}{R_{eq}} \text{ avec } \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

Remarque : La conductance équivalente est toujours plus forte que les conductances initiales, donc la résistance équivalente est toujours plus faible que les résistances initiales.

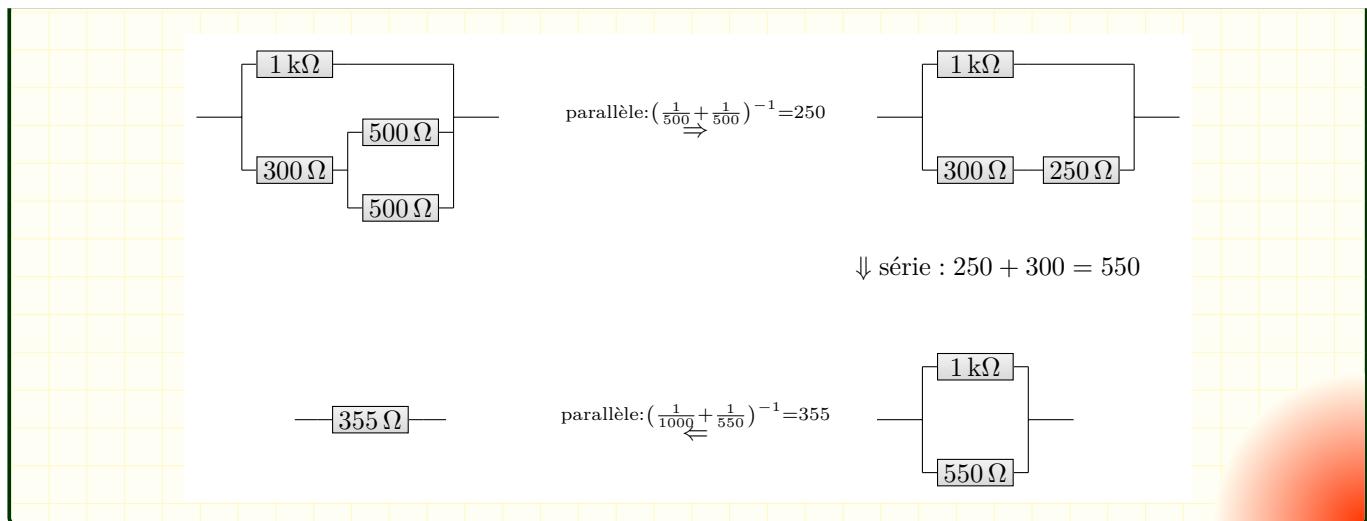
Exemple : Résistance équivalente

On considère le circuit suivant (imaginaire) formé de 4 résistances :



Déterminez la résistance équivalente.

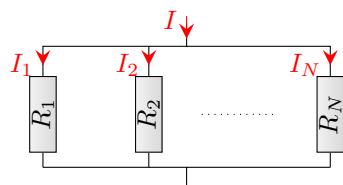
Il ne faut pas chercher à associer deux résistances quelconques choisies au hasard, mais il faut chercher quelles sont les résistances qu'on peut associer. Ici, par exemple, les seules résistances qu'on peut associer au départ sont les deux résistances de 500 Ω qui sont en parallèle :



Cette propriété permet donc parfois de simplifier les circuits en remplaçant plusieurs résistances par une seule. Mais si on fait cela, on perd le courant à travers les différentes résistances. Si, au contraire, on cherche à connaître le courant qui traverse une seule résistance, il existe une loi extrêmement pratique :

Loi du pont diviseur de courant

Soient N résistances en parallèle ; on alimente l'ensemble par un courant I . Alors le courant qui traverse la n -ième résistance vaut



$$I_n = I \frac{G_n}{\sum_{k=1}^N G_k} = I \frac{\frac{1}{R_n}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}} \quad (\text{E2.4})$$

Démonstration

Plaçons la tension U pour que les résistances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm, $I_n = G_n \cdot U$. Or l'ensemble des conductances est équivalent à une seule conductance $G_{eq} = \sum_{k=1}^N G_k$, donc $I = G_{eq} \cdot U$. On en déduit que $U = \frac{I}{G_{eq}}$ donc $I_n = I \frac{G_n}{G_{eq}}$.

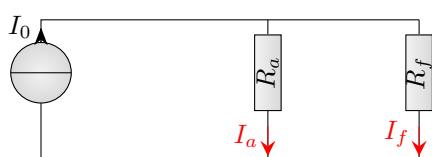
Remarque : Dans le cas où il n'y a que 2 résistances, la loi s'écrit $I_1 = I \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ et de même $I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, mais ces formules ne se généralisent pas à plus de 2 résistances.

Remarque : Attention encore une fois au sens des flèches. Si I_k et I sont de sens contraire, un signe $-$ apparaît. Cf. les QCMs à la fin.

Exemple : Shunt

On alimente une lampe (modélisée par une résistance $R_a = 6 \Omega$) par un générateur de courant $I_0 = 0,7 \text{ A}$. On décide de brancher un fil de résistance $R_f = 50 \text{ m}\Omega$ aux bornes (= en parallèle) de la lampe. Calculez le courant dans la lampe, et dans le fil.

On fait un schéma :



Alors $I_a = I_0 \frac{G_a}{G_a + G_f} = 5,8 \text{ mA}$ et $I_f = I_0 \frac{G_f}{G_a + G_f} = 0,694 \text{ A}$: presque toute l'intensité passe dans le fil, plus rien dans la lampe. On dit que la lampe est court-circuitée, ou shuntée.

E2.B. Autres lois des circuits linéaires

Les lois de Pouillet et de Millman ne sont que la réécriture de la loi des mailles et de la loi des noeuds dans certains cas simples où elles permettent d'aller plus vite. Elles sont aussi valables en régime non continu.

B.1. La loi de Pouillet

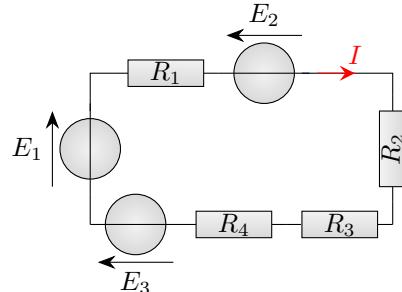
Loi de Pouillet

Dans un circuit en série contenant des générateurs de tension de fem E_k et des résistances R_j , on peut écrire la *loi des mailles en terme de courant* :

$$\sum_k \epsilon_k E_k - \left(\sum_j R_j \right) I = 0$$

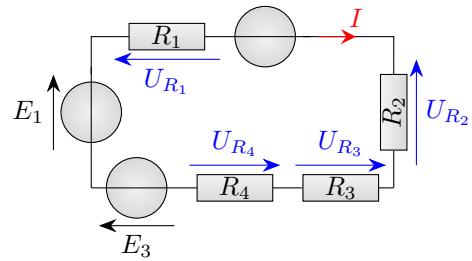
avec $\epsilon_k = +1$ si la fem E_k tourne dans le même sens que I et -1 sinon. Le courant qui circule dans la seule maille est alors donné par la *loi de Pouillet* :

$$I = \frac{\sum_k \epsilon_k E_k}{\sum_j R_j} \quad (\text{E2.5})$$



Démonstration

Plaçons des tensions aux bornes des résistances, en convention récepteur (cela ne change rien au résultat) :



Par la loi des mailles : $E_1 - U_{R_1} - E_2 - U_{R_2} - U_{R_3} - U_{R_4} + E_3 = 0$. En appliquant la loi d'Ohm aux résistances : $E_1 - R_1 \cdot I - E_2 - R_2 \cdot I - R_3 \cdot I - R_4 \cdot I + E_3 = 0$ soit $E_1 - E_2 + E_3 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \cdot I$ d'où $I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$

B.2. Le théorème de Millman (Hors programme)

Le théorème de Millman (aussi appelé *loi des noeuds en terme de potentiels*) n'est pas explicitement au programme, mais il n'est en fait qu'une autre façon d'écrire la loi des noeuds, et est très pratique dans de nombreux circuits.

Théorème de Millman

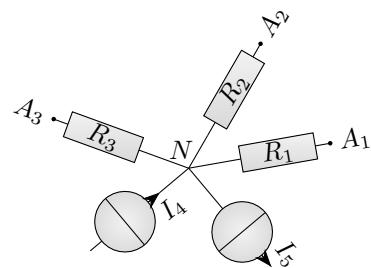
Considérons un noeud N auquel arrivent plusieurs branches :

- des branches par lesquelles le noeud N est relié à d'autres noeuds A_k par des résistances R_k
 - des branches par lesquelles un courant I_j arrive au noeud N ($\epsilon_j = +1$) ou en part ($\epsilon_j = -1$)
- alors d'après la *loi des noeuds en terme de potentiels* :

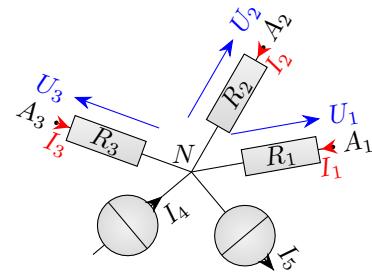
$$\sum_j \epsilon_j I_j + \sum_k \frac{V_{A_k} - V_N}{R_k} = 0$$

On peut alors exprimer le potentiel du noeud N en fonction de celui de ses voisins par le *théorème de Millman* :

$$V_N = \frac{\sum_k \frac{V_{A_k}}{R_k} + \sum_j \epsilon_j I_j}{\sum_k \frac{1}{R_k}} \quad (\text{E2.6})$$



Démonstration



Plaçons sur la figure les tensions aux bornes de résistances et les intensités qui les traversent, orientées ainsi :

Par la loi des nœuds : $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0$. Or par la loi d'Ohm : $I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{V_{A_1} - V_N}{R_1}$ et de même pour les autres résistances, donc $\frac{V_{A_1}}{R_1} - \frac{V_N}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} - \frac{V_N}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} - \frac{V_N}{R_3} + I_4 - I_5 = 0$. En isolant V_N on obtient $\frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + I_4 - I_5 = V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$ soit $V_N = \frac{\frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \frac{V_{A_3}}{R_3} + I_4 - I_5}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

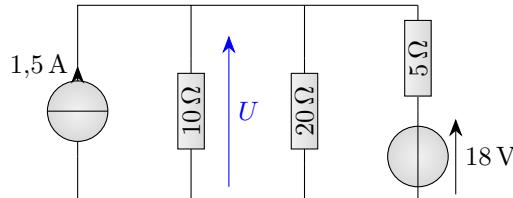
Méthode : Application du théorème de Millman

Pour calculer des tensions à l'aide du théorème de Millman, on procède ainsi :

- on place la masse dans le circuit (si elle n'est pas déjà placée). En effet, le théorème de Millman ne calcule pas des tensions, mais des potentiels ; il faut donc placer la référence des potentiels nuls.
- on repère les nœuds présents dans le circuit ; comme les fils ne jouent pas de rôle et peuvent être rallongés ou raccourcis à volonté, il faut toujours considérer que plusieurs nœuds reliés par des fils sont le même nœud.
- on place les potentiels qui se déduisent de celui de la masse par une différence de tension connue ; par exemple, si un générateur de fem 6 V est placé entre la masse et le point A , alors $V_A = +6$ V.
- on repère alors les nœuds dont on a besoin de connaître le potentiel. Si on veut une tension U entre A et B , il faut calculer V_A et V_B ; mais le plus souvent la tension recherchée se trouve entre un point et la masse, donc on a un seul potentiel à calculer.

Exemple : Comment applique-t-on le théorème de Millman ?

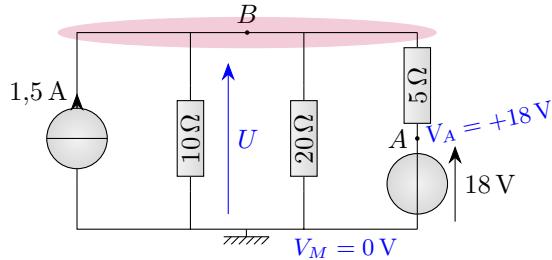
Calculez la tension U :



On commence par :

- placer la masse. Pour trouver le bon endroit, il faut si possible que la tension recherchée se trouve entre un nœud quelconque et la masse ; de plus, si la majorité des générateurs de tension touchent la masse, cela simplifie la suite. Ici, on voit que le bon candidat est le point en bas du circuit.
- placer les nœuds, mais aussi les points tels que le point A qui jouera un rôle. Le nœud B comprend tout le haut de la figure.
- placer les potentiels connus : $V_A = +18$ V.
- repérer la tension recherchée : elle est entre B et la masse, donc $U = V_B$.

La figure ci-dessous résume ces notations :



On applique alors ainsi le théorème de Millman : on écrit un trait de fraction

$$V_B = \frac{\dots}{\dots}$$

On considère le nœud B (ellipse violette en haut). Quatre branches y aboutissent. On commence par celle de gauche : on connaît explicitement le courant $1,5A$ qui arrive au nœud de cette branche ; on met donc ce courant en haut de la fraction, et rien en bas :

$$V_B = \frac{1,5 + \dots}{\dots}$$

Deuxième branche : elle contient une résistance de 10Ω ; si, en partant de B , on traverse cette résistance, on arrive à la masse, de potentiel $0V$. On ajoute donc $\frac{0}{10}$ en haut (inutile en fait, mais au début on peut mettre les 0 pour être sûr de ne rien oublier) et surtout $\frac{1}{10}$ en bas :

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} \dots}{\frac{1}{10} \dots}$$

On procède de même avec la troisième branche, qui, à travers une résistance de 20Ω , mène à la masse de potentiel nul :

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{20} \dots}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \dots}$$

Enfin, la quatrième branche mène, à travers une résistance de 5Ω , au point A de potentiel $18V$, donc

$$V_B = \frac{1,5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{20} + \frac{18}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 14,6V$$

B.3. Théorème de superposition

On cite simplement pour terminer ce théorème qui servira assez peu pour le moment.

Théorème de superposition

Si un circuit linéaire contient plusieurs générateurs, alors la valeur d'une grandeur électrique dans ce circuit (tension ou courant) est la somme des valeurs que prendrait cette grandeur si un seul générateur était allumé à la fois.

Autrement dit, supposons que si j'allume le générateur 1, telle tension vaut $0,3V$; si j'allume le générateur 2, cette même tension vaut $0,5V$; alors si j'allume les deux, la tension vaut $0,3 + 0,5 = 0,8V$.

Remarque : Ce théorème ne fonctionne qu'avec un circuit linéaire. Comme contre-exemple, prenons une diode (une LED pour s'éclairer) de tension seuil $2,5V$. Si on l'alimente avec une seule pile de $fem 1,5V$, la LED reste bloquée et ne s'allume pas. Par contre si on met deux piles en série, la fem devient $3V$ et la LED s'allume. Ainsi, l'intensité non nulle qui passe quand les deux piles sont là, n'est pas égale à deux fois l'intensité (nulle) avec une seule pile.

Remarque : Si on garde un seul générateur allumé, c'est qu'on éteint le autres. Éteindre un générateur de tension, c'est mettre sa tension à $0V$, donc le remplacer par un fil ; éteindre un générateur de courant, c'est mettre son courant à $0A$, donc le remplacer par un interrupteur ouvert.

B.4. Détermination graphique du point de fonctionnement d'un circuit série ou parallèle (Hors programme)

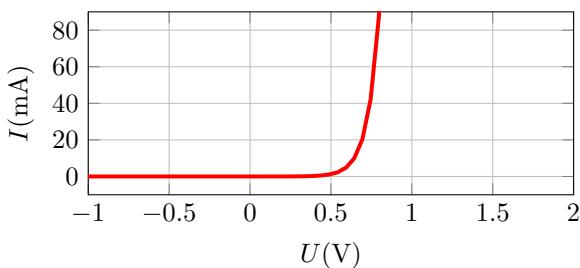
Ce paragraphe, hors programme, montre comment on peut résoudre le cas des circuits simples (série ou parallèles) dans le cas de composants non-linéaires, à l'aide d'une construction graphique.

Pour déterminer le point de fonctionnement d'un circuit série (resp. parallèle) :

- on trace les axes d'un graphique avec I en abscisse et U en ordonnée (resp. U en abscisse et I en ordonnée)
- on trace les caractéristiques des générateurs, et on les additionne ; cela donne la courbe numérotée (1)
- on trace les caractéristiques des récepteurs, et on les additionne ; cela donne la courbe numérotée (2)
- le (ou les) point(s) de fonctionnement sont donnés par les points d'intersection des deux courbes.

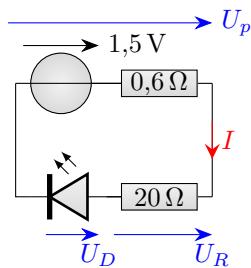
Exemple : Lampe de poche

Une lampe de poche est constituée d'une pile de fem $1,5 \text{ V}$ et de résistance interne $0,6 \Omega$ en série avec une résistance de protection $R = 20 \Omega$ et une LED dont la caractéristique est représentée ci-dessous :

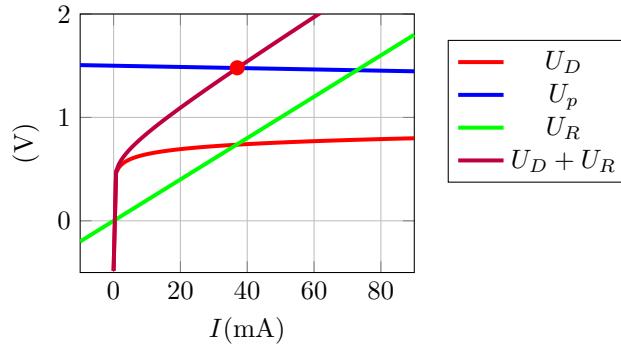


Calculez le courant qui traverse la LED.

Le schéma est le suivant :



On trace les différentes caractéristiques : $U_p = 1,5 - 0,6 \cdot I$ pour la pile et $U_R = 20 \cdot I$ pour la résistance.



On voit donc que le point de fonctionnement a pour intensité $I = 37 \text{ mA}$.

E2.C. L'Amplificateur Linéaire ou Amplificateur Opérationnel

Jusqu'à présent, nous avons parlé de circuits où on utilise une pile ou un générateur pour alimenter un composant représenté par une résistance ; mais l'électricité est très importante pour un autre but : les mesures à l'aide de capteurs. En effet, la facilité à transporter des signaux électriques à travers des fils, fait que la grande majorité des capteurs aujourd'hui transforment la valeur mesurée (température, pression, luminosité,...) en une grandeur électrique qui va ensuite être mesurée à l'aide d'une *chaîne d'acquisition*.

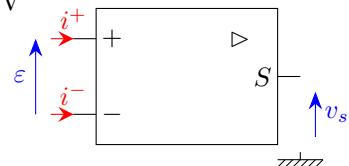
Très souvent, la tension produite par un capteur est faible, ou parasitée, et il faut la traiter. Nous allons donc, pour terminer ce chapitre, introduire un composant qui est très utilisé pour ce genre de traitement de données : l'Amplificateur Opérationnel (AO ou AOp, ou encore Amplificateur Linéaire Intégré ALI).

C.1. Présentation du composant

Définition : Pattes de l'AO

Un amplificateur opérationnel est un circuit possédant 5 pattes :

- deux pattes d'alimentation symétriques, sur lesquelles on doit mettre des potentiels continus $\pm V_{sat}$ où V_{sat} (appelé *tension de saturation*) prend des valeurs comme 9 V, 12 V, ou 15 V
- une patte d'entrée inverseuse notée E^- ou simplement $-$
- une patte d'entrée non inverseuse notée E^+ ou simplement $+$
- une patte de sortie notée S



Le symbole de l'AO, ci-contre, ne fait voir que les 3 pattes utiles ; le rectangle symbolise un circuit intégré quelconque, le \triangleright indique qu'il s'agit d'un AO ; s'il est accompagné d'un ∞ , cela indique que l'AO est considéré comme idéal.

Les courants i^+ et i^- qui entrent dans l'AO sont appelés *courants de polarisation*.

La différence de potentiel ε entre les deux entrées est appelée *tension différentielle*.

Le potentiel v_s de la sortie de l'AO est appelé *tension de sortie*.

Remarque : Une alimentation d'AO possède 3 bornes : $+V_{sat}$, $-V_{sat}$ et une borne de masse. Cela signifie que l'alimentation d'un AO injecte du courant dans la masse, sans que cela se voie sur le schéma ; par conséquent, dans un montage contenant un ou des AO, il ne faut JAMAIS appliquer la loi des noeuds à la masse.

Propriété : AO en régime linéaire

Lorsque le circuit dans lequel est placé l'AO permet un *rebouclage sur l'entrée inverseuse* (c'est-à-dire qu'il existe une branche qui relie la sortie à l'entrée inverseuse sans passer par la masse), l'AO essaye de fonctionner en *régime linéaire* ; l'AO idéal a alors les propriétés suivantes :

- les courants de polarisation sont nuls : $i^+ = i^- = 0 \text{ A}$
- la tension différentielle est nulle : $\varepsilon = 0 \text{ V}$ donc $v^+ = v^-$
- la tension de sortie ne doit pas dépasser V_{sat} en valeur absolue : $|v_s| < V_{sat}$

C.2. Montages fondamentaux

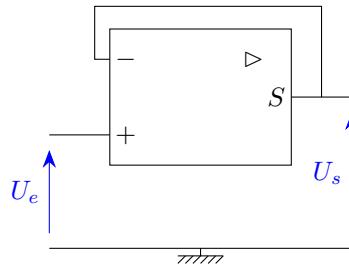
Un AO, c'est comme une baguette magique : en lui-même il ne fait pas grand chose ; mais utilisé avec la bonne formule magique – un montage bien conçu, il permet de réaliser énormément de fonctions de tous genres ; pour chaque montage, on va se demander ce que vaudra la tension de sortie en fonction de celle d'entrée. Il y a 3 montages fondamentaux à connaître.



Remarque : Il existe une méthode générale pour trouver la tension de sortie, qui fonctionne toujours, mais qui utilise le théorème de Millman qui est hors programme :

- on écrit la relation de linéarité de l'AO
- on utilise la constance du potentiel électrique le long d'un fil pour relier de potentiels de différents noeuds
- on applique le théorème de Millman à tous les noeuds sauf la sortie de l'AO

Définition : Montage suiveur



Le montage suiveur donne en sortie une tension égale à celle en entrée :

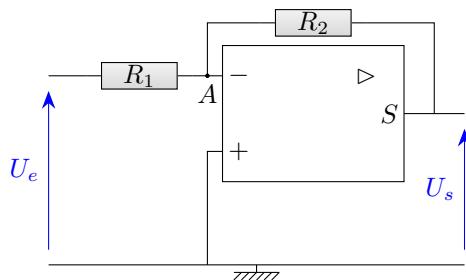
$$U_s = U_e \quad (\text{E2.7})$$

Démonstration

Il suffit d'écrire la linéarité de l'AO (car il y a rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse) en plaçant la tension différentielle ε qui est nulle. Par la loi des mailles : $U_e - \varepsilon - U_s = 0$ soit $U_s = U_e$.

Remarque : Ce montage peut sembler sans intérêt. On en reparlera quand on traitera des filtres.

Définition : Montage amplificateur inverseur

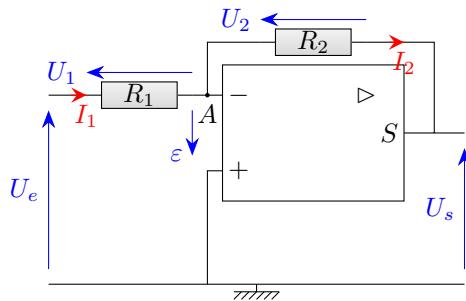


Le montage amplificateur inverseur amplifie la tension en changeant son signe :

$$U_s = -\frac{R_2}{R_1}U_e \quad (\text{E2.8})$$

Démonstration

On place les courants et les tensions pour les deux résistances :



On commence par les propriétés de l'AO : d'une part les courants de polarisation sont nuls, $I^- = I^+ = 0$; d'autre part l'AO fonctionne en régime linéaire, donc : $\varepsilon = 0$.

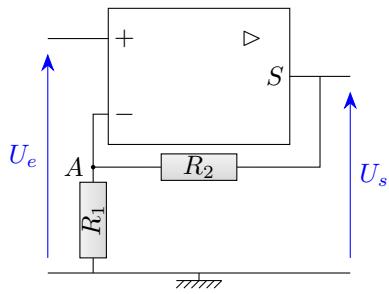
La loi des noeuds en A indique que $I_1 = I_2 + I^- = I_2$.

On applique la loi d'Ohm à la résistance R_1 : $U_1 = R_1 \cdot I_1$; or par la loi des mailles, on trouve que $U_e - U_1 - \varepsilon = 0$ donc $U_e = U_1$; on en déduit que $I_1 = \frac{U_e}{R_1}$.

On applique la loi d'Ohm à la résistance R_2 : $U_2 = R_2 \cdot I_2$; or par la loi des mailles, on trouve que $U_s + U_2 - \varepsilon = 0$ donc $U_s = -U_2$; on en déduit que $I_2 = -\frac{U_s}{R_2}$.

On combine les deux lois avec $I_1 = I_2$ et on trouve $\frac{U_e}{R_1} = -\frac{U_s}{R_2}$ donc $U_s = -\frac{R_2}{R_1}U_e$.

Définition : Montage amplificateur non inverseur

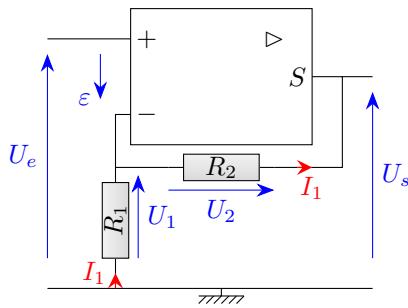


Le montage amplificateur non inverseur amplifie la tension en ne changeant pas son signe :

$$U_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_e \quad (\text{E2.9})$$

Démonstration

On place les tensions et les courants ; comme le courant de polarisation I^- est nul, on peut tout de suite appliquer la loi des nœuds et mettre le même courant I_1 dans les deux résistances :



La loi d'Ohm indique que $U_1 = R_1 \cdot I_1$ et $U_2 = R_2 \cdot I_1$. Or par la loi des mailles on trouve deux relations : $U_e + \varepsilon - U_1 = 0$, soit $U_1 = U_e$, et $U_1 + U_2 - U_s = 0$.

On en déduit que $U_s = U_1 + U_2 = U_e + R_2 \cdot I_1 = U_e + \frac{R_2}{R_1} U_1 = U_e + \frac{R_2}{R_1} U_e$ soit finalement $U_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_e = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_e$.

Circuits linéaires en régime continu**Programme officiel****Programme officiel**

Notions et contenus	Capacités exigibles
Associations de deux résistances. Ponts diviseurs de tension et de courant.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Exploiter des ponts diviseurs de tension ou de courant. Mettre en évidence l'influence de la résistance d'entrée d'un voltmètre ou d'un ampèremètre sur les valeurs mesurées.

Circuits linéaires en régime continu

QCMs

réponses page 235

 QCM : Compréhension du cours **Q1.**Deux résistances R en série sont équivalentes à une résistance :

- (a). $\frac{1}{R}$
 (c). $\frac{R}{2}$
- (b). R
 (d). $2R$

Q2.Deux résistances R en parallèle sont équivalentes à une résistance :

- (a). R
 (c). $\frac{1}{R}$
- (b). $2R$
 (d). $\frac{R}{2}$

Q3.

Le pont diviseur de tension s'applique à :

- (a). des résistances en parallèle
 (c). des dipôles quelconques en parallèle
- (b). des dipôles quelconques en série
 (d). des résistances en série

Q4.

Le pont diviseur de courant s'applique à :

- (a). des dipôles quelconques en série
 (c). des dipôles quelconques en parallèle
- (b). des résistances en parallèle
 (d). des résistances en série

Q5.

Pour un Amplificateur Opérationnel idéal en régime quelconque :

- (a). la tension entre les entrées est nulle
 (c). les courants en entrée sont nuls
- (b). le courant de sortie est nul
 (d). la tension de sortie est nulle

Q6.

Un Amplificateur Opérationnel fonctionne en régime linéaire si :

- (a). la sortie est rebouclée sur l'entrée +
 (c). la sortie est reliée à la masse
- (b). les deux entrées sont reliées
 (d). la sortie est rebouclée sur l'entrée -

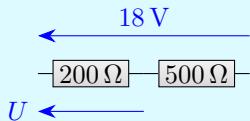
Q7.

Pour un Amplificateur Opérationnel idéal en régime linéaire :

- (a). les courants en entrée sont nuls
 (c). le courant de sortie est nul
- (b). la tension de sortie est nulle
 (d). la tension entre les entrées est nulle

 QCM : Pont diviseur de tension **Q8.**

$$U =$$

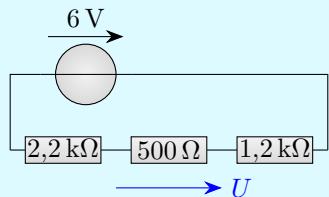


- (a). 5,1 V
 (c). -0,28 V

- (b). 0,28 V
 (d). 9 V

Q9.

$$U =$$

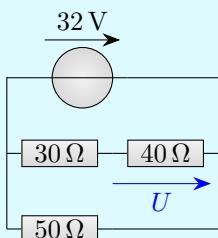


- (a). 0,77 V
 (c). 1,21 V

- (b). -0,77 V
 (d). -1,21 V

Q10.

$$U =$$

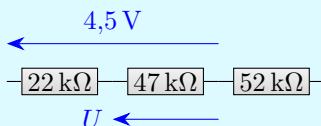


- (a). 14,4 V
 (c). 12,1 V

- (b). 18,3 V
 (d). 10,7 V

Q11.

$$U =$$

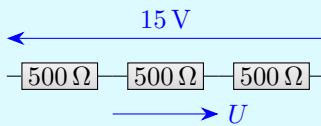


- (a). -3,5 V
 (c). -2,1 V

- (b). 1,7 V
 (d). 3,1 V

Q12.

$$U =$$

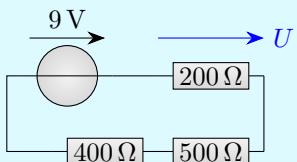


- (a). 7,5 V
 (c). -5 V

- (b). 5 V
 (d). 7,5 V

Q13.

$$U =$$



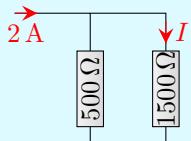
- (a). -2,0 V
 (c). 1,6 V

- (b). 2,0 V
 (d). -1,6 V

✓ QCM : Pont diviseur de courant ✗

Q14.

$I =$

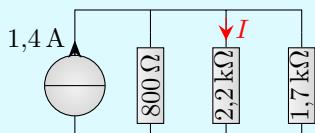


- (a). 1,5 A
(c). 0,5 A

- (b). 0,75 A
(d). 0,25 A

Q15.

$I =$

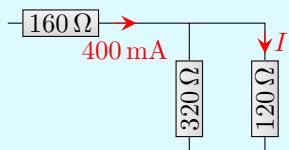


- (a). 0,41 A
(c). 0,2 A

- (b). 0,28 A
(d). 0,36 A

Q16.

$I =$

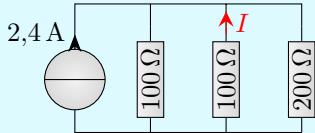


- (a). 720 mA
(c). 290 mA

- (b). 190 mA
(d). -190 mA

Q17.

$I =$

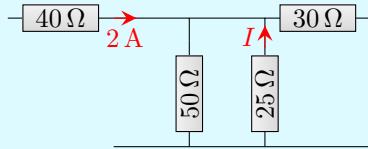


- (a). 0,96 A
(c). 0,8 A

- (b). 1,2 A
(d). -0,96 A

Q18.

$I =$



- (a). 0,45 A
(c). -0,98 A

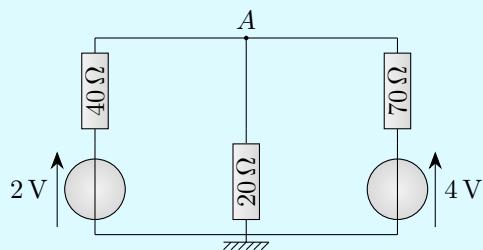
- (b). 0,71 A
(d). -0,86 A

✓ QCM : Théorème de Millman ✗

Un QCM très court pour juste appliquer deux ou trois fois ce théorème.

Q19.

$$V_A =$$

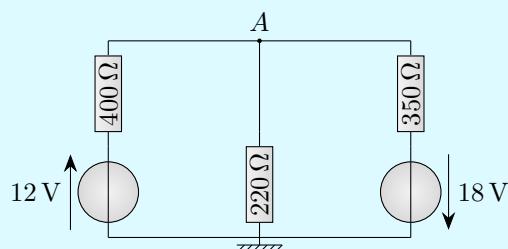


- (a). 6 V
 (c). 3,3 V

- (b). 0,05 V
 (d). 1,2 V

Q20.

$$V_A =$$

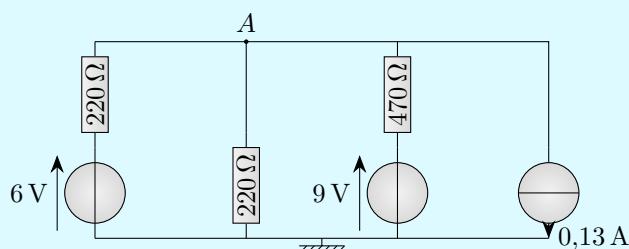


- (a). -0,8 V
 (c). -2,2 V

- (b). 3,1 V
 (d). 0,0 V

Q21.

$$V_A =$$



- (a). -3,1 V
 (c). 6 V

- (b). -7,5 V
 (d). 7,5 V

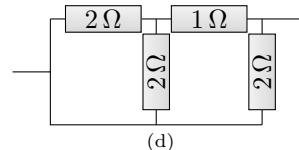
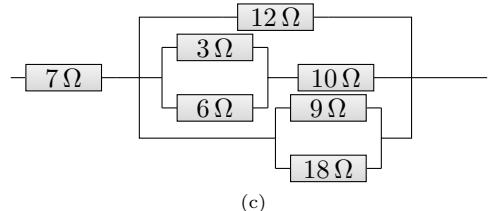
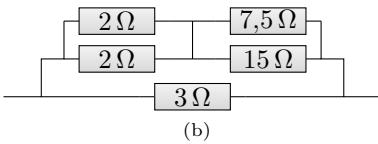
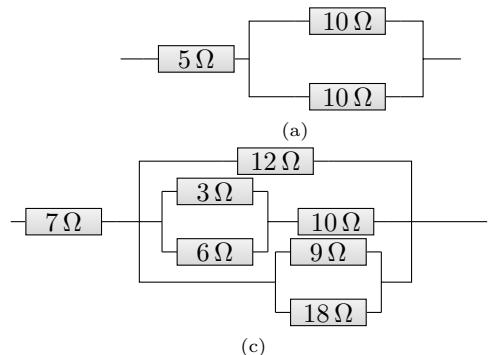
Circuits linéaires en régime continu

Exercices

réponses page 236

Exercice E2.1 : Association de résistances [**]

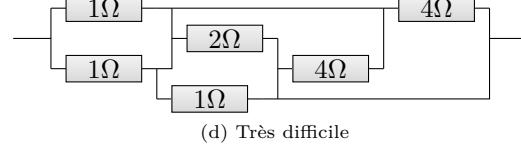
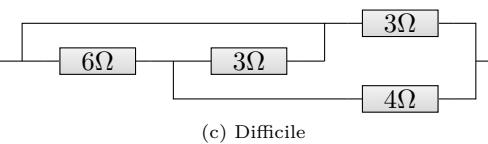
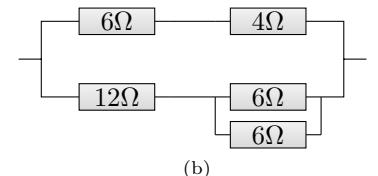
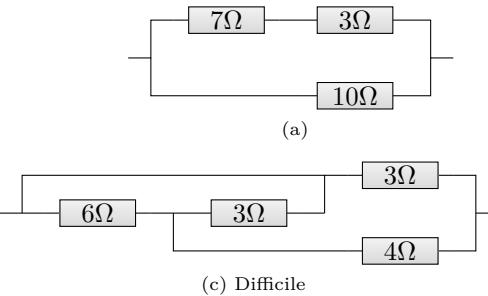
Déterminez la résistance équivalente aux dipôles suivants :



Indication : on ne peut pas forcément associer toutes les résistances. Commencez par vous demander : où y a-t-il deux résistances en série ou en parallèle, que je puisse associer ?

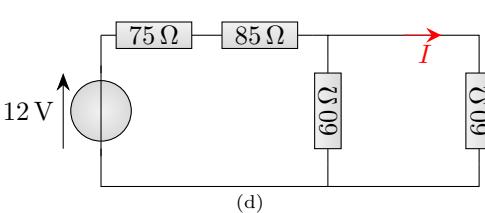
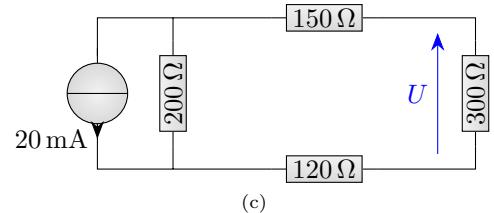
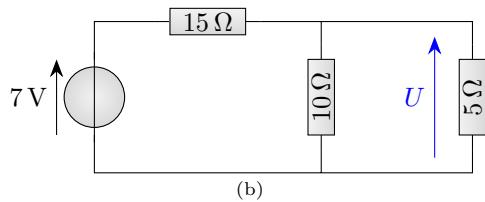
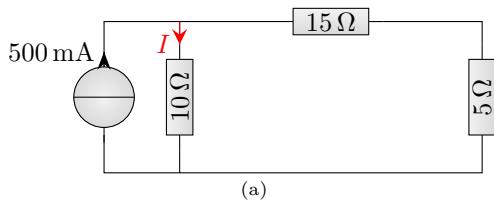
Exercice E2.2 : Association de résistances [**]

Déterminez la résistance équivalente aux dipôles suivants :



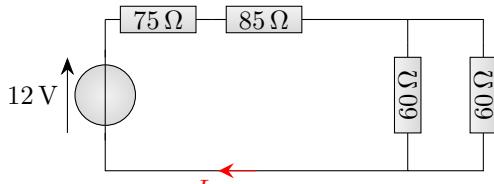
Exercice E2.3 : Application des ponts diviseurs [**]

On considère les circuits suivants :

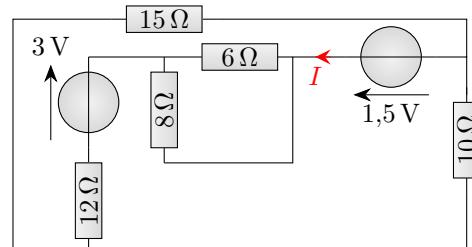
1. Circuit (a) : calculez I .2. Circuit (b) : calculez U .

3. Circuit (c) : on veut calculer U . Pour cela, associez les deux résistances de droite, et calculez par un pont diviseur le courant qui les traverse ; déduisez-en U .
4. Circuit (d) : on veut calculer I . Pour cela, associez les deux résistances de droite, et calculez par un pont diviseur la tension à leurs bornes ; déduisez-en I .

Exercice E2.4 : Loi de Pouillet [*]



(a)



(b) plus difficile

Dans ces deux cas, simplifiez les circuits pour vous ramener à un circuit où tout est en série, puis calculez I .

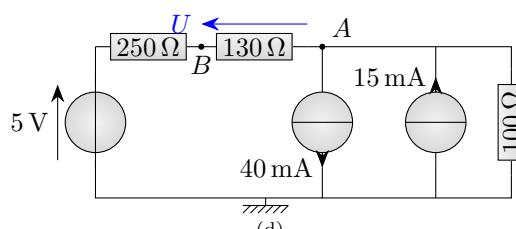
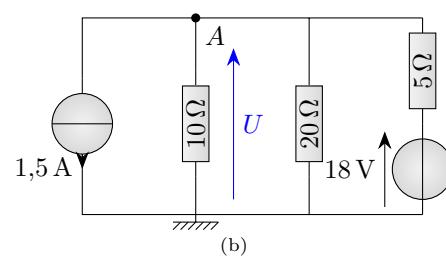
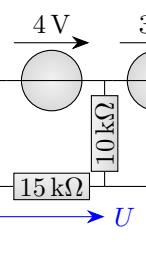
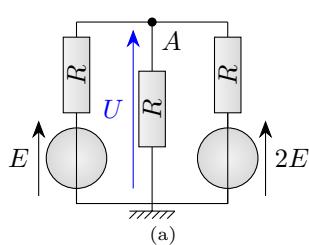
Exercice E2.5 : Alimentation des phares d'une voiture [**]

Une batterie de voiture (modélisée par un générateur de Thévenin de fem $E = 12\text{ V}$ et de résistance interne $R = 0,2\Omega$ – batterie à changer) alimente 4 ampoules placées en parallèle l'une de l'autre (on ne considère ici que les feux de croisement) : deux feux à l'avant consommant 55 W sous 12 V , et deux feux à l'arrière consommant 5 W sous 12 V .

1. On suppose que les ampoules peuvent être modélisées par des résistances. Calculer la résistance de chaque ampoule.
2. Dessiner le schéma du circuit
3. Calculer le courant débité par le générateur.
4. En déduire le courant qui traverse chaque ampoule.
5. On suppose qu'un feu avant grille. Calculer le courant qui traverse les 3 autres ampoules.

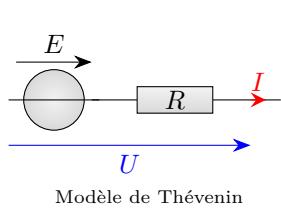
Exercice E2.6 : Application du théorème de Millman [**]

Dans les exemples suivants, appliquez le théorème de Millman en A (et éventuellement en B) et déduisez-en U .

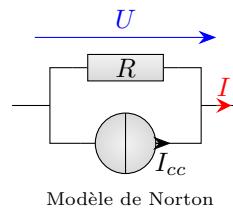


Exercice E2.7 : Modèle de Norton d'un générateur linéaire [**]

Un générateur linéaire possède une loi affine entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse. Il existe 2 modèles : celui de Thévenin (vu en cours) et celui de Norton.

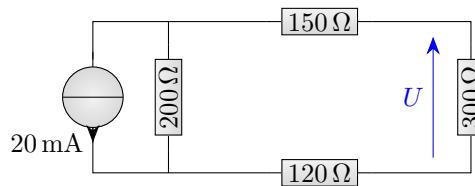


Modèle de Thévenin

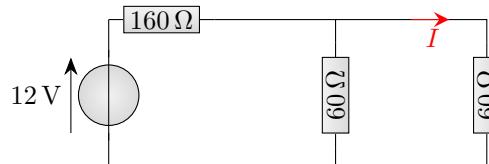


Modèle de Norton

- Retrouvez rapidement la loi entre U et I dans le cas du générateur de Thévenin.
- Montrez que, pour le générateur de Norton, on a la loi $I = I_{cc} - \frac{U}{R}$.
- Déduisez-en que le générateur de Norton est équivalent à celui de Thévenin en précisant la relation entre E , I_{cc} et R .
- Exemple d'application 1 : dans le circuit ci-dessous, transformez le générateur de Norton en générateur de Thévenin, puis déterminez U par un pont diviseur.



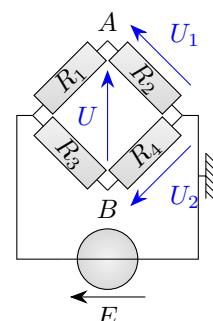
- Exemple d'application 2 : dans le circuit ci-dessous, transformez le générateur de Thévenin en générateur de Norton, puis déterminez I par un pont diviseur.



Exercice E2.8 : Pont de Wheatstone alimenté en tension [**]

Le pont de Wheatstone est formé par quatre résistances placées comme sur la figure. On l'alimente par un générateur idéal de tension $E = 10$ V.

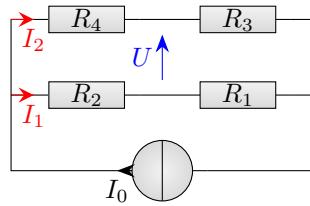
- À l'aide du diviseur de tension, exprimez U_1 et U_2 ; déduisez-en U .
- (optionnelle) À l'aide du théorème de Millman, exprimez V_A et V_B ; retrouvez alors l'expression de U .
- On construit par exemple un pont tel que $R_1 = R_2 = R_3 = 1\text{ k}\Omega$; calculez U si $R_4 = 1,5\text{ k}\Omega$, puis $R_4 = 2,5\text{ k}\Omega$.
- On dit que le pont de Wheatstone est équilibré lorsque $U = V_A - V_B = 0$. Montrez que le pont est équilibré si et seulement si on a une relation très simple entre R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .



Exercice E2.9 : Pont de Wheatstone alimenté en courant [**]

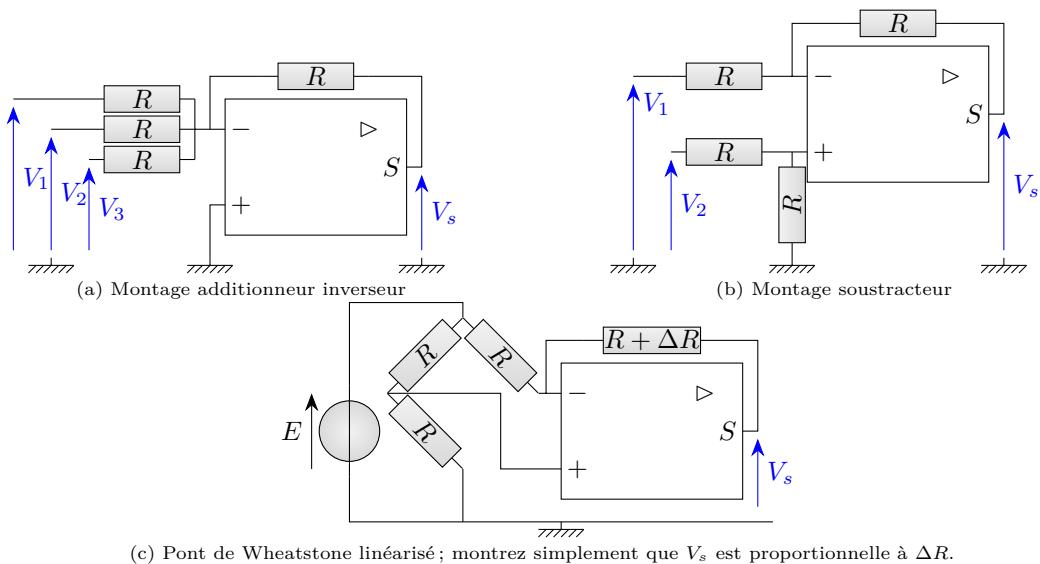
Le pont de Wheatstone est formé par quatre résistances placées comme sur la figure. On l'alimente par un générateur idéal de courant $I_0 = 10 \text{ mA}$.

- Exprimez les courants I_1 et I_2 en fonction de I_0 et des résistances.
- Déduisez-en la tension U en fonction de I_0 et des résistances.
- Vérifiez que le pont est équilibré ($U = 0$) si et seulement si $R_1R_4 = R_2R_3$.
- On règle $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega$ et R_4 est une thermistance dont la résistance varie avec la température T selon la loi $R_4 = 10(1 + \alpha(T - 25^\circ\text{C}))$ en $\text{k}\Omega$ avec $\alpha = 3 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Calculez U à 25°C , puis à 35°C , puis à 0°C . Commentez.



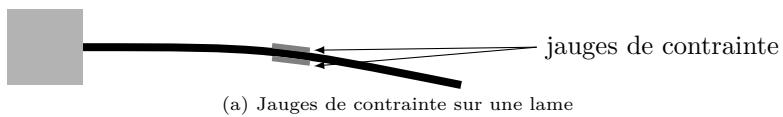
Exercice E2.10 : Montages à A.O. [***]

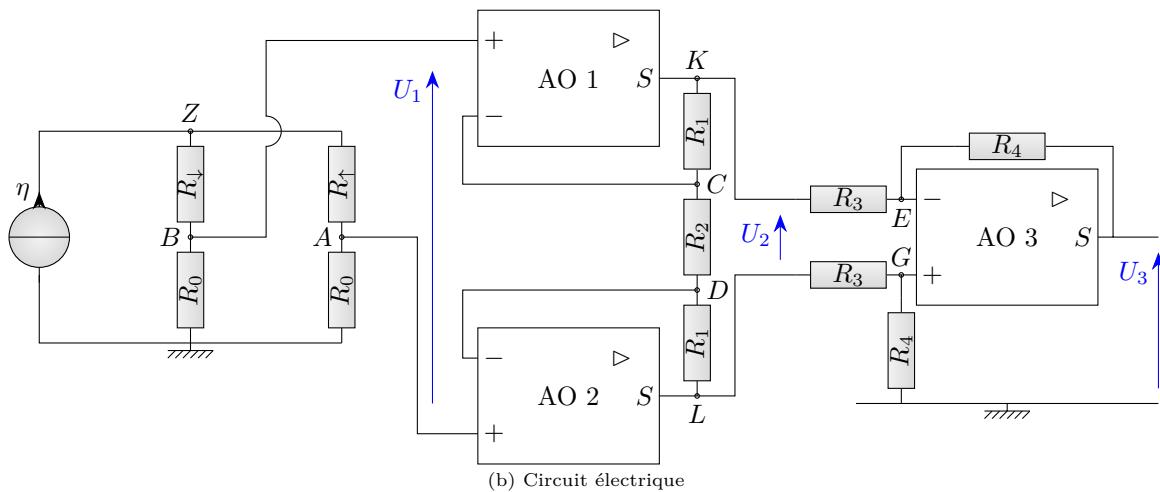
Justifiez les noms donnés aux montages suivants, où l'A.O. fonctionne en régime linéaire (le premier peut se faire sans utiliser le théorème de Millman, mais pour les suivants, c'est compliqué sans l'utiliser) :



Exercice E2.11 : Capteur de déformation avec jauge de contrainte [***]

Une jauge de contrainte est un petit fil plat qu'on colle sur une lame souple (figure (a)). Lorsque la lame se tord, une jauge de contrainte collée dessus va s'allonger ou se raccourcir suivant qu'elle est collée sur la face extérieure ou intérieure de la lame. Ce changement de longueur s'accompagne d'un changement de la résistance de la jauge de contrainte, qu'on peut détecter.





(b) Circuit électrique

On considère donc deux jauge de contrainte identiques de résistance au repos R_0 . Quand on exerce sur la lame une force F (par exemple un poids si on veut fabriquer une balance), on admet que les deux jauge de contrainte voient leurs résistance changer légèrement :

- celle au-dessus voit sa résistance devenir $R_{\uparrow} = R_0(1 + \alpha F)$
- celle au-dessous voit sa résistance devenir $R_{\downarrow} = R_0(1 - \alpha F)$

où α est un coefficient caractéristique de la jauge de contrainte choisie. On place ensuite ces jauge dans un circuit où les AO fonctionnent en régime linéaire.

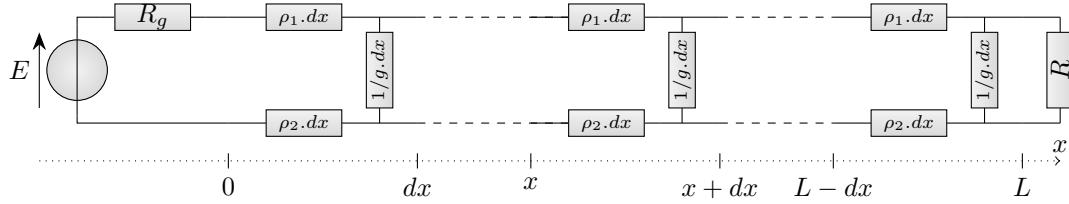
1. Exprimez V_A et V_B en fonction du courant η et de R_0 , α et F ; en déduire que $U_1 = \frac{\eta\alpha R_0}{2}F$.
2. Numériquement on a $\eta = 20 \text{ mA}$, $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$ et $\alpha = 3 \times 10^{-3} \text{ N}^{-1}$. Que vaut U_1 pour une force nulle ? Pour une force égale au poids de 150 g ?
3. On veut avoir plus de signal. Une solution serait de prendre η plus élevé ; quel problème cela pose-t-il ?
4. On construit un amplificateur différentiel à deux étage. En appliquant Millman aux points C et D , reliez U_2 à U_1 .
5. Reliez maintenant U_3 à U_1 . Déduisez-en U_3 en fonction de la force F .

Commentez l'utilité de ce montage.

Exercice E2.12 : Ligne à résistance répartie [****]

On s'intéresse à un générateur, par exemple un GBF en TP, qui alimente une résistance par le moyen d'un câble coaxial. Le générateur est modélisé par un générateur de Thévenin de fem $E = 5 \text{ V}$ et de résistance interne $R_g = 50 \Omega$. Il alimente une résistance R à travers le câble coaxial de longueur L . Celui-ci est formé d'une âme et d'une gaine qui correspondent aux deux fils d'alimentation, et qui possèdent chacun une faible résistance, proportionnelle à la longueur de câble. Entre ces deux se trouve un isolant qui n'est pas parfait, il y a donc des fuites de courant à travers cet isolant.

Pour modéliser électriquement ce câble, on va le découper par la pensée en toutes petites tranches de longueur dx . Pour chaque tranche dx , l'âme a une résistance $\rho_1 \cdot dx$ et la gaine une résistance $\rho_2 \cdot dx$, tandis que la fuite à travers la gaine est modélisable par une résistance $\frac{1}{g \cdot dx}$ où ρ_1 , ρ_2 et g sont des constantes caractéristiques du câble. On obtient alors le modèle de la figure ci-dessous.

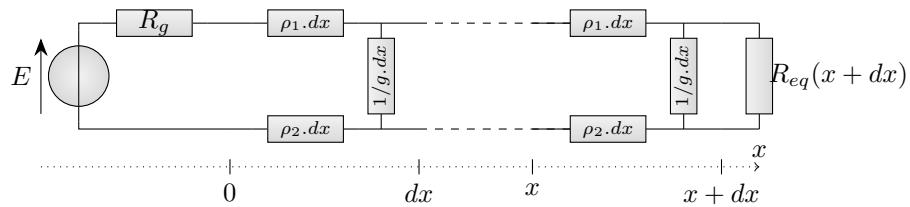


Sur le générateur générateur, on a branché non pas la résistance R , mais le câble coaxial avec la résistance R au bout. On va montrer que cet ensemble est équivalent à une résistance à déterminer.

1. On considère pour le moment la résistance R et le bout de câble tout à la fin, entre $L - dx$ et L . Montrer que cet ensemble est équivalent à une seule résistance R' à exprimer. Pour simplifier on notera $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

2. On pourrait procéder de la même manière une infinité de fois pour traiter tout le câble. Ça n'est pas une solution envisageable. On va procéder autrement.

Supposons qu'on a déjà associé toute la portion de câble entre $x + dx$ et la fin, avec la résistance R ; on a obtenu une résistance notée $R_{eq}(x + dx)$. Le schéma équivalent devient alors :



En associant la portion de câble entre x et $x + dx$ avec $R_{eq}(x + dx)$, exprimez $R_{eq}(x)$.

3. Les lois des développements limités que vous verrez plus tard indiquent que $\frac{1}{1+R.g.dx} \approx 1 - R.g.dx$. Montrez alors que R_{eq} vérifie l'équation :

$$\frac{dR_{eq}}{dx} = -\rho + g.R_{eq}^2$$

4. On pose $R_0 = \sqrt{\frac{\rho}{g}}$ et $d = \sqrt{\frac{1}{\rho.g}}$.

Vérifiez que R_0 est homogène à une résistance, et d à une longueur.

5. L'équation précédente peut alors être réécrite

$$\frac{dR_{eq}}{dx} = \frac{R_{eq}^2 - R_0^2}{R_0.d}$$

On peut montrer que la solution de cette équation est

$$R_{eq}(x) = R_0 \frac{(R + R_0) \exp\left(\frac{L-x}{d}\right) + (R - R_0) \exp\left(\frac{x-L}{d}\right)}{(R + R_0) \exp\left(\frac{L-x}{d}\right) - (R - R_0) \exp\left(\frac{x-L}{d}\right)}$$

Vérifiez que la solution proposée est cohérente en $x = L$.

6. Exprimez la résistance équivalente vue par le générateur, en fonction de R , R_0 , d et L .
 7. On alimente une résistance $R = 50 \Omega$ avec un câble de longueur $L = 40 \text{ m}$, de caractéristiques $R_0 = 75 \Omega$ et $d = 5 \text{ km}$. Calculez $R(0)$.
 8. Pour un câble très très long, vers quelle valeur tend la résistance vue par le générateur ?

Circuits linéaires en régime continu

TDs numériques

réponses page 238

TD numérique : Balance avec jauge de contrainte

Les balances électroniques utilisent des jauge de contraintes : ce sont des résistances fines collées sur une lame métallique. Lorsqu'on pose une masse au bout de la lame, celle-ci se plie, et une jauge de contrainte collée sur sa face de dessus voit sa longueur augmenter ; il en résulte que la jauge, de résistance initiale R_0 au repos, voit sa résistance varier de

$$\Delta R = k \cdot m \quad (1)$$

où k est une constante caractéristique de la lame et de la jauge et m la masse posée sur la balance. Dans la suite on notera $R = R_0 + \Delta R$. Pour les AN, on prendra $R_0 = 500 \Omega$ et $k = 1,4 \times 10^{-3} \Omega \cdot g^{-1}$.

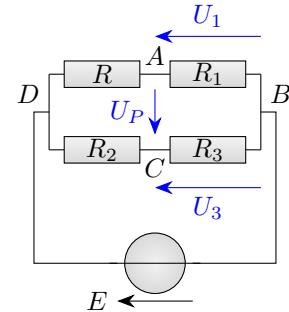
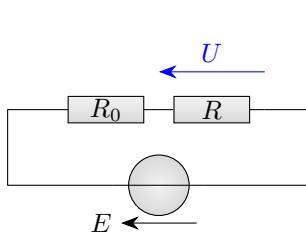


Pour mesurer la masse, il faut donc mesurer la variation de résistance ; pour cela, il faut transformer cette variation de résistance en variation de tension.

1. Pont diviseur simple

On propose le montage de la figure (a) : la résistance R est placée en série avec une résistance de valeur R_0 , et on mesure la tension aux bornes de R .

- (a) Exprimez U en fonction de E , R_0 , k et m .
- (b) Tracez la courbe donnant U en fonction de m pour des masses allant de 0 g à 2000 g. On prendra $E = 5$ V. Commentez (attention à l'échelle).
- (c) Est-il possible d'utiliser un montage amplificateur pour mieux mesurer la variation de U ?



2. Pont de Wheatstone

On place maintenant la résistance R dans la figure (b).

- (a) Exprimez rapidement U_1 et U_3 en fonction de E et des résistances.
- (b) Déduisez-en U_P , la *tension différentielle du pont*.
- (c) On dit que le pont est équilibré lorsque $U_P = 0$. Montrez que le pont est équilibré si et seulement si $R \cdot R_3 = R_1 \cdot R_2$.
- (d) On règle R_1 , R_2 et R_3 à la valeur R_0 ; ainsi, le pont est équilibré lorsque $m = 0$ g. Simplifiez l'expression de U_P . Tracez U_P pour des masses jusqu'à 2000 g. Commentez.
- (e) Pour plus de sensibilité, on peut mettre une deuxième jauge de contrainte à la place de R_3 . Tracez la nouvelle tension U_P obtenue.
- (f) On peut même remplacer R_1 et R_2 par deux jauge de contraintes placées sous la lame, qui auront une résistance $R' = R_0 - \Delta R$. Tracez la nouvelle tension U_P obtenue.
- (g) On reconsidère le cas avec une seule résistance (question 2d). Par la formule d'approximation d'une fonction par sa tangente, on peut montrer que $\frac{1}{2R_0 + \Delta R} \approx \frac{1}{2R_0} - \frac{\Delta R}{4R_0^2}$. Déduisez-en que U_P peut s'écrire comme $U_P = \alpha \cdot m$ avec α à préciser. Comparez avec la courbe obtenue.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

- Q1.(d)**
- Q2.(d)**
- Q3.(d)**
- Q4.(d)**
- Q5.(c)**
- Q6.(d)**
- Q7.(a) ET (d)**

Réponses au QCM : Pont diviseur de tension

Q8.(a)
 $U = \frac{200}{200+500} \times 18.$

Q9.(a)
 $U = \frac{500}{2200+500+1200} \times 6.$

Q10.(b)

Ici la résistance 40Ω n'est en série qu'avec la résistance 30Ω , et la tension aux bornes des deux vaut $32V$; la 50Ω ne joue aucun rôle, donc $U = \frac{40}{30+40} \times 32$.

Q11.(d)

La tension de $4,5V$ n'est aux bornes que des résistances $22k\Omega$ et $47k\Omega$ donc c'est elle qui est divisée : $U = \frac{47}{22+47} \times 4,5$.

Q12.(c)

Attention au signe, la tension ne "tourne" pas, elle est située entre deux points, ici de gauche à droite pour la tension U et de droite à gauche pour la tension $15V$; donc $U = -\frac{500}{500+500+500} \times 15V$.

Q13.(d)

Question difficile à cause du signe. Le réflexe : « U et la tension $9V$ tournent dans le même sens»...sauf qu'une tension ne tourne pas, elle est entre deux points. Appelons A le point à gauche du générateur de tension et B le point juste à droite. Alors la tension $9V$ va de A vers B , et la tension U , en suivant le circuit, va de B vers A , d'où le signe $-$.

Réponses au QCM : Pont diviseur de courant

Q14.(c)
 $I = \frac{\frac{1}{1500}}{\frac{1}{500} + \frac{1}{1500}} \times 2$

Q15.(b)
 $I = \frac{\frac{1}{2200}}{\frac{1}{800} + \frac{1}{2200} + \frac{1}{1700}} \times 1,4.$

Q16.(c)

Ici, l'intensité $400mA$ alimente les résistances 320Ω et 120Ω en parallèle ; la résistance 160Ω n'a rien à voir donc $I = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{320} + \frac{1}{120}} \times 400$.

Q17.(d)

Attention au signe ! Ici le courant $2,4A$ tourne dans le sens horaire et I dans le sens opposé.

Q18.(d)

$$I = -\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{50} + \frac{1}{25} + \frac{1}{30}} \times 2.$$

Réponses au QCM : Théorème de Millman

Q19.(d)
 $V_A = \frac{\frac{2}{40} + \frac{4}{70}}{\frac{1}{40} + \frac{1}{20} + \frac{1}{70}}$

Q20.(c)
 $V_A = \frac{\frac{12}{400} - \frac{18}{350}}{\frac{1}{400} + \frac{1}{220} + \frac{1}{350}}$

Q21.(b)
 $V_A = \frac{\frac{6}{220} + \frac{9}{470} - 0,13}{\frac{1}{220} + \frac{1}{220} + \frac{1}{470}}$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E2.1 : Association de résistances [**]

- (a) 10Ω
- (b) 2Ω
- (c) 10Ω
- (d) 1Ω

Réponses de l'exercice E2.2 : Association de résistances [**]

Réponses de l'exercice E2.3 : Application des ponts diviseurs [**]

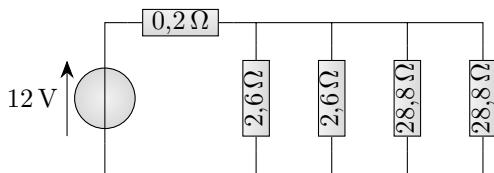
1. $I = 333 \text{ mA}$.
2. $U = 1,27 \text{ V}$.
3. $U = -1,56 \text{ V}$
4. $I = 31,6 \text{ mA}$.

Réponses de l'exercice E2.4 : Loi de Pouillet [*]

- (a) $I = \frac{12}{75+85+30} = 63 \text{ mA}$
- (b) $I = \frac{1,5-3}{12+3,4+6} = -70 \text{ mA}$

Réponses de l'exercice E2.5 : Alimentation des phares d'une voiture [**]

1. $2,6\Omega$ à l'avant et $28,8\Omega$ à l'arrière.
- 2.



3. $I = 8,6 \text{ A}$.
4. $3,95 \text{ A}$ à l'avant et $0,36 \text{ A}$ à l'arrière.
5. $4,2 \text{ A}$ à l'avant et $0,38 \text{ A}$ à l'arrière.

Réponses de l'exercice E2.6 : Application du théorème de Millman [**]

Réponses de l'exercice E2.7 : Modèle de Norton d'un générateur linéaire [**]

1. $U = E - R.I$
2. Loi des noeuds.
3. $E = R.I_{cc}$.
4. $U = -1,6 \text{ V}$
5. $I = 31,6 \text{ mA}$

Réponses de l'exercice E2.8 : Pont de Wheatstone alimenté en tension [**]

1. $U = U_1 - U_2 = E \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{R_4}{R_3+R_4} \right)$

2. $V_A = \frac{ER_2}{R_1+R_2}$ et $V_B = \frac{ER_4}{R_3+R_4}$
3. $U(R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega) = -1,0 \text{ V}$ et $U(R_4 = 1,5 \text{ k}\Omega) = -2,1 \text{ V}$
4. Le pont est équilibré $\Leftrightarrow R_2R_3 = R_1R_4$.

Réponses de l'exercice E2.9 : Pont de Wheatstone alimenté en courant [**]

1. $I_1 = I_0 \frac{R_3+R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$ et $I_2 = I_0 \frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+R_3+R_4}$
2. $U = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{R_1+R_2+R_3+R_4}$
3. Évident.
4. $U(25^\circ\text{C}) = 0 \text{ mV}$; $U(35^\circ\text{C}) = 0,74 \text{ mV}$; $U(0^\circ\text{C}) = -1,91 \text{ mV}$. Ce sont des tensions faibles qu'il faut amplifier.

Réponses de l'exercice E2.10 : Montages à A.O. [***]

- (a) $V_s = -(V_1 + V_2 + V_3)$.
- (b) $V_s = V_2 - V_1$
- (c) $V_s = -\frac{E}{2} \frac{\Delta R}{R}$

Réponses de l'exercice E2.11 : Capteur de déformation avec jauge de contrainte [***]

1. Par soustraction : $U_1 = V_B - V_A = \frac{\eta \alpha R_0}{2} F$
2. $U_1 = 0 \text{ V}$ si $F = 0 \text{ N}$.
 $U_1 = 44 \text{ mV}$ si $F = 1,5 \text{ N}$ (on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
3. Effet Joule.
4. $U_2 = U_1 \left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right)$
5. $U_3 = -\frac{R_4}{R_3} U_2 = -\frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right) \frac{\eta \alpha R_0}{2} F$

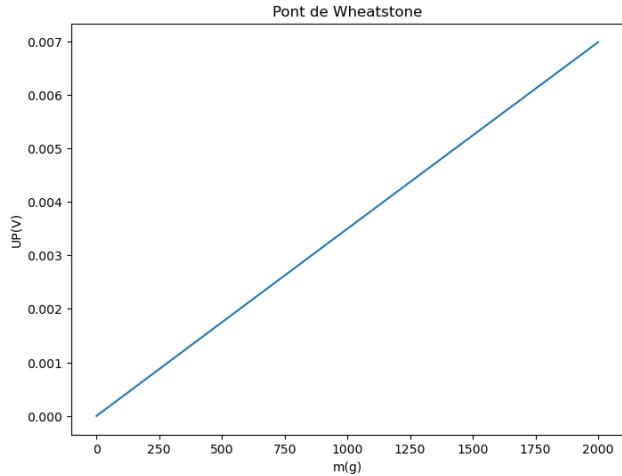
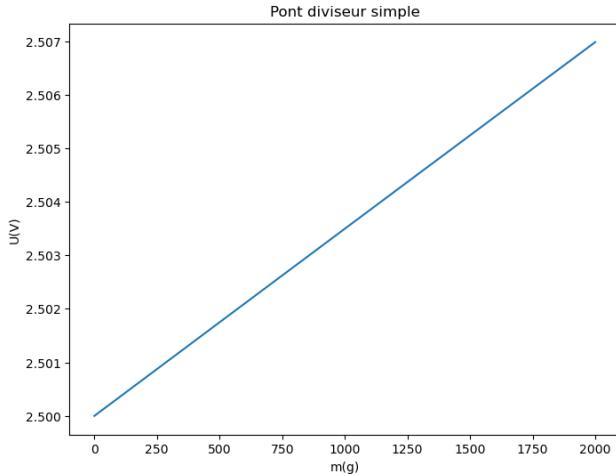
Réponses de l'exercice E2.12 : Ligne à résistance répartie [****]

1. $R' = \rho \cdot dx + \frac{R}{g \cdot R \cdot dx + 1}$
2. $R_{eq}(x) = \rho \cdot dx + \frac{R_{eq}(x+dx)}{g \cdot R_{eq}(x+dx) \cdot dx + 1}$
3. On en tire $\frac{R_{eq}(x+dx) - R_{eq}(x)}{dx} = -\rho + R_{eq}^2 g$
4. ρ est en $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$ et g en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, donc la réponse est évidente.
5. $R_{eq}(L) = R$
6. Le générateur voit $R_{eq}(0) = R_0 \frac{(R+R_0) \exp\left(\frac{L}{d}\right) + (R-R_0) \exp\left(-\frac{L}{d}\right)}{(R+R_0) \exp\left(\frac{L}{d}\right) - (R-R_0) \exp\left(-\frac{L}{d}\right)}$
7. $R_{eq}(0) = 50,3 \Omega$
8. $\lim_{L \rightarrow \infty} R_{eq}(0) = R_0$

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Balance avec jauge de contrainte

Pour le pont simple $U = E \frac{R}{R+R_0}$; pour le pont de Wheatstone avec $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ on a $U_P = E \left(\frac{1}{2} - \frac{R_0}{R_0+R} \right)$.



Les deux donnent une tension de sortie qui varie de fonction affine avec la masse, mais dans le cas du pont de Wheatstone l'ordonnée à l'origine est nulle, ce qui va permettre de l'amplifier fortement grâce à un montage à AO.

Avec deux jauge on double la tension ; avec quatre jauge on la quadruple.

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Cours

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés au régime continu, dans lequel les tensions et les intensités sont constantes. Nous n'avons pas étudié la question de savoir comment les tensions et les courants ont atteints leur régime permanent. Or il a bien fallu un jour allumer les générateurs ; comment, alors, les signaux sont-ils passés de la valeur nulle à leur valeur constante ? Ce passage s'appelle le *régime transitoire*, et nous allons l'étudier dans ce chapitre.

E3.A. Équations différentielles

A.1. Établissement de l'ED

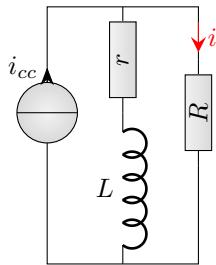
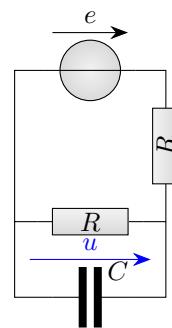
Pour connaître le régime transitoire, il faut d'abord établir les lois auxquelles il obéit. Lors du régime transitoire, les grandeurs (intensités, tensions) vont varier, et ces variations vont modifier les autres tensions et intensités, via les lois des condensateurs et des bobines en particulier. En combinant toutes ces lois, on aboutit à une équation qui va relier une grandeur avec ses dérivées : une *équation différentielle*.

Méthode : Établissement de l'ED vérifiée par une grandeur du circuit

- On donne un nom à toutes les tensions et intensités du circuit.
- On écrit :
 - la loi des mailles dans toutes les mailles indépendantes
 - la loi des noeuds à tous les noeuds sauf un (la masse le plus souvent)
 - les lois des composants.
- On combine ces équations pour éliminer les variables inutiles.

Exemple : Équation différentielle d'un circuit d'ordre 1

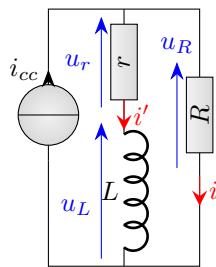
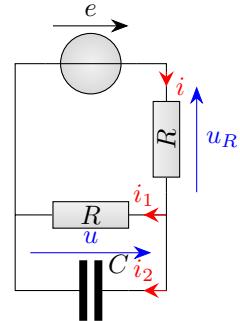
1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par i dans le circuit de gauche (en fonction de i_{cc} et des composants).
2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par u dans le circuit de droite (en fonction de e et des composants).

ED sur i ED sur u

1. On commence par nommer les tensions (cf. ci-dessous). On écrit alors :

- la loi des mailles : $u_r + u_L = u_R$ (on n'applique jamais la loi des mailles à un générateur idéal de courant, car on ne connaît rien sur sa tension)
- la loi des noeuds au noeud du haut : $i_{cc} = i' + i$
- les lois de composants : $u_r = r.i'$; $u_L = L \cdot \frac{di'}{dt}$; $u_R = R.i$

On part alors de la loi des mailles : $u_r + u_L = u_R$ donc $r.i' + L \cdot \frac{di'}{dt} = R.i$. Or $i' = i_{cc} - i$ donc $r.i_{cc} - r.i + L \cdot \frac{di_{cc}}{dt} - L \cdot \frac{di}{dt} = R.i$. Pour terminer, on sépare les termes, en mettant dans le terme de gauche la variable qui nous intéresse et le reste à droite : $-r.i - L \cdot \frac{di}{dt} - R.i = -r.i_{cc} - L \cdot \frac{di_{cc}}{dt}$.

ED sur i ED sur u

2. On place les tensions et intensités ; attention, la tension u est à la fois aux bornes de la résistance et du condensateur ; de plus, les deux résistances ont la même valeur, mais ni la même tension, ni la même intensité. On écrit :

- la loi des mailles : $e = u_R + u$
- la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$
- les lois des composants : $u_R = R.i$ $u = R.i_1$ et $i_2 = C \cdot \frac{du}{dt}$

Alors $R.i + u = e$, donc $R.i_1 + R.i_2 + u = e$; en remplaçant les intensités on obtient $u + RC \frac{du}{dt} + u = e$ soit $2u + RC \frac{du}{dt} = e$.

A.2. Régime transitoire et régime permanent

Propriété : Solutions d'une équation différentielle linéaire

Une équation différentielle linéaire portant sur une variable x s'écrit en mettant tous les termes dépendant de x dans le premier membre (à gauche) et le reste dans le second membre (à droite). Pour la résoudre, on cherche :

- une *solution particulière* de l'équation différentielle complète ; en pratique, si le second membre est constant, une solution constante convient.
- l'ensemble des *solutions de l'ED homogène ou ED sans second membre* (formules à apprendre).

Alors l'ensemble des solutions est la somme des deux précédentes ; les conditions initiales (CI) permettent alors de choisir la bonne parmi l'ensemble.

Définition : Régime permanent, transitoire, libre

La solution particulière de l'équation correspond au *régime permanent*.

La solution de l'ED homogène correspond au *régime transitoire*. Si elle tend vers 0, on dit que l'ED est stable, sinon elle est instable.

On appelle *régime libre* le régime transitoire lorsqu'il est seul (c'est-à-dire lorsque le régime permanent est nul).

On l'appelle «régime transitoire» car il est constitué d'exponentielles, donc il évolue très vite : soit il disparaît et tend vers 0 très vite, soit, si le système est instable, il diverge très vite.

Définition : Ordre d'une ED

On appelle *ordre* d'une équation différentielle, la différence des degrés de dérivation entre le terme le plus dérivé et le terme le moins dérivé.

Par exemple, l'équation $3\frac{d^2f}{dt^2} + 5\frac{df}{dt} + 2f = 4$ fait apparaître l'inconnue f sous forme non dérivée (ou dérivée 0 fois), sous forme dérivée une fois et dérivée deux fois, donc cette équation est d'ordre 2.

Nous allons donc maintenant apprendre par cœur les solutions des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1.

A.3. Solutions d'une ED d'ordre 1

Propriété : Solutions d'une ED linéaire d'ordre 1

Une ED linéaire homogène d'ordre 1 a pour forme canonique $\tau \frac{dx}{dt} + x = 0$. L'ensemble de ses solutions est de la forme $\{t \mapsto K.e^{-t/\tau}, K \in \mathbb{R}\}$.

τ est la constante de temps du circuit ; si $\tau > 0$, au bout de quelques τ , la solution transitoire a atteint 0 (figure E3.1) ; sinon la solution transitoire diverge.

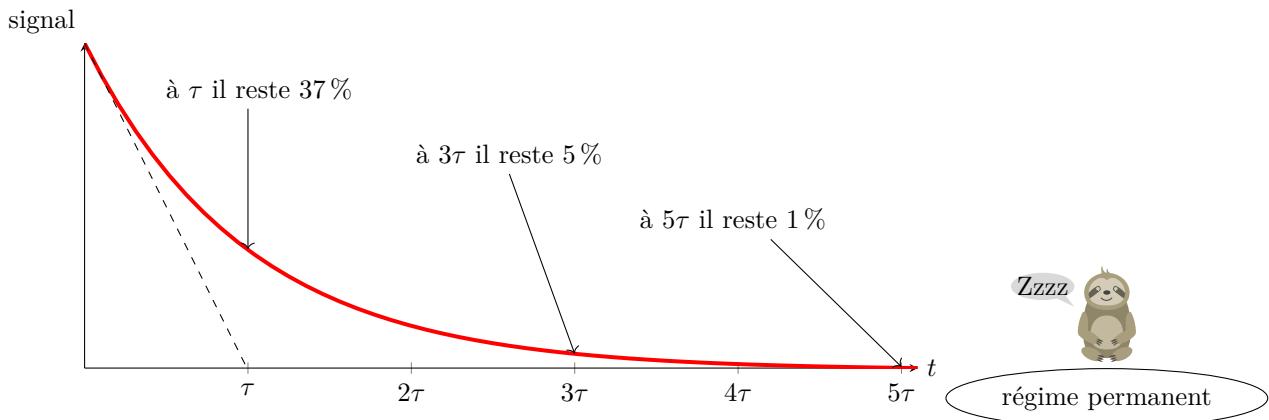


FIGURE E3.1 – Solutions d'une ED linéaire homogène d'ordre 1.

Remarque : Graphiquement, pour trouver τ sur une courbe expérimentale, la façon la plus précise consiste à tracer la tangente à l'origine à la courbe ; on peut montrer que cette tangente coupe l'asymptote (ici 0) à une abscisse τ .

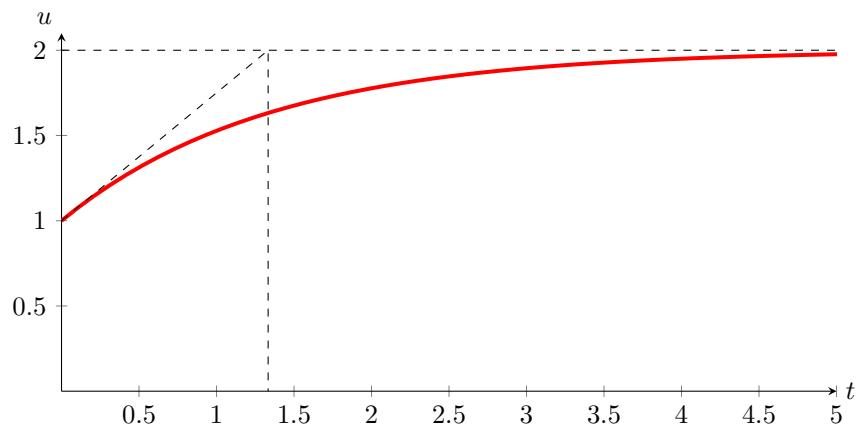
Exemple : Résolution d'une ED d'ordre 1

Trouvez la solution de l'ED $4 \frac{du}{dt} + 3u = 6$ vérifiant $u(0) = 1$.

On commence par passer l'équation sous forme canonique ; pour cela il faut un coefficient 1 devant le terme non dérivé, donc on divise par 3 et on obtient $\frac{4}{3} \frac{du}{dt} + u = 2$.

- L'équation homogène $\frac{4}{3} \frac{du}{dt} + u = 0$ a pour solutions $u(t) = K.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{4}{3}$
- On cherche une solution constante de l'équation complète. Si $u = cst$ alors $\frac{du}{dt} = 0$ donc l'ED devient $\frac{4}{3} \times 0 + u = 2$ donc $u = 2$
- La solution générale est donc de la forme $u(t) = 2 + K e^{-t/\tau}$
- Les conditions initiales sont $u(0) = 1$. Or $u(0) = 2 + K$ donc $K = -1$. On a donc $u(t) = 2 - e^{-t/\tau}$.

Pour tracer cette solution, on remarque que $u(0) = 1$ et $u(\infty) = 2$; de plus le temps caractéristique vaut $\frac{4}{3}$:



E3.B. Circuit RC série

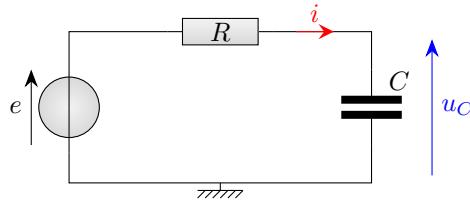
Le circuit modèle d'ordre 1 est le *RC* série. Il faut savoir établir l'équation de sa charge et de sa décharge.

B.1. Résolution de la tension aux bornes du condensateur

Exemple : Charge d'un condensateur

À connaître

On considère un circuit *RC* série (figure ci-dessous). Initialement ($t < 0$), le générateur est éteint ($e = 0 \text{ V}$) et le condensateur déchargé ($u = 0 \text{ V}$).



On allume le générateur à $t = 0$; donc pour tout $t > 0$, $e = E = cst$.

Déterminez $u_C(t)$ et $i(t)$ à $t > 0$.

- On commence par établir l'ED vérifiée par u_C à $t > 0$: en notant u_R la tension aux bornes de R orientée en convention récepteur, on a $u_R + u_C = E$. Or $u_R = R.i$ (par la loi d'Ohm) et $i = C \frac{du_C}{dt}$ (par la loi du condensateur) donc $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$. On peut donc écrire

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E \text{ avec } \tau = RC$$

- On cherche l'ensemble des solutions. D'abord une solution particulière constante : si $u_C = cst$ alors $\frac{du_C}{dt} = 0$ donc l'ED devient $0 + u_C = E$. Ensuite, l'équation sans second membre $\tau \frac{du_C}{dt} = 0$ a pour solutions $u_C = K.e^{-t/\tau}$. Donc la solution complète pour $t > 0$ est de la forme

$$u_C(t) = E + K.e^{-t/\tau} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Il faut trouver l'inconnue K à l'aide d'une condition initiale. Pour cela, on utilise la continuité (mathématique) de la tension aux bornes du condensateur. En effet, il faut bien comprendre que, pour le moment, la fonction u_C est définie par morceaux :

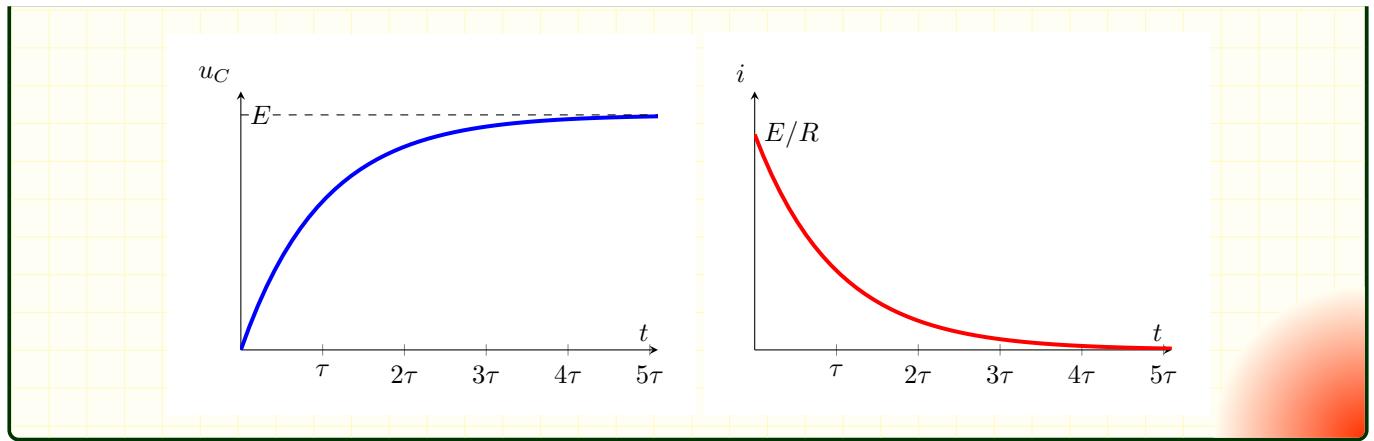
$$u_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E + K.e^{-t/\tau} & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

La continuité mathématique de la tension u_C traduit par l'égalité des limites de u_C à droite et à gauche en 0 ; en physique, on l'écrira $u_C(0^-) = u_C(0^+)$ (il faut lire cela comme une façon abrégée d'écrire des limites). En faisant tendre les deux morceaux de u_C vers 0, on trouve à gauche : $u_C(0^-) = 0$; et à droite : $u_C(0^+) = E + K.e^0 = E + K$. Par continuité, on a donc $0 = E + K$ donc $K = -E$. On en déduit donc la solution :

$$u_C(t) = E - E.e^{-t/\tau}$$

- Une fois u_C trouvé, on peut calculer $i = C \frac{du_C}{dt} = C [0 - E.(-\frac{1}{\tau})e^{-t/\tau}] = \frac{E.C}{\tau}e^{-t/\tau}$ et comme $\tau = RC$ on obtient

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

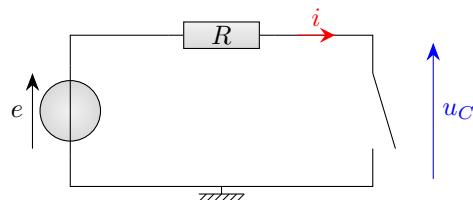


Exemple : Décharge d'un condensateur

À connaître

On reprend le circuit RC série de l'exemple précédent. Cette fois, à $t < 0$, le générateur est allumé depuis longtemps : $e = E$ et le régime continu est atteint. À $t = 0$, on éteint le générateur, donc $e = 0 \text{ V}$ pour $t > 0$. Déterminez $u_C(t)$ et $i(t)$ à $t > 0$.

- On commence par reétablir l'ED vérifiée par u_C à $t > 0$: en notant u_R la tension aux bornes de R orientée en convention récepteur, on a $u_R + u_C = e = 0$. Or $u_R = R.i$ (par la loi d'Ohm) et $i = C \frac{du_C}{dt}$ (par la loi du condensateur) donc $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$. On peut donc écrire $\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ avec $\tau = RC$
- L'équation est déjà sans second membre, inutile de chercher une solution particulière. L'équation a pour solutions $u_C = K.e^{-t/\tau}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
- Il faut trouver l'inconnue K à l'aide d'une condition initiale. Pour cela, on utilise la continuité (mathématique) de la tension aux bornes du condensateur : $u_C(0^-) = u_C(0^+)$. Ici, la difficulté est d'avoir $u_C(0^-)$: c'est la valeur de u_C juste avant qu'on éteigne le générateur. Or l'énoncé nous dit que, à ce moment-là, $e = E$ et le régime continu est atteint, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. On redessine donc le circuit équivalent à $t = 0^-$:

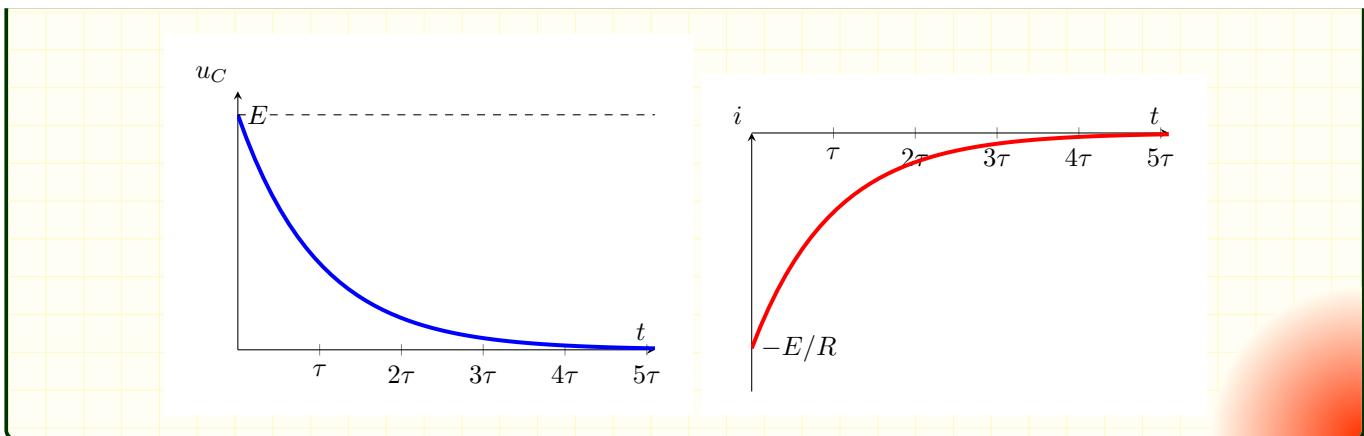


On a donc $i = 0$, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. Par la loi des mailles, on trouve $u_C(0^-) = E$. Quant à $u_C(0^+)$, on prend l'expression trouvée pour la solution de l'ED en $t = 0$, et on trouve $u_C(0^+) = K$. On en déduit que $K = E$. On en déduit donc la solution :

$$u_C(t) = E \cdot e^{-t/\tau}$$

- Une fois u_C trouvé, on peut calculer $i = C \frac{du_C}{dt} = CE \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} = -\frac{E \cdot C}{\tau} e^{-t/\tau}$ et comme $\tau = RC$ on obtient

$$i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$



En plus de savoir refaire les calculs ci-dessus, il faudra bien retenir la propriété :

Propriété : Temps caractéristique de charge/décharge d'un circuit RC série

Un condensateur C en série avec une résistance R se charge/décharge avec un temps caractéristique $\tau = RC$.

Typiquement, pour une résistance de $1\text{ k}\Omega$ et une capacité de $1\text{ }\mu\text{F}$, on trouve $\tau = 1\text{ ms}$. C'est rapide, mais pas trop non plus : en 1 ms , la lumière parcourt 300 km ce qui montre qu'on reste bien dans les conditions de l'ARQS.

De manière générale, en électricité, les régimes transitoires durent souvent entre quelques μs et quelques ms .

La mesure du temps de charge/décharge permet, si on connaît R , de mesurer la capacité C du condensateur. Or la capacité d'un condensateur est modifiée par la présence de conducteurs électriques à proximité, ou par la modification de sa géométrie. Ce phénomène est à la base de tous les capteurs capacitifs comme les écrans tactiles.



(a) Écran tactile de téléphone portable.



(b) Le therémine, instrument de musique inventé par Lev Termen, contrôlé par la position des mains du joueur formant un condensateur avec deux antennes. (Crédit : Wikipedia/B.Corbis)

FIGURE E3.2 – Exemples de capteurs capacitifs.

B.2. Bilan énergétique

Lors de la charge du condensateur sous une tension constante E , le condensateur a accumulé de l'énergie. On peut chercher à évaluer quelle proportion de l'énergie fournie par le générateur a été stockée.

Exemple : Bilan énergétique de la charge du condensateur

À connaître

On considère le problème déjà traité plus haut d'un condensateur qui se charge sous une tension constante E .
On a trouvé les solutions : $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ et $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$.

Déterminez l'énergie fournie par le générateur, l'énergie stockée par le condensateur et l'énergie dissipée par la résistance. Dédouisez-en le rendement du stockage de l'énergie par un condensateur.

- le générateur fournit une puissance $\mathcal{P}_{gen} = E.i = \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}$. Pour connaître l'énergie totale fournie, on intègre cette puissance entre 0 et l'infini (une intégrale jusqu'à l'infini, il faut voir ça comme une limite). On a donc

$$\begin{aligned} E_{gen} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_{gen} dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-t/RC} dt \\ &= \left[-\frac{E^2 RC}{R} e^{-t/RC} \right]_0^\infty = CE^2 \end{aligned}$$

car $e^0 = 1$ et $e^{-\infty} = 0$

- le condensateur voit sa tension passer de 0 à E , donc son énergie de 0 à $\frac{1}{2}CE^2$. Il stocke donc une énergie

$$E_{cond} = \frac{1}{2}CE^2$$

- la résistance dissipe une énergie

$$\begin{aligned} E_{res} &= \int_0^\infty \mathcal{P}_{res} dt = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty \frac{RE^2}{R^2} e^{-2t/RC} dt \\ &= \left[-\frac{R^2 CE^2}{2R^2} e^{-2t/RC} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2 \end{aligned}$$

On constate donc que :

- l'énergie est conservée : $E_{gen} = E_{cond} + E_{res}$
- le condensateur ne stocke que 50 % de l'énergie fournie par le générateur

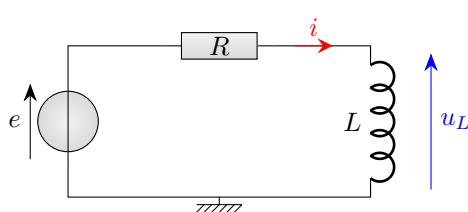
Néanmoins, la capacité des condensateurs à accumuler de l'énergie très rapidement font qu'ils sont de plus en plus utilisés, entre autres dans les transports électriques (voiture, bus,...).

E3.C. Circuit RL série

Un autre exemple très important à connaître est celui constitué d'une bobine et d'une résistance en série. On ne traitera ici que l'établissement du courant.

Exemple : Établissement du courant dans la bobine

À connaître



À $t < 0$, le générateur est éteint et aucun courant ne circule. On allume le générateur à $t = 0$: e passe de 0 à $E = cst$. Calculez i puis u_L pour $t > 0$, et tracez les courbes.

- Soit u_R la tension aux bornes de la résistance, en convention récepteur. Alors par la loi des mailles : $u_R + u_L = E$ donc $R.i + L\frac{di}{dt} = E$. On met cette équation sous forme canonique :

$$\tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R} \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

- On cherche une solution particulière constante : $i = cst$ alors $\frac{di}{dt} = 0$ donc $i = \frac{E}{R}$. Les solutions de l'équation homogène $\tau \frac{di}{dt} + i = 0$ sont de la forme $i = K.e^{-t/\tau}$.

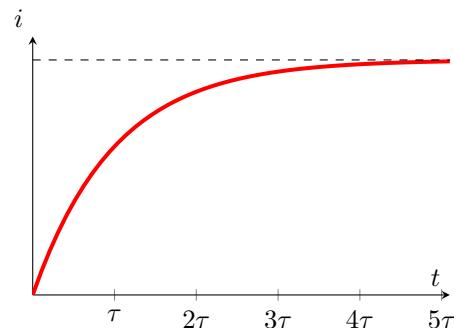
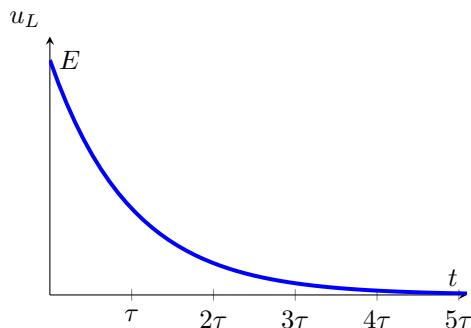
Donc la solution recherchée est de la forme

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ke^{-t/\tau} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Le courant à travers une bobine est continu mathématiquement donc $i(0^-) = i(0^+)$. À $t < 0$ il n'y a pas de courant donc $i(0^-) = 0$. À $t > 0$ on sait que $i = \frac{E}{R} + Ke^{-t/\tau}$ donc $i(0^+) = \frac{E}{R} + Ke^0 = \frac{E}{R} + K$. On en tire $0 = \frac{E}{R} + K$ donc $K = -\frac{E}{R}$. Donc

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$$

- On a ensuite $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot [0 - \frac{E}{R} \cdot (-\frac{1}{\tau}) \cdot e^{-t/\tau}] = \frac{LE}{\tau R} e^{-t/\tau} = E \cdot e^{-t/\tau}$



Propriété : Temps caractéristique d'établissement/- rupture du courant dans un circuit RL série

Un condensateur L en série avec une résistance R voit son courant apparaître ou disparaître avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

Comme pour le condensateur, on peut se servir de cette propriété pour mesurer l'inductance d'une bobine, et sa modification dû à la proximité d'un objet magnétisable, en acier par exemple. C'est ainsi que les boucles inductives sous la chaussée permettent de détecter la présence d'un véhicule ; néanmoins, le système de mesure de L n'est pas directement le temps d'établissement du courant.

E3.D. Résolution générale d'équations différentielles d'ordre 1

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont faciles à résoudre dans le cas d'un second membre constant. Tant que nous ne considérerons que des circuits avec des composants linéaires, et alimentés par des tensions constantes, il sera possible de les résoudre à la main. Mais ce n'est pas toujours le cas, et nous allons voir dans cette section deux techniques pour ces cas-là, la seconde étant de toute importance à connaître.

D.1. Résolution par séparation des variables

Cette technique n'est pas explicitement au programme, mais il est bon d'en avoir entendu parler.

Méthode : Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1 par séparation des variables

Une équation différentielle d'ordre 1 sur la fonction u peut s'écrire sous la forme $\frac{du}{dt} = f(u, t)$ où f est une fonction générale. Si f peut s'écrire comme le produit d'un terme dépendant de l'inconnue u par un terme dépendant de la variable t selon la forme $f(u, t) = g(u) \times h(t)$, alors :

- on sépare les variables en divisant la fraction de la dérivée en deux et en mettant les termes en u d'un côté, ceux en t de l'autre : $\frac{du}{g(u)} = h(t).dt$
- on intègre de chaque côté en tenant compte des conditions initiales : $\int_{u(0)}^u \frac{du}{g(u)} = \int_0^t h(t).dt$ ^a

a. En maths, vous ne devez jamais donner le même nom à la variable intégrée et à la variable qui apparaît dans les bornes, il

faudrait ainsi écrire $\int_{u(0)}^u \frac{du'}{g(u')} = \int_0^t h(t').dt'$; en physique on ne vous embêtera pas avec ça.

Exemple : Circuit RC avec résistance variable

On considère un circuit RC série mais avec une résistance qui varie en fonction de la tension à ses bornes selon la loi $R(u) = R_0 + \alpha u$ avec $R_0 = 300 \Omega$ et $\alpha = 40 \Omega \cdot V^{-1}$. On prend $C = 220 \text{ nF}$, et la tension d'alimentation E passe, à l'instant $t = 0$, de la valeur 0 à la valeur $E = 10 \text{ V}$.

Déterminez l'ED vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur, et résolvez-la pour trouver $u_C(t)$.

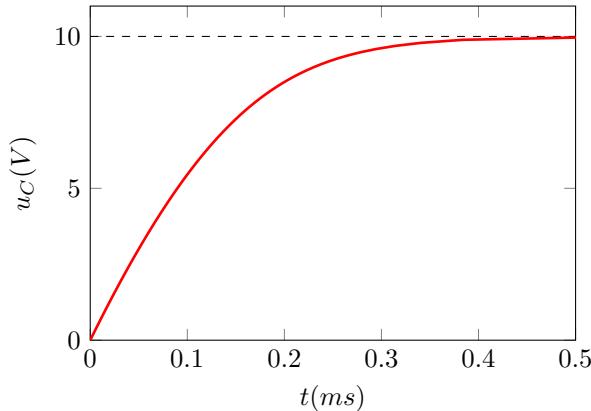
On reprend les notations vues pour le RC série : $u_C + u_R = E$ or $u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt} = (R_0 + \alpha(E - u_C))C \frac{du_C}{dt}$ donc $(R_0 + \alpha(E - u_C))C \frac{du_C}{dt} + u_C = E$.

On commence par isoler la dérivée : $\frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{(R_0 + \alpha(E - u_C))C}$.

On sépare les variables : $\frac{R_0 + \alpha(E - u_C)}{E - u_C} du_C = \frac{1}{C} dt$ (on peut aussi passer C à gauche si on veut, peu importe).

On intègre : $\int_{u_C(0)=0}^{u_C} \frac{R_0 + \alpha(E - u_C)}{E - u_C} du_C = \frac{1}{C} \int_0^t dt$ soit $[-R_0 \ln(E - u_C) + \alpha u_C]_0^{u_C} = \frac{t}{C}$ d'où $R_0 \ln \frac{E}{E - u_C} + \alpha u_C = \frac{t}{C}$.

Ici il est difficile d'isoler u_C littéralement ; néanmoins, on peut tracer sa courbe avec un ordinateur :



Cela ressemble de loin à la solution exponentielle du RC série, mais ce n'est pas vraiment une exponentielle.

D.2. Résolution numérique

Jusqu'ici, nous avons essayé de résoudre les ED de façons analytiques, c'est-à-dire d'obtenir une forme mathématique de la solution. Souvent, cette solution n'est pas possible à trouver, mais on peut résoudre de façon numérique les valeurs que prendra la fonction au cours du temps.

Dans tout ce paragraphe, on considère une ED portant sur une fonction u de variable t qu'on peut écrire sous la forme $\frac{du}{dt} = f(u, t)$

La méthode la plus simple est la méthode d'Euler ; elle est basée sur la définition de la dérivée : $\frac{du}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$. Si on prend un h petit, on obtiendra une approximation pas trop mauvaise et on pourra écrire $\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx f(u(t), t)$ soit $u(t+h) = u(t) + h.f(u(t), t)$. Ainsi, de proche en proche, par pas de h , on détermine les valeurs approchées de $f(t)$ (cf. figure E3.3).

Méthode : Résolution d'une ED d'ordre 1 par la méthode d'Euler

Soit une équation différentielle $\frac{du}{dt} = f(u, t)$ avec une condition initiale $u(0) = u_0$ connue.

- on choisit un *pas temporel* h petit
- on calcule deux suites (t_n) et (u_n) définies par
 - * les valeurs initiales $t_0 = 0$ et u_0

FIGURE E3.3 – Illustration de la détermination d'une fonction $u(t)$ par la méthode d'Euler.

* les relations de récurrence

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h \\ u_{n+1} = u_n + h * f(u_n, t_n) \end{cases} \quad (\text{E3.1})$$

La suite (u_n) contient alors les valeurs de u aux instants définis par la suite (t_n) .

Le choix de h ne doit pas être effectué au hasard : il faut connaître le temps caractéristique d'évolution du système, et prendre par exemple 1/100 de ce temps.

Exemple : Charge d'un condensateur

À connaître

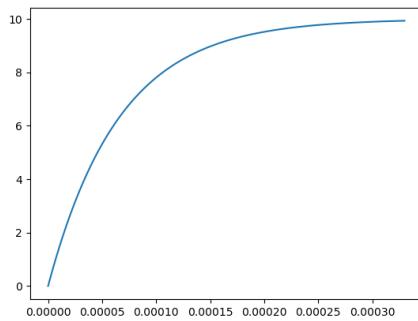
On considère un circuit RC série avec $R = 300 \Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$, vérifiant l'équation $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E = 10 \text{ V}$ avec $u_C(0) = 0$.

Résolvez numériquement $u_C(t)$ sur une durée de 5τ et tracez la courbe de $u_C(t)$

L'ED peut s'écrire sous la forme $\frac{du_C}{dt} = \frac{10 - u_C}{300 \times 220 \times 10^{-9}}$. On réalise donc le programme suivant avec Python :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 R,C,E=300,220e-9,10 # constantes
4 tau=R*C # constante de temps
5 h=tau/100 # choix du pas temporel
6 tmax=5*tau # temps de simulation
7 N=int(tmax/h) # nb de points
8 tab_t=np.zeros(N+1) # tableau des temps
9 tab_uc=np.zeros(N+1) # tableau des tensions
10 tab_t[0],tab_uc[0]=0,0 # initialisation
11 def derivee(uc,t): # terme de droite de l'ED
12     return (E-uc)/tau
13 for n in range(0,N): # récurrence
14     tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
15     tab_uc[n+1]=tab_uc[n]+h*derivee(tab_uc[n],tab_t[n])
16 plt.figure()
17 plt.plot(tab_t,tab_uc)
18 plt.show()
```



On retrouve bien l'exponentielle attendue. Évidemment, il faudrait ajouter des labels sur les axes,...

Exemple : Circuit RC soumis à une tension sinusoïdale

On considère un circuit RC série avec $R = 300 \Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$, vérifiant l'équation $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$ avec $u_C(0) = 0$; la tension $e(t)$ est une tension sinusoïdale de fréquence $f = 2500 \text{ Hz}$ et d'amplitude 3 V , de phase nulle.

Résolvez numériquement $u_C(t)$ sur 4 périodes de $e(t)$ et tracez les courbes de $e(t)$ et $u_C(t)$ sur le même graphe.

D'après l'énoncé, $e(t) = 3 \cos(5000\pi t)$ (on rappelle qu'une fonction sinusoïdale est en fait un cosinus, et que $\omega = 2\pi f$). L'ED peut donc s'écrire sous la forme $\frac{du_C}{dt} = \frac{3 \cos(5000\pi t) - u_C}{300 \times 220 \times 10^{-9}}$.

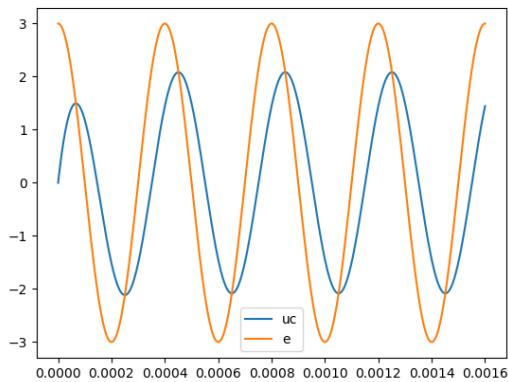
Cette fois il faut faire attention qu'il y a 2 temps caractéristiques : $\tau = RC = 66 \mu\text{s}$ et la période du signal $T = \frac{1}{2500} = 400 \mu\text{s}$. Pour le pas temporel on prendra $\frac{1}{100}$ du plus petit des deux, soit $\frac{\tau}{100}$.

On réalise donc le programme suivant avec Python :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 R,C,E,f=300,220e-9,3,2500 # constantes
4 tau=R*C # constante de temps
5 h=tau/100 # choix du pas temporel
6 tmax=4/f # temps de simulation
7 N=int(tmax/h) # nb de points
8 tab_t=np.zeros(N+1) # tableau des temps
9 tab_uc=np.zeros(N+1) # tableau des tensions
10 tab_t[0],tab_uc[0]=0,0 # initialisation
11 def e(t): # générateur
12     return E*np.cos(2*np.pi*f*t)
13 def derivee(uc,t): # terme de droite de l'ED
14     return (e(t)-uc)/tau
15 for n in range(0,N): # récurrence
16     tab_t[n+1]=tab_t[n]+h
17     tab_uc[n+1]=tab_uc[n]+h*derivee(tab_uc[n],tab_t[n])
18 plt.figure()
19 plt.plot(tab_t,tab_uc,label="uc")
20 plt.plot(tab_t,e(tab_t),label="e")
21 plt.legend()
22 plt.show()
```

On obtient la courbe :



On constate que $u_C(t)$ devient rapidement sinusoïdale de même période que $e(t)$; on reverra cet effet au second semestre.

La méthode d'Euler marche donc assez bien. Mais elle souffre d'un gros problème de précision, qu'on verra beaucoup plus quand on passera aux équations d'ordre 2 : en effet, l'erreur commise entre la résolution numérique et la solution exacte varie proportionnellement au pas temporel h . Pour avoir 10 fois moins d'erreurs, il faut un pas 10 fois plus petit, ce qui fait 10 fois plus de calculs ; mais rapidement la limite de précision des nombres flottants va être atteinte.

Pour aller au-delà, il faut étudier l'approximation de la dérivée par son taux d'accroissement à la lumière d'un outil mathématique que vous n'avez pas encore vu : les développements limités. À l'aide de cet outil, on peut mettre au point des relations de récurrence plus performantes. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 qui utilise les équations suivantes mettant en œuvre 4 valeurs intermédiaires $k_{1\dots 4}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + h \\ k_1 = f(u_n, t_n) \\ k_2 = f\left(u_n + \frac{h \cdot k_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_3 = f\left(u_n + \frac{h \cdot k_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ k_4 = f(u_n + h \cdot k_3, t_n + h) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

On peut montrer que la précision de cette méthode varie comme h^4 ; autrement dit, si on divise le pas par 10, on divise l'erreur par 10^4 .

Vous n'avez pas à savoir implémenter cette méthode ; seule celle d'Euler est exigible. Par contre, il existe une fonction toute prête sous Python que vous devez savoir utiliser : la fonction `scipy.integrate.odeint(derivee, ci, tab_t)` qui prend comme arguments :

- la fonction correspondant à la dérivée (notée $f(u, t)$ précédemment). Cette fonction prend deux arguments, la **liste** des inconnues et la variable, et elle renvoie la **liste** des dérivées ;
- la **liste** des conditions initiales ;
- le tableau des instants où on veut calculer les inconnues.

Considérons par exemple l'équation $\frac{du_c}{dt} = \frac{E - u_c}{RC}$. Ici on a une seule inconnue, u_c . Voici un exemple de programme :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import scipy.integrate as spi
4 R,C,E=300,220e-3,10
5 def derivee(tab,t): # fonction dérivée
6     uc=tab[0] # une seule inconnue, uc
7     return [(E-uc)/(R*C)] # renvoie [dérivée de uc]
8 tab_t=np.linspace(0,5*R*C,100) # temps de simulation
9 ci=[0] # liste des CI
10 solution=spi.odeint(derivee,ci,tab_t) # résolution
11 tab_uc=solution[:,0] # récupération de uc
12 plt.figure()
13 plt.plot(tab_t,tab_uc)
14 plt.show()

```

- la fonction `derivee` prend comme argument une liste d'inconnues ne contenant que u_c , et la variable temps. Elle renvoie une liste ne contenant qu'un seul terme, $\frac{du_c}{dt}$ calculé à partir de l'ED ;
- le tableau des instants est établi grâce à `np.linspace`, ici on prend 100 points entre 0 et 5τ ;
- la liste des valeurs initiales des inconnues contient seulement $u_c(0) = 0$
- la fonction `odeint` renvoie un tableau 2D contenant une colonne par inconnues ; par exemple, ici on a une seule colonne correspondant à u_c et 100 lignes correspondant aux 100 valeurs du temps. Pour récupérer la colonne 0 contenant l'inconnue u_c , on utilise la syntaxe `solution[:,0]` où `:` signifie : «toutes les lignes».

La courbe obtenue ressemble évidemment à ce qu'on a déjà obtenu. Sur cet exemple, l'avantage de la méthode de Runge-Kutta n'est pas évident ; elle le deviendra sur les exemples d'ordre 2.

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circuits linéaires du premier ordre	
Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension. Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique. Capteurs capacitifs. Stockage et dissipation d'énergie.	Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. Déterminer en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RC série. Mettre en œuvre un capteur capacitif à l'aide d'un microcontrôleur.
Modèle du circuit RL série. Capteurs inductifs.	Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans le circuit. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. Réaliser un bilan énergétique sur le circuit RL série.
Circuit du premier ordre.	METTRE EN ŒUVRE LA MÉTHODE D'EULER À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION POUR SIMULER LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE À UNE EXCITATION DE FORME QUELCONQUE. Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre dans un circuit comportant une ou deux mailles et analyser ses caractéristiques.

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

QCMs

réponses page 262

✓ QCM : Compréhension du cours ✗
Q1.

La solution particulière d'une équation différentielle s'appelle :

- (a). le régime transitoire
- (b). le régime permanent
- (c). le régime libre
- (d). l'ancien régime

Q2.

La solution d'une équation différentielle correspondant à l'équation sans second membre s'appelle :

- (a). le régime permanent
- (b). l'ancien régime
- (c). le régime transitoire
- (d). le régime libre

Q3.

Le régime transitoire tend toujours vers 0 :

- (a). Faux
- (b). Vrai

Q4.

La forme canonique d'une ED linéaire homogène d'ordre 1 est :

- (a). $\frac{ds}{dt} + \tau s = 0$
- (b). $\frac{ds}{dt} + s = 0$
- (c). $\tau \frac{ds}{dt} + s = 0$
- (d). $\frac{1}{\tau} \frac{ds}{dt} + s = 0$

Q5.

Si on a une courbe solution d'une ED linéaire d'ordre 1, on peut tracer la tangente à l'origine, et l'asymptote en l'infini ; ces courbes se coupent à l'abscisse :

- (a). 5τ
- (b). 0
- (c). 3τ
- (d). τ

✓ QCM : ED linéaires d'ordre 1 ✗**Q6.**

La solution de l'ED $400 \frac{dx}{dt} + x = 2$ vérifiant $x(0) = 1$ est :

- (a). $x(t) = 2 - e^{-t/400}$
- (b). $x(t) = e^{-t/400}$
- (c). $x(t) = e^{-400t}$
- (d). $x(t) = 2 + e^{-t/400}$

Q7.

La solution de l'ED $100 \frac{dx}{dt} + 4x = 2$ vérifiant $x(0) = 1$ est :

- (a). $x(t) = 0,5 + e^{-t/25}$
- (b). $x(t) = 2 + e^{-25t}$
- (c). $x(t) = 0,5 + 0,5e^{-t/25}$
- (d). $x(t) = 2 - e^{-25t}$

Q8.

La solution de l'ED $\frac{dx}{dt} + 0,5x = 4$ vérifiant $x(0) = 0$ est :

- (a). $x(t) = 4 - 4e^{-2t}$
- (b). $x(t) = 8 - 8e^{-0,5t}$
- (c). $x(t) = 8 - 8e^{-2t}$
- (d). $x(t) = 8$

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

Exercices

réponses page 263

Exercice E3.1 : Extinction du courant dans une bobine [*]

On reprend le circuit vu en cours avec un générateur de tension e , une résistance R et une bobine L en série. À $t < 0$, $e = E = cst$ et le régime permanent continu est atteint ; on coupe la tension à $t = 0$: $e(t > 0) = 0$.

1. Établissez l'ED vérifiée par le courant i dans le circuit à $t > 0$.
2. Trouvez la solution à une constante près.
3. Dessinez le circuit à l'instant $t = 0^-$ en tenant compte des indications de l'énoncé. Déduisez-en la constante dans $i(t)$.
4. Calculez la variation d'énergie stockée dans la bobine entre 0 et ∞ , ainsi que l'énergie dissipée dans la résistance.

Exercice E3.2 : Charge d'un condensateur en 2 étapes [**]

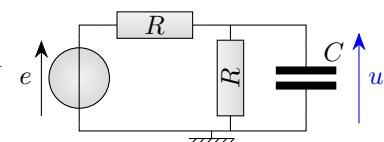
On considère un circuit formé d'un générateur de tension e , d'une résistance R et d'un condensateur C . Initialement, le condensateur est déchargé. On note u la tension à ses bornes et i le courant qui le traverse (en convention récepteur, mêmes notations que dans le cours).

1. Étape 1
À $t = 0$, la tension du générateur passe de 0 à $\frac{E}{2}$.
 - (a) Établissez l'ED vérifiée par u .
 - (b) Déduisez-en $u(t)$ et $i(t)$.
 - (c) On attend longtemps ; quelle valeur u_{lim} est atteinte par u ? Exprimez l'énergie stockée par le condensateur, et l'énergie fournie par le générateur.
2. Étape 2
À un nouvel instant pris comme nouvelle origine des temps $t = 0$, le générateur passe de $\frac{E}{2}$ à E .
 - (a) Établissez l'ED vérifiée par u .
 - (b) Déduisez-en $u(t)$ et $i(t)$.
 - (c) On attend longtemps ; quelle valeur est atteinte par u ? Exprimez l'énergie stockée par le condensateur, et l'énergie fournie par le générateur.
3. Exprimez l'énergie totale E_{gen} fournie par le générateur lors des deux étapes, et l'énergie totale E_{cond} stockée pendant les 2 étapes. Déduisez-en le rendement de la charge en 2 étapes.

Exercice E3.3 : Régime transitoire d'un circuit $R, R \parallel C$ [**]

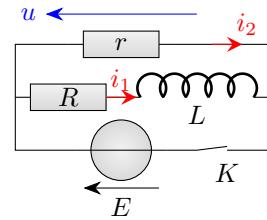
On considère le circuit ci-contre formé d'un générateur, de deux résistances identiques et d'un condensateur.

1. Établissez l'équation différentielle reliant u à e et aux constantes.
2. À $t < 0$, le générateur est éteint et le condensateur déchargé. À $t = 0$, on passe la tension e à $E = 10\text{ V}$ et elle reste constante pour $t > 0$. Trouvez l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.
3. Calculez le temps caractéristique pour $R = 10\text{ k}\Omega$ et $C = 0,2\text{ }\mu\text{F}$.
4. Tracez $u(t)$.



Exercice E3.4 : Surtension due à une bobine [**]

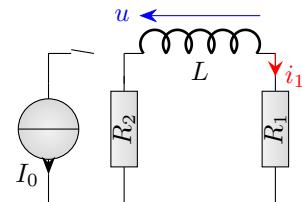
- L'interrupteur K est fermé depuis longtemps. Déterminez les intensités i_1 et i_2 .
- À $t = 0$ on ouvre K . Déterminez $u(t)$ pour $t > 0$.
- À quelle condition a-t-on $|u(0^+)| > E$?
- Tracez l'allure de $u(t)$ pour $r = 10.R$ et $E = 5$ V.



Exercice E3.5 : Circuit alimenté par un générateur de courant [**]

On considère le circuit ci-contre alimenté par une source idéale de courant $I_0 = 2$ A ; on prendra $R_1 = 330 \Omega$, $R_2 = 220 \Omega$ et $L = 18$ mH.

On allume le générateur, puis on attend longtemps que le régime permanent soit atteint.

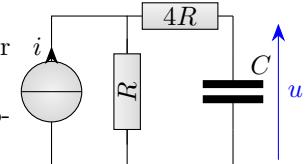


- Déterminer la valeur I_1 du courant i_1 lorsque ce régime permanent est atteint.
- À $t = 0$, on éteint le générateur de courant. Redessinez le circuit à $t > 0$, et établir l'équation différentielle vérifiée par u .
- Déterminez $u(t)$ et tracez son allure.

Exercice E3.6 : Étude d'un circuit d'ordre 1 [**]

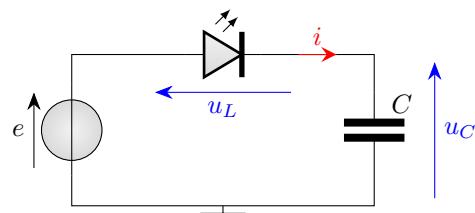
On considère le circuit ci-contre. Au temps $t < 0$, le générateur est allumé depuis très longtemps avec une intensité $i = I_0 = cst$.

- On suppose qu'à $t = 0$ le régime permanent est atteint. Calculez $u(0^-)$.
- On suppose qu'à $t = 0$ on double l'intensité du générateur, donc $i = 2I_0$ pour $t > 0$.
Établissez l'équation différentielle vérifiée par u aux temps $t > 0$; on introduira son temps caractéristique τ à exprimer.
- Résolvez l'ED et établissez $u(t)$.
- Tracez l'allure de $u(t)$.



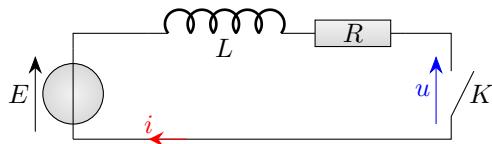
Exercice E3.7 : Charge d'un condensateur avec une LED témoin [**]

On considère le circuit ci-dessous avec $C = 220$ nF, alimentée par une tension e qui passe, à l'instant $t = 0$, de la valeur 0 V à la valeur $E = 3$ V. Le condensateur est initialement déchargé. La LED vérifie la loi $i = I_0 e^{u_L/U_s} - I_0$ avec $I_0 = 5$ µA et $U_s = 0,6$ V.



- Déterminez l'ED vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur
- Pour choisir un pas temporel, on doit évaluer le temps caractéristique d'évolution du système. Ici, on a comme données une tension U_s , un courant I_0 et une capacité C . Par analyse dimensionnelle, construisez une grandeur τ homogène à un temps à l'aide de ces 3 grandeurs.
- Résolvez-la numériquement à l'aide d'une méthode d'Euler. Commentez.
- Mesurez le temps t_{90} mis par le condensateur pour se charger à 90 %.

Exercice E3.8 : Arc électrique [**]



Un moteur électrique à courant continu peut être modélisé électriquement par une bobine $L = 85 \text{ mH}$ en série avec une résistance $R = 12 \Omega$. On alimente ce moteur selon la figure ci-dessus avec $E = 50 \text{ V}$ une tension constante ; l'interrupteur K est fermé initialement.

1. Calculez l'intensité i qui traverse la moteur en régime permanent.
2. On ouvre l'interrupteur ; l'intensité i peut-elle s'annuler instantanément ?
3. Il apparaît alors une étincelle aux bornes de l'interrupteur. Celui-ci se comporte alors comme un dipôle électrique avec une tension u à ses bornes, une intensité i qui le traverse, vérifiant la relation

$$u = U_0 + \frac{K}{i} \quad \text{avec } U_0 = 15 \text{ V}, \quad K = 18 \text{ V} \cdot \text{A}$$

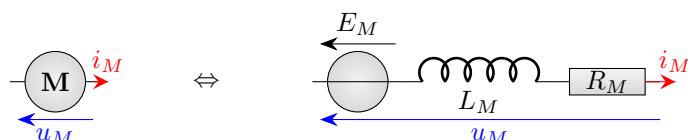
Établissez l'équation différentielle vérifiée par i .

4. Cette équation n'est pas linéaire.
Mettez-la sous la forme $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}f(i)$. Faites l'étude des variations de f et tracez sa courbe entre 0 et $+\infty$. Calculez numériquement les deux valeurs de i qui annulent f ; on les notera i_1 et i_2 . À quoi correspondent physiquement ces valeurs ?
5. Si $i \in]0; i_1]$, quel est le signe de $\frac{di}{dt}$? Comment va varier i ?
Mêmes questions si $i \in [i_1; i_2]$, puis si $i \in [i_2; +\infty[$.
Déduisez-en qu'un des deux points de fonctionnement est stable est que l'autre est instable.
D'après la valeur initiale de i , vers quel point de fonctionnement va-t-on tendre ?
6. Simulez alors l'évolution de $i(t)$ en fonction du temps à l'aide d'une méthode d'Euler, et tracez sa courbe.
Tracez aussi la courbe si on remplace l'interrupteur par un interrupteur isolé de caractéristiques $U'_0 = 40 \text{ V}$ et $K' = 32 \text{ V} \cdot \text{A}$. Commentez.

Exercice E3.9 : Hacheur dévolteur [***]

Les moteurs à courant continu sont utilisés universellement dans notre vie de tous les jours. Le réglage de la vitesse de rotation se fait par l'intermédiaire de l'intensité qui le traverse. Habituellement, on dispose d'une source de tension continue fixe, et un dispositif se charge d'alimenter plus ou moins le moteur.

On modélisera électriquement un moteur par une résistance R_M , une inductance L_M et un générateur de tension E_M s'opposant au courant i_M qui le traverse, placés en série.



Le principe du hacheur dévolteur est illustré ci-contre. Le cycle de fonctionnement de ce circuit, d'une durée T , est le suivant :

- entre 0 et $D.T$, l'interrupteur K est en position 1 ;
- entre $D.T$ et T , l'interrupteur K est en position 2.

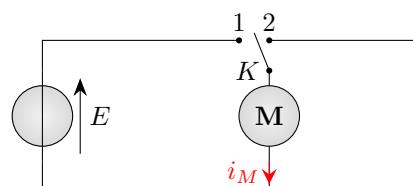
puis le cycle recommence périodiquement. D est un réel compris entre 0 et 1, appelé rapport cyclique. Dans la réalité, le rôle de K est joué par un transistor et une diode.

La tension E est positive.

1. Première phase

On note I_0 le courant i_M au début de la première phase ; donc $i_M(0^+) = I_0$.

- (a) Redessiner le schéma du circuit lors de cette phase en éliminant aussi les branches inutiles.



Ecrire l'équation différentielle vérifiée par i_M entre 0 et $D.T$; on posera un temps caractéristique τ .

- (b) Déterminer $i_M(t)$ pendant cette phase.
- (c) On note I_1 la valeur de i_M à la fin de la première phase. Exprimer I_1 en fonction de I_0 , E , E_M , R_M , D , T et τ .

2. *Seconde phase*

On prend la nouvelle origine des temps au début de cette phase.

- (a) Redessiner le schéma du circuit lors de cette phase. Écrire l'équation différentielle vérifiée par i_M .
- (b) Justifier que $i_M(0^+) = I_1$.

Exprimer alors $i_M(t)$ pendant la seconde phase, en fonction de I_1 et des données.

- (c) On note I_2 la valeur de i_M à la fin de la deuxième phase. Exprimer I_2 en fonction de I_1 et des données.

3. Le hacheur a atteint son régime périodique lorsque $I_2 = I_0$. À partir des équations précédentes, on peut montrer que cela est équivalent à

$$I_0 e^{-T/\tau} + \frac{E}{R_M} \left[e^{-(1-D)T/\tau} - e^{-T/\tau} \right] + \frac{E_M}{R_M} \left[e^{-T/\tau} - 1 \right] = I_0$$

On suppose que le hacheur fonctionne très vite : $T \ll \tau$. En utilisant l'approximation $e^x \approx 1 + x$ pour $x \ll 1$, montrer que I_0 est une fonction affine de D à exprimer.

4. Quelle valeur minimale de D permet d'avoir $I_0 > 0$? Que vaut I_0 au maximum?

5. On a un moteur tel que $R_M = 1,2\Omega$, $L = 2,1\text{mH}$ et $E_M = 6\text{V}$. On l'alimente avec $E = 10\text{V}$. Quel rapport cyclique doit-on choisir pour que l'intensité à travers le moteur vaille 1 A? Quelle condition doit vérifier T ?

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 1

TDs numériques

réponses page 266

TD numérique : Circuit RC soumis à une tension quelconque

On considère un circuit RC série alimenté par une tension $e(t)$. On prendra $R = 2,2\text{k}\Omega$ et $C = 300\text{nF}$.

1. Dessinez le circuit et vérifiez que vous savez reétablir l'ED vérifiée par la tension u_c aux bornes du condensateur : $RC \frac{du_c}{dt} + u_C = e(t)$.
2. Ouvrez un programme Python. Commencez par définir les constantes, et le temps caractéristique τ du circuit.
3. Mettez l'ED sous la forme $\frac{du_c}{dt} = f(u_c, t)$. Écrivez alors une fonction `derivee(uc, t)` prenant comme argument u_c et le temps, et renvoyant $\frac{du_c}{dt}$.

4. Réponse à une marche d'escalier

On suppose que le condensateur est initialement déchargé et que $e = 5\text{V}$ pour $t > 0$.

- (a) Calculez par la méthode d'Euler $u_c(t)$ pour $t > 0$ par la méthode d'Euler, sur une durée de 5τ avec comme pas $h = \frac{\tau}{100}$. Tracez la courbe obtenue.
- (b) Tracez sur la même courbe la formule théorique $u_{cth}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})$ en prenant comme liste des temps 100 points entre 0 et 5τ . Comparez les courbes.
- (c) Augmentez le pas de simulation à $\frac{\tau}{10}$, puis $\frac{\tau}{2}$, puis $1,5\tau$, enfin $2,5\tau$. Commentez l'influence du pas en distinguant les intervalles $h < \tau$, $\tau < h < 2\tau$ et $h > 2\tau$.

On voit l'importance de connaître à l'avance les caractéristiques approchées du systèmes avant de se lancer dans une simulation.

5. Réponse à un créneau

On prend maintenant une tension en crénaux de période T oscillant entre $E = +5\text{V}$ et $-E$. Cette fonction pourra être représentée mathématiquement ainsi :

$$e(t) = \begin{cases} +E \text{ si } (t\%T) < \frac{T}{2} \\ -E \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour cette simulation on reprend $h = \frac{\tau}{100}$.

- (a) Simulez $u_c(t)$ lorsque $T = 10\tau$, sur une durée de $5T$; tracez sur la même courbe $u_c(t)$ et $e(t)$.
- (b) Réduisez T à 3τ , puis τ , puis $\frac{\tau}{2}$. Observez les changements : quelle forme prend la sortie ? comment varie son amplitude ?

6. Réponse à un sinus

Testez maintenant une entrée $e(t)$ ayant la forme d'un cosinus d'amplitude 5 V et pour différentes fréquences : 100 Hz, 300 kHz et 1 kHz. Commentez la courbe obtenue.

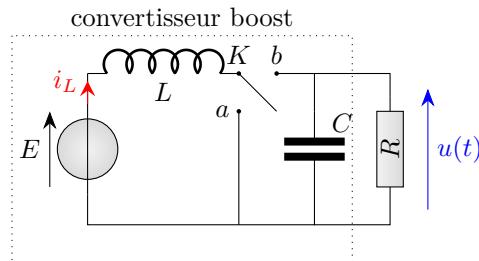
7. Précision de la méthode d'Euler

On reprend la tension en marche d'escalier.

Pour différents pas de valeurs $\frac{\tau}{10^p}$ avec p un entier, simulez la courbe, puis calculez l'écart maximum entre les valeurs simulées et les valeurs théoriques. Tracez l'écart maximal en fonction de $\frac{1}{pas}$ (pour voir quelque chose, passez en échelle logarithmique avec les commandes `plt.xscale("log")` et `plt.yscale("log")`). Commentez.

TD numérique : Convertisseur Boost

Dans les voitures électriques, la tension de 24 V continue fournie par les batteries soit être transformée en une tension plus élevée pour alimenter les moteurs. On utilise pour cela un convertisseur *boost*.



Ce circuit est alimenté par une tension continue E qu'on prendra égale à 24 V pour les simulations. Il contient une bobine L , un condensateur C et une résistance R qu'on cherche à alimenter. Au milieu se trouve un interrupteur K qui peut prendre deux positions, a ou b ; il s'agit d'un interrupteur commandé (en réalité, un transistor et une diode) qui oscille périodiquement sur une période T de la manière suivante :

- pendant l'étape a d'une durée $D.T$ avec $0 < D < 1$, l'interrupteur est en position a ; on a alors deux circuits indépendants : $E + L$ à gauche, et $R + C$ à droite.
- pendant l'étape b d'une durée $(1 - D).T$, l'interrupteur est en position b , et on a un circuit avec E , L , C et R .

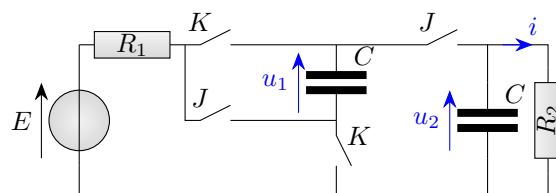
Le nombre D est appelé le *rapport cyclique* du circuit.

1. Redessinez le circuit pendant la phase a , et déterminez rapidement $\frac{di_L}{dt}$ et $\frac{du}{dt}$ pendant cette phase (ces dérivées doivent être exprimées en fonction de E , R , L , C , i_L , u seulement).
2. Faites la même chose pendant la phase b (il faudra appliquer la loi des nœuds et la loi des mailles, sans les combiner).
3. On va prendre : $L = 30 \text{ mH}$, $C = 2 \mu\text{F}$, $R = 250 \Omega$, $D = 0,5$ et $T = \frac{T_0}{100}$ avec $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. Ouvrez un programme, entrez ces valeurs, puis définissez deux fonctions `derivee_iL(iL,u,t)` et `derivee_u(iL,u,t)`. Pour savoir dans quelle phase on est, on utilisera le test : `if (t%T)<D*T:` qui est vrai lors de la phase a et faux lors de la phase b .
4. Par un schéma d'Euler, simulez alors le système sur une durée de $5T_0$ avec un pas $\frac{T}{100}$ et des CI nulles, et tracez la courbe de $u(t)$ obtenue.
5. Faites varier un peu D et observez ce qui change.
6. À l'aide d'une boucle, faites varier D de 0,05 à 0,95 par pas de 0,05, et mesurez la valeur limite u_{lim} obtenue pour u . Tracez u_{lim} en fonction de D , et comparez à la formule théorique : $u_{lim} = \frac{E}{1-D}$ (admise).
7. S'il vous reste du temps, vous pouvez tester plein de choses :
 - l'influence de R sur la forme de la courbe et aussi sur la valeur limite (pour des R trop petits, ce convertisseur marche mal)
 - l'influence de T sur le taux d'ondulation de la courbe

TD numérique : Doublage d'une tension par une pompe à charges

Si on dispose d'une tension E et qu'on veuille obtenir une tension double $2E$ à partir de rien, il faut utiliser une alimentation à découpage. Il en existe différentes sortes, mais toutes sont basées sur le même principe : un interrupteur bascule périodiquement entre deux positions et provoque des suites de charges/décharges de condensateurs qui, au final, amplifient la tension.

On considère donc le circuit de la figure suivante :



Ce circuit est alimenté par un générateur de Thévenin de fem continue E qu'on prendra égale à 1 V pour les simulations, et de résistance interne R_1 . Il contient deux condensateurs C identiques, et alimente une

résistance R_2 . On trouve aussi des interrupteurs notés J et K ; il s'agit d'interrupteurs commandés (en réalité, des transistors et des diodes) qui oscillent périodiquement sur une période T de la manière suivante :

- pendant l'étape a d'une durée $\frac{T}{2}$, les interrupteurs K sont fermés et les interrupteurs J sont ouverts
- pendant l'étape b d'une durée $\frac{T}{2}$, les interrupteurs J sont fermés et les interrupteurs K sont ouverts

1. On va s'intéresser aux tensions u_1 et u_2 ; expliquez les raisons de ce choix.

2. *Étape a*

- (a) Redessinez le circuit pendant l'étape a , en plaçant les interrupteurs comme il le faut, et en supprimant les branches inutiles.
- (b) Déterminez l'équation différentielle vérifiée par u_1 .
- (c) Déterminez l'équation différentielle vérifiée par u_2 .

3. *Étape b*

- (a) Redessinez le circuit pendant l'étape b , en plaçant les interrupteurs comme il le faut, et en supprimant les branches inutiles.

- (b) Montrez que u_1 et u_2 vérifient les équations différentielles
$$\begin{cases} u_2 - u_1 + \frac{R_1}{R_2}u_2 + R_1C\frac{du_2}{dt} = E \\ C\frac{du_1}{dt} + C\frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \end{cases}$$

4. Définissez en Python les constantes : $E = 5 \text{ V}$, $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$ et $T = 100 \text{ ns}$, puis, par un schéma d'Euler, calculez les tensions u_1 et u_2 pendant $2,5 \text{ ms}$ et un pas égal à $\frac{T}{10}$; les condensateurs sont initialement déchargés.

Remarque : le test `if (t%T)<T/2:` permet de savoir si on est dans la phase a .

Tracez la courbe de u_2 en fonction du temps et commentez.

5. On peut alors étudier plein de propriétés de ce circuit. En particulier, on peut considérer que tout le circuit à gauche de R_2 est un générateur qui alimente la résistance R_2 . On peut essayer de modéliser ce générateur par un modèle de Thévenin de fem E_{pap} et de résistance interne R_{pap} . Pour cela, faites la démarche suivante :

- choisissez une valeur de R_2
- simulez la pompe à charge (comme dans la question précédente)
- notez la valeur de u_2 atteinte
- calculez la valeur du courant i dans R_2 lorsque u_2 a atteint sa valeur stable

Essayez pour les valeurs suivantes : 100Ω , 300Ω , $1 \text{ k}\Omega$, $3 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$, $30 \text{ k}\Omega$. Créez alors deux listes, une avec les tensions u_2 , l'autre avec les courants i , et tracez le graphique : vous devez avoir une droite ; son ordonnée à l'origine vaut E_{pap} et sa pente $-R_{pap}$.

Déduisez E_{pap} et R_{pap} d'une régression linéaire à la calculatrice, ou bien avec Python à l'aide de la fonction `numpy.polyfit` (cf. la doc sur internet).

6. On peut alors étudier les variations de R_{pap} en fonction de R_1 , puis de C ...

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(c) ET (d)

Les deux noms correspondent à la même chose ; on parle plutôt de régime libre si le régime permanent est nul, et de régime transitoire s'il est non nul.

Q3.(a)

C'est vrai uniquement si le système est stable.

Q4.(c)

Q5.(d)

Réponses au QCM : ED linéaires d'ordre 1

Q6.(a)

L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = 2 + Ke^{-t/400}$

Q7.(c)

L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = \frac{2}{4} + Ke^{-t/25}$

Q8.(b)

L'ensemble des solutions est de la forme $x(t) = \frac{4}{0,5} + Ke^{-t/2}$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E3.1 : Extinction du courant dans une bobine [*]

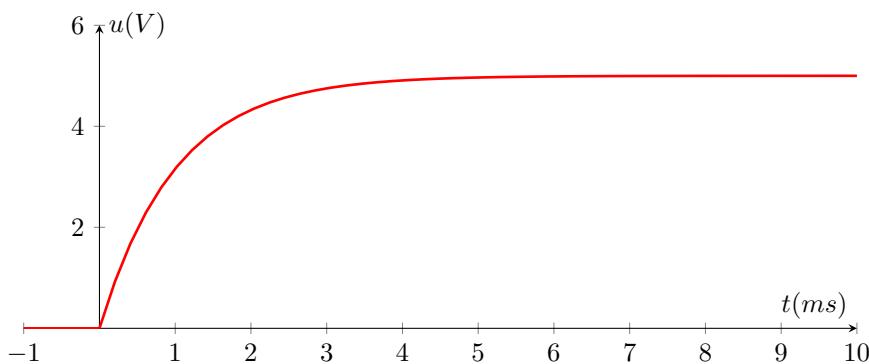
1. $\frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = 0$
2. $i(t) = A.e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.
3. $i(0^+) = \frac{E}{R}$ donc $i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$.
4. La résistance dissipe $E_{res} = \frac{LE^2}{2R^2}$ soit toute l'énergie initiale de la bobine.

Réponses de l'exercice E3.2 : Charge d'un condensateur en 2 étapes [**]

1.
 - (a) $RC \frac{du}{dt} + u = \frac{E}{2}$
 - (b) $u(t) = \frac{E}{2} (1 - e^{-t/\tau})$ et $i = C \frac{du}{dt} = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}$.
 - (c) Le condensateur a stocké $E_{cond1} = \frac{CE^2}{8}$ tandis que le générateur a fourni $E_{gen1} = \frac{CE^2}{4}$.
2.
 - (a) $RC \frac{du}{dt} + u = E$
 - (b) $u(t) = E - \frac{E}{2} e^{-t/\tau}$ et $i(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}$.
 - (c) Le condensateur a stocké $E_{cond2} = \frac{3}{8}CE^2$ tandis que le générateur a fourni $E_{gen2} = \frac{CE^2}{2}$.
3. Le rendement vaut 66 %.

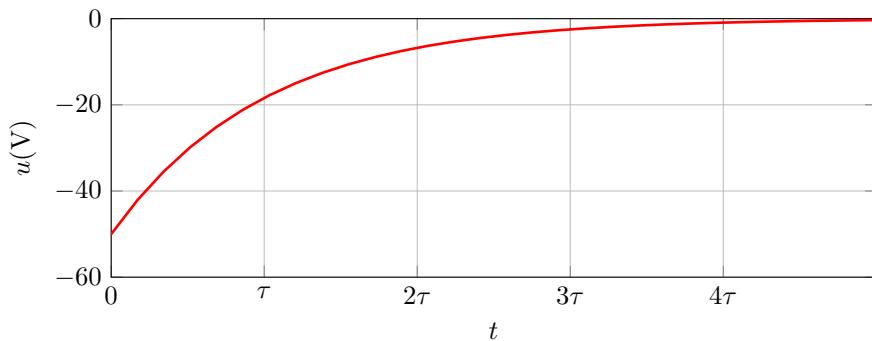
Réponses de l'exercice E3.3 : Régime transitoire d'un circuit $R, R \parallel C$ [**]

1. $\tau \frac{du}{dt} + u = E$ avec $\tau = \frac{RC}{2}$
2. $u(0^+) = \frac{E}{2}$.
3. $u(t) = \frac{E}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}$
4. $\tau = \frac{RC}{2} = 1 \text{ ms}$
- 5.



Réponses de l'exercice E3.4 : Surtension due à une bobine [**]

1. $i_1 = \frac{E}{R}$ et $i_2 = \frac{E}{r}$.
2. $\frac{L}{R+r} \frac{du}{dt} + u = 0$.
On en déduit $u(t) = -\frac{r}{R} E e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R+r}$.
3. On a une surtension si $r > R$.
- 4.

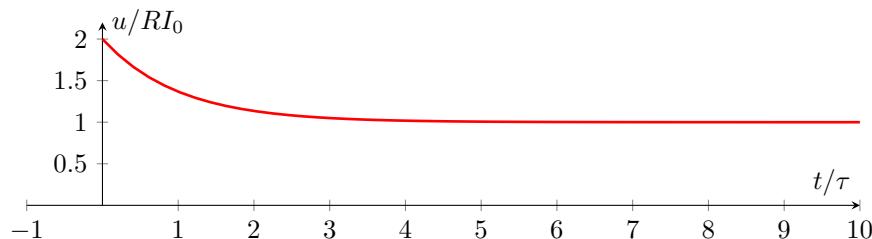


Réponses de l'exercice E3.5 : Circuit alimenté par un générateur de courant [**]

1. $I_1 = -I_0 \frac{R_2}{R_2 + R_1} = -0,8 \text{ A.}$
2. soit $\tau \frac{du}{dt} + u = 0$ avec $\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 33 \mu\text{s}$.
3. $u(t) = R_2 I_0 e^{-t/\tau}$

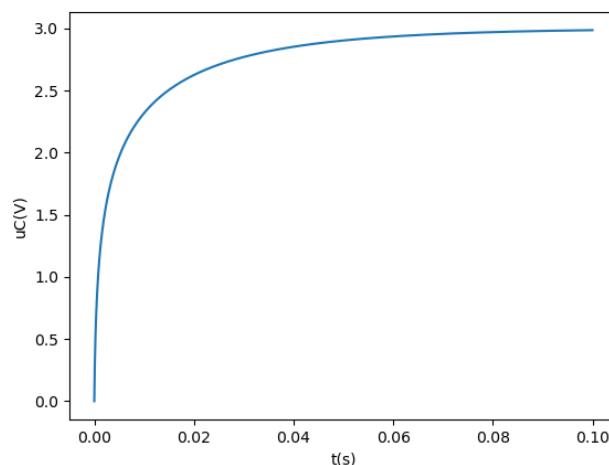
Réponses de l'exercice E3.6 : Étude d'un circuit d'ordre 1 [**]

1. $u(0^-) = RI_0$.
2. $\tau \frac{du}{dt} + u = 2RI_0$ avec $\tau = 5RC$
3. $u(t) = RI_0 [2 - e^{-t/\tau}]$
- 4.



Réponses de l'exercice E3.7 : Charge d'un condensateur avec une LED témoin [**]

1. $\frac{du_C}{dt} = \frac{I_0}{C} e^{\frac{E-u_C}{U_s}} - \frac{I_0}{C}$.
2. $\tau = \frac{U_s C}{I_0} = 26 \text{ ms.}$
- 3.



4. 25 ms

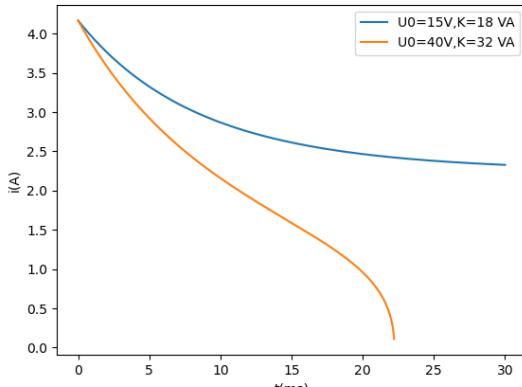
Réponses de l'exercice E3.8 : Arc électrique [**]

1. $i = \frac{E}{R} = 4,2 \text{ A}$
2. $i(0^+) = 4,2 \text{ A}$.
3. $L \frac{di}{dt} + Ri + U_0 + \frac{K}{i} = E$

i	0	i_1	$\sqrt{\frac{K}{R}} = 1,2 \text{ A}$	i_2	$+\infty$
$\frac{df}{di}$		+	0	-	
f	$-\infty$	0	$E - U_0 - 2\sqrt{KR}$ $= 5,6 \text{ V}$	0	$-\infty$

4.

5. $i_1 = 0,67 \text{ A}$ et $i_2 = 2,25 \text{ A}$
6. La solution i_1 est donc instable et la position i_2 est stable.
Si au départ $i < i_1$ alors le courant tend vers 0 et l'étincelle s'arrête ; dans le cas contraire le courant tend vers i_2 et l'étincelle ne s'arrête jamais.



7.

Réponses de l'exercice E3.9 : Hacheur dévolteur [***]

1. Première phase

- (a) $i_M + \tau \frac{di_M}{dt} = \frac{E - E_M}{R_M}$ avec $\tau = \frac{L_M}{R_M}$
- (b) $i_M(t) = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{E - E_M}{R_M} [1 - e^{-t/\tau}]$
- (c) $I_1 = I_0 e^{-DT/\tau} + \frac{E - E_M}{R_M} [1 - e^{-DT/\tau}]$.

2. Seconde phase

- (a) $i_M + \tau \frac{di_M}{dt} = -\frac{E_M}{R_M}$
- (b) L'intensité à travers la bobine est continue, donc $i_M(\text{num}0^+) = I_1$.
On en déduit $i_M(t) = I_1 e^{-t/\tau} + \frac{E_M}{R_M} [e^{-t/\tau} - 1]$

- (c) $I_2 = I_1 e^{-(1-D)T/\tau} - \frac{E_M}{R_M} e^{-(1-D)T/\tau}$

3. $I_0 = \frac{DE - E_M}{R_M}$

4. $I_0 > 0$ nécessite $D > \frac{E_M}{E}$; en-dessous, le moteur ne tournera pas.

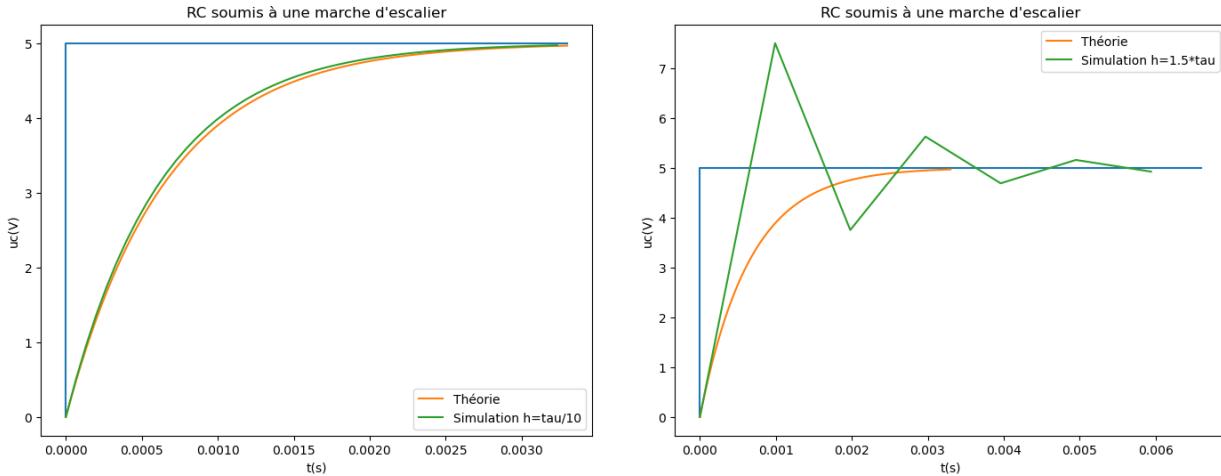
Si $D = 1$ alors $I_0 = \frac{E - E_M}{R_M}$.

5. $D = 0,72$ et $T \ll \tau = 1,75 \text{ ms}$.

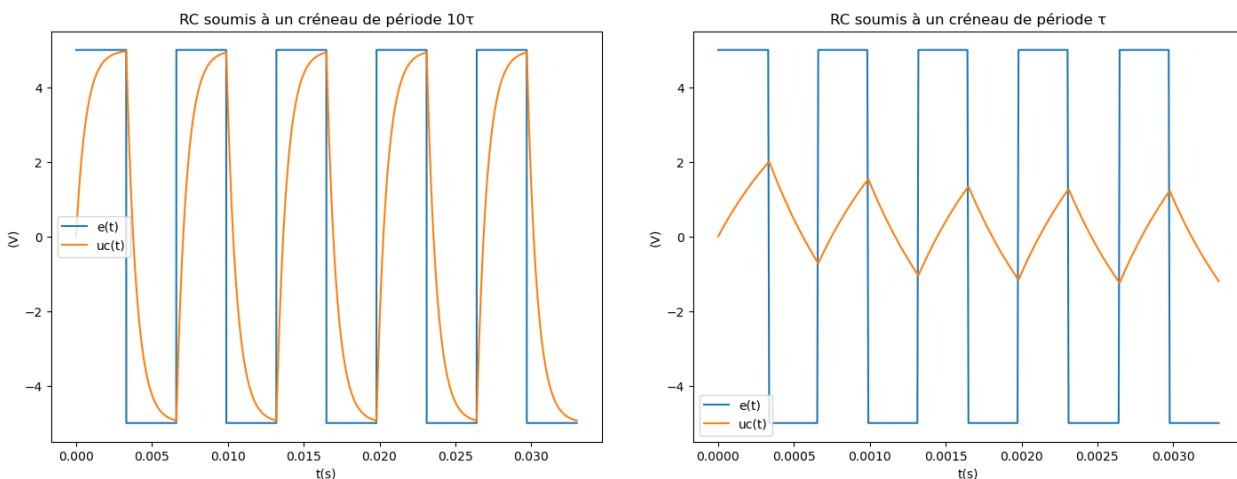
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Circuit RC soumis à une tension quelconque

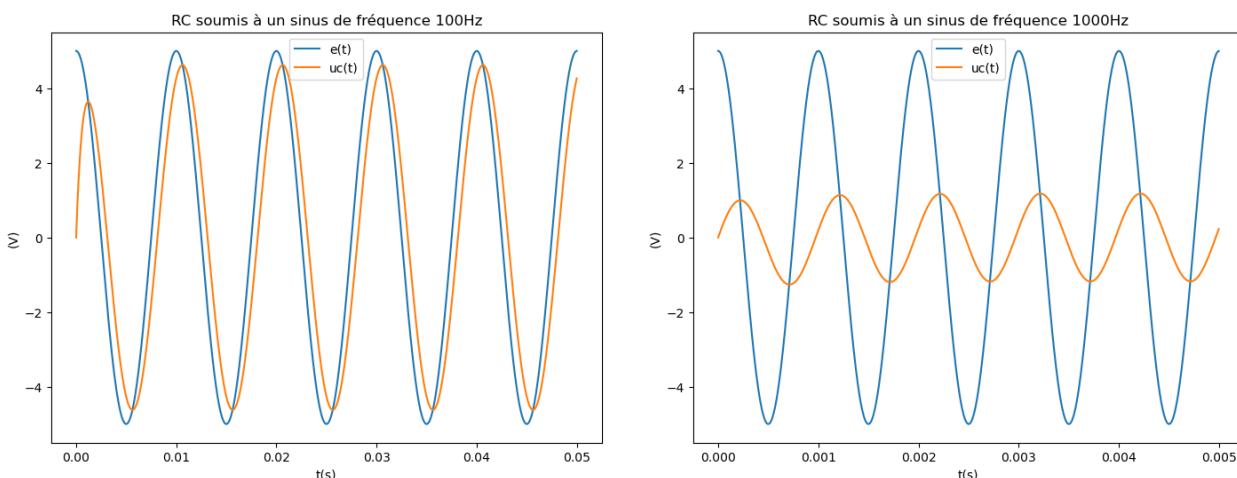
Avec une marche d'escalier, on obtient une courbe proche de l'exponentielle pour un pas inférieur à $\frac{\tau}{10}$; pour un pas trop grand, la solution devient oscillante voire instable.



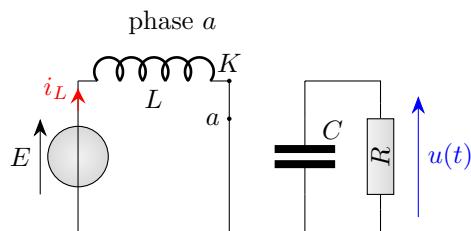
Pour une tension en créneau, si elle est suffisamment lente, on observe des cycles de charge/décharge ; si elle est trop rapide, le condensateur n'a pas le temps de se charger et décharger, et la tension de sortie est une sorte de tension en dents de scie d'amplitude faible.



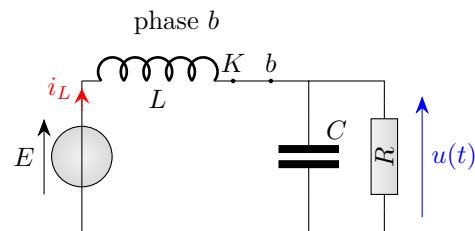
Pour une tension sinusoïdale, on observe que u_C est une sinusoïde de même fréquence que e , mais l'amplitude et la phase dépendent de la fréquence.



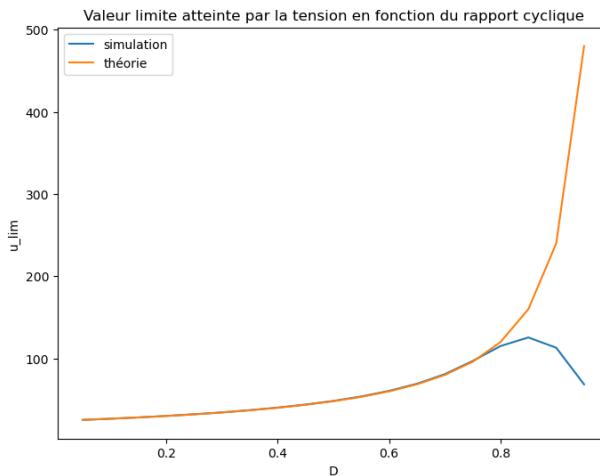
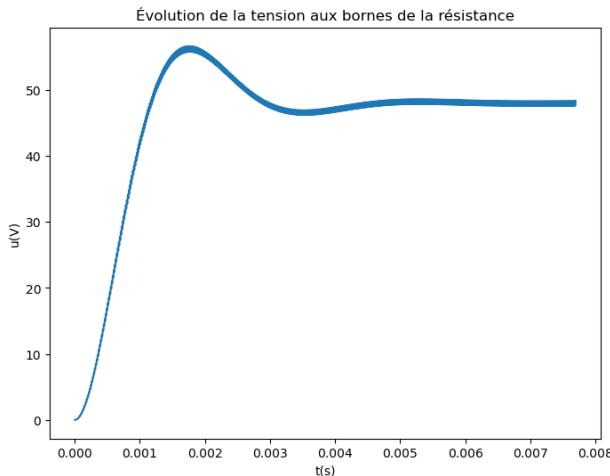
Réponses au TD d'info : Convertisseur Boost



Durant la phase a :
$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} \\ \frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC} \end{cases}$$

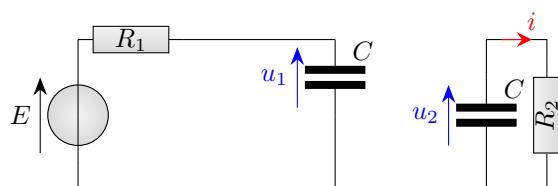


Durant la phase b :
$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = \frac{E-u}{L} \\ \frac{du}{dt} = \frac{i_L}{C} - \frac{u}{RC} \end{cases}$$

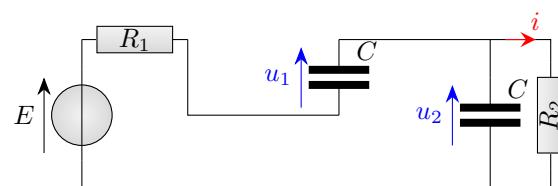


On voit que le système atteint un régime stable après un court transitoire, avec une tension supérieure à la tension E . En faisant varier le rapport cyclique, on voit qu'on peut régler la valeur de la tension atteinte, mais pour de trop grandes valeurs d'amplification la courbe simulée décroche ; ici on a par exemple un maximum de 125 V pour $D = 0,85$.

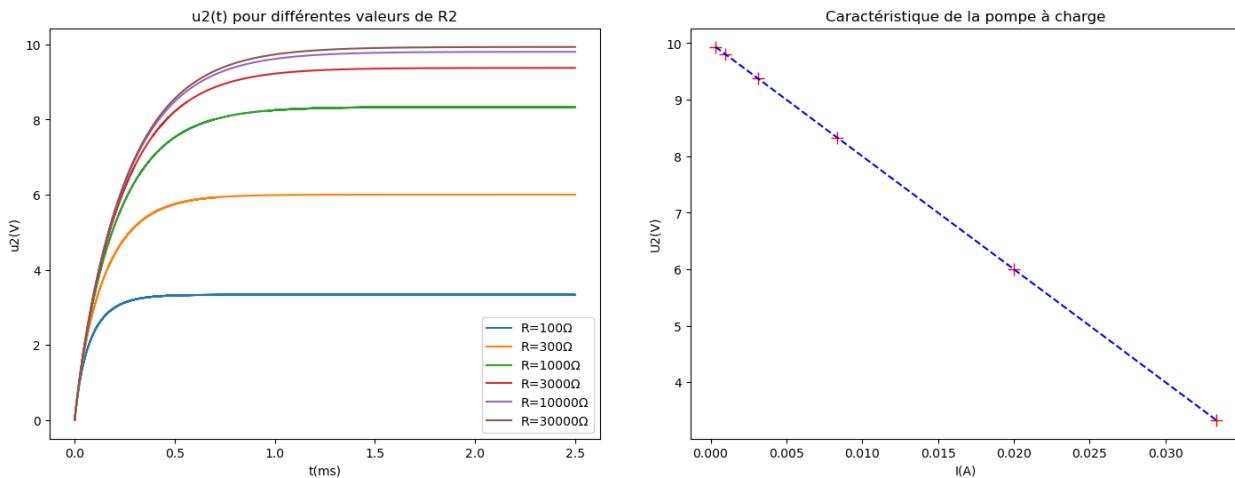
Réponses au TD d'info : Doublage d'une tension par une pompe à charges



Durant la phase a :
$$\begin{cases} \tau_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 = E \\ \tau_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 = 0 \end{cases}$$



Durant la phase b :
$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = -\frac{u_2}{R_2 C} - \frac{1}{R_1 C} (E + u_1 - u_2 - \frac{R_1}{R_2} u_2) \\ \frac{du_2}{dt} = \frac{1}{R_1 C} (E + u_1 - u_2 - \frac{R_1}{R_2} u_2) \end{cases}$$



On observe que la tension fournie diminue lorsque le courant fourni augmente, selon une loi linéaire représentable par un générateur de Thévenin de fem $2E = 10$ V et de résistance interne 200Ω .

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Cours

Les circuits d'ordre 1 nous ont fait découvrir les principales propriétés d'un régime transitoire : ensemble des solutions (solution particulière + ensemble des solutions de l'équation homogène), temps caractéristique, stabilité,... Nous allons maintenant passer aux circuits d'ordre 2 qui vont conserver ces mêmes propriétés tout en faisant apparaître d'autres, entre autres, les oscillations. On va bien sûr étudier essentiellement les circuits linéaires.

Définition : Forme canonique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 d'inconnue f s'écrit sous la forme canonique

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{df}{dt} + \omega_0^2 f = 0 \quad (\text{E4.1})$$

où ω_0 est la *pulsation propre* (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et Q est un nombre sans dimension appelé *facteur de qualité*.

Remarque : Q caractérise l'amortissement présent dans le circuit. Plus Q est grand, moins il y a d'amortissement (ou de dissipation d'énergie) dans le circuit.

Remarque : Cette forme canonique n'est possible que si le coefficient du terme non dérivé est le même que celui du terme dérivé deux fois. On supposera que c'est le cas dans ce chapitre.

Cette forme canonique va nous permettre d'établir des résultats qui seront vrais pour tout circuit, une fois son ED mise sous forme canonique, même si on traitera un exemple particulier.

E4.A. Modèle de circuit linéaire d'ordre 2 : le RLC série

Le circuit modèle d'ordre 2 est le *RLC série* (figure E4.1). On peut établir l'ED vérifiée par différentes grandeurs ; nous considérerons ici la tension aux bornes du condensateur.

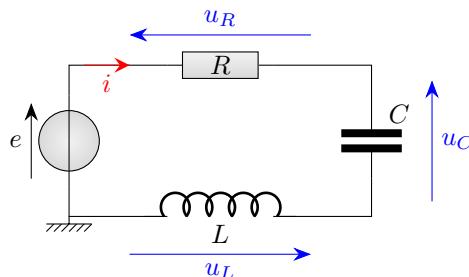


FIGURE E4.1 – Circuit *RLC* série.

Propriété : Équation différentielle vérifiée par u_C

La tension aux bornes du condensateur d'un *RLC* série vérifie l'équation $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e$ avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{E4.2})$$

Démonstration

Loi des mailles : $u_L + u_C + u_R = e$. Or $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$ donc $u_L = LC \frac{d^2i}{dt^2}$. De même $u_R = Ri$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$ donc $u_R = RC \frac{du_C}{dt}$. On en déduit que $LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e$.

Pour mettre sous forme canonique, on divise par LC : $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{e}{LC}$. On identifie : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Remarque : On peut aussi établir l'équation vérifiée par u_R , ou u_L , ou i : la forme de gauche sera toujours la même, en particulier ω_0 et Q seront les mêmes, par contre le terme de droite changera. Mais ces expressions de ω_0 et Q ne sont valables que pour ce circuit particulier ; pour d'autres circuits, l'expression sera différente.

E4.B. Solution d'un circuit LC sans amortissement

Avant de traiter le cas général, nous allons voir le cas particulier où la résistance est nulle, ou en tout cas très faible. Le cas $R \rightarrow 0$ est une limite qui correspond à un facteur de qualité Q tendant vers l'infini.

B.1. Forme des solutions

Propriété : Solutions de l'équation homogène d'une équation linéaire d'ordre 2 sans amortissement

L'équation différentielle $\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2 f = 0$ a pour ensemble de solutions

$$\{t \mapsto A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.3a})$$

Une autre façon de l'écrire est

$$\{t \mapsto D \cos(\omega_0 t + \phi), (D, \phi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.3b})$$

Exemple : Oscillations d'un LC soumis à un échelon de tension

On considère un circuit LC avec $C = 100 \text{ nF}$ et $L = 20 \text{ mH}$ soumis à une tension $e(t)$ qui est nulle pour $t < 0$ et constante (égale à $E = 5 \text{ V}$) pour $t > 0$. Initialement, le condensateur est déchargé et le courant est nul.

Déterminez et tracez $u_C(t)$.

Il faut commencer par établir l'équation ; en partant de la figure E4.1 sans résistance, on écrit que $E = u_L + u_C = L \frac{di}{dt} + u_C = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C$.

On met sous forme canonique : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} E$ soit $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 22360 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui correspond à une fréquence propre $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3560 \text{ Hz}$.

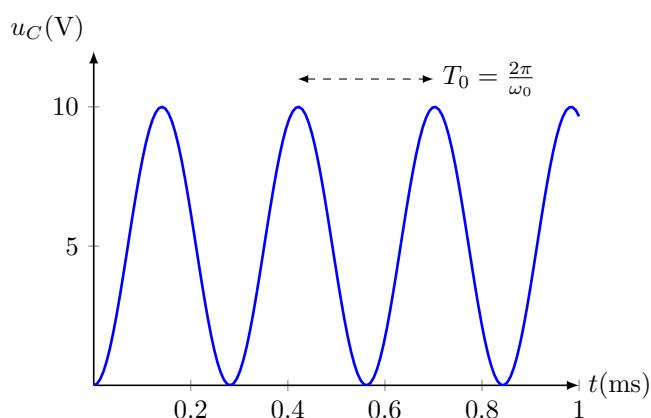
L'ensemble des solutions de l'équation homogène est de la forme $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec A et B des réels.

On cherche une solution particulière constante : $u_C = cst$ donc $\frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$; l'ED devient alors $0 + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ donc $u_C = E$.

L'ensemble des solutions est donc de la forme $u_C(t) = E + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On doit maintenant appliquer deux conditions initiales (CI) :

- la tension aux bornes du condensateur est continue mathématiquement. Or le condensateur est déchargé initialement, donc $u_C(0^+) = 0$ donc $E + A + 0 = 0$ soit $A = -E$.
- le courant à travers la bobine est continu mathématiquement donc, ici, $i(0^+) = 0$ soit $C \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$ donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$. Pour l'exprimer, on dérive : $\frac{du_C}{dt} = 0 - A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$; donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = B\omega_0$ d'où on tire $B\omega_0 = 0$ donc $B = 0$.

On en déduit que $u_C(t) = E - E \cos(\omega_0 t)$.



Le LC non amorti oscille donc à la pulsation ω_0 , donc avec une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ appelée *période propre*.

Ainsi, on voit qu'un circuit LC non amorti par une résistance va osciller indéfiniment à une pulsation égale à sa pulsation propre. Un tel système permet de créer une tension sinusoïdale. En pratique, la résistance n'est jamais nulle, mais on verra plus loin dans ce chapitre qu'on peut compenser cette résistance de façon à former un oscillateur, dans les montres à quartz par exemple.

B.2. Énergie électrique en régime libre

Le régime libre, c'est le régime dans lequel le système n'est plus soumis à aucune source : $e = 0$ V. Les solutions sont alors uniquement les solutions de l'équation homogène : $u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ ou $u_C(t) = D \cos(\omega_0 t + \phi)$ avec A, B ou D, ϕ des constantes déterminées par les conditions initiales. Pour qu'elles soient non nulles, il faut qu'on ait auparavant alimenté le circuit. On peut donc observer ce régime, par exemple, en alimentant un LC série avec un générateur continu, puis en coupant le générateur.

On va étudier ici l'énergie d'un LC en régime libre. Pour cela, on commence par une propriété générale.

Propriété : Énergie électrique totale d'un LC en régime libre

En régime libre, l'énergie électrique totale (somme de celle du condensateur et de celle de la bobine) est constante.

Démonstration

Pour effectuer un bilan énergétique, il faut écrire la loi des mailles : $u_C + u_L = 0$ (en régime libre).

Puis on multiplie par l'intensité : $u_C \cdot i + u_L \cdot i = 0$. Par les lois du condensateur et de la bobine, on en déduit que $C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = 0$.

On reconnaît à gauche une dérivée : $\frac{d}{dt} [\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2] = 0$ donc $\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = cst$.

On peut aller plus loin en regardant comment évoluent les énergies du condensateur et de la bobine. Pour cela, on va utiliser la forme $u_C(t) = D \cos(\omega_0 t + \phi)$ qui est plus pratique pour les calculs. Les valeurs de D et ϕ importent peu, elles sont déterminées par les CI.

Propriété : Énergie du condensateur et de la bobine en régime libre

En régime libre, l'énergie E_{cond} du condensateur et l'énergie E_{bob} de la bobine oscillent en opposition de phase à la pulsation $2\omega_0$; leur somme est constante (voir figure E4.2).

Démonstration

On pose $u_C(t) = D \cos(\omega_0 t + \phi)$. Alors $E_{cond}(t) = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} C D^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$.

On a aussi $E_{bob}(t) = \frac{1}{2} L i^2$ ou $i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -C\omega_0 D \sin(\omega_0 t + \phi)$ donc $E_{bob}(t) = \frac{1}{2} L C^2 \omega_0^2 D^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$. Or $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ donc $E_{bob}(t) = \frac{1}{2} C D^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$.

Donc $E_{elec} = E_{cond} + E_{bob} = \frac{1}{2} C D^2 (\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)) = \frac{1}{2} C D^2 = cst$; cette constante dépend de D donc des conditions initiales.

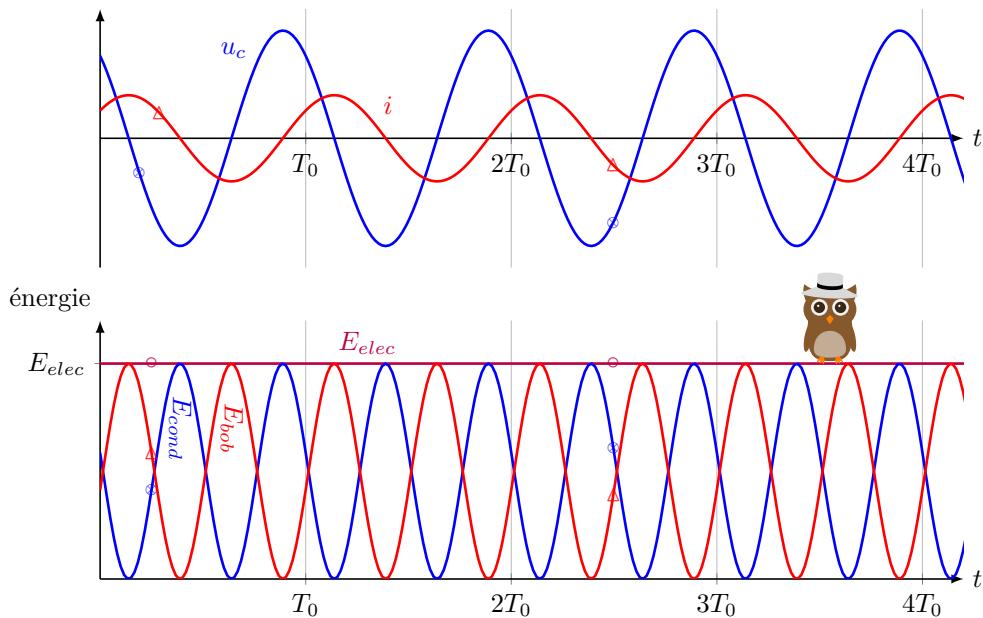
De plus, les formules $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ montrent que E_{cond} et E_{bob} seront la somme d'une constante et d'un terme de la forme $\cos(2\omega_0 t + 2\phi)$ qui oscille à la pulsation $2\omega_0$.

E4.C. Solutions du circuit RLC amorti

Nous allons maintenant nous intéresser à un circuit RLC avec une résistance R qui va dissiper l'énergie et amortir les oscillations. La première chose à savoir faire est de déterminer les solutions de l'équation homogène.

C.1. Forme générale des solutions d'une équation linéaire homogène d'ordre 2

La résolution d'une ED linéaire homogène d'ordre 2 passe par celle de son polynôme caractéristique :

FIGURE E4.2 – Énergie l'un LC en régime libre.

Propriété : Polynôme caractéristique

On associe à l'ED homogène $a \frac{d^2 u_c}{dt^2} + b \frac{du_c}{dt} + c.u_c = 0$ son équation caractéristique : $a.X^2 + b.X + c = 0$. Les solutions dépendent du signe de son discriminant.

Propriété : Ensembles des solution d'une ED homogène d'ordre 2

On calcule le discriminant Δ du polynôme caractéristique :

- si $\Delta > 0$ alors le polynôme a deux racines réelles notées r_1 et r_2 ; l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\{t \mapsto A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.4a})$$

- si $\Delta = 0$ alors le polynôme a une racine réelle notée r_0 ; l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\{t \mapsto (A.t + B).e^{r_0 t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.4b})$$

- si $\Delta < 0$ alors le polynôme a deux racines réelles conjuguées $r \pm j.q$; ^a l'ensemble des solutions est alors de la forme

$$\{t \mapsto e^{rt} [A \cos(qt) + B \sin(qt)], (A, B) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.4c})$$

$$\text{ou } \{t \mapsto D.e^{rt} \cos(qt + \phi), (D, \phi) \in \mathbb{R}^2\} \quad (\text{E4.4d})$$

^a. En électricité, i désigne l'intensité, donc on note par la lettre j l'imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

Remarque : En physique, pour une équation différentielle d'ordre 2 avec des dérivées temporelles, les racines de l'équation caractéristique ont une unité : elles sont en s^{-1} .

On va maintenant appliquer cela à notre équation $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$. Les 3 cas précédents ont donné lieu à 3 régimes différents.

C.2. Régime pseudo-périodique

Propriété : Solutions en régime pseudo-périodique

Lorsque $\Delta < 0$ (soit $|Q| > \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a 2 racines complexes : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Alors les solutions de l'équation homogène valent

$$\begin{aligned} u_C(t) &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[A \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) + B \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right) \right] \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2 \\ &= D \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t + \phi \right) \end{aligned}$$

Remarque : Dans la suite de ce paragraphe, on supposera que $Q > 0$ donc $Q > \frac{1}{2}$; les facteurs de qualité négatifs donnent des solutions instables, on en reparlera plus loin.

On a donc une fonction sinusoïdale de la forme $\cos(\omega t)$ de pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$; en fait on parle de pseudo-pulsation, et de pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, car la fonction totale n'est pas strictement périodique : le cosinus est multiplié par un terme exponentiel.

Quand on a une fonction de la forme $x(t) = f(t) \cdot \cos(\omega t)$ on dit qu'on a une fonction pseudo-oscillante d'enveloppe $f(t)$. Comme $\cos(\omega t)$ oscille entre 1 et -1, la fonction complète $x(t)$ oscille entre $+f(t)$ et $-f(t)$. On trace donc les courbes de $f(t)$ et $-f(t)$, puis on trace une fonction qui oscille entre ces deux bornes avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

La forme de la solution est représentée sur la figure E4.3. On constate que la fonction oscille avec une période $\frac{2\pi}{\omega}$ tout en s'atténuant avec un temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega}$ (en effet, on peut écrire $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$ sous la forme $e^{-t/\tau}$.)

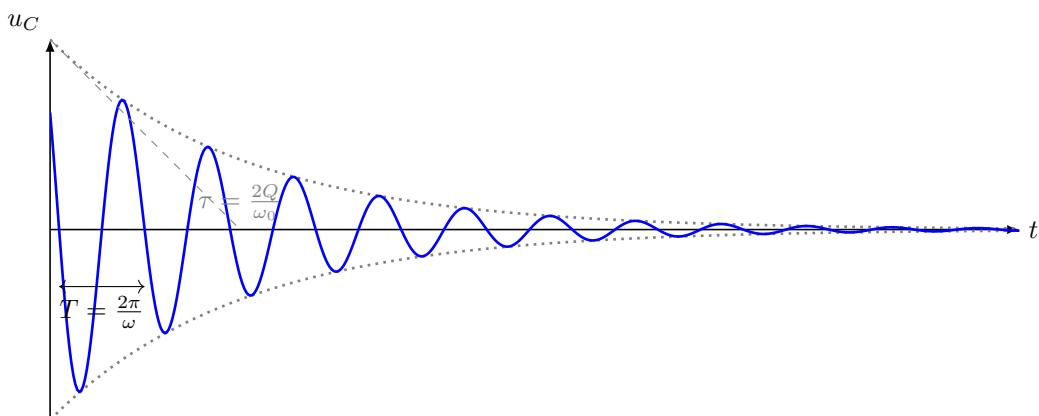


FIGURE E4.3 – Solution de l'équation homogène en régime pseudo-périodique.

Propriété : Pseudo-pulsation pour un amortissement très faible

Lorsque $Q \gg 1$, la pseudo-pulsation ω est quasiment égale à la pulsation propre ω_0 .

Démonstration

On a vu que $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$. Si $Q \gg 1$ alors $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$.

Remarque : En fait $Q \gg 1$ n'est pas nécessaire, il suffit que $4Q^2 \gg 1$; en pratique, si $Q > 3$ c'est suffisant.

Propriété : Nombre d'oscillations pour un amortissement très faible

Lorsque $Q \gg 1$, le nombre de fois que le système oscille avant de se stabiliser est environ égal à Q .

Démonstration

Le système oscille une fois tous les $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ lorsque $Q \gg 1$. On sait que l'exponentielle de l'enveloppe dure

environ $3\tau = 3\frac{2Q}{\omega_0}$. Donc le nombre d'oscillations vaut $N \approx \frac{\frac{6Q}{\omega_0}}{\frac{2\pi}{\omega_0}} \approx Q$ sachant que $2\pi \approx 6$.

Exemple : Résolution complète de u_C

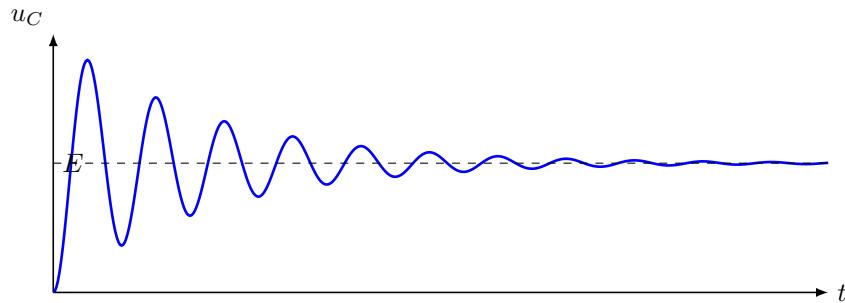
Calculez la solution complète $u_C(t)$ en régime pseudo-périodique si on allume le générateur à $t = 0$ avec une tension E (et tout est nul à $t < 0$).

On a vu que $u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$. Si $e = E = cst$ alors l'ED complète $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0 E$ admet comme solution particulière une constante telle que $0 + 0 + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$ donc $u_C = 0$. On a donc $u_C(t) = E + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$.

Pour les CI, il faut absolument utiliser les deux grandeurs qui sont continues, et rien d'autre. La tension aux bornes du condensateur est continue, or elle est nulle à $t < 0$ donc $u_C(0^+) = 0$. Donc $E + 1 \cdot [A + 0] = 0$ soit $A = -E$.

L'intensité à travers la bobine est continue donc $i(0^+) = 0$ (car elle est nulle à $t < 0$). Or $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$, donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$. Or $\frac{du_C}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)]$ donc $\frac{du_C}{dt}(0^+) = -(\frac{\omega_0}{2Q} A + B\omega)$. On en déduit que $B = \frac{\omega_0}{2Q\omega} A = \frac{-E}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{-E}{\sqrt{4Q^2-1}}$. Donc

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} \cdot \sin(\omega t) \right]$$



Remarque : On utilise la forme avec cosinus et sinus pour les calculs avec des CI, et la forme avec un seul cosinus pour les calculs théoriques.

C.3. Régime apériodique

Propriété : Solutions en régime apériodique

Lorsque $\Delta > 0$ (soit $|Q| < \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a 2 racines réelles : $r_{1,2} = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right]$. Alors les solutions de l'équation homogène valent

$$u_C(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$

La forme générale de la solution dépend des signes de A et B , mais généralement, si $Q > 0$, on a une courbe qui ressemble à celle de la figure E4.4, avec une bosse mais pas une oscillation complète.

Propriété : Temps d'amortissement pour un amortissement très fort

Lorsque $Q \rightarrow 0$, le temps mis par le système pour revenir à 0 tend vers l'infini.

Démonstration

Les racines valent $r_1 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right]$ et $r_2 = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right]$. Si $Q \ll 1$ alors $r_1 \rightarrow -\frac{\omega_0}{Q}$ et $r_2 \rightarrow 0$; du coup l'exponentielle $e^{r_2 t}$ mettra beaucoup de temps pour atteindre 0, du fait de la très faible valeur

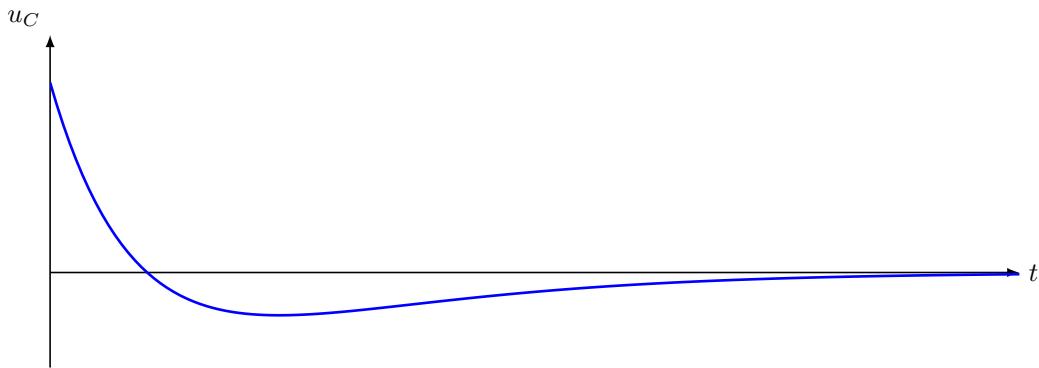


FIGURE E4.4 – Solution de l'équation homogène en régime apériodique.

de r_2 (qui reste néanmoins négatif).

C.4. Régime apériodique critique

Propriété : Solutions en régime (apériodique) critique

Lorsque $\Delta = 0$ (soit $|Q| = \frac{1}{2}$), le polynôme caractéristique a une seule racine réelle : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$. Alors les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$u_C(t) = (A.t + b) e^{-\omega_0 t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}^2$$

L'allure de la courbe (figure E4.5) est très proche de celle en régime apériodique ; seule la forme mathématique change.

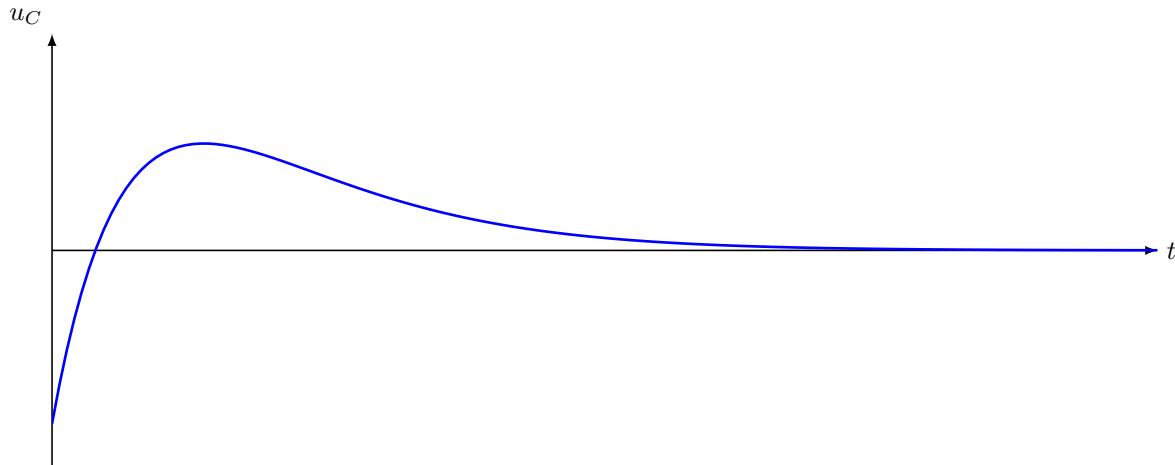


FIGURE E4.5 – Solution de l'équation homogène en régime critique.

Évidemment, dans la réalité, on n'est jamais pile à $Q = \frac{1}{2}$. Mais ce régime est intéressant comme cas limite, à cause de sa propriété à connaître :

Propriété : Retour à l'équilibre le plus rapide

C'est au voisinage du régime critique que le retour à l'équilibre est le plus rapide.

Démonstration

On ne va pas vraiment le démontrer, car il faudrait commencer par donner un critère numérique du temps de retour à l'équilibre. Mais on constate, à partir des calculs précédents, que :

- lorsque $Q > \frac{1}{2}$, alors plus Q est grand, plus le système oscille un grand nombre de fois, donc il met plus de temps pour retourner à l'équilibre ;

- lorsque $Q < \frac{1}{2}$, alors lorsque Q devient très petit le système met de plus en plus de temps pour retourner à l'équilibre.

L'idéal se situe entre les deux extrêmes ; on choisit le régime critique comme repère facile, car il intervient lorsque $\Delta = 0$.

La figure E4.6 permet d'observer les changements de la solution en fonction de la valeur de Q ; on constate bien qu'au voisinage de $Q = 0,5$ la courbe s'atténue rapidement.

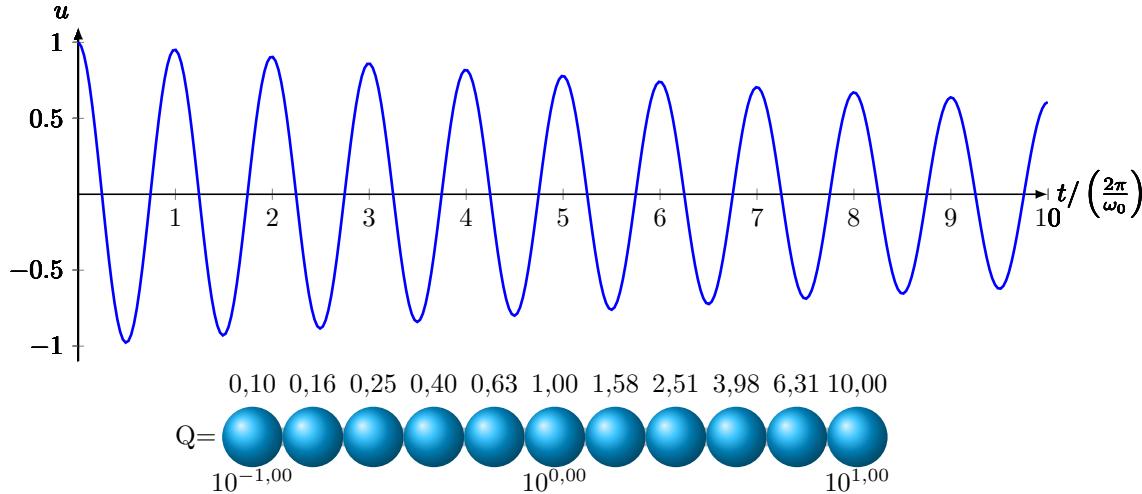


FIGURE E4.6 – Solutions d'une équation différentielle $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ avec $u(0) = 1$ et $\dot{u}(0) = 0$ en fonction de la valeur de Q .

C.5. Aspect énergétique

Propriété : Bilan énergétique du RLC série

L'énergie électrique $E_{elec} = E_{cond} + E_{bob}$ obéit à l'équation

$$\frac{dE_{elec}}{dt} = e.i - R.i^2 \quad (\text{E4.5})$$

Démonstration

On part de la loi des mailles : $u_L + u_R + u_C = e$. On multiplie par i : $u_L.i + u_R.i + u_C.i = e.i$. D'après les lois des composants : $L.i \cdot \frac{di}{dt} + R.i^2 + C.u_C \cdot \frac{du_C}{dt} = e.i$ soit $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) + R.i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) = e.i$. Il ne reste qu'à regrouper les termes.

La traduction de cette égalité est celle-ci : le générateur apporte une puissance $e.i$, et la résistance dissipe une puissance $R.i^2$. Ainsi, en régime libre ($e = 0$), le terme de droite sera strictement négatif donc l'énergie diminuera.

La forme de cette décroissance est compliquée, sauf dans un cas limite :

Calcul : Énergie en régime libre peu amorti

En régime peu amorti, R est petit donc Q est grand donc le régime est pseudo-périodique. On part de la solution $u_C(t) = D.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t + \phi)$ avec $Q \gg 1$. On en déduit que $E_{cond} = \frac{1}{2} C D^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} \cos^2(\omega_0 t + \phi)$.

Pour obtenir E_{bob} , on calcule $i = Cu_C = -D.C \cdot \frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t + \phi) - D.C.e^{\frac{\omega_0}{2Q}t} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$. Comme $Q \gg 1$, on peut négliger le premier terme, et écrire $i \approx -\omega_0 D.C.e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \sin(\omega_0 t + \phi)$. On en déduit que $E_{bob} = \frac{1}{2} L C^2 \omega_0^2 D^2 e^{\frac{\omega_0}{Q}t} \sin^2(\omega_0 t + \phi)$ qu'on peut simplifier avec la relation $\omega_0^2 = \frac{1}{L C}$.

Si on calcule la somme : $E_{elec} = E_{cond} + E_{bob} = \frac{1}{2} C D^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t} (\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \sin^2(\omega_0 t + \phi)) = \frac{1}{2} C D^2 e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$. On peut noter que $E_{elec}(0) = \frac{1}{2} C D^2$ et écrire

$$E_{elec}(t) = E_{elec}(0)e^{-\frac{\omega_0}{Q}t}$$

L'énergie décroît donc de façon approximativement exponentielle, ce qui se voit sur la figure E4.7.

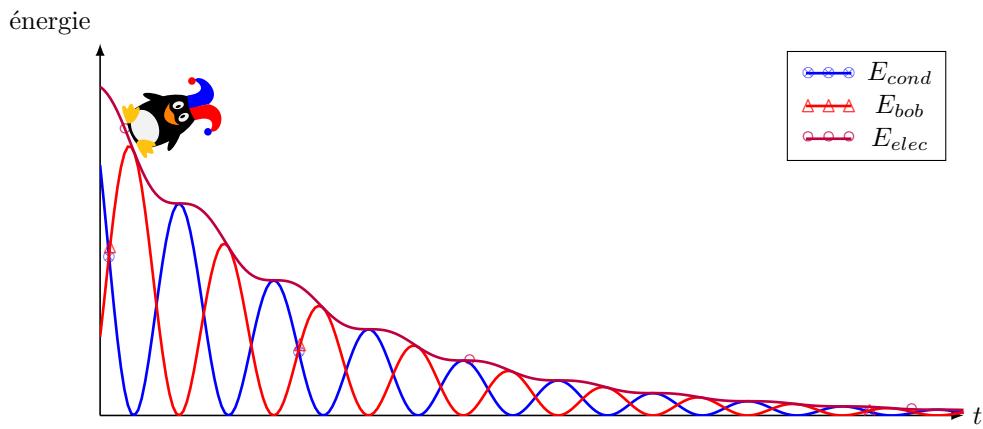


FIGURE E4.7 – Énergies dans le cas peu amorti.

E4.D. Stabilité des solutions d'une équation linéaire d'ordre 2

Dans ce paragraphe, on va simplement établir une règle importante concernant la stabilité des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2. Cette règle, à retenir sans sa démonstration, est importante pour repérer les erreurs de signes. En effet, un circuit formé de composants passifs ne peut pas voir sa tension croître vers l'infini comme ça : il doit être stable.

Définition : Stabilité d'un système

On dit qu'un système est *stable* si son régime transitoire tend vers 0, et *instable* s'il tend vers l'infini (éventuellement en oscillant).

Propriété : Critère de stabilité d'une ED

Une ED linéaire d'ordre 1 ou 2 est stable si et seulement si tous les coefficients de son premier membre sont de même signe

Démonstration

Commençons par les ED d'ordre 1, de forme $a \frac{dx}{dt} + b.x = \dots$. La solution de l'équation sans second membre est de la forme $x(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}$. Si a et b sont de même signe alors $-\frac{b}{a} < 0$ donc l'exponentielle tend vers 0 et le système est stable ; si a et b sont de signe opposés, alors l'exponentielle tend vers l'infini et le système est instable. Par contre, si le système contient un composant qui amène de l'énergie, comme un AO, alors il peut être instable, comme on le verra en exercices.

Pour un ordre 2, partons de $a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + c.x = \dots$. Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue 3 cas :

- si $\Delta < 0$, on est en régime pseudo-périodique. Pour que ce soit possible, il faut forcément que $ac > 0$ donc a et c sont de même signe. Les racines sont $-\frac{b}{2a} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ donc l'exponentielle dans les solutions est de la forme $e^{-\frac{b}{2a}t}$; elle est stable si et seulement si a et b sont de même signe, qui est donc aussi le signe de c .
- si $\Delta = 0$, on est en régime critique ; il faut aussi que $ac > 0$ donc a et c sont de même signe. La racine double est $-\frac{b}{2a}$ et les solutions $(At + B)e^{-\frac{b}{2a}t}$ ne seront stables que si a et b sont de même signe, qui est aussi le signe de c .
- si $\Delta > 0$, on est en régime apériodique. Le système est stable si et seulement si les deux racines sont négatives (sinon on a une exponentielle qui diverge). Or on sait que le produit des deux racines d'un polynôme vaut $\frac{c}{a}$ et leur somme $-\frac{b}{a}$. Pour qu'elles soient négatives toutes les deux, il faut que leur somme soit négative et leur produit positif, ce qui aboutit à conclure que a , b et c sont de même signe.

Il faut bien distinguer deux choses différentes :

- les solutions sont **stables** si et seulement si les 3 coefficients sont de même signe
- les solutions sont **oscillantes** si et seulement si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif

La figure E4.8 montre les divers comportement possibles.

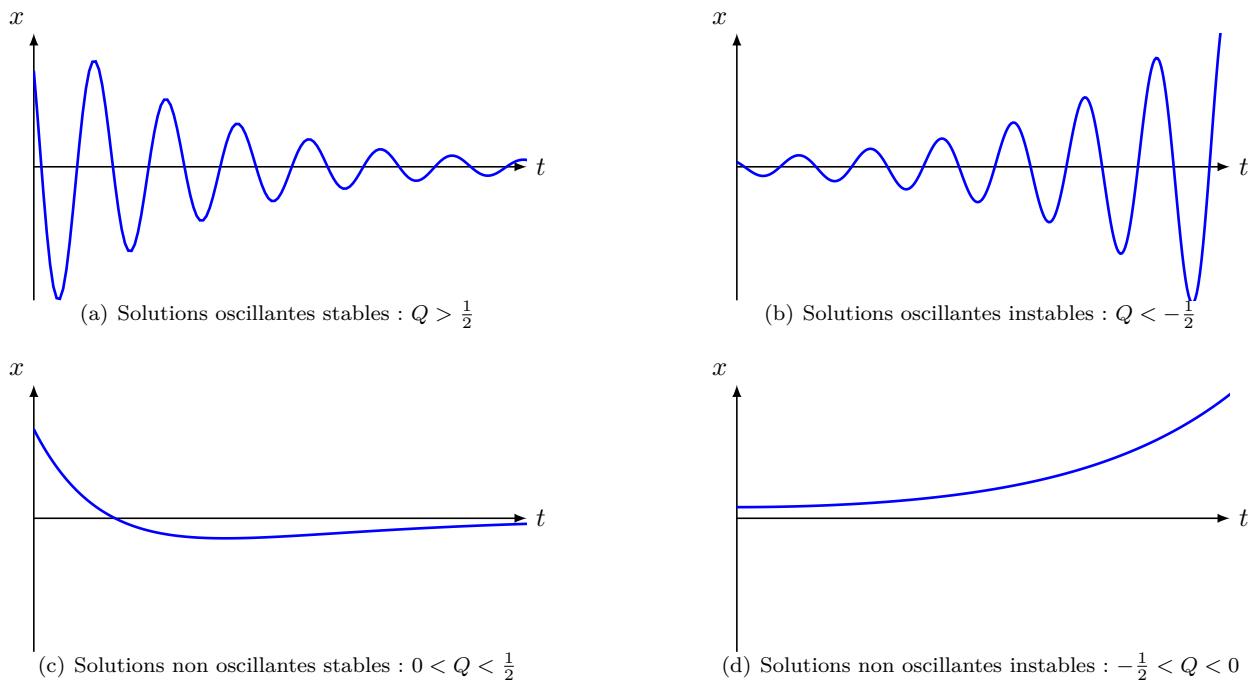


FIGURE E4.8 – Types de solutions d'une ED linéaire d'ordre 2.

E4.E. Résolution numérique

On va maintenant apprendre à résoudre numériquement une équation linéaire d'ordre 2 à l'aide d'une méthode d'Euler. Pour cela, on part de l'équation $a \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + b \cdot \frac{du_c}{dt} + c \cdot u_c = e(t)$ qu'on réécrit sous la forme $\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{e - b \cdot \frac{du_c}{dt} - c \cdot u_c}{a}$.

La méthode d'Euler (et aussi celle de Runge-Kutta) ne s'applique qu'aux équations différentielles d'ordre 1. L'astuce consiste alors à introduire une nouvelle variable de manière à transformer une équation d'ordre 2 en 2 équations d'ordre 1.

Méthode : Transformation d'une ED d'ordre 2 en 2 ED d'ordre 1

Quand on a une équation de la forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = f\left(u, \frac{du}{dt}, t\right)$$

alors on pose une fonction $u' = \frac{du}{dt}$ et on obtient le système :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ f(u, u', t) \end{pmatrix}$$

Exemple : Résolution du RLC soumis à une marche de tension

À connaître

On suppose que le RLC avec $R = 70 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ et $C = 100 \text{ nF}$ est soumis à une tension passant à l'instant $t = 0$ de la valeur nulle à la valeur $E = 5 \text{ V}$. En admettant les CI : $u_c(0^+) = 0$ et $\frac{du_c}{dt}(0^+) = 1 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$, résoudre $u_c(t)$ par la méthode d'Euler sur 15 périodes propres.

On suppose qu'on a déjà établi l'équation $LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

Dans cette résolution numérique, il est inutile d'introduire le discriminant et les racines du polynôme caractéristique. Par contre, on a besoin de connaître la période propre pour avoir une durée caractéristique. Ici on a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$. On va donc effectuer un schéma d'Euler avec un pas de $\frac{T_0}{1000}$ au maximum. On aura deux inconnues : u_c et $u'_c = \frac{du}{dt}$. On va écrire une fonction `deriveeseconde(uc, ducdt, t)` qui renvoie la dérivée seconde.

On commence donc par réécrire l'ED sous la forme $\frac{d^2 u_c}{dt^2} = \frac{E}{LC} - \frac{u_c}{LC} - \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt}$. On pose alors $u'_c = \frac{du_c}{dt}$ et on

écrit le système sous la forme

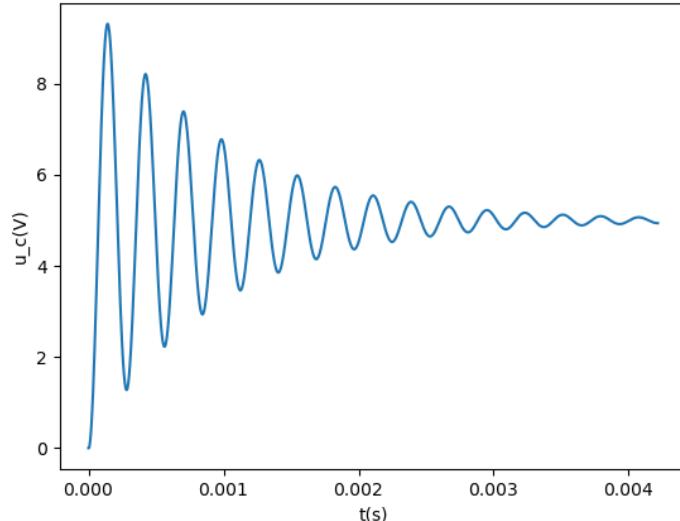
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_c \\ u'_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{LC} & \frac{u'_c}{LC} \\ -\frac{u_c}{LC} & -\frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} \end{pmatrix}$$

Voici donc un exemple de script :

```

1 import numpy as np
2 E,R,L,C=5,70,20e-3,100e-9 # constantes
3 T0=2*np.pi*np.sqrt(L*C) # période propre
4 def derivee_seconde(uc,duc_dt,t):
5     return E/(L*C)-uc/(L*C)-R/L*duc_dt
6 h=T0/1000 # pas temporel
7 tmax=15*T0 # durée de simulation
8 N=int(tmax/h) # nombre de points
9 tab_t=np.zeros(N+1)
10 tab_uc=np.zeros(N+1)
11 tab_duc_dt=np.zeros(N+1)
12 tab_t[0],tab_uc[0],tab_duc_dt[0]=0,0,1 # CI
13 for i in range(N):
14     tab_t[i+1]=tab_t[i]+h
15     tab_uc[i+1]=tab_uc[i]+h*tab_duc_dt[i]
16     tab_duc_dt[i+1]=tab_duc_dt[i]+h*derivee_seconde(tab_uc[i],tab_duc_dt[i],tab_t[i])
17 # tracé
18 import matplotlib.pyplot as plt
19 plt.figure()
20 plt.plot(tab_t,tab_uc)
21 plt.xlabel("t(s)")
22 plt.ylabel("u_c(V)")
23 plt.show()
```

On obtient le résultat suivant :



a. Ici on divise par 1000 parce que, pour des solutions oscillantes, la méthode d'Euler est vraiment peu précise.

Il est facile de changer la valeur de R et d'observer les modifications de la courbe. En particulier, on remarque que le discriminant de l'équation caractéristique vaut $\Delta = R^2 C^2 - 4LC$ donc $\Delta < 0 \Leftrightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = 894 \Omega$. On peut vérifier facilement que le comportement de la courbe change lorsque R devient supérieur à cette valeur.

Pour avoir des calculs plus précis, on peut utiliser `odeint`, qui prend comme argument non pas la fonction `derivee_seconde`, mais une fonction `derivee(liste,t)` ayant comme argument la `liste` des inconnues, et renvoyant la `liste` des dérivées. Voici un exemple de la même résolution avec `odeint` :

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 E,R,L,C=5,70,20e-3,100e-9 # constantes
4 T0=2*np.pi*np.sqrt(L*C) # période propre
5 def derivee(inconnues,t): # inconnues=[uc,ducdt]
6     uc=inconnues[0]
7     ducdt=inconnues[1]
8     d2ucdt2=E/(L*C)-uc/(L*C)-R/L*ducdt
9     return [ducdt,d2ucdt2] # liste des dérivées
10 tab_t=np.linspace(0,15*T0,300) # temps de simulation
11 CI=[0,1] # [uc(0),ducdt(0)]
12 solution=odeint(derivee,CI,tab_t)
13 tab_uc=solution[:,0] # colonne 0
14 tab_ducdt=solution[:,1] # colonne 1
15 # tracé
16 import matplotlib.pyplot as plt
17 plt.figure()
18 plt.plot(tab_t,tab_uc)
19 plt.xlabel("t(s)")
20 plt.ylabel("u_c(V)")
21 plt.show()

```

Remarque : Si on veut être puriste, l'inconnue qu'on introduit doit avoir un sens physique. Ainsi, ici, au lieu de poser $u' = \frac{du_c}{dt}$, on aurait pu poser $i = C \frac{du_c}{dt}$.

Grâce à ces méthodes numériques, on est capable de résoudre quasiment toutes les ED, qu'elles soient linéaires ou pas, quel que soit le terme de droite, et aussi quel que soit son ordre, car il est facile de généraliser la méthode qu'on a vue à des équations d'ordre supérieur à 2.

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Circuits linéaires du second ordre	
Modèle du circuit LC. Oscillations harmoniques. Pulsation, fréquence et période propres d'oscillations. Amplitude, phase.	<p>Établir l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique ; la résoudre compte-tenu des conditions initiales.</p> <p>Réaliser un bilan énergétique pour le circuit LC.</p>
Modèle du circuit RLC série.	<p>Écrire sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur électrique afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.</p> <p>Identifier la nature de la réponse libre en fonction de la valeur du facteur de qualité.</p> <p>Déterminer la réponse dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.</p> <p>Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.</p> <p>Réaliser un bilan énergétique pour un circuit RLC série.</p> <p>À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION, SIMULER LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE À UNE EXCITATION DE FORME QUELCONQUE.</p> <p>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.</p>

Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

QCMs

réponses page 291

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1.

La forme canonique d'une ED linéaire homogène d'ordre 2 est :

- | | |
|--|--|
| (a). $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{Q}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$
(c). $\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ | (b). $\omega_0^2 \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + s = 0$
(d). $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ |
|--|--|

Q2.

Les solutions quand l'amortissement est nul ($Q = \infty$) sont de la forme :

- | | |
|---|--|
| (a). $Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$
(c). $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ | (b). $D \cos(\omega_0 t + \phi)$
(d). $De^{-\omega_0 t} \cos(\omega_0 t)$ |
|---|--|

Q3.

S'il n'y a pas d'amortissement :

- | | |
|---|--|
| (a). l'énergie électrique est constante
(c). la solution est constante | (b). l'intensité tend vers l'infini
(d). les oscillations durent indéfiniment |
|---|--|

Q4.

Le retour à l'équilibre est le plus rapide lorsque :

- | | |
|---|--|
| (a). $\Delta < 0$
(c). $\Delta = 0$
(e). on est en régime pseudo-périodique | (b). on est en régime apériodique
(d). $\Delta > 0$
(f). on est en régime critique |
|---|--|

Q5.

On est en régime pseudo-périodique si et seulement si :

- | | |
|--|--|
| (a). les 3 coefficients ne sont pas de même signe
(c). $\Delta < 0$ | (b). l'amortissement est nul
(d). $ Q > \frac{1}{2}$ |
|--|--|

Q6.

En régime pseudo-périodique, la courbe a l'allure de :

- | | |
|---|--|
| (a). un cosinus
(c). une courbe avec une bosse | (b). une exponentielle
(d). un cosinus amorti exponentiellement |
|---|--|

Q7.

Les solutions d'une ED linéaire d'ordre 2 sont stables si et seulement si :

- | | |
|--|---|
| (a). $\Delta > 0$
(c). $\Delta < 0$ | (b). le terme d'amortissement est non nul
(d). les 3 coefficients sont de même signe |
|--|---|

✓ QCM : ED linéaires d'ordre 2 ✗

Q8.

Les solutions de l'ED $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 100x = 0$ sont de la forme :

- | | |
|---|---|
| (a). $x(t) = e^{-t} [A \cos(100t) + B \sin(100t)]$
(c). $x(t) = e^{-2t} [A \cos(10t) + B \sin(10t)]$ | (b). $x(t) = e^{-t} [A \cos(9,95t) + B \sin(9,95t)]$
(d). $x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-100t}$ |
|---|---|

Q9.

Les solutions de l'ED $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 10x = 0$ sont de la forme :

- (a). $x(t) = e^{-1,13t} [A \cos(10t) + B \sin(10t)]$ (b). $x(t) = e^{-10t} [A \cos(3,1t) + B \sin(3,1t)]$
 (c). $x(t) = Ae^{-2,31t} + Be^{-7,83t}$ (d). $x(t) = Ae^{-1,13t} + Be^{-8,87t}$

Q10.

Les solutions de l'ED $8\frac{d^2x}{dt^2} + 30\frac{dx}{dt} + 2000x = 0$ sont de la forme :

- (a). $x(t) = e^{-15,2t} [A \cos(7,3t) + B \sin(7,3t)]$ (b). $e^{-5,7t} [A \cos(14,2t) + B \sin(14,2t)]$ =
 (c). $x(t) = e^{-2,3t} [A \cos(3,1t) + B \sin(3,1t)]$ (d). $e^{-1,9t} [A \cos(15,7t) + B \sin(15,7t)]$ =

QCM : Types de solutions

Q11.

Les solutions de l'ED $3\frac{d^2x}{dt^2} + 12\frac{dx}{dt} + 60x = 0$ sont :

- (a). Instables et oscillantes (b). Instables et non-oscillantes
 (c). Stables et oscillantes (d). Stables et non-oscillantes

Q12.

Les solutions de l'ED $2\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 14x = 0$ sont :

- (a). Stables et oscillantes (b). Instables et non-oscillantes
 (c). Stables et non-oscillantes (d). Instables et oscillantes

Q13.

Les solutions de l'ED $\frac{d^2x}{dt^2} + 60\frac{dx}{dt} + 60x = 0$ sont :

- (a). Instables et oscillantes (b). Stables et non-oscillantes
 (c). Stables et oscillantes (d). Instables et non-oscillantes

Q14.

Les solutions de l'ED $-0,5\frac{d^2x}{dt^2} + 6,4\frac{dx}{dt} + 14,2x = 0$ sont :

- (a). Instables et oscillantes (b). Stables et oscillantes
 (c). Stables et non-oscillantes (d). Instables et non-oscillantes

Q15.

Les solutions de l'ED $-12\frac{d^2x}{dt^2} - 16\frac{dx}{dt} - 480x = 0$ sont :

- (a). Stables et non-oscillantes (b). Instables et non-oscillantes
 (c). Stables et oscillantes (d). Instables et oscillantes

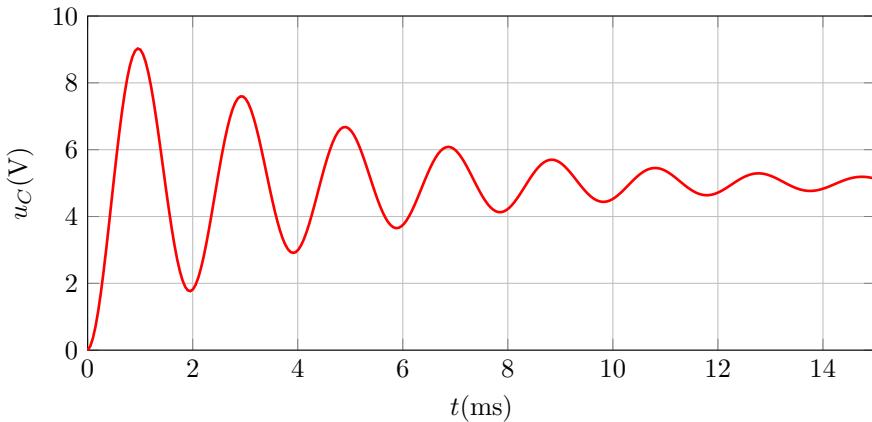
Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

Exercices

réponses page 292

Exercice E4.1 : Analyse d'une courbe

On réalise un circuit RLC série avec $C = 220 \text{ nF}$ et on le soumet à une marche de tension. On enregistre la courbe de $u_C(t)$:



1. Évaluez grossièrement la valeur de Q .
2. Mesurez une valeur approchée de ω_0 . Déduisez-en la valeur de L .
3. Évaluez grossièrement la valeur de R .

Exercice E4.2 : RLC série [*]

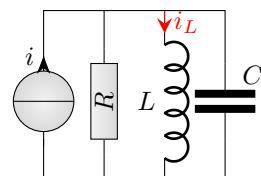
On reprend un RLC série soumis à une marche de tension passant de 0 à E , mais on s'intéresse à l'intensité. Initialement, il n'y a pas d'intensité et le condensateur est déchargé.

1. Établissez l'ED vérifiée par i .
2. Déterminez $i(0^+)$ et montrez que $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$
3. Résolvez $i(t)$ pour $L = 40 \text{ mH}$, $C = 330 \text{ nF}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $E = 10 \text{ V}$; on donnera les valeurs numériques des coefficients.

Exercice E4.3 : Circuit RLC parallèle [**]

On considère le circuit RLC parallèle ci-contre. À $t < 0$, le générateur est éteint : $i = 0 \text{ A}$ depuis très longtemps, et le condensateur est déchargé; on allume le générateur à $t = 0$, de sorte que $i = I_0 = 200 \text{ mA}$ à $t > 0$.

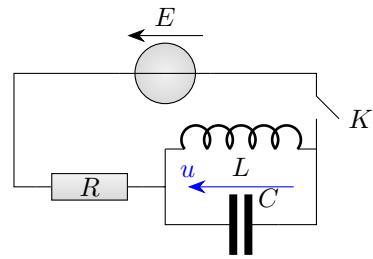
1. Établissez l'ED vérifiée par i_L à $t > 0$.
2. Mettez l'équation sous la forme suivante : $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = K$ en déterminant ω_0 , α et K (il n'est pas nécessaire, dans la suite, d'utiliser ces notations).
3. On prend $L = 20 \text{ mH}$, $C = 0,1 \mu\text{F}$ et $R = 200 \Omega$; déterminez le régime de ce circuit (pseudo-périodique, critique ou apériodique). Déduisez-en $i_L(t)$ à deux constantes près.
4. Déterminez, en la justifiant, la valeur de $i_L(0^+)$; montrez aussi que $\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$. Déduisez-en la solution numérique exacte de $i_L(t)$, et traitez sa courbe.



Exercice E4.4 : Étude d'un circuit $R, L \parallel C$ [**]

On considère le circuit ci-contre. L'interrupteur K est ouvert depuis longtemps et le condensateur est déchargé. On le ferme à $t = 0$.

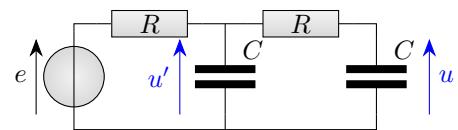
1. Établissez l'équation différentielle que vérifie u à $t > 0$.
2. Déterminez $u(0^+)$; montrez que $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC}$.
3. On prend $E = 5$ V, $R = 800 \Omega$, $L = 40$ mH et $C = 2,3 \mu\text{F}$. Calculez $u(t)$, tracez sa courbe à l'aide de votre calculatrice.
4. Reprenez les mêmes questions avec l'intensité qui traverse la bobine.



Exercice E4.5 : Double R-C [**]

On considère le circuit ci-contre, avec deux résistances R et deux condensateurs C identiques.

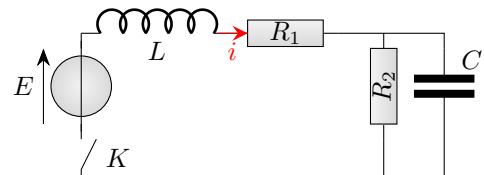
1. Montrez que la tension u vérifie l'équation différentielle $\tau^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = e$ avec τ à exprimer.
 2. Le générateur est allumé depuis longtemps à la valeur $e = E = cst$. Que valent alors u et u' ?
 3. À $t = 0$, on éteint le générateur. Déterminez $u(t)$.
- Indication :* admettez que $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$ si vous n'arrivez pas à le démontrer.



Exercice E4.6 : Circuit d'ordre 2 [**]

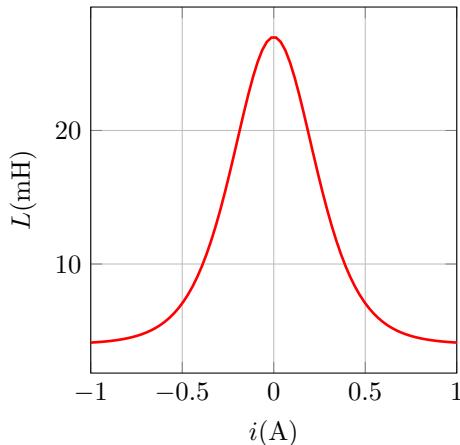
On considère le circuit ci-contre où les valeurs des composants sont : $L = 20$ mH, $R_1 = 12 \Omega$, $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$. À $t = 0$, alors que le condensateur est déchargé, on ferme K . On s'intéresse à i .

1. Établissez l'équation différentielle vérifiée par i .
2. Trouvez la forme des solutions à deux constantes près (on mettra les valeurs numériques des racines).
3. [***] À l'aide des conditions initiales, trouvez les deux constantes.
On admettra si besoin que $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$
4. Tracez avec votre calculatrice ou avec Python la courbe $i(t)$ pour $E = 10$ V.



Exercice E4.7 : RLC avec une bobine non linéaire [**]

On considère un circuit RLC série alimenté par une tension $e(t)$, avec une bobine contenant un noyau en fer doux : ce noyau augmente les effets magnétiques, mais rend l'inductance variable : L dépend de i selon la loi $L(i) = L_0 + \frac{L_1}{\text{ch}^2(\frac{i}{I_0})}$ avec $L_1 = 4 \text{ mH}$, $L_0 = 23 \text{ mH}$, $I_0 = 300 \text{ mA}$ et ch la fonction cosinus hyperbolique (si vous ne la connaissez pas, peu importe, on l'obtient avec `numpy.cosh`). L'inductance diminue alors avec le courant (figure ci-contre) et l'équation de la bobine devient $u_L = \frac{d(L \cdot i)}{dt}$. Les autres composants valent $C = 330 \text{ nF}$ et $R = 25 \Omega$.

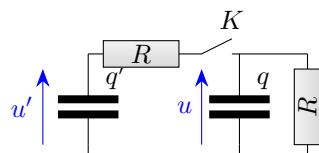


- Dessinez le circuit. Établissez l'équation différentielle à laquelle obéit la tension u_C aux bornes du condensateur.
- La tension qui alimente le circuit était à $e = 5 \text{ V}$ à $t < 0$ depuis longtemps, le condensateur était chargé, le courant était nul, et e passe à 0 V pour $t > 0$. Que valent les CI : $u_C(0^+)$ et $\frac{du_C}{dt}(0^+)$? Résolvez alors $u_C(t)$ par une méthode d'Euler. Tracez $u_c(t)$ et $i(t)$.
- On recommence la même chose mais la tension e vaut 100 V au départ. Tracez les nouvelles courbes. Quels changements voyez-vous ?

Exercice E4.8 : Décharge d'un condensateur [***]

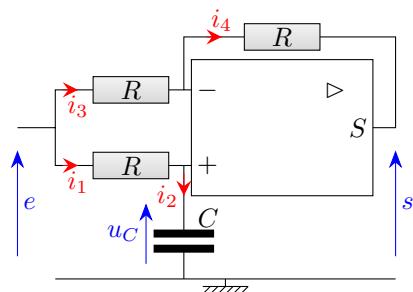
Initialement, le condensateur de droite est déchargé, celui de gauche a pour charge q'_0 , et K est ouvert. On ferme K à $t = 0$.

- Lorsque $t \rightarrow \infty$, plus aucun courant ne circule. Déterminez alors sans équation différentielle les valeurs q_∞ et q'_∞ des charges lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Déterminez l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On posera $\tau = RC$.
- Déterminez $u(0^+)$ et $\dot{u}(0^+)$.
- Déduisez-en alors $u(t)$.



Exercice E4.9 : Oscillateur à double déphasageur [***]

On étudie le circuit suivant (circuit déphasageur) constitué d'un Amplificateur Linéaire, de 3 résistances identiques et d'un condensateur :



- Justifiez que certaines intensités sont égales.
- À l'aide de la loi des mailles, reliez e , u_C et i_2 , puis u_C à e et à $\frac{du_C}{dt}$.
- À l'aide de la loi des mailles (deux fois) et de la linéarité de l'amplificateur, reliez u_C à i_3 et e , puis u_C à i_3 et s . Déduisez-en une relation entre u_C , e et s .

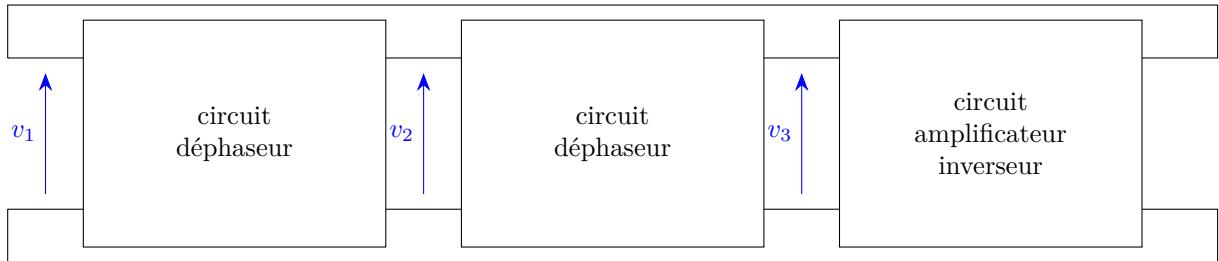
4. En éliminant u_C dans les relations précédentes, montrez que s et e sont reliés par l'équation différentielle

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = -\tau \frac{de}{dt} + e \quad (\text{E4.6})$$

en exprimant τ .

5. Oscillateur à circuit déphaseur

On met maintenant trois montages à AO à la suite l'un de l'autre, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Les deux circuits déphasateurs ont le même temps caractéristique τ , et on note $-\alpha$ le coefficient d'amplification du montage amplificateur inverseur (avec $\alpha > 0$).



- (a) Montrez que v_3 est relié à v_1 par l'équation différentielle

$$\tau^2 \frac{d^2v_3}{dt^2} + 2\tau \frac{dv_3}{dt} + v_3 = \tau^2 \frac{d^2v_1}{dt^2} - 2\tau \frac{dv_1}{dt} + v_1 \quad (\text{E4.7})$$

On pourra admettre cette question très calculatoire pour continuer.

- (b) Le montage amplificateur impose alors $v_1 = -\alpha v_3$. Déduisez-en l'ED vérifiée par v_1 .
- (c) Discutez de la forme des solutions (stabilité, oscillations ou non).
- (d) Résolvez cette équation à l'aide d'un schéma d'Euler ou de `odeint`, pour $\tau = 1 \text{ ms}$ et $\alpha = 1,5$. Pour voir l'instabilité, il ne faut pas des conditions initiales rigoureusement nulles : c'est toujours une perturbation qui fait démarrer les solutions. On prendra par exemple $v_1(0) = 0$ et $\frac{dv_1}{dt}|_{t=0} = 1 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$. Simulez sur 50τ environ.

Commentez la courbe obtenue.

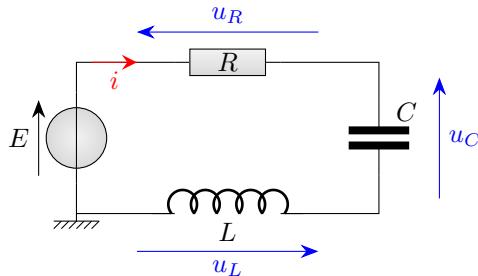
Régime transitoire des circuits linéaires d'ordre 2

TDs numériques

réponses page 296

TD numérique : RLC série

On considère un circuit RLC série :



1. Reétablissez l'ED d'ordre 2 vérifiée par u_C .
2. Déterminez et calculez la résistance R_c pour laquelle le retour à l'équilibre est le plus rapide.
3. On pose $v_C = \frac{du_C}{dt}$. Reécrivez l'ED de départ en un système de deux ED d'ordre 1 portant sur u_C et v_C .
4. On va résoudre numériquement ce système pour e passant de $E = 5\text{ V}$ à 0 V , avec les valeurs : $L = 32\text{ mH}$, $C = 100\text{ nF}$, $R = 50\Omega$, et les CI $u_C(0^+) = E$ et $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$.

Pour cela :

- calculez la période propre T_0 du circuit ; on prendra alors comme temps de simulation $10T_0$ et comme pas $\frac{T_0}{1000}$
- calculez le nombre de points. Créez 3 tableaux de zéros, un pour t , un pour u_C et un pour v_C
- appliquez alors les relations de récurrence de la méthode d'Euler

Tracez $u_C(t)$.

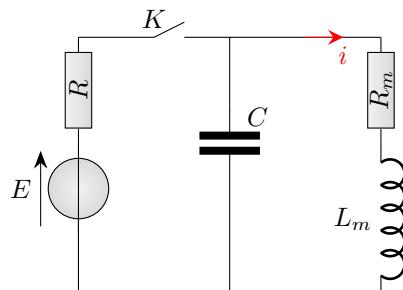
5. Calculez aussi $i(t)$; tracez $u_R(t)$ et $u_L(t)$.

Indication : cette question se fait simplement par des calculs vectorisés sur les tableaux de u_C et v_C , sans besoin de boucles.

6. Calculez les énergies $E_C(t)$, $E_L(t)$ et $E_{total}(t)$. Tracez les courbes d'énergie et commentez.
7. Observez ce qui se passe si $R = 0\Omega$ (commentaire ?), $R = 100\Omega$, 200Ω , 500Ω , $1\text{k}\Omega$, $5\text{k}\Omega$.

TD numérique : Moteur électrique protégé par un condensateur

On considère un moteur qui est équivalent à une inductance $L_m = 3,1\text{ H}$ en série avec une résistance $R_m = 32\Omega$. On le place dans le circuit ci-dessous avec $E = 220\text{ V}$ et $R = 2\Omega$:



On choisit d'allumer le moteur ou de l'éteindre à l'aide d'un interrupteur K .

1. Si on ne mettait pas le condensateur C , que se passerait-il à l'ouverture de K ?

2. Montrez que i obéit aux équations différentielles

$$RL_m C \frac{d^2 i}{dt^2} + (L_m + RR_m C) \frac{di}{dt} + (R_m + R)i = E \quad \text{lorsque } K \text{ est fermé} \quad (\text{E4.8a})$$

$$L_m C \frac{d^2 i}{dt^2} + R_m C \frac{di}{dt} + i = 0 \quad \text{lorsque } K \text{ est ouvert} \quad (\text{E4.8b})$$

3. Quelle valeur de C donnerait un régime critique lorsque K est ouvert ? Calculez sa valeur $C_{critique}$.

Remarque : Cette valeur est élevée mais atteignable avec de gros condensateurs dans des usines.

4. Mise en marche

On suppose qu'à $t < 0$, il n'y a ni courant ni tension dans la partie de droite, et à $t = 0$ on ferme K . Les CI seront alors $i(0^+) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = 0$.

(a) On va prendre $C = C_{critique}$. Calculez la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

(b) Résolvez numériquement $i(t)$ par une méthode d'Euler, sur une durée de $3T_0$. Évaluez la durée du régime transitoire.

5. Extinction

On suppose que le régime permanent est atteint, et on ouvre K ; on admettra que les CI seront $i(0^+) = \frac{E}{R+R_m}$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = 0$.

(a) Résolvez numériquement $i(t)$. Combien de temps met le courant pour s'arrêter ?

(b) Tracez les courbes pour $C = 10C_{critique}$ puis pour $C = \frac{1}{10}C_{critique}$. Observez les changements.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(d)

Q2.(b) ET (c)

Q3.(d)

Q4.(c) ET (f)

Q5.(c) ET (d)

Q6.(d)

Q7.(d)

Réponses au QCM : ED linéaires d'ordre 2

Q8.(b)

$\Delta = -396$ donc les racines sont $-1 \pm 9,95j$

Q9.(d)

$\Delta = 60$ donc les racines sont $-1,13$ et $-8,87$

Q10.(d)

$\Delta = -63\ 100$ donc les racines sont $-1,9 \pm 15,7j$

Réponses au QCM : Types de solutions

Q11.(c)

$\Delta = -576 < 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.

Q12.(d)

$\Delta = -108 < 0$ et les 3 coefficients ne sont pas de même signe.

Q13.(b)

$\Delta = 3360 > 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.

Q14.(b)

$\Delta = 69,4 > 0$ et les 3 coefficients ne sont pas de même signe.

Q15.(c)

$\Delta = -22\ 784 < 0$ et les 3 coefficients sont de même signe.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E4.1 : Analyse d'une courbe

1. $Q \approx 7$.
2. $\omega_0 = 3200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $L = 440 \text{ mH}$.
3. $R = \approx 200 \Omega$.

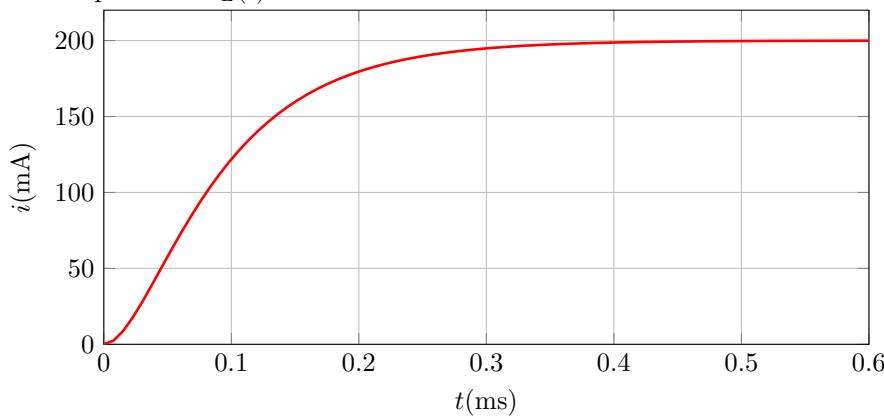
Réponses de l'exercice E4.2 : RLC série [*]

1. $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$
2. $i(0^+) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$.
3. $i(t) = 13,9(e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t})$ en mA avec $r_1 = 3530 \text{ s}^{-1}$ et $r_2 = 21\,470 \text{ s}^{-1}$

Réponses de l'exercice E4.3 : Circuit RLC parallèle [**]

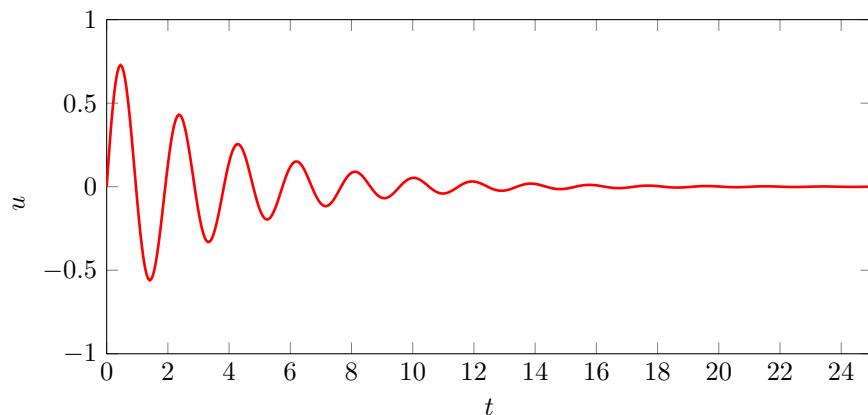
1. $LC \frac{d^2i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_0$ à $t > 0$.
2. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\alpha = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$; $K = \frac{I_0}{LC}$.
3. Régime apériodique car $\Delta > 0$.
4. $i_L(t) = I_0 + \frac{I_0}{\frac{r_1}{r_2}-1} e^{r_1 t} + \frac{I_0}{\frac{r_2}{r_1}-1} e^{r_2 t}$ avec $r_1 = -13\,800 \text{ s}^{-1}$ et $r_2 = -36\,200 \text{ s}^{-1}$.

Numériquement : $i_L(t) = 200 - 324e^{-13\,800t} + 124e^{-36\,200t}$ avec t en secondes et i_L en milliampères.



Réponses de l'exercice E4.4 : Étude d'un circuit $R, L // C$ [**]

1. $\frac{du}{dt} + RC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}u = 0$.
2. $u(0^+) = 0$
3. $u(t) = \frac{E}{RC\omega} e^{-t/\tau} \sin \omega t$



4. L'équation différentielle est $LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{E}{R}$.

Les CI sont $i_L(0^+) = 0$ et $\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0$.

On trouve finalement $i_L(t) = \frac{E}{R} [1 - (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t) e^{-t/\tau}]$

Réponses de l'exercice E4.5 : Double R-C [**]

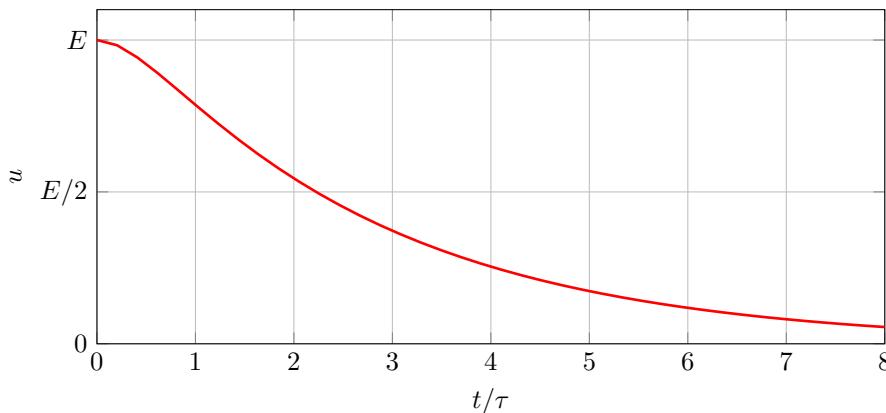
1. En notant u_1 et u_2 les tensions aux bornes des deux résistances (orientées vers la gauche), on obtient grâce aux

$$\begin{cases} e = u' + u_1 & (\text{loi des mailles à gauche}) \\ u' = u + u_2 & (\text{loi des mailles à droite}) \\ \frac{u_1}{R} = C \frac{du'}{dt} + C \frac{du}{dt} & (\text{loi des noeuds}) \end{cases}$$

On en tire alors $R^2 C^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3RC \frac{du}{dt} + u = e$ donc $\tau = RC$.

2. En régime continu, $u = u' = E$.

3. $u(t) = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} E e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2\tau}t} - \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} E e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2\tau}t}$



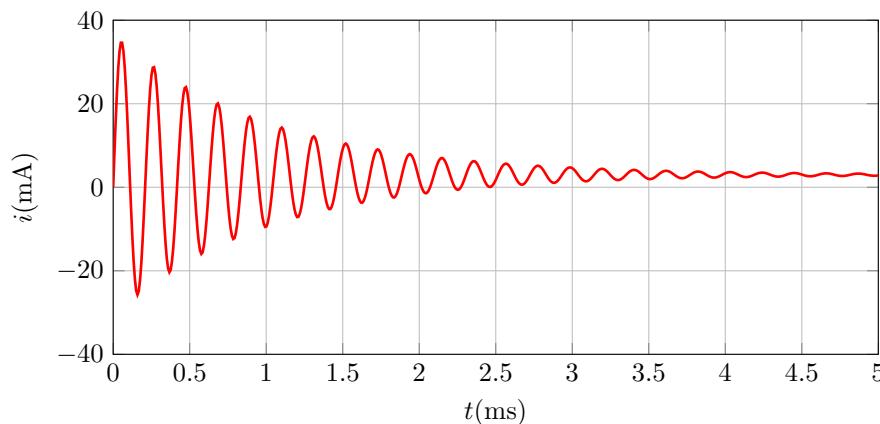
Réponses de l'exercice E4.6 : Circuit d'ordre 2 [**]

1. $LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) i = \frac{E}{R_2}$

2. $i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + e^{-rt} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$ avec $r = 990 \text{ s}^{-1}$ et $\omega = 15000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. $i(0^+) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$; on en déduit que $i(t) = 3 + e^{-990t} [-3 \cos(15000t) + 33,5 \sin(15000t)]$ avec t en s et i en mA

4.



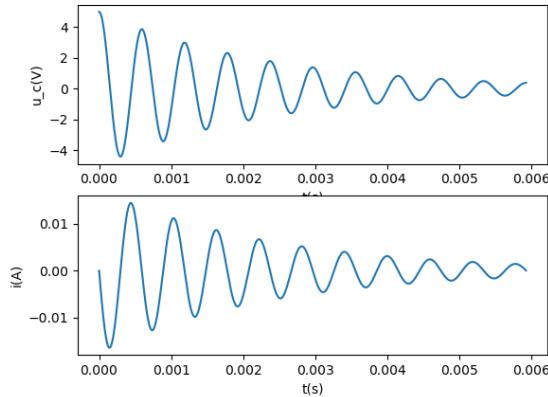
Réponses de l'exercice E4.7 : RLC avec une bobine non linéaire [**]

1. $L(i) \cdot C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + C^2 \cdot \frac{dL}{di} \frac{du_C}{dt} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e$

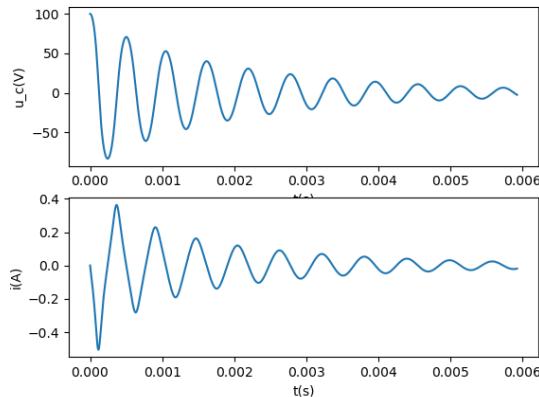
2. $u_C(0^+) = 5 \text{ V}$ et $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$.

Ensuite on pose $u'_c = \frac{du_c}{dt}$ et on a le schéma d'Euler :

$$\begin{cases} t[n+1] = t[n] + h \\ u_C[n+1] = u_C[n] + h.u'_C[n] \\ u'_C[n+1] = u'_C[n] + h \frac{-u_C[n] - RCu'_C[n]}{L(Cu'_n).C + C^2u'_n \cdot \frac{dL}{di}} \text{ avec } i = C.u'_C[n] \end{cases}$$



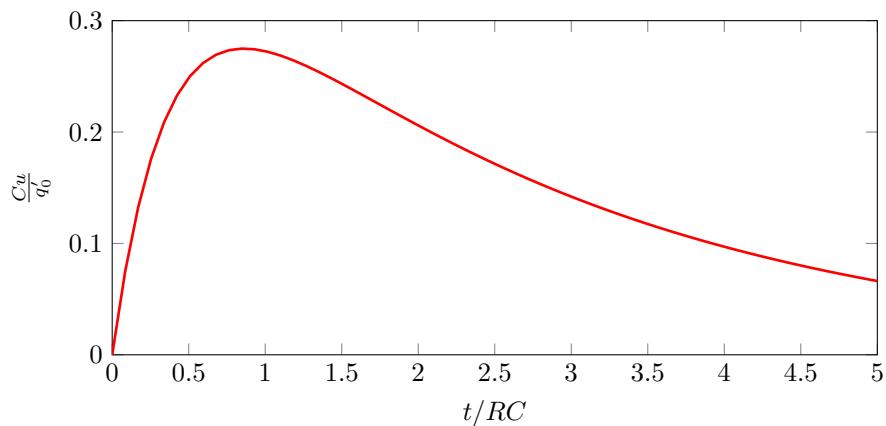
3. En changeant $E = 100$ V on obtient :



On constate au début une forte déformation de la courbe d'intensité, qui prend une forme triangulaire au lieu de sinusoïdale, à cause de la modification de la valeur de L .

Réponses de l'exercice E4.8 : Décharge d'un condensateur [***]

1. $u = u' = 0$ V.
2. $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u = 0$
3. $u(0^+) = 0$ et $\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{q'_0}{RC^2}$.
4. $u(t) = \frac{q'_0}{\sqrt{5}C} \left[-e^{\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2\tau}t\right)} + e^{\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\tau}t\right)} \right]$



Réponses de l'exercice E4.9 : Oscillateur à double déphaseur [***]

1. $i_1 = i_2$ et $i_3 = i_4$.
2. $u_C + RC \frac{du_C}{dt} = e$
3. $u_C = \frac{e+s}{2}$
4. $RC \frac{ds}{dt} + s = -RC \frac{de}{dt} + e$ et on pose $\tau = RC$.

5. Oscillateur à circuit déphaseur

(a) On part des équations

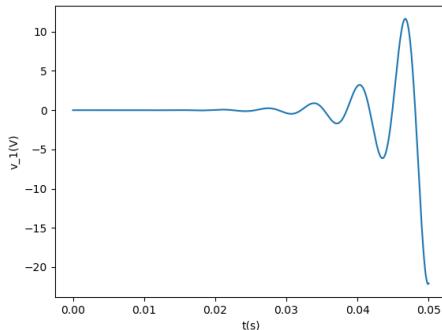
$$\begin{cases} \tau \frac{dv_3}{dt} + v_3 = -\tau \frac{dv_2}{dt} + v_2 \\ \tau \frac{dv_2}{dt} + v_2 = -\tau \frac{dv_1}{dt} + v_1 \end{cases}$$

(b) $(1+\alpha)\tau^2 \frac{d^2v_1}{dt^2} + 2(1-\alpha)\tau \frac{dv_1}{dt} + (1+\alpha)v_1 = 0$

(c) Les solutions sont instables dès que $\alpha > 1$.

De plus $\Delta = < 0$ donc les solutions sont oscillantes.

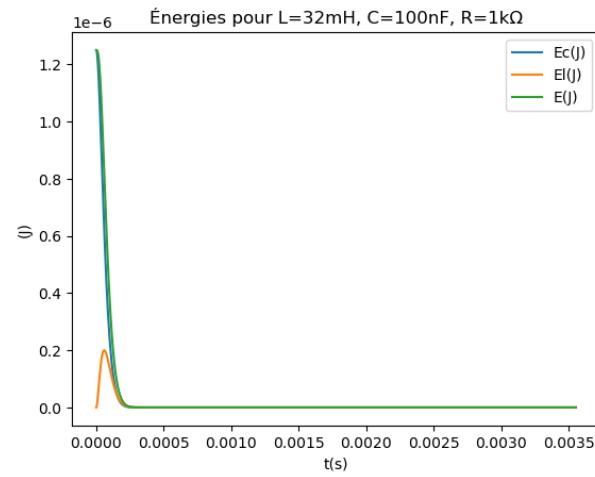
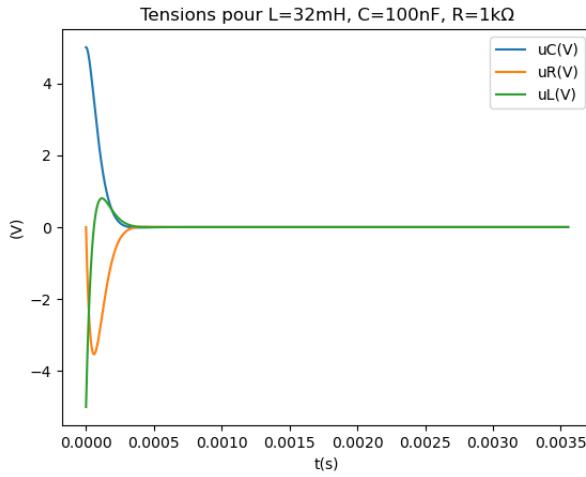
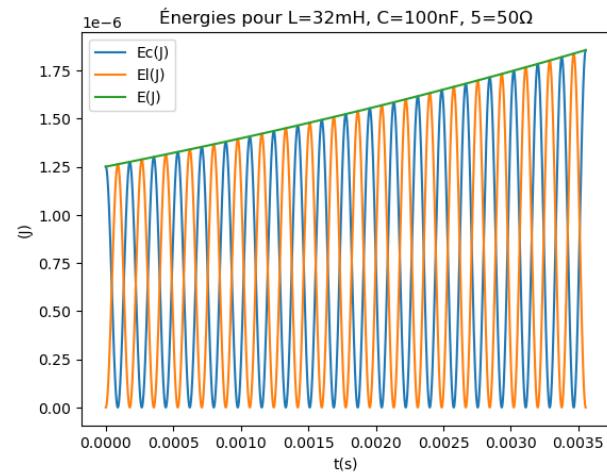
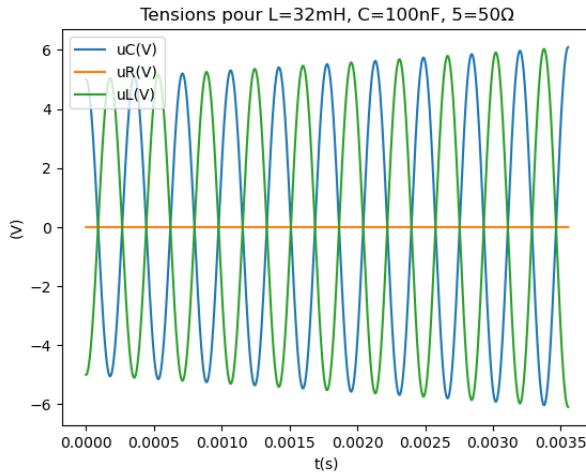
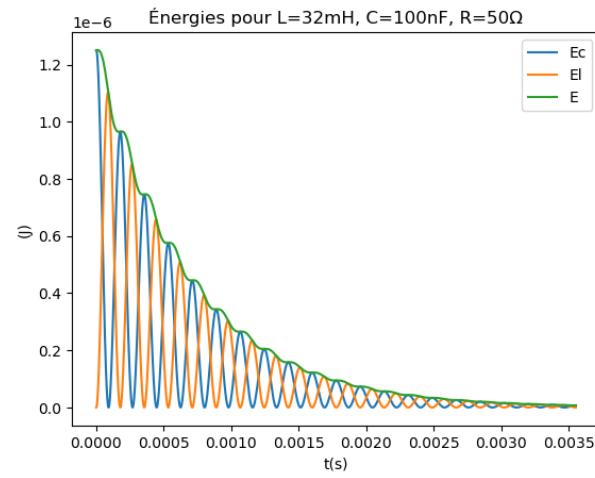
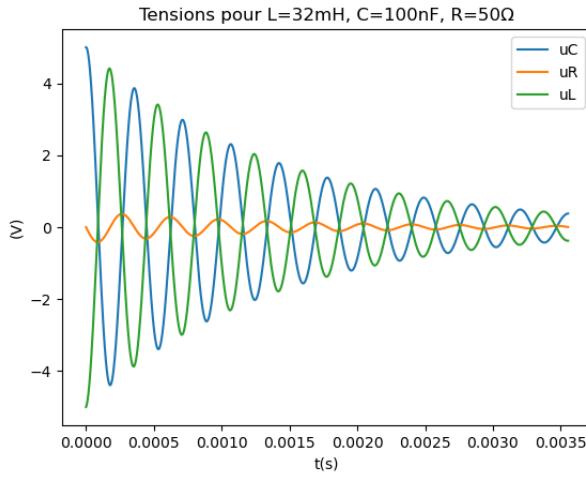
(d)



Les oscillations apparaissent et croissent; quand elles dépassent 15 V, l'AO va saturer en réalité et ne fonctionnera plus en régime linéaire.

Réponses aux TDs numériques

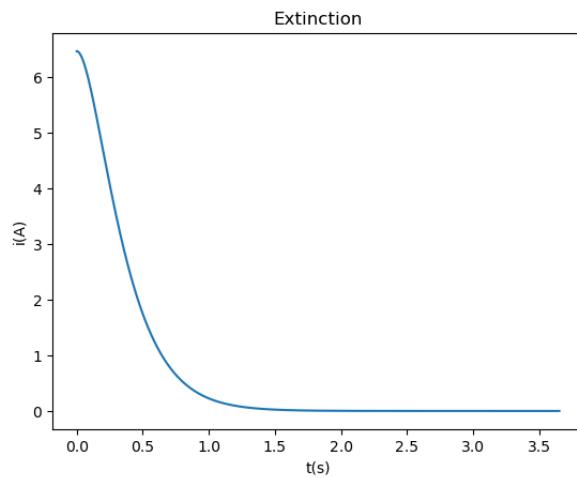
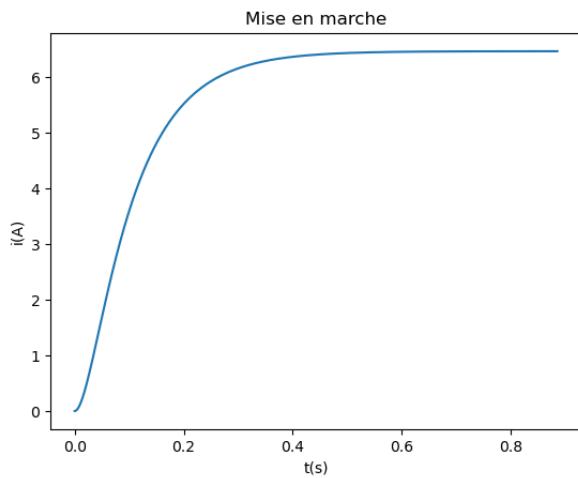
Réponses au TD d'info : RLC série



Dans le cas $R = 0\Omega$ on constate un problème de la méthode d'Euler : l'énergie croît alors qu'elle devrait être constante.

Réponses au TD d'info : Moteur électrique protégé par un condensateur

$$C_{critique} = \frac{4L_m}{R_m^2} = 12,1 \text{ mF} \text{ permet d'obtenir l'atténuation la plus rapide du courant.}$$



Prérequis mathématiques pour la mécanique

Cours

M0.A. Vecteurs

A.1. Vecteurs et base

En mécanique, le repérage de points va utiliser des vecteurs.

Définition : Vecteur

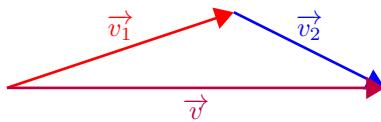
Un vecteur \vec{v} (du plan ou de l'espace) est un objet mathématique caractérisé par une longueur (sa norme, notée $\|\vec{v}\|$), une direction et un sens ; on le représente avec une flèche.

Propriété : Multiplication d'un vecteur par un scalaire

On peut multiplier un vecteur \vec{v} par un nombre (un *scalaire*) λ : cela multiplie sa norme par $|\lambda|$, ne change pas sa direction, et inverse son sens si $\lambda < 0$.

Propriété : Addition de vecteurs

On peut ajouter deux vecteurs : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$.



Remarque : Souvent, les vecteurs sont repérés par deux points (point de départ et d'arrivée) et dans ce cas, la relation précédente prend le nom de relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

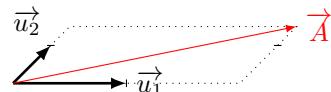
Néanmoins, il est important de se souvenir qu'un vecteur n'est pas lié à un point particulier. Un vecteur peut être déplacé, il est toujours le même vecteur.

Les vecteurs sont peu pratiques à dériver. On va donc ramener chaque vecteur à 1, 2 ou 3 nombres grâce à une base de projection.

Définition : Base

Une base est un ensemble de vecteurs (2 dans le plan, 3 dans l'espace) grâce auxquels on peut décomposer tout vecteur sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de base ; les coefficients de la décomposition s'appellent les *coordonnées des vecteurs dans la base*.

Par exemple, les deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ci-contre forment une base du plan ; le vecteur \vec{A} peut se décomposer comme $\vec{A} = 2\vec{u}_1 + 1,5\vec{u}_2$. Les coordonnées de \vec{A} dans cette base sont donc (2; 1,5).



Définition : Base orthonormée

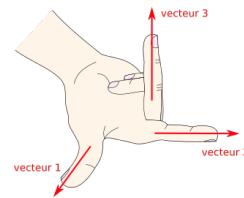
Une base orthonormée est une base telle que :

- les vecteurs de la base ont pour norme 1
- les vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux

Remarque : Dans l'espace, on ajoute une notion supplémentaire :

Définition : Base orthonormée directe

Une base orthonormée dans l'espace est *directe* si les 3 vecteurs sont placés dans le même ordre que les trois premiers doigts de la main droite (pouce, index, majeur).



On verra l'utilisé de cette notion plus tard, avec le produit vectoriel.

A.2. Produit scalaire

Définition : Produit scalaire

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Le produit scalaire entre \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le **nombre**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad (\text{M0.1})$$

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Propriété : Produit scalaire et orthogonalité

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Démonstration

Évident à partir de (M0.1) : si les normes sont non nulles, le produit scalaire est nul si et seulement si $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$ soit $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \pm \frac{\pi}{2}$.

Propriété : Produit scalaire et norme

La norme d'un vecteur est la racine carrée du produit scalaire de ce vecteur avec lui-même :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2} \quad (\text{M0.2})$$

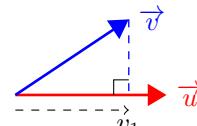
Démonstration

Évident d'après (M0.1) puisque l'angle entre un vecteur et lui-même est nul.

Propriété : Produit scalaire et projection

Le produit scalaire entre deux vecteurs est égal à norme de l'un multiplié par la longueur de la projection de l'autre sur le premier :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot v_1$$



Démonstration

Sur la figure ci-dessus, on voit bien que la projection v_1 vaut $\|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ par définition du cosinus, ce qui ramène à la définition du produit scalaire.

À partir de maintenant, on suppose qu'on a une base orthonormée $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ en 3D (les résultats se déduisent facilement en 2D).

Propriété : Produit scalaire des vecteurs de la base

Par définition d'une base orthonormée,

- * $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1$ (car la norme des vecteurs vaut 1)

- * $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ (car les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2)

Propriété : Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Dans une base orthonormée, la coordonnée d'un vecteur suivant un des vecteurs de la base (aussi appelée *projection du vecteur sur le vecteur de la base*) est égale au produit scalaire entre le vecteur et le vecteur de la base.

Ainsi, on peut écrire $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \vec{b} + (\vec{u} \cdot \vec{c}) \vec{c}$.

Démonstration

Notons $\vec{u} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{a} = x \vec{a} \cdot \vec{a} + y \vec{b} \cdot \vec{a} + z \vec{c} \cdot \vec{a} = x$ d'après les règles précédentes. Il en va de même pour les autres vecteurs de la base.

Propriété : Produit scalaire dans une base orthonormée

Soient deux vecteurs $\vec{u} = u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c}$ et $\vec{v} = v_1 \vec{a} + v_2 \vec{b} + v_3 \vec{c}$. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \quad (\text{M0.3a})$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \quad (\text{M0.3b})$$

Démonstration

Il suffit pour la première d'écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c}) \cdot (v_1 \vec{a} + v_2 \vec{b} + v_3 \vec{c})$, de tout développer, de remplacer les produits scalaires par leur valeur, et on obtient la formule proposée.

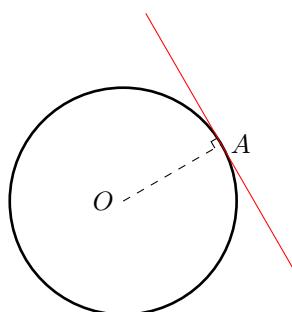
En l'appliquant à $\vec{u} \cdot \vec{u}$, on obtient la seconde formule.

M0.B. Cercles

Quelques rappels sur les cercles :

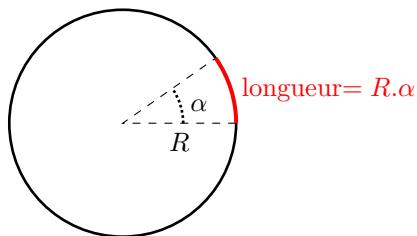
Propriété : Tangente à un cercle

La tangente à un cercle en un de ses points est orthogonale au rayon du cercle aboutissant à ce point.



Propriété : Longueur d'un arc de cercle

Un arc de cercle de rayon R et d'angle α a pour longueur $R\alpha$ avec α en radians.



Remarque : Pour un cercle complet, on retrouve le périmètre $2\pi R$.

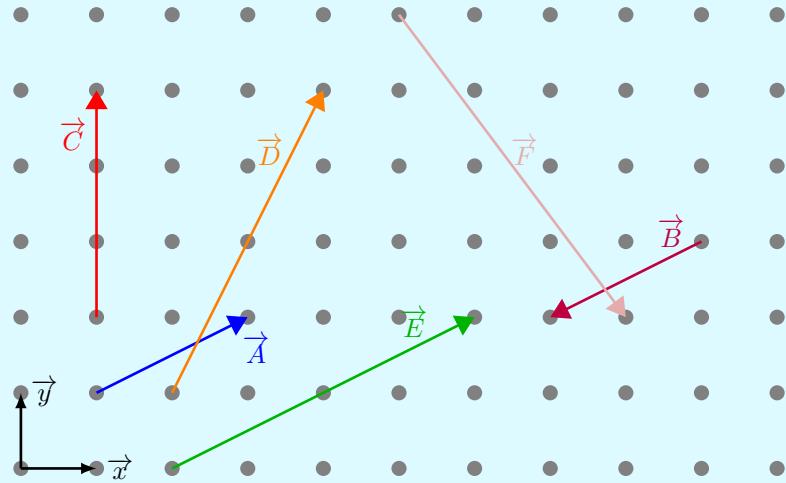
Prérequis mathématiques pour la mécanique

QCMs

réponses page 306

 QCM : Calculs sur les vecteurs

On considère les vecteurs du plan suivants :



Q1.

Quelles sont les coordonnées de \vec{D} dans la base (\vec{x}, \vec{y}) ?

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). (4 ; 5) | (b). (2 ; 4) |
| (c). (2 ; 1) | (d). (2 ; 5) |

Q2.

Que vaut $\vec{A} \cdot \vec{C}$?

- | | |
|----------------------------|--------|
| (a). 6 | (b). 0 |
| (c). $6\vec{x} + 3\vec{y}$ | (d). 3 |

Q3.

Que vaut la norme de \vec{F} ?

- | | |
|--------|-----------------|
| (a). 7 | (b). $\sqrt{7}$ |
| (c). 4 | (d). 5 |

Q4.

Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{F} + \frac{1}{2}\vec{D}$?

- | | |
|---------------|---------------|
| (a). (5 ; 0) | (b). (3 ; -1) |
| (c). (4 ; -2) | (d). (-4 ; 2) |

Q5.

Le vecteur $\vec{F} + \frac{1}{2}\vec{D}$ est-il orthogonal au vecteur \vec{D} ?

- | | |
|----------|----------|
| (a). Non | (b). Oui |
|----------|----------|

Q6.

Quelles égalités sont vraies ?

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (a). $\vec{E} = 2\vec{A}$ | (b). $\vec{B} = -\vec{A}$ |
| (c). $2\vec{D} + \vec{F} = 2\vec{E}$ | (d). $\vec{A} + \vec{C} = \vec{D}$ |
| (e). $\vec{F} - \vec{E} = -2\vec{C}$ | (f). $\vec{D} + \vec{F} = 5\vec{x}$ |

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Calculs sur les vecteurs

Q1.(b)

Q2.(d)

$$2 \times 0 + 1 \times 3$$

Q3.(d)

$$\sqrt{(-4)^2 + 3^2}$$

Q4.(c)

Q5.(b)

Le produit scalaire vaut $4 \times 2 + (-2) \times 4 = 0$

Q6.(a) ET (b) ET (d) ET (f)

Cinématique du point**Cours**

Nous allons, avec ce chapitre, commencer la mécanique, c'est-à-dire l'étude du mouvement de objets. Dans ce premier chapitre, nous allons commencer par une question très simple : comment décrire le mouvement des objets ? Avec quels outils le faire ?

M1.A. Référentiel

La première chose à faire pour décrire le mouvement d'un objet, c'est de préciser le point de vue qu'on prend pour décrire son mouvement. Par exemple, lorsqu'un train roule, la vache qui rumine immobile dans un champ voit le train qui bouge, tandis que le voyageur, assis dans le train, voit le train immobile et la vache se déplaçant rapidement. Ces deux points de vue sont justes ; mais quand on veut faire de la mécanique, il faut en choisir un.

Définition : Référentiel

Le mouvement d'un point est repéré par rapport à un référentiel. Un référentiel est constitué d'une horloge et

- d'un repère indéformable, ou bien
- d'un solide indéformable.

Remarque : En mécanique non-relativiste, le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels ; du coup, on ne précisera pas l'horloge utilisée. On dira donc simplement : le référentiel lié au champ, ou le référentiel lié au train.

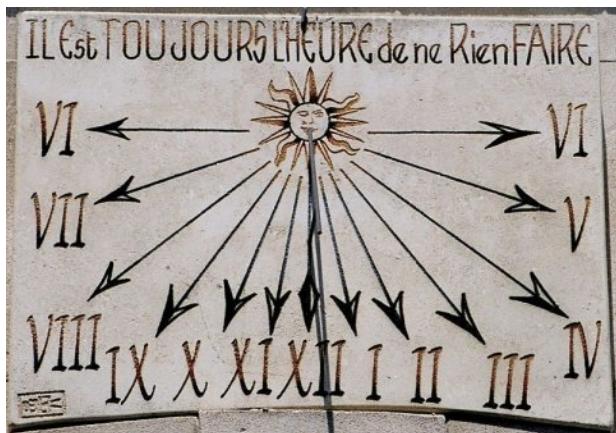
(a) Référentiel lié à la jetée

(b) Référentiel lié au voilier

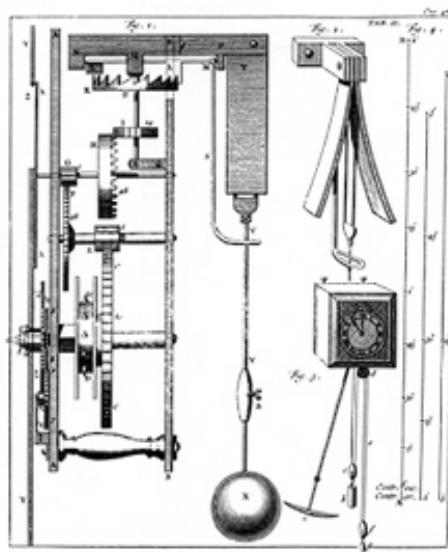
FIGURE M1.1 – Entrée d'un bateau dans un port ; la trajectoire de l'œuf pondu par le goéland dépend du référentiel.

Remarque : L'horloge permet de mesurer les durées. Une durée se mesure en la comparant avec la durée d'un phénomène cyclique régulier. Ainsi, on a utilisé au cours des âges (figure M1.2) :

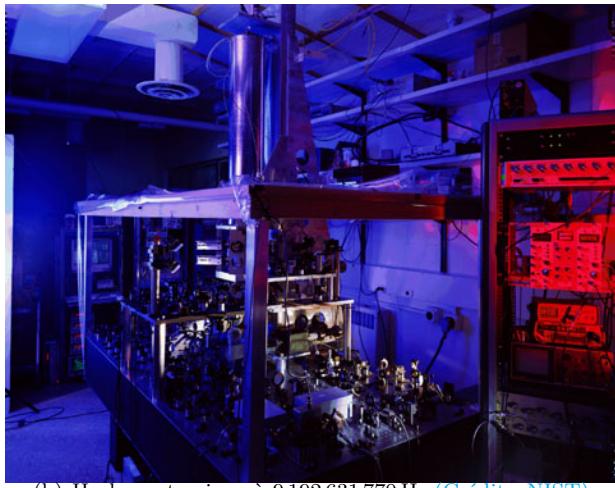
- l'alternance jour/nuit, d'une période de 24 h, permettant des mesures à la demi-heure près
- le battement d'un pendule, permettant des mesures à la seconde près
- les vibrations d'un diapason de quartz, permettant des mesures à la milliseconde près, voire moins



(a) Cadran solaire. (Crédit : Wikipedia/Greudin)



(c) Pendule de Huygens. (Crédit : Wikipedia)



(b) Horloge atomique à 9 192 631 770 Hz. (Crédit : NIST)



(d) Oscillateur à quartz. (Crédit : Wikipedia/M.r)

FIGURE M1.2 – Mesures du temps.

— les vibrations d'un atome de césum dans une horloge atomique, permettant des mesures à la femtoseconde près.

Définition : Définition officielle de la seconde

Un atome de Césium 133 isolé oscille entre ses deux états fondamentaux hyperfins à 9 192 631 770 Hz.

De même, pour les longueurs, on a longtemps utilisé toutes sortes de mesures, jusqu'à ce que le système métrique s'impose, définissant le mètre comme $\frac{1}{40\ 000}$ de la longueur de l'équateur terrestre. Pour faciliter les mesures, on a longtemps utilisé un mètre étalon en platine, mais désormais le mètre est défini à partir de la vitesse de la lumière dans le vide :

Définition : Définition officielle du mètre

La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 299\ 792\ 458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il n'est pas nécessaire de retenir cette valeur exacte, mais il faut savoir que $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

M1.B. Position, vitesse, accélération

B.1. Relations générales

Définition : Trajectoire

La trajectoire d'un point est la courbe orientée formée de toutes positions occupées par ce point au cours du temps.

Dans l'espace, le point peut se déplacer en 3 dimensions, et son repérage nécessite l'utilisation de vecteurs :

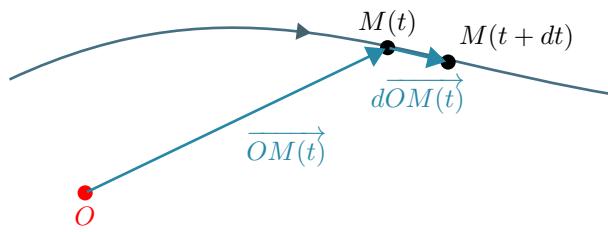


FIGURE M1.3 – Repérage d'un point qui se déplace dans l'espace.

Définition : Vecteur position

La position d'un point est repérée par rapport à un point O fixe dans le référentiel d'étude par le vecteur \overrightarrow{OM} qui dépend du temps.

Définition : Vitesse instantanée

On définit la vitesse (instantanée) du point M par la dérivée du vecteur position :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (\text{M1.1})$$

On définit parfois la *vitesse absolue* comme la norme de la vitesse : $v = \|\vec{v}\|$

Que signifie, au juste, la dérivée d'un vecteur ? Pour le comprendre, il faut, à l'aide de la figure M1.3, revenir à la définition de la dérivée à l'aide d'un taux d'accroissement : $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM(t+dt)} - \overrightarrow{OM(t)}}{dt}$ avec dt petit. Or par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM(t+dt)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OM(t+dt)} + \overrightarrow{M(t)O} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}$: c'est le vecteur dont s'est déplacé le point M entre les instants t et $t+dt$; on l'appelle souvent le *petit déplacement*, noté $d\overrightarrow{OM}$. La vitesse est donc égale à $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{M(t)M(t+dt)}}{dt}$; c'est un vecteur qui est tangent à la trajectoire. On retiendra surtout ceci, que pendant un temps dt , le point M se déplace de $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}.dt$.

Remarque : Si \vec{v} est la dérivée de \overrightarrow{OM} , alors \overrightarrow{OM} est une primitive de \vec{v} : ainsi, si on connaît $\vec{v}(t)$, on peut retrouver la position $\overrightarrow{OM}(t)$ en écrivant que $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}(t)dt + cst$. Si on connaît une condition initiale, par exemple $\overrightarrow{OM}(0)$, alors on peut trouver la constante. Néanmoins, on ne sait pas vraiment intégrer un vecteur. On aura donc besoin d'abord de projeter les vecteurs sur une base (cf. plus loin).

Définition : Accélération

On définit l'accélération comme

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \quad (\text{M1.2})$$

Remarque : L'accélération est la dérivée du vecteur \vec{v} , non pas de $|\vec{v}|$: même si la vitesse absolue est constante, le vecteur vitesse ne l'est pas forcément, donc l'accélération n'est pas forcément nulle.

Remarque : De même, \vec{v} est une primitive de \vec{a} : $\vec{v}(t) = \int \vec{a}.dt + cst$.

Définition : Mouvement rectiligne

Un mouvement est rectiligne si la direction de la vitesse est constante.

Définition : Mouvement uniforme

Un mouvement est uniforme si la norme de la vitesse est constante.

Remarque : Attention aux confusions fréquentes entre ces deux définitions. Un tramway en ligne droite à vitesse constante a un mouvement rectiligne uniforme : $\vec{v} = cst$. S'il freine en ligne droite, son mouvement est rectiligne mais n'est plus uniforme. S'il prend un virage à vitesse constante, son mouvement est uniforme mais n'est plus rectiligne.

B.2. Repérage en coordonnées cartésiennes

Nous avons vu des définitions générales permettant de repérer un point dans l'espace, à l'aide de vecteurs. Mais pour travailler sur les vecteurs, il faut les décomposer sur une base de l'espace pour se ramener à l'étude de fonctions non vectorielles (fonctions scalaires). On va donc définir une base fixe pour exprimer les vecteurs, et un système de coordonnées robuste.

Définition : Système de coordonnées

Un système de coordonnées est un ensemble de nombres (1, 2 ou 3) qui permet de repérer de façon univoque un point dans l'espace.

Le système de coordonnées le plus simple est le système cartésien, qui s'appuie sur une origine O et trois axes de l'espace orthogonaux deux à deux ; on les notera souvent x , y et z . Considérons alors un point M (figure M1.4) ; on peut projeter orthogonalement ce point M sur les trois axes, et obtenir les points M_x , M_y et M_z . Les positions de ces trois points suffisent à reconstruire la position de M .

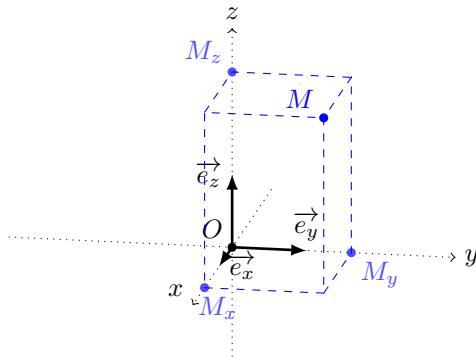


FIGURE M1.4 – Coordonnées cartésiennes.

Définition : Coordonnées cartésiennes

Les coordonnées cartésiennes d'un point M sont définies par $(x, y, z) = (\overrightarrow{OM}_x, \overrightarrow{OM}_y, \overrightarrow{OM}_z)$.

À partir de ces axes, on va créer une *base orthonormée directe*.

Définition : Base cartésienne

La base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est formée de trois vecteurs unitaires dirigés selon les trois axes Ox , Oy et Oz . Elle est orthonormée directe et constante au cours du temps.

On a donc les propriétés suivantes :

- $\|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1$
- $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0$

Une fois cette base posée, on peut repérer le vecteur position :

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (\text{M1.3})$$

Démonstration

Notons H le point en bas à droite du parallélépipède bleu de la figure M1.4. Alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{M_x H} + \overrightarrow{H M} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y + \overrightarrow{OM}_z = \overrightarrow{OM}_x \cdot \vec{e}_x + \overrightarrow{OM}_y \cdot \vec{e}_y + \overrightarrow{OM}_z \cdot \vec{e}_z$.

Propriété : Vitesse

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \quad (\text{M1.4})$$

Démonstration

Les vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z sont constants donc seuls x , y et z varient au cours du temps et sont dérivés. Donc $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$. En mécanique, on a l'habitude d'utiliser la notation concise du point au-dessus d'un symbole pour indiquer la dérivation par rapport au temps.

Propriété : Accélération

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (\text{M1.5})$$

Démonstration

Identique à la précédente.

Enfin, il reste l'expression du petit déplacement du point M lorsque les trois variables varient d'une petite quantité dx , dy et dz :

Propriété : Petit déplacement

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \quad (\text{M1.6})$$

Démonstration

Si x varie de dx , on voit bien que le point M se déplace de dx dans la direction \vec{e}_x . Idem pour les autres variables.

Exemple : Mouvement à accélération constante

À connaître

Un point se déplace en 1D selon la direction \vec{e}_x ; il est repéré par sa coordonnée $x(t)$. Sa position initiale vaut $x_0\vec{e}_x$ et sa vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$. Il est accéléré avec une accélération constante $\vec{a} = a_0\vec{e}_x$. Exprimez sa vitesse et sa position.

On ne sait pas intégrer des vecteurs, mais on admet qu'on peut toujours sortir les vecteurs constants des intégrales, comme une constante classique.

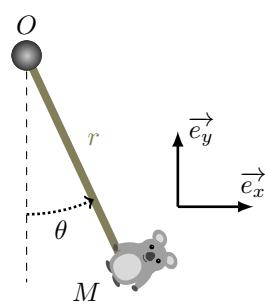
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ donc $\vec{v}(t) = \int \vec{a}.dt + \vec{cst} = \int a_0\vec{e}_x dt + \vec{cst} = (a_0 \cdot t)\vec{e}_x + \vec{cst} = a_0 \cdot t\vec{e}_x + \vec{cst}$ or $\vec{v}(0) = \vec{0} + \vec{cst} = v_0\vec{e}_x$ donc $\vec{v}(t) = (a_0 \cdot t + v_0)\vec{e}_x$.

De même pour la position : $\overrightarrow{OM}(t) = \int \vec{v}.dt + \vec{cst} = \int (a_0 \cdot t + v_0).dt \cdot \vec{e}_x = \left(a_0 \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t\right)\vec{e}_x + \vec{cst}$ or $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0} + \vec{cst} = x_0\vec{e}_x$ donc $\overrightarrow{OM}(t) = \left(a_0 \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + x_0\right)\vec{e}_x$.

Exemple : Projection sur la base cartésienne

On considère un koala M suspendu au bout d'une liane de longueur r constante. Cette liane est fixée en un point O , et peut tourner autour ; on repère sa position par l'angle θ par rapport à la verticale.

1. Exprimez le vecteur position \overrightarrow{OM} dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .
2. Exprimez la vitesse de M dans la base cartésienne ; on prendra en compte que θ varie mais r est fixe.
3. Exprimez l'accélération de M .



1. Le vecteur \overrightarrow{OM} est penché, il n'est ni selon \vec{e}_x , ni selon \vec{e}_y , il va donc falloir le projeter, c'est-à-dire l'exprimer sous la forme $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, mais en exprimant x et y en fonction de l'inconnue qui décrit le mouvement, à savoir θ ici.

Pour cela, il faut commencer par dessiner le «rectangle de projection» (en bleu pointillé sur la figure ci-contre) qui a des côtés parallèles aux axes, et le vecteur position pour diagonale. Il fait apparaître les longueurs x et y recherchées.

On voit aussi apparaître un triangle rectangle OHM possédant l'angle θ . Dans ce triangle, r est l'hypothénuse, $|y|$ le côté adjacent à l'angle et $|x|$ le côté opposé (on met des valeurs absolues pour le moment, car x et y sont algébriques, ils ont un signe). On sait alors, par les relations des fonctions trigonométriques, que le côté adjacent est égal à l'hypothénuse multipliée par $\cos \theta$, et le côté opposé à l'hypothénuse multipliée par $\sin \theta$. On a donc $|x| = r \cdot \sin \theta$ et $|y| = r \cdot \cos \theta$.

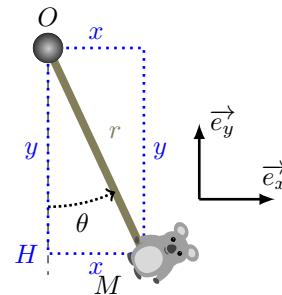
Reste à mettre les signes. On voit que la projection de \overrightarrow{OM} sur \vec{e}_x va vers la droite, comme \vec{e}_x , donc $x > 0$; et que la projection verticale va vers le bas, tandis que \vec{e}_y va vers le haut, donc $y < 0$. ^{a)}

Conclusion : $x = r \cdot \sin \theta$ et $y = -r \cdot \cos \theta$, donc $\overrightarrow{OM} = r \cdot \sin \theta \vec{e}_x - r \cdot \cos \theta \vec{e}_y$.

2. Pour avoir la vitesse, il faut dériver par rapport au temps. Attention cependant à la dérivée de $\sin \theta$: on sait que $\frac{d \sin \theta}{d \theta} = \cos \theta$, mais ici on dérive par rapport au temps ; il s'agit d'une dérivée composée car θ dépend du temps : $\frac{d \sin \theta(t)}{dt} = \frac{d \theta}{dt} \cdot \frac{d \sin \theta}{d \theta} = \dot{\theta} \cos \theta$. De même $\frac{d \cos \theta}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta$. Donc finalement, $\vec{v} = r\dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$.

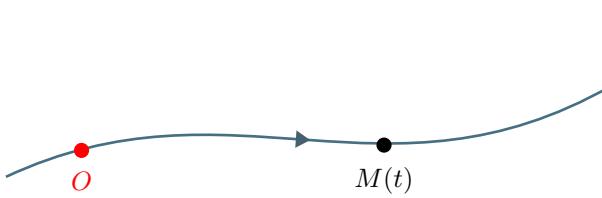
3. On redérite encore une fois, mais attention, $\dot{\theta}$ varie aussi, donc on a un produit à dériver : $\vec{a} = r\ddot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + r\dot{\theta} (-\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y)$

a. Attention, ces raisonnements avec les signes supposent que $\cos \theta$ et $\sin \theta$ sont positifs, donc que l'angle est compris entre 0° et 90° . Il faut toujours faire des dessins avec des angles compris entre 0° et 90° .

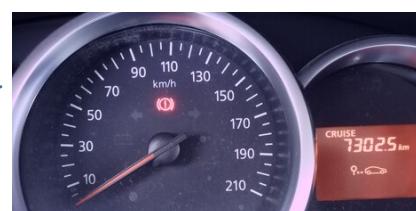


B.3. Repérage le long d'une trajectoire

Parfois, on connaît bien la trajectoire que va suivre le point, et on peut se contenter de le repérer par sa position le long de cette trajectoire.



(a) Trajectoire d'un point M



(b) Tableau de bord d'une voiture : on y lit la distance parcourue (abscisse curviligne) et la vitesse.

FIGURE M1.5 – Description d'un mouvement sur une trajectoire.

Si $M(t)$ représente le point à l'instant t et O est le point de départ, alors on peut repérer la position de M sur la trajectoire par la distance parcourue depuis le départ :

Définition : Abscisse curviligne

L'abscisse curviligne représente la distance parcourue depuis un point donné en suivant la trajectoire : $s = \widehat{OM}$ avec O un point fixe.

Propriété : Vitesse absolue

La vitesse absolue du point vaut la dérivée de son abscisse curviligne :

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{dOM}{dt} \quad (\text{M1.7})$$

Remarque : Si v est la dérivée de s , alors s est une primitive de v : ainsi, si on connaît $v(t)$, on peut retrouver la distance $s(t)$ en écrivant que $s(t) = \int v(t)dt + cst$. Si on connaît une condition initiale, par exemple $s(0)$, alors on peut trouver la constante.

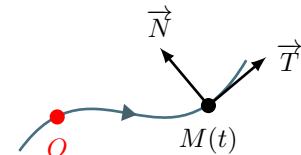
On peut aussi utiliser une intégrale : $\int_{t_0}^t v(t)dt = [s(t)]_{t_0}^t = s(t) - s(0)$ donc $s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(t)dt$

Mais v ne contient que l'information sur la norme de la vitesse, pas sur sa direction. Pour avoir aussi la direction, il faut connaître le vecteur \vec{v} . Pour exprimer ce vecteur, on introduit une *base orthonormée*, c'est-à-dire un ensemble de deux vecteurs orthogonaux de norme 1.

Définition : Base de Frenet

On introduit à chaque instant une base de Frenet (\vec{T}, \vec{N}) :

- \vec{T} est le vecteur de norme 1 tangent à la trajectoire
- \vec{N} est le vecteur de norme 1 orthogonal à \vec{T} et dirigé du côté vers lequel la trajectoire s'incurve



Propriété : Vitesse dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet, la vitesse du point s'écrit

$$\vec{v} = v\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T} \quad (\text{M1.8})$$

Définition : Accélération dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet, l'accélération d'un point s'écrit

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \quad (\text{M1.9})$$

où R est le *rayon de courbure* de la trajectoire, c'est-à-dire le rayon du cercle qui s'approche le plus de la trajectoire à l'instant t .

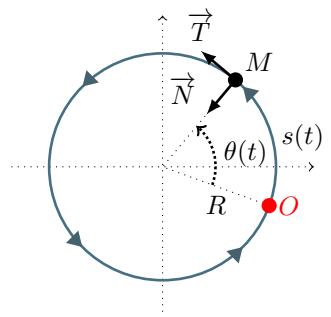
Ainsi, on voit que l'accélération contient 2 termes : un terme tangent à la trajectoire, qui traduit le fait que la vitesse augmente ou diminue ; et un terme perpendiculaire, qu'on ressent dans les virages, qui traduit le changement de la direction de la vitesse ; il varie comme la vitesse au carré.

Remarque : La base de Frenet est très difficile à utiliser, sauf dans le cas d'un mouvement circulaire : si un point se déplace sur un cercle de rayon R , alors en notant $\theta(t)$ son angle par rapport au point de départ O , son abscisse curviligne vaudra simplement

$$s(t) = R.\theta(t) \text{ avec } \theta \text{ en radians}$$

par définition des radians. Le vecteur \vec{T} est tangent au cercle, et le vecteur \vec{N} passe par le centre.

Néanmoins, quand nous aurons étudié les coordonnées polaires au chapitre M5, la base de Frenet ne sera plus utile.



Cinématique du point

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Repérage dans l'espace et dans le temps	
Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point	
Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Système de coordonnées cartésiennes.	Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cartésiennes
Mouvement rectiligne uniformément accéléré.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme. Faire le lien avec les composantes polaires de l'accélération. Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.

Cinématique du point

QCMs

réponses page 321

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Un référentiel peut être formé par :

- (a). une horloge et un point (b). une horloge et un objet quelconque
 (c). une horloge et un solide indéformable (d). une horloge et un repère indéformable

Q2.

Si on connaît la vitesse $v(t)$ d'un point, alors on peut retrouver sa distance parcourue par le calcul :

- (a). $s(t) = v(0) + \int_0^t s(t).dt$ (b). $s(t) = s(0) + \int_0^t v(t).dt + cst$
 (c). $s(t) = \int_0^t v(t).dt$ (d). $s(t) = s(0) + \int_0^t v(t).dt$

Q3.

En un temps dt , le point M parcourt :

- (a). $\overrightarrow{OM}.dt$ (b). \vec{v}
 (c). dt (d). $\vec{v}.dt$

Q4.

Dans la base de Frenet :

- (a). \vec{N} est dirigé vers l'arrière (b). \vec{T} est vertical
 (c). \vec{N} est perpendiculaire à la trajectoire (d). \vec{T} est tangent à la trajectoire

Q5.

Dans la base de Frenet, l'accélération vaut :

- (a). $\frac{dv}{dt} \vec{T} - v \vec{N}$ (b). $\frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$
 (c). $\frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v}{R^2} \vec{N}$ (d). $\frac{dv}{dt} \vec{T}$

Q6.

La base cartésienne est une base fixe :

- (a). Vrai (b). Faux

Q7.

En coordonnées cartésiennes, le petit déplacement s'exprime comme :

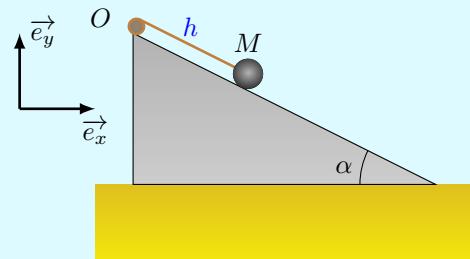
- (a). $(dx + dy + dz)\overrightarrow{OM}$ (b). $x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$
 (c). $\dot{x}.\vec{e}_x + \dot{y}.\vec{e}_y + \dot{z}.\vec{e}_z$ (d). $dx.\vec{e}_x + dy.\vec{e}_y + dz.\vec{e}_z$

 QCM : Position et vitesse

Un QCM pour travailler les projections. Sur chaque schéma, les valeurs en noir sont constantes et les valeurs en bleu sont des variables.

Q8.

Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude. Alors $\overrightarrow{OM} =$



- (a). $h(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (c). $h(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (b). $h(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (d). $h(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$

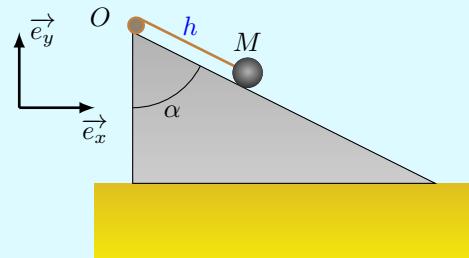
Q9.

et la vitesse de M vaut :

- (a). $\dot{h}(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (c). $\dot{h}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (b). $\dot{h}(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (d). $\dot{h}(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$

Q10.

Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude. Alors $\overrightarrow{OM} =$



- (a). $h(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (c). $h(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (b). $h(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (d). $h(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$

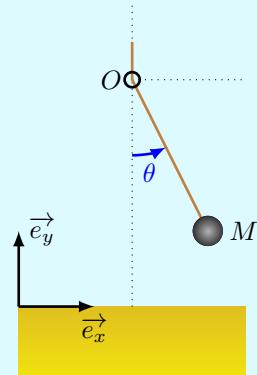
Q11.

et la vitesse de M vaut :

- (a). $\dot{h}(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (c). $\dot{h}(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$
 (b). $\dot{h}(-\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y)$
 (d). $\dot{h}(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$

Q12.

Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude, et $l = OM = cst$. Alors $\overrightarrow{OM} =$



- (a). $l \cos \theta \vec{e}_x - l \sin \theta \vec{e}_y$
 (c). $l \cos \theta \vec{e}_x + l \sin \theta \vec{e}_y$
 (b). $l \sin \theta \vec{e}_x - l \cos \theta \vec{e}_y$
 (d). $-l \sin \theta \vec{e}_x - l \cos \theta \vec{e}_y$

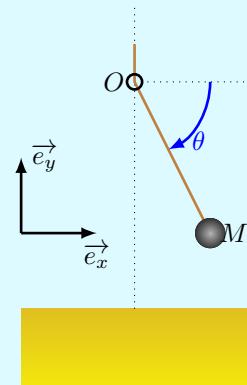
Q13.

et la vitesse de M vaut :

- (a). $\dot{l}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$
 (c). $\dot{l}\theta(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$
 (b). $l\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$
 (d). $l(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$

Q14.

Sur le schéma ci-contre, O est fixe dans le référentiel d'étude, et $l = OM = cst$. Attention, sur la figure, l'angle θ est négatif. Alors $\overrightarrow{OM} =$



(a). $l \cos \theta \vec{e}_x + l \sin \theta \vec{e}_y$
(c). $l \cos \theta \vec{e}_x - l \sin \theta \vec{e}_y$

(b). $l \sin \theta \vec{e}_x - l \cos \theta \vec{e}_y$
(d). $-l \sin \theta \vec{e}_x - l \cos \theta \vec{e}_y$

Q15.

et la vitesse de M vaut :

(a). $\dot{l}(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$
(c). $\dot{l}(\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$

(b). $l\dot{\theta}(\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$
(d). $l\dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$

✓ QCM : Mouvement uniformément accéléré ✗

Avant de démarrer ce QCM, il faut redémontrer que, si l'accélération est une constante a_0 , alors la vitesse vaut $v = v_0 + a_0 \cdot t$ et la distance parcourue vaut $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_0 t^2$. Attention, plusieurs réponses sont parfois possibles dans différentes unités.

Q16.

Une voiture démarre sans vitesse initiale et accélère avec une accélération $a = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ constante. Sa vitesse au bout de 10 s vaut :

(a). $18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
(c). $42 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

(b). $9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
(d). $65 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Q17.

et elle a alors parcouru une distance égale à :

(a). 61 m
(c). 162 m

(b). 120 m
(d). 90 m

Q18.

Une voiture roule à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Elle freine et subit une accélération constante $a = -7,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Le temps nécessaire pour s'arrêter vaut :

(a). 11 s
(c). 4,2 s

(b). 3 s
(d). 6,1 s

Q19.

et la distance d'arrêt vaut :

(a). 51 m
(c). 34 m

(b). 48 m
(d). 64 m

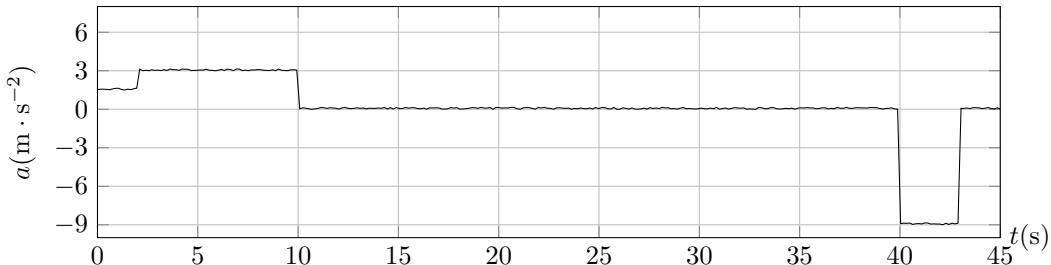
Cinématique du point

Exercices

réponses page 322

Exercice M1.1 : Graphe d'accélération d'une voiture [*]

Monsieur D. prend sa voiture et roule pendant 43 s. Un accéléromètre embarqué à bord enregistre les données représentées sur le graphique :



- Pour les domaines $0 < t < 2$ s, $2 < t < 10$ s, $10 < t < 40$ s et $40 < t < 43$ s, donnez l'expression de l'accélération $a(t)$.
- Déduisez-en la vitesse $v(t)$ sur chacun de ces domaines, puis la distance parcourue $s(t)$.
Attention ! pensez aux constantes d'intégration.
- Déduisez-en la distance totale parcourue. Commentez.

Exercice M1.2 : Arrêts avec décélération uniforme [**]

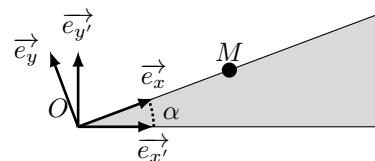
Dans cet exercice, on admet les formules d'un mouvement à accélération uniforme a qui sont $v(t) = v(0) + a.t$ et $d(t) = v(0).t + \frac{1}{2}a.t^2$ (avec $a < 0$ ici) où v est la vitesse et d la distance parcourue.

- Un pétrolier plein navigue à $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Suite à une avarie, on cherche à l'arrêter d'urgence. Il subit alors une décélération constante qui lui permet de s'arrêter au bout de 20 min. Calculez la décélération puis la distance parcourue.
- Une balle de fusil, tirée à une vitesse de $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, est interceptée par un sac de sable et s'y enfonce de 15 cm après avoir subi une décélération uniforme. Calculez cette décélération.
indication : soit t_a le temps d'arrêt de la balle, établissez un système d'équations vérifiées par t_a et a .

Exercice M1.3 : Mouvement sur un plan incliné [*]

Un objet M se déplace sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On note d la distance OM .

- Exprimez la position \overrightarrow{OM} , la vitesse et l'accélération de M dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , en fonction de d et de ses dérivées.
- Exprimez la position \overrightarrow{OM} , la vitesse et l'accélération de M dans la base (\vec{e}'_x, \vec{e}'_y) , en fonction de d et de ses dérivées, et de α .



Exercice M1.4 : Mouvement circulaire [*]

O est un point fixe du référentiel d'étude. M a un mouvement circulaire de centre O et de rayon R . On repère le point M par l'angle θ entre \vec{e}_x et \overrightarrow{OM} .

- Exprimez la position de M ; introduisez une base fixe (\vec{e}_x, \vec{e}_y) pour exprimer les coordonnées du vecteur en fonction de R et θ .
Calculez alors la vitesse et l'accélération de M en fonction de R , θ et ses dérivées.
- À quelle condition le mouvement est-il uniforme ?

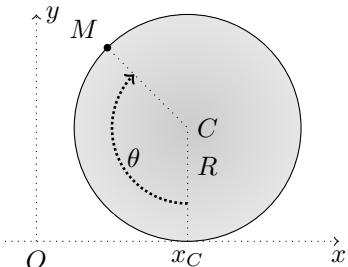
Montrez que, dans ce cas, l'accélération de M peut s'écrire $\vec{a} = \lambda \overrightarrow{OM}$ avec λ à exprimer.

Montrez aussi que, dans ce cas, $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$. Faites le lien avec la base de Frenet.

Exercice M1.5 : Trajectoire de la valve d'une roue de vélo [***]

Une roue de vélo, de rayon R et de centre C , roule sans glisser sur un axe Ox . Le mouvement de la roue est paramétrisé par l'angle $\theta(t)$ dont a tourné la roue à partir de sa position initiale.

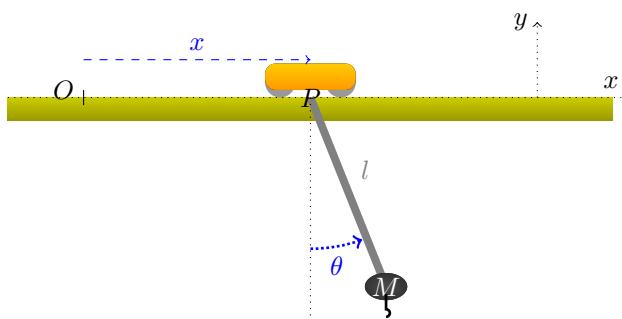
On admettra que l'abscisse x_c du centre de la roue est donnée par $x_c = -R\theta$.



1. Essayez de justifier la relation donnée pour x_c .
2. Quelles sont, en fonction de R et de θ , les coordonnées du point M correspondant à la valve de la roue (supposée située sur sa périphérie) ? le point O ?
3. La trajectoire de M est appelée une cycloïde. Tracez cette trajectoire sur une calculatrice, ou avec Python, pour θ allant de 0 à 4π ; une telle courbe où on connaît les fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ s'appelle une *courbe paramétrée*. Pour les valeurs numériques, on prendra $R = 1$.
4. Exprimez, en fonction de R , θ et ses dérivées, les composantes de la vitesse et de l'accélération de M .
5. Donnez les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de M au moment où celui-ci touche l'axe Ox ($\theta = 0$ [2π])).

Exercice M1.6 : Grue sur un portique [**]

Une grue est constituée d'un portique Ox fixe. Un chariot repéré par le point P peut glisser sur le portique. À ce chariot est suspendue un bras de longueur l au bout duquel se trouve un crochet repéré par le point M .



Dans cet exercice, on considère que $x = \overline{OP}$ et $\theta = \widehat{-\vec{e}_y, \overrightarrow{PM}}$ varient au cours du temps, tandis que $l = PM$ est constant.

1. Exprimez le vecteur position \overrightarrow{OM} sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y)
2. Exprimez la vitesse et l'accélération du point M sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y)
3. On suppose que le mouvement suit les lois $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ et $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$ avec x_0 , θ_0 , ω des constantes, et $\theta_0 \ll 1$
Déduisez-en l'expression de la vitesse et de l'accélération (on éliminera les termes en θ_0^2 qui sont très très petits).
4. À quelle condition sur x_0 et θ_0 le point M est-il immobile ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c) ET (d)

Q2.(d)

Q3.(d)

Q4.(d)

Q5.(b)

Q6.(a)

Q7.(d)

Réponses au QCM : Position et vitesse

Q8.(d)

Q9.(c)

Q10.(c)

Q11.(a)

Q12.(b)

Q13.(b)

Q14.(a)

Q15.(d)

Réponses au QCM : Mouvement uniformément accéléré

Q16.(a) ET (d)

$$v = a \cdot t$$

Q17.(d)

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

Q18.(b)

$$v = v_0 + a \cdot t = 22,2 - 7,3 \cdot t$$

Q19.(c)

$$s = 22,2 \cdot t - \frac{7,3}{2} t^2$$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M1.1 : Graphe d'accélération d'une voiture [*]

1. $a(t) = \begin{cases} 1,5 & \text{si } 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 0 & \text{si } 2 \text{ s} < t < 10 \text{ s} \\ -9 & \text{si } 10 \text{ s} < t < 40 \text{ s} \end{cases}$
2. On intègre deux fois en tenant compte de la continuité : $s(t) = \begin{cases} 0,75t^2 & \text{si } 0 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ 1,5t^2 - 3t + 3 & \text{si } 2 \text{ s} < t < 10 \text{ s} \\ 27t - 147 & \text{si } 10 \text{ s} < t < 40 \text{ s} \\ -4,5t^2 + 387t - 7347 & \text{si } 40 \text{ s} < t < 43 \text{ s} \end{cases}$
3. $s(43) = 973,5 \text{ m.}$

Réponses de l'exercice M1.2 : Arrêts avec décélération uniforme [**]

1. $a = -6,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et la distance d'arrêt vaut 5 km
2. $a = -3 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $t_a = 1 \text{ ms}$

Réponses de l'exercice M1.3 : Mouvement sur un plan incliné [*]

1. $\vec{OM} = d\vec{e}_x$ puis $\vec{a} = \ddot{d}\vec{e}_x$
2. $\vec{OM} = d \cos \alpha \vec{e}_{x'} + d \sin \alpha \vec{e}_{y'}$ puis $\vec{a} = \ddot{d} \cos \alpha \vec{e}_{x'} + \ddot{d} \sin \alpha \vec{e}_{y'}$

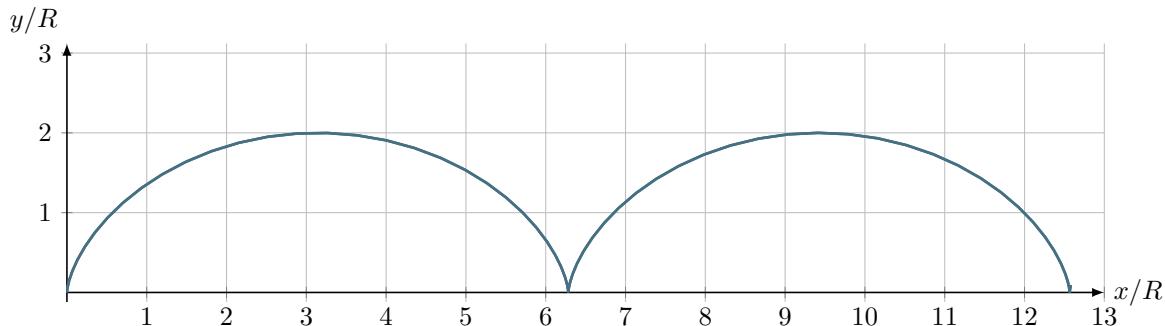
Réponses de l'exercice M1.4 : Mouvement circulaire [*]

Pensez à toujours faire un dessin.

1. $\vec{OM} = R(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$ puis $\vec{v} = R\dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$ et $\vec{a} = R\ddot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) + R\dot{\theta}^2(-\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y)$
2. Le mouvement est uniforme ssi $\dot{\theta} = cst.$
On a alors $\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM}$ et $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}$

Réponses de l'exercice M1.5 : Trajectoire de la valve d'une roue de vélo [***]

1. La roue roule sans glisser sur l'axe Ox , donc la distance parcourue est égale à l'arc de cercle \widehat{OM} .
2. $\vec{OM} = \begin{vmatrix} -R\theta + R \sin \theta \\ R(1 - \cos \theta) \end{vmatrix}$
- 3.



4. $\vec{v}(M) = \begin{vmatrix} R\dot{\theta}(-1 + \cos \theta) \\ R\dot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$ et $\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} R\ddot{\theta}(-1 + \cos \theta) - R\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ R\dot{\theta} \cos \theta + R\ddot{\theta} \sin \theta \end{vmatrix}$
5. $\vec{OM} = 2n\pi \vec{e}_x, \vec{v}(M) = \vec{0}, \vec{a}(M) = R\dot{\theta}^2 \vec{e}_y$

Réponses de l'exercice M1.6 : Grue sur un portique [**]

1. $\overrightarrow{OM} = (x + l \sin \theta) \overrightarrow{e}_x - l \cos \theta \overrightarrow{e}_y$
2. $\overrightarrow{v} = (\dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta) \overrightarrow{e}_x + l\dot{\theta} \sin \theta \overrightarrow{e}_y$
 $\overrightarrow{a} = (\ddot{x} + l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta) \overrightarrow{e}_x + (l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta) \overrightarrow{e}_y$
3. $\overrightarrow{v} = -(x_0 \omega + l\theta_0 \omega) \sin(\omega t) \overrightarrow{e}_x$
 $\overrightarrow{a} = -(x_0 + l\theta_0) \omega^2 \cos(\omega t) \overrightarrow{e}_x$
4. $x_0 = -l\theta_0$

Dynamique newtonienne

Cours

Le chapitre précédent nous a appris à repérer le mouvement d'un point ; cela se fait à l'aide de variables qui dépendent du temps. Maintenant que cela est fait, il va falloir déterminer la loi vérifiée par ces variables, et pour cela, il va falloir établir les équations différentielles vérifiées par ces variables : c'est l'objet de la dynamique.

Les lois de la dynamique les plus simples ont été établies par Newton. Elles expliquaient bien les phénomènes observés par ses prédécesseurs, Galilée et Képler. Néanmoins, les lois de la physique avançant, et les observations aussi, il est apparu à la fin du XIX^e siècle que les lois de la dynamique newtonienne ne s'appliquaient plus dans certains cas. Ces observations ont amené Einstein à proposer les lois de la mécanique relativiste. Ces lois amènent des corrections aux lois de Newton, mais qui ne sont sensibles que dans le domaine des grandes vitesses. Pour nous, cette année, nous nous contenterons de vitesses petites devant celles de la lumière, et les lois de Newton seront bien valables.

Les lois de Newton en mécanique sont au nombre de 3 ; nous n'en étudierons que deux dans ce chapitre.

De plus, pour le moment, nous n'étudierons que des objets petits, laissant l'étude des solides à plus tard.

Définition : Point matériel

Un point matériel est un objet de petite taille n'ayant pas de propriétés internes anisotropes, donc pas de direction privilégiée.

Par exemple, un électron peut être considéré comme un point matériel. Par contre, une molécule d'eau  a une direction particulière (l'axe de symétrie) qui fait qu'elle n'est pas modélisable par un point matériel.

Nous admettrons qu'un objet plus gros, tant que son mouvement de rotation est peu important, peut être modélisé aussi par un point matériel. Nous préciserons ce point plus tard dans l'année.

M2.A. Référentiels galiléens

La mécanique est un domaine de la physique très ancien, car les observations qui la concernent se font dans la vie de tous les jours. Néanmoins, ceux qui s'y sont penchés ont longtemps très mal compris les lois de la nature, à cause d'un postulat faux à la base. Ce postulat était le suivant : si on n'agit pas sur un objet, alors il est immobile.

Les savants grecs ont alors essayé tant bien que mal de répondre à cette question : pourquoi une flèche, une fois qu'elle a quitté son arc, continue-t-elle d'avancer, alors qu'on n'exerce plus de force sur elle ?

Il a fallu attendre Galilée et Newton pour comprendre que l'immobilité ne caractérise pas un objet qu'on laisse tranquille, mais plutôt la conservation de la vitesse qu'il a. La flèche a une vitesse initiale lorsqu'elle quitte l'arc, et s'il n'y avait ni frottements ni poids, elle continuerait ainsi sans jamais s'arrêter. Mais ce raisonnement ne convient que si on est capable de bien distinguer le référentiel dans lequel on travaille. En effet, on a tous constaté un jour que, si on est dans un véhicule qui freine, alors tous les objets qui sont libres de leurs mouvements partent vers l'avant. Ces objets, auparavant immobiles, sont soudain mis en mouvement dans le référentiel du véhicule, sans qu'une action extérieure agisse sur eux. Le référentiel d'un véhicule qui freine se comporte donc différemment du référentiel lié au sol.

Définition : Point matériel isolé

Un point matériel est isolé s'il n'est soumis à aucune interaction mécanique avec l'extérieur.

1ère loi de Newton ou Principe d'inertie

Il existe une classe de référentiels appelés *galiléens*, tels qu'un point matériel isolé a dans ces référentiels un mouvement rectiligne et uniforme $\vec{v} = cst$.

Le référentiel le plus courant dans lequel on va travailler est celui lié à la Terre (ou au sol). Ce référentiel est apparemment galiléen, comme on l'a illustré sur la question de la flèche. Néanmoins, une étude plus approfondie (sur les obus par exemple) montre qu'un projectile (en plus d'être freiné par les frottements avec l'air) a tendance à dévier de sa trajectoire pour aller vers la droite dans l'hémisphère nord (vers la gauche dans l'hémisphère sud), mais cet effet n'est sensible que sur des grandes distances. De même, l'expérience du pendule Foucault a prouvé que le référentiel lié à la Terre fait apparaître des phénomènes inattendus sur des expériences longues. Ces effets sont dus à la rotation de la Terre.

Définition : Référentiel terrestre

Le référentiel terrestre est le référentiel lié à la Terre.

Il est galiléen si l'on effectue des expériences de durée très petites devant 1 jour et sur des distances très petites devant le rayon de la Terre (qui vaut 6400 km).

En pratique, pour des durées inférieures à 15 min et des distances inférieures à 1 km, c'est bon.

Ce référentiel porte aussi parfois le nom de «référentiel du laboratoire» (sous-entendu, le laboratoire est accroché à la Terre et ne bouge pas...).

Si on veut étudier des phénomènes sur de grandes distances et de grandes durées, par exemple le mouvement d'un satellite autour de la Terre, il faudra se placer dans un référentiel différent :

Définition : Référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique est le référentiel lié au centre de la Terre et à 3 étoiles lointaines fixes (qui donnent 3 directions fixes).

Il est galiléen si l'on effectue des expériences de durée très petites devant 1 an et sur des distances très petites devant la distance Terre-Soleil (qui vaut 1 au, soit 150 000 000 km).

Ce référentiel tourne donc avec la Terre autour du Soleil, mais n'accompagne pas la Terre dans son mouvement de rotation sur elle-même.

Si enfin on veut étudier la rotation des planètes autour du Soleil, on peut utiliser :

Définition : Référentiel héliocentrique

Le référentiel héliocentrique est le référentiel lié au centre du Soleil et à 3 étoiles lointaines fixes.

Il est galiléen dans tous les cas qui nous intéresseront.

Le référentiel de Copernic est légèrement différent du référentiel héliocentrique, mais la distinction est trop compliquée pour le moment.

La figure M2.1 illustre les mouvements relatifs de ces trois référentiels ; les échelles ne sont bien sûr pas respectées.

FIGURE M2.1 – Référentiels héliocentrique (en bleu), géocentrique (en orange) et terrestre (en rouge).

M2.B. Principe fondamental de la dynamique

Une fois posé ce principe d'inertie, qui définit les référentiels dans lesquels nous allons faire de la dynamique (les référentiels galiléens), nous pouvons aller un peu plus loin que les points matériels isolés, et nous intéresser aux interactions mécaniques que peut subir ce point.

Définition : Force

Les interactions mécaniques s'appellent des forces. Une force est capable d'accélérer ou de freiner un point matériel, ou bien de dévier son mouvement.

Stevin, prédecesseur de Galilée, est le premier à avoir eu l'intuition qu'une force se comporte comme un objet mathématique bien connu : un vecteur ; on peut ajouter les forces comme des vecteurs. Ses expériences de pensée (figure M2.2) seront reprises et détaillées par d'autres auteurs, entre autres Varignon.

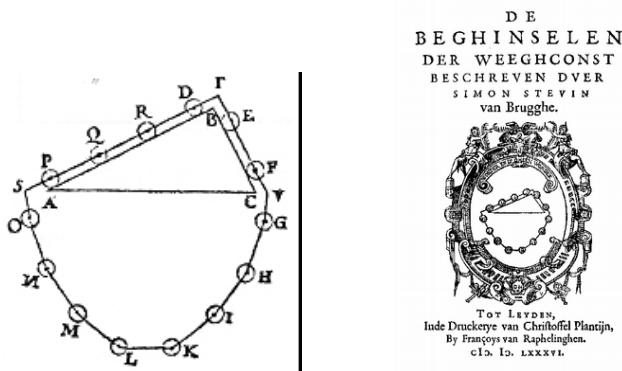


FIGURE M2.2 – L’expérience de pensée de Stévin : «clootcransbewijs» est à la base de l’utilisation des vecteurs pour représenter les forces. (Crédit : Wikipedia)

Propriété : Représentation des forces

Les forces peuvent être représentées par des vecteurs

Nous avons donc d’un côté un point matériel dont le mouvement est décrit par des vecteurs (position, vitesse, accélération) et de l’autre des forces qui sont aussi décrites par des vecteurs. Nous avons compris qu’une force *modifie* le mouvement, donc elle est reliée à l’accélération du point. Reste à expliquer pourquoi, quand je pousse un objet à roulettes comme un skate, il part avec une certaine vitesse, mais quand je pousse une voiture avec la même force, elle ne bouge que très peu.

Définition : Masse inerte

À tout objet matériel, on peut associer un scalaire ^a appelé *masse* qui caractérise la résistance qu’il offre à toute modification de son mouvement. Cette masse augmente avec la quantité de matière.

a. Un *scalaire* est un nombre, par opposition à un vecteur.

Remarque : On dit ici *masse inerte* car on verra plus tard l’existence d’une autre masse, la masse gravitationnelle. En terme de définition, ces deux masses n’ont rien à voir ; mais en pratique, elles sont rigoureusement égales. On parlera donc le plus souvent simplement de la masse d’un point.

Voilà donc la différence : la voiture a une masse bien supérieure au skate, donc il est beaucoup plus difficile de modifier son mouvement : si elle est immobile, il faut une grande force pour la pousser, et si elle avance, il faut une grande force pour l’arrêter. Ces considérations ont poussé Newton à émettre sa seconde loi :

Définition : Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d’un point matériel est le produit de sa masse par sa vitesse : $\vec{p} = m \vec{v}$

2ème loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces qui s’exercent sur un point matériel est égale à la dérivée de sa quantité de mouvement :

$$\frac{d(m \vec{v})}{dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{M2.1a})$$

Pour un système fermé (dont la quantité de matière est constante), $m = cst$ donc on obtient :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F} \quad (\text{M2.1b})$$

Remarque : On admet que, pour un objet non ponctuel, on peut appliquer le PFD pour décrire un point particulier de cet objet appelé son *centre de masse*. On précisera cela plus tard.

Remarque : Un point matériel est *pseudo-isolé* si la somme des forces qui s’exercent sur lui est **toujours nulle**. Dans ce cas, $\vec{a} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \vec{cst}$: son mouvement est rectiligne uniforme. C’est le cas par exemple d’un palet de curling sur la glace.

Remarque : Une position d'équilibre d'un point matériel est une position où, si on place le point matériel à cette position avec une vitesse nulle, il reste immobile. Cela implique que son accélération est nulle, donc que la somme des forces est nulle à cette position.

M2.C. Modèle pour quelques forces

Pour le moment, on connaît une loi reliant l'accélération à des forces, mais on ne sait exprimer aucune force. On va, dans ce qui suit, expliquer comment on a établi les modèles de quelques forces. Les raisonnements ne seront pas à connaître, il ne faut retenir que le résultat.

C.1. Poids

Galilée a effectué de nombreux essais de chute libre. Il en a tiré deux lois expérimentales :

- des objets de masses différentes tombent à la même vitesse
- un objet en chute libre parcourt en un temps t une distance proportionnelle à t^2

Si on place un axe z vertical vers le haut, on en déduit alors que $z \propto t^2$ donc $\dot{z} \propto t$ donc, en dérivant encore une fois, $\ddot{z} = cst$: l'accélération d'un objet en chute libre est donc constante, verticale et indépendante de la masse ; on va noter \vec{g} sa valeur.

Propriété : Poids

Tout objet à la surface de la Terre subit de la part de celle-ci une force de pesanteur (ou poids)

$$\text{poids} = m \vec{g} \quad (\text{M2.2})$$

avec \vec{g} un vecteur appelé *accélération de la pesanteur*, dirigé vers le bas et dont la norme vaut environ $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à nos latitudes.



FIGURE M2.3 – Galilée montrant la loi de la chute des corps à Don Giovanni de Medici. (Crédit : Museo Galilei)

C.2. Attraction gravitationnelle

Le poids n'est qu'une manifestation à la surface de la Terre d'une force d'attraction plus universelle entre tous les objets massifs. Pour trouver l'expression de la force d'attraction gravitationnelle, on peut partir de la troisième loi de Képler, qui dit que pour les planètes tournant autour du Soleil, la période de révolution au carré est proportionnelle au demi grand-axe (sorte de rayon moyen) au cube.

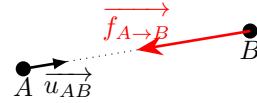
Considérons donc deux planètes, une de demi grand-axe a_1 , et l'autre de demi grand-axe k fois plus grand : $a_2 = k.a_1$. Notons T_1 et T_2 leurs périodes, alors $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_2^2}{k^3 a_1^3}$ donc $T_2^2 = k^3 T_1^2$ soit $T_2 = T_1 k^{3/2}$: pour la deuxième planète, le temps d'avancement sur la trajectoire est $k^{3/2}$ fois plus grand. Par conséquent, l'accélération de la deuxième planète est, par rapport à celle de la première, multipliée par $\frac{k}{(k^{3/2})^2}$: en effet, une accélération est une longueur divisée par un temps au carré. Au final, on constate que l'accélération a été multipliée par k^{-2} lorsque les distances ont été multipliées par k , ce qui indique que la force d'attraction gravitationnelle varie comme la distance puissance -2 .

D'autres observations montrent qu'elle est radiale (dirigée selon la direction allant de l'objet qui attire vers l'objet qui est attiré) et proportionnelle aux deux masses :

Force d'attraction gravitationnelle

Un objet A de masse m_A exerce sur un objet B de masse m_B une force gravitationnelle

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\frac{G m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB} \quad (\text{M2.3})$$



avec $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI (constante de gravitation universelle) et $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ un vecteur unitaire dirigé de A vers B. Cette force est toujours attractive.

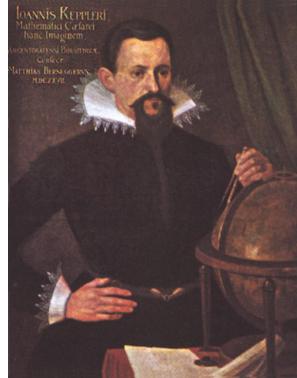


FIGURE M2.4 – Les mesures astronomiques de Tycho Brahe, complétées par Képler, ont permis à Isaac Newton d'établir la loi de l'attraction universelle. (*Crédit : Wikipedia/Kepler Museum/National Portrait Gallery*)

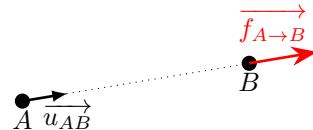
C.3. Force électrique

Lorsqu'on frotte certains objets comme une règle en plexiglass® (ou de l'ébonite au XVIII^e siècle), on constate qu'ils deviennent capables d'attirer des poussières ou de petits objets légers. On a compris qu'il apparaissait sur ces objets des *charges électriques*, et qu'il en existait de deux signes : positives ou négatives ; les charges de même signe se repoussent, tandis que les charges de signes opposés s'attirent. En transférant ces charges vers des boules métalliques, Charles-Augustin Coulomb a énoncé en 1786 la loi fondamentale de l'électrostatique :

Force d'attraction électrostatique ou Force de Coulomb

Un objet A de charge q_A exerce sur un objet B de charge q_B une force électrostatique

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{u}_{AB} \quad (\text{M2.4})$$



avec $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI une constante et $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB}$ un vecteur unitaire dirigé de A vers B. Cette force est attractive entre des charges de signes opposés, et répulsive entre des charges de même signe.

On reparlera plus en détail de cette loi dans un prochain chapitre sur les mouvements de particules chargées.

C.4. Poussée d'Archimède

Quand on lâche un objet dans l'air, il tombe, mais quand on le lâche dans l'eau, parfois il coule au fond, d'autres fois il flotte. La différence de comportement met en évidence une force qui s'oppose au poids.

Poussée d'Archimède

Tout objet au repos immergé dans un fluide (liquide ou gaz) subit une force appelée poussée d'Archimède, qui est égale à l'opposé du poids du fluide dont l'objet a pris la place.

Ainsi, un objet de volume V placé dans l'eau subira une poussée d'Archimède $\vec{F} = -\rho_{eau} \cdot V \cdot \vec{g}$ en notant ρ_{eau} la masse volumique de l'eau. Si on note ρ la masse volumique de l'objet, alors son poids vaut $\rho \cdot V \cdot \vec{g}$. On observe alors que :

- si $\rho > \rho_{eau}$ (objet plus dense que l'eau) le poids l'emporte et l'objet coule

- si $\rho < \rho_{eau}$ (objet moins dense que l'eau) la poussée d'Archimède l'emporte et l'objet flotte

C.5. Forces de frottements fluides

Les forces de frottements sont présentes dans tout système mécanique en mouvement. On distingue deux catégories de forces de frottements :

- les *frottements secs* entre deux solides
- les *frottements fluides* entre un solide et un fluide

Nous étudierons en détails les frottements secs dans le prochain chapitre. Pour ce qui est des frottements fluides, l'expérience montre que :

- la force de frottements est opposée au mouvement
- la force de frottements augmente avec la vitesse.

Une étude plus approfondie montre qu'il existe deux domaines de comportement différent pour cette force, en fonction de la vitesse :

Propriété : Force de frottements fluide

Un objet se déplaçant dans un fluide à la vitesse \vec{v} subit une force de frottements modélisable par la loi :

$$\vec{f}_{frottements} = \begin{cases} -\lambda \vec{v} & \text{à basse vitesse} \\ -\lambda \|\vec{v}\| \vec{v} & \text{à grande vitesse} \end{cases} \quad (\text{M2.5})$$

le coefficient λ dépendant de la forme de l'objet et de la nature du fluide.

Remarque : Nous n'avons pas pour le moment d'outils permettant de savoir où se situe la limite entre les deux modèles ; contentez-vous de la loi que l'énoncé vous donnera forcément.

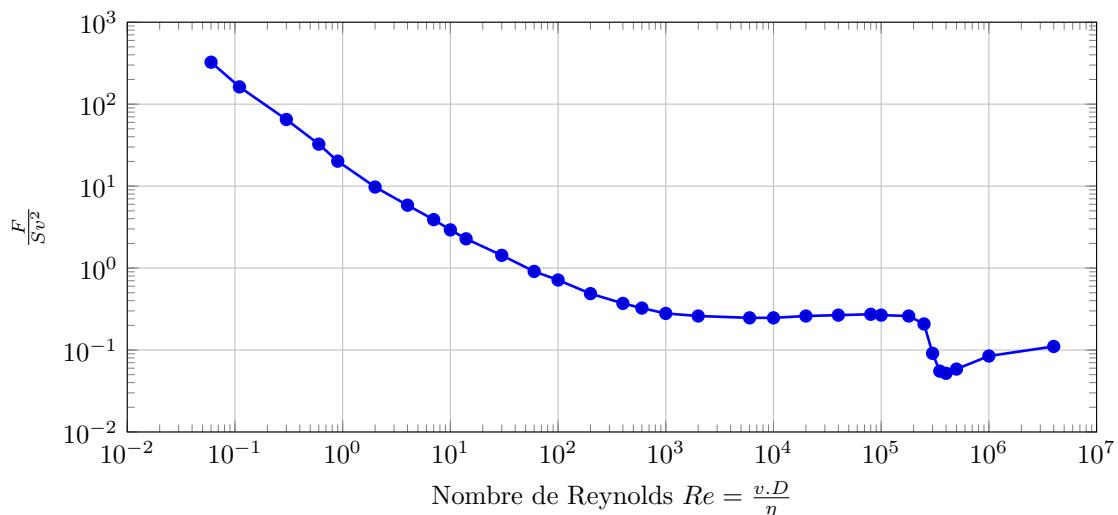


FIGURE M2.5 – Mesures expérimentales du rapport $\frac{\text{force de frottements}}{\text{vitesse}^2 \times \text{surface}}$ pour une sphère lisse, en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{\text{vitesse} \times \text{diamètre}}{\text{viscosité du fluide}}$. À basse vitesse, ce rapport varie comme $\frac{1}{v}$ donc la vitesse varie proportionnellement à v ; ensuite, ce rapport est constant, donc la vitesse varie comme v^2 ; à encore plus haute vitesse, cette loi reste vraie mais le coefficient de proportionnalité change.

C.6. Tension d'un ressort

Les ressorts sont des objets que nous allons beaucoup étudier, soit en tant que tels, soit comme modèles de forces plus compliquées ; nous verrons cela plus tard. Dans la vie de tous les jours, on trouve des ressorts dans les suspensions de véhicules, les serrures, les fixations diverses,... (figure M2.6). Nous ne nous occuperons pour le moment que des ressorts hélicoïdaux, nous reparlerons plus tard des ressorts spiraux (comme dans les montres).

Un ressort sert à exercer une force lorsque sa longueur est modifiée. La loi du ressort n'est pas une loi fondamentale de la physique, c'est une loi expérimentale obtenue à partir de mesures. Si on tire ou comprime le ressort avec différentes forces, et qu'on mesure sa longueur, on obtient un graphique qui a l'allure de la figure M2.7. On y constate 3 zones :

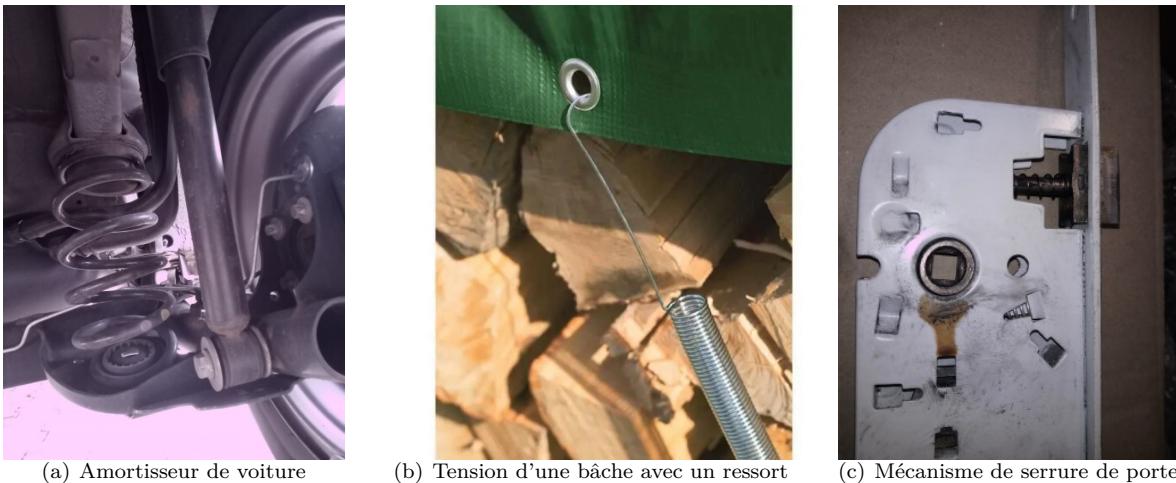


FIGURE M2.6 – Exemple de ressorts.

- pour des forces modérées, un *domaine élastique* où la force varie linéairement avec longueur ; dans ce domaine, si on lâche le ressort, il revient à sa longueur initiale ℓ_0
- pour des forces de traction trop fortes (supérieures à la limite élastique F_e), on passe dans le *domaine plastique*, où le ressort s'allonge beaucoup, la force n'augmentant quasiment plus ; si on lâche le ressort, il ne revient pas à sa longueur initiale, il a été irréversiblement déformé
- pour des forces de compression trop forte, les spires du ressort se touchent, et alors la longueur ne diminue plus.

Nous travaillerons cette année uniquement dans le domaine élastique, mais il est bon de savoir qu'il y a des limites à sa validité.

force exercée

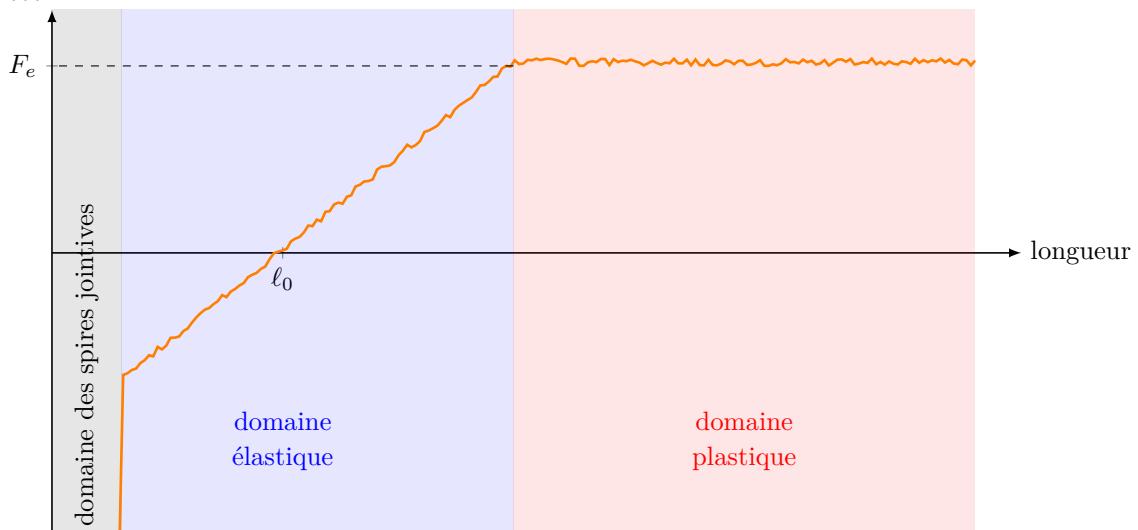


FIGURE M2.7 – Courbe de réponse d'un ressort en fonction de l'allongement.

Propriété : Tension d'un ressort

Pour des allongements faibles, un ressort exerce à chacun de ses deux bouts une force

$$\overrightarrow{f_{rappel}} = -k(\ell - \ell_0) \overrightarrow{u} \quad (\text{M2.6})$$

avec k la *raideur* du ressort (en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$), ℓ sa longueur, ℓ_0 sa *longueur au repos* (appelée aussi *longueur à vide*) et \overrightarrow{u} un vecteur unitaire dirigé du ressort vers le point d'application de la force ; son sens est tel qu'elle cherche à ramener le ressort vers sa longueur au repos.

La différence $\ell - \ell_0$ s'appelle *l'allongement* du ressort.

Remarque : Pourquoi ce – dans la formule ? Dans la figure M2.7 on a tracé la force avec laquelle on tire sur le ressort ; la force du ressort est opposée à celle-ci.

M2.D. Exemples

À l'aide des modèles de forces que nous avons introduits, nous allons étudier quelques exemples simples mais essentiels à connaître.

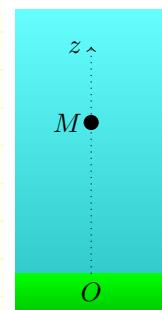
D.1. Chute libre sans frottements

Exemple : Chute libre sans frottements

À connaître

Un point M de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h . Il tombe en étant soumis uniquement à son poids (les frottements sont négligés) ; on prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour les AN.

1. Déterminer son accélération.
 2. En déduire $z(t)$.
 3. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre le sol ? quelle sera sa vitesse au sol ?
- AN pour $h = 30 \text{ m}$.



1. Même si ce problème est simple, il faut prendre l'habitude de bien rédiger les problèmes de mécanique en 5 points : définition du système, référentiel, étude cinématique, bilan des forces et PFD.

- Le système étudié est le point M
- On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
- Étude cinématique : le mouvement est unidimensionnel, selon l'axe \vec{e}_z , donc on a simplement $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$
- Bilan des forces : le point n'est soumis qu'à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- On applique alors le PFD : $m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$. On projette alors sur les axes de la base, ici il n'y a que \vec{e}_z . Projeter, c'est multiplier scalairement tous les termes par un des vecteurs de la base. Ici, on multiplie tous les termes par \vec{e}_z , et comme $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$, on obtient $m\ddot{z} = -mg$ soit $\ddot{z} = -g$

2. Le PFD peut donner deux types d'équations :

- les vraies équations différentielles, qui relient \ddot{z} à z ou à \dot{z} (ou aux deux) ;
- les «fausses équations différentielles», où on a simplement $\ddot{z} = \dots$ sans inconnues à droite.

Ici, on est dans le second cas ; il n'y a alors qu'à intégrer : $\dot{z}(t) = \dot{z}(0) + \int_0^t \ddot{z} dt = 0 + \int_0^t (-g) dt = -gt$ puis $z(t) = z(0) + \int_0^t \dot{z}(t) dt = h + \int_0^t (-gt) dt = h - \frac{1}{2}gt^2$.

3. Soit t_c le temps de chute, alors $z(t_c) = 0$ donc $h - \frac{1}{2}gt_c^2 = 0$ soit $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et $\dot{z}(t_c) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$.

AN : le temps de chute vaut 2,5 s et la vitesse au sol $24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vers le bas).

L'analyse de ce mouvement peut se faire en traçant les courbes $z(t)$ et $\dot{z}(t)$. Mais il existe un outil très performant – mais difficile à appréhender au début – le portrait de phase.

Définition : Portrait de phase

Pour un système possédant un seul degré de liberté, z par exemple, le *plan de phase* est le plan avec z en abscisse et \dot{z} en ordonnée.

Une *trajectoire de phase* est une courbe qui représente l'ensemble des points de coordonnée (z, \dot{z}) du système au cours du temps, pour une condition initiale donnée.

Un *portrait de phase* est un ensemble de trajectoires de phase permettant d'illustrer le comportement général du système étudié.

Voyons cela sur l'exemple de la chute libre sans frottements. On a vu la résolution du cas d'une chute depuis une altitude h sans vitesse initiale ; le point de départ dans le plan de phase est donc $(h, 0)$, sur l'axe des abscisses. Ensuite,

on peut calculer les valeurs de z et \dot{z} aux temps $t = 0,1\text{s}$; $t = 0,2\text{s}$; ...et à chaque fois placer les points correspondants sur le portrait de phase ; on obtient une courbe (figure M2.8(a)) dont on pourrait montrer qu'il s'agit d'une parabole¹.

En recommençant les mêmes calculs pour différentes conditions initiales, on voit apparaître petit à petit un portrait de phase complet (figure M2.8(b-d)).

(a) M est laché sans vitesse initiale

(b) M est laché sans vitesse initiale, mais de plus haut

(c) M est lancé vers le haut

(d) M est lancé plus fort vers le haut

FIGURE M2.8 – Construction du portrait de phase de la chute libre, par différentes simulations.

L'observation de ce portrait de phase nous permet d'énoncer quelques propriétés universelles à connaître des trajectoires de phase.

Propriété : Propriétés des trajectoires de phase

Les trajectoires de phase ont les propriétés suivantes :

- elles ne se croisent jamais
- elles tournent toujours dans le sens horaire
- elles coupent toujours l'axe des abscisses verticalement

1. Mais vous n'avez pas à savoir construire les trajectoires de phase, seulement à savoir les lire et les comprendre.

Démonstration

La première propriété est due à une propriété mathématique qu'on admet.

La deuxième et la troisième proviennent simplement du fait que l'ordonnée (\dot{z}) est la dérivée temporelle de l'abscisse (z). Du coup :

- quand le système est au-dessus de l'axe des abscisses, alors $\dot{z} > 0$ donc z augmente, donc le point part vers la droite
- quand le système est sur l'axe des abscisses, alors $\dot{z} = 0$ donc z ne change pas, donc le point ne peut se déplacer que verticalement
- quand le système est au-dessous de l'axe des abscisses, alors $\dot{z} < 0$ donc z diminue, donc le point part vers la gauche

D.2. Chute libre avec frottements

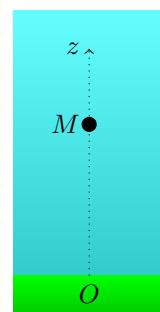
La chute libre sans frottements a donné lieu à une fausse équation différentielle de la forme $\ddot{z} = \dots$ qu'on a intégrée deux fois ; reprenons le même problème avec des frottements linéaires.

Exemple : Chute libre avec frottements linéaires

À connaître

Un point M de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h . Il tombe en étant soumis à son poids et à une force de frottements de la forme $-\lambda \vec{v}$ avec λ une constante.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par z .
2. On pose $v = \dot{z}$; déterminer l'équation différentielle vérifiée par v , et en déduire $v(t)$.
3. En déduire $z(t)$.



1. On procède comme précédemment :

- Le système étudié est le point M
- On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
- Étude cinématique : le mouvement est unidimensionnel, selon l'axe \vec{e}_z , donc on a simplement $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$
- Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ et à la force de frottements $-\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z}\vec{e}_z$
- On applique alors le PFD : $m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z - \lambda \dot{z}\vec{e}_z$. On projette sur \vec{e}_z : $m\ddot{z} = -mg - \lambda \dot{z}$ soit $m\ddot{z} + \lambda \dot{z} = -mg$

2. Cette ED est d'ordre 2 en z , mais comme z tout seul n'y apparaît pas, on pose $v = \dot{z}$ et on trouve $m\dot{v} + \lambda v = -mg$ soit $\tau \dot{v} + v = -\tau g$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$: une ED d'ordre 1, plus facile à résoudre.

La solution particulière constante est $v = -\tau g$.

La solution générale de l'équation homogène est de la forme $v = K e^{-t/\tau}$.

Donc $v = -\tau g + K e^{-t/\tau}$. Or $v(0) = 0$ donc $-\tau g + K = 0$ soit $K = \tau g$.

On a donc $v(t) = \tau g (e^{-t/\tau} - 1)$

3. $v = \dot{z}$ donc en intégrant : $z(t) = z(0) + \int_0^t v(t).dt = h + \int_0^t \tau g (e^{-t/\tau} - 1) dt = h + \tau g [-\tau e^{-t/\tau} - t]_0^t$ soit finalement $z(t) = h + \tau g [\tau - \tau e^{-t/\tau} + t]$

Après, on peut effectuer différents calculs avec cette formule : temps de chute,... L'allure du portrait de phase est représenté sur la figure ci-dessous. On voit l'effet des frottements, qui rend la courbe asymétrique entre le haut et le bas.

Le portrait de phase de la chute libre avec frottements est représenté sur la figure M2.9 ; on voit que les courbes convergent vers l'asymptote $\dot{z} = -\tau g$

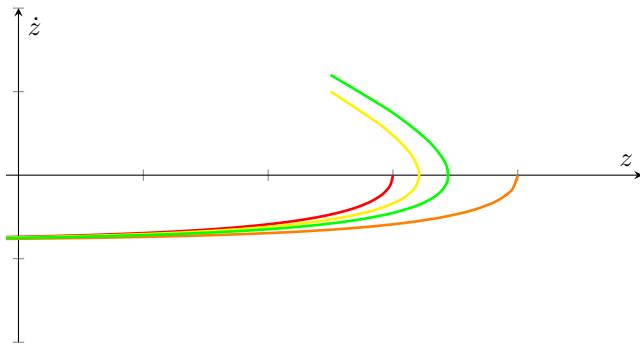


FIGURE M2.9 – Portrait de phase de la chute libre avec frottements linéaires.

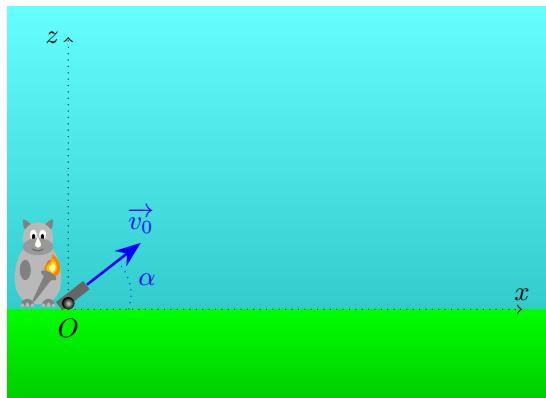
D.3. Tir balistique

Reprendons le cas d'une chute sans frottements, mais maintenant dans le cas d'un mouvement en 2D : une vitesse initiale horizontale non nulle est communiquée au point M . C'est le principe du tir balistique.

Exemple : Tir balistique

À connaître

Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



On prend l'origine O du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Établir les équations différentielles du mouvement.
2. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$?
En déduire alors $x(t)$ et $z(t)$ par intégration des ED précédentes.
3. En éliminant la variable temps, établir l'équation de la trajectoire sous la forme $z(x)$. À quelle courbe cela correspond-il ?

-
1. On procède comme précédemment :

- Le système étudié est le point M
- On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
- Étude cinématique : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{z}\vec{e}_z$
- Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
- On applique alors le PFD : $m\ddot{x}\vec{e}_x + m\ddot{z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$. On projette sur les deux axes du repère :
 - projection sur \vec{e}_x : $m\ddot{x} = 0$
 - projection sur \vec{e}_z : $m\ddot{z} = -mg$

Donc les deux équations du mouvement sont $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{z} = -g$

2. Initialement, on a $x(0) = z(0) = 0$ (car on est à l'origine du repère). La vitesse initiale \vec{v}_0 se projette selon les deux axes : $\vec{v}_0 = v_0(\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$ donc $\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha$ et $\dot{z}(0) = v_0 \sin \alpha$.

Avec ces CI, on peut intégrer les équations précédentes :

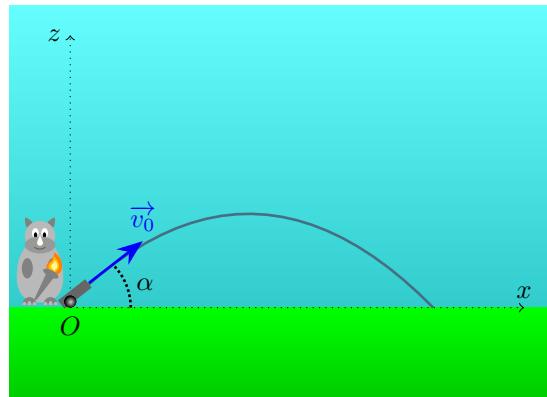
- on a vu que $\ddot{x} = 0$ donc $\dot{x} = \dot{x}(0) + \int_0^t 0.dt = v_0 \cdot \cos \alpha$ puis $x = x(0) + \int_0^t v_0 \cos \alpha dt = v_0 \cos \alpha t$
- on a vu que $\ddot{z} = -g$ donc $\dot{z} = \dot{z}(0) + \int_0^t (-g).dt = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$ puis $z = z(0) + \int_0^t (v_0 \sin \alpha - g \cdot t)dt = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$

On a donc $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$ et $z(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$

3. On peut en déduire que $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ et remplacer cela dans z pour trouver $z = v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$
soit

$$z = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

ce qui est l'équation d'une parabole.



Les équations différentielles d'ordre 2 obtenues peuvent évidemment être aussi résolues numériquement grâce à la méthode d'Euler. Cela permet d'étudier des modèles plus réalistes, en prenant en compte par exemple les frottements.

D.4. Masse-ressort vertical

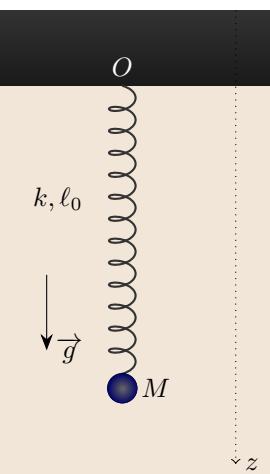
Le dernier exemple à connaître est celui du masse-ressort vertical.

Exemple : Masse-ressort vertical

À connaître

Un objet M de masse m est suspendu au plafond par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On note son altitude par z comptée vers le bas à partir du plafond (point O).

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par z .
2. Quelle est la position d'équilibre ?
3. Déterminer $z(t)$ si $z(0) = \ell_0$ et $\dot{z}(0) = 0$.



1. Toujours la même méthode :

- Le système étudié est le point M
- On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
- Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$ donc $\overrightarrow{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ et $\overrightarrow{a} = \ddot{z}\vec{e}_z$

- Bilan des forces : le point est soumis à son poids $m\vec{g} = +mge_z^{\rightarrow}$ (attention au signe, \vec{e}_z est vers le bas) et à la force du ressort : le ressort a pour longueur z et le vecteur qui va du ressort vers M est le vecteur $+e_z^{\rightarrow}$, donc la force du ressort vaut $-k(z - \ell_0)\vec{e}_z^{\rightarrow}$.
- On applique alors le PFD : $m\ddot{z}\vec{e}_z^{\rightarrow} = mge_z^{\rightarrow} - k(z - \ell_0)\vec{e}_z^{\rightarrow}$. On projette sur \vec{e}_z^{\rightarrow} et on trouve $m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0)$ soit

$$m\ddot{z} + kz = k\ell_0 + mg$$

2. À l'équilibre, $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$ donc $kz = k\ell_0 + mg$ soit $z = \ell_0 + \frac{mg}{k}$: le ressort est un peu tendu.

3. La solution particulière constante est $z = \ell_0 + \frac{mg}{k}$. L'équation homogène est de la forme $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Les solutions de cette équation sont de la forme $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. On a donc $z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

On sait que $z(0) = \ell_0$ donc $\ell_0 = \ell_0 + \frac{mg}{k} + A$ soit $A = -\frac{mg}{k}$.

On sait que $\dot{z}(0) = 0$ or $\dot{z} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$ donc $\dot{z}(0) = B\omega_0$ d'où on tire $B = 0$.

Finalement :

$$z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} (1 - \cos(\omega_0 t))$$

La figure M2.10 montre le portrait de phase correspondant ; il est constitué d'ellipses de même centre, parcourues dans le sens horaire.

FIGURE M2.10 – Portrait de phase du masse-ressort vertical.

Dynamique newtonienne

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Quantité de mouvement	
Masse.	
Quantité de mouvement d'un point matériel.	
Lois de Newton	
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Notion de force.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Équilibre d'un système.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, écriture adimensionnée, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force à l'aide d'un microcontrôleur ou de l'analyse d'un mouvement enregistré.
Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire.
Modèle linéaire d'une force de frottements fluides. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.

Dynamique newtonienne

QCMs

réponses page 347

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1.

Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé a une vitesse :

- (a). nulle (b). constante

Q2.

Le référentiel terrestre est approximativement galiléen si l'expérience étudiée a lieu :

- (a). sur des distances inférieures à 1 km
(c). sur des durées inférieures à 1 j

(b). sur des durées inférieures à 15 min
(d). sur des distances inférieures à 10 000 km

Q3.

Le poids d'un objet de masse m :

- (a). est vertical
 (c). vaut $m \cdot \vec{g}$ (b). ne dépend pas de m
 (d). est dirigé vers le bas

Q4.

La tension d'un ressort sur un point M :

- (a). ramène le ressort vers sa longueur à vide
 (b). est proportionnelle à son allongement
 (c). est proportionnelle à sa longueur
 (d). est toujours dirigée de M vers le ressort

Q5.

Quand on veut appliquer le PFD, on doit toujours faire l'étude cinématique **avant** le bilan des forces :

Dynamique newtonienne

Exercices

réponses page 348

Exercice M2.1 : Chute d'un caillou dans l'eau [**]

Un caillou ayant la forme d'une sphère de rayon $R = 0,6 \text{ mm}$ et de masse volumique $\mu = 3500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ tombe dans l'eau ; il entre dans l'eau (altitude $z = 0 \text{ m}$) au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale $-v_0 \vec{e}_z$ avec \vec{e}_z l'axe vertical vers le haut et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il est alors soumis à trois forces : son poids, la poussée d'Archimède et une force de frottements qui s'écrit $-6\pi R\eta \vec{v}$ où \vec{v} représente sa vitesse et $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ USI}$.

Tout le mouvement est vertical dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Calculez la masse m du caillou.

Indication : si vous ne connaissez pas le volume d'une sphère, il faut vite l'apprendre.

2. La poussée d'Archimède sur le caillou est égale à l'opposé du poids correspondant à une sphère d'eau (masse volumique $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) de rayon R .

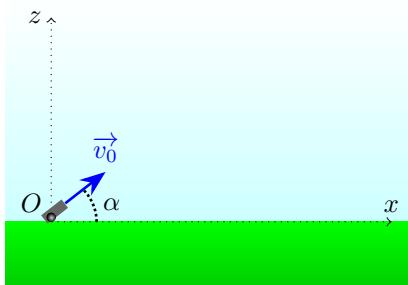
Calculez numériquement la masse m_e de cette sphère d'eau. La poussée d'Archimède s'écrit alors $m_e \cdot g \cdot \vec{e}_z$.

3. En appliquant le PFD au caillou, établissez l'ED vérifiée par son altitude z .
4. On pose $w = \dot{z}$; déterminez l'ED vérifiée par $w(t)$ puis résolvez-la.
5. Déduisez-en $z(t)$.
6. Calculez numériquement le temps mis par le caillou pour atteindre le fond à $2,6 \text{ m}$ de profondeur, et la vitesse qu'il a à ce moment-là.

Exercice M2.2 : Tir balistique [**]

Cet exercice reprend l'exemple du cours, mais pousse les calculs plus loin.

Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



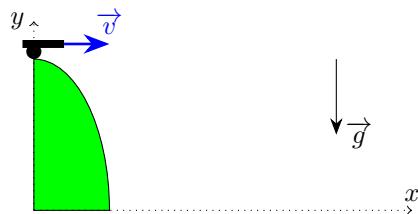
On prend l'origine O du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Établir les équations différentielles du mouvement.
2. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$?
En déduire alors $x(t)$ et $z(t)$ par intégration des ED précédentes.
3. En éliminant la variable temps, établir l'équation de la trajectoire sous la forme $z(x)$. À quelle courbe cela correspond-il ?
4. Exprimez la portée de la trajectoire, c'est-à-dire la distance à laquelle l'objet touchera le sol.
Si v_0 est fixé, et qu'on peut faire varier l'angle α , quelle portée maximale peut-on atteindre ? pour quel angle de tir ?
5. Exprimez la flèche de la trajectoire, c'est-à-dire la hauteur maximale atteinte.
Quelle hauteur maximale peut-on atteindre à v_0 fixé ? pour quel angle ?
6. On désire atteindre une cible de coordonnées (x_c, z_c) . On suppose que v_0 est fixé, et qu'on peut agir uniquement sur l'angle de tir.
 - (a) En écrivant que le point cible doit faire partie de la trajectoire, trouvez une équation sur α .

- (b) Pour la résoudre, exprimez $\cos^2 \alpha$ en fonction de $\tan \alpha$, et mettez l'équation précédente sous la forme d'une équation du second degré en $\tan \alpha$.
- (c) En exprimant la condition pour que l'équation du second degré ait une solution, montrez que :
- si la cible est en-dessous d'une certaine courbe, il existe deux angles de tir possible (appelés tir tendu ou direct, et tir en cloche).
 - si la cible est exactement sur cette courbe, il existe un seul angle possible.
 - si la cible est au-dessus de cette courbe, on ne peut pas l'atteindre.
- Cette courbe s'appelle la parabole de sûreté ; on en donnera l'équation.

Exercice M2.3 : Tir horizontal [**]

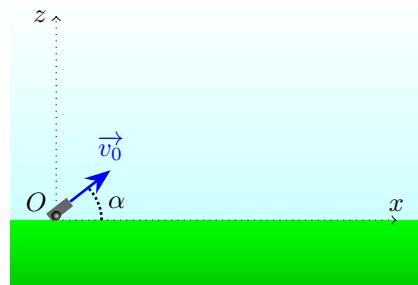
Un boulet de canon est lancé avec une vitesse \vec{v}_0 horizontale d'une hauteur h . On néglige les frottements.



1. Établissez les équations de la trajectoire : $x(t)$ et $y(t)$.
2. À quelle distance va-t-il toucher le sol, et à quel instant t_1 ?
3. On va simuler cela avec Python. Quels tableaux de variables va-t-on créer ? Quel est le schéma d'Euler associé ?
Choisissez un pas temporel à partir de t_{sol} , puis simulez le tir entre 0 et t_{sol} , pour $h = 50\text{ m}$ et $v_0 = 400\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. Ajoutez des frottements de la forme $-\lambda \vec{v}$ avec $\lambda = 0,5\text{ USI}$ et observez la nouvelle trajectoire.

Exercice M2.4 : Tir balistique avec frottements de l'air [**]

Un canon tire un obus de masse m (considéré comme un point matériel) avec une vitesse initiale \vec{v}_0 de norme v_0 ; la direction de tir fait un angle α avec l'horizontale.



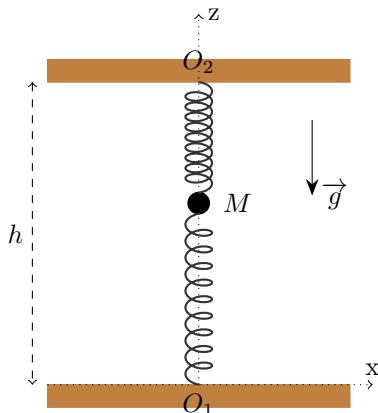
On prend l'origine du repère au point où l'obus est tiré, et les axes comme indiqué sur la figure. Le référentiel terrestre est galiléen. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. On suppose que l'obus subit une force de frottements de l'air qu'on peut modéliser ainsi : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ avec \vec{v} sa vitesse.

1. Écrivez les équations différentielles du mouvement.
2. Écrivez la forme générale des solutions $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$.
3. Que valent les conditions initiales $x(0)$, $z(0)$, $\dot{x}(0)$ et $\dot{z}(0)$? Déduisez-en alors $\dot{x}(t)$ et $\dot{z}(t)$, puis $x(t)$ et $z(t)$.
4. On prend pour les AN : $m = 15\text{ kg}$, $v_0 = 250\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 35^\circ$, $\lambda = 1,2\text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
 - (a) Calculez numériquement le temps caractéristique qui apparaît dans l'exponentielle.
 - (b) Résolvez numériquement sur votre calculatrice l'équation $z(t) = 0$ pour trouvez le temps t où l'obus touchera le sol.
 - (c) Déduisez-en la portée de ce tir. Comparez avec la portée dans le cas où il n'y a pas de frottements.

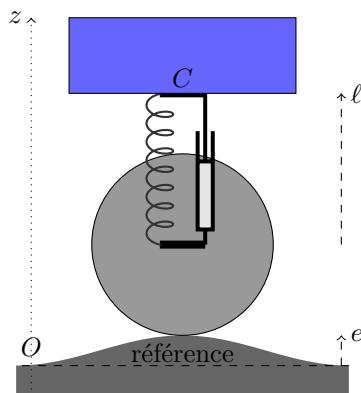
Exercice M2.5 : Masse entre deux ressorts [**]

Deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur au repos l_0 , sont suspendus l'un au plafond à l'altitude h , l'autre au sol d'altitude nulle. Leurs extrémités sont jointes, et une masse m y est accrochée. Elle est repérée par la distance z au-dessus du sol. Le référentiel terrestre est galiléen. On suppose que la masse ne bouge que verticalement (axe \vec{e}_z).

- Exprimez la force exercée par chaque ressort sur la masse.
- Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par z .
- Déterminez d'équilibre z_e de la masse, et la période des oscillations.
- Résolvez $z(t)$ si $z(0) = \frac{h}{2}$ et $\dot{z}(0) = 0$.



Exercice M2.6 : Suspension de voiture [***]



Les irrégularités du sol, transmises à une voiture via ses roues, sont filtrées par une suspension reliant la roue à la caisse de la voiture. Pour étudier une seule de ces suspensions, on va travailler sur un quart de la voiture. Entre le quart de voiture (en haut, de masse $m = 300 \text{ kg}$) et la roue en bas (de rayon $R = 20 \text{ cm}$), on place un ressort (de raideur k et de longueur à vide $\ell_0 = 34 \text{ cm}$) et un amortisseur (composant qui exerce une force proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de sa longueur et opposée au mouvement ; on notera f le coefficient de proportionnalité).

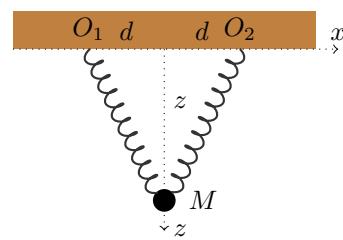
On note ℓ la longueur du ressort (et aussi de l'amortisseur) et e l'altitude de la route par rapport à une altitude de référence. Ces deux paramètres sont des fonctions du temps, e est imposé par la route et ℓ est une inconnue qu'on étudie. On tiendra compte du poids de la voiture. L'axe z est vertical, vers le haut. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Exprimez l'altitude z du bas de la caisse (point C) par rapport à l'altitude de référence, en fonction de e , R et ℓ . Exprimez alors la position, la vitesse et l'accélération de la caisse dans le référentiel terrestre.
- Grâce au PFD projeté selon \vec{e}_z , établissez l'ED vérifiée par ℓ ; elle dépendra de e au second membre.
- Exprimez la pulsation propre T_0 de ce système. Calculez k pour avoir $T_0 = 0,5 \text{ s}$.
- Quelle valeur f_0 de f permet d'avoir un retour à l'équilibre le plus rapide possible lors d'une perturbation ?
- Si la voiture est au repos, que vaut la longueur à l'équilibre ? on la notera ℓ_{eq} .
- On règle $f = 1,2f_0$. La voiture aborde un dos d'âne de forme parabolique ; on a alors $e(t) = e_0 - \alpha(t-t_1)^2$ avec $\alpha = 80 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ (les autres paramètres importent peu ici). Les conditions initiales sont $\ell(0) = \ell_{eq}$ et $\dot{\ell}(0) = 0$. Calculez la solution numérique complète de l'ED.
- Reprendre la même question si la voiture est lourdement chargée : $m = 460 \text{ kg}$ désormais.

Exercice M2.7 : Masse suspendue à deux ressorts [***]

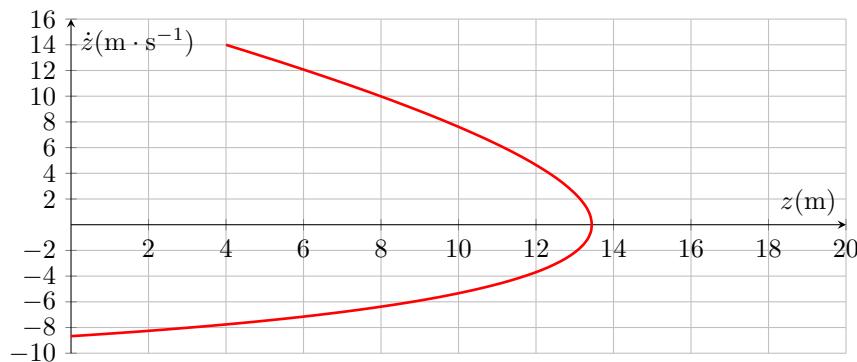
Deux ressorts identiques, de raideur k et de longueur au repos l_0 , sont suspendus au plafond, séparés d'une distance $2d$. Leurs extrémités sont jointes, et une masse m y est accrochée. Elle est repérée par la distance z au plafond. Le référentiel lié au plafond est galiléen. On suppose que la masse reste sur la médiatrice des deux points de fixation des ressorts, et ne se déplace que suivant l'axe \vec{e}_z vertical.

- Exprimez la force exercée par chaque ressort sur la masse.
Conseil : pour le ressort i , commencez par exprimer $\overrightarrow{O_iM}$, puis O_iM .
- Écrivez le PFD projeté sur \vec{e}_z . L'ED obtenue est-elle linéaire ?
- Écrivez l'équation vérifiée par la position d'équilibre z_e de la masse.



Exercice M2.8 : Lecture d'une trajectoire de phase [*]

On lance un objet verticalement et on trace sa trajectoire dans le plan de phase où z représente son altitude au-dessus du sol.

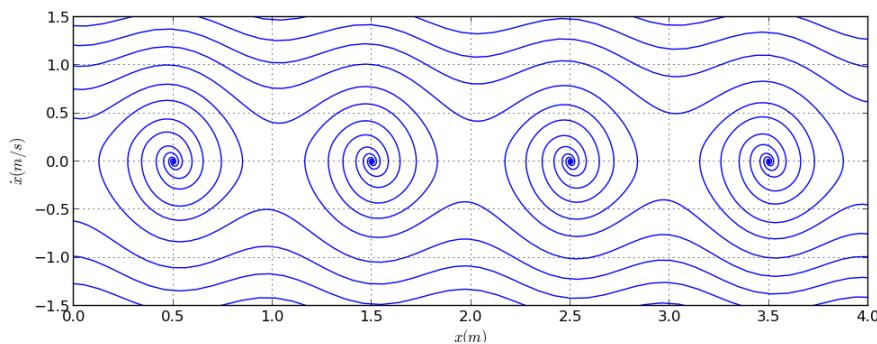


1. Décrivez brièvement le mouvement.
2. Mesurez l'altitude et la vitesse initiale.
3. Mesurez l'altitude maximale atteinte, et la vitesse au sol.

Exercice M2.9 : Portrait de phase [**]



Un point matériel se déplace sur un support ondulé. Il est soumis à des frottements. Le portrait de phase calculé par ordinateur est donné ci-dessous :



1. On lance un objet depuis $x = 0$ avec une vitesse égale à $0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Décrivez le mouvement.
 2. On lance un objet depuis $x = 0$; quelle vitesse doit-on approximativement lui donner pour qu'il aille se bloquer dans le trou $x = 2,5 \text{ m}$?
- Si on le lance de $x = 1 \text{ m}$, quelle vitesse doit-on donner ?

Exercice M2.10 : Chute d'un pot de fleurs [***]

Exercice totalement inutile, mais si vous aimez les casse-tête...

Vous voyez tomber un pot de fleur par votre fenêtre. Réflexe de physicien : vous estimatez qu'il met $\Delta t = 0,10 \text{ s}$ pour parcourir les $l = 1,4 \text{ m}$ de hauteur de votre fenêtre.

De quelle altitude a-t-il été lâché ?

* Dynamique newtonienne *

TDs numériques

réponses page 351

TD numérique : Chute avec frottements quadratiques

Dans ce TD, on travaille sur un objet de masse m qui se déplace dans l'air en étant soumis :

- à son poids $-m.g.\vec{e}_z$ avec \vec{e}_z vertical vers le haut
- à une force de frottements $-\lambda \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$

1. Chute verticale avec frottements

On considère un grêlon de masse $m = 17\text{ g}$ qui tombe verticalement depuis une altitude $h = 600\text{ m}$ sans vitesse initiale. On prendra $\lambda = 9,2 \times 10^{-4}\text{ USI}$.

- (a) Établir l'équation différentielle

$$\ddot{z} + k \cdot |\dot{z}| \cdot \dot{z} = -g \quad (\text{M2.7})$$

avec k à déterminer.

- (b) Résoudre $z(t)$ par une méthode d'Euler. On prendra un pas de $0,1\text{ s}$ et une durée de simulation initiale de 20 s , qu'on ajustera ensuite pour que le grêlon arrive au sol.
(c) Que vaut la vitesse limite, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$?
(d) Tracer la trajectoire de phases $\dot{z}(z)$.

2. Tir balistique avec frottements

On reprend maintenant l'exemple du tir balistique vu en cours, avec une position initiale $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ et une vitesse initiale $\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{e}_x + v_0 \sin \alpha \vec{e}_z$; on prendra un obus de masse $m = 7\text{ kg}$ tiré avec une vitesse initiale $v_0 = 1500\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et un angle $\alpha = 40^\circ$. On prendra $\lambda = 3 \times 10^{-3}\text{ USI}$.

- (a) Établissez les équations :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{x} = 0 \quad (\text{M2.8})$$

$$\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \cdot \dot{z} = -g \quad (\text{M2.9})$$

- (b) Résolvez $x(t)$ et $z(t)$ par une méthode d'Euler avec un pas de $0,01\text{ s}$.
(c) Tracez la trajectoire, mesurez sa portée.
(d) Tracez la courbe donnant la portée de la trajectoire en fonction de l'angle.

TD numérique : Portraits de phase

Ce TD implémente des méthodes qui ne sont pas essentielles.

1. Portrait de phase de la chute libre

Un objet de masse m est repéré par son altitude z ; il n'est soumis qu'à son poids.

- (a) En appliquant le PFD, déterminez \ddot{z} .
(b) Dans le plan de phase, l'état du système à un instant t est repéré par un point de coordonnées (z, \dot{z}) . Pour savoir comment ce point va évoluer, on regarde où il sera à un instant dt ultérieur :
- sa position z aura varié de $dz = \dot{z} \cdot dt$
 - sa vitesse \dot{z} aura varié de $d\dot{z} = \ddot{z} \cdot dt$

Il suffit donc de tracer le vecteur de coordonnées (\dot{z}, \ddot{z}) : cela se fait à l'aide d'une *carte de champ*. Le principe est le suivant :

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 # création des listes d'abscisses et d'ordonnées où on veut tracer le portrait
4 tab_z=np.linspace(zmin,zmax,nb_de_points_z)
5 tab_zpoint=np.linspace(zpointmin,zpointmax,nb_de_points_zpoint)

```

```

6 # création de deux grilles contenant les coordonnées des points
7 mesh_z,mesh_zpoint=np.meshgrid(tab_z,tab_zpoint)
8 # calcul des valeurs de zpointpoint sur cette grille
9 mesh_zpointpoint=... # calcul à écrire
10 plt.plot()
11 # tracé: les coordonnée des points, puis les coordonnées des vecteurs
12 plt.quiver(mesh_z,mesh_zpoint,mesh_zpoint,mesh_zpointpoint)
13 plt.show()

```

Modifiez ce programme pour tracer la carte de champ correspondant au portrait de phase de la chute libre, pour z compris entre 0 m et 10 m et \dot{z} entre $-20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Remarque : pour créer un tableau de même dimension que `mesh_z` mais ne contenant que des 1, on peut utiliser la commande `np.ones_like(mesh_z)`.

- (c) Avec cette méthode, on imagine les trajectoires de phase, mais si on veut les tracer, on peut utiliser la commande `streamplot` à la place de `quiver`. Faites-le et observez le résultat.

Remarque : on pourra ajouter un paramètre optionnel `density` qui contrôle la densité de lignes ; sa valeur par défaut est 1, ne dépassiez pas 3.

- Tracez de même le portrait de phase de la chute libre avec frottements quadratiques de la forme $-f \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$; on testera différentes valeurs du rapport f/m .

- Tracez le portrait de phase d'un masse-ressort tel que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$, sans frottements.

- Deux atomes d'une molécule diatomique sont reliés par une force qu'on peut modéliser ainsi :

$$\frac{F}{m} = -\frac{4,2 \times 10^{13}}{r^7} + \frac{2,4 \times 10^{10}}{r^{13}}$$

où r est la distance en nm entre les atomes.

Tracez le portrait de phase de ce système pour r compris entre 0,1 nm et 1 nm, et les vitesses entre $\pm 4 \times 10^8 \text{ nm} \cdot \text{s}^{-1}$. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a) ET (b)

Q3.(a) ET (c) ET (d)

Q4.(a) ET (b)

Q5.(a)

TOUJOURS, et cela pour deux raisons. D'abord, l'étude cinématique permet de poser la base dans laquelle il faudra projeter les forces ; ensuite, les forces peuvent faire intervenir la position ou la vitesse de l'objet étudié, auquel cas on a besoin de l'étude cinématique.

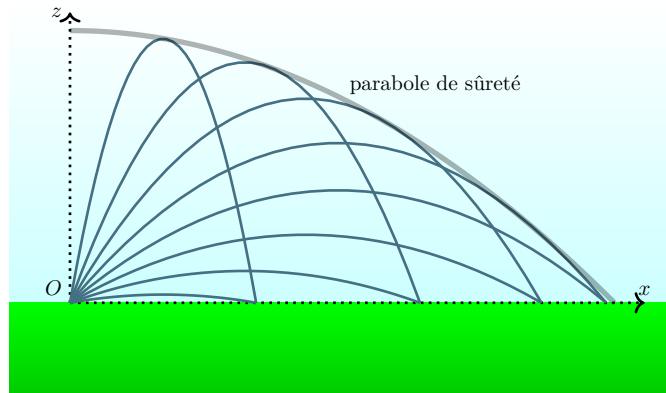
Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M2.1 : Chute d'un caillou dans l'eau [**]

1. $m = 3,2 \text{ mg}$
2. $m_e = 0,9 \text{ mg}$
3. $m\ddot{z} = -mg + m_e g - 6\pi R\eta \dot{z}$
4. $w(t) = -W + (W - v_0) e^{-t/\tau}$ avec $W = \frac{(m-m_e)g}{6\pi R\eta} = 1,96 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
5. $z(t) = -W \cdot t + (W - v_0) \tau [1 - e^{-t/\tau}]$
6. $t = 1,2 \text{ s}$ et $w(t) = -2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

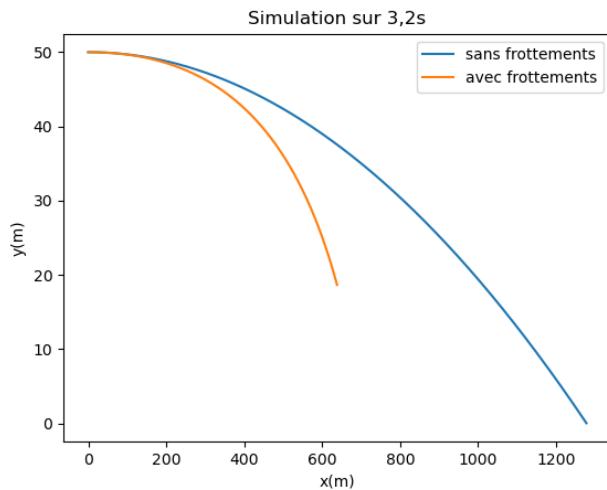
Réponses de l'exercice M2.2 : Tir balistique [**]

1. cf. le cours
2. cf. le cours
3. $z(x) = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$
4. La portée vaut $\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ qui est maximale lorsque $\alpha = 45^\circ$.
5. La flèche vaut $z_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ qui est maximale quand $\alpha = 90^\circ$.
6. La parabole de sûreté a pour équation $z_c = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_c^2$; au-dessus, pas de solutions, au-dessous, deux solutions de tir possibles.



Réponses de l'exercice M2.3 : Tir horizontal [**]

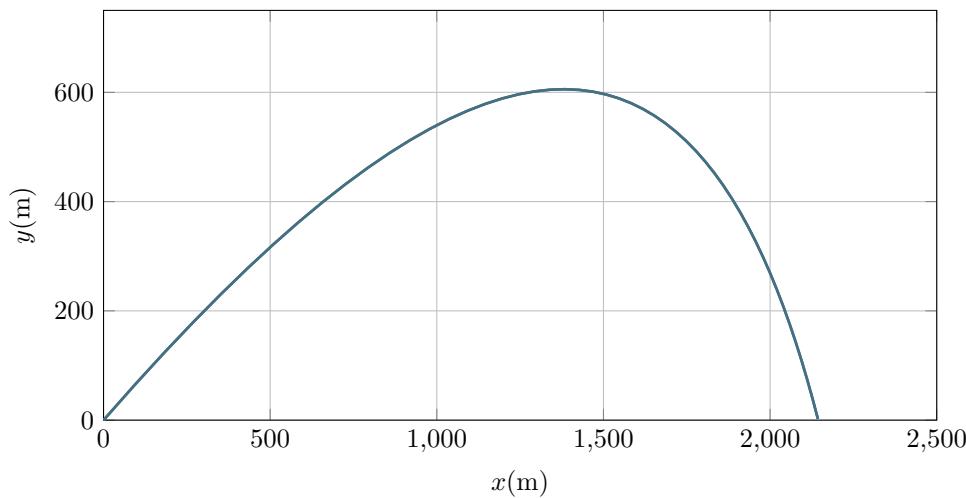
1. $x(t) = v_0 t$ et $y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$
2. $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ et $x_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
3. On a le schéma d'Euler suivant :
$$\begin{cases} t[n+1] = t[n] + pas \\ x[n+1] = x[n] + pas * vx[n] \\ vx[n+1] = vx[n] + pas * 0 \\ y[n+1] = y[n] + pas * vy[n] \\ vy[n+1] = vy[n] + pas * (-g) \end{cases}$$



On constate que la portée est réduite, et la chute ralentie (dans le même temps, l'obus n'a pas encore atteint le sol).

Réponses de l'exercice M2.4 : Tir balistique avec frottements de l'air [**]

1.
$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} = -g \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \dot{x} = Ae^{-\frac{\lambda}{m}t}, A \in \mathbb{R} \\ \dot{z} = -\frac{mg}{\lambda} + Be^{-\frac{\lambda}{m}t}, B \in \mathbb{R} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} x = \frac{mv_0 \cos \alpha}{\lambda} \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right] \\ z = -\frac{mg}{\lambda}t + \left(\frac{m^2 g}{\lambda^2} + \frac{mv_0 \sin \alpha}{\lambda} \right) \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t} \right] \end{cases}$$



4. (a) $\tau = \frac{m}{\lambda} = 12,5 \text{ s}$
 (b) $t = 22,7 \text{ s}$
 (c) 2140 m ; sans frottements, on aurait eu 6000 m

Réponses de l'exercice M2.5 : Masse entre deux ressorts [**]

1. $\vec{F}_1 = -k(z - l_0)\vec{e}_z$ et $\vec{F}_2 = +k(h - z - l_0)\vec{e}_z$
2. $\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{kh - mg}{m}$

3. $z_e = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}$
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ donc $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$
4. $z = \frac{h}{2} + \frac{mg}{2k} (\cos(\omega_0 t) - 1)$

Réponses de l'exercice M2.6 : Suspension de voiture [***]

1. $z = e + R + \ell.$
2. $m\ddot{\ell} + f\dot{\ell} + k\ell = k\ell_0 - mg - m\ddot{e}$
3. $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = 47\,400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
4. $f = 2\sqrt{km} = 7540 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}.$
5. $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k} = 27,8 \text{ cm}$
6. $\ell(t) = 28,8 - 1,4e^{-6,75t} + 0,4e^{-23,4t}$ avec ℓ en cm et t en s.
7. $\ell(t) = [-1,0 \cos(2,5t) - 4,1 \sin(2,5t)] e^{-9,8t} + 28,8$ en centimètres.

Réponses de l'exercice M2.7 : Masse suspendue à deux ressorts [***]

1. $\vec{F}_1 = -k \frac{\sqrt{d^2 + z^2} - l_0}{\sqrt{d^2 + z^2}} (d\vec{e}_x + z\vec{e}_z)$. et $\vec{F}_2 = -k \frac{\sqrt{d^2 + z^2} - l_0}{\sqrt{d^2 + z^2}} (-d\vec{e}_x + z\vec{e}_z)$.
2. $m\ddot{z} = -2k \frac{\sqrt{d^2 + z^2} - l_0}{\sqrt{d^2 + z^2}} z + mg$ qui est non-linéaire.
3. $-2k \frac{\sqrt{d^2 + z_e^2} - l_0}{\sqrt{d^2 + z_e^2}} z_e + mg = 0.$

Réponses de l'exercice M2.8 : Lecture d'une trajectoire de phase [*]

1. L'objet s'élève, puis redescend et s'écrase par terre.
2. $z(0) = 4 \text{ m}$ et $\dot{z}(0) = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
3. $z_{max} = 13,3 \text{ m}$ et $v_{sol} = 8,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (vers le bas).

Réponses de l'exercice M2.9 : Portrait de phase [**]

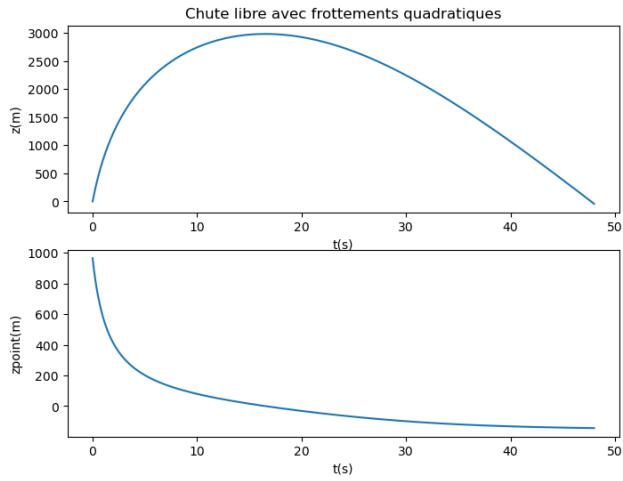
1. Il va finir piégé dans le trou de centre $x = 1,5$.
2. Environ $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ depuis $x = 0$ et $0,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ depuis $x = 1 \text{ m}$.

Réponses de l'exercice M2.10 : Chute d'un pot de fleurs [***]

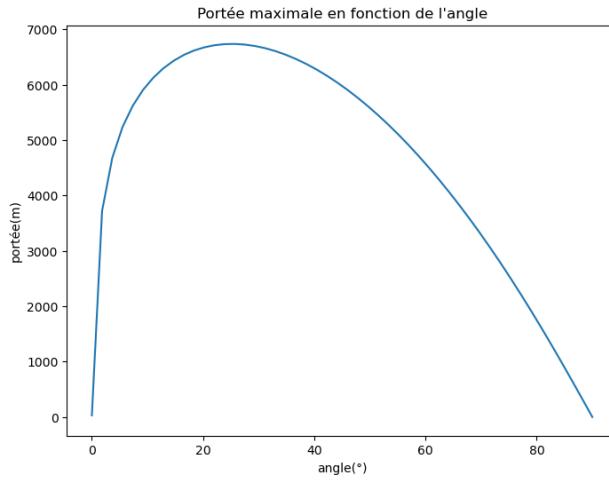
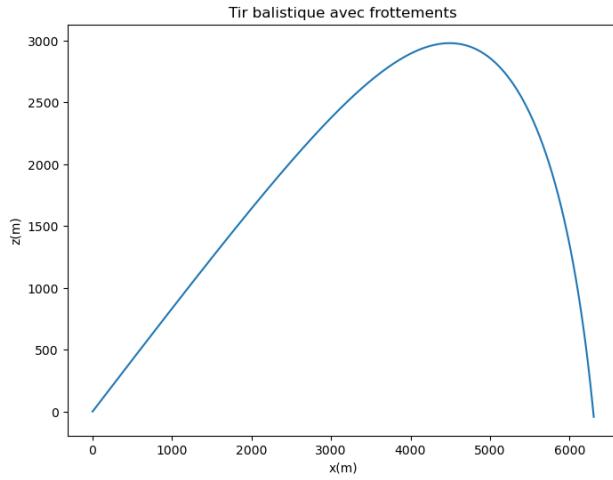
Il a été lâché de $h = 10,5 \text{ m}$ au-dessus du bas de la fenêtre.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Chute avec frottements quadratiques

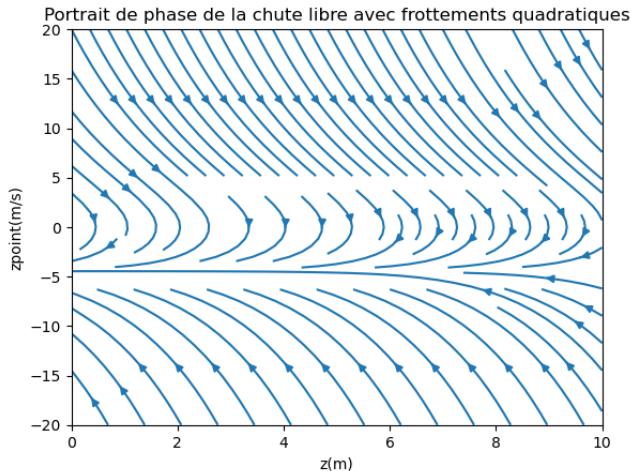
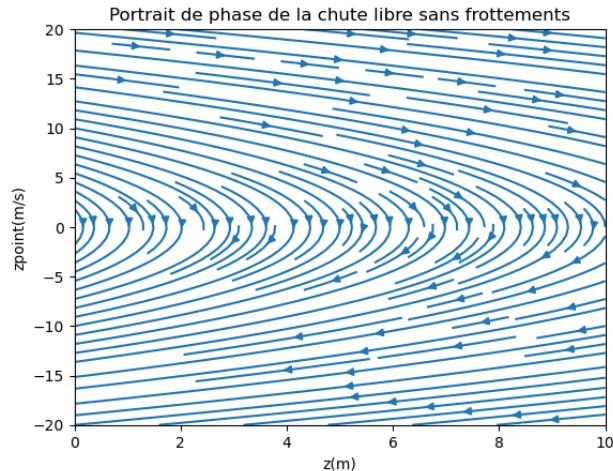


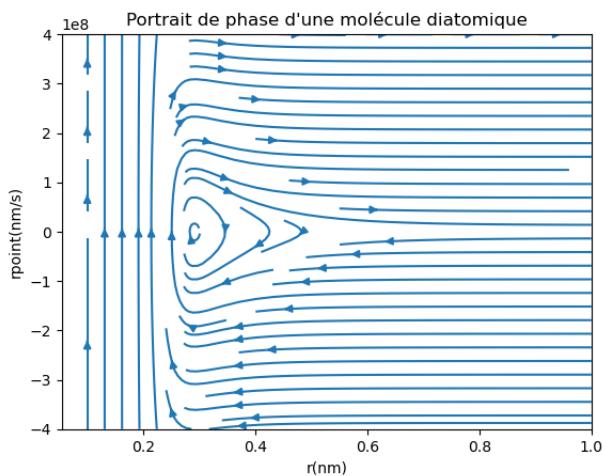
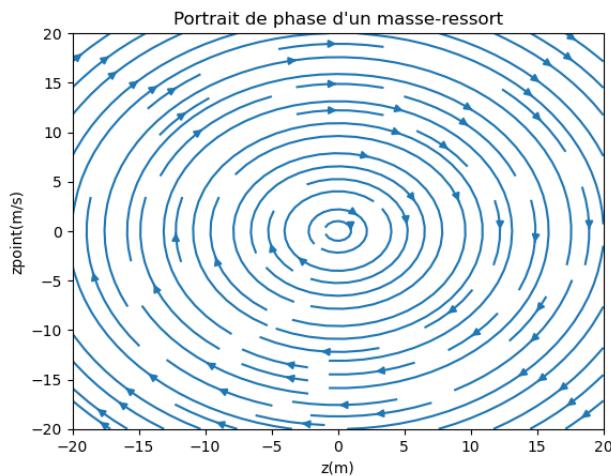
Avec la chute libre, les frottements quadratiques font rapidement converger la vitesse vers une limite valant $13,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 48 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vers le bas, quelle que soient les conditions initiales.



Par rapport au tir balistique sans frottements, la portée est diminuée ; elle est maximale pour un angle plus faible que 45° .

Réponses au TD d'info : Portraits de phase





Liaisons mécaniques

Cours

Jusqu'à présent, nous avons étudié des mouvements d'objets libres de leurs mouvements : certes, des forces (poids, ressort) modifiaient leur mouvement, mais ils n'étaient pas contraints à suivre une trajectoire particulière à cause d'un support. Dans ce chapitre, nous allons étudier les mouvements contraints, où une liaison oblige le point matériel étudié à suivre une trajectoire précise. Nous allons dans un premier temps nous intéresser uniquement à la contrainte imposée à la trajectoire, puis nous verrons comment traiter les forces de frottements qui apparaissent. Enfin, nous terminerons ce chapitre en étudiant un modèle d'oscillateur : le masse-ressort horizontal, aussi appelé oscillateur harmonique.

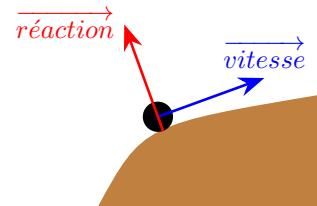
M3.A. Contact sans frottements avec un support

Un support oblige l'objet posé sur lui à suivre la forme de sa surface. Par exemple, si je pose un livre sur une table, ce livre ne peut pas passer à travers la table¹. Tant qu'il est posé, je peux le déplacer horizontalement en le faisant glisser sur la table : le livre peut se déplacer parallèlement à la table, mais pas perpendiculairement à celle-ci. Or, si la table n'était pas là, le livre tomberait sous l'effet de son poids ; s'il ne tombe pas, c'est que la table exerce une force qui compense le poids ; cette force est verticale, c'est-à-dire orthogonale à la table.

Propriété : Réaction sans frottements d'un support

Si un objet est en contact **sans frottements** avec un support :

- le mouvement est forcément parallèle au support
- le support exerce sur l'objet une *réaction normale* qui est orthogonale au support



La première étude des mouvements sur un support a été faite par Galilée. Comme la chute libre était trop rapide pour les moyens de mesures de l'époque, Galilée a eu l'idée de faire glisser des boules sur un plan incliné, dans une glissière qui constraint le mouvement dans une seule direction. En faisant varier l'angle entre la glissière et l'horizontale, Galilée a constaté que la distance parcourue par la boule est toujours proportionnelle au carré du temps, quel que soit l'angle (figure M3.1). Il a pu alors en déduire que la chute libre (qui correspond à une glissière à la verticale) vérifie la même loi ; on l'a montré dans le chapitre précédent.

FIGURE M3.1 – Expérience de Galilée.

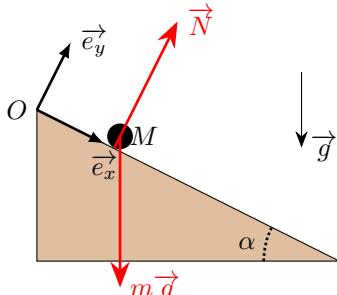
Remarque : En réalité, la boule ne glisse pas sur le support, elle roule. On admettra que pour le moment, on peut traiter une boule qui roule comme un objet se déplaçant sans frottements sur le support. Vous verrez l'an prochain une description plus précise du *roulement sans glissement*.

1. Sauf si la table casse...dans ce chapitre on supposera toujours que le support est indéformable, mais dans la réalité il faudra vérifier si le support est capable de supporter les contraintes qui s'y appliquent.

Exemple : Glissement sans frottements d'un objet sur un plan incliné À connaître

Dans l'expérience de Galilée de chute sur un plan incliné, déterminer la distance x parcourue en fonction du temps par la boule lâchée sans vitesse initiale, en fonction de l'angle α entre l'horizontale et la glissière.

On modélise l'expérience de Galilée en choisissant une base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) avec \vec{e}_x parallèle à la glissière, vers le bas, et \vec{e}_y orthogonal, vers le haut. On prend comme origine le point O d'où est lâché l'objet à $t = 0$.



- on étudie la balle comme un point M de masse m
- on travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen
- dans l'étude cinématique, on traduit le fait que le mouvement est contraint de se faire parallèlement au support : pas de mouvement selon \vec{e}_y ! Donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ puis $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$
- le point M est soumis à deux forces : son poids et la réaction du support. Il faut projeter ces forces sur la même base que l'étude cinématique. Pour la réaction, c'est facile : $\vec{N} = N\vec{e}_y$ où N est une inconnue ; pour le poids, il faut projeter avec l'angle α ; on trouve $m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$
- le PFD projeté sur les deux vecteurs de la base donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

On obtient donc deux équations ; la première est l'équation du mouvement, celle qui donne $\ddot{x} = g \sin \alpha$; la seconde permet de calculer N .

En intégrant deux fois, on trouve $\dot{x} = g \sin \alpha \cdot t$ puis $x = \frac{1}{2}g \sin \alpha \cdot t^2$.

Néanmoins, il y a un phénomène qu'on n'a pas pris en compte. Si un livre est posé sur une table horizontale, je peux le faire glisser sur la table, mais je peux aussi le soulever. La table empêche le livre de se déplacer vers le bas, mais pas vers le haut. De même, un train posé sur des rails peut, en principe, décoller ; ça arrive rarement, certes, sauf lorsqu'il effectue un looping dans une montagne russe ; dans ce cas, les wagons pourraient tomber, et on est obligé de modifier la liaison pour que les wagons ne soient pas seulement posés sur les rails, mais attachés aux rails.

Propriété : Liaison unilatérale et bilatérale

- une liaison bilatérale oblige l'objet à rester attaché au support à tout instant ; la réaction normale peut alors avoir n'importe quel sens ;
- une liaison unilatérale empêche l'objet de pénétrer dans le support, mais ne l'empêche pas de décoller ; la réaction normale est alors toujours dirigée du support vers l'objet.

La figure M3.2 illustre cela avec une pomme posée sur le sol, soulevée par une minuscule® coccinelle.

- Au départ, la pomme est posée sur le sol : la réaction normale compense son poids ;
- la coccinelle commence à tirer sur la queue de la pomme : la réaction diminue, de façon à ce que la somme traction+réaction compense toujours le poids ;
- lorsque la traction devient égale au poids, la réaction s'annule ; c'est à ce moment-là que la pomme commence à décoller du sol ;
- si la coccinelle tire encore plus fort, la pomme s'élève.

Dans les exercices, on pourra rencontrer différentes liaisons :

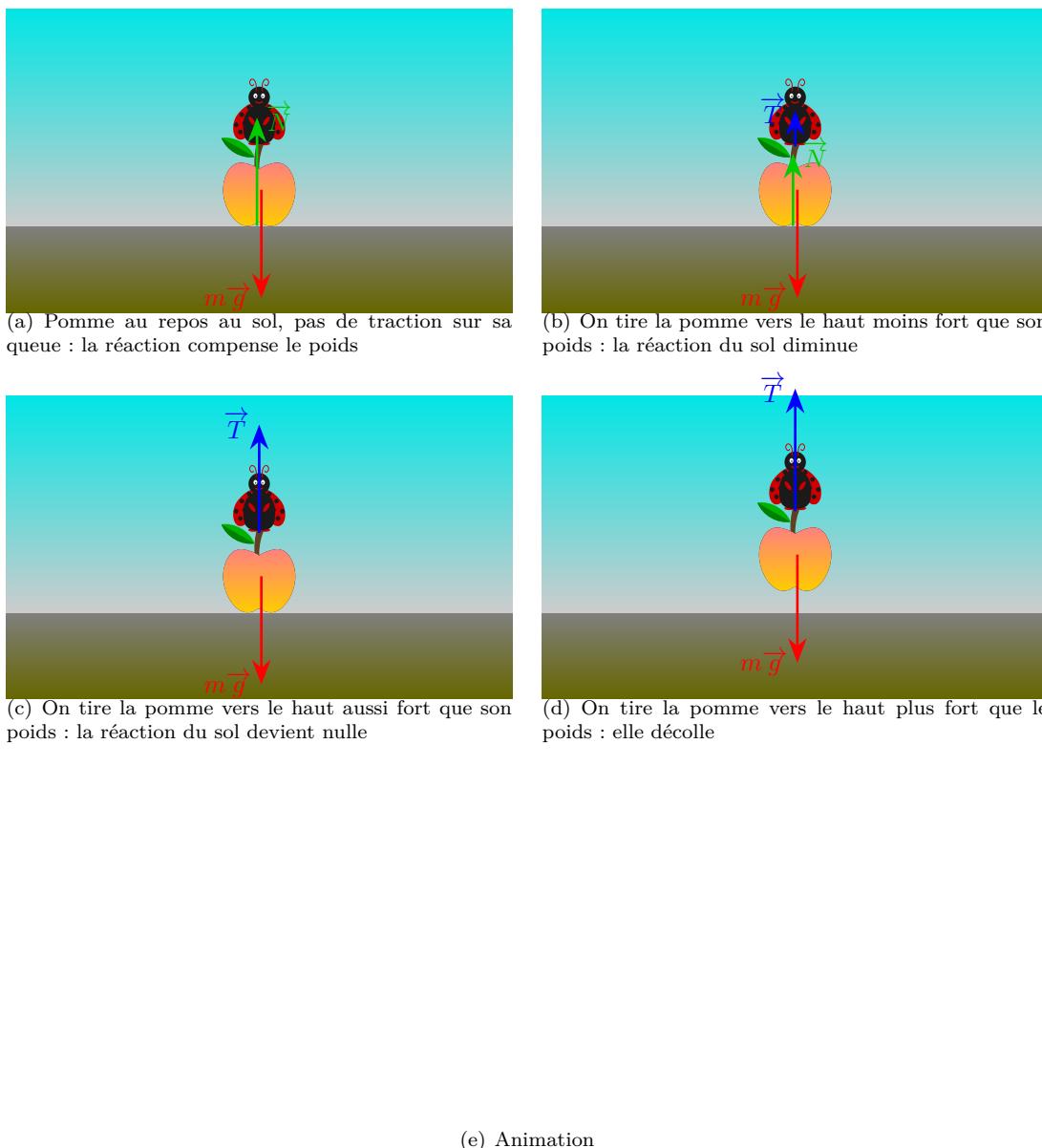


FIGURE M3.2 – Minuscule® coccinelle soulevant une pomme.

- un train sur des rails (1D, unilatéral) ou un train de montagnes russes (1D, bilatéral)
- une bille dans une gouttière (1D, unilatéral) ou dans un tuyau (1D, bilatéral)
- une perle sur un fil (1D, bilatéral)
- un objet posé sur un plan (2D, bilatéral)...

Il existe un autre type de liaisons qui s'apparente, dans les faits, à une liaison unilatérale sans frottements : ce sont les fils. Un fil inextensible peut servir à tirer un objet, mais pas à le pousser. Considérons ainsi les deux schémas de la figure M3.3 :

- à gauche, un objet M peut se déplacer sans frottements sur un support circulaire de rayon R et de centre O
- à droite, un objet M peut se déplacer au bout d'un fil inextensible de rayon R attaché en un point O

Ces deux situations sont identiques : dans les deux cas, le point M doit décrire un cercle de centre O et de rayon R . À gauche, le support exerce une force orthogonale au cercle, donc parallèle au rayon, dirigée vers l'intérieur, vers le centre ; il en est donc de même à droite.

Propriété : Fil inextensible

Un fil inextensible a une longueur constante ; il exerce sur un objet attaché en un de ses bouts une force parallèle au fil, et dirigée de l'objet vers le fil.

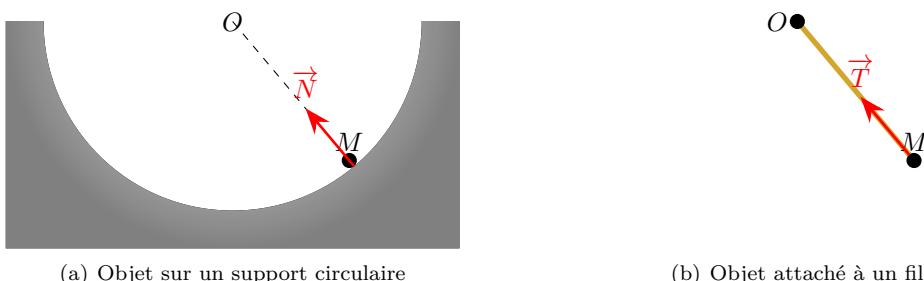


FIGURE M3.3 – Support et fil inextensible.

M3.B. Contact avec frottements avec un support

Jusque-là, on a négligé tout frottements ; cela modélise assez bien un palet de curling glissant sur la glace. Mais quand on essaie de déplacer un carton sur le sol, on sent bien qu'il y a quelque chose qui s'oppose au mouvement libre du carton sur le sol. Il faut pousser ou tirer avec une force suffisamment grande pour que le carton se mette en mouvement.

La figure M3.4 montre ce qui se passe quand on tire un carton posé sur le sol :

- (a) au départ, le carton est immobile, et la réaction \vec{R} compense le poids ;
- (b) si on tire doucement sur le côté, le carton ne bouge pas : on en déduit que la réaction compense maintenant le poids **et** la force de traction. Il apparaît donc une composante horizontale à la force ;
- (c) si on tire plus fort, il arrive un moment où le carton se met en mouvement. Il s'agit alors de la force horizontale maximale que peut exercer le support sur le carton ;
- (d) si on continue à tirer plus fort, le carton bouge, mais il y a toujours une force horizontale qui s'oppose au mouvement, car dès qu'on arrête de tirer, le carton s'immobilise très vite.

C'est Charles-Augustin Coulomb qui, à partir de diverses expériences, a mis en évidence que la force minimale à exercer pour déplacer un objet sur un support est proportionnelle à la réaction normale qu'exerce le support. Ce coefficient de proportionnalité dépend du support et de l'objet.

Lois de Coulomb des frottements solides

Quand un objet est posé sur un support solide, le support exerce une réaction \vec{R} que l'on peut décomposer en une réaction normale \vec{N} orthogonale au support, et une réaction tangentielle \vec{T} parallèle au support, aussi appelée *force de frottements*. On peut alors définir un coefficient sans dimensions f , appelé *coefficient de frottements*, reliant \vec{T} à \vec{N} :

- l'objet reste immobile tant que $\|\vec{T}\| < f \cdot \|\vec{N}\|$
- si l'objet se déplace, alors $\|\vec{T}\| = f \cdot \|\vec{N}\|$ et la force de frottements est opposée au déplacement de l'objet

On voit la cohérence de ce modèle avec l'exemple du carton vu précédemment. Il faut bien remarquer que la force de frottements reste constante une fois que le carton est en mouvement.

Les coefficients de frottements typiques varient entre 0,05 et 1 (cf. tableau M3.1).

matériaux en contact	f
pneu/route	0,6 à 1,0
bois/béton	0,6
bois/bois	0,2 à 0,6
verre/verre	0,4
peau de banane/sol ²	0,07
ski/neige	0,04
cartilage/cartilage	0,01

TABLEAU M3.1 – Coefficients de frottements de divers matériaux.

2. D'après l'excellent article [Frictional Coefficient under Banana Skin](#) (récompensé par le prix igNobel en 2014) où l'on apprend que ce coefficient monte à 0,12 si on la tourne dans l'autre sens, et à 0,33 si la peau est sèche.

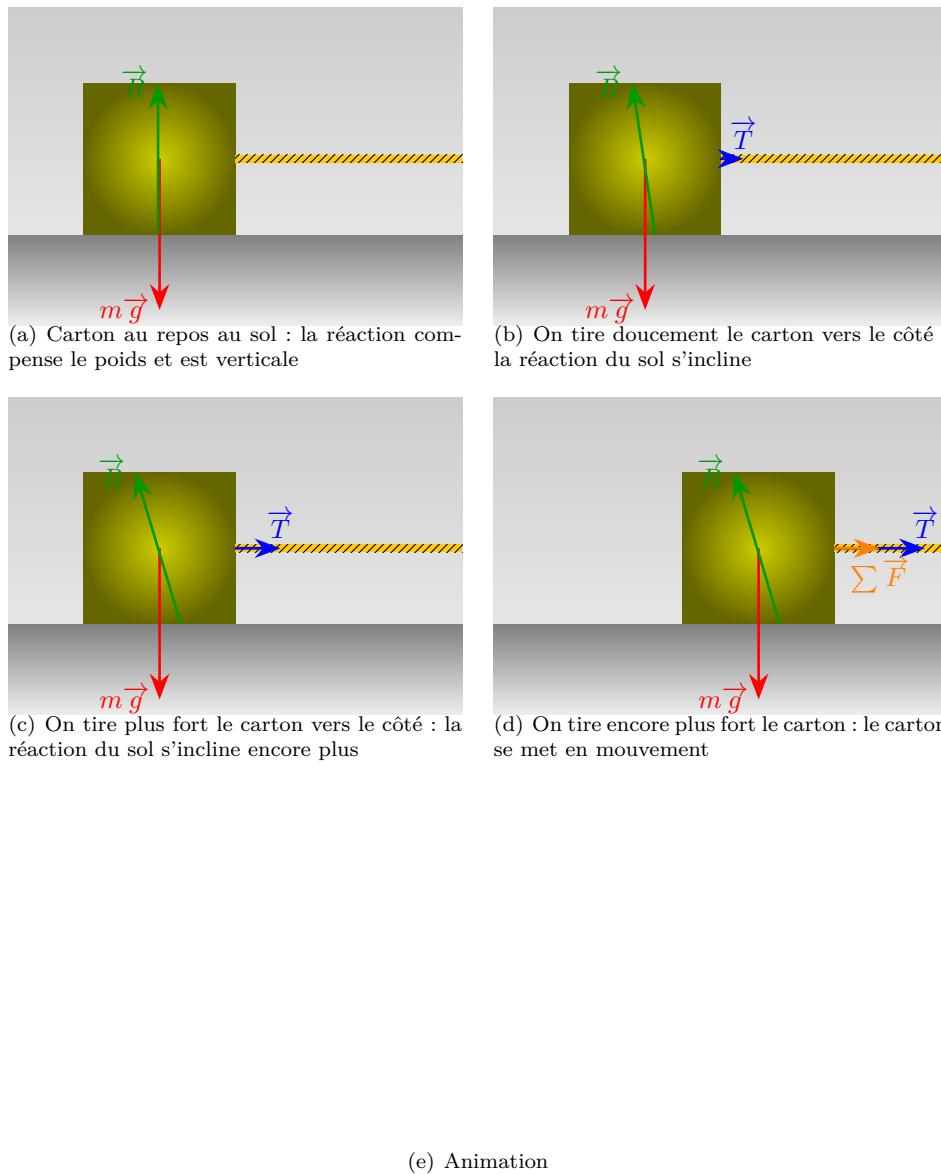


FIGURE M3.4 – Déplacement d'un carton sur le sol.

Il faut cependant bien réaliser que cette loi de Coulomb est un modèle très simple. D'abord, il ne traduit pas le fait qu'on a tous constaté, qu'une fois qu'un objet est mis en mouvement, il est plus facile de continuer à le déplacer. Une modèle plus compliqué permet de traduire cette propriété, et définissant deux coefficients différents, un *coefficent statique* lorsque l'objet est immobile, et un *coefficent dynamique* lorsqu'il bouge, légèrement inférieur au coefficient statique.

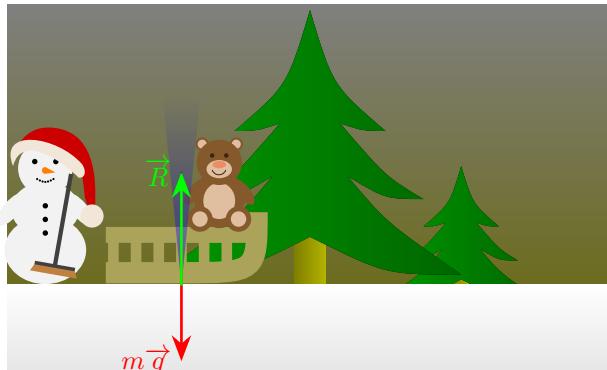
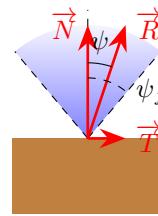
Ensuite, dans le modèle de Coulomb, la surface de contact n'importe pas. Or on sait bien qu'une voiture tient mieux la route avec des pneus larges qu'avec des pneus étroits. Mais cela n'est pas contradictoire avec les lois de Coulomb. Quand une voiture est posée sur un sol horizontal, on peut penser que la réaction du sol sur chaque pneu compense un quart du poids de la voiture. En fait, entre le pneu et la route, il existe des forces d'attraction, de type *forces de Van der Waals*, qui augmentent la force normale, et donc, par conséquent, la force tangentielle maximale. On retrouve le même effet entre deux surfaces très lisses : le coefficient de frottement verre/verre n'est pas énorme, mais si on plaque deux vitres l'une contre l'autre, il est difficile de les faire coulisser car les forces de Van der Waals entre ces deux surfaces très lisses sont grandes.

Enfin, il faut bien comprendre que ce modèle ne s'applique strictement qu'à des contacts secs ; si le contact entre les solides est lubrifié, les lois changent. C'est le cas par exemple des frottements métal/métal dans les moteurs, lubrifiés avec de l'huile, ou encore du ski qui glisse sur la neige.

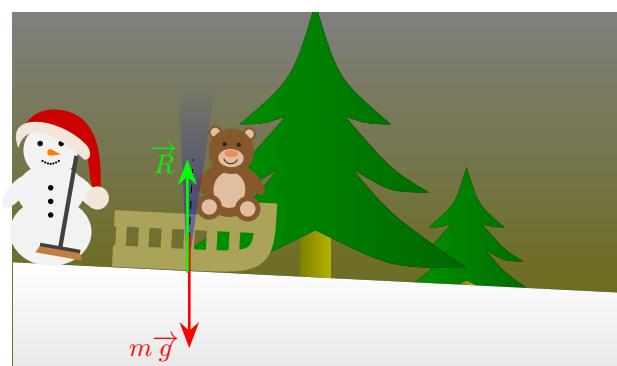
Géométriquement, si on décompose la réaction $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$, on peut placer l'angle ψ entre la normale et la réaction ; alors on voit facilement que $\tan \psi = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$; d'après les lois de Coulomb, on a donc toujours $\tan \psi < f$ lorsque l'objet est immobile, avec égalité lorsqu'il bouge.

On peut donc définir un angle maximal $\psi_f = \arctan f$ et tracer un cône de sommet l'objet considéré, et de demi-angle au sommet ψ_f . Les lois de Coulomb indiquent que l'objet reste immobile tant que la réaction reste à l'intérieur de ce cône, appelé *cône de frottements* (en bleu ci-contre).

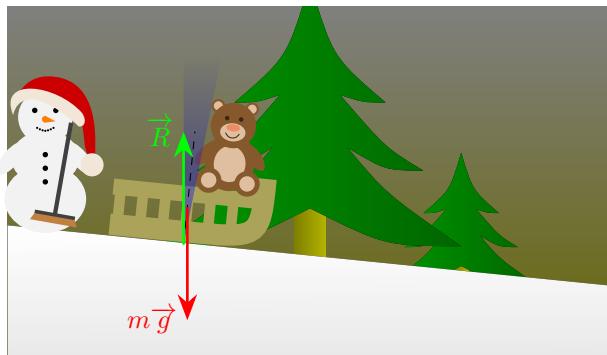
Cette interprétation se voit bien sur la luge représentée figure M3.5. Quand on incline le sol, la réaction tend à compenser le poids ; elle reste donc verticale, et s'incline par rapport au sol ; quand l'angle devient trop important, la luge se met à glisser.



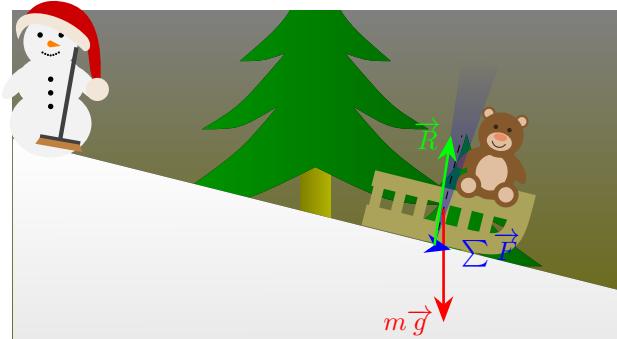
(a) Luge sur un sol horizontal : la réaction est orthogonale au sol



(b) Luge sur un sol peu incliné : la réaction s'incline et compense le poids



(c) Luge sur un sol un peu plus incliné : la réaction est à la limite de compenser le poids



(d) Luge sur un sol encore plus incliné : la réaction ne peut plus compenser le poids

FIGURE M3.5 – Glissement d'une luge sur un plan incliné.

Remarque : Le science qui étudie les frottements s'appelle la tribologie. C'est un domaine très important de la physique pratique, cas la réduction des frottements solides concerne de très nombreux domaines de l'ingénierie.

Méthode : Résolution d'un problème de mécanique avec des frottements solides

Pour résoudre un problème de mécanique avec des frottements solides, il faut absolument commencer par faire une hypothèse, la plus plausible en fonction de l'énoncé :

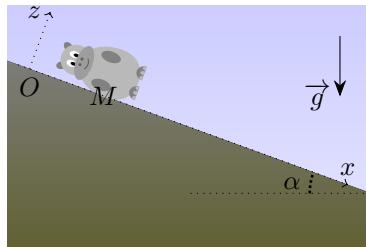
- si on suppose que l'objet est immobile, alors son étude cinématique est évidente : $\vec{a} = \vec{0}$. Le PFD projeté permet alors de connaître les deux composantes \vec{T} et \vec{N} de la réaction. On vérifie alors la condition de validité $\|\vec{T}\| < f \cdot \|\vec{N}\|$.
- si on suppose que l'objet bouge, on fait aussi une supposition quand au sens du mouvement. L'étude cinématique possède alors une inconnue, mais en échange, on gagne une relation entre les composantes \vec{T} et \vec{N} de la réaction grâce aux lois de Coulomb. En combinant les deux relations données par le PFD, on

arrive alors à l'équation du mouvement.

Exemple : Glissement sur un plan incliné avec frottements

À connaître

Un objet de masse m est posé sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale ; l'origine est choisie au point de départ de l'objet. On note f le coefficient de frottements entre l'objet et le plan.



1. On suppose que l'objet glisse vers le bas. Déterminer $x(t)$. À quelle condition sur α est-ce possible ?
2. On suppose que l'objet ne glisse pas. Déterminer la réaction du sol. À quelle condition sur α est-ce possible ?

1. On suppose dans cette question que le point M est en mouvement vers le bas.

- On étudie le point M de masse m dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.
- Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.
- Bilan des forces : l'objet est soumis à son poids $m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$, et à la réaction du support : $\vec{R} = N\vec{e}_z + T\vec{e}_x$ avec $N > 0$ et $T < 0$ puisque l'objet bouge vers les x croissants. De plus, d'après les lois de Coulomb, $\|T\vec{e}_x\| = f \cdot \|N\vec{e}_z\|$ donc $|T| = f \cdot |N|$ d'où on tire $T = -f \cdot N$.
- le PFD s'écrit donc $m\ddot{x}\vec{e}_x = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) + N\vec{e}_z - f \cdot N\vec{e}_x$. En projetant, on obtient

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - f \cdot N \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

On en déduit que $N = mg \cos \alpha$ puis $\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$. Après double intégration, on obtient $x(t) = \frac{1}{2}g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)t^2$

Pour que ce soit valide, il faut que le mouvement soit bien vers le bas, comme supposé. Pour cela, il faut que $(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$ soit positif, ce qui revient à $\sin \alpha > f \cdot \cos \alpha$ soit $\tan \alpha > f$ ou encore $\alpha > \arctan f$.

2. On suppose dans cette question que l'objet est immobile. L'objet et le référentiel ne changent pas.

- Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = 0\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = 0\vec{e}_x$ et $\vec{a} = 0\vec{e}_x$.
- Bilan des forces : l'objet est soumis à son poids $m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z)$, et à la réaction du support : $\vec{R} = N\vec{e}_z + T\vec{e}_x$ avec $N > 0$. De plus, d'après les lois de Coulomb, $\|T\vec{e}_x\| < f \cdot \|N\vec{e}_z\|$ donc $|T| < f \cdot N$; ce sera la condition de validité à vérifier à la fin.
- le PFD s'écrit donc $\vec{0} = mg(\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_z) + N\vec{e}_z + T\vec{e}_x$. En projetant, on obtient

$$\begin{cases} 0 = mg \sin \alpha + T \\ 0 = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

On en déduit que $T = -mg \sin \alpha$ et $N = mg \cos \alpha$. La condition de validité est que $|T| < f \cdot N$ soit $mg \sin \alpha < f \cdot mg \cos \alpha$ d'où on tire $\tan \alpha < f$ ou $\alpha < \arctan f$.

Remarque : on constate que les deux conditions de validité sont complémentaires ; mais si on prend des coefficients statique et dynamique différents, ce n'est plus le cas.

M3.C. Oscillateur harmonique

Nous avons déjà étudié en exercices le mouvement d'une masse attachée à un ressort : la longueur du ressort est alors solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, semblable à un circuit RLC série.

Dans cette section, nous allons étudier plus en détail ce système masse-ressort, appelé aussi *oscillateur harmonique*, et établir ses analogies avec le RLC série.

C.1. Modèle et équations

On appelle *oscillateur harmonique* une masse attachée à un ressort, et soumise éventuellement à une force de frottements linéaires. Plusieurs géométries existent pour réaliser cela, mais le système le plus simple à étudier est le masse-ressort horizontal (figure M3.6) :

- une masse m glisse sans frottements sur un plan horizontal
- elle est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0
- un amortisseur attaché à la masse exerce sur elle une force de type frottements fluides, de la forme $-f \cdot \vec{v}$ où f est un coefficient réglable (dureté de l'amortisseur)

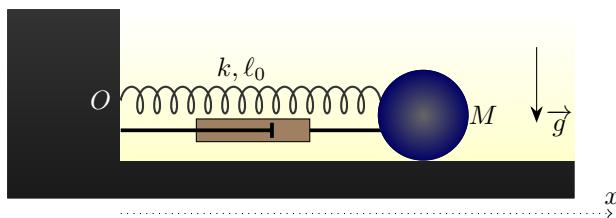


FIGURE M3.6 – Oscillateur harmonique horizontal.

Propriété : ED vérifiée par l'oscillateur harmonique

L'allongement du ressort vérifie, dans le modèle de la figure M3.6, l'équation

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{M3.1})$$

qui peut se mettre sous forme canonique $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{f} \quad (\text{M3.2})$$

Démonstration

- On étudie l'objet de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen
- On note ℓ la longueur du ressort. Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell \vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{\ell} \vec{e}_x$ et $\vec{d} = \ddot{\ell} \vec{e}_x$
- Bilan des forces : la masse est soumise :
 - * à son poids, orthogonal à \vec{e}_x ,
 - * à la réaction du support, orthogonale à \vec{e}_x aussi (pas de frottements solides),
 - * à la force du ressort $-k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$
 - * et à la force de l'amortisseur $-f \cdot \vec{v} = -f \cdot \dot{\ell} \vec{e}_x$
- Le PFD projeté sur \vec{e}_x donne $m\ddot{\ell} = -k\ell + k\ell_0 - f\dot{\ell}$ soit $m\ddot{\ell} + f\dot{\ell} + k\ell = k\ell_0$

Pour pouvoir comparer les systèmes, il est bon de se ramener à un second membre nul. Pour cela, on cherche la valeur de ℓ à l'équilibre : si $\dot{\ell} = 0$ et $\ddot{\ell} = 0$ alors on voit que $k\ell = k\ell_0$ donc $\ell = \ell_0$. On pose alors $x = \ell - \ell_0$ (c'est l'allongement) ; alors $\dot{x} = \dot{\ell}$ et $\ddot{x} = \ddot{\ell}$. On voit alors facilement que l'équation précédente devient $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$

On obtient donc une équation différentielle linéaire d'ordre 2, semblable à ce qu'on a obtenu lorsqu'on a étudié le circuit modèle du RLC série en électricité. On va pousser la comparaison un peu plus loin.

C.2. Analogies électromécaniques

On a déjà considéré le circuit RLC série dans les chapitres d'électricité; ici, on va commencer par l'étudier en régime libre, c'est-à-dire sans générateur (figure M3.7) :

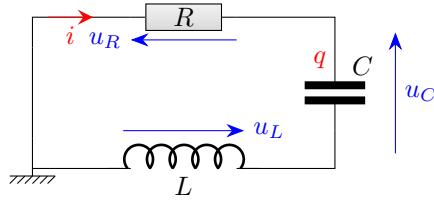


FIGURE M3.7 – Circuit RLC série.

Calcul : ED vérifiée par la charge du condensateur

Par la loi des noeuds, $u_L + u_R + u_C = 0$ soit $L\frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$ d'où on tire $L\ddot{u}_C + R\dot{u}_C + \frac{1}{C}u_C = 0$. Pour faire l'analogie avec l'oscillateur harmonique, on va introduire la charge q du condensateur; on sait par définition que $q = C.u_C$. En multipliant toute l'équation précédente par C , on obtient donc

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{M3.3})$$

Ces deux équations (M3.1) et (M3.3) se ressemblent; on peut identifier terme à terme selon le tableau M3.2. Identifier, cela ne veut pas dire que les grandeurs sont égales, mais qu'elles jouent le même rôle mathématique. On constate que l'analogie va même assez loin, car lorsqu'on identifie les énergies du condensateur et de la bobine, on tombe sur deux expressions qu'on verra bientôt : l'énergie cinétique du point $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, et l'énergie potentielle du ressort $E_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.

grandeur	Osc. Harmonique	RLC série
variable	allongement x	charge q
dérivée	vitesse $v = \dot{x}$	intensité $\dot{q} = i$
inertie	m	L
amortissement	f	R
rappel	k	$\frac{1}{C}$
pulsation propre ω_0	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
facteur de qualité Q	$\frac{\sqrt{km}}{f}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
énergies	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$ $E_c = \frac{1}{2}kx^2$	$E_L = \frac{1}{2}Li^2$ $E_C = \frac{1}{2C}q^2$

TABLEAU M3.2 – Analogies électromécaniques.

Propriété : Analogies électromécaniques

L'oscillateur harmonique horizontal et le RLC série obéissent aux mêmes équations à condition de faire correspondre :

- l'allongement avec la charge du condensateur
- la masse avec l'inductance (termes d'inertie)
- le coefficient de frottements avec la résistance (termes qui dissipent de l'énergie)
- la raideur du ressort avec l'inverse de la capacité (termes de rappel)

Par conséquent, tous les résultats qu'on a vus avec le RLC série sont transposables à l'oscillateur harmonique horizontal, par transposition des grandeurs, ou bien en utilisant les expressions $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$.

Remarque : Il existe d'autres analogies possibles, entre autres avec le RLC parallèle.

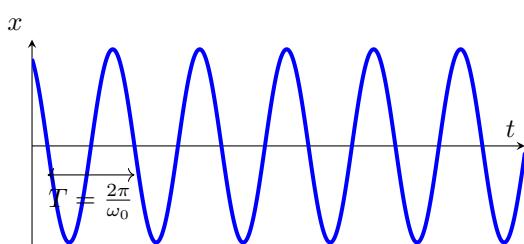
C.3. Solutions temporelles

Propriété : Solutions en régime non amorti

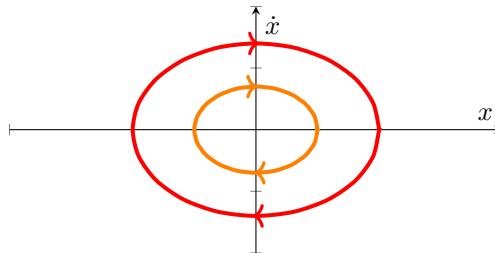
S'il n'y a pas d'amortisseur ($f = 0$, soit $Q = \infty$), les solutions de l'oscillateur harmonique non amorti sont de la forme

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ ou } D \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (\text{M3.4})$$

Les solutions sont représentées figure M3.8, ainsi que le portrait de phase, constitué d'ellipses tournant dans le sens horaire.



(a) Solutions temporelles



(b) Portrait de phase

FIGURE M3.8 – Oscillateur harmonique non amorti.

Propriété : Solutions en régime peu amorti

Si l'amortissement est faible ($Q > \frac{1}{2}$, soit $f < 2\sqrt{km}$), les solutions de l'oscillateur harmonique sont de la forme

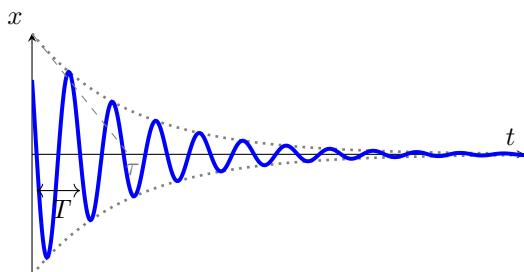
$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \text{ avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad (\text{M3.5})$$

Ce sont des oscillations de pseudopériode $\frac{2\pi}{\omega}$ qui s'amortissent en un temps caractéristique $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.

Le portrait de phase est alors constitué de spirales qui tendent vers l'origine (figure M3.9).

Propriété : Nombre d'oscillations

Lorsque Q est grand, le nombre de fois que le système oscille avant de l'arrêter est approximativement égal à Q .



(a) Solutions temporelles

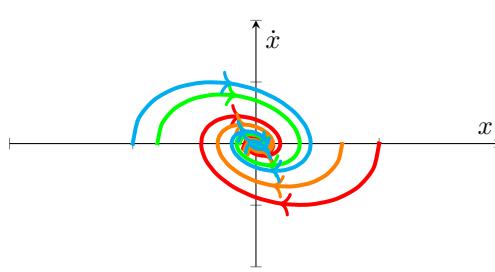
(b) Portrait de phase pour $Q = 2$

FIGURE M3.9 – Oscillateur harmonique en régime pseudo-périodique.

Propriété : Solutions en régime très amorti

Si l'amortissement est fort ($Q < \frac{1}{2}$, soit $f > 2\sqrt{km}$), les solutions de l'oscillateur harmonique sont de la forme

$$x(t) = A \cdot e^{r_+ t} + B \cdot e^{r_- t} \text{ avec } r_{\pm} = \omega_0 \frac{-\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}}{2} \text{ (solutions de l'équation caractéristique)} \quad (\text{M3.6})$$

La courbe est apériodique.

Le portrait de phase est alors constitué de courbes qui tendent vers l'origine sans tourner autour (figure M3.10).

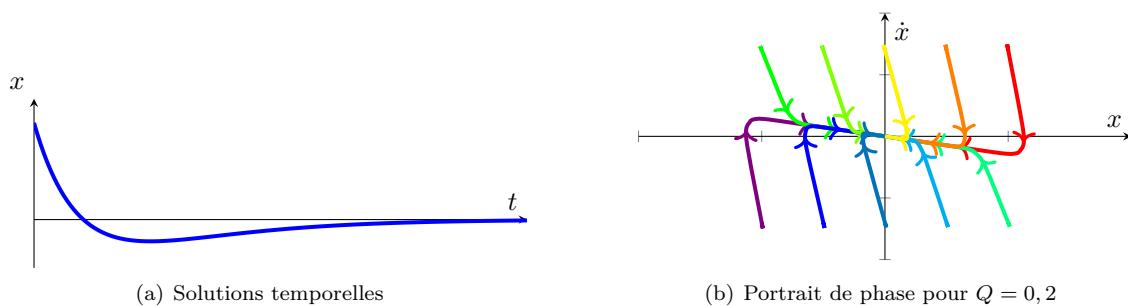


FIGURE M3.10 – Oscillateur harmonique en régime apériodique.

Liaisons mécaniques**Programme officiel****Programme officiel**

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système modèle masse-ressort sans frottement.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter les analogies avec un oscillateur harmonique électrique.

Liaisons mécaniques

QCMs

réponses page 372

QCM : Compréhension du cours

Q1.

S'il n'y a pas de frottements, la réaction d'un support est orthogonale à celui-ci :

Q2.

Un support contraint l'objet à avoir un mouvement rectiligne :

Q3.

La réaction tangentielle correspond à ce qu'on appelle couramment la force de frottements :

Q4.

Si l'objet est immobile, alors la force de frottements est nulle :

Q5.

La pulsation propre d'un masse-ressort vaut :

- (a). $\sqrt{k \cdot m}$ (b). $\sqrt{\frac{1}{k \cdot m}}$
 (c). $\sqrt{\frac{m}{k}}$ (d). $\sqrt{\frac{k}{m}}$

Q6.

Le portrait de phase d'un oscillateur harmonique non amorti est formé :

Liaisons mécaniques

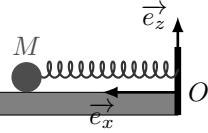
Exercices

réponses page 373

Exercice M3.1 : Masse-ressort horizontal amorti [*]

Une masse m peut glisser sur un rail à coussin d'air. Elle est reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 à un bord fixe ; il y a aussi en parallèle du ressort un amortisseur produisant sur la masse m une force $-f \cdot \vec{v}$ avec f une constante. On néglige les frottements avec le sol.

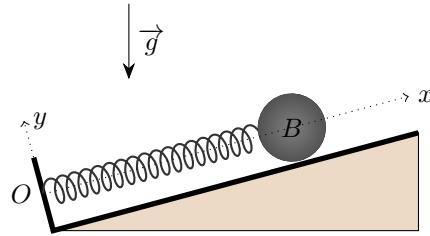
On repère par x l'**allongement** du ressort ; \vec{e}_x est le vecteur unitaire dirigé du ressort vers la masse. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ le champ de pesanteur. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



- Établissez l'ED vérifiée par x .
- On lance la masse depuis $x(0) = 0$ avec une vitesse initiale $v_0\vec{e}_x$. On prend les valeurs numériques suivantes : $l_0 = 12 \text{ cm}$, $k = 280 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 400 \text{ g}$, $f = 28 \text{ USI}$ et $v_0 = 24 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminez $x(t)$.

Exercice M3.2 : Flipper [**]

On va étudier le lancement d'une bille de flipper. Le flipper est modélisé par un plan incliné d'un angle $\alpha = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale. En bas (point O) est fixé un ressort de raideur $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 5 \text{ cm}$. Une bille B de masse $m = 5 \text{ g}$ est posée au bout de ce ressort ; pour le moment, on supposera que la bille touche le bout du ressort. On place les axes x et y comme sur la figure, et on note ℓ la distance OB . On suppose que la bille se déplace sans frottements sur le plan incliné. On notera $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

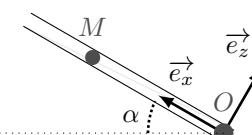


- Établir l'équation différentielle du mouvement (ED vérifiée par ℓ).
- Initialement, on comprime le ressort à la longueur $\frac{\ell_0}{2}$, et on lâche la bille à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminez $\ell(t)$.
- En réalité, la bille n'est pas attachée au ressort, elle est juste posée dessus. Par conséquent, dès que la force du ressort devient nulle, la bille se détache du ressort.
- Calculez numériquement la position ℓ_1 où la bille se détache, l'instant t_1 correspondant, ainsi que la vitesse v_1 .
- À partir de ce moment-là, la bille continue d'avancer sans frottements sur le plan incliné, mais n'est plus soumise à la force du ressort. Déterminez $\ell(t)$ en fonction de ℓ_1 , v_1 , t_1 , t , g et α .
- Quelle est la vitesse v_2 de la bille lorsqu'elle atteint le sommet du flipper ($\ell = 80 \text{ cm}$) ?

Exercice M3.3 : Aimant glissant dans un tube [**]

Un aimant M de masse $m = 80 \text{ g}$ peut glisser sans frottements dans un tube incliné d'un angle $\alpha = 12^\circ$ par rapport à l'horizontale. Un autre aimant est fixé en O , en bas de la pente. L'aimant en O exerce alors sur M une force répulsive $\vec{f} = \frac{K}{x^3}\vec{e}_x$ où x est la distance OM et K une constante positive.

On note \vec{g} le champ de pesanteur de norme $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.



- Déterminez l'équation différentielle vérifiée par x .
- Montrez qu'il existe une position d'équilibre x_{eq} à exprimer.
AN : on mesure $x_{eq} = 4,2 \text{ cm}$; calculez numériquement K .
- On va s'intéresser aux mouvements au voisinage de l'équilibre ; on va donc poser $x = x_{eq} + \varepsilon$ où x_{eq} est la valeur à l'équilibre (c'est donc une constante) et $\varepsilon \ll x_{eq}$.

À partir de l'ED vérifiée par x , déterminez l'ED vérifiée par ε en fonction de m , g , α et x_{eq} uniquement (plus de K).

4. On admet le développement limité suivant que vous verrez bientôt en maths : $\frac{1}{(1+\frac{\varepsilon}{x_{eq}})^3} \approx 1 - 3\frac{\varepsilon}{x_{eq}}$.

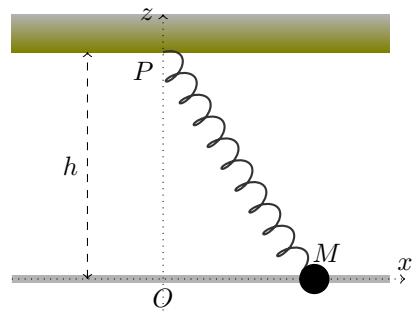
Déduisez-en l'ED vérifiée par ε sous la forme $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$ en exprimant (en fonction de g , α et x_{eq}) puis en calculant la pulsation propre ω_0 des petites oscillations de l'aimant autour de sa position d'équilibre.

Exercice M3.4 : Position d'équilibre d'une masse fixée à un ressort [***]

Un objet M de masse m peut se déplacer sans frottements sur une tige horizontale. On repère sa position par $x = \overline{OM}$. Un ressort est fixé entre M et le point P fixe de coordonnées $(0, h)$. Ce ressort a pour raideur k et pour longueur à vide l_0 ; on suppose que $h < l_0$.

Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

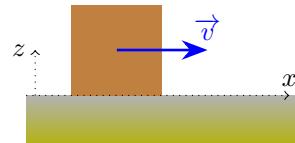
- Exprimez la longueur du ressort en fonction de x et des constantes, puis la force exercée par le ressort sur la masse.
- Établissez l'ED vérifiée par x .
- Trouvez la position d'équilibre de la masse (autre que $x = 0$).



Exercice M3.5 : Carton lancé avec une vitesse v_0 sur un sol plan horizontal [**]

Un carton de masse m est lancé sur le sol horizontal avec une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_x$ avec $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il glisse avec un coefficient de frottements $f = 0,3$. Pour les AN on prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

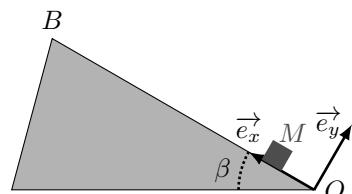
- Déterminez sa vitesse $v(t)$.
- À quel instant s'arrête-t-il ?
- Quelle distance a-t-il parcourue ?



Exercice M3.6 : Glissement d'un carton sur un plan incliné [**]

Un carton est posé en bas d'un plan incliné d'un angle $\beta = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale. On le lance depuis le point O avec une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_x$. On repère la position du carton au cours du temps par $x = \overline{OM}$.

Le but est de faire arriver le carton jusqu'au point B tel que $OB = 4 \text{ m}$.



- On suppose pour le moment que le carton glisse sans frottements sur le sol. Établir l'expression de $\ddot{x}(t)$, puis de $x(t)$ en intégrant deux fois.
- Montrez que le carton n'atteint le point B que si la vitesse v_0 est supérieure à une valeur minimale v_1 à exprimer.
- On suppose qu'il y a maintenant des frottements solides avec le sol ; on note f le coefficient de frottements. Établir la nouvelle expression de $x(t)$.
- On constate que la vitesse minimale pour que le carton atteigne B vaut $v_2 = 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Déduisez-en la valeur de f .

Exercice M3.7 : Masse-ressort horizontal avec frottements secs [***]

Une masse m peut glisser avec frottements sur un plan horizontal ; on note f le coefficient de frottements. Elle est accrochée au bout d'un ressort horizontal de raideur k (on ne tiendra pas compte dans cet exercice du problème de la longueur finie du ressort). Le problème est unidimensionnel, sur l'axe \vec{e}_x , l'origine $x = 0$ étant prise à la longueur au repos du ressort.

L'étude est faite dans le référentiel terrestre, galiléen. On note \vec{g} la pesanteur, et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.
On place la masse en $x = l_0 > 0$ (ressort tendu). On immobilise la masse, puis on la lâche.

1. Calculez la norme de la réaction normale du plan sur la masse au cours du mouvement.
2. Montrez que, si l_0 est inférieur à une valeur x_0 qu'on précisera, la masse reste immobile.
AN : calculez x_0 si $m = 100\text{ g}$, $k = 30\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $g = 10\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $f = 0,1$.
3. On suppose que $l_0 > x_0$; la masse se met alors en mouvement. Écrivez l'équation différentielle vérifiée par x tant que la masse ne s'arrête pas.
Résolvez-la, et déduisez-en la valeur l_1 de x quand la masse s'arrête.
4. À quelle condition sur l_1 la masse reste-t-elle immobile ? déduisez-en une condition sur l_0 .
5. Si la masse repart en sens inverse, devinez sans calculs la valeur l_2 de x à l'arrêt suivant, et la condition sur l_0 pour qu'elle s'immobilise.
6. Pour une valeur l_0 donnée, combien d'allers-retours fera la masse avant de s'immobiliser ?
7. Simulez ce mouvement pour $l_0 = 8\text{ cm}$. Attention, la modélisation de la force de frottements est assez compliquée.

TDs numériques

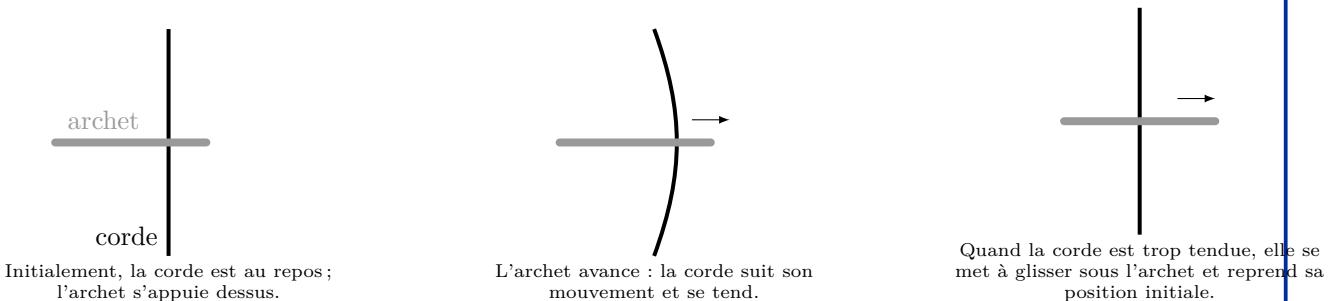
réponses page 375

TD numérique : Le phénomène de glissé-décolé (stick-slip)

Une craie qui crisse, une porte qui grince, une corde de violon qui vibre,... Tous ces phénomènes ont un point commun : ils font apparaître une vibration lors du déplacement de deux objets en contact. Ce phénomène se passe sous plusieurs conditions :

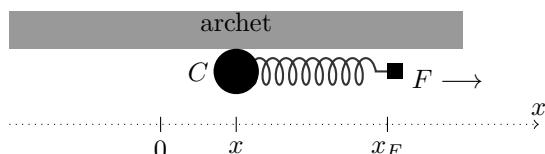
- les deux solides se déplacent l'un par rapport à l'autre avec une vitesse à peu près constante
- les frottements entre les deux solides diminuent fortement lorsque ces solides glissent l'un par rapport à l'autre
- l'un des solides n'est pas entièrement indéformable : il peut se déformer légèrement et alors une force de rappel le ramène à sa position initiale

La figure ci-dessous illustre ce qui se passe avec la corde du violon :

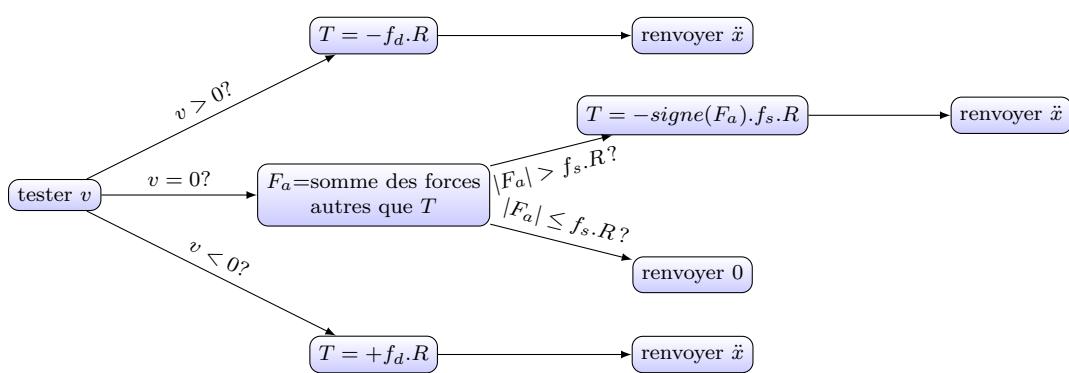


On va proposer la modélisation suivante dans le référentiel de l'archet (ou du tableau pour la craie) :

- l'archet est représenté comme un support immobile en-dessus
- la corde C de masse m est posée sous l'archet au contact de celui-ci
- la force normale entre la corde et l'archet est due à la pression de l'archet sur la corde ; on notera R cette force qu'on supposera connue. On ne tiendra pas compte du poids de la corde (qui est faible ; la corde tient néanmoins en l'air sans tomber car elle est tenue à ses deux extrémités, ce qui n'est pas représenté ici)
- il y a des frottements solides entre la corde et l'archet modélisés par des lois de Coulomb avec deux coefficients de frottements : un coefficient statique f_s lorsque la corde est immobile et un coefficient dynamique $f_d < f_s$ lorsqu'elle est en mouvement
- la tension de la corde cherche à la ramener à sa position d'équilibre, ce qu'on modélise par un ressort «virtuel» de raideur k et de longueur à vide nulle, exerçant une force de rappel $+k \cdot \ell \cdot \vec{e}_x$ avec ℓ la longueur de la corde ; mais comme on se place dans le référentiel de l'archet, la fixation de la corde bouge : on supposera que le point F où est fixé le ressort bouge selon la loi $x_F(t) = v_a t$ où v_a est la vitesse de l'archet
- les frottements avec l'air créent sur la corde une force de la forme $-\lambda \cdot \vec{v}$



1. Effectuez un bilan des 3 forces s'exerçant dans la direction \vec{e}_x sur C (on notera $T \vec{e}_x$ la force de frottements solides, pour le moment). Déduisez-en \ddot{x} en fonction de x , \dot{x} , T et des autres paramètres.
2. Pour une première simulation, on va prendre : $m = 1,2 \text{ g}$; $R = 0,8 \text{ N}$; $f_s = 0,2$; $f_d = 0,1$; $k = 2500 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$; $v_a = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$; $\lambda = 0,0 \text{ USI}$ pour commencer. Définissez ces constantes sous Python. Écrivez une fonction `acceleration(x, v, t)` qui renvoie l'accélération de C . On commencera par calculer les forces autres que T , puis on utilisera l'arbre suivant :



La fonction *signe* s'obtient avec `numpy.sign`.

3. Pour appliquer cela à un schéma d'Euler, il faut faire attention : quand l'objet est en mouvement et s'arrête, le fait d'avoir un pas temporel non infiniment petit fait qu'il va osciller autour d'une vitesse nulle sans jamais s'arrêter. Pour éviter cela, on va ajouter une étape au schéma d'Euler : après avoir calculé `tab_v[n+1]`, on va tester si `tab_v[n+1]` est de signe opposé à `tab_v[n]`, et si c'est le cas, on impose `tab_v[n+1]=0`.

Simulez alors le système sur une durée de 50 ms avec un pas de 1×10^{-5} s ; tracez $x(t)$ et vous devez voir que la corde avance pas à-coups.

4. Si on se place dans le référentiel du violon, il faut enlever le mouvement de l'archet ; tracez alors $x(t) - v_a \cdot t$ et observez l'oscillation de la corde.
5. On ajoute maintenant les frottements de l'air : $\lambda = 0,2$ USI. Retracez les courbes ; y aura-t-il du son ?
6. On met sur l'archet une substance appelée *collophane* qui augmente f_s sans modifier f_d . Augmentez progressivement f_s jusqu'à ce que les oscillations ne s'amortissent plus.
7. On prendra $f_s = 2,0$ dans la suite.

Observez l'effet sur la fréquence de variations des modifications (pas trop fortes, $\times 2$ au maximum) de :

- la raideur k de la corde
- la vitesse v_a de l'archet
- la pression R de l'archet

Pourquoi casse-t-on une craie pour qu'elle ne crisse plus ? Pourquoi huile-t-on les gonds d'une porte ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a)

Si le support est 2D, le mouvement peut être très varié ; si le support est 1D, il n'est pas forcément rectiligne, comme par exemple un chemin de fer.

Q3.(a)

Mais c'est la force de frottements solides ; il peut aussi y avoir des frottements avec l'air, qui n'ont rien à voir et sont modélisés par une autre force.

Q4.(a)

Imaginez que vous êtes debout, immobile, dans une rue inclinée.

Q5.(d)

Q6.(d)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M3.1 : Masse-ressort horizontal amorti [*]

1. $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = 0$
2. $x(t) = 0,5 [e^{-12,1t} - e^{-57,9t}]$

Réponses de l'exercice M3.2 : Flipper [**]

1. $\ddot{\ell} + \frac{k}{m}\ell = \frac{k}{m}\ell_0 - g \sin \alpha.$
2. $\ell(t) = \ell_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} + \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} - \frac{\ell_0}{2} \right) \cos(\omega_0 t)$
3. $t_1 = \frac{1}{\omega_0} \arccos \frac{2mg \sin \alpha}{2mg \sin \alpha - k\ell_0} = 17,7 \text{ ms}$ puis $v_1 = \dot{\ell}(t_1) = 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\ell_1 = \ell_0 = 5 \text{ cm}.$
4. $\ell(t) = \ell_1 + v_1(t - t_1) - \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2$
5. $t_2 = 0,466 \text{ s}$ puis $v_2 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

Réponses de l'exercice M3.3 : Aimant glissant dans un tube [**]

1. $m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + \frac{K}{x^3}$
2. $x_{eq} = \sqrt[3]{\frac{K}{mg \sin \alpha}}. K = mg \sin \alpha x_{eq}^3 = 1,2 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$
3. $m\ddot{x} = mg \sin \alpha \left(\frac{x_{eq}^3}{(x_{eq} + \varepsilon)^3} - 1 \right)$
4. $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{x_{eq}}} = 12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit une période propre de 0,5 s environ.

Réponses de l'exercice M3.4 : Position d'équilibre d'une masse fixée à un ressort [***]

1. La force du ressort sur la masse vaut $-k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0) \frac{-h\vec{e}_z + x\vec{e}_x}{\sqrt{h^2 + x^2}}.$
2. $m\ddot{x} = -k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$
3. L'équilibre est atteint lorsque $x = \pm \sqrt{l_0^2 - h^2}.$

Réponses de l'exercice M3.5 : Carton lancé avec une vitesse v_0 sur un sol plan horizontal [**]

1. $N = mg$ et $\dot{v} = -f.g.$ On intègre : $v = v_0 - f.g.t$
2. Il s'arrête lorsque $v(t) = 0$ soit $t = \frac{v_0}{f.g} = 1 \text{ s}$
3. Il a parcouru $d = \frac{v_0^2}{2f.g} = 1,5 \text{ m}$

Réponses de l'exercice M3.6 : Glissement d'un carton sur un plan incliné [**]

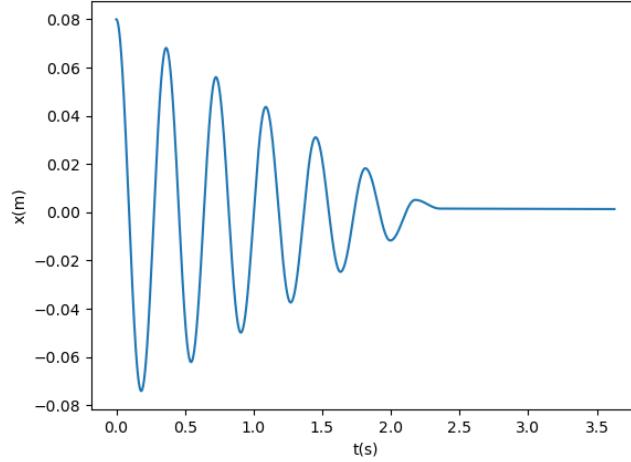
1. $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g \sin \beta t^2$
2. L'équation $x(t) = OB$ n'a des solutions que si $v_0 > v_1 = \sqrt{2g \sin \beta OB} = 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
3. On suppose qu'il y a mouvement selon \vec{e}_x ; alors après intégration : $x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}g (\sin \beta + f \cos \beta) t^2$
4. $f = \frac{v_2^2}{2g \cdot OB \cdot \cos \beta} - \tan \beta = 0,42$

Réponses de l'exercice M3.7 : Masse-ressort horizontal avec frottements secs [***]

Pensez toujours à faire un dessin.

1. $N = mg.$
2. La masse reste immobile si $l_0 < x_0 = \frac{fmg}{k} = 3,3 \text{ mm}$

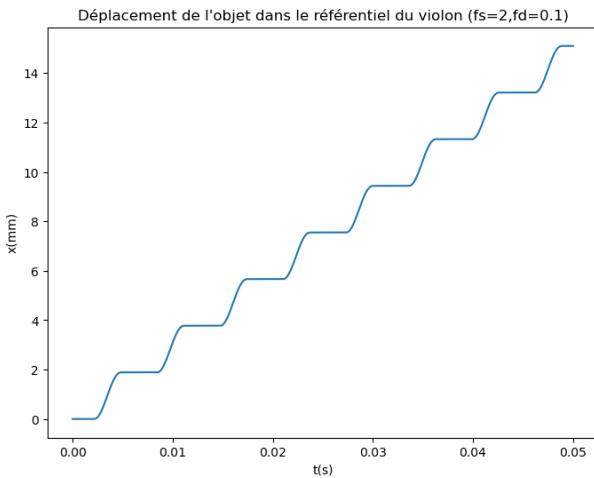
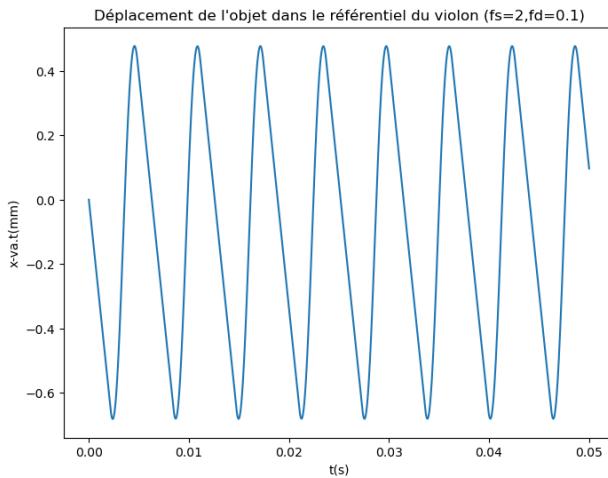
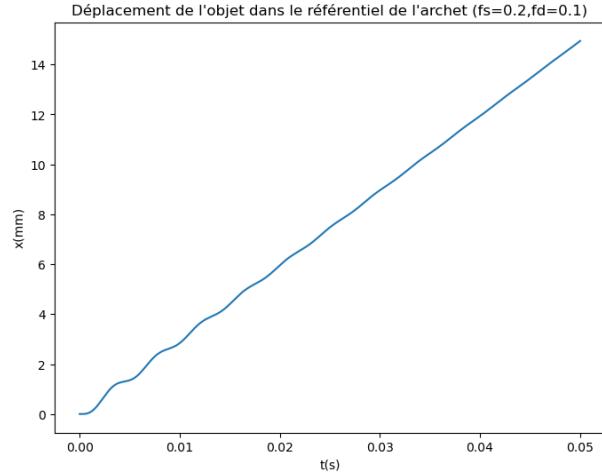
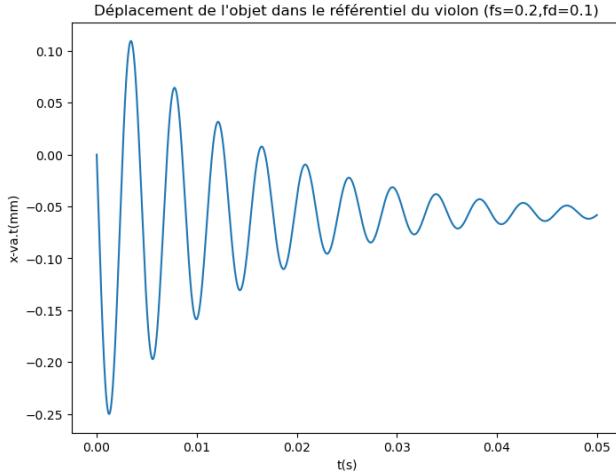
3. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ tant que la vitesse ne s'annule pas. La solution est de la forme $x(t) = \frac{fg}{\omega_0^2} + \left(l_0 - \frac{fg}{\omega_0^2}\right) \cos \omega_0 t$. Le premier arrêt a lieu pour $\omega_0 t = \pi$ et $l_1 = 2 \frac{fmg}{k} - l_0$
4. La masse s'immobilise $l_0 > x_1 = 3 \frac{fmg}{k} = 3x_0$
5. En généralisant, on devine que $l_2 = l_0 - 4 \frac{fmg}{k}$ et que la masse s'immobilise si $l_0 > x_2 = 5x_0$
6. Le nombre d'allers-retours vaut $N_{ar} = \frac{1}{2} E\left(\frac{l_0+x_0}{2x_0}\right)$ où $E()$ désigne la partie entière.
- 7.



Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Le phénomène de glissé-décolé (stick-slip)

On résout l'équation $\ddot{x} = \frac{k(v_a t - x) + T - \lambda \dot{x}}{m}$ avec $T = \begin{cases} -f_d \cdot R & \text{si } v > 0 \\ -\sum_{\text{autres forces}} \vec{f} & \text{si } v = 0, \text{ majoré en norme par } f_s \cdot R \\ +f_d \cdot R & \text{si } v < 0 \end{cases}$



Avec des coefficients de frottements proches, on observe des oscillations sinusoïdales amorties lorsque $\lambda \neq 0$; mais quand le coefficient de frottements statiques augmente, on observe un seuil (ici $f_s = 0,7$ avec les valeurs proposées) au-delà duquel les oscillations ne s'atténuent plus : elles s'auto-entretiennent avec des phases de glissement et des phases d'adhérence (le tracé de $x(t)$ met cela en évidence). Les oscillations sont non sinusoïdales (ce qui donne un son riche en harmoniques) et leur fréquence augmente avec la vitesse de l'archet et la raideur du ressort, et diminue avec la force normale R . C'est le même phénomène qui fait crisser les craies. Si par exemple on casse la craie en deux (ce qui double sa raideur) ou si on appuie moins fort, la fréquence de vibration augmente et passe dans les ultrasons qu'on n'entend plus.

Énergie mécanique

Cours

Le Principe Fondamental de la Dynamique est le principe essentiel pour déterminer la dynamique des points matériels et même des systèmes. Mais son utilisation n'est pas toujours aisée. Nous allons donc établir, au cours des chapitres suivants, diverses lois tirées du PFD qui pourrons, dans certains cas, permettre d'obtenir plus simplement les équations dynamiques du système. Dans ce chapitre, nous allons travailler sur la notion d'énergie mécanique.

Pour «sentir» cette notion et son utilité, considérons deux exemples que nous avons déjà étudiés : le chute libre et l'oscillateur harmonique.

Calcul : Énergie d'un objet en chute libre

On a déjà étudié un objet de masse m en chute libre depuis l'altitude h : si on note z son altitude, on a trouvé que $\dot{z} = -gt$ et $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. On peut donc en déduire que $t = -\frac{\dot{z}}{g}$ donc $z = h - \frac{1}{2}g\frac{\dot{z}^2}{g}$; après quelques manipulations, on peut en déduire que $mgz + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = mgh = cst$.

Calcul : Énergie d'un oscillateur harmonique

On a étudié un objet de masse m relié à un ressort de raideur k . On a vu que son allongement vaut $x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ donc $\dot{x}(t) = -X_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$. On en déduit que $x^2 + \frac{m}{k}\dot{x}^2 = X_0^2 \left(\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right) = X_0^2$ donc $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}kX_0^2 = cst$.

On constate donc que, dans les deux cas, il existe une grandeur de la forme $\frac{1}{2}m \times \text{vitesse}^2 + f(\text{position})$ qui est constante ou *conservée* à chaque instant du mouvement.

Cette quantité conservée nous donne des informations différentes du PFD. Il ne s'agit pas d'une équation différentielle (quoiqu'on verra qu'on peut en déduire une équation différentielle) mais d'une grandeur qui, si on la connaît au début, nous donne une relation vraie à chaque instant entre la vitesse et la position du point ; elle nous servira donc à répondre à des questions du genre : que vaut la vitesse de l'objet au sol ? ou que vaut l'élongation maximale du masse-ressort ?

Pour répondre à cela, il faut d'abord apprendre à établir cette grandeur qui est conservée.

M4.A. Énergie cinétique et travaux des forces

L'analyse préliminaire nous invite à définir :

Définition : Énergie cinétique d'un point matériel

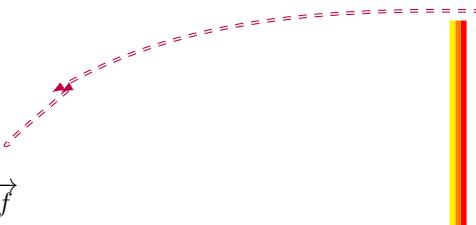
On définit l'énergie cinétique d'un point matériel de masse m et de vitesse v par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad (\text{M4.1})$$

Pour savoir comment évolue cette grandeur, on va la dériver :

Calcul : Dérivée temporelle de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{1}{2}m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2}m^2 \vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ &= \vec{v} \cdot \left(\sum \vec{f} \right) = \sum \vec{v} \cdot \vec{f} \text{ grâce au PFD qui indique que } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{f} \end{aligned}$$



On voit donc que, dans la dérivée de l'énergie cinétique, les forces interviennent sous une forme particulière, le produit scalaire de la force par la vitesse du point.

Définition : Puissance d'une force

Une force \vec{f} qui s'applique sur un point M de vitesse \vec{v} fournir une puissance

$$\mathcal{P}_{\vec{f}} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (\text{M4.2a})$$

Une puissance s'exprime en Watts (W), c'est une énergie fournie par unité de temps : $1W = 1J.s^{-1}$.

On peut donc écrire la première version du Théorème de l'énergie cinétique :

Théorème de l'Énergie Cinétique (version dérivée)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{\vec{f}} \quad (\text{M4.2b})$$

Remarque : Ce théorème est parfois appelé *Théorème de la Puissance Cinétique*.

Ainsi, on voit qu'une force permet de fournir de l'énergie cinétique à un point matériel (ou de lui en prendre si la puissance est négative).

Remarque : La puissance d'une force est non nulle uniquement si elle s'applique à un objet en mouvement. Pourtant, cela est contre-intuitif : si je tiens une masse de 3 kg immobile à bout de bras, je vais vite me fatiguer, alors que la puissance à fournir est censée être nulle. Pourquoi ? Parce que nos muscles ne sont jamais immobiles. Quand on tient quelque chose en l'air, nos muscles se contractent sans arrêt plus ou moins, selon un processus commandé par le cerveau, comme un système asservi. Du coup, notre main tremble toujours un peu, elle bouge donc, et nos muscles fournissent donc une puissance mécanique non nulle.

Si maintenant on intègre l'équation (M4.2b) entre deux instants t_1 et t_2 , on va obtenir à droite l'intégrale de la puissance fournie, qui est l'énergie fournie ; en physique, une énergie échangée porte un nom : c'est un *travail*.

Définition : Travail d'une force

Une force \vec{f} qui s'applique sur un point M fournit entre les instants t_1 et t_2 un travail

$$W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}_{\vec{f}} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM} \quad (\text{M4.3a})$$

Démonstration

La première intégrale est une définition ; ensuite on écrit que $\mathcal{P}_{\vec{f}} \cdot dt = \vec{f} \cdot \vec{v}(M)dt$ or $\vec{v} \cdot dt = \frac{d\vec{OM}}{dt} dt$ est égal au petit déplacement $d\vec{OM}$ qu'on a déjà vu en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Pour rappel, $d\vec{OM} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$ en coordonnées cartésiennes.

Théorème de l'Énergie Cinétique (version intégrale)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces qui s'exercent sur ce point entre ces deux instants.

$$\Delta^{t_1 \rightarrow t_2} E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} \quad (\text{M4.3b})$$

Démonstration

Évidente en intégrant (M4.2b) entre t_1 et t_2 : le terme de droite fait apparaître des travaux, tandis qu'à gauche, $\int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt = [E_c]_{t_1}^{t_2} = E_c(t_2) - E_c(t_1)$. La notation mathématique $[E_c]_{t_1}^{t_2}$ est traduite par $\Delta^{t_1 \rightarrow t_2} E_c$ en physique, et se lit «variation de E_c entre t_1 et t_2 ».

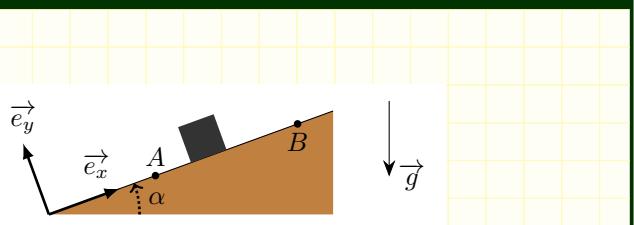
Remarque : Si on travaille entre t_1 et $t_1 + dt$ avec dt petit, on peut établir le TEC en version infinitésimale. À gauche, la variation d' E_c est petite, on marque cela en remplaçant le Δ par un d ; à droite, sur un temps court, on peut considérer que ce qui est dans l'intégrale est constant, et on peut enlever l'intégrale. On obtient alors

$$dE_c = \sum \delta W_{\vec{f}} = \sum \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

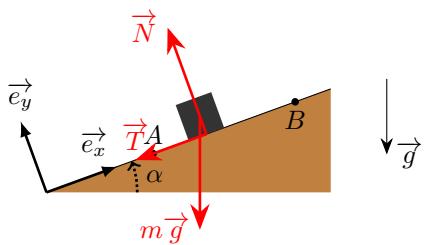
où dE_c est la petite variation d'énergie et $\delta W_{\vec{f}}$ le travail infinitésimal de la force. Cette expression sert assez peu, sauf pour certaines démonstrations.

Exemple : Carton sur un plan incliné

On considère un carton de masse m posé sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 12^\circ$ par rapport à l'horizontale. On le lance depuis un point A avec une vitesse initiale $v_0 = 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ selon \vec{e}_x ; il glisse sur le sol en étant soumis à son poids et à la réaction du sol sur lequel il frotte avec un coefficient $f = 0,19$, ce qui donne (on l'admettra) une force de frottements $-fmg \cos \alpha \vec{e}_x$; il s'arrête en un point B ; on note $d = AB$.



1. Exprimez le travail de toutes les forces s'appliquant sur le carton entre A et B .
2. En appliquant le TEC, déterminez d .
3. Le carton redescend jusqu'au point B ; en appliquant de nouveau de TEC, calculer la vitesse v_1 en B .



1. Le carton se déplace selon \vec{e}_x , son petit déplacement vaut donc $dx \cdot \vec{e}_x$. Il est soumis aux actions suivantes :
 - la réaction normale \vec{N} : $W_{\vec{N}}^{A \rightarrow B} = \int_A^B N \vec{e}_y \cdot dx \cdot \vec{e}_x = 0$
 - la force de frottements : $W_{\vec{T}}^{A \rightarrow B} = \int_A^B -f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \vec{e}_x \cdot dx \cdot \vec{e}_x = \int_{x_A}^{x_B} -f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot dx = -f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot (x_B - x_A) = -f \cdot m \cdot g \cdot d \cdot \cos \alpha$
 - le poids : $W_{m \vec{g}}^{A \rightarrow B} = \int_A^B m \cdot g \cdot (-\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y) \cdot dx \cdot \vec{e}_x = \int_{x_A}^{x_B} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot dx = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha$
2. D'après le TEC appliqué entre A et B au carton, dans le référentiel terrestre galiléen,

$$\begin{aligned} E_c(B) - E_c(A) &= W_{\vec{N}}^{A \rightarrow B} + W_{\vec{T}}^{A \rightarrow B} + W_{m \vec{g}}^{A \rightarrow B} \\ \text{donc } 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 &= -(f \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)m \cdot g \cdot d \\ \text{donc } d &= \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha + \sin \alpha)} = 1,3 \text{ m} \end{aligned}$$

3. Au retour, la force de frottements change de sens. On a alors par le TEC :

$$\begin{aligned} E_c(A) - E_c(B) &= W_{\vec{N}}^{B \rightarrow A} + W_{\vec{T}}^{B \rightarrow A} + W_{m \vec{g}}^{B \rightarrow A} \\ \text{donc } \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 &= 0 - f \cdot m \cdot g \cdot d \cdot \cos \alpha + m \cdot g \cdot d \cdot \sin \alpha \\ \text{donc } v_1 &= \sqrt{2g(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)} = 0,76 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

M4.B. Forces conservatives et énergie mécanique

L'utilisation du TEC en version intégrée oblige à calculer des intégrales parfois compliquées, souvent les mêmes. Ce théorème ne sera donc que peu utile tant qu'on n'aura pas trouvé un moyen de simplifier son terme de droite. Pour certaines forces, c'est possible.

B.1. Forces conservatives

Définition : Force conservative

Une force est conservative si son travail n'est pas toujours nul, et si, lorsque le point sur lequel elle s'applique se déplace d'un point A à un point B, ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, ni du temps mis, mais uniquement des *positions* de A et de B.

Remarque : Cette propriété nécessite que la force ne dépende que de la *position* du point ; en particulier elle ne doit dépendre ni de la vitesse, ni directement du temps. Cela ne veut pas dire qu'elle ne varie pas au cours du temps, mais cette variation est due au déplacement du point au cours du temps.

Propriété : Travail le long d'un chemin fermé

Le travail d'une force conservative le long d'un chemin fermé est nul.

Démonstration

Soit \vec{f} une force conservative, et A le point de départ du chemin fermé. Pour calculer $W_{\vec{f}}^{A \rightarrow A}$, on peut choisir n'importe quel chemin ; entre autres, le chemin qui ne bouge pas. Le long de ce chemin, $d\vec{OM} = \vec{0}$ donc le travail est nul.

Propriété : Relation de Chasles

Les travaux des forces conservatives vérifient la relation de Chasles : $W_{\vec{f}}^{A \rightarrow B} + W_{\vec{f}}^{B \rightarrow C} = W_{\vec{f}}^{A \rightarrow C}$

Démonstration

Évident, puisque le travail est défini par une intégrale.

Une conséquence évidente de ces deux propriétés, c'est que si \vec{f} est保守的, alors $W_{\vec{f}}^{A \rightarrow B} = -W_{\vec{f}}^{B \rightarrow A}$.

Définition : Énergie potentielle associée à une force conservative

Soit \vec{f} une force conservative. On choisit un point O de référence. Alors pour tout point M de l'espace, on définit l'énergie potentielle associée à \vec{f} en M par

$$E_{p,\vec{f}}(M) = -W_{\vec{f}}^{O \rightarrow M} \quad (\text{M4.4a})$$

Remarque : L'énergie potentielle est définie en tout point ; on dit que c'est un *champ*. Cette énergie dépend de la force, mais aussi du point d'origine choisi. Si on prend une autre origine O' , alors $W_{\vec{f}}^{O' \rightarrow M} = W_{\vec{f}}^{O' \rightarrow O} + W_{\vec{f}}^{O \rightarrow M}$, ce qui montre que toutes les énergies potentielles seront décalées d'une valeur constante. On dit parfois que «les énergies potentielles sont définies à une constante près.» On peut dire aussi qu'une énergie potentielle n'a aucun sens, ce sont les différences d'énergie potentielle qui sont importantes.

Propriété : Travail d'une force conservative

Le travail d'une force conservative entre deux points A et B vaut

$$W_{\vec{f}}^{A \rightarrow B} = E_{p,\vec{f}}(A) - E_{p,\vec{f}}(B) = -\Delta^{A \rightarrow B} E_{p,\vec{f}} \quad (\text{M4.4b})$$

Démonstration

Par la relation de Chasles : $W_{\vec{f}}^{A \rightarrow B} = -W_{\vec{f}}^{O \rightarrow A} + W_{\vec{f}}^{O \rightarrow B} = E_{p,\vec{f}}(A) - E_{p,\vec{f}}(B)$

Il faut maintenant illustrer cette définition sur des exemples concrets. Il y a deux cas à connaître :

Propriété : Énergie potentielle de pesanteur

La poids est une force conservative, et son énergie potentielle (de pesanteur) vaut

$$E_{pp} = mg \times \text{altitude} + cst \quad (\text{M4.5})$$

l'altitude étant comptée positivement vers le haut.

Démonstration

On va travailler avec un axe \vec{e}_z orienté vers le haut ; z représente donc l'altitude du point M étudié. Calculons alors le travail du poids lorsque le point M se déplace de A à B :

$$\begin{aligned} W_{\text{poids}}^{A \rightarrow B} &= \int_A^B m \vec{g} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B (-mg\vec{e}_z) \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z) \\ &= \int_A^B -mgdz = -\Delta^{A \rightarrow B}(mgz) = -mgz(B) + mgz(A) \end{aligned}$$

On voit donc bien que le travail ne dépend que de l'altitude des points A et B et peut s'écrire $W = -\Delta E_p$ avec $E_p = mgz$. La constante éventuelle indique qu'on peut choisir l'origine des altitudes là où on veut.

Remarque : On rappelle que la notation $\Delta^{A \rightarrow B} f$ en physique correspond à la notation $[f]_A^B$ en maths : c'est $f(B) - f(A)$.

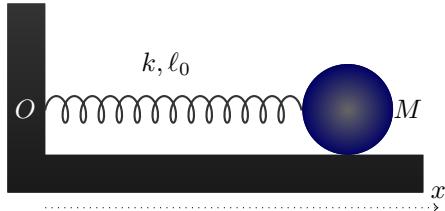
Propriété : Énergie potentielle élastique

La force de rappel d'un ressort est保守ative, et son énergie potentielle (élastique) vaut

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \times \text{raideur} \times \text{allongement}^2 \quad (\text{M4.6})$$

Démonstration

On va effectuer la démonstration pour un mouvement 1D seulement ; la démonstration en 3D nécessite les coordonnées sphériques.



Considérons un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , placé selon l'axe \vec{e}_x , fixé à un bout à l'origine O et à l'autre bout à un point M mobile repéré par sa position x qui est donc aussi la longueur du ressort. Alors, lorsque le point M se déplace de A à B :

$$\begin{aligned} W_{\text{ressort}}^{A \rightarrow B} &= \int_A^B -k(x - \ell_0)\vec{e}_x \cdot (dx\vec{e}_x) \\ &= \int_A^B -k(x - \ell_0)dx = -\Delta^{A \rightarrow B} \left(\frac{1}{2}kx^2 - kx\ell_0 \right) \end{aligned}$$

donc la force est保守ative et son énergie potentielle vaut $\frac{1}{2}kx^2 - kx\ell_0 + cst$.

Par convention, on choisit une énergie potentielle nulle lorsque $x = \ell_0$, ce qui donne $cst = \frac{1}{2}k\ell_0^2$ et finalement $E_p = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.

Nous avons donc trouvé deux exemples de forces conservatives, et établi leur énergie potentielle. Parfois, nous rencontrons de nouvelles forces, et il sera possible, par la même méthode, d'établir l'expression de leur énergie potentielle. Mais il existe un autre cas : parfois on connaît l'énergie potentielle ; comment alors en déduire la force dont dérive cette énergie ? On va expliciter cette relation, d'abord en 1D, puis en 3D dans le cas général.

Propriété : Relation entre force et énergie potentielle en 1D

Si une force $\vec{f}(x)$ selon la direction \vec{e}_x est conservative et si on connaît son énergie potentielle E_p , alors

$$\vec{f}(x) = -\frac{dE_p}{dx} \vec{e}_x \quad (\text{M4.7a})$$

Démonstration

Pour cette démonstration, on va utiliser le travail infinitésimal lorsque le point M sur lequel s'applique la force se déplace de dx : il va de x à $x + dx$. On sait par définition que le travail de la force vaut alors $\delta W = \vec{f} \cdot (dx \cdot \vec{e}_x) = f(x).dx$ en notant $\vec{f} = f(x).\vec{e}_x$. D'après la propriété (M4.4b), on peut aussi écrire $\delta W = E_p(x) - E_p(x + dx)$. Or par un développement limité à l'ordre 1, $E_p(x + dx) = E_p(x) + dx \frac{dE_p}{dx}$, ce qui donne $\delta W = -dx \frac{dE_p}{dx}$.

En mettant ensemble les deux expressions, on obtient $f(x).dx = -dx \frac{dE_p}{dx}$ soit $f(x) = -\frac{dE_p}{dx}$.

Pour passer à la 3D, il faut introduire la notion de *dérivées partielles*.

Un peu de maths : Dérivées partielles

Soit $f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables. On définit la dérivée partielle de f par rapport à la variable x (ou y , ou z), notée avec des «d ronds» : $\frac{\partial f}{\partial x}$, comme la dérivée de la fonction f par rapport à x si on maintient les autres variables constantes.

Par exemple, si $f(x, y, z) = x.y + 2z + \frac{z}{x}$, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{z}{x^2}$; de même $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = 2 + \frac{1}{x}$.

Définition : Gradient d'un champ scalaire

Soit $\mathcal{C}(M)$ un champ scalaire, c'est-à-dire une fonction de la position M qui a pour valeur un nombre (par opposition à un vecteur). On lui associe un champ vectoriel appelé «gradient de \mathcal{C} » calculé en coordonnées cartésiennes par la formule

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{C}) = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \vec{e}_z$$

En tout point, le gradient est dirigé vers les zones où \mathcal{C} est maximal.

Par exemple, la température est un champ scalaire ; on parle d'un «gradient de température» lorsqu'elle est plus élevée en un point qu'en un autre. Le gradient de température est un champ vectoriel qui, en tout point, indique la direction du chaud.

Propriété : Relation entre force et énergie potentielle

Si une force \vec{f} est保守的 et si on connaît son énergie potentielle $E_p(M)$ en tout point, alors

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z\right) \quad (\text{M4.7b})$$

Démonstration

On travaille encore sur un petit déplacement. Le travail vaut $\delta W = \vec{f} \cdot d\overrightarrow{OM}$. Notons $\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$. Alors $\delta W = (f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z) \cdot (dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z) = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.

On peut aussi écrire $\delta W = E_p(x, y, z) - E_p(x + dx, y + dy, z + dz)$ en notant (x, y, z) les coordonnées de départ. Pour calculer $E_p(x + dx, y + dy, z + dz)$, on va admettre la généralisation de la formule de développement limité à l'ordre 1, pour les fonctions à plusieurs variables : $E_p(x + dx, y + dy, z + dz) = E_p(x, y, z) + dx \frac{\partial E_p}{\partial x} + dy \frac{\partial E_p}{\partial y} + dz \frac{\partial E_p}{\partial z}$: on somme les trois DL sur les trois variables, en utilisant les dérivées partielles. On en déduit que $\delta W = -dx \frac{\partial E_p}{\partial x} - dy \frac{\partial E_p}{\partial y} - dz \frac{\partial E_p}{\partial z}$.

En identifiant les deux expressions, $f_x dx + f_y dy + f_z dz = -dx \frac{\partial E_p}{\partial x} - dy \frac{\partial E_p}{\partial y} - dz \frac{\partial E_p}{\partial z}$ pour tous dx, dy, dz .

On a donc facilement $f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; $f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$; $f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$.

B.2. Énergie mécanique

Définition : Classification des forces

On classe les forces en 3 catégories :

- les *forces conservatives*, qui dérivent d'une énergie potentielle
- les *forces qui ne travaillent jamais*, car elles sont toujours orthogonales au déplacement
- les autres forces, qu'on appelle *forces non conservatives*

Le tableau M4.1 rassemble quelques forces que nous avons déjà vues et donne leur caractère ; certaines énergies potentielles sont affirmées sans que nous les ayons démontrées pour le moment.

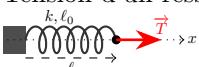
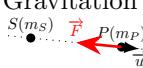
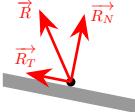
Force	Aspect vectoriel	Aspect énergétique
Poids	 $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$	Conservative $E_{pp} = mgz + cst$
Tension d'un ressort	 $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$	Conservative $E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
Gravitation	 $\vec{F} = -\frac{Gm_S m_P}{SP^2} \vec{u}$	Conservative $E_{pg} = -\frac{Gm_S m_P}{SP}$
Réaction d'un support	 $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ $\vec{R}_T = \vec{0}$ en l'absence de frottements	\vec{R}_N ne travaille jamais. $\mathcal{P} = 0$ s'il n'y a pas de frottements ou s'il n'y a pas de mouvement de glissement $\mathcal{P} < 0$ sinon : force non conservative
Frottements fluides	 $\vec{F} = -k \vec{v}$ à basse vitesse $\vec{F} = -k \ \vec{v}\ \vec{v}$ à grande vitesse	Force non conservative : $\mathcal{P} = -k \ \vec{v}\ ^2 \leq 0$ Force non conservative : $\mathcal{P} = -k \ \vec{v}\ ^3 \leq 0$
Moteur		Force non conservative : $\mathcal{P} > 0$

TABLEAU M4.1 – Aspect énergétique de différentes forces.

Définition : Énergie mécanique

On définit l'énergie mécanique d'un point comme la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles associées à toutes les forces conservatives qui s'appliquent sur lui :

$$E_m = E_c + \sum_{\substack{\text{forces} \\ \text{conservatives}}} E_p \quad (\text{M4.8})$$

Théorème de l'Énergie Mécanique (version intégrale)

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives qui s'exercent sur ce point entre ces deux instants.

$$\Delta^{t_1 \rightarrow t_2} E_m = E_m(t_2) - E_m(t_1) = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} \quad (\text{M4.9})$$

Démonstration

Par le TEC : $E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} = \sum_{\substack{\text{forces} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} + \sum_{\substack{\text{forces ne} \\ \text{travaillant pas}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2} + \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2}$

$$= \sum_{\substack{\text{forces} \\ \text{conservatives}}} (E_p(t_1) - E_p(t_2)) + 0 + \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2}$$

donc $E_c(t_2) - E_c(t_1) + \sum_{\substack{\text{forces} \\ \text{conservatives}}} (E_p(t_2) - E_p(t_1)) = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2}$
d'où $E_m(t_2) - E_m(t_1) = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{t_1 \rightarrow t_2}$

Théorème de l'Énergie Mécanique (version dérivée)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces non conservatives qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} \mathcal{P}_{\vec{f}} \quad (\text{M4.10})$$

Démonstration

Appliquons le TEM entre 0 et t : $E_m(t) - E_m(0) = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} W_{\vec{f}}^{0 \rightarrow t} = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} \int_0^t \mathcal{P}_{\vec{f}} \cdot dt$ donc en dérivant
on obtient bien $\frac{dE_m}{dt} - 0 = \sum_{\substack{\text{forces non} \\ \text{conservatives}}} \mathcal{P}_{\vec{f}}$

Remarque : Ce théorème est parfois appelé *Théorème de la Puissance Mécanique*.

Remarque : Il ne faut pas mélanger le TEC et le TEM : si on utilise l'**énergie cinétique** ; on tient compte de toutes les forces ; si on utilise l'**énergie mécanique**, on ne tient compte que des **forces non conservatives**.

Exemple : Tramway en montée

Un tramway de masse $m = 57\text{t}$ met 12s pour aller de la place du Peuple à l'arrêt du lycée Fauriel situé 7m plus haut (en oubliant de s'arrêter à la Grande Poste...).

1. Quelle est sa vitesse ascentionnelle \dot{z} ? (en notant z son altitude)
2. Calculer la puissance fournie par les moteurs si on néglige les frottements et s'il roule à vitesse constante.

1. $\dot{z} = \frac{7}{12} = 0,58\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Le tramway est soumis à son poids d'énergie potentielle mgz et à la force motrice de puissance P inconnue.

Le théorème de l'énergie mécanique indique donc que $\frac{dE_m}{dt} = P$ donc $\frac{dE_c}{dt} + \frac{d(mgz)}{dt} = P$. Or le tramway roule à vitesse constante, donc $\frac{dE_c}{dt} = 0$ d'où $P = mg\dot{z} = 332\text{kW}$

B.3. Systèmes conservatifs

Ces théorèmes se simplifient si aucune force non conservative n'est présente :

Définition : Système conservatif

Un système matériel est conservatif si aucune force non conservative ne s'exerce sur lui.

Propriété : Conservation de l'énergie mécanique

Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est constante au cours du temps.

Démonstration

Évidente en appliquant le TEM, puisque le terme de droite est nul.

Pour un système conservatif, la conservation de l'énergie mécanique permet, si on connaît les conditions initiales :

- soit de calculer la vitesse en un point de position connue
- soit de trouver la position correspondant à une vitesse particulière (souvent nulle)

Exemple : Chute libre

Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale depuis une altitude h . Il tombe et on néglige les frottements de l'air. Exprimer sa vitesse au sol ; AN pour $h = 40$ m.

On étudie l'objet de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son poids, qui est conservatif, d'énergie potentielle $E_{pp} = mgz$ avec z l'altitude. Donc le système est conservatif, et $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = cst$.

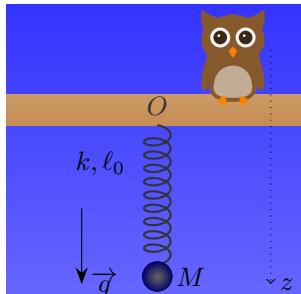
Au début : $E_m = \frac{1}{2}m0^2 + mgh$.

Au sol : $E_m = \frac{1}{2}mv_{sol}^2 + mg0$.

Donc $mgh = \frac{1}{2}mv_{sol}^2$ d'où on tire $v_{sol} = \sqrt{2gh} = 28$ m · s⁻¹.

Exemple : Élongation d'un ressort

Un objet de masse $m = 500$ g est suspendu à une branche par un ressort de raideur $k = 150$ N · m⁻¹ et de longueur à vide $\ell_0 = 12$ cm. On note son altitude par z comptée **vers le bas** à partir de la branche (point O).



1. Montrer que ce système est conservatif, et exprimer son énergie mécanique en fonction de z et \dot{z} .
2. On le lance depuis $z = \ell_0$ avec une vitesse initiale $v_0 = 50$ cm · s⁻¹. Calculer son allongement maximal.

1. — On étudie le système {point M }.
- On travaille dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen
- Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = z\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$ d'où $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$
- Bilan des actions : le point est soumis à son poids qui est conservatif d'énergie potentielle $E_{pp} = -mgz$ (attention au $-$, car z est compté ici vers le bas) et à la force du ressort qui est conservative d'énergie potentielle $E_{pe} = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$. On néglige les frottements (l'énoncé n'en parle pas).
- Le système est donc conservatif, et son énergie mécanique vaut $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2 = cst$

2. Au départ : $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 + 0$.

À allongement maximum, la vitesse est nulle donc $E_m = 0 - mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 = -mg(\ell_0 + x) + \frac{1}{2}kx^2$ en notant $x = z_{max} - \ell_0$ l'allongement maximal.

Donc $\frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 = -mgz_{max} + \frac{1}{2}k(z_{max} - \ell_0)^2 = -mg(\ell_0 + x) + \frac{1}{2}kx^2$ soit $\frac{1}{2}kx^2 - mgx - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$.

On trouve deux racines, on garde la positive : $x = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + mv_0^2}}{k} = 7,7$ cm soit $z_{max} = 19,7$ cm

M4.C. Étude des systèmes conservatifs à 1 degré de liberté

Nous allons voir dans cette section que, pour un système conservatif décrit par une seule variable, la connaissance de l'énergie potentielle suffit à tout connaître du mouvement de ce système.

Pour simplifier la description, nous supposerons dans la suite que le point matériel étudié, de masse m , se déplace selon l'axe x , et est un système conservatif; supposons aussi qu'on connaisse son énergie potentielle $E_p(x)$. Alors sa vitesse vaut $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$, donc $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. On en déduit que

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = cst \quad (\text{M4.11})$$

À partir de cette relation, on va établir plusieurs résultats.

C.1. Description générale du mouvement

Propriété : Barrière d'énergie potentielle

Un système conservatif ne peut jamais aller dans une zone où l'énergie potentielle est supérieure à son énergie mécanique : on appelle cela une *barrière d'énergie potentielle* ou *barrière de potentiel*.

Si les conditions initiales placent le système entre deux barrières de potentiel, son mouvement sera borné et périodique ; sinon, il sera non borné.

Démonstration

On sait que $E_m = E_c + E_p$ à chaque instant. Or $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ donc $E_m \geq E_p$ à chaque instant. Le système ne peut donc pas atteindre de zone telles que $E_m < E_p$.

La situation est illustrée sur les figures M4.1 à M4.4 :

- sur la figure M4.1 est représentée la chute libre : l'énergie potentielle du point est mgz avec z l'altitude ; c'est une droite. Les traits horizontaux représentent différentes énergies mécaniques possibles (ce sont les conditions initiales qui déterminent la valeur de E_m). Pour chaque valeur de E_m , il apparaît une barrière de potentiel du côté des z grands : le système a une altitude maximale z_{max} qu'il peut atteindre, qui vérifie l'équation $E_p(z_{max}) = E_m$; pour cette valeur de z , l'énergie cinétique est nulle, donc la vitesse est nulle. Le mouvement est, par contre, non borné vers le bas, car dans ce modèle-là on ne tient pas compte du sol, et on considère qu'on peut descendre indéfiniment.

En-dessous du schéma d'énergie potentielle est représenté le portrait de phase, sur lequel on observe des trajectoires bornées à droite mais pas à gauche.

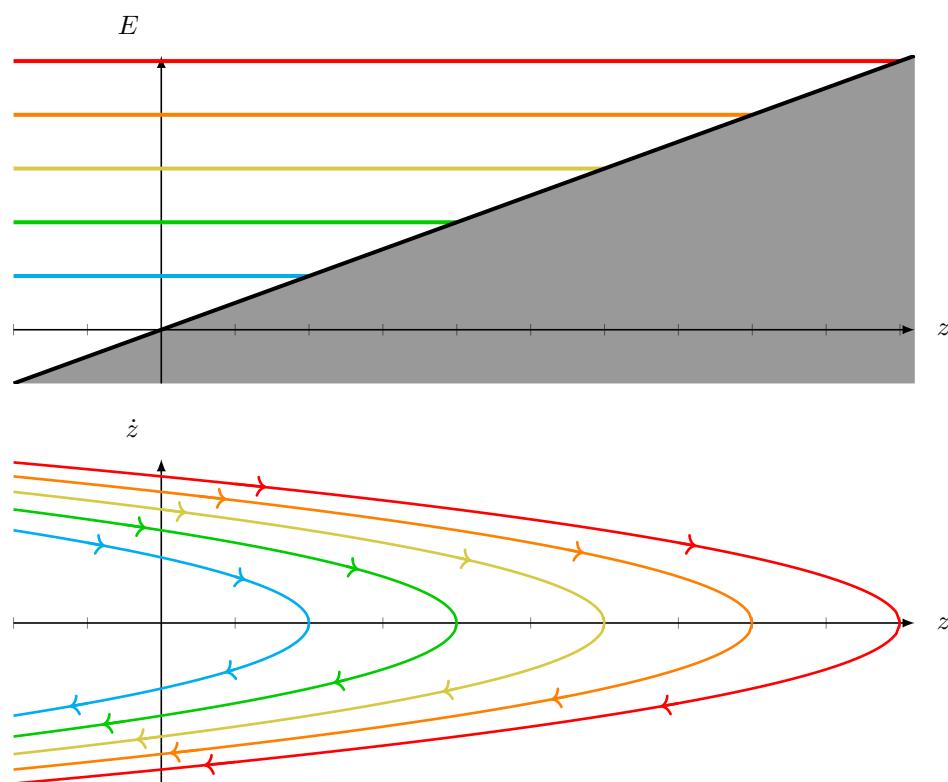


FIGURE M4.1 – Chute libre.

- sur la figure M4.2 est représentée un masse-ressort horizontal : l'énergie potentielle est $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ avec ℓ la longueur, ce qui donne un profil en parabole qui tend vers l'infini des deux côtés (bien évidemment, dans le cas d'un véritable ressort, ce modèle a des limites). Quelle que soit l'énergie mécanique initiale, le mouvement est borné entre deux barrières de potentiel, et oscille périodiquement autour de la position $\ell = \ell_0$. Les trajectoires de phase sont alors refermées sur elle-mêmes.

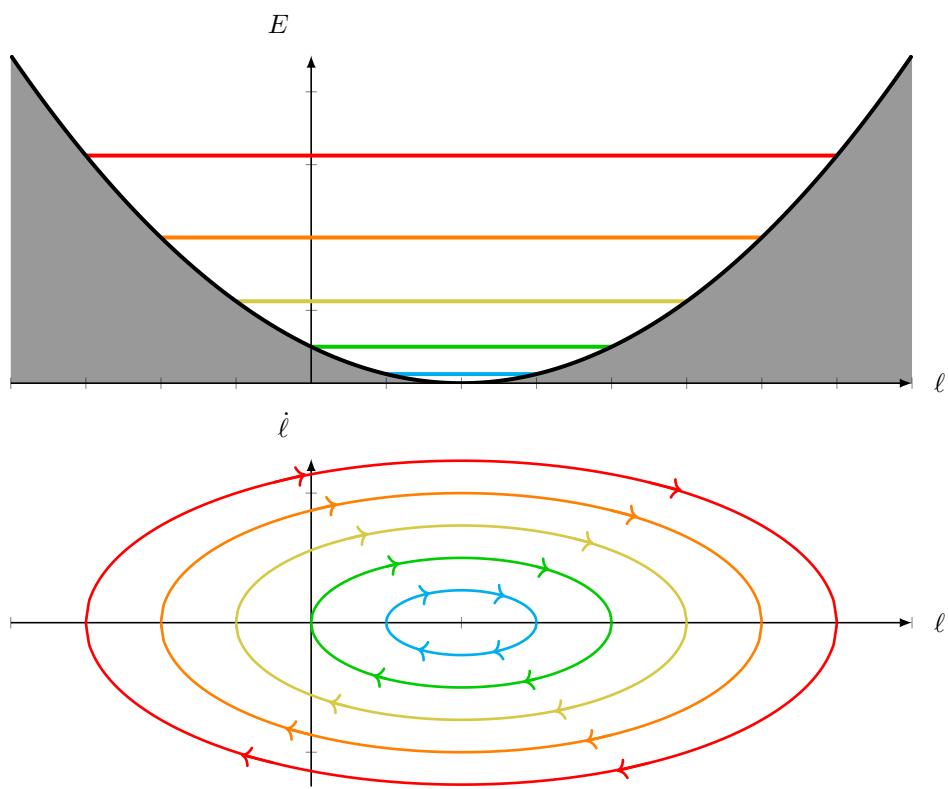


FIGURE M4.2 – Masse-ressort (potentiel harmonique).

- sur la figure M4.3 est représentée l'énergie potentielle d'un électron qui s'approche d'un autre électron ; on verra plus tard que l'énergie potentielle électrique vaut alors $\frac{K}{r}$ avec K une constante et r la distance entre les électrons. Le mouvement est alors borné inférieurement : il existe une distance minimale d'approche entre les électrons.

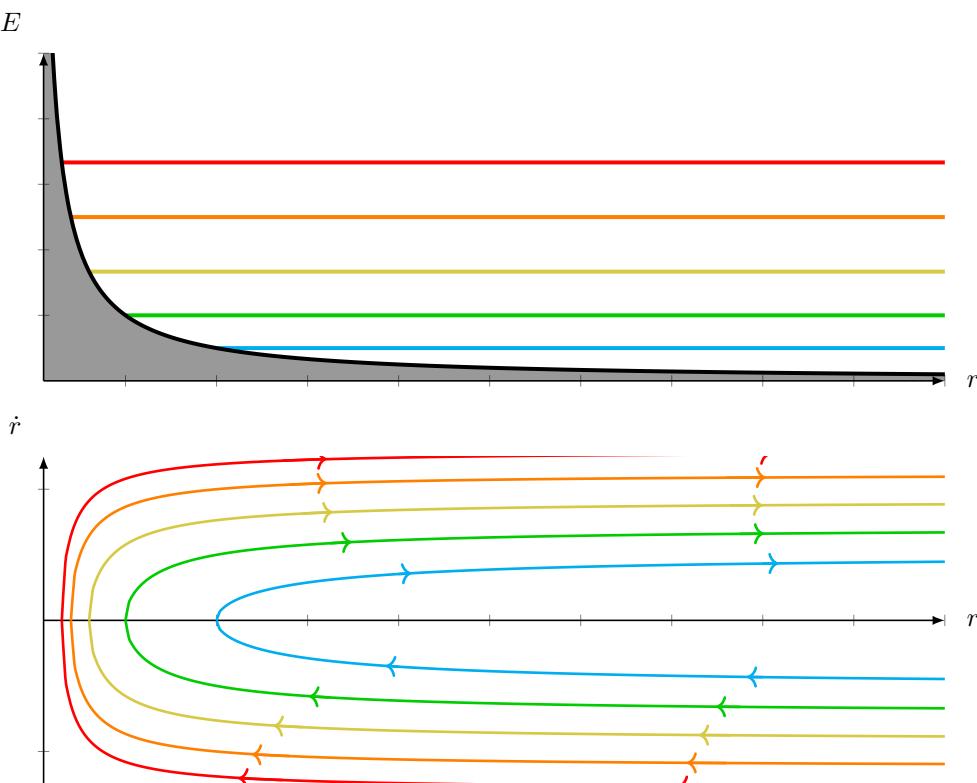


FIGURE M4.3 – Répulsion entre deux électrons.

- sur la figure M4.4 est représentée la même chose mais pour deux protons : en plus de la force électrique qui les repousse, les protons ont à très courte distance une force attractive, l'interaction forte. La figure illustre le potentiel modélisé par la formule de Saxon-Woods. On constate que le type de mouvement (borné ou pas) dépend de l'énergie et des conditions initiales : pour une forte énergie, le mouvement est non borné ; pour une faible énergie, il est borné ; et pour une énergie intermédiaire (en jaune) les deux cas sont possibles. Ce modèle permet d'expliquer de nombreux comportements (fusion nucléaire, radioactivité,...) de façon simple.

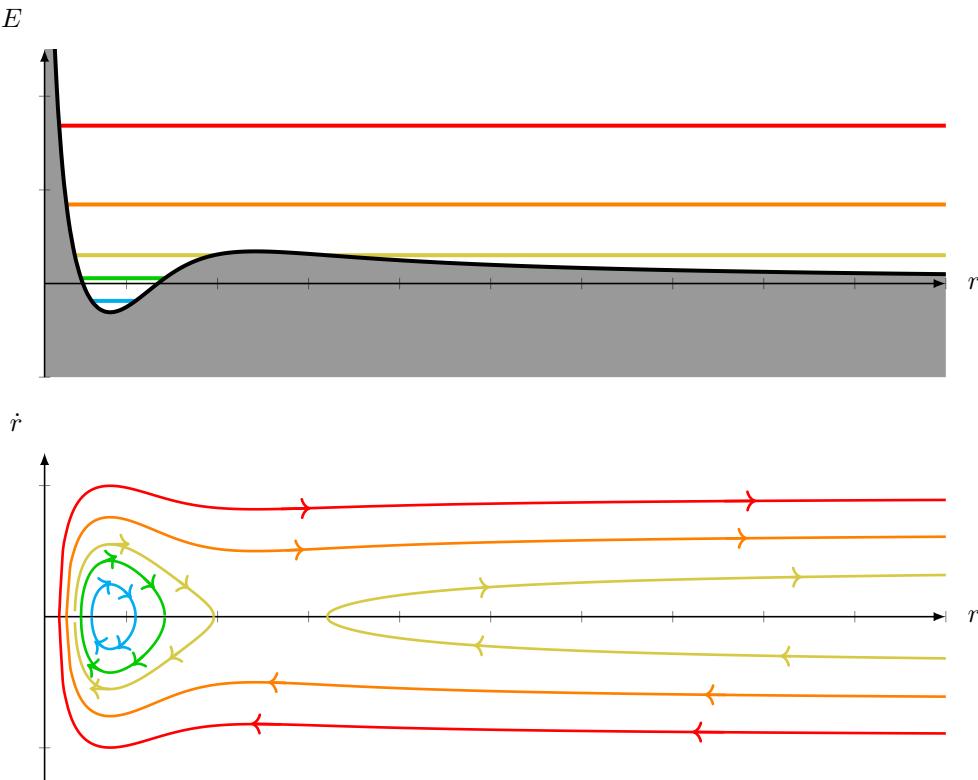


FIGURE M4.4 – Répulsion entre deux protons.

C.2. Équation différentielle du mouvement

Propriété : Équation différentielle du mouvement

Un système conservatif de seul degré de liberté x obéit à l'équation différentielle

$$m\ddot{x} + \frac{dE_p}{dx} = 0 \quad (\text{M4.12})$$

Démonstration

On sait que $E_m = cst$, donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$. On en déduit que $\frac{d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$. Pour dériver ces deux termes, il faut être soigneux :

- le premier terme dépend de \dot{x} . On reconnaît la dérivée d'un carré : $\frac{d(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)}{dt} = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} = m\dot{x}\ddot{x}$
- le second terme est une dérivée composée ; en effet on dérive $E_p(x(t))$ par rapport au temps, ce qui donne $\dot{x}\frac{dE_p}{dx}$

On en déduit que $m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dE_p}{dx} = 0$. On peut factoriser par \dot{x} ; et comme on cherche l'équation du mouvement, \dot{x} n'est pas toujours nul donc on peut le simplifier ^a et on obtient l'équation $m\ddot{x} + \frac{dE_p}{dx} = 0$.

^a Bon, d'accord, vous avez peut-être l'impression que je vous arnaque, mais en fait ça marche, et on ne vous demandera pas plus d'explications que ça.

! Dans ce chapitre, il faut faire très attention aux dérivées : parfois on dérive par rapport au temps, parfois par rapport à la position.

C.3. Positions d'équilibre

Définition : Positions d'équilibre

On appelle *position d'équilibre* d'un système une position telle que, si on place le système dans cette position sans vitesse initiale, il reste immobile.

On dit que la position d'équilibre est *stable* si, lorsqu'on place le système très proche de sa position d'équilibre, il reste au voisinage de celle-ci.

On dit que la position d'équilibre est *instable* si, lorsqu'on place le système très proche de sa position d'équilibre, il s'en éloigne.

Propriété : Positions d'équilibre

Les positions d'équilibre d'un système conservatif de ddl x sont donnés par les solutions de l'équation

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad (\text{M4.13})$$

Démonstration

À partir de l'équation (M4.12), une position d'équilibre est atteinte lorsque $\ddot{x} = 0$ soit $\frac{dE_p}{dx} = 0$.

Propriété : Stabilité des positions d'équilibre

Si un système conservatif admet une position d'équilibre en x_0 , alors sa stabilité dépend du signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en ce point :

- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$, la position est stable ; le système placé au voisinage de cette position oscille avec une pulsation $\sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)}$
- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) < 0$, la position est instable ;
- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = 0$, on ne peut rien dire, il faut pousser le développement limité plus loin.

Démonstration

Il faut commencer par établir l'équation différentielle des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre x_0 . Il existe deux démonstrations possibles, en fonction des résultats qui ont été démontrés précédemment.

- Démonstration 1 : si on repart uniquement de l'énergie mécanique (M4.11), on effectue un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre x_0 : $E_p(x) \approx E_p(x_0) + (x - x_0) \frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)$ par la formule de Taylor. Or $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$ puisque x_0 est une position d'équilibre. Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0) \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = cst$. On dérive par rapport au temps : $\frac{1}{2}m2\ddot{x}\dot{x} + 0 + \frac{1}{2}2(x - x_0)\dot{x} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = 0$ ce qui donne après simplification par \dot{x} l'équation $m\ddot{x} + (x - x_0) \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = 0$
- Démonstration 2 : si on a déjà établi l'équation (M4.12), il suffit de faire un DL à l'ordre 1 du terme $\frac{dE_p}{dx}$ par la formule de Taylor : $\frac{dE_p}{dx}(x) = \frac{dE_p}{dx}(x_0) + (x - x_0) \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = (x - x_0) \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)$ puisque $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$ (position d'équilibre). On retrouve l'équation précédente : $m\ddot{x} + (x - x_0) \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = 0$
- Il existe une troisième méthode dans les exercices : si on connaît explicitement E_p , on peut utiliser les formules de développement limités vues en maths pour effectuer un DL à l'ordre 1 des termes non linéaires.

Dans tous les cas, on arrive à une équation différentielle qu'on peut mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)x = \frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)x_0$$

On distingue alors 3 cas :

- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$, on peut poser $\omega_0^2 = \frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)$; alors l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2x_0$ a des solutions de la forme $x(t) = x_0 + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ qui oscillent au voisinage de x_0 : la position d'équilibre est stable et les oscillations ont pour pulsation ω_0 ;
- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) < 0$, on peut poser $\omega_0^2 = -\frac{1}{m} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)$; alors l'équation $\ddot{x} - \omega_0^2x = -\omega_0^2x_0$ a des solutions de la forme $x(t) = x_0 + Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$ qui tendent vers l'infini : la position d'équilibre est instable ;

- si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) = 0$, on ne peut rien conclure, car notre DL n'a pas été assez poussé ; il faut aller à des ordres plus élevés.

La figure M4.5 illustre les deux cas graphiquement : une position d'équilibre stable correspond à un creux d'énergie potentielle, et une position d'équilibre instable correspond à une bosse d'énergie potentielle.

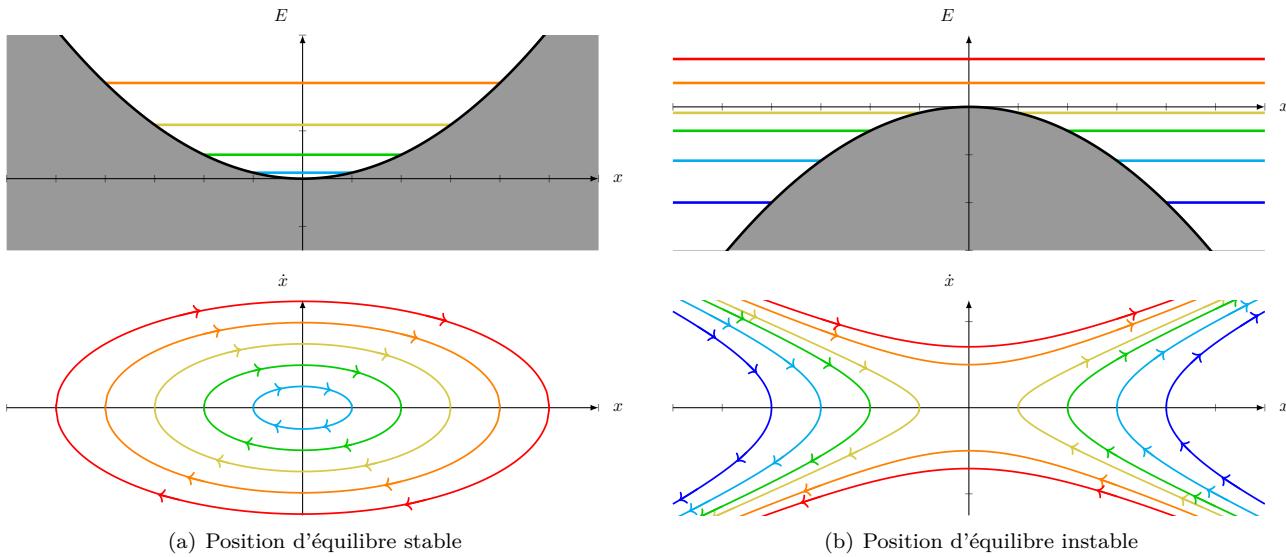


FIGURE M4.5 – Positions d'équilibre.

Remarque : Très souvent, on imagine qu'une position d'équilibre instable n'a aucun intérêt et n'est pas une vraie position d'équilibre, puisque de toutes façons, au premier écart, le point s'éloigne de cette position pour ne jamais y revenir. En fait, c'est faux. Les deux positions ont tout leur intérêt :

- les positions d'équilibre stables correspondent au monde qui nous entoure : il est stable. Les objets autour de nous sont tous dans un état mécanique assez stable sur une durée pas trop longue. Par exemple, la chaise sur laquelle vous êtes assis est dans une position d'équilibre stable. Si on perturbe cet équilibre, par exemple en frappant sur un objet avec notre doigt, il produit un son ; ce son est la traduction des vibrations du système au voisinage de sa position d'équilibre. Si maintenant on frappe très fort, on peut déformer ou casser l'objet : on n'est plus dans le cadre des petites oscillations au voisinage de l'équilibre. Ainsi, tout objet au voisinage de sa position d'équilibre naturelle peut être représenté par un oscillateur harmonique. Par exemple, à l'échelle microscopique, les forces entre atomes peuvent en première approximation être représentées par des ressorts, c'est-à-dire par une modélisation harmonique des variations de l'énergie potentielle de liaison.
- les positions d'équilibre instables sont aussi présentes autour de nous, mais sous un aspect différent. Au voisinage de cette position, les forces tendent à écarter le système de sa position d'équilibre, mais ces forces sont assez faibles ; du coup, il est facile de les compenser par un contrôle actif. C'est ce que vous faites tous les jours quand vous vous tenez debout. La position debout est instable : posez un balai vertical, il tombe. Mais votre cerveau contrôle en permanence l'inclinaison de votre corps, et rétablit l'équilibre par de petites contractions de vos muscles. Cela n'est possible que parce que la position verticale est une position d'équilibre. Essayez de tenir immobile dans une position qui n'est pas position d'équilibre, par exemple à pieds joints et penché à 45° sur le côté : c'est impossible.

De même, un vélo qui roule est dans une position d'équilibre très instable, mais avec un peu d'entraînement on arrive à ne pas tomber.

Une position d'équilibre instable peut donc être rendue stable par un contrôle actif.

Les êtres vivants contrôlent de nombreuses positions instables. Les systèmes mécaniques asservis aussi. Les gyropodes sont un exemple de système qui stabilise une position d'équilibre instable par contrôle actif.

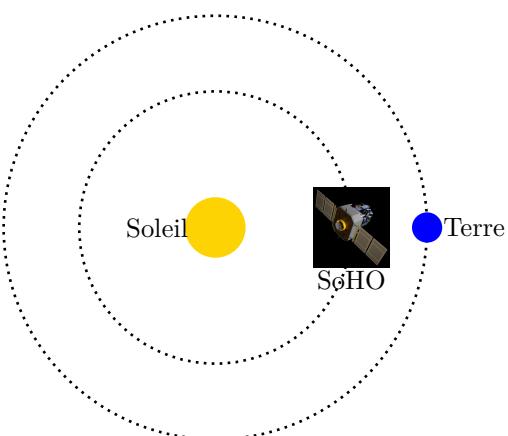
Un autre exemple intéressant est celui des satellites d'observation du Soleil. Pour observer le Soleil, un satellite en orbite autour de la Terre est mal placé : il tourne sans cesse, et passe la moitié de son temps à l'ombre. Il vaut donc mieux le mettre entre le Soleil et la Terre. Il existe un point, situé entre les deux astres, où les attractions des deux astres se compensent¹ : le point de Lagrange L_1 . Mais ce point est une position d'équilibre instable : soit on s'approche un peu du Soleil, et on lui tombe dessus ; soit on s'approche un peu de la Terre, et on lui

1. Presque ; il y a aussi une force d'inertie à ajouter, cf. en deuxième année.

tombe dessus. C'est en ce point qu'on a placé le satellite d'observation SoHO en 1996 ; il y est toujours, encore en état de marche, contrôlant sa position de façon active en consommant très peu d'énergie. De même, le télescope spatial James Webb, lancé le 18 décembre 2021, est allé s'installer en un autre point d'équilibre instable situé, lui, de l'autre côté du Soleil par rapport à la Terre, pour être à l'ombre de la Terre.



(a) Gyropode. (Crédit : Wikipedia/Soars Boards)



(b) Le satellite SoHO est situé sur une position d'équilibre instable dans le référentiel qui tourne avec la terre autour du Soleil.

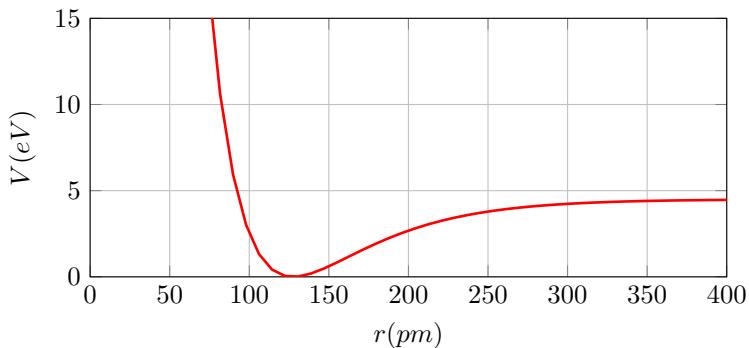
FIGURE M4.6 – Exemples de systèmes exploitant des positions d'équilibre instables.

Exemple : Vibration d'une molécule de HCl

On considère une molécule de HCl dans laquelle l'atome de chlore est 36 fois plus lourd que l'atome d'hydrogène. Par conséquent, on prendra le modèle simplifié suivant :

- l'atome de chlore est immobile
- l'atome d'hydrogène ne se déplace que suivant une direction fixe \vec{u} (pas de rotation)
- on note r la distance entre les deux atomes ; alors l'interaction entre les deux atomes se traduit par une force conservative d'énergie potentielle $V(r) = D(1 - e^{-a(r-r_e)})^2$ appelée *potentiel de Morse*, où D , a et r_e sont trois paramètres constants.
- le poids est négligé

La courbe du potentiel $V(r)$ est donnée ci-dessous (on rappelle que $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$) :



1. À partir de l'expression de $V(r)$, montrez qu'il existe une position d'équilibre en $r = r_e$. Déduisez-en r_e par lecture graphique. Quel est son sens physique ?
2. Exprimez $V(r_e)$ puis $V(\infty)$. Mesurez la valeur de D , et donnez son sens physique.
3. Montrez que la position d'équilibre est stable, et que les petites oscillations à son voisinage se font avec une pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2Da^2}{m}}$ avec m la masse de l'atome d'hydrogène.
4. La vibration se traduit par une absorption de la lumière à $\lambda = 1,77 \mu\text{m}$. Déduisez-en la valeur de ω_0 , puis celle de a sachant que $m = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Ici il y a une seule énergie potentielle : $E_p = V(r)$ et le système est conservatif.

- On dérive : $\frac{dV}{dr} = 2D(1 - e^{-a(r-r_e)})ae^{-a(r-r_e)}$ qui s'annule lorsque $1 - e^{-a(r-r_e)} = 0$ soit $e^{-a(r-r_e)} = 1$ donc $r = r_e$.

La position d'équilibre correspond au minimum de V , donc on mesure $r_e = 125pm$; cela représente la distance entre les deux atomes à l'équilibre.

- $V(r_e) = 0$ et $V(\infty) = D$. On constate donc que :

- si $E_m = 0$ l'atome est au repos à la position d'équilibre
- si $0 < E_m < D$ l'atome oscille dans une cuvette de potentiel, donc la molécule vibre
- si $E_m > D$ l'atome a un mouvement non borné, donc la molécule se dissocie

D représente donc l'énergie minimale qu'il faut fournir à la molécule pour la dissocier. Ici on mesure $D = 4,5eV$.

- Pour la stabilité, il suffit de calculer $\frac{d^2V}{dr^2} = 2Da^2e^{-2a(r-r_e)} - 2D(1 - e^{-a(r-r_e)})a^2e^{-a(r-r_e)}$ et d'évaluer $\frac{d^2V}{dr^2}(r_e) = 2Da^2 > 0$ donc la position d'équilibre est stable.

Pour avoir la pulsation des petites oscillations, c'est plus compliqué. On part de $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) = cst$ qu'on dérive par rapport au temps pour trouver l'équation du mouvement : $m\ddot{r} + 2Da(1 - e^{-a(r-r_e)})e^{-a(r-r_e)} = 0$ après simplification par \dot{r} .

On pose $f(r) = \frac{dV}{dr} = 2Da(1 - e^{-a(r-r_e)})e^{-a(r-r_e)}$ et on écrit au voisinage de r_e : $f(r) = f(r_e) + (r - r_e)\frac{df}{dr}(r_e) = \frac{dV}{dr}(r_e) + (r - r_e)\frac{d^2V}{dr^2}(r_e) = 0 + (r - r_e)2Da^2$. Donc l'équation s'écrit $m\ddot{r} + 2Da^2(r - r_e) = 0$ soit $\ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 r_e$ avec $\omega_0^2 = \frac{2Da^2}{m}$.

- $\omega_0 = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 1,06 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $a = 3,66 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$

Au voisinage des positions d'équilibre stables, tout système vibre donc de façon harmonique. Mais que se passe-t-il si on augmente l'amplitude des oscillations ? Le DL à l'ordre 2 ne suffit plus, il faut aller plus loin. Regardons rapidement ce qui se passe en allant à l'ordre 3.

Il est facile de reprendre les calculs précédent et d'établir l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} + (x - x_0)\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\frac{d^3E_p}{dx^3}(x_0) = 0$$

La figure M4.7 illustre le profil d'énergie potentielle pour une position d'équilibre stable, et le portrait de phase associé. On y voit apparaître plusieurs effets :

- tout d'abord, les barrières de potentiel de part et d'autres de la position d'équilibre ne sont plus infinies. Si on fait osciller le système avec une trop grande amplitude, il s'éloigne de sa position d'équilibre. En pratique, si on secoue un système trop fort, il casse ou se déforme.
- d'autre part, le terme d'ordre 3 crée une dissymétrie de la cuvette d'énergie potentielle, qui déforme les orbites dans le portrait de phase : elles sont allongées d'un côté. Par conséquent, les oscillations ne seront plus sinusoïdales : des harmoniques vont apparaître dans le spectre de la vibration, c'est un effet qu'on connaît bien par exemple avec un piano. De plus, la position moyenne du système lorsqu'il vibre va être décalée et ne sera plus au niveau de la position d'équilibre. Un tel décalage explique par exemple la dilatation des solides lorsque la température s'élève.

Il est possible de simuler, par une méthode numérique, le mouvement d'oscillation dans un tel potentiel pour différentes amplitudes. Quelques simulations sont présentés sur la figure M4.8(a). On observe ainsi plusieurs phénomènes :

- un allongement de la période avec l'accroissement de l'amplitude de vibration (figure M4.8(b)). On peut montrer que cette période diverge vers l'infini quand on approche de l'amplitude qui va faire dépasser la barrière de potentiel et rendre la position instable. Cette mesure du ralentissement des vibrations est ainsi une méthode pour prévenir une rupture prochaine de certains systèmes ;
- une dissymétrie de l'oscillation qui entraîne l'apparition d'harmoniques (fréquences autres que ω_0 dans le spectre du signal — figure M4.8(c)) ;
- un décalage des oscillations vers un côté qui déplace le centre de vibration du système (figure M4.8(d)).

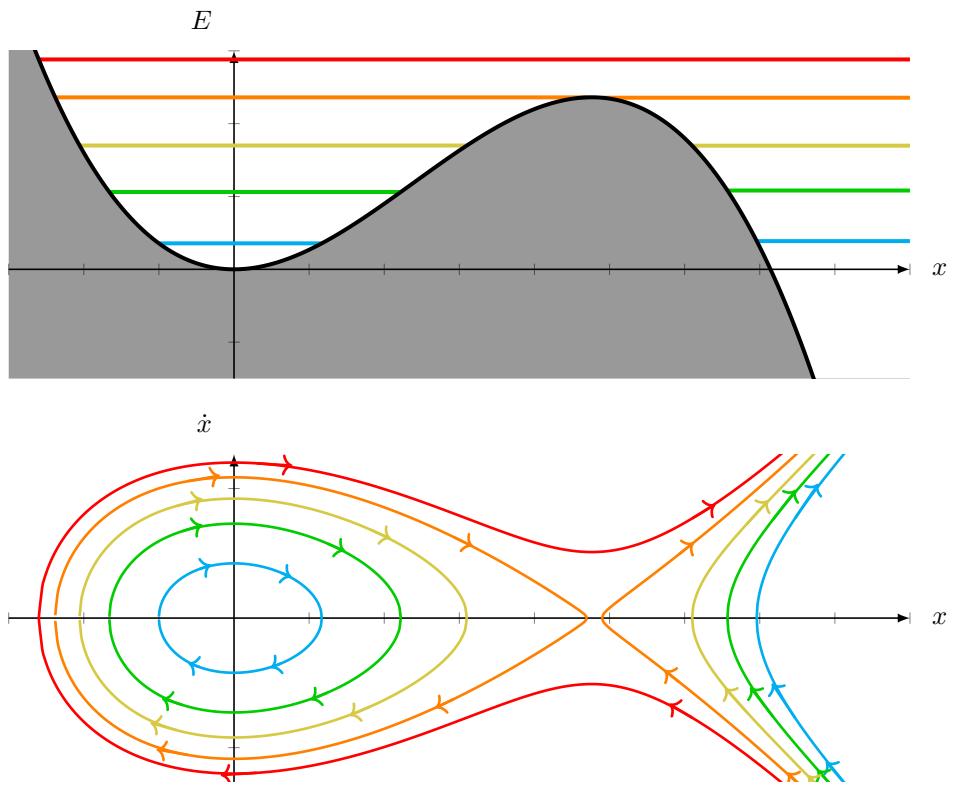


FIGURE M4.7 – Oscillations anharmoniques au voisinage d'une position d'équilibre stable.

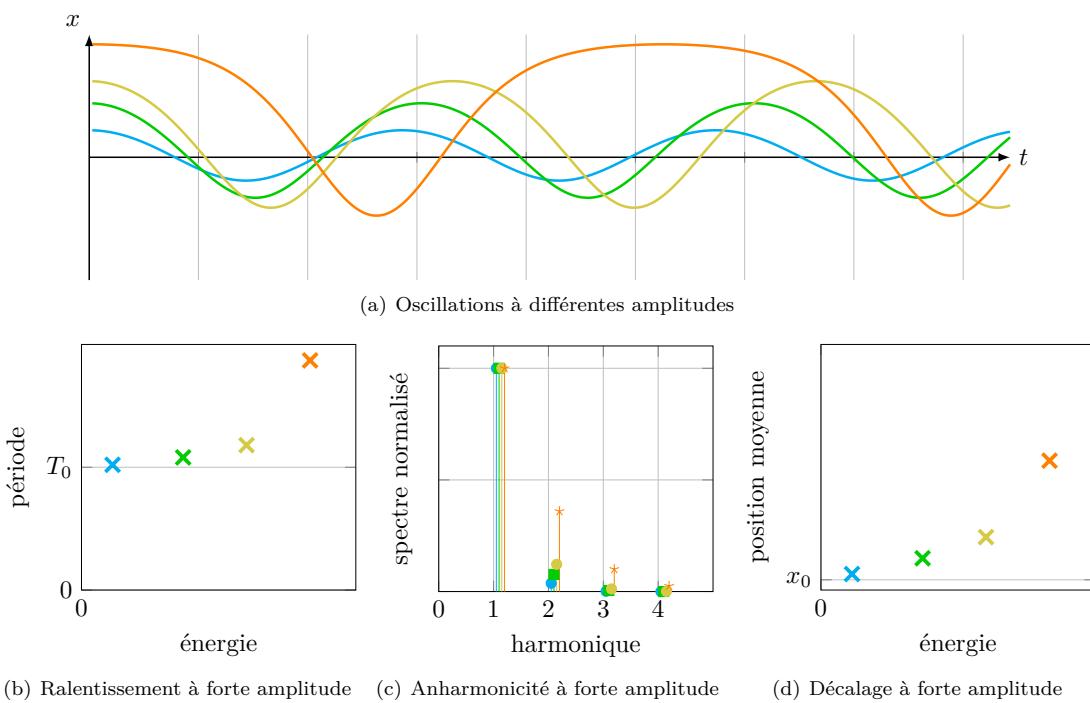


FIGURE M4.8 – Simulation des oscillations dans un potentiel anharmonique.


Énergie mécanique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Puissance, travail et énergie cinétique	
Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaitre le caractère moteur ou résistant d'une force.
Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
Champ de force conservative et énergie potentielle	
Énergie potentielle. Lien entre un champ de force保守ative et l'énergie potentielle.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle élastique. Déduire qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
Énergie mécanique	
Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Système conservatif.	Exploiter la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.
Mouvement conservatif à une dimension. Cas d'une situation modélisable par un système masse-ressort et d'un système soumis à un champ de force uniforme. Positions d'équilibre. Stabilité.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION, RÉSOUTRE NUMÉRIQUEMENT UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU DEUXIÈME ORDRE NON-LINÉAIRE ET FAIRE APPARAÎTRE L'EFFET DES TERMES NON-LINÉAIRES.

Q11.

Une barrière de potentiel est une zone :

- | | |
|------------------------------|------------------------|
| (a). où $E_p < E_m$ | (b). où $E_p > E_m$ |
| (c). inaccessible au système | (d). où $E_p = \infty$ |

Q12.

Les positions d'équilibres d'un système repéré par x se trouvent en résolvant l'équation :

- | | |
|----------------|--------------------------------|
| (a). $E_m = 0$ | (b). $\frac{dE_p}{dx} = 0$ |
| (c). $E_p = 0$ | (d). $\frac{d^2E_p}{dt^2} = 0$ |

Q13.

Ensuite, pour savoir si une position d'équilibre x_0 est stable, on regarde :

- | | |
|--|--|
| (a). si $\frac{dE_p}{dx}(x_0) < 0$ | (b). si $\frac{dE_p}{dx}(x_0) > 0$ |
| (c). si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) < 0$ | (d). si $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$ |

Q14.

Une position d'équilibre instable est une fausse position d'équilibre :

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q15.

Tout système à l'équilibre peut être modélisé, au voisinage de cette position d'équilibre, par un oscillateur harmonique :

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

 QCM : Énergie potentielle

Dans ce QCM et le suivant, on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q16.

Un pot de fleur de masse 1 kg tombe de 20 m. Sa variation d'énergie potentielle de pesanteur vaut :

- | | |
|-------------|------------|
| (a). -200 J | (b). 200 J |
| (c). -20 J | (d). 20 J |

Q17.

Une fourmi de masse 0,5 g veut grimper en haut de la tour Eiffel (hauteur 300 m). Son énergie potentielle de pesanteur va varier de :

- | | |
|------------|--------------|
| (a). 15 J | (b). 0,15 J |
| (c). 1,5 J | (d). 0,015 J |

Q18.

Un ressort de raideur $1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ est comprimé de 2 cm à partir de sa position au repos ; son énergie potentielle varie de :

- | | |
|------------|-------------|
| (a). 4 J | (b). 2000 J |
| (c). 0,2 J | (d). 400 J |

Q19.

Un ressort de raideur $1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ était initialement comprimé de 3 cm ; on le détend jusqu'à ce qu'il soit allongé de 5 cm par rapport à sa position au repos. Son énergie potentielle varie de :

- | | |
|-------------|------------|
| (a). 1,25 J | (b). 0,2 J |
| (c). 1,7 J | (d). 0,8 J |

Q20.

Un ressort de raideur $1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ est au repos ; on le comprime avec une force de 150 N . Son énergie potentielle varie de :

- | | |
|--------------|-------------|
| (a). 113 J | (b). 11,3 J |
| (c). 11,3 MJ | (d). 113 kJ |

Q21.

Un amortisseur de voiture (équivalent à un ressort) supporte un quart de la voiture (soit une masse 300 kg) et se comprime de 12 cm . Son énergie potentielle vaut :

- | | |
|-------------|-------------|
| (a). 180 J | (b). 160 kJ |
| (c). 1,8 MJ | (d). 20 kJ |

QCM : Énergie et puissance

Dans ce petit QCM, on calcule simplement des puissances moyennes, par la formule $\frac{\text{variation d'énergie}}{\text{temps}}$; on prend encore $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Q22.

Une personne 65 kg monte des escaliers ; elle grimpe d'un étage (3 m) en 7 s . Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?

- | | |
|-----------|------------|
| (a). 80 W | (b). 140 W |
| (c). 45 W | (d). 280 W |

Q23.

Un écureuil de 130 g grimpe à un arbre de 8 m de haut. Il fournit une puissance moyenne de $4,2 \text{ W}$. Quel temps met-il ?

- | | |
|------------|------------|
| (a). 0,4 s | (b). 3,2 s |
| (c). 2,5 s | (d). 1,8 s |

Q24.

Une personne entretient sa forme en comprimant une fois toutes les 2 s un ressort de raideur $100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ de 15 cm à partir de sa position au repos. Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?

- | | |
|------------|------------|
| (a). 4,1 W | (b). 180 W |
| (c). 60 W | (d). 0,6 W |

Q25.

Un coureur du Tour de France pesant 66 km a grimpé les 503 m de dénivelé jusqu'à la Planche des Belles Filles en $16 \text{ min et } 10 \text{ s}$. Quelle puissance moyenne a-t-il fournie si on néglige les frottements ?

- | | |
|------------|------------|
| (a). 280 W | (b). 160 W |
| (c). 430 W | (d). 340 W |

Énergie mécanique

Exercices

réponses page 408

Exercice M4.1 : Propulsion d'un bateau [**]

Un bateau de masse $m = 11\text{ t}$ se déplace dans l'eau grâce à un moteur de puissance $\mathcal{P}_M = 1200\text{ ch}$ (soit 880 kW). Lorsqu'il se déplace à la vitesse v , il est soumis à une force de frottements opposée à sa vitesse et de norme $f \cdot v^2$ avec f un coefficient de frottements.

- Le bateau navigue sur la mer calme. En appliquant le TEM (version dérivée), exprimez $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v et des données.
- La vitesse maximale que peut atteindre le bateau vaut $v_{max} = 38\text{ kn} = 70\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Déduisez-en la valeur numérique de f .

Exercice M4.2 : Grimpettes [**]

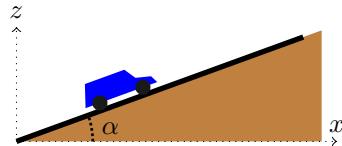
- Calculez la puissance moyenne que vous devez fournir si vous montez les escaliers d'un immeuble à la vitesse constante d'un étage (3 m environ) toutes les 7 s , en négligeant les pertes d'énergie.
- Un coureur du Tour de France pesant 60 kg monte les 1100 m d'ascension jusqu'à l'Alpe d'Huez en 55 min environ. Il subit une force de frottements qui vaut en moyenne 4 N pendant les 14 km de l'ascension. Quelle puissance moyenne doit-il fournir ?

Remarque : pour cette question, le mieux est d'utiliser le TEM en version intégrée plutôt que dérivée, puis calculer $\mathcal{P}_{moy} = \frac{W}{\Delta t}$. Le travail d'une force F constante vaut $-\int F \cdot dOM$ soit $-F \times distance$.

Exercice M4.3 : Propulsion d'une voiture [**]

Une voiture de masse $m = 1,3\text{ t}$ roule (équivalent à un déplacement sans frottements) sur la route grâce à un moteur de puissance $\mathcal{P}_M = 115\text{ ch}$ (soit 85 kW). Lorsqu'elle se déplace à la vitesse v , elle est soumise à deux forces de frottement opposées à sa vitesse : des frottements fluides de norme $c \cdot v^2$ avec $c = 0,47\text{ USI}$, et une force de frottements interne au moteur équivalente à une force de norme constante $a = 200\text{ N}$.

- La voiture roule sur une route horizontale. Écrivez le TEM appliqué à la voiture, et déduisez-en $\frac{dv}{dt}$.
- Calculer numériquement la vitesse maximale qu'elle peut atteindre (on effectuera une résolution numérique sur la calculatrice).
- Elle roule désormais sur une route qui monte avec une pente p (qui représente la tangente de l'angle α entre l'horizontale et la route). On note z l'altitude de la voiture.
 - Exprimez $\frac{dE_M}{dt}$ en fonction de v , \dot{v} , \dot{z} et les autres données.
 - Reliez \dot{z} à v et à la pente α ; déduisez-en $\frac{dE_M}{dt}$ en fonction de v , \dot{v} , α , m et g .
 - Par application du TEM, exprimez $\frac{dv}{dt}$ en fonction de v et des autres données.
 - Ecrivez l'équation donnant la nouvelle vitesse maximale de la voiture.
 - AN pour une pente $p_1 = 2\%$ puis pour $p_2 = 10\%$.



Exercice M4.4 : Accélération d'une voiture [***]

Un modèle de voiture citadine est proposé avec deux motorisations possibles : 44 kW ou 55 kW .

- Le modèle de 44 kW atteint $144\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. En supposant que les forces résistantes sont proportionnelles au carré de la vitesse ($k \cdot v^2$), trouvez la vitesse de pointe du modèle de 55 kW .
- Indication :* commencez par calculer k à l'aide du modèle de 44 kW ; ce coefficient est le même pour l'autre

modèle (même aérodynamique).

2. Les données constructeur indiquent le temps mis par chaque voiture pour accélérer de $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en 5ème : 16,6 s pour le modèle de 44 km (masse 900 kg) et 12,1 s pour le modèle à 55 kW (masse 1000 kg).

En réalité, la puissance fournie par le moteur n'est pas constante, elle dépend du régime moteur, donc de la vitesse. On admettra qu'elle suit une loi approximativement linéaire ; ainsi, en 5ème, on prendra comme modèle $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\max} \frac{v}{v_0}$ avec $v_0 = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

- En appliquant le TEC, déterminez l'accélération $\frac{dv}{dt}$ de la voiture.
- Cette ED est non linéaire ; implémentez donc sa résolution sous Python avec un schéma d'Euler.
- Résolvez $v(t)$ pour une vitesse initiale de $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, pour les deux modèles, avec un pas de temps de 0,1 s, et une durée de simulation de 20 s.
- Tracez les courbes de $v(t)$ pour les deux modèles, et mesurez le temps mis pour atteindre $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; comparez avec les données constructeur.

Exercice M4.5 : Lancer d'un ballon [*]

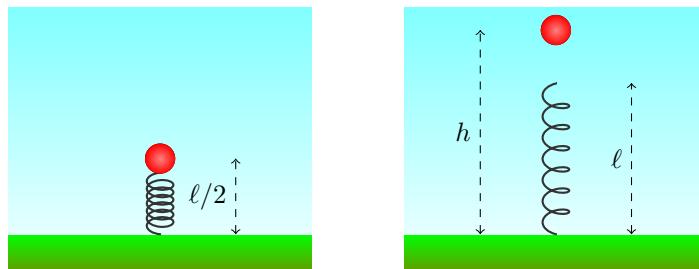
On lance un ballon de masse m , verticalement, depuis l'altitude $z_0 = 1 \text{ m}$ au-dessus du sol avec une vitesse verticale $v_0 = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On note z l'altitude du ballon à chaque instant et v sa vitesse ; pour les AN, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On suppose que le ballon n'est soumis qu'à son poids, les frottements sont négligés.

- Exprimez l'énergie mécanique du ballon en fonction de z et v , puis en fonction de z_0 et v_0 .
- Calculez l'altitude maximale atteinte.
- Calculez la vitesse du ballon lorsqu'il touche le sol.

Exercice M4.6 : Détente d'un ressort [**]

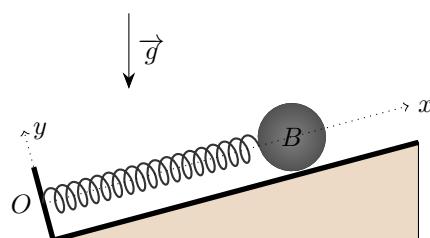
Un ressort de longueur à vide ℓ et de raideur k est posé verticalement sur le sol. On le comprime à une longueur $\frac{\ell}{2}$, on place dessus une masse m , et on lâche : le ressort se détend entièrement et la masse décolle.



- À quelle hauteur h la masse monte-t-elle au-dessus du sol, si on néglige tout frottement ?
- AN pour $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\ell = 20 \text{ cm}$, $m = 100 \text{ g}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Quelle est la masse maximale qui pourra décoller effectivement avec ce ressort ?

Exercice M4.7 : Flipper [**]

On reprend l'étude du lancement d'une bille de flipper, vu dans le dernier chapitre. Le flipper est modélisé par un plan incliné d'un angle $\alpha = 15^\circ$ par rapport à l'horizontale. En bas (point O) est fixé un ressort de raideur $k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 5 \text{ cm}$. Une bille B de masse $m = 5 \text{ g}$ est posée au bout de ce ressort. On note ℓ la distance OB . On suppose que la bille se déplace sans frottements sur le plan incliné. On notera $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.



- Première étape : on comprime le ressort à $\ell_0/2$, on pose la bille dessus, et on lâche : le ressort se détend et pousse la bille. Celle-ci se détache du ressort à l'instant t_1 tel que $\ell(t_1) = \ell_0$; sa vitesse vaut alors v_1 .

Montrez que le système est conservatif pendant cette phase, et déterminez v_1 .

2. Deuxième étape : la bille, détachée du ressort, monte le plan incliné du flipper.
Quelle est la vitesse v_2 de la bille lorsqu'elle atteint le sommet du flipper ($\ell = 80 \text{ cm}$) ?

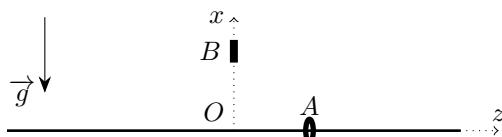
Exercice M4.8 : Saut à l'élastique [**]

Un pont passe à une altitude $h = 60 \text{ m}$ au-dessus de la mer. Une personne de masse $m = 71 \text{ kg}$ saute depuis ce pont dans le vide. On négligera les frottements ; on prend $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Supposons que la personne veuille faire un plongeon dans la mer et n'attache pas d'élastique ; elle effectue donc une chute libre. Calculez la vitesse au moment où elle atteint l'eau.
2. La personne est désormais attachée au pont par un élastique de raideur k et de longueur à vide négligeable. Exprimez la longueur du ressort (fixé au pont) lorsque la personne est à l'altitude z quelconque ; déduisez-en l'expression de l'énergie mécanique en fonction de sa vitesse v et de son altitude z .
3. Exprimez l'altitude h' de la personne au point le plus bas de sa trajectoire.
Comment choisir la valeur de k si on ne veut pas que la personne touche l'eau ?
4. On prend pour k une valeur égale à 1,5 fois cette valeur minimale ; calculez h' .
5. Exprimez, toujours grâce à la conservation de l'énergie, la vitesse de la personne à une altitude z quelconque. Déduisez-en la vitesse maximale atteinte par la personne lors du saut. AN.

Exercice M4.9 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**]

Un anneau aimanté A de masse m peut glisser sans frottements sur un fil rectiligne selon la direction \vec{e}_z horizontale. Un autre aimant B se situe en $z = 0$, au-dessus du fil, à une distance d ; l'attraction entre les deux aimants se traduit par une énergie potentielle d'interaction de la forme



$$E_{pm}(z) = -C \frac{d}{(d^2 + z^2)^{3/2}}$$

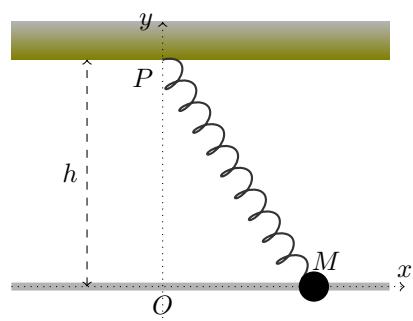
Pour les AN : $m = 12 \text{ g}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $d = 2 \text{ cm}$ et $C = 1,5 \times 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$.

1. Montrez que ce système (point A) est conservatif, et exprimez son énergie potentielle E_p , puis son énergie mécanique.
2. Tracez la courbe de $E_p(z)$ en fonction de z ; en déduire la nature du mouvement en fonction de l'énergie mécanique de A .
3. Déduire du graphique précédent que l'aimant a une position d'équilibre ; est-elle stable ?
4. Déterminez par le calcul la position d'équilibre de A ; vérifiez la cohérence avec la question précédente.
Montrez par le calcul que cette position est stable, et calculez la période des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Exercice M4.10 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**]

Un objet M de masse m peut se déplacer sans frottements sur une tige horizontale. On repère sa position par $x = \overline{OM}$. Un ressort est fixé entre M et le point P fixe de coordonnées $(0, h)$. Ce ressort a pour raideur k et pour longueur à vide ℓ_0 .

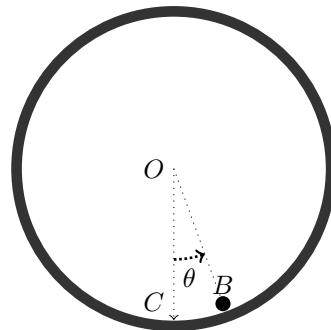
1. Montrez que le système M est conservatif, et calculez ses énergies cinétique et potentielle.
2. Établissez l'équation différentielle du mouvement.
3. Calculez la ou les positions d'équilibres de la masse ; on prendra soin de préciser à quelle condition sur h elles existent.
4. Étudiez la stabilité de la position d'équilibre $x = 0$ en fonction de h .



Exercice M4.11 : Une bille dans une machine à laver [**]

Une bille B de masse m peut rouler sans frottements à l'intérieur d'un cercle de rayon R et de centre O . On note C le point en bas et on repère la position de la bille par l'angle θ .

1. Montrez que la bille est un système conservatif et exprimez son énergie potentielle en fonction de θ . On pourra prendre comme référence des altitudes le point O .
2. Tracez le profil de $E_p(\theta)$ pour des angles compris entre -180° et $+180^\circ$.
Le mouvement est-il borné en angle ?
Si on lance la bille depuis le point $\theta = 0^\circ$, quelle énergie cinétique minimale faut-il lui donner pour qu'elle puisse atteindre le sommet ? Exprimez la vitesse correspondante.
3. Déterminez les positions d'équilibre, et indiquez leur stabilité.
4. Reliez l'abscisse curviligne $s = \widehat{CB}$ à θ ; déduisez-en l'expression de l'énergie cinétique de la bille en fonction de $\dot{\theta}$.
5. Établissez alors l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ .



Exercice M4.12 : Potentiel de Lennard-Jones [***]

On s'intéresse dans cet exercice (très calculatoire, mais utile quant à son principe) à la dynamique d'une molécule diatomique où l'un des deux atomes est beaucoup plus lourd que l'autre. On supposera que cet atome lourd (1) est immobile, et que l'autre, (2), peut se déplacer suivant une seule direction fixe \vec{e}_r , sous l'action d'une force exercée par l'autre atome.

Quand la molécule est peu ionique, on peut considérer en bonne approximation que la force de (1) sur (2) est conservative et dérive d'un potentiel de type Lennard-Jones :

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

avec r la distance entre les deux atomes, A et B des constantes positives. *On néglige toute autre force*, et on suppose que le référentiel d'étude est galiléen.

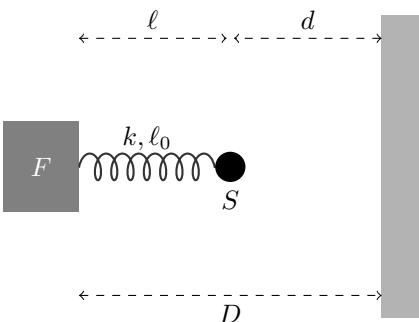
1. Que vaut la force associée ?
2. Étudiez la fonction U et tracez l'allure de sa courbe. Montrez en particulier l'existence d'un minimum.
Que vaut la distance interatomique d lorsque la molécule est à l'équilibre (ie. quand les deux atomes ne bougent pas l'un par rapport à l'autre) ?
3. Étudiez les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre (exprimez leur pulsation) ; on notera m la masse de l'atome (2).
4. Pour une molécule particulière, on mesure $m = 1 \times 10^{-26} \text{ kg}$, $d = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$, et une **fréquence** d'oscillations valant $f = 1 \times 10^{13} \text{ Hz}$. Calculez A et B .
5. Simulez, à l'aide d'un schéma d'Euler, le mouvement avec comme CI : $r(0) = 2,85 \times 10^{-10} \text{ m}$ et $\dot{r}(0) = 0$, sur quelques périodes.

Exercice M4.13 : Mesure de la force de Casimir [**]

Entre deux objets métalliques s'exerce à courte distance une force appelée *force de Casimir*. Pour étudier cette force, les physiciens ont mis au point un dispositif expérimental très précis. Il s'agit d'une sphère métallisée de petit diamètre, qu'on assimilera à un point matériel S de masse m . Cette sphère est fixée au bout d'un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k ; l'autre extrémité du ressort est en un point F fixe. On approche alors un objet plan métallisé de la sphère. La théorie prévoit que la force de Casimir du plan sur S est conservative et dérive d'une énergie potentielle $E_{p_C} = -\frac{A \cdot R}{d^2}$ avec A une constante positive, R le rayon de la sphère, et d la distance entre le plan et S .

Du fait de la masse très faible de la sphère, le poids est négligeable dans tout ce problème. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

On note ℓ la longueur du ressort et D la distance entre le plan et F .



- Écrivez l'énergie potentielle de ce système en fonction de la seule variable ℓ et des constantes k , ℓ_0 , D , R et A .
- Établissez l'équation différentielle du mouvement ; cette équation portera sur la variable ℓ et ses dérivées temporelles.
- On suppose qu'il existe une position d'équilibre de la sphère pour la longueur ℓ_e . Écrivez l'équation que vérifie ℓ_e en fonction des autres constantes.
Résoudre numériquement l'allongement $x = \ell_e - \ell_0$ pour $A = 1,5 \times 10^{-27}$ USI, $k = 0,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $R = 20 \mu\text{m}$, et $D - \ell_0 = 0,5 \mu\text{m}$.
- Montrez alors que cette position d'équilibre est stable dans le cas choisi.
- On note ω la pulsation des petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre ℓ_e . Calculez numériquement $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation d'oscillation en l'absence de la force de Casimir.
- Reprendre ce calcul si on approche à $D - \ell_0 = 50 \text{ nm}$.
- On peut montrer la formule approchée $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx \frac{3AR}{k(D-\ell_0)^4}$. Imaginez une méthode par laquelle on peut mesurer le coefficient A .

Énergie mécanique

TDs numériques

réponses page 411

TD numérique : Oscillateur harmonique

Dans ce TD, on va travailler sur un simple oscillateur harmonique, et se servir de ce modèle simple pour tester les limites de la méthode d'Euler.

On considère donc un oscillateur non amorti d'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{M4.14})$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De manière arbitraire, on va choisir $m = 1$ et $k = 1$ donc $\omega_0 = 1$ pour la suite.

1. Définissez m , k , ω_0 et la période T_0 dans un fichier Python.
2. À l'aide d'une méthode d'Euler, simulez ce système pour les CI : $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 0$, sur une durée de 5 périodes, avec comme pas temporel $\frac{T_0}{100}$. Commentez la courbe obtenue.
3. Tracez le portrait de phase $v(x)$; commentez.
4. À l'aide des tableaux déjà calculés par la méthode d'Euler, générez les tableaux correspondant à l'énergie cinétique E_c , à l'énergie potentielle E_p , et à l'énergie mécanique E_m . Tracez $E_c(t)$, $E_p(t)$ et $E_m(t)$: est-ce en accord avec ce qu'on attend ?
5. Retracez les courbes précédentes avec un pas de $\frac{T_0}{1000}$; commentez.
6. Le défaut majeur de la méthode d'Euler en mécanique est donc qu'elle fait augmenter artificiellement l'énergie. Pour résoudre cela, on a 3 solutions :
 - diminuer toujours plus le pas, mais cela va poser des problèmes d'arrondis dès qu'on dépasse environ $10^{-8}T_0$ (je n'entre pas dans les détails de cette limite)
 - utiliser une méthode sur le même principe que la méthode d'Euler mais plus précise, la méthode de Runge-Kutta
 - utiliser une méthode spécialement pensée pour conserver l'énergie mécanique, comme la méthode d'Euler semi-implicite (ou méthode de Euler-Cromer)

Pour cette année, nous allons nous contenter d'utiliser la méthode de Runge-Kutta déjà implémentée dans la bibliothèque Scipy. On va apprendre à utiliser la fonction `scipy.integrate.odeint` qui est au programme, mais qui est désormais jugée obsolète par les concepteurs de Scipy qui ont décidé de modifier complètement leur bibliothèque; dans l'avenir la fonction sera `scipy.integrate.solve_ivp`, de syntaxe légèrement différente, mais d'idée générale identique. Voici les étapes à faire :

- avec la méthode d'Euler, on créait un certain nombre de tableaux correspondant à des inconnues; avec `odeint`, on a un seul tableau 2D, chaque colonne correspondant à une inconnue. `odeint` n'a que faire de quelle colonne correspond à quelle inconnue, mais nous, nous devons le savoir. **Il faut donc toujours commencer par déterminer la liste des inconnues, et leur ordre.** Par exemple, ici, on va choisir $[x, v]$, mais on aurait pu choisir l'ordre opposé;
- on crée alors une fonction `derivee(inconnues,t)` (qu'on peut nommer autrement, peu importe) qui prend obligatoirement comme arguments une **liste** d'inconnues et la variable (ici le temps), et qui renvoie la **liste** des dérivées des inconnues; ici par exemple elle doit renvoyer $[\dot{x}, \dot{v}]$ c'est-à-dire $[v, -\omega_0^2 x]$;
- on crée une liste contenant les conditions initiales $[x(0), v(0)]$;
- on crée un tableau des instants pour lesquels on va simuler le système, le plus souvent avec `numpy.linspace(debut,fin,points)`; pour commencer on met souvent 1000 points;
- on appelle alors `odeint(derivee,ci,temp)` qui renvoie un tableau des solutions qu'on stocke dans une variable;
- on extrait les différentes inconnues à l'aide de la syntaxe `tableau[:,i]` qui permet d'extraire la colonne i du tableau (l'opérateur `:` signifiant : «tous les indices de ligne»).

Tracez alors la solution $x(t)$ obtenue par `odeint`, puis le portrait de phase; tracez aussi l'énergie mécanique : elle augmente toujours, mais c'est beaucoup plus faible qu'auparavant.

Remarque : avec `odeint`, on ne précise pas le pas temporel; il est déterminé automatiquement.

7. Augmentez le temps de simulation à 30 périodes; observez que la courbe reste bien périodique.

8. On ajoute maintenant des frottements en introduisant dans l'équation un terme $\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}$. Simulez avec `odeint` le système sur $30T_0$ avec $Q = 10$, et tracez les mêmes courbes que précédemment.
9. Reprenez avec $Q = 2$, puis $Q = \frac{1}{2}$, puis $Q = 0,1$.

TD numérique : Oscillateur non harmonique

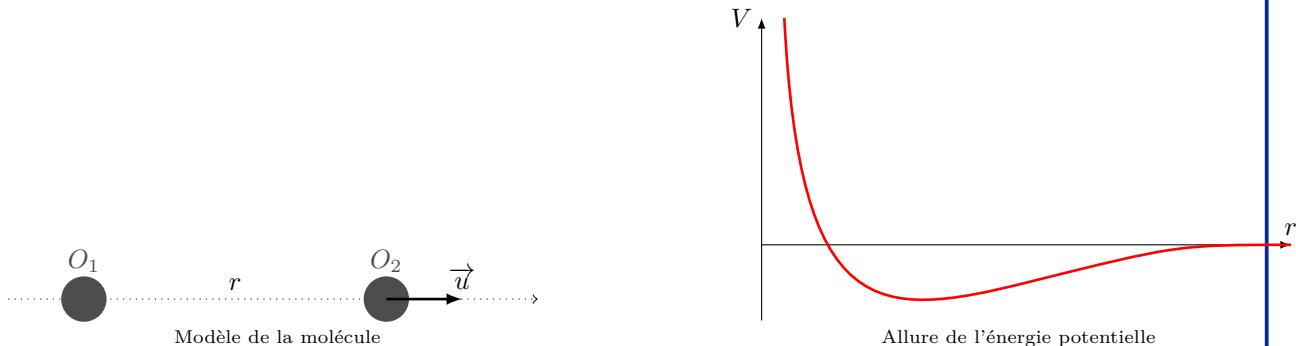
Dans le TD précédent, on a étudié l'oscillateur harmonique. On a vu en cours que tout système au voisinage de sa position d'équilibre se comporte comme un oscillateur harmonique, mais ce n'est qu'une approximation. Si l'amplitude du mouvement augmente et que le système s'éloigne de plus en plus de l'équilibre, alors des termes non-linéaires apparaissent, qu'on va étudier aujourd'hui à l'aide de `scipy.integrate.odeint`.

On va s'intéresser par exemple à une molécule diatomique O_2 : ce sont deux atomes identiques d'oxygène, de masse $m = 16 \times 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$, qui restent attachés par une force d'origine partiellement quantique, partiellement électrique ; cette force les attire mais pas trop, car quand ils s'approchent trop, leurs nuages électroniques se repoussent. Il existe divers modèles pour représenter cette force ; nous prendrons ici celui d'une force conservative d'énergie potentielle

$$V(r) = A \left(\frac{3r_e^4}{5r^{10}} - \frac{1}{r^6} \right) \quad (\text{M4.15})$$

avec r la distance entre les atomes, A une constante et $r_e = 110 \text{ pm}$.

Toutes les autres forces (dont le poids) sont négligeables ici. On admettra qu'une théorie totalement hors programme (la théorie du mobile fictif) nous permet de traiter le mouvement des deux atomes comme si l'un des deux était fixe et l'autre se déplaçait avec une masse $m^* = \frac{m}{2}$. On repèrera alors la position du premier atome par un point O_1 fixe, et celle du second par $\overrightarrow{O_1O_2} = r \vec{u}$ avec \vec{u} un vecteur unitaire fixe.



1. Exprimez $\frac{dV}{dr}$ et déduisez-en que r_e représente la distance à l'équilibre.
2. La molécule de dioxygène possède une raie d'absorption infrarouge à $\lambda = 9,10 \mu\text{m}$. Cette raie correspond à la fréquence f_0 de vibration de la molécule au voisinage de sa position d'équilibre : quand on envoie de la lumière ayant la même fréquence f_0 , alors il apparaît un phénomène qu'on étudiera bientôt, appelé *résonance*, qui provoque l'absorption de la lumière. Calculez numériquement f_0 ; on donne $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

D'après le cours, $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m^*} \frac{d^2V}{dr^2}(r_e)}$. Exprimez A en fonction de r_e , m et f_0 . Déduisez-en la valeur numérique de A .

3. Tracez la courbe $V(r)$ (idéalement en electron-volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$) entre $0,1r_e$ et $5r_e$. Quel sera le type de mouvement en fonction de l'énergie mécanique ?
4. À partir de l'expression de l'énergie mécanique, montrez que r vérifie l'équation différentielle

$$\frac{m}{2} \ddot{r} + 6A \left(\frac{1}{r^7} - \frac{r_e^4}{r^{11}} \right) = 0 \quad (\text{M4.16})$$

5. Simulez alors $r(t)$ sur une durée de quelques périodes (attention à bien choisir le temps de simulation, qui est ici très très court) à l'aide de la fonction `odeint`. On prendra comme CI : $r(0) = 0,9999r_e$ et $\dot{r}(0) = 0$.
6. Tracez les nouvelles courbes $r(t)$ pour $r(0) = 0,9r_e$, puis $r(0) = 0,88r_e$. Commentez.

7. Pour interpréter ces courbes, calculez numériquement les énergies mécaniques correspondant aux 3 conditions initiales utilisées précédemment, et tracez pour chacune d'entre elles une ligne horizontale sur le graphique de $V(r)$ (on peut le faire à l'aide de `plt.axhline(valeur)`).
8. Pour les deux premières conditions initiales, le mouvement est périodique, mais trois changements apparaissent :
 - comment évolue la période des oscillations lorsque l'amplitude augmente ?
 - comment évolue la valeur moyenne de l'oscillation (on pourra se contenter de mesurer $\frac{r_{max}+r_{min}}{2}$) ?
 - comment évolue la forme du signal ?
9. Que représente physiquement l'énergie du minimum de V ? Comparez avec les valeurs tabulées trouvées sur Internet.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a)

Q3.(a)

Par exemple, plus on va vite, plus le travail des forces de frottements est grande.

Q4.(a)

Q5.(a) ET (b) ET (c)

Q6.(b)

Il peut aussi y avoir des forces qui ne travaillent pas.

Q7.(b)

Q8.(a)

Uniquement de sa position.

Q9.(a)

Car $\frac{dE_m}{dt} = 0$

Q10.(b)

Plus E_m est grande, moins il y a de barrières de potentiel.

Q11.(b) ET (c)

Q12.(b)

Q13.(d)

Q14.(a)

Q15.(a)

Réponses au QCM : Énergie potentielle

Q16.(a)

Q17.(c)

Q18.(c)

Q19.(d)

$$\frac{1}{2}1000 \times 0,05^2 - \frac{1}{2}1000 \times 0,03^2.$$

Q20.(b)

L'allongement final vaut $\frac{150}{1000} = 0,15$ m.

Q21.(a)

À l'équilibre des forces, $mg = k \times \text{allongement}$ donc $k = \frac{300 \times 10}{0,12} = 25\,000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Réponses au QCM : Énergie et puissance

Q22.(d)

$$P = \frac{65 \times 10 \times 3}{7}$$

Q23.(c)

$$t = \frac{0,13 \times 10 \times 8}{4,2}$$

Q24.(d)

$$P = \frac{\frac{1}{2}100 \times 0,15^2}{2}; \text{ mais } 0,6 \text{ W d'effort moyen, c'est pas grand chose.}$$

Q25.(d)

Et à l'eau claire !

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M4.1 : Propulsion d'un bateau [**]

1. $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{P}_M}{mv} - \frac{f}{m}v^2$
2. À la vitesse maximale, $\frac{dv}{dt} = 0$ donc $f = \frac{\mathcal{P}_M}{v_{max}^3} = 120 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$

Réponses de l'exercice M4.2 : Grimpettes [**]

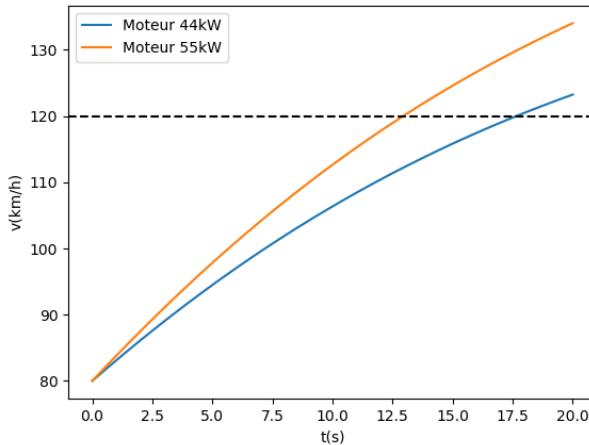
1. $\mathcal{P}_{fournie} = mg\dot{z}$; pour l'AN, mettez votre masse...
2. Entre le début et la fin de l'ascension : $W_{cycliste} = mg\Delta z - W_{frottements} = 702,8 \text{ kJ}$ donc $\mathcal{P} = 213 \text{ W}$

Réponses de l'exercice M4.3 : Propulsion d'une voiture [**]

1. $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{P}_M}{mv} - \frac{a}{m} - \frac{c}{m}v^2$
2. $v_{max} = 54 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 195 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
3. $\frac{dE_p}{dt} = mg\dot{z} = mgv \sin \alpha$ d'où on tire $\dot{v} = \frac{\mathcal{P}_M - av - cv^3 - mgv \sin(\arctan p)}{mv}$. On obtient alors $v_{max}(2\%) = 183 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $v_{max}(10\%) = 140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Réponses de l'exercice M4.4 : Accélération d'une voiture [***]

1. $k = 0,688 \text{ USI}$ puis $v_{max} = 155 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pour le modèle le plus puissant.
2. $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{mv_0} - \frac{k}{m}v^2$ qu'on résout par une méthode d'Euler :



On mesure des temps de passage à $120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ égaux à 17,6 s pour le modèle le moins puissant et 12,9 s pour le plus puissant, en accord avec les données constructeur à 7 % près.

Réponses de l'exercice M4.5 : Lancer d'un ballon [*]

1. $E_m = mgz + \frac{1}{2}mv^2 = mgz_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$
2. $z_{max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 10,8 \text{ m}$
3. $v_{sol} = \sqrt{v_0^2 + 2gz_0} = 14,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M4.6 : Détente d'un ressort [**]

1. $h = \frac{l}{2} + \frac{kl^2}{8mg}$

2. $h = 1,1 \text{ m}$
3. Ceci est valide si $h > l$, soit $kl < 4mg$, puisque sinon le ressort ne se détend pas entièrement.

Réponses de l'exercice M4.7 : Flipper [**]

1. $v_1 = \sqrt{\frac{k\ell_0^2}{4m} - g\ell_0 \sin \alpha} = 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2(\ell - \ell_0)g \sin \alpha} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponses de l'exercice M4.8 : Saut à l'élastique [**]

1. $v_0 = \sqrt{2gh} = 34,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
2. $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}k(h-z)^2 = cst$.
3. $h' = h - \frac{2mg}{k}$.
On veut que $h' > 0$ soit $k > \frac{2mg}{h} = 23,2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.
4. $h' = 20 \text{ m}$
5. $v = \sqrt{2g(h-z) - \frac{k}{m}(h-z)^2}$; on dérive et on trouve $v_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}}g = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M4.9 : Mouvement d'un aimant sur un fil [**]

1. $E_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - C\frac{d}{(d^2+z^2)^{3/2}}$
2. Le mouvement est borné si est seulement si $E_m < 0$.
3. Il y a une position d'équilibre stable en $z = 0$.
4. $\frac{d^2E_p}{dz^2}(0) = \frac{3C}{d^4} > 0$. En liéasant l'équation différentielle du mouvement au voisinage de $x = 0$ on obtient $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{3C}{md^4}} = 42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (période $T_0 = 0,13 \text{ s}$).

Réponses de l'exercice M4.10 : Masse reliée à un ressort fixé en hauteur [**]

1. $E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{h^2+x^2} - \ell_0)^2 = cst$
2. $m\ddot{x} + \frac{kx}{\sqrt{h^2+x^2}}(\sqrt{h^2+x^2} - \ell_0)$
3. $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\ell_0^2 - h^2}$ quand c'est possible : $h < \ell_0$
4. $\frac{d^2E_p}{dx^2}(0) = k(1 - \frac{\ell_0}{h})$: si $h < \ell_0$, la position est instable, sinon elle est stable.

Réponses de l'exercice M4.11 : Une bille dans une machine à laver [**]

1. $E_p = -m.g.R \cos \theta$
2. On voit que le mouvement est borné su $E_m < mgR$ et non borné sinon.
Pour atteindre le sommet en partant du bas il faut au moins $v(0) > \sqrt{4gR}$
3. — Les positions de la forme $\theta = p \cdot 360^\circ$ avec $p \in \mathbb{Z}$ sont les positions d'équilibre stables
— Les positions de la forme $\theta = 180^\circ + p \cdot 360^\circ$ avec $p \in \mathbb{Z}$ sont des positions d'équilibre instables
4. $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$
5. $\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$.

Réponses de l'exercice M4.12 : Potentiel de Lennard-Jones [***]

1. $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}U = -\left[\frac{6B}{r^7} - \frac{12A}{r^{13}}\right]\vec{e}_r$

r	0	$\sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$	$+\infty$
$\frac{dU}{dr}$	-	0	+
U	$+\infty$	$-\frac{B^2}{4A}$	0

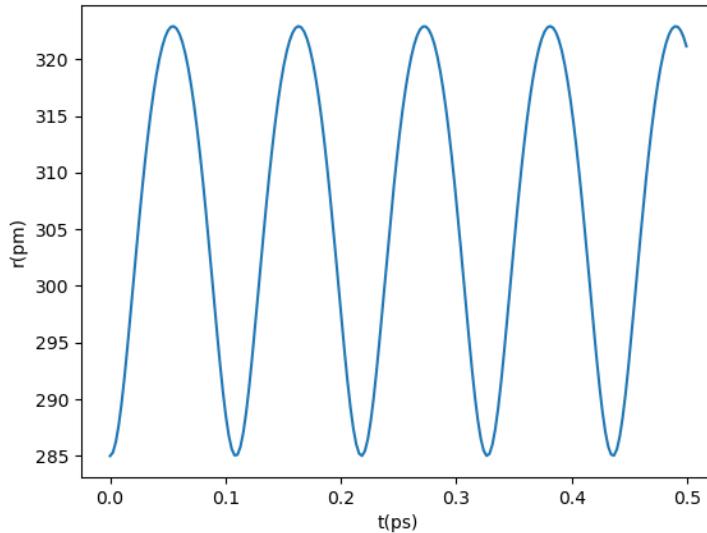
2.

$$\text{Donc } d = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$$

$$3. \ddot{r} + \omega_0^2 r = \omega_0^2 d \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 U}{dr^2}(d)} = \sqrt{\frac{1}{m} 72 A^{-8/6} B^{14/6} 2^{-14/6}}$$

$$4. A = 2,62 \times 10^{-134} \text{ USI et } B = 7,2 \times 10^{-77} \text{ USI.}$$

5.



On observe des oscillations non sinusoïdales, non centrées sur la position d'équilibre (300 pm) ; cela est dû au fait que le potentiel n'est pas harmonique.

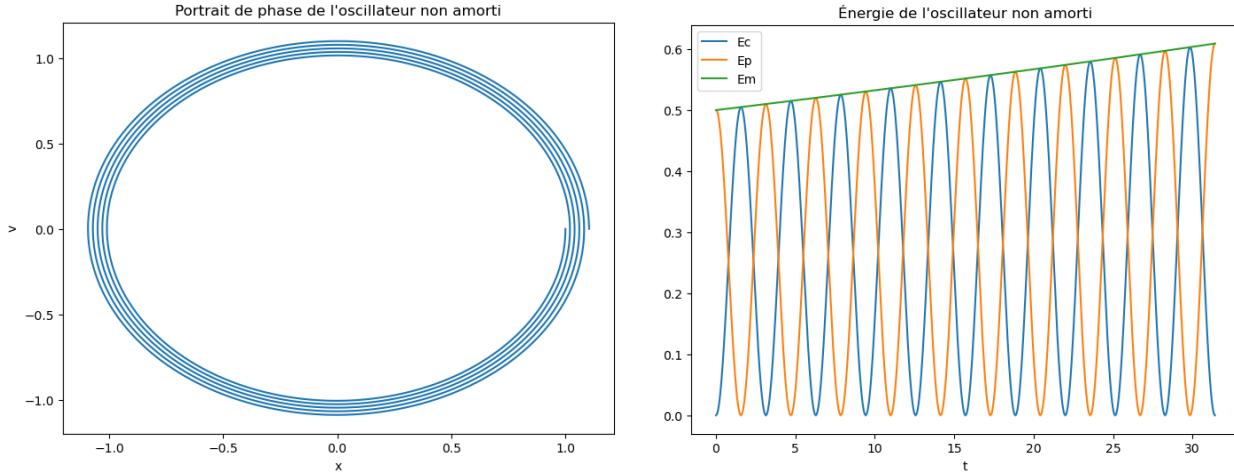
Réponses de l'exercice M4.13 : Mesure de la force de Casimir [**]

1. $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 - \frac{AR}{(D-\ell)^2}$
2. On dérive par rapport au temps et on simplifie par $\dot{\ell}$; on obtient $m\ddot{\ell} + k(\ell - \ell_0) - \frac{2AR}{(D-\ell)^3} = 0$
3. Numériquement on trouve $x = 1,2 \times 10^{-12} \text{ m}$
4. $\frac{d^2 E_p}{d\ell^2}(\ell_0) = k - \frac{6AR}{(D-\ell_e)^4} = 0,399\,997 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} > 0$ donc c'est stable.
5. Par un DL on trouve des oscillations à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{6AR}{k(D-\ell_e)^4}}$. On calcule alors $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 3,6 \times 10^{-6}$
6. Cette fois $\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = 4,1 \times 10^{-2}$, c'est beaucoup plus important.
7. On fait une régression linéaire de $\ln \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$ en fonction de $\ln(D - \ell_0)$; on doit trouver une pente de -4 et l'ordonnée à l'origine permet de calculer A .

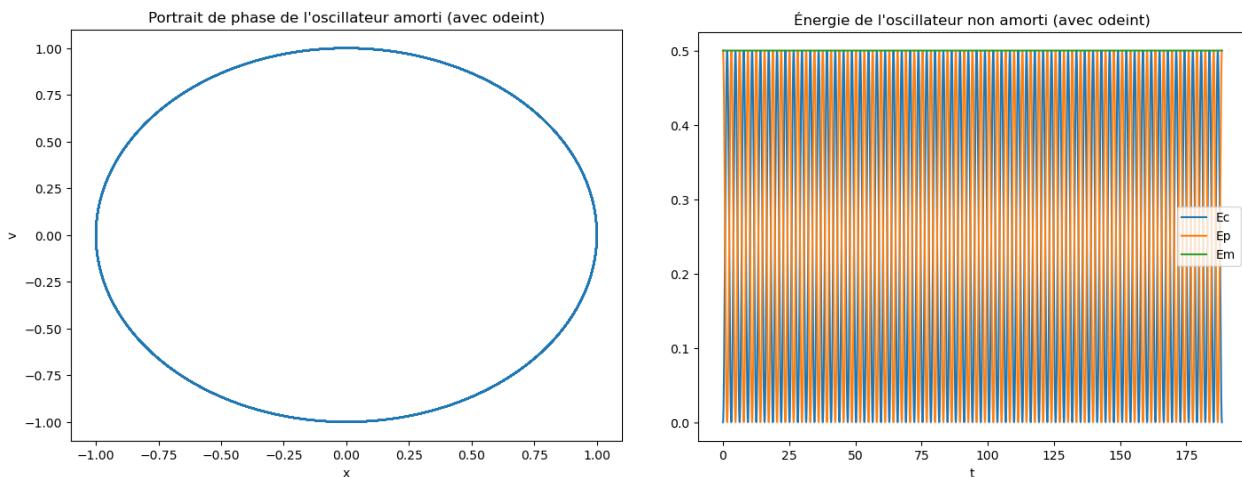
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Oscillateur harmonique

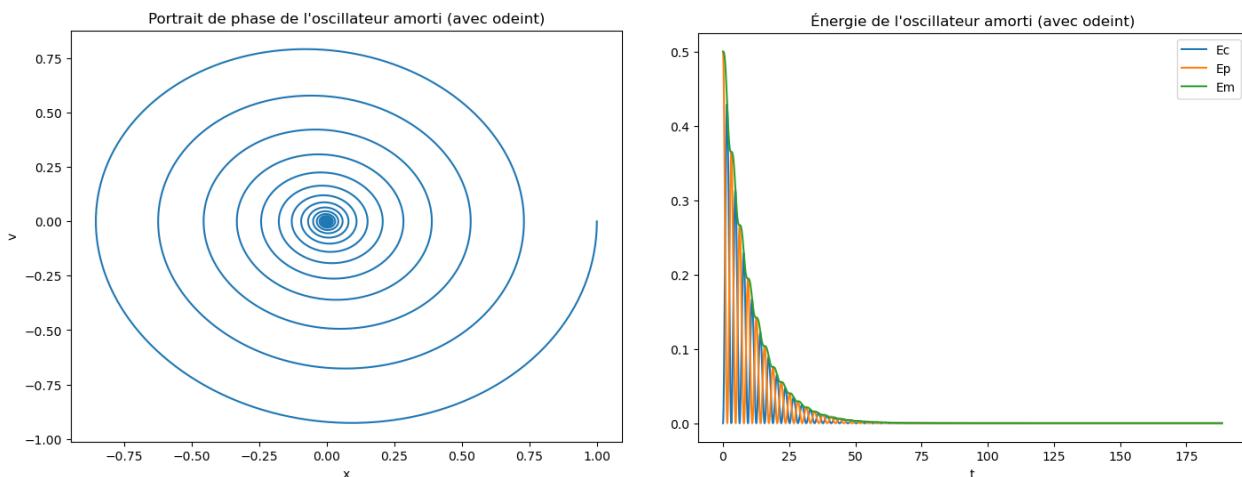
Méthode d'Euler pour un OH non amorti : les oscillations croissent, l'énergie mécanique augmente, ce qui n'est pas réaliste :



Avec odeint, c'est beaucoup plus précis, et on ne voit quasiment plus la croissance de l'énergie :

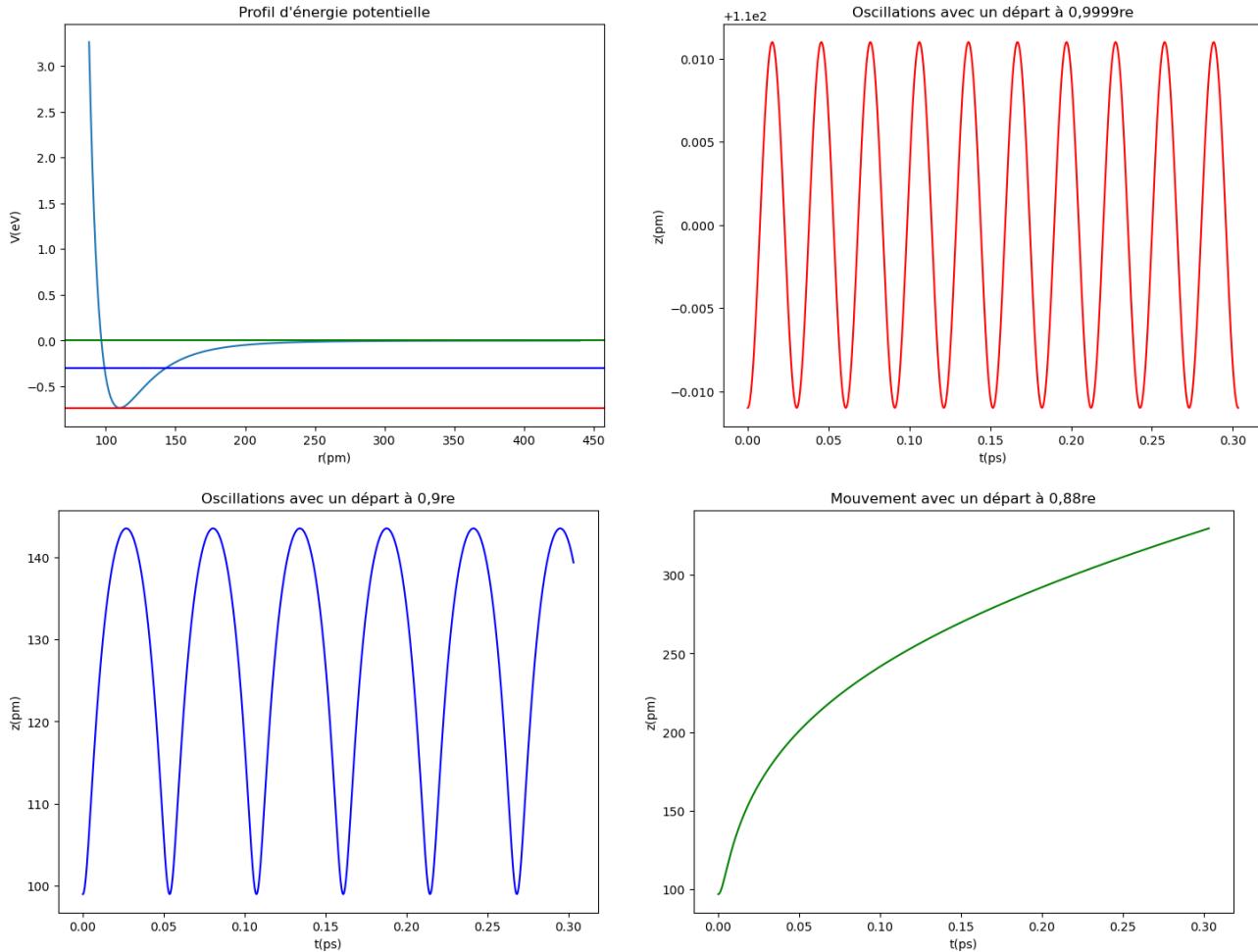


Avec un OH amorti, l'énergie décroît elle aussi :



Réponses au TD d'info : Oscillateur non harmonique

On trouve que $A = \frac{\pi^2 f_0^2 m r_e^8}{12} = 5,2 \times 10^{-79}$ USI. Le profil d'énergie potentielle est :



Les simulations pour une énergie au fond du trou donnent les oscillations quasi harmoniques de fréquence f_0 . Si l'énergie augmente, la période augmente et la courbe devient non sinusoïdale. Si l'énergie dépasse 0, l'atome part à l'infini.

$V_{min} = V(r_e) = -\frac{2A}{5r_e^6} = 0,7$ eV est l'énergie de la molécule au repos ; c'est aussi l'énergie qu'il faut lui fournir pour la dissocier (passer la barrière d'énergie pour éloigner les atomes à l'infini). En fait les tables donnent une énergie de dissociation de $494 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ soit $5,1$ eV : ce modèle est peu exact.

Bases de la thermodynamique**Cours**

La mécanique nous a permis d'établir les lois qui régissent le mouvement des objets. Elle nous permettra bientôt, par exemple, de prédire le mouvement d'un corps céleste en orbite autour d'un point fixe.

En réalité, quand la Terre tourne autour du Soleil, la Terre et le Soleil sont en mouvement. Pour décrire correctement ce système, il faut écrire deux fois le PFD, et résoudre un système d'équation couplées. Dans le cas de deux objets en interaction, il existe une théorie, la *théorie du mobile fictif*, qui permet de résoudre encore une fois le mouvement de façon analytique.

Mais la Terre n'est pas la seule dans le système solaire. Elle est soumise aussi à l'attraction des autres planètes. On n'est donc pas dans le cadre d'un «système à 2 corps», mais d'un «système à N corps». Les équations deviennent alors de plus en plus complexes. Mais surtout, Poincaré a montré que, dès que $N \geq 3$, le système devient *chaotique* : la prédiction du mouvement est impossible sur une durée supérieure à quelques périodes.

Il est donc impossible de prédire exactement le comportement d'un système à plus de 12 degrés de liberté (1 particule = 3 ddl de position + 3 ddl de vitesse, soit 6 ddl). C'est James Clerk Maxwell qui a compris qu'un système à N degrés de liberté peut être décrit de façon globale, sans les détails, lorsque N devient très grand. Prenons l'exemple d'un gaz : il contient une quantité de particules impossible à imaginer. Mais a-t-on besoin de connaître la position et la vitesse de chacune ? Ou peut-on se contenter de connaître des propriétés moyennes de ce gaz ?

En fait, la thermodynamique avait commencé bien avant Maxwell. Après la fabrication des premières machines à vapeur par Newcomen puis Watt au XVIII^e siècle, s'est posée la question de traduire scientifiquement ce qu'on appelle à l'époque les *transferts de calorique* ou *transferts de chaleur* — le calorique étant un fluide que l'on imagine transporter la chaleur à travers la matière. La *thermodynamique* — science de la dynamique de la chaleur — naît ainsi, et son aspect théorique commence vraiment lorsque Sadi Carnot écrit son mémoire sur la force motrice du feu en 1824. D'autres scientifiques continueront ses recherches — Joule, Kelvin, Clausius,...et établiront des lois. Mais jusque-là, une notion essentielle manque encore : quasiment personne ne croit que la matière est composée d'atomes.

Il faudra attendre Maxwell en 1860, avec sa théorie cinétique des gaz, puis Boltzmann en 1877, pour traduire enfin une idée avancée déjà timidement par Joule puis Clausius : la matière est constituée d'atomes, qui forment des molécules, et la thermodynamique ne fait que traduire la dynamique globale de ces constituants. Il y a des milliards de milliards de milliards d'atomes dans un gaz ; on ne sait où ils sont, ni où ils vont, mais on sait décrire comment ils se comportent *en moyenne*. C'est là la base sous-jacente qui explique les lois de la thermodynamique.

Dans notre étude cette année, nous ne suivrons pas la démarche historique et ses fausses notions. Nous partirons tout de suite de l'hypothèse jugée si farfelue au milieu du XIX^e siècle, que la matière est constituée d'atomes, qui grouillent en tous sens à l'échelle microscopique, mais que nous ne voyons pas.

T1.A. Description d'un système thermodynamique

A.1. Définitions générales

Commençons par définir ce qu'on entend par *système thermodynamique*.

Définition : Système

Un système est une portion de l'univers limitée par une frontière. On peut distinguer l'intérieur et l'extérieur de ce système.

Exemple : l'air de la pièce, la tasse de café, le moteur,...

Définition : Système thermodynamique

Un système thermodynamique est un système possédant un très grand nombre de degrés de liberté.

Remarque : Le plus souvent, on a 6 ddl par atome.

Remarque : Dans l'absolu, les lois de la thermodynamique ne s'appliquent qu'à des systèmes dont le nombre de degrés de liberté tend vers l'infini.

Une notion importante est celle de *système fermé* ; on étudiera à la fin de cette année les systèmes ouverts, et leur étude sera plus difficile :

Définition : Système fermé

Un système est fermé s'il n'échange pas de matière avec l'extérieur ; dans le cas contraire, il est ouvert.

Voilà donc un système thermodynamique fermé. Il contient plein d'atomes. Chaque atome a une position et une vitesse à un instant donné ; personne n'en connaît la liste, mais il n'empêche que cette liste existe : on l'appelle l'état microscopique du système.

Maintenant, quand on entre dans une pièce, peu nous importe où se trouve la particule n° 18682990254792020098981. Par contre, ce qui nous intéresse, c'est : est-ce qu'il fait froid/chaud, est-ce qu'il y a des courants d'air, est-ce qu'il y a une drôle d'odeur, ...c'est-à-dire des propriétés générales qu'on peut caractériser par des variables à notre échelle : température, vitesse, concentration en divers composants volatils,...

Définition : État microscopique/macroscoique d'un système

L'état microscopique d'un système consiste en la description de la position et de la vitesse de chacun de ses constituants. Cet état est impossible à connaître, mais il existe.

L'état macroscopique d'un système thermodynamique est donné par quelques **variables** dites **thermodynamiques** qui le décrivent dans son ensemble : pression, température, volume, concentration,

Remarque : L'air de la pièce dans laquelle je me trouve est décrit macroscopiquement par des variables thermodynamiques qui varient lentement. Par conséquent, entre l'instant actuel et 1s plus tard, son *état macroscopique* a peu changé ; par contre son *état microscopique* a beaucoup changé, car les atomes et les molécules ont bougé. Cela fait comprendre cette notion essentielle : **à un état macroscopique correspondent une très grande quantité d'états microscopiques.**¹

Nous allons définir dans la suite certaines de ces variables thermodynamiques. Mais avant, il faut remarquer qu'elles se classent en 2 catégories bien distinctes :

Définition : Variables extensives

On appelle variable/grandeur extensive une variable thermodynamique qui décrit le système dans son ensemble, et s'ajoute lorsqu'on prend l'union de deux systèmes ^a.

a. **Distincts**, c'est toujours sous-entendu.

Exemple : le volume. Si on prend comme système l'air d'une pièce, il a un seul volume qui le décrit. Si le système est l'union de la salle 309 et de la 307, le volume total est la somme des deux volumes. Donc le volume est une variable extensive.

On peut aussi citer : la masse, le nombre de particules, la quantité de matière (nombre de moles), la charge électrique, et bientôt nous verrons l'énergie, mais pour l'instant on la laisse de côté.

Définition : Mole

Une mole d'une entité quelconque (atome, molécule,...) correspond à $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ molécules. N_A s'appelle le *nombre d'Avogadro*.

Dans la suite, on notera souvent N le nombre de particules d'une entité et n son nombre de moles.

Définition : Masse molaire

La masse molaire d'une entité, souvent notée M , est la masse d'une mole de cette entité. Si on note m la masse d'une entité, alors $M = N_A \cdot m$.

Remarque : Par définition de la mole, la masse molaire du carbone 12 est $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Par opposition, il y a les :

Définition : Variables intensives

On appelle variable/grandeur intensive une variable thermodynamique qui décrit le système localement (c'est un champ), et qui ne varie pas si on prend l'union ^a de deux systèmes.

a. L'union par la pensée ; à ne pas confondre avec un mélange.

1. Très grande ? Pour 1 mol de gaz, soit $N_A = 6 \times 10^{23}$ particules, le nombre d'états microscopiques possibles est de l'ordre de N_A ! soit environ un 1 suivi de 10^{25} zéros...n'essayez même pas d'imaginer ce nombre.

La température, par exemple, est définie en chaque point : dans une pièce, il peut y avoir un coin chaud et un coin froid. On ne peut pas parler de la température de la pièce, à moins qu'elle soit la même partout (cf. plus loin, système homogène). Mais a priori, la température est bien définie en chaque point, et elle ne dépend pas du fait que le système choisi est la salle 309, ou bien la salle 309 et la salle 307.

Dans le même ordre d'idée, on a la pression, mais aussi tous les quotients de deux variables extensives : la masse volumique (masse/volume), le volume massique (volume/masse), la concentration (quantité de matière / volume), la fraction massique (masse d'un composant / masse totale) ou molaire, ...

Remarque : Comment le quotient de deux grandeurs extensives, donc définies sur tout le système, peut-il donner une variable intensive, donc définie localement ? En fait, on peut découper le système en petits sous-systèmes, appelés *volume de moyennage*, et pour chaque sous-système on définit la valeur de la grandeur intensive (cf. figure T1.1). Même les variables comme la température ou la pression ne sont pas vraiment définies en un point, mais sur un volume de moyennage, car elles ne peuvent être définies que sur un grand nombre de particules.

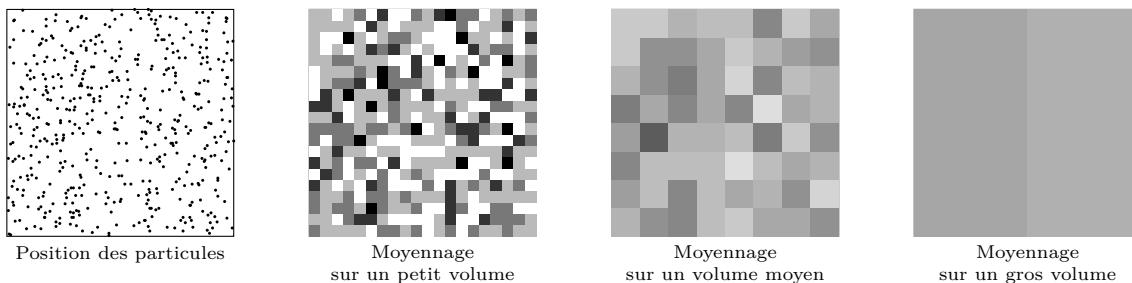


FIGURE T1.1 – Influence du volume de moyennage pour définir la masse volumique d'un système : il ne doit être ni trop petit (sinon il n'y a pas assez de particules à moyenner) ni trop grand (sinon on perd toute précision).

Définition : Température

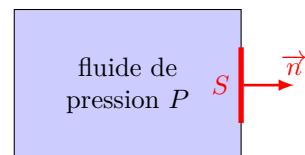
La température est une variable intensive qui caractérise l'agitation désordonnée des atomes. Son unité est le Kelvin K , on utilise aussi la température en degrés Celsius : $\theta(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15$

Définition : Pression

La pression caractérise la force exercée par un fluide sur une paroi en contact avec lui : un fluide de pression P exerce sur une surface S de vecteur normal \vec{n} une force

$$\vec{F} = P.S.\vec{n} \quad (\text{T1.1})$$

La pression se mesure en Pascal : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ ou en bar : $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$.



Remarque : Il existe d'autres unités moins courantes : l'atmosphère ($1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar}$) et le millimètre de mercure (unité encore utilisée dans les pays anglo-saxons : $760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$).

Définition : Masse volumique

La masse volumique d'un système est le quotient de sa masse par son volume : $\rho = \frac{m}{V}$ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On définit aussi parfois le volume massique, qui est l'inverse : $v = \frac{V}{m}$ en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Définition : Système homogène

Un système est homogène si **toutes les variables intensives** sont indépendantes de la position.

Évidemment, cela dépend de la précision avec lequel on étudie le système. En première approximation, on peut considérer que l'air de la pièce dans laquelle on est est un système homogène. Mais si on veut être précis, on remarquera que la température est plus élevée au plafond qu'au sol (l'air chaud monte), et que la pression est plus faible au plafond qu'au sol.

En pratique, cette année, on travaillera le plus souvent sur des systèmes considérés comme homogènes. Sinon, il faut les découper en petits morceaux sur lesquels on peut les considérer comme homogènes, ce qui complique la chose.

Mais les grandeurs (extensives ou intensives) peuvent aussi dépendre d'un autre paramètre : le temps.

Définition : Système à l'équilibre

Un système est à l'équilibre si **toutes les variables** (intensives et extensives) ne varient pas avec le temps.

Là encore, cette notion est relative à l'expérience qu'on fait, et à la durée de l'observation. L'air de la salle 309, par exemple, est à l'équilibre si on effectue une expérience durant 1 minute. Sur 2h de cours, c'est moins vrai, car les taupins chauffent le cerveau et réchauffent l'air. Sur 1 année, c'est encore moins vrai, car l'été, c'est un four.

Il sera donc toujours très important de considérer la durée d'une expérience en thermodynamique, car les lois de la thermodynamique qu'on va voir s'appliquent toujours à des systèmes à l'équilibre, du moins sur la durée de l'expérience.

Remarque : Dans un système à l'équilibre, c'est l'état **macroscopique** qui ne varie pas ; mais l'état **microscopique** varie beaucoup : les atomes sont en mouvement incessant.

Remarque : En thermodynamique, on ne tient pas compte, le plus souvent, des mouvements d'ensemble du système. Par exemple, la salle 309 est entraînée avec la Terre dans deux mouvements : la rotation de la Terre sur elle-même, et sa révolution autour du Soleil. Mais cela n'a pas d'importance dans l'étude de ses propriétés thermodynamiques.

A.2. Coefficients thermoélastiques

On va introduire dans cette partie quelques coefficients qui permettent de décrire comment certaines variables dépendent les unes des autres.

! Dans toute cette section, on travaille sur un système fermé, ce qui se traduit par $n=cst$ (quantité de matière constante, pour chaque constituant).

Coefficient de dilatation isobare

Définition : Coefficient de dilatation isobare

Pour un système fermé, on définit le coefficient de dilatation isobare

$$\alpha = \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,n} \text{ en K}^{-1} \quad (\text{T1.2})$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la température augmente de dT à pression constante, alors le volume augmente de $dV = V\alpha dT$.

Un peu de maths : Dérivées partielles et variables constantes

Que signifie $\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,n}$? La dérivée partielle du volume V par rapport à la température T , mais pourquoi ce $)_{P,n}$? En thermodynamique, il y a beaucoup de variables qui dépendent toutes les unes des autres. Si on écrivait simplement $\frac{\partial V}{\partial T}$, ce serait la dérivée partielle de V par rapport à T en maintenant constantes **toutes les autres variables**. Or c'est impossible : si T varie mais P ne varie pas, alors par exemple l'énergie du système (qu'on notera bientôt U) varie ; à l'opposé, si on fait varier T à énergie constante, alors P varie. Donc en thermodynamique, une dérivée partielle se fera toujours en gardant seulement un certain nombre des autres variables constantes ; on précise ces variables à droite. Bien évidemment, il s'agit pour nous d'une notion essentiellement expérimentale. Dans les calculs, cela se traduit de façon très compliquée.

Ce coefficient traduit donc la variation de volume d'un système en fonction de la température. Il est normalisé par $\frac{1}{V}$ de manière à avoir un coefficient qui ne dépend pas de la taille du système. Ainsi, on pourra lire dans un livre de données thermodynamiques que pour le cuivre à 25 °C sous 1 bar, $\alpha = 17 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Cela signifie que quand on élève la température d'1 cm³ de cuivre de 1 K, son volume augmente de $17 \times 10^{-6} \text{ cm}^3$; si on pratique la même élévation de température sur un volume de 2 cm³, la variation de volume sera double, mais le α reste le même. Ainsi, on a des tableaux donnant le coefficient α pour la plupart des corps purs.

Remarque : Si un système voit sa température varier de ΔT , de combien augmente son volume ? A-t-on le droit d'appliquer la formule $\Delta V = V\alpha\Delta T$ même si ΔT n'est pas petit ? En pratique, on peut le faire tant que $\Delta T \ll \frac{1}{\alpha}$. Par exemple pour le cuivre, $\frac{1}{\alpha} = 59000 \text{ K}$: aucun souci pour les cas concrets, on ne chauffe jamais autant le cuivre.

Dans le cas (très rare) où ΔT ne serait pas petit devant $\frac{1}{\alpha}$, il faut tenir compte aussi de la variation de α avec la température. On peut alors écrire que $\frac{dV}{V} = \alpha dT$ et intégrer entre l'état initial (i) et final (f) : $\ln \frac{V_f}{V_i} = \int_{T_i}^{T_f} \alpha dT$.

Remarque : Si un système passe de T_i à T_f , alors sa variation de température en Kelvins vaut $\Delta T = T_f - T_i$. On peut aussi l'écrire $\Delta T = (T_f - 273) - (T_i - 273)$ sans rien changer, ce qui montre qu'**une différence de température a la même valeur qu'on la calcule en K ou en °C**. Ce n'est vrai que pour une **différence** de température.

Exemple : Dilatation d'un bloc de fer

À 25 °C sous 1 bar, $\alpha_{Fe} = 1,4 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\rho_{Fe} = 7874 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prend un bloc de fer de masse $m = 200 \text{ g}$ sous 1 bar.

1. Calculez son volume à 25 °C (gardez 4 chiffres significatifs).
2. Calculez son volume à 200 °C.
3. Calculez sa masse volumique à 200 °C.

$$\begin{aligned} 1. V_{25} &= \frac{0,2}{7874} = 2,540 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 25,40 \text{ cm}^3 \\ 2. V_{200} &= V_{25} + V_{25}\alpha_{Fe}(200 - 25) = 25,46 \text{ cm}^3 \\ 3. \rho_{200} &= \frac{0,2}{2,546 \times 10^{-5}} = 7855 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

On a l'habitude de matériaux qui se dilatent quand on les chauffe, c'est-à-dire que leur volume augmente avec la température ; pour de tels matériaux, le coefficient α est positif. C'est le cas le plus courant, mais il existe des matériaux à α négatif : quand on les chauffe, ils se contractent. Le cas le plus connu est l'eau : la figure T1.2 montre que, entre 0 °C et 4 °C, la masse volumique de l'eau augmente avec la température, c'est-à-dire que pour une masse constante, le volume diminue, donc $\alpha < 0$; puis ce comportement change au-dessus de 4 °C. C'est pour cela que la masse volumique de l'eau n'est égale à 1,000 kg · L⁻¹ qu'à 4 °C sous 1 bar ; à d'autres températures, elle est plus faible.

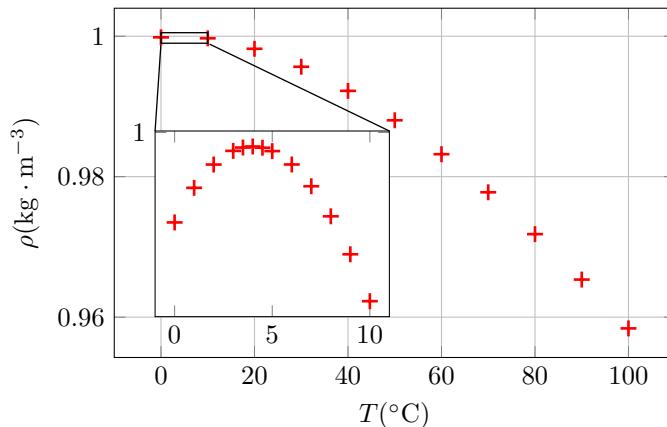


FIGURE T1.2 – Masse volumique de l'eau en fonction de la température, sous 1 atm.

Remarque : Pour un système tout en longueur (une tige par exemple), la variation de volume importe souvent peu : ce qui compte, c'est la variation de longueur du système. On peut alors définir le coefficient de dilatation linéique isobare : $\alpha_{lin} = \frac{1}{l} \left(\frac{\partial l}{\partial T} \right)_{P,n}$ où l représente la longueur du système.

Coefficient de compressibilité isotherme

Une autre façon de faire varier le volume d'un système, c'est de le comprimer, c'est-à-dire de lui faire subir une augmentation de pression. Si on procède à température constante, alors tous les systèmes autour de nous se comportent de la même manière : leur volume diminue lorsqu'on les comprime.

Définition : Coefficient de compressibilité isotherme

Pour un système fermé, on définit le coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,n} \text{ en Pa}^{-1} \quad (\text{T1.3})$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la pression augmente de dP à température constante, alors le volume varie de $dV = -V\chi_T dP$

Remarque : Tous les systèmes stables ont un χ_T positif (d'où le $-$ dans la définition) ; un système avec $\chi_T < 0$ est instable, il explose ou implose.

Le coefficient χ_T est homogène à l'inverse d'une pression, on l'exprime en Pa^{-1} ou en bar^{-1} . Comme dans le cas de α , l'inverse de χ_T donne une indication de la variation de pression maximale qu'on peut considérer comme petite : tant que $\Delta P \ll \frac{1}{\chi_T}$, on peut écrire que la variation de volume vaut $\Delta V = -V\chi_T\Delta P$. Par exemple, pour le cuivre à 25 °C sous 1 bar : $\chi_T = 8,6 \times 10^{-7} \text{ bar}^{-1}$ donc $\frac{1}{\chi_T} = 1,1 \times 10^6 \text{ bar}$.

Exemple : Compression d'un bloc de fer

À 25 °C sous 1 bar, $\chi_{T,Fe} = 5,94 \times 10^{-7} \text{ bar}^{-1}$ et $\rho_{Fe} = 7874 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. On prend un bloc de fer de masse $m = 200 \text{ g}$ à 25 °C.

1. Calculez son volume sous 1 bar (gardez 6 chiffres significatifs).
2. Calculez son volume sous 100 bar.
3. Calculez sa masse volumique sous 100 bar.

$$\begin{aligned} 1. \quad V_1 &= \frac{0,2}{7874} = 2,540 \times 10^{-5} \text{ m}^3 = 25,4001 \text{ cm}^3 \\ 2. \quad V_{100} &= V_1 - V_1 \chi_{T,Fe} (100 - 1) = 25,3986 \text{ cm}^3 \\ 3. \quad \rho_{100} &= \frac{0,2}{2,53986 \times 10^{-5}} = 7874,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

La figure T1.3 montre la variation du volume de l'eau avec la pression ; elle est très faible.

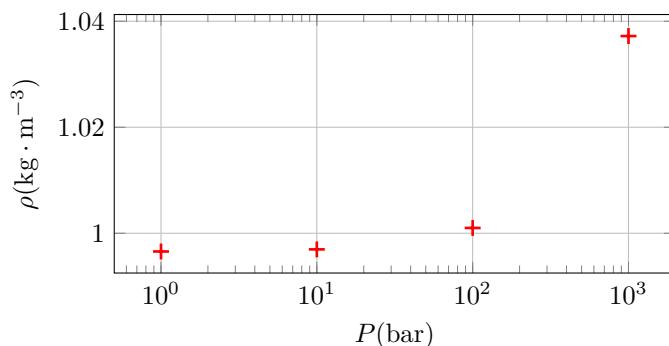


FIGURE T1.3 – Masse volumique de l'eau en fonction de la pression, à 300 K.

Remarque : On peut définir pour un long système un coefficient de compressibilité linéique isotherme, mais vous définirez plutôt le module d'Young en seconde année.

Autre coefficient

Un troisième cas concret est celui où on fait varier la température d'un système en l'empêchant de faire varier son volume.

Définition : Coefficient sans nom

Pour un système fermé, on définit le coefficient

$$\beta = \frac{1}{P} \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_{V,n} \text{ en } K^{-1} \quad (\text{T1.4})$$

Son interprétation est la suivante : lorsque la température augmente de dT à volume constant, alors la pression augmente de $dP = P\beta dT$

Relation entre les trois coefficients (hors programme)

$$\beta = \frac{\alpha}{\chi_T P} \quad (\text{T1.5})$$

Démonstration

On a vu que $dV = \alpha V dT$ si la température varie à pression constante, et $dV = -\chi_T V dP$ si la pression varie à température constante. Pour de petites variations, si T et P varient, alors les variations de volume s'ajoutent : $dV = V(\alpha dT - \chi_T dP)$.

Si on veut que le volume reste constant, il faut que $dV = 0$ donc $\alpha dT = \chi_T dP$ soit $dP = \frac{\alpha}{\chi_T} dT$. par identification avec la définition de β , on en déduit que $\frac{\alpha}{\chi_T} = \beta P$ d'où la relation $\beta = \frac{\alpha}{\chi_T P}$. Cette relation explique pourquoi le coefficient β , bien que très utile, ne figure pas dans les tables thermodynamiques.

Ainsi pour du fer à 25°C sous 1 bar, $\alpha = 1,5 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 5,94 \times 10^{-7} \text{ bar}^{-1}$ donc $\beta = \frac{1,5 \times 10^{-5}}{5,94 \times 10^{-7}} = 25 \text{ K}^{-1}$. En pratique : si on veut maintenir un morceau de fer à volume constant, s'il s'échauffe de 1°C alors il faut multiplier la pression par 25 pour le contenir : c'est énorme. Ce résultat est général : les coefficients β sont en général très grands, ce qui impose de très fortes contraintes si on veut empêcher un solide de se dilater. Cela explique les joints de dilatation observés sur les ponts ou les voies ferrées, par exemple (figure T1.4) ; si on n'en met pas, les fortes contraintes risquent de poser quelques problèmes (figure T1.5).



(a) Pont routier (Crédit : Wikipedia/Ingolfsn)



(b) LGV (Crédit : Wikipedia/N. Tavenneaux)

FIGURE T1.4 – Joints de dilatation.



(a) (Crédit : ?)



(b) (Crédit : P. Down)

FIGURE T1.5 – Canicule en Australie en 2009 : gare au β pour les vieux rails !

T1.B. Le premier principe de la thermodynamique

En plus des variables thermodynamiques déjà rencontrées, les systèmes thermodynamiques possèdent, comme tout système mécanique, une *énergie*. Nous allons, dans cette partie, préciser comment décrire l'énergie d'un système thermodynamique, et comment elle peut s'échanger.

Définition : Système isolé

Un système est isolé s'il n'a aucune interaction avec l'extérieur.

Remarque : Isolé et fermé sont deux notions très différentes et à ne pas confondre. Un système isolé est forcément fermé, mais la réciproque est fausse.

Un système non isolé a des interactions avec l'extérieur qui vont se traduire par des échanges d'énergie. Il existe deux façons d'échanger de l'énergie entre des systèmes : par travail ou par transfert thermique.

B.1. Transfert thermique, ou chaleur

Définition : Transfert thermique, ou chaleur

Deux systèmes à des températures différentes placés côte à côte peuvent échanger de l'énergie sans mouvement macroscopique de matière; on dit qu'ils sont en **contact thermique**, ils échangent un **transfert thermique** noté Q , appelé aussi **quantité de chaleur**.

Exemple : si on pose une casserole d'eau sur une plaque chaude, l'eau se réchauffe par contact thermique à travers le fond de la casserole.

Définition : Paroi diatherme ou calorifugée

Une paroi est **diatherme** si elle permet le transfert thermique.

Une paroi est **calorifugée** (ou isolée thermiquement) si elle ne permet aucun transfert thermique.

Ces deux définitions sont des limites idéales. En fait, toute paroi permet de passage de la chaleur, mais sur des durées plus ou moins longues.

Définition : Évolution adiabatique

Un système qui n'a aucun échange par transfert thermique avec l'extérieur a une évolution **adiabatique**.

Ce modèle idéal dépendra encore une fois de la durée de l'expérience. Les transferts thermiques sont toujours lents, donc toute expérience suffisamment rapide pourra être considérée comme adiabatique.

Propriété : Équilibre thermique

Lorsque deux systèmes sont en contact thermique, l'équilibre thermique est atteint lorsque les deux sont à la même température.

Il s'agit d'une notion qu'on observe dans la vie de tous les jours. Certains le posent comme «principe zéro de la thermodynamique».

B.2. Travail

Définition : Travail

Un travail est un échange d'énergie dû à une action de l'extérieur agissant sur des grandeurs variables du système. Le plus souvent, il s'agit d'une grandeur intensive extérieure qui agit sur une variable extensive du système.

Bon, cette définition générale et abstraite n'est pas vraiment à retenir, on retiendra plutôt les cas concrets.

Propriété : Travail d'une force

Une force extérieure \vec{F} s'appliquant en un point M du système fournit au système un travail infinitésimal $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$, ou encore un travail $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{OM}$.

Propriété : Travail des forces de pression

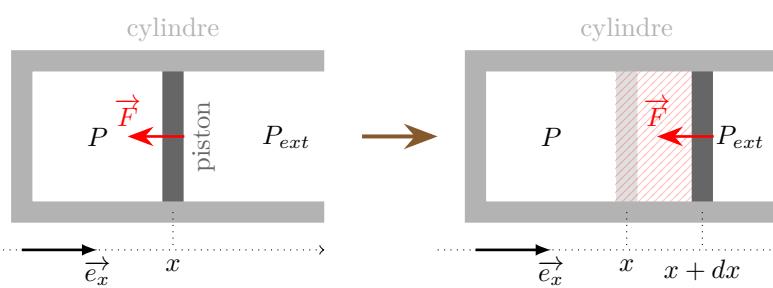
Un système soumis à une pression extérieure P_{ext} et dont le volume varie de dV reçoit un travail $\delta W = -P_{ext} \cdot dV$. Le travail total reçu de la part des forces de pression extérieure vaut donc

$$W = - \int P_{ext} \cdot dV \quad (\text{T1.6})$$

Démonstration

La démonstration n'est à connaître que dans le cas simple d'un système 1D ; la démonstration générale est inutilement compliquée et n'amène rien de plus.

Considérons le schéma qu'on va rencontrer le plus souvent, d'un fluide enfermé dans un cylindre fermé par un piston. Au niveau du vocabulaire à connaître : un cylindre désigne, en thermodynamique (et plus généralement dans les moteurs) un cylindre creux, dans lequel coulisse un autre cylindre appelé piston.



Sois S la surface du piston repéré par la position x ; le système étudié comprend l'intérieur du cylindre **plus le piston**. Il est soumis à la force de pression $\vec{F} = -P_{ext}.S.\vec{e}_x$. Lorsque le piston se déplace de $d\vec{OM} = dx.\vec{e}_x$, le travail élémentaire vaut $\delta W = \vec{F}.d\vec{OM} = -P_{ext}.S.dx$. Or $S.dx$ représente le volume hachuré, c'est le volume gagné par le système, qu'on va noter dV . On a donc bien $\delta W = -P_{ext}.dV$.

Remarque : dV est algébrique : si le système gagne du volume, $dV > 0$ et $\delta W < 0$; si le système perd du volume, $dV < 0$ et $\delta W > 0$. Enfin, pour un système **indéformable**, le travail des forces de pression est **nul**.

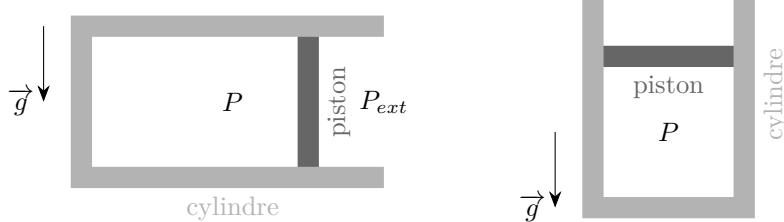
Remarque : L'intégrale n'est calculable que si on connaît l'évolution de P_{ext} . On verra plus tard divers cas classiques. On peut déjà retenir que, si $P_{ext} = cst$, alors on peut le sortir de l'intégrale : $W = -P_{ext} \int dV = -P_{ext}(V_f - V_i)$.

Propriété : Équilibre mécanique de pression

Si deux systèmes sont séparés par une paroi mobile libre (se déplaçant sans frottements solides) et de masse négligeable, l'équilibre mécanique est atteint lorsque les pressions des deux systèmes sont égales.

Démonstration

Considérons encore un gaz enfermé dans un cylindre fermé par un piston.



Dans les deux schémas ci-dessus, le fluide enfermé dans le cylindre est à la pression intérieure P et l'extérieur est à la pression P_{ext} (on utilisera le plus souvent ces notations). Alors le piston de surface S est soumis d'un côté à une force PS de l'intérieur vers l'extérieur, et de l'autre côté à une force $P_{ext}S$ de l'extérieur vers l'intérieur. À l'équilibre du piston, la somme des forces est nulle donc $P = P_{ext}$.

Le cas est différent si on tient compte de la masse m du piston. Dans ce cas, rien ne change pour le cylindre horizontal. Pour le cylindre vertical, on doit ajouter une force mg de haut en bas sur le piston. L'équilibre mécanique devient alors $PS - P_{ext}S - mg = 0$ donc $P = P_{ext} + \frac{mg}{S}$. On peut retenir cette simple règle : l'ajout d'une force F sur un piston est équivalente à rajouter une pression $\frac{F}{S}$ où S est la surface du piston ; cette règle fonctionne aussi pour le calcul du travail.

Remarque : Parfois, une force constante s'exerce F sur le système à travers un piston de surface S ; dans ce cas, on peut considérer cette force comme une surpression, en considérant que la pression apparente vaut $P_{ext} + \frac{F}{S}$.

Propriété : Travail électrique

Si un système reçoit un courant i de la part d'un générateur extérieur de tension e , alors le travail infinitésimal reçu vaut $\delta W = e.i.dt = e.dq$.

En pratique, on a rarement du travail électrique en thermodynamique. Le plus souvent, le seul travail à considérer est le travail des forces de pression, mais si l'énoncé parle d'autres travaux, il faut en tenir compte.

B.3. Premier principe

L'idée du premier principe est simple : l'énergie totale d'un système isolé se conserve. Imaginons une expérience : je laisse tomber une balle. Elle arrive par terre, rebondit une fois, roule un peu puis s'arrête. Un bilan d'énergie montre

facilement que l'énergie mécanique de la balle a diminué : elle a perdu de l'énergie potentielle de pesanteur, et son énergie cinétique n'a pas varié, puisqu'elle était immobile avant que je la lâche, et qu'elle est encore immobile à la fin. Où est passée cette énergie ? S'est-elle enfuie par les fenêtres ? Non, je peux refaire la même expérience dans une pièce calfeutrée, calorifugée, bien isolée à tous les points de vue, cela ne changera rien. Si je veux continuer à croire en la conservation de l'énergie, je dois admettre que l'énergie mécanique s'est transformée en un autre type d'énergie, invisible : l'énergie interne, qui représente toutes les énergies qui ne sont pas visibles à l'échelle macroscopique.

Premier principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une fonction d'état U appelée **énergie interne** qui est extensive.

Lorsqu'un système **fermé** subit une transformation entre deux états d'équilibre au cours de laquelle il reçoit un travail W et un transfert thermique (ou quantité de chaleur) Q , alors

$$\Delta(E_{macro} + U) = W + Q \quad (\text{T1.7})$$

où E_{macro} désigne toutes les énergies macroscopiques, entre autres l'énergie mécanique et l'énergie électrique.

Remarque : Il y a deux propriétés importantes de l'énergie interne qui sont postulées. D'abord, elle est extensive, donc l'énergie interne d'une somme de deux systèmes est égale à la somme de leurs énergies internes. D'autre part, c'est une fonction d'état, ce qui signifie que la variation de U entre deux états ne dépend que des états initial et final, et pas des étapes entre ces deux états. Par conséquent, si i est l'état initial, f l'état final et e un état intermédiaire quelconque voire fictif, on pourra écrire $\Delta U_{i \rightarrow f} = U_f - U_i = (U_f - U_e) + (U_e - U_i) = \Delta U_{i \rightarrow e} + \Delta U_{e \rightarrow f}$

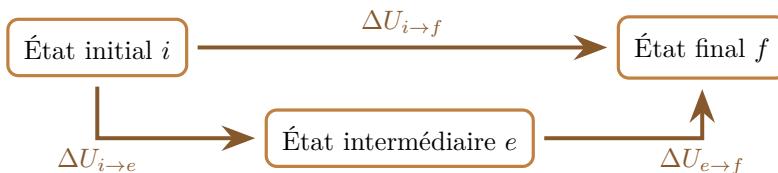


FIGURE T1.6 – Illustration de la notion de fonction d'état.

Remarque : **Travail et chaleur ne sont pas des fonctions d'état.** C'est-à-dire que si un système évolue et qu'on ne connaît que son état initial et son état final, on peut calculer $\Delta E_{macro} + \Delta U$ pour ce système, mais pas W et Q : ces grandeurs, qui désignent des **échanges d'énergie** (et non pas des énergies) dépendent du chemin suivi par le système pour aller de l'état initial à l'état final. C'est comme le bassin de la figure T1.7 : chaque robinet amène une certaine quantité d'eau, et pour remplir le bassin il y a différentes façons d'apporter l'eau par l'un ou l'autre des robinets. De même dans la figure T1.8, pour atteindre le sommet, il faut avoir gagné une énergie potentielle $m.g.h$, mais cela demande plus ou moins d'efforts suivant le chemin suivi.

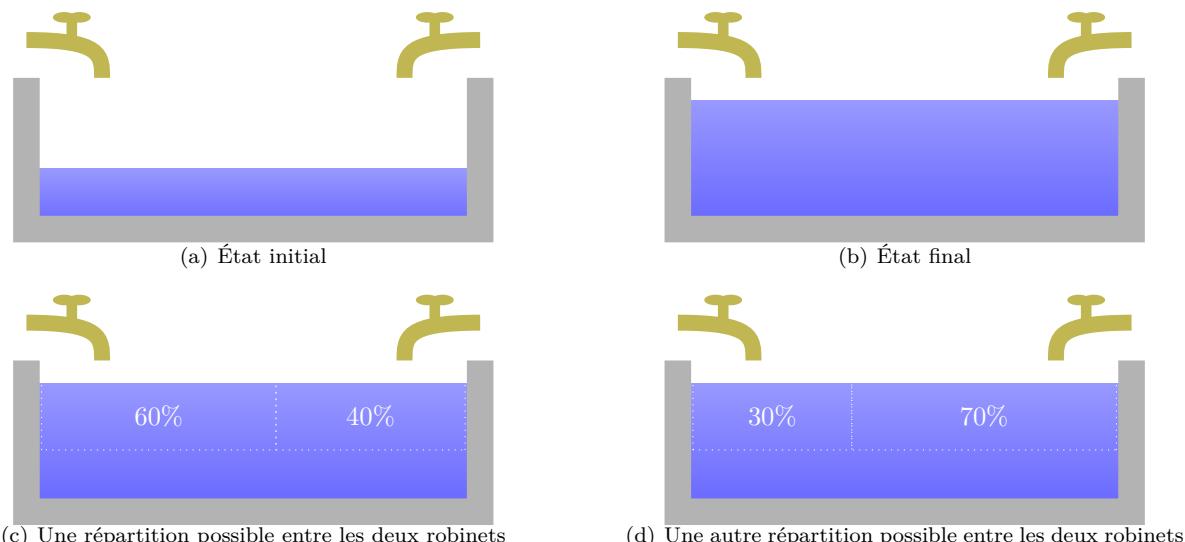


FIGURE T1.7 – La quantité d'eau dans le bassin est une fonction d'état ; les quantités d'eau versées par chaque robinet ne le sont pas.

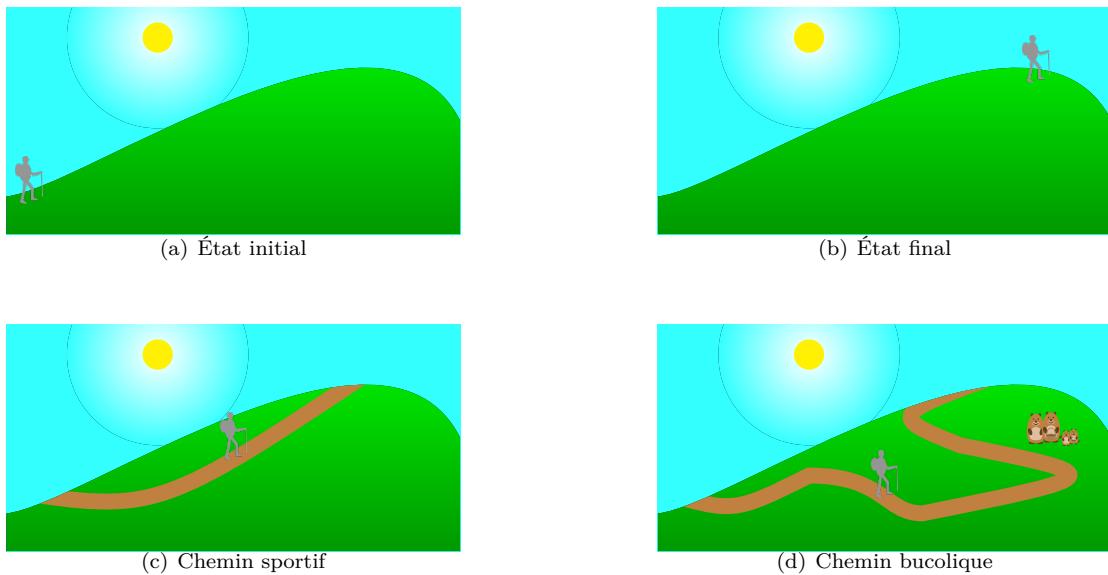


FIGURE T1.8 – L'énergie mécanique du marcheur est une fonction d'état, mais le travail qu'il a fourni, et la chaleur qu'il a dégagée en transpirant, dépendent du chemin suivi.

Cela a une conséquence importante sur les notations :

- l'énergie interne est définie en chaque état, donc sa variation sera notée ΔU ; mais W et Q sont définis **entre deux états**, on les notera donc sans Δ
- au niveau mathématique, cela se traduit par des histoires compliquées de différentielles «exactes» ou «inexactes». Sans entrer dans les détails, notez que pour une petite variation, on notera dU mais δW et δQ .

Remarque : Si un système S_1 reçoit de la part d'un système S_2 un travail W et un transfert thermique Q , alors on admet que le système S_2 reçoit de la part de S_1 un travail $-W$ et un transfert thermique $-Q$.

B.4. Capacité thermique/calorifique à volume constant

Quand on pose la question : où est passée l'énergie mécanique de la balle, la réponse qu'on obtient le plus souvent est : sous forme de chaleur.

En thermodynamique, la chaleur est un *transfert* d'énergie. Mais dans le langage courant, on confond chaleur et température. En fait, on pense souvent que l'énergie mécanique de la balle s'est transformée en une élévation de température. Eh bien, ce n'est pas si faux que cela, car si l'énergie interne dépend de l'état complet du système, donc de T , P , V , ...elle dépend principalement de T , et beaucoup moins des autres variables. Cela nous amène à définir la dépendance de U par rapport à T sous forme d'un coefficient très important.

Définition : Capacité calorifique à volume constant d'un système

Pour un système, on définit la **capacité calorifique ou thermique à volume constant** (ou encore chaleur spécifique à volume constant)

$$C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,n} \text{ en J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (\text{T1.8})$$

Son interprétation est : si la température du système varie de dT à volume constant, alors son énergie interne varie de $dU = C_v \cdot dT$. Autrement dit, C_v représente la quantité d'énergie interne à fournir pour que la température du système monte de 1 K sans changer le volume.

C'est une grandeur **extensive**.

Remarque : C_v dépend a priori de la température. Le plus souvent on le considérera constant pour simplifier, ce qui fait qu'on pourra écrire même pour une grande variation de température : $\Delta U = C_v \cdot \Delta T$

! Rappel : une différence de température a la même valeur en Kelvins ou en degrés Celsius : si la température augmente de 1°C alors elle augmente de 1 K et non pas de 274 K ! Par conséquent, dans les calculs où les températures n'apparaissent que sous forme de différences, on peut utiliser les degrés Celsius.

Définition : C_v molaire et massique

Le C_v étant extensif, on définit les deux grandeurs intensives :

$$c_v = \frac{C_v}{m} \text{ (capacité massique) en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad (\text{T1.9a})$$

$$C_{vm} = \frac{C_v}{n} \text{ (capacité molaire) en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (\text{T1.9b})$$

Remarque : On prendra toujours la convention suivante pour les grandeurs extensives :

- une majuscule pour la grandeur (U , C_v , ...)
- une minuscule pour la grandeur massique (u , c_v , ...) c'est-à-dire pour 1 kg
- un indice m pour la grandeur molaire (U_m , C_{vm} , ...) c'est-à-dire pour 1 mol

Les c_v et C_{vm} ont l'avantage de pouvoir être définis pour un corps pur. C'est Joule qui a mesuré la première capacité calorifique, à l'aide de l'expérience de la figure T1.9 : il a suspendu deux masses à des fils de manière à ce que, lorsque les masses tombent, cela entraîne la rotation de pales dans de l'eau enfermée dans un récipient calorifugé. À chaque chute des masses m d'une hauteur h , une énergie $2mgh$ est transférée à l'eau. En recommençant l'expérience de nombreuses fois puis en mesurant l'élévation de température de l'eau, on obtient $c_v(\text{eau}) = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

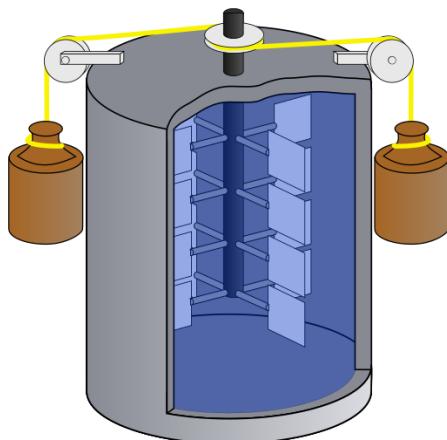


FIGURE T1.9 – Transformation d'énergie mécanique en élévation de température.

Remarque : Il est important de savoir passer de la capacité thermique massique à molaire et vice-versa. C'est facile si on se souvient que, pour un système de masse m et de n moles, $C_v = nC_{vm} = mc_v$. Or le rapport $\frac{m}{n}$ vaut la masse molaire M . Donc $C_{vm} = M.c_v$

Exemple : Bouilloire électrique

Une bouilloire électrique contient $m = 1,1 \text{ kg}$ d'eau de capacité calorifique massique $c_{ve} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$; l'intérieur de la bouilloire a pour capacité $C_{vb} = 310 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Au départ, l'eau et la bouilloire sont à 21°C ; on alimente la bouilloire avec une tension de 220 V et une intensité de 12 A pendant 1 min. On suppose que la bouilloire et l'eau se réchauffent ensemble, et on note T leur température.

1. On définit comme système la bouilloire et l'eau qu'elle contient.
Calculez la puissance électrique reçue, puis l'énergie reçue en 1 min.
2. On suppose que l'évolution est rapide donc adiabatique, et que le volume du système ne varie pas.
Calculez, et justifiant, la variation ΔU d'énergie interne du système.
3. Déduisez-en la température finale T .

1. $\mathcal{P} = 220 \times 12 = 2640 \text{ W}$ est constante, donc le travail vaut $W_{elec} = \mathcal{P} \times 60 = 158,4 \text{ kJ}$.
2. L'évolution est adiabatique donc $Q = 0$; et à volume constant donc $W_{pression} = 0$. Il n'y a aucune énergie macroscopique a priori. Donc le premier principe appliqué à l'eau pendant la durée de l'expérience indique que $\Delta U = W_{elec} = 158,4 \text{ kJ}$.
3. Comme le volume est constant, on peut écrire $\Delta U = C_v \cdot \Delta T = (m \cdot c_{ve} + C_{vb})(T - 21)$ d'où on tire $T = 53,3^\circ\text{C}$

Remarque : En fait, le chauffage de la bouilloire se fait à pression constante plutôt qu'à volume constant. Nous allons voir dans la partie suivante comment traiter ce cas.

T1.C. Étude des transformations classiques

C.1. Généralités sur les transformations

Définition : Transformation quasi-statique

Une transformation est dite quasi-statique si elle est effectuée suffisamment lentement pour que le système soit quasiment homogène à chaque instant. On dit parfois qu'on a une succession d'états d'équilibre du système, mais il n'y a pas forcément équilibre avec l'extérieur.

Ainsi, si on comprime un gaz, la pression s'homogénéise rapidement et reste à peu près la même partout. Mais si on comprime un gaz de façon supersonique, on crée une onde de choc (le «bang» supersonique) et la pression est complètement inhomogène dans le gaz; on ne peut plus parler alors de «la pression P du gaz». De même, si on chauffe trop fort un côté d'un système, la température sera inhomogène et on ne pourra plus parler de «la température T du système».

Une transformation quasi-statique prend donc le temps d'attendre l'équilibre interne du système; mais il peut y avoir à chaque instant déséquilibre entre les pressions intérieures et extérieures, ou entre les températures intérieures et extérieures. Dans ce cas, le retour à l'équilibre du système va entraîner une *irréversibilité*, notion assez abstraite mais importante en thermodynamique.

Définition : Transformation réversible

Une transformation quasi-statique est réversible mécaniquement si le système est indéformable ou bien si, à chaque instant, la différence de pression (apparente) entre les deux côtés de toutes les parois mobiles est négligeable : $V = cst$ ou $P \approx P_{ext}$.

Une transformation quasi-statique est réversible thermiquement si elle est adiabatique ou bien si, à chaque instant, la différence de température entre les deux côtés de toutes les parois diathermiques est négligeable : $Q = 0$ ou $T \approx T_{ext}$.

En gros, ces définitions indiquent deux sources d'irréversibilité :

- variation de volume du système sous l'effet d'une forte différence de pression
- transfert thermique sous l'effet d'une forte différence de température

Essayons d'illustrer cette notion sur la figure T1.10 où on veut chauffer une casserole d'eau de 20°C à 80°C :

- Expérience 1 : on place la casserole sur une plaque à 80°C ; la différence de température est très grande. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : c'est aberrant, on a une plaque chauffante à 80°C , et dessus une casserole d'eau qui se refroidit jusqu'à 2°C !
- Expérience 2 : on place la casserole sur une plaque dont on fait monter la température 5°C par 5°C ; la différence de température est plus faible. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : c'est moins aberrant, la plaque et la casserole refroidissent, seulement la casserole est un peu en avance, ce qui n'est pas logique.
- Expérience 3 : on place la casserole sur une plaque dont on fait monter la température 1°C par 1°C ; la différence de température est très faible. Observez le film à l'endroit puis à l'envers : la plaque et la casserole refroidissent quasiment en même temps, on ne voit presque plus rien de problématique.

Cette expérience illustre deux points importants quant à la réversibilité :

- c'est une notion limite. Aucune transformation n'est strictement réversible, mais on peut s'en approcher
- plus une transformation est réversible, plus elle est lente. Dans la pratique, une transformation même rapide peut être réversible mécaniquement, cf. la justification dans la planche d'exercices (*Importance de l'inertie du piston*), à condition que les frottements soient négligeables; par contre, une transformation avec échange de chaleur ne peut être réversible que si elle est lente.

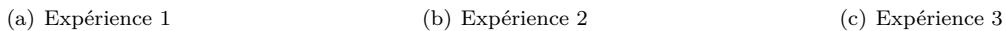


FIGURE T1.10 – Chauffage plus ou moins réversible thermiquement d'une casserole.

En résumé, il faut surtout retenir comment se traduisent ces propriétés :

- réversible mécaniquement $\Rightarrow P = P_{ext}$ (sauf si le système est indéformable)
 - réversible thermiquement $\Rightarrow T = T_{ext}$ (sauf si le système est calorifugé)

Quant à l'intérêt d'une transformation réversible, on le comprendra pleinement dans deux chapitres, quand on montrera que l'irréversibilité des transformations est la cause de baisses de rendement des machines thermiques.

C.2. Transformations idéales à connaître

Dans les exercices cette année, on modélisera la majorité des transformations par une des quatre transformations idéales : isochore, mono/isobare, mono/therme et adiabatique réversible (qu'on introduira plus tard). Les résultats seront toujours donnés dans l'hypothèse où il n'y a pas d'énergie macroscopique ; s'il y en a, il suffit de rajouter ΔE_{macro} .

Définition : Transformation isochore

Une transformation **isochore** est une transformation à volume constant. On a alors $W = 0$ et $Q = \Delta U$.

Démonstration

Si $V = cst$ alors $dV = 0$ donc $W = -\int P_{ext}.dV = 0$

Définition : Transformation monobare/isobare

Une transformation **monobare** est telle que $P_{ext} = cst$. On a alors $W = -P_{ext} \cdot \Delta V$ et $Q = \Delta U + P_{ext} \cdot \Delta V$. Si en plus elle est réversible mécaniquement ($P = P_{ext} = cst$), on dit qu'elle est **isobare**. On a alors $W = -P \cdot \Delta V$.

Démonstration

Si $P_{ext} = cst$ alors $W = -P_{ext} \int dV = -P_{ext} \cdot \Delta V$

Définition : Transformation monotherme/isotherme

Une transformation **monotherme** est une transformation à $T_{ext} = cst.$

Si en plus elle est réversible thermiquement ($T = T_{ext} = cst$) et mécaniquement ($P = P_{ext}$), elle est **isotherme**. Dans le cas général, on n'a aucune propriété permettant de calculer W et Q .

! Ne confondez pas **isotherme** et **adiabatique**, ça n'a RIEN À VOIR ! Ce n'est pas parce que la température ne varie pas qu'il n'y a pas de transfert thermique, et vice-versa. Par exemple, si on comprime adiabatiquement un gaz, sa température augmente.

Exemple : Compression d'un gaz

On prend un gaz de volume initial $V_i = 50 \text{ L}$ à la température initiale $T_i = 18^\circ\text{C}$ et sous la pression $P_i = 1 \text{ bar}$. On exerce sur ce gaz une pression $P_f = 3 \text{ bar}$; le gaz se comprime et atteint l'état final : $P_f = 3 \text{ bar}$, $V_f = 20 \text{ L}$ et $T_f = 68^\circ\text{C}$.

On suppose que l'énergie interne de ce gaz ne dépend que de la température, donc qu'on peut utiliser le C_v même si le volume change; on prendra $C_v = 48 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ pour les calculs.

1. Calculez le travail des forces de pression sur le gaz.
 2. Calculez la chaleur reçue par le gaz. Commentez.

1. $W = - \int_{V_i}^{V_f} -P_{ext} dV$ et ici $P_{ext} = P_f = cst$ qu'on peut sortir de l'intégrale : $W = -P_f \int_{V_i}^{V_f} dV = -P_f(V_f - V_i) = -3 \times 10^5 \cdot (20 \times 10^{-3} - 50 \times 10^{-3}) = 9 \text{ kJ}$

2. D'après le premier principe appliquée au gaz pendant la compression : $\Delta U = W + Q$ donc $Q = \Delta U - W = C_v \cdot (T_f - T_i) - W = 48 \cdot (68 - 18) - 9000 = -6,6 \text{ kJ}$

Le gaz s'est réchauffé, et pourtant il a perdu de la chaleur ! En le comprimant, on l'a chauffé à plus de 68°C , puis il s'est un peu refroidi, d'où le signe négatif de Q .

C.3. Premier principe isobare

Les transformations isobares sont des transformations très courantes : en effet, toute évolution d'un système à l'air libre est isobare : refroidissement d'une tasse de café, fonte d'un glaçon à l'apéro, combustion d'une flamme, cuisson des pâtes,... Au cours de ces transformations, le travail reçu vaut $W = - \int P_{ext} dV = - \int P dV = -P \Delta V$ car $P = P_{ext} = cst$. On peut même écrire $W = -\Delta(PV)$ puisque P est une constante. Ce terme PV va nous donner un outil pour calculer plus facilement ce travail.



Définition : Enthalpie

L'enthalpie d'un système thermodynamique à l'équilibre est définie par

$$H = U + PV \quad (\text{T1.10})$$

Il s'agit d'une **fondction d'état extensive** qui a la dimension d'une énergie.

Premier principe pour une transformation isobare

Lorsqu'un système thermodynamique évolue entre deux états d'équilibre de façon **isobare**,

$$\Delta E_{macro} + \Delta H = W' + Q \quad (\text{T1.11})$$

où W' («travail utile») représente tous les travaux **autres que le travail des forces de pression**.

Cette loi fonctionne aussi pour une transformation monobare si $P = P_{ext}$ dans l'état final et dans l'état initial.

Démonstration

Considérons un système subissant une transformation isobare, ou au moins monobare avec $P = P_{ext}$ à l'instant initial i et à l'instant final f . On peut lui appliquer le premier principe : $\Delta E_{macro} + \Delta U = W + Q$ soit $\Delta E_{macro} + U_f - U_i = W_{pressure} + W' + Q$ où W' sont les travaux provenant d'autres sources que la pression. Comme la transformation est monobare, $W_{pressure} = -P_{ext}(V_f - V_i) = -P_{ext}V_f + P_{ext}V_i$, et comme $P_i = P_f = P_{ext}$ on peut écrire $W = -P_fV_f + P_iV_i$. En passant ces termes à gauche dans l'égalité, on obtient $\Delta E_{macro} + U_f + P_fV_f - U_i - P_iV_i = W' + Q$ soit $\Delta E_{macro} + \Delta H = W' + Q$

Remarque : Il faut d'abord voir l'enthalpie comme un outil pratique qui simplifie les calculs dans le cas de transformations isobares. Quant à l'interprétation, le terme PV peut être vaguement vu comme un terme «d'énergie potentielle de pression» qu'on ajoute à l'énergie interne déjà présente.

Comme l'énergie, l'enthalpie dépend de toutes les variables thermodynamiques, mais surtout de la température.

Définition : Capacité thermique/calorifique à pression constante

On définit la capacité thermique ou calorifique à pression constante d'un système comme

$$C_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \text{ en J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (\text{T1.12})$$

Elle indique la variation d'enthalpie du système lorsque sa température varie de 1 K à pression constante ; elle est **extensive**.

Définition : C_p massique et molaire

On définit aussi

$$c_p = \frac{C_p}{m} \text{ (capacité massique) en } J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1} \quad (T1.13a)$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{n} \text{ (capacité molaire) en } J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1} \quad (T1.13b)$$

Remarque : Ici, on dérive à pression constante, ce qui est logique puisqu'on va travailler dans ce chapitre sur des transformations isobares. Mais la principale différence entre le C_v et le C_p ne s'entend pas dans leur nom, c'est que le C_v est la dérivée de U par rapport à la température, tandis que le C_p est la dérivée de H .

Exemple : Chutes du Niagara

Dans les chutes du Niagara, l'eau tombe d'une hauteur de 52 m. Si on admet que l'énergie cinétique de l'eau est négligeable au début et à la fin, calculer l'élévation de température de l'eau si les transformations sont assez rapides pour être adiabatiques. On donne pour l'eau $c_p = 4180 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. On prendra aussi $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

On travaille sur $m = 1 \text{ kg}$ d'eau. On a évidemment une transformation isobare ici, donc le premier principe isobare appliqué entre avant la chute et après la chute indique que $\Delta(H + E_p) = W' + Q = 0$ d'après les hypothèses. Donc $m \cdot c_p \cdot \Delta T + \Delta(mgz) = 0$ donc $\Delta T = \frac{g \Delta z}{c_p} = 0,12^\circ\text{C}$

Exemple : Chauffage d'une maison

Une maison de capacité thermique totale à pression constante $C_p = 19 \text{ MJ} \cdot \text{K}^{-1}$ est chauffée par une chaudière. Le matin à 8 h, il fait $18,1^\circ\text{C}$ dans la maison (la température est supposée homogène) et 1°C dehors. La chaudière démarre alors et chauffe pendant 1 h avec une puissance thermique (transfert thermique par unité de temps) $\mathcal{P}_{ch} = 9 \text{ kW}$. Au bout d'une heure, la température de la maison vaut $19,6^\circ\text{C}$. Les transformations sont isobares.

1. Calculez le transfert thermique reçu par la maison de la part de la chaudière.
2. Déduisez-en le transfert thermique reçu par la maison de la part de l'extérieur, puis la puissance thermique cédée à l'extérieur.
3. On définit la résistance thermique de la maison comme le quotient de la la différence de température intérieur-extérieur par la puissance thermique perdue. Évaluez approximativement cette résistance.

1. $Q_{ch} = \mathcal{P}_{ch} \cdot \Delta t = 32,4 \text{ MJ}$
2. Ici la transformation est isobare et sans travail utile, donc par le premier principe isobare appliqué à l'intérieur de la maison pendant la durée de chauffage, $\Delta H = Q_{ch} + Q_{ext}$ donc $Q_{ext} = C_p \cdot \Delta T - Q_{ch} = -3,9 \text{ MJ}$. La puissance moyenne perdue vaut donc $\mathcal{P}_{ext} = 1080 \text{ W}$.
3. On prend comme température moyenne $\frac{18,1+19,4}{2} = 18,75^\circ\text{C}$ soit $17,75^\circ\text{C}$ de différence avec l'extérieur. On trouve alors $R = 16 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

En fait, on verra dans le chapitre suivant que les solides et les liquides, ayant un volume faible et qui varie peu, on des coefficients C_v et C_p quasiment identiques ; ce ne sera pas le cas des gaz.

Bases de la thermodynamique

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système	
État microscopique et état macroscopique.	<p>Préciser les paramètres nécessaires à la description d'un état microscopique et d'un état macroscopique sur un exemple.</p> <p>Relier qualitativement les valeurs des grandeurs macroscopiques aux propriétés du système à l'échelle microscopique.</p>
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Énergie interne d'un système. Aspects microscopiques.	Citer les différentes contributions microscopiques et macroscopiques à l'énergie d'un système.
Premier principe de la thermodynamique. Transfert thermique, travail.	Analyser qualitativement les différents termes intervenant dans l'écriture du premier principe.
Transformation thermodynamique subie par un système. Évolutions isochore, isotherme, isobare, monobare, monotherme.	Exploiter les conditions imposées par le milieu extérieur pour déterminer l'état d'équilibre final.
Travail des forces de pression. Transformation isochore. Transformation monobare.	<p>Évaluer un travail par découpage en travaux élémentaires et sommation sur un chemin donné dans le cas d'une seule variable.</p> <p>Interpréter géométriquement le travail des forces de pression dans un diagramme de Clapeyron.</p>
Bilans d'énergie.	<p>Conduire un bilan d'énergie sur un système modélisé par un gaz parfait ou par une phase condensée incompressible et indilatable.</p> <p>Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une capacité thermique.</p>
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante.	Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final.

Bases de la thermodynamique

QCMs

réponses page 442

✓ QCM : Compréhension du cours ✗

Q1.

Un système fermé est un système qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.

Q2.

Les variables thermodynamiques permettent de décrire :

Q3.

À un état macroscopique correspondent beaucoup d'états microscopiques.

Q4.

Lesquelles de ces variables sont extensives ?

Q5.

Quel type de variable est défini en chaque point du système ?

Q6.

La force de pression sur une surface S de normale \vec{n} vaut

- (a). $P.S.\vec{n}$ (b). P
 (c). $-P.S.\vec{n}$ (d). $P.\vec{n}$

Q7.

Un système est homogène si :

- (a). toutes ses variables ne dépendent pas de la position
(c). ses variables intensives ne dépendent pas de la position
(e). ses variables extensives ne dépendent pas du temps

(b). ses variables extensives ne dépendent pas de la position
(d). ses variables intensives ne dépendent pas du temps
(f). toutes ses variables ne dépendent pas du temps

Q8.

Un système est à l'équilibre si :

- (a). toutes ses variables ne dépendent pas du temps
(c). ses variables extensives ne dépendent pas du temps
(e). toutes ses variables ne dépendent pas de la position

(b). ses variables intensives ne dépendent pas du temps
(d). ses variables extensives ne dépendent pas de la position
(f). ses variables intensives ne dépendent pas de la position

Q9.

Si la température d'un système de volume V augmente de dT , son volume augmente de

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| (a). $\alpha \cdot dT$ | (b). $\alpha \cdot V \cdot dT$ |
| (c). $\alpha \frac{V}{dT}$ | (d). $-\alpha \cdot dT$ |

Q10.

Si la pression d'un système de volume V augmente de dP , son volume augmente de

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| (a). $\chi_T \cdot dP$ | (b). $-\chi_T \cdot V \cdot dP$ |
| (c). $\chi_T \cdot V \cdot dP$ | (d). $-\chi_T \cdot dP$ |

Q11.

Si un système est calorifugé, alors son évolution est adiabatiques.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

Q12.

Le travail des forces de pressions vaut :

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (a). $-\int V \cdot dP_{ext}$ | (b). $\int P_{ext} \cdot dV$ |
| (c). $\int V \cdot dP_{ext}$ | (d). $-\int P_{ext} \cdot dV$ |

Q13.

Le travail et la quantité de chaleur se mesurent en Joule, donc ce sont des énergies.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

Q14.

La variation d'énergie interne entre un état initial et un état final dépend de ces états, mais aussi du travail reçu entre ces deux états.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q15.

L'énergie interne est :

- | | |
|--------------------------|----------------|
| (a). constante | (b). intensive |
| (c). une fonction d'état | (d). extensive |

Q16.

Si on connaît uniquement l'état initial et l'état final d'un système, on n'est pas capable de connaître W et Q .

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q17.

On a toujours $\Delta U = C_v \cdot \Delta T$

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

Q18.

Quand on mélange deux systèmes, leurs c_v s'ajoutent.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q19.

Si l'énoncé donne le c_v massique d'un corps pur, il faut le multiplier par la masse pour obtenir le C_v de ce corps pur.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

Q20.

Le c_v massique d'un corps pur est le même qu'il soit dans l'état solide, liquide ou vapeur.

(a). Vrai

(b). Faux

Q21.

Une transformation est isochore si :

(a). $\Delta T = 0$
(c). $\Delta P = 0$ (b). $\Delta U = 0$
(d). $\Delta V = 0$ **Q22.**

Pour une transformation isotherme, $Q = 0$.

(a). Vrai

(b). Faux

Q23.

L'enthalpie a la même dimension qu'une énergie.

(a). Vrai

(b). Faux

Q24.

Dans le travail utile W' , on peut trouver par exemple :

(a). Le travail récupéré par une turbine
(c). Le travail d'un générateur électrique(b). Le travail fourni par un moteur
(d). Le travail des forces de pression**Q25.**

Si un système calorifugé subit une évolution isobare sans travail utile, alors $\Delta H = 0$.

(a). Vrai

(b). Faux

✓ QCM : Variations d'énergie interne et d'enthalpie ✗

On donne pour différents corps purs la capacité thermique à volume constant, la masse molaire, et la masse volumique, autour d'une certaine température et d'une certaine pression :

Corps	T	P (bar)	c_v ou C_{vm}	c_p ou C_{pm}	$M(g \cdot mol^{-1})$	$\rho(kg \cdot m^{-3})$
Silicium	300 K	1,0	702 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	702 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	28	
Chlorure de cuivre (I)	300 K	1,0	240 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	240 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	99	
Air sec	300 K	1,0	0,7 $J \cdot K^{-1} \cdot L^{-1}$	1,0 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	29	
Diazote	70 K	1,0	28,5 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	57,2 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	28	840,5
Diazote	300 K	1,0	20,8 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	29,2 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	28	1,12
Diazote	600 K	1,0	21,8 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	30,1 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	28	0,56
Diazote	300 K	100	21,4 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	33,4 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	28	111,7
Hélium	300 K	1,0	12,5 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	20,8 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	4	
Mercure	20 °C	1,0	27,9 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	27,9 $J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	201	
Eau	10 °C	1,0	4,192 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	4,192 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	18	999,70
Eau	80 °C	1,0	4,196 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	4,196 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	18	971,82
Vapeur d'eau	103 °C	1,0	1,6 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	2,07 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	18	586,53
Glace d'eau	-10 °C	1,0	2,03 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	2,0 $J \cdot K^{-1} \cdot g^{-1}$	18	918,7

On considérera que les capacité thermique varient peu au voisinage des températures de référence données.

Q26.

7 mol de silicium passent de 20 °C à 35 °C ; l'énergie interne de ce système varie de :

(a). 10,5 kJ
(c). 73,7 kJ(b). 206,4 kJ
(d). 2,6 kJ**Q27.**

et son enthalpie varie de :

- (a). 10,5 kJ
(c). 2,6 kJ

- (b). 73,7 kJ
(d). 206,4 kJ

Q28.

On refroidit 450 g d'eau de 60 °C à 18 °C ; l'énergie interne de ce système varie de :

- (a). 79,3 kJ
(c). 176,1 kJ

- (b). -79,3 kJ
(d). -4,4 kJ

Q29.

et son enthalpie varie de :

- (a). -4,4 kJ
(c). 176,1 kJ

- (b). -79,3 kJ
(d). 79,3 kJ

Q30.

On fait passer 50 L de diazote de 320 °C à 200 °C sous 1 bar ; l'énergie interne de ce système varie de :

- (a). -6,0 kJ
(c). -72,8 kJ

- (b). -4,6 kJ
(d). -2,6 kJ

Q31.

et son enthalpie varie de :

- (a). -2,6 kJ
(c). -3,6 kJ

- (b). -1,5 kJ
(d). -7,2 kJ

Q32.

On prend 2 mol de diazote à 12 °C sous 1 bar ; on les fait passer à 60 °C sous 15 bar ; puis on les refroidit à 32 °C sous 1 bar. L'énergie interne de ce système varie de :

- (a). 943 J
(c). On manque de données

- (b). 832 J
(d). 872 J

Q33.

et son enthalpie varie de :

- (a). 650 J
(c). 1200 J

- (b). On manque de données
(d). 943 J

Q34.

On mélange 300 g d'eau à 25 °C avec 200 g d'eau à 75 °C ; la température finale vaut 36 °C. L'énergie interne du système fermé formé des 500 g d'eau varie de :

- (a). 0 kJ
(c). 23,1 kJ

- (b). -81,7 kJ
(d). -18,9 kJ

Q35.

et son enthalpie varie de :

- (a). -18,9 kJ
(c). 0 kJ

- (b). 23,1 kJ
(d). -81,7 kJ

Q36.

Dans de l'air sec à 276 K tombent des flocons de neige (glace) à 256 K selon la proportion : 2 g de glace pour 1 mol d'air. L'air se refroidit, la neige se réchauffe, et la température d'équilibre vaut 260 °C. La variation d'énergie interne du système complet vaut :

- (a). 0 J
(c). 4,8 J

- (b). 1288 J
(d). 1365 J

Q37.

et sa variation d'enthalpie vaut :

- (a). 1365 J
(c). 4,8 J

- (b). 0 J
(d). 1288 J

✓ QCM : Travail des forces de pression ✗

Q38.

Un système de 25 L est en équilibre mécanique avec l'extérieur sous une pression de 2 bar. Son volume diminue jusqu'à 11 L, la pression extérieure restant constante. Le travail reçu de la part des forces de pression vaut :

Q39.

Un cylindre contient un gaz à 50 °C sous 1 bar ; il occupe 600 L. On le comprime de façon monobare sous 5 bar jusqu'à 120 L. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

Q40.

Un système de 1400 cm^3 est en équilibre mécanique avec l'extérieur sous une pression de 1 bar, par l'intermédiaire d'un piston mobile de surface 12 cm^2 . On applique alors sur le piston une force constante $F = 160 \text{ N}$; le volume du système diminue jusqu'à 900 cm^3 . La travail reçu de la part des forces extérieures vaut :

- (a). -67 J (b). 117 J
 (c). -117 J (d). 67 J

Bases de la thermodynamique**Exercices**réponses page [444](#)**Exercice T1.1 : Masse volumique de l'eau [**]**

La masse volumique de l'eau liquide est bien modélisée entre 0 °C et 100 °C sous 1 bar par le polynôme du troisième degré $\rho = \rho_0 [1 + 5,3 \times 10^{-5}T - 6,5 \times 10^{-6}T^2 + 1,4 \times 10^{-8}T^3]$ (T en degrés Celsius), avec $\rho_0 = 0,999\,84 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Calculez la masse volumique de l'eau à 10 °C.
 2. En considérant une masse m constante d'eau, montrez que le coefficient de dilatation isobare peut s'écrire en fonction de la masse volumique ρ :
- $$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P$$
3. Calculez le coefficient de dilatation isobare en fonction de la température.
 4. En étudiant le signe de ce coefficient, montrez que la masse volumique de l'eau est maximale aux alentours de 4 °C.

Exercice T1.2 : Compressibilité du benzène [*]

Le coefficient de compressibilité isotherme du benzène entre 25 °C et 45 °C est donné par la loi $\chi_T = -14,5 \times 10^{-10} + 0,081 \times 10^{-10}T$ en Pa^{-1} , la température T étant en K. Son coefficient de dilatation isobare vaut $1,14 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ à ces températures (supposé constant).

1. On prend un litre de benzène sous 1 bar à 25 °C, et on le comprime sous 10 bar à température constante ; calculez son nouveau volume.
2. On prend un litre à 25 °C, sous 1 bar. On le chauffe à 45 °C ; calculez son nouveau volume.
Calculez la pression qu'il faut exercer pour ramener le volume à 1 L.

Exercice T1.3 : Dilatation du balancier d'une horloge [*]**

Une horloge à balancier utilise la régularité des oscillations d'un pendule simple pour compter les secondes. On suppose qu'on a construit une telle horloge de telle sorte que, à 20 °C, le balancier batte avec une période de 1,0000 s. On admet que la période du balancier vaut $2\pi\sqrt{\ell/g}$ avec ℓ sa longueur.

Sachant que le bronze de la tige a un coefficient de dilatation linéique égal à $20,3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ à 20 °C, calculez l'avance ou le retard relatif de cette horloge à 15 °C, puis à 22 °C (on pourra l'exprimer en secondes par jour).

Exercice T1.4 : Forces de pression

La pression atmosphérique normale vaut environ 1 bar.

1. Calculer approximativement la force de pression s'exerçant sur la paume de votre main.
2. On prend une boîte cubique de 20 cm de côté, placée dans l'air. À l'intérieur on fait baisser la pression à 0,1 bar. Calculer la différence des forces de pression sur les deux côtés d'une des faces du cube. Quelle est la direction de cette force ?
3. Une balle de paintball de diamètre 17 mm et de masse 0,8 g est propulsée par de l'air comprimé à la pression 30 bar sur sa face arrière (qu'on supposera plate, circulaire) tandis que la pression atmosphérique s'applique sur sa face avant. Calculez différence des forces de pression sur ses deux faces, puis l'accélération correspondante.

Exercice T1.5 : Bouilloire [**]

Une bouilloire contient $m = 600 \text{ g}$ d'eau à 18°C , de capacité thermique à pression constante $c_p = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; la capacité de la bouilloire est $C_b = 132 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. On l'alimente par une tension $V = 220 \text{ V}$ et un courant $I = 9,7 \text{ A}$, et il faut attendre 2 min pour que l'eau se mette à bouillir à 100°C . Calculez la chaleur reçue par le système (bouilloire+eau) pendant ce temps-là.

Exercice T1.6 : Chauffage électrique [**]

Un radiateur électrique est équivalent à une résistance $r = 55 \Omega$ alimentée par une tension $V = 220 \text{ V}$. Il est constitué de 15 kg d'acier de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 452 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. La pression de la pièce où il se trouve est constante; au départ, tout est à 18°C .

1. Calculez sa capacité thermique à pression constante C_p .
2. On l'alimente pendant 1 h. Quelle serait sa température finale si la transformation était adiabatique ?
3. En réalité, il échange de la chaleur avec la pièce dans laquelle il se trouve. On constate qu'au bout d'une heure, l'ensemble (radiateur et pièce) est à $21,3^\circ\text{C}$. Calculez la capacité thermique à pression constante de la pièce, si on suppose que l'ensemble {pièce+radiateur} est calorifugé.

Exercice T1.7 : Rebond d'une balle [**]

Une balle de masse $m = 80 \text{ g}$ et de capacité calorifique massique à pression constante $c_p = 1,3 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, rebondit contre un mur. Avant le rebond, sa vitesse valait $v_i = 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; après le rebond, elle vaut $v_f = 2,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On fait les hypothèses suivantes :

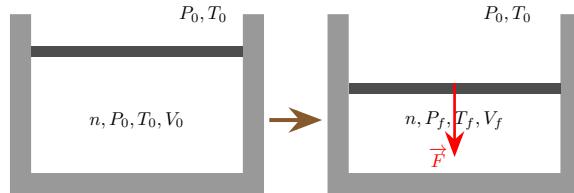
- la transformation entre avant et après le rebond est isobare et adiabatique
- entre juste avant et juste après le rebond, la position de la balle n'a quasiment pas changé

Calculez la variation ΔT de température de la balle lors du rebond.

Exercice T1.8 : Compression monobare d'un gaz [**]

Dans un cylindre vertical, on enferme n moles d'air à l'aide d'un piston de masse négligeable; sa capacité thermique à volume constant vaut $C_v = 2,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et on admettra que son énergie interne ne dépend que de la température. Il y a initialement équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur (pression $P_0 = 1 \text{ bar}$, température $T_0 = 21,0^\circ\text{C}$, volume $V_0 = 3,1 \text{ L}$).

On appuie avec une force F sur le piston, ce qui exerce une surpression équivalente $\frac{F}{S} = 0,8 \text{ bar}$ sur la face supérieure du piston de section S . On attend l'équilibre mécanique et on mesure à la fin $T_f = 34,5^\circ\text{C}$ et $V_f = 2,1 \text{ L}$.



1. Que vaut la pression finale P_f dans le piston ?
2. Calculez le travail reçu par l'air de la part des forces de pression.
3. Calculez la chaleur reçue par l'air.

Exercice T1.9 : Traction d'un ressort [**]

Un ressort (solide de capacité $C_p = 50 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$) de raideur k est initialement au repos, à la température T_0 de la pièce. On lui tire dessus avec une force constante F . La transformation est isobare.

1. Il atteint rapidement un état d'équilibre mécanique (force du ressort=force extérieurs); exprimez sa variation de température si on considère la transformation adiabatique.
AN pour $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $F = 50 \text{ N}$.
2. On attend l'équilibre thermique. Calculez la quantité de chaleur qu'il a reçue.

Exercice T1.10 : Charge d'un condensateur [***]

Cet exercice est un peu à la limite de ce qu'on fait normalement en thermodynamique.

On considère un condensateur de capacité (électrique) Γ . On branche à ses bornes un générateur de fem e . Les transformations sont isobares.

- Initialement, le condensateur est déchargé, et $e = 0$. À $t = 0$, on allume le générateur, donc e passe brusquement à la valeur constante E . Le condensateur se charge jusqu'à son état stationnaire ; il a alors une charge q .

L'évolution est suffisamment rapide pour pouvoir être considérée comme adiabatique.

Calculez le travail reçu par le condensateur, puis sa variation d'énergie électrique, et déduisez-en la température finale du condensateur en fonction de sa capacité calorifique à pression constante C .

AN pour $E = 10 \text{ V}$, $\Gamma = 1 \mu\text{F}$ et $C = 40 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: est-ce sensible pour une expérience courante ?

- On laisse refroidir. Calculez le transfert thermique Q reçu par le condensateur, et comparez avec le travail fourni par le générateur et avec l'énergie stockée. Que pensez-vous du rendement de l'opération ?
- On effectue maintenant la charge en deux étapes : on charge sous une tension $E/2$ selon les mêmes conditions qu'au début (le régime stationnaire est atteint) ; ensuite on attend l'équilibre thermique ; puis on passe e à E .

Calculez le travail et la chaleur reçus par le condensateur (au cours de l'ensemble de toutes les étapes), et comparez.

Exercice T1.11 : Compression de l'air [**]

Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques d'1 kg d'air gazeux à différentes températures et pressions : dans chaque case on lit le volume en L et l'énergie interne en kJ.

P \ T	200 K	300 K	500 K	1000 K
1 bar	$\begin{cases} V = 573 \text{ L} \\ U = 142,4 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 861 \text{ L} \\ U = 214,2 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 1437 \text{ L} \\ U = 359,7 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 2874 \text{ L} \\ U = 759,2 \text{ kJ} \end{cases}$
10 bar	$\begin{cases} V = 56,1 \text{ L} \\ U = 139,1 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 85,9 \text{ L} \\ U = 212,4 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 144 \text{ L} \\ U = 358,9 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 288 \text{ L} \\ U = 759,1 \text{ kJ} \end{cases}$
100 bar	$\begin{cases} V = 4,67 \text{ L} \\ U = 102,1 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 8,55 \text{ L} \\ U = 194,4 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 14,9 \text{ L} \\ U = 349,6 \text{ kJ} \end{cases}$	$\begin{cases} V = 29,8 \text{ L} \\ U = 754,9 \text{ kJ} \end{cases}$

- Pour chaque valeur de température sous $P = 1 \text{ bar}$, calculez l'enthalpie H pour 1 kg.
- On prend 1 kg d'air à 300 K sous 1 bar. On le chauffe jusqu'à 500 K sous la même pression.
 - Que vaut le volume initial ? Le volume final ? Déduisez-en le travail W reçu par le gaz.
 - Que vaut ΔU ? Déduisez-en le transfert thermique Q reçu par le gaz.
 - Comment aurait-on pu calculer Q plus rapidement ?
- On prend 1 kg d'air à 300 K sous 10 bar ; on le détend de façon adiabatique et monobare jusqu'à 1 bar (la pression extérieure valant 1 bar) ; on admet que la température du gaz diminue lors de cette détente, et on note T_f sa température finale.
 - Comment varie le volume du gaz ? Quel est le signe du travail reçu par le gaz ?
 - À l'aide du premier principe, relier l'énergie finale U_f et le volume final V_f . Aurait-on le droit d'utiliser le premier principe avec l'enthalpie ?
 - On modélise les variations de V et U sous 1 bar entre 200 K et 300 K par un modèle linéaire, faute de mieux :

$$\begin{cases} V(T) = 573 + \frac{861 - 573}{300 - 200}(T - 200) \text{ en L} \\ U(T) = 142,4 + \frac{214,2 - 142,4}{300 - 200}(T - 200) \text{ en kJ} \end{cases}$$

Déduisez-en l'équation vérifiée par T_f , et calculez la température finale, le volume final, l'énergie interne finale et le travail reçu.

Exercice T1.12 : Importance de la masse du piston [****]

On a vu qu'une transformation est réversible mécaniquement si $P = P_{ext}$. Pourtant, lorsqu'on considère un gaz enfermé dans un cylindre fermé par un piston, on peut le souvent considérer que la transformation est réversible même si $P \neq P_{ext}$. On va voir pourquoi.

Dans cet exercice, on considère un gaz de température T , de pression P , enfermé dans un cylindre horizontal fermé par un piston de masse m ; le piston étant horizontal (axe \vec{e}_x), on pourra négliger l'influence du poids (vertical, suivant \vec{e}_z).

1. On prend comme système {le gaz + le piston + le cylindre} ; on note $U = U_{gaz} + U_{piston} + U_{cylindre}$ son énergie interne. Appliquez le premier principe à une transformation infinitésimale du système (de durée dt), en prenant en compte l'énergie cinétique du piston, et reliez dU , \dot{x} (vitesse du piston), $\ddot{x}.dt$, P_{ext} , dV et m .
2. On suppose dans cette question que le piston peut couplisser sans frottements. Appliquez le PFD au piston, et reliez $m\ddot{x}$ aux pressions et à la surface S . Renvoyez cette expression dans l'équation de la question 1, et, en remarquant que $S.\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt}$, montrez que U vérifie la loi $dU = -P.dV + \delta Q$, donc que sur une transformation complète :

$$\Delta U = - \int P.dV + Q$$

Commentez le résultat obtenu.

3. Reprenez la même question si le piston est soumis à une force de frottements solides avec le cylindre, constante, de valeur $-F.\text{signe}(dV)\vec{e}_x$. Est-il possible de rendre la transformation réversible ?
4. Reprenez la même question si le piston est soumis à une force de frottements fluides $-\lambda \vec{v}$. Est-il possible de rendre la transformation réversible ?
5. Le premier cas peut-il s'appliquer par exemple à une compression d'un gaz entre deux **états d'équilibre immobiles** ? À un cycle ? Au tir d'un obus dans un canon ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Fermé signifie qu'il n'échange pas de matière, mais il peut échanger de l'énergie.

Q2.(b)

Q3.(a)

Q4.(c) ET (d) ET (f)

Q5.(b)

Q6.(a)

Q7.(c)

Q8.(a)

Q9.(b)

Q10.(b)

Q11.(a)

Q12.(d)

Q13.(b)

Ce sont des **échanges d'énergie**; c'est la même unité, mais la notion physique sous-jacente est différente.

Q14.(a)

U est une fonction d'état.

Q15.(c) ET (d)

Q16.(b)

Q17.(b)

Ce n'est vrai que si U ne dépend que de la température d'une part (cette hypothèse sera toujours vérifiée dans nos exercices) et surtout s'il n'y a pas de changements de composition du système.

Q18.(a)

Le C_v (défini pour le système tout entier) est extensif, mais pas les c_v (massiques) ni les C_{vm} (molaires).

Q19.(a)

Q20.(b)

Par exemple pour l'eau, il vaut $2,1 \text{ kJ/kg/K}$ pour le solide, $4,2 \text{ kJ/kg/K}$ pour le liquide et $2,0 \text{ kJ/kg/K}$ pour le gaz.

Q21.(d)

Q22.(b)

C'est faux, **c'est faux**, c'est archi faux, it's false, es ist falsch, es incorrecto, é falso, non è vero, nu e adevărat, to nieprawda, sa pa vré, ...je ne sais pas comment le dire autrement, mais C'EST FAUX et ça coûte beaucoup de points en moins en DS/colle/concours quand on sort une telle ANERIE.

Q23.(a)

Q24.(a) ET (b) ET (c)

On peut trouver tous les travaux, hormis ceux des forces de pression.

Q25.(a)

$\Delta H = Q = 0$.

Réponses au QCM : Variations d'énergie interne et d'enthalpie

Q26.(c)

Q27.(b)

Q28.(b)

Q29.(b)

Q30.(d)

Ce système contient $n = \frac{\rho V}{M} = 1 \text{ mol}$ de diazote.

Q31.(c)

On voit que pour un gaz, l'enthalpie et l'énergie interne diffèrent sensiblement.

Q32.(b)

L'énergie interne est une fonction d'état; sa variation ne dépend pas du chemin suivi. On peut donc calculer ΔU en imaginant que le diazote passe directement de l'état initial à l'état final; l'étape intermédiaire ne sert à rien.

Q33.(c)

Même remarque que pour l'énergie interne.

Q34.(d)

L'énergie interne est extensive, donc $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ en notant 1 les 300 g d'eau et 2 les 200 g d'eau. On trouve alors que les 300 g d'eau gagnent $4,193 \times 300 \times (36 - 25) = 13\,800 \text{ J}$, tandis que les 200 g d'eau gagnent $4,195 \times 200 \times (36 - 75) = -32\,700 \text{ J}$.

Q35.(a)

L'enthalpie aussi est extensive.

Q36.(c)

Même principe : $\Delta U_{air} = -11,2 \text{ J}$ et $\Delta U_{neige} = 16 \text{ J}$

Q37.(b)

Même principe : $\Delta H_{air} = -16 \text{ J}$ et $\Delta H_{neige} = 16 \text{ J}$

Réponses au QCM : Travail des forces de pression

Q38.(d)

Q39.(d)

Q40.(b)

La pression extérieure équivalente est $P_{ext} = 1 \text{ bar} + \frac{F}{S} = 2,33 \text{ bar}$ donc $W = -P_{ext} \cdot \Delta V = 2,33 \times 10^5 \times 500 \times 10^{-6}$.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T1.1 : Masse volumique de l'eau [**]

1. $\rho(10^\circ\text{C}) = 0,999\,73 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$
2. Il faut partir de $V = \frac{m}{\rho}$.
3. $\alpha = \frac{-5,3 \times 10^{-5} + 1,3 \times 10^{-5}T - 4,2 \times 10^{-8}T^2}{1 + 5,3 \times 10^{-5}T - 6,5 \times 10^{-6}T^2 + 1,4 \times 10^{-8}T^3}$
- 4.

$T(\text{°C})$	0	4,1	100
$\alpha(\text{°C}^{-1})$	-	0	+
$\rho (\text{kg} \cdot \text{L}^{-1})$	0,999 84	0,999 95	0,954 15

Réponses de l'exercice T1.2 : Compressibilité du benzène [*]

1. $\Delta V = 9,10 \times 10^{-4} \text{ L}$: c'est infime.
2. $\Delta V = V\alpha dT = 0,023 \text{ L}$ qu'on peut compenser par une augmentation de pression de 199 bar.

Réponses de l'exercice T1.3 : Dilatation du balancier d'une horloge [***]

À 15°C , l'horloge avance de 4,4 secondes par jour.
 À 22°C , l'horloge tarde de 1,8 secondes par jour.

Réponses de l'exercice T1.4 : Forces de pression

1. $F = 1 \times 10^3 \text{ N}$ environ, ce qui est grand, mais la même force s'exerce de l'autre côté.
2. $F = 3600 \text{ N}$ dirigé vers l'intérieur : la boîte a tendance à imploser.
3. $F = 658 \text{ N}$ soit une accélération $a = \frac{F}{m} = 8,2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Réponses de l'exercice T1.5 : Bouilloire [**]

$$Q = (m.c_p + C_b)\Delta T - V.I.t = -39,6 \text{ kJ.}$$

Réponses de l'exercice T1.6 : Chauffage électrique [**]

1. $C_p = m.c_p = 6,78 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$
2. $\Delta T = \frac{V^2 \cdot \Delta t}{r.C_p} = 467^\circ\text{C}$ soit une température finale de 485°C : c'est un peu trop chaud !
3. $C'_p = \frac{V^2 \cdot \Delta t}{r \cdot \Delta T} - C_p = 953 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses de l'exercice T1.7 : Rebond d'une balle [**]

$\Delta T = \frac{v_i^2 - v_f^2}{2c_p} = 0,07^\circ\text{C}$: c'est très faible, mais peut-être qu'à force de taper sur une balle de tennis, on arrive à la faire chauffer...

Réponses de l'exercice T1.8 : Compression monobare d'un gaz [**]

1. $P_f = P_0 + \frac{F}{S} = 1,8 \text{ bar.}$

2. $W = -P_f(V_f - V_0) = 180 \text{ J}$ (attention aux unités !)
3. $Q = C_v(T_f - T_0) - W = -144,9 \text{ J}$.

Réponses de l'exercice [T1.9](#) : Traction d'un ressort [**]

Cet exercice est très simple en soi, mais ce qui perturbe, c'est qu'il n'utilise pas les grandeurs habituelles de la thermodynamique (pression,...)

1. À l'aide du premier principe isobare : $\Delta T = \frac{F^2}{2kC_p} = 0,25 \text{ }^\circ\text{C}$.
2. De même $Q = -\frac{F^2}{2k} = -6,25 \text{ J}$

Réponses de l'exercice [T1.10](#) : Charge d'un condensateur [***]

1. Par le premier principe isobare : $\Delta T = \frac{\Gamma E^2}{2C} = 1,2 \mu\text{K}$: c'est imperceptible.
2. $Q = \frac{\Gamma E^2}{2} = -5 \times 10^{-5} \text{ J}$: 50 % de l'énergie fournie est dédée sous forme de chaleur, c'est une perte.
3. Cette fois 33 % de l'énergie fournie est dédée sous forme de chaleur : une meilleure réversibilité amène moins de pertes sous forme de chaleur.

Réponses de l'exercice [T1.11](#) : Compression de l'air [**]

1. 199,7|300,3|503,4|1046,6 en kJ.
2. $W = -57,6 \text{ kJ}$ et $Q = \Delta U - W = 203,1 \text{ kJ}$.
3. Par le premier principe, $U_f - 212\,400 = -100V_f + 8590$ avec V_f en litres et U_f en J, d'où on tire $T_f = 221,2 \text{ K}$ puis $V_f = 634 \text{ L}$, $U_f = 157,6 \text{ kJ}$ et $W = -54,8 \text{ kJ}$

Réponses de l'exercice [T1.12](#) : Importance de la masse du piston [****]

1. $dU + m\dot{x}\ddot{x}dt = -P_{ext}.dV + \delta Q$
2. $m\ddot{x} = (P - P_{ext}S)$ et $S\dot{x} = \frac{dV}{dt}$ d'où on tire $dU = -P.dV + \delta Q$.
3. $dU = -P.dV + \delta Q + F.\frac{|dV|}{S}$: on voit apparaître un terme supplémentaire qu'il n'est pas possible d'annuler entre un aller et un retour, donc la transformation ne sera jamais réversible en présence de frottements solides.
4. $dU = -P.dV + \delta Q + \frac{\lambda\dot{x}}{S}dV$. Le terme supplémentaire peut être rendu aussi petit qu'on veut à condition de diminuer la vitesse \dot{x} du piston. Dans le cas de frottements fluides, il y a donc une vitesse limite en-dessous de laquelle on peut considérer que la transformation est quasi-réversible.
5. Dans le cas d'une transformation entre deux états d'équilibre immobiles, il y a forcément eu des forces de frottements qui ont immobilisé le système, et la transformation n'est jamais réversible.

Thermodynamiques des liquides et des solides

Cours

On va, dans ce chapitre, s'intéresser aux phases condensées, les liquides et les solides. On va en donner un modèle idéal très simple qui suffit pour commencer à apprendre la thermodynamique. On va en profiter pour mieux préciser la notion de transfert thermique : dans certains cas, le transfert thermique entre deux corps peut s'exprimer de façon assez simple en fonction de la température de ces deux corps. Cette notion n'est pas spécifique aux solides, mais c'est avec eux qu'on l'utilise le plus.

Commençons par définir les trois principaux états de la matière : solide, liquide et gaz ou vapeur.

Définition : Gaz

On appelle gaz un état de la matière qui n'a pas de forme propre et a une densité plutôt faible ($\simeq 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Définition : Liquide

On appelle liquide un état de la matière qui n'a pas de forme propre et a une densité plutôt forte ($\simeq 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Définition : Solide

On appelle solide un état de la matière qui a une forme propre et une densité plutôt forte ($\simeq 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

Ces définitions restent vagues ; on verra d'ailleurs dans quelques chapitres que la distinction n'est pas toujours aussi évidente : à haute température et haute pression, on ne distingue par exemple plus le liquide du gaz. De plus, il existe d'autres états de la matière : plasma, superfluide, cristal liquide,...mais aussi des états plus difficiles à définir comme les granulaires (le sable, la farine), les mousses,...

Remarque : Les solides et les liquides sont denses : on les appelle les *phases condensées* ; les liquides et les gaz n'ont pas de forme propre : on les appelle les *fluides*.

T2.A. Modèles pour un liquide ou un solide

A.1. Propriétés générales

La plupart des phases condensées (liquides ou solides) sont peu dilatables et peu compressibles :

- $|\alpha| < 1 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
- $\chi_T < 1 \times 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$

Pour simplifier, on considérera le plus souvent qu'ils sont incompressibles et indilatables.

Propriété : Solide ou liquide incompressible et indilatable

Un solide/liquide **indilatable** a un coefficient $\alpha = 0$.

Un solide/liquide **incompressible** a un coefficient $\chi_T = 0$.

Un solide/liquide incompressible et indilatable a un volume constant : $V = cst$

A.2. Énergie et enthalpie

Si $V = cst$, l'énergie interne ne peut plus dépendre que de la température.

Propriété : Énergie d'un solide ou liquide incompressible et indilatable

Pour un solide ou un liquide incompressible et indilatable, U et C_v ne dépendent que de la température.

Remarque : La figure T2.1 montre des mesures expérimentales de C_{vm} pour des solides. On y voit apparaître la loi de Dulong et Petit (hors programme) : à haute température, $C_{vm} \rightarrow 3R = 25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ multiplié par le nombre d'atomes dans la formule chimique du solide. Dans les exercices, on utilise plutôt les capacités thermiques massiques.

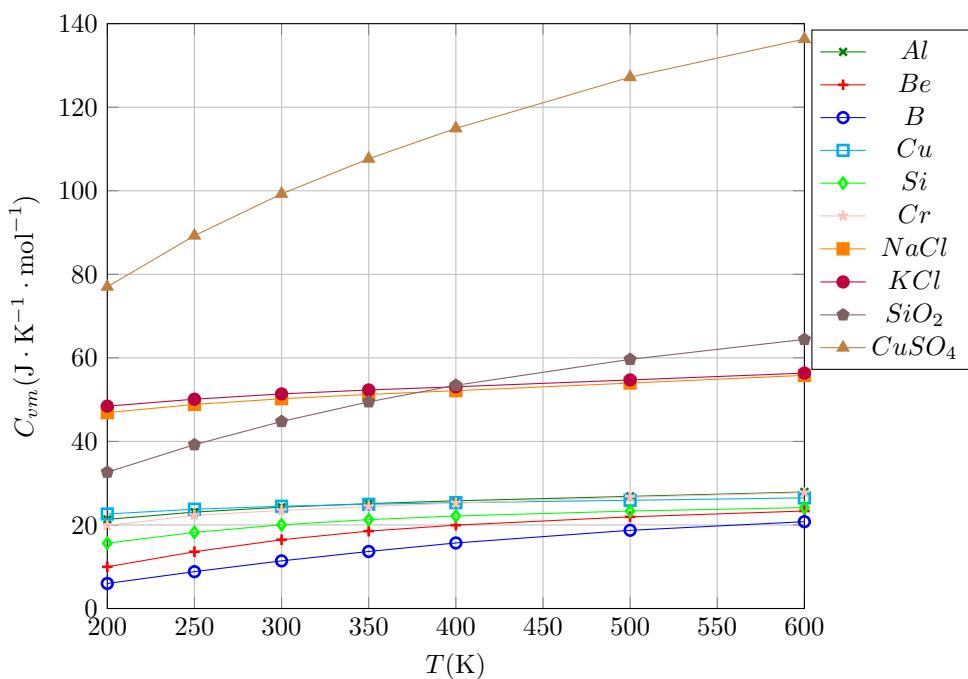


FIGURE T2.1 – Capacités thermiques à volume constant de quelques cristaux.

Propriété : Enthalpie d'une phase condensée (liquide/solide)

Pour un solide ou un liquide, l'enthalpie et l'énergie sont quasiment égales : $H \approx U$ donc $C_p \approx C_v$, qu'on notera souvent simplement C .

Démonstration

On verra un peu plus tard que, pour un gaz, PV est du même ordre de grandeur que le terme d'énergie U . Or, pour une phase liquide ou solide, le volume, à quantité de matière égale, est environ 1000 fois plus faible, ce qui implique que le terme PV sera environ 1000 fois plus faible que le terme d'énergie U . On pourra donc le négliger cette année.

T2.B. Calorimétrie

La calorimétrie est le domaine de la **mesure** des grandeurs thermodynamiques. Une des grandeurs mesurées par cette technique est la capacité thermique. Le principe de la calorimétrie est de travailler sur des mesures de températures à pression constante.

Définition : Calorimètre idéal

Un calorimètre idéal est une enceinte parfaitement calorifugée mais légèrement ouverte sur l'extérieur, de sorte que les transformations qui s'y passent se font de manière isobare.

On a alors $Q = 0$ et donc $\Delta H = W'$ (en supposant qu'il n'y a pas d'énergies macroscopiques).

L'idée est toujours de mettre en contact dans le calorimètre deux corps purs différents, l'un dont on connaît la capacité calorifique, l'autre dont on ne la connaît pas. Par des mesures précises des masses et des températures, on peut déterminer la grandeur inconnue.

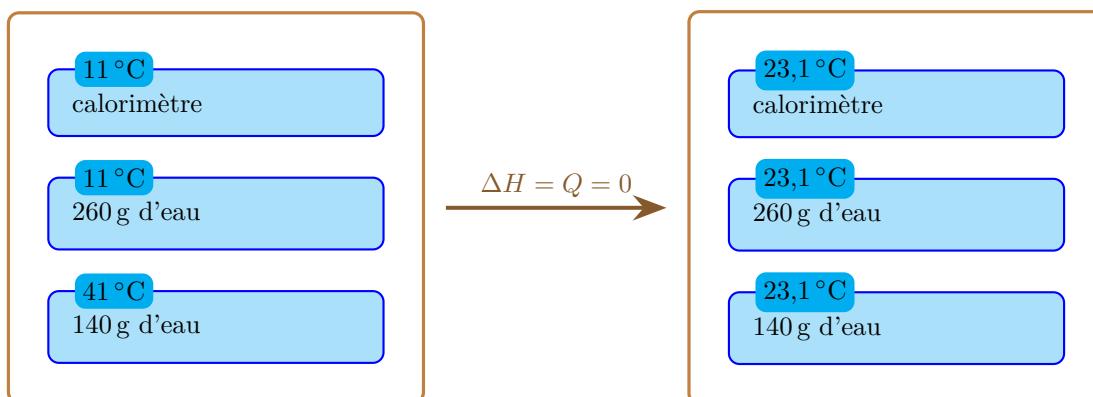
! En calorimétrie, les températures apparaissent quasiment tout le temps sous forme de différences de températures, donc on peut travailler en degrés Celsius.

Exemple : Mesure de la capacité thermique d'une pierre

On dispose d'un calorimètre dont la capacité thermique est inconnue. Par contre, on connaît la capacité thermique de l'eau liquide : $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Pour déterminer la capacité C_c du calorimètre, on place dans le calorimètre 260 g d'eau à 11 °C et on attend que le calorimètre ait atteint cette température. Puis on verse d'un coup 140 g d'eau chaude à 41 °C, on mélange rapidement et on mesure la température d'équilibre : 20,1 °C. Calculez C_c .
- On place maintenant 245 g d'eau à 18 °C dans le calorimètre, puis on y plonge une pierre de 205 g chauffée à 80 °C. Après quelques instants on atteint l'équilibre à 22,5 °C. Calculez la capacité thermique massique de cette pierre.

1.



L'enthalpie est extensive, donc on peut écrire $\Delta H = \Delta H_{eau \ froide} + \Delta H_{eau \ chaude} + \Delta H_{calorimetre}$.

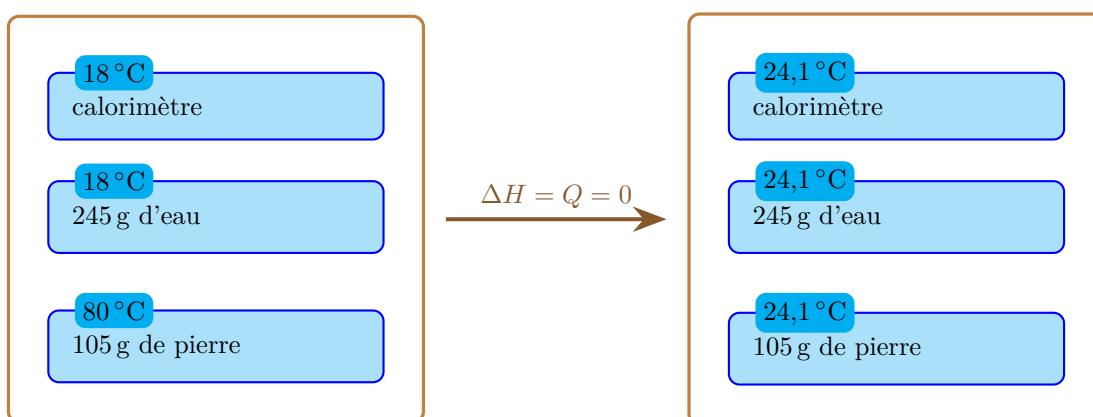
Les 260 g d'eau froide ($C_v = 0,260 \times 4180 = 1092 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$) passent de 11 °C à 20,1 °C, soit $\Delta T = +9,1 \text{ °C}$. Donc $\Delta U_{eau \ froide} = 1092 \times 9,1 = 9940 \text{ J}$.

De même, les 140 g d'eau chaude passent de 41 °C à 20,1 °C donc $\Delta H_{eau \ chaude} = 0,140 \times 4180 \times (20,1 - 41) = -12\,290 \text{ J}$.

Enfin, le calorimètre passe de 11 °C à 23,1 °C donc $\Delta H_{calorimetre} = C_c \times 9,1$.

Or le calorimètre est calorifugé, il n'y a pas de travail utile, donc le premier principe isobare appliqué au système {calorimètre + eau + eau} sur la transformation donne $\Delta H = Q = 0$. On en tire que $C_c = \frac{12\,290 - 9940}{9,1} = 258 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

2. On a encore $\Delta H = 0$.



Cette fois $(258 + 4180 \times 0,245) \times (22,5 - 18) + 0,205 \times c_{pierre} \times (22,5 - 80) = 0$ d'où on tire $c_{pierre} = 489 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

T2.C. Évolution temporelle d'un système sous pression constante

Lorsqu'un système évolue à pression constante, la variable la plus intéressante à étudier est sa température. En effet, c'est le paramètre qui devient déterminant pour décrire le système, le volume de celui-ci ne variant que par conséquence de la dilatation. Nous allons donc dans ce paragraphe modéliser de façon simple les échanges thermiques (échanges de chaleur) de manière à aboutir à l'équation différentielle vérifiée par un système évoluant de façon isobare.

C.1. Résistances thermiques

Considérons le schéma de la figure T2.2 : deux objets sont à des températures différentes T_a et T_b et séparés par une certaine distance. Alors l'objet le plus chaud va avoir tendance à donner de la chaleur au plus froid. Suivant ce qui se trouve entre les deux objets, il existe 3 principaux modes de transfert de chaleur :

Définition : Modes de transfert de la chaleur

Le transfert thermique entre deux objets à des températures différentes peut se faire de 3 manière différentes :

- si l'espace entre les deux objets est *transparent* alors le transfert peut se faire par *rayonnement*; c'est le mode de transfert le plus rapide;
- si l'espace entre les deux objets est un *fluide* (liquide ou gaz) alors le transfert peut se faire par *convection*, c'est-à-dire par les mouvements du fluide; c'est un mode de transfert moyennement rapide;
- si l'espace entre les deux objets est un *solide* alors le transfert peut se faire par *conduction*, c'est-à-dire par transmission de l'agitation thermique de proche en proche sans mouvement global de matière; c'est le mode de transfert le plus lent.



FIGURE T2.2 – Transfert thermique entre deux objets à des températures différentes.

Précisons un peu ces trois modes de transfert thermique.

Le rayonnement se fait par un processus fondamental en physique : le *rayonnement du corps noir*. La loi de Planck qui le décrit indique que tout objet à la température T émet un rayonnement lumineux caractérisé par deux lois :

- la loi de Wien : la longueur d'onde d'émission maximale vérifie $\lambda_{max} \cdot T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$. Ainsi, un objet à 290 K émet beaucoup à la longueur d'onde $\lambda_{max} = 1 \times 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$, c'est pour cela que les caméras thermiques regardent à cette longueur d'onde. Si on chauffe l'objet, T augmente et λ_{max} diminue. Vers 800 °C = 1073 K on trouve $\lambda_{max} = 2,7 \mu\text{m}$, dans le proche infrarouge, et l'objet commence à rougir. À 3000 K, $\lambda_{max} = 967 \text{ nm}$ et l'objet apparaît orange. Le Soleil, lui, est à 6000 K, donc il émet une lumière la plus intense à 480 nm, dans le vert ; il apparaît blanc car il émet aussi du rouge et du bleu.
- la loi de Stefan : l'intensité émise varie proportionnellement à T^4 , ce qui correspond à une variation très forte avec la température. Ainsi, quand on met deux objets de températures différentes T_a et T_b proches l'un de l'autre, le premier émet une puissance proportionnelle à T_a^4 , le second proportionnelle à T_b^4 , et chaque objet absorbe la puissance émise par l'autre. Il est facile de voir que l'objet le plus froid va gagner de l'énergie, et le plus chaud va en perdre. On ressent bien cet effet quand on se chauffe avec un poêle ou une cheminée : à quelques mètres devant le feu, on ressent une forte chaleur due au rayonnement émis par les flammes ; une fois le feu éteint, le poêle est encore chaud, et on continue de ressentir la chaleur émise par le poêle, même si elle est moins forte que précédemment. Au contraire, si on se place en hiver près d'une vitre en simple vitrage, ou d'un mur mal isolé et froid, on ressent une sensation de froid, car cette fois c'est nous qui émettons plus de rayonnement que nous n'en recevons de la part de cette surface froide.

À l'opposé, on trouve le mode de transfert thermique le plus lent : la conduction. Celle-ci se fait à travers des matériaux solides. Elle obéit à une équation que vous verrez l'an prochain, l'*équation de diffusion de la température*, mais pour cette année, on va se contenter d'admettre un résultat important en régime permanent (lorsque les températures ne varient pas).



(a) Chauffage par rayonnement



(b) Chauffage par convection

FIGURE T2.3 – Le chauffage d'une pièce en hiver utilise soit le rayonnement, soit la convection ; la conduction à travers les murs la refroidit.

Propriété : Résistance thermique d'un solide

On définit la résistance thermique entre deux objets de températures T_a et T_b comme le quotient de la différence de température par la puissance thermique (appelée aussi *flux thermique*) qui circule entre les objets en régime permanent :

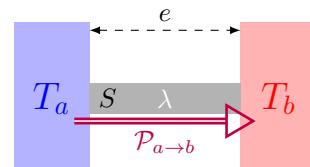
$$R_{th} = \frac{T_a - T_b}{\mathcal{P}_{th,a \rightarrow b}} \text{ donc } \delta Q_{a \rightarrow b} = \frac{T_a - T_b}{R_{th}} \cdot dt \quad (\text{T2.1})$$

R_{th} se mesure en $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$; on peut aussi définir la conductance thermique $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$.

Un solide d'épaisseur e et de section S a pour résistance thermique

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \quad (\text{T2.2})$$

où λ est la **conductivité thermique du matériau** (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).



Remarque : La conductance thermique en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$ indique quelle puissance est échangée pour 1 K d'écart entre les deux objets.

La conductivité thermique dépend du matériau ; le tableau T2.1 donne quelques exemples de valeurs pour des matériaux allant de l'isolant thermique à de bons conducteurs de chaleur.



Air immobile	0,0262	Verre	1,2	Acier inox	26
Laine de mouton	0,035	Béton	0,92	Aluminium	237
Liège	0,04	Terre	0,75	Cuivre	380
Bois (\perp fibres)	0,15	Granite	2,2	Diamant	2500

TABLEAU T2.1 – Conductivité thermique à 20 °C de divers matériaux, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Ainsi, pour isoler une maison et éviter les pertes de chaleur par les murs, il faut mettre un matériau isolant et assez épais. Par exemple, 15 cm de laine de bois donnent une résistance thermique surfacique (c'est-à-dire pour 1 m²) égale à $\frac{0,15}{0,036} = 4,2 \text{ K} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$. Il faut faire attention, car dans ce secteur du bâtiment, on parle systématiquement de «résistance thermique» là où en fait on utilise des «résistances thermiques surfaciques». Ainsi, la norme actuelle dans la Loire impose une résistance thermique surfacique minimale de 3 K · m² · W⁻¹ pour les murs et de 5 K · m² · W⁻¹ pour les toitures. Pour les fenêtres, on trouve dans les documentations des conductivités thermiques surfaciques, notées U_w , en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

Reste enfin le troisième type de transfert thermique : la convection. Si un point d'un fluide est plus chaud qu'un autre, ce fluide se met en mouvement : les parties chaudes montent, les parties froides descendent. L'explication de ce phénomène est la poussée d'Archimède, et le fait que les fluides ordinaires augmentent de volume lorsqu'ils chauffent, donc ils deviennent moins denses. On voit très bien ces phénomènes de convection apparaître dans une casserole d'eau

qu'on chauffe. Cette convection transporte alors efficacement la chaleur. Pour s'en convaincre, il suffit de mettre à chauffer deux casseroles, une d'eau et une de purée, sans tourner : toute l'eau va se réchauffer, tandis que pour la purée, seul le fond de la casserole va se réchauffer, voire brûler, car la purée est trop épaisse pour permettre la convection, et la conduction à travers la purée est insuffisante pour transporter la chaleur rapidement.

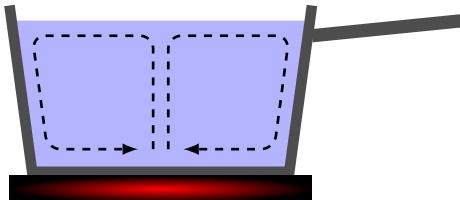


FIGURE T2.4 – Mouvements de convection dans une casserole d'eau.

La modélisation de ces mouvements de convection, et des transferts thermiques associés, est très complexe et dépend d'une grande quantité de paramètres. On va juste, cette année, admettre un cas limite étudié par Newton : dans le cas d'un contact entre une paroi solide et un fluide, tant que les différences de températures entre les deux ne sont pas trop grandes, on peut modéliser les transferts thermiques par une loi linéaire :

Propriété : Loi de convecto-diffusion de Newton

Lorsqu'un solide à la température T_s est en contact avec un fluide à la température T_f , alors en régime permanent la puissance thermique reçue par le solide vaut

$$\mathcal{P}_{th,s} = \frac{\delta Q_s}{dt} = \frac{T_f - T_s}{R_{th}} \text{ avec } R_{th} = \frac{1}{hS} \quad (\text{T2.3})$$

où S est la surface de contact et h un **coefficent de transfert convectif** (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$).

Le plus souvent, différentes résistances thermiques interviennent. Par exemple, dans les pertes de chaleur à travers un mur, la chaleur traverse le mur, puis passe du mur à l'air extérieur par phénomène conducto-convectif. On a alors les lois suivantes :

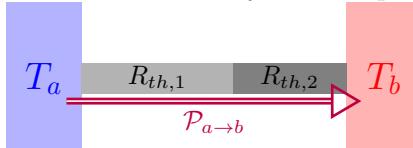
Propriété : Résistances thermiques en série

Si la chaleur, pour aller d'un objet 1 à un objet 2, doit traverser successivement plusieurs résistances thermiques $R_{th,i}$, on dit que ces résistances sont en série ; elles sont alors équivalentes à une seule résistance

$$R_{th,eq} = \sum_i R_{th,i} \quad (\text{T2.4})$$

Démonstration

Considérons deux objets de températures T_a et T_b séparés par deux résistances thermiques en série :



La même puissance thermique traverse les deux résistances. Notons T_i la température du point entre les deux résistances ; alors on peut écrire que $\mathcal{P}_{a \rightarrow b} = \frac{T_a - T_i}{R_{th,1}}$ donc $T_a - T_i = R_{th,1} \cdot \mathcal{P}_{a \rightarrow b}$; de même $T_i - T_b = R_{th,2} \cdot \mathcal{P}_{a \rightarrow b}$.

En ajoutant les deux équations, les T_i disparaissent et il reste $T_a - T_b = (R_{th,1} + R_{th,2}) \cdot \mathcal{P}_{a \rightarrow b}$ ce qui montre bien que la résistance équivalente est égale à la somme des deux résistances.

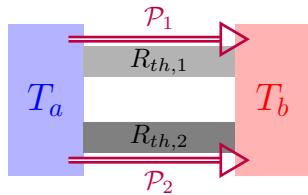
Propriété : Résistances thermiques en parallèle/dérivation

Si la chaleur, pour aller d'un objet 1 à un objet 2, peut traverser au choix plusieurs résistances thermiques $R_{th,i}$, on dit que ces résistances sont en parallèle ; elles sont alors équivalentes à une seule résistance

$$R_{th,eq} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_{th,i}}} \text{ soit } G_{th,eq} = \sum_i G_{th,i} \quad (\text{T2.5})$$

Démonstration

Considérons deux objets de températures T_a et T_b séparés par deux résistances thermiques en série :



La puissance thermique $\mathcal{P}_{a \rightarrow b}$ est la somme des deux puissances \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Or par définition $\mathcal{P}_1 = \frac{T_a - T_b}{R_{th,1}}$ et $\mathcal{P}_2 = \frac{T_a - T_b}{R_{th,2}}$ donc $\mathcal{P}_{a \rightarrow b} = \left(\frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}} \right) (T_a - T_b)$ ce qui montre bien que la résistance équivalente vaut $\left(\frac{1}{R_{th,1}} + \frac{1}{R_{th,2}} \right)^{-1}$

Exemple : Isolation d'une maison

On considère une maison :

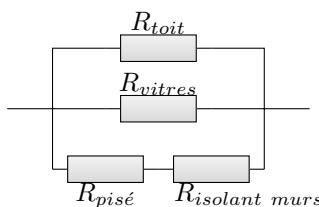
- les murs, de surface totale 110 m^2 , sont constitués de 50 cm de pisé ($\lambda = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) isolés avec 12 cm de laine de bois ($\lambda = 0,036 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
- les fenêtres, de surface totale 20 m^2 , ont pour conductivité thermique surfacique $U_w = 1,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
- la toiture, de surface totale 90 m^2 , est isolée avec 25 cm de laine de bois
- on néglige les résistances thermiques de transfert convectif, qui sont faibles

Calculez la résistance thermique totale de l'enveloppe de cette maison.

On peut commencer par calculer les résistances thermiques de chaque partie :

$$\begin{aligned} R_{\text{pisé}} &= \frac{0,5}{0,6 \times 110} = 7,6 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \\ R_{\text{isolant murs}} &= \frac{0,12}{0,036 \times 110} = 30,3 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \\ R_{\text{vitres}} &= \frac{1}{20 \times 1,1} = 45,4 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \\ R_{\text{toit}} &= \frac{0,25}{0,036 \times 90} = 77,2 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \end{aligned}$$

Reste à combiner ces résistances. Le toit, les vitres et les murs sont en parallèles : la chaleur s'échappe par l'un ou l'autre ; pour les murs, l'isolant est posé sur le mur, donc la chaleur doit traverser le pisé puis l'isolant ; on a donc le schéma :



En appliquant les lois d'association, on trouve alors $R_{th} = \frac{1}{\frac{1}{R_{toit}} + \frac{1}{R_{vitres}} + \frac{1}{R_{pisé} + R_{isolant murs}}} = 16,3 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, ce qui correspond à une conductivité $G_{th} = 61,4 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$. Autrement dit, s'il faut 2°C dehors et qu'on veuille maintenir 19°C dans la maison, on devra fournir une puissance de chauffage $G_{th} \times (19 - 2) = 1040 \text{ W}$.

C.2. Équation différentielle d'évolution de la température

Les résistances thermiques s'appliquent, normalement, en régime permanent, quand les températures ne varient pas. Néanmoins, on les utilise aussi si la température varie suffisamment lentement.

Définition : ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires consiste à appliquer la loi (T2.1) des flux thermiques à travers une résistance en régime variable, lorsque les variations de températures sont lentes devant le temps de diffusion de la température à travers la résistance.

Remarque : Pour savoir évaluer ce temps de diffusion de la température, il faudra attendre l'année prochaine.

Considérons un système à la température T en contact avec l'extérieur à la température T_{ext} qu'on va supposer constante, le tout étant à pression constante. Le premier principe va alors s'écrire $\Delta H = W' + Q$; mais au cours du temps, la température T du système va varier, donc le transfert thermique Q aussi. Du coup, on va plutôt faire un bilan sur une toute petite durée dt ; mieux encore, on va se ramener à des puissances.

Premier principe isobare sous forme dérivée

Si un système de capacité thermique C_p évolue de façon isobare en recevant une puissance utile \mathcal{P}_{utile} et une puissance thermique \mathcal{P}_{th} , alors

$$\frac{dH}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}_{utile} + \mathcal{P}_{th} \quad (\text{T2.6a})$$

Si le contact thermique se fait avec l'extérieur de température T_{ext} à travers une résistance thermique R_{th} , alors, à condition que les variations de températures soient lentes (ARQS), on peut écrire

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext} + R_{th} \cdot \mathcal{P}_{utile} \text{ avec } \tau = R_{th} \cdot C_p \quad (\text{T2.6b})$$

Démonstration

Il suffit d'écrire que $dH = \delta W' + \delta Q$ donc $\frac{dH}{dt} = \frac{\delta W'}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}$. Le premier quotient est la puissance et le deuxième terme est la puissance thermique. De plus $dH = C_p \cdot dt$.

Ensuite, on applique la définition de la résistance thermique en supposant que le régime est quasiment permanent, et on obtient $C_p \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}_{utile} + \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$ et on multiplie tout par R_{th} pour avoir la relation proposée.

On utilise alors cette équation en remplaçant \mathcal{P}_{utile} en fonction de ce qu'indique l'énoncé. On peut alors résoudre l'équation d'ordre 1 vérifiée par la température.

Exemple : Bilan thermique d'une maison

Une maison, de capacité thermique C , de température $T(t)$, est chauffée par un chauffage électrique de puissance \mathcal{P}_{ch} constante et échange de la chaleur avec l'extérieur de température T_{ext} via une enveloppe de résistance thermique R_{th} .

- Établir l'équation différentielle vérifiée par T . La mettre sous la forme $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{eq}$.
- Quel est le sens physique de τ ? Quel est le sens physique de T_{eq} ? Interpréter les termes qui y apparaissent.
- On rentre de vacances, il fait $T_{ext} = 2^\circ\text{C}$ dehors et $T(0) = 8^\circ\text{C}$ dedans initialement. On met le chauffage en route; déterminer $T(t)$.

Pour $R_{th} = 16 \text{ mK} \cdot \text{W}^{-1}$, $C = 30 \text{ MJ} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\mathcal{P}_{ch} = 3500 \text{ W}$, déterminez le temps mis pour atteindre $T = 19^\circ\text{C}$.

- 1. La maison évolue à pression constante, donc par le premier principe isobare sur une durée dt , $dH = \delta W' + \delta Q$ donc $\frac{dH}{dt} = \frac{\delta W'}{dt} + \frac{\delta Q}{dt}$. On sait que

— $dH = C \cdot dT$ pour un solide

— le travail utile est ici le travail électrique de chauffage, donc $\frac{\delta W'}{dt} = \mathcal{P}_{ch} = cst$

— $\frac{\delta Q}{dt} = \mathcal{P} = \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$ dans l'ARQS

On en déduit que $C \frac{dT}{dt} = \mathcal{P}_{ch} + \frac{T_{ext} - T}{R_{th}}$ soit $C \cdot R_{th} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_{ext} + R_{th} \cdot \mathcal{P}_{ch}$ donc $\tau = C \cdot R_{th}$ et $T_{eq} = T_{ext} + R_{th} \cdot \mathcal{P}_{ch}$

2. $\tau = C \cdot R_{th}$ est le temps caractéristique d'évolution de la température; il nous dit, par exemple, si on coupe le chauffage, le temps que mettra la maison à se refroidir. Il augmente si la maison est massive (C grand) et bien isolée (R_{th} grand)

$T_{eq} = T_{ext} + R_{th} \cdot \mathcal{P}_{ch}$ est la température à l'équilibre. C'est la température extérieure augmentée d'un terme de chauffage, d'autant plus grand que la maison est bien isolée (R_{th} grand).

3. C'est une ED d'ordre 1 à résoudre ; on trouve après quelques calculs $T(t) = T_{eq} + (T(0) - T_{eq}) e^{-t/\tau} = 59 - 51e^{-t/\tau}$ en °C avec $\tau = 5,7$ j. La résolution de $T(t) = 19$ °C donne alors $t = \tau \ln \frac{51}{40} = 33$ h. C'est très long, et cela montre plusieurs limites de notre modèle :

- on a considéré le système comme homogène, alors qu'on sait bien qu'il est beaucoup plus facile de chauffer l'air de la pièce que de chauffer les murs.
- la relation de la résistance thermique n'est valable qu'en régime permanent, or au début du chauffage on est très loin de ce régime

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système	
Modèle de la phase condensée incompressible et indilatante. Énergie interne et capacité thermique à volume constant d'une phase condensée considérée incompressible et indilatante.	Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un système considéré incompressible et indilatante en fonction de sa température.
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Modes de transfert thermique.	Caractériser qualitativement les trois modes de transfert thermique : conduction, convection, rayonnement.
Flux thermique. Résistance thermique.	Exploiter la relation entre flux thermique, résistance thermique et écart de température, l'expression de la résistance thermique étant donnée.
Loi phénoménologique de Newton, modélisation de l'évolution de la température d'un système incompressible au contact d'un thermostat.	Effectuer un bilan d'énergie pour un système incompressible et indilatante en contact avec un thermostat : établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la température du système.
Capacité thermique à pression constante dans le cas d'une phase condensée incompressible et indilatante.	Citer l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.

Thermodynamiques des liquides et des solides

QCMs

réponses page 464

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Pour un solide ou un liquide considérés comme incompressible et indilatable :

- (a). V ne dépend que de P (b). $V = cst$
 (c). V ne dépend que de T (d). $V = 0$

Q2.

La résistance thermique entre deux objets est définie en fonction de leur différence de température ΔT et et de la puissance thermique \mathcal{P} qu'ils échangent par :

- (a). $\mathcal{P} = \frac{\Delta T}{R_{th}}$ (b). $\mathcal{P} = R_{th} \cdot \Delta T$
 (c). $\mathcal{P} = \frac{R_{th}}{\Delta T}$ (d). $\mathcal{P} = \frac{1}{R_{th} \cdot \Delta T}$

Q3.

La résistance thermique d'un solide de conductivité thermique λ , d'épaisseur e et de section S vaut

- (a). $R_{th} = \frac{\lambda}{e \cdot S}$ (b). $R_{th} = \frac{S}{\lambda \cdot e}$
 (c). $R_{th} = \frac{\lambda e}{S}$ (d). $R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$

Q4.

Quelle est l'unité de la résistance thermique ?

- (a). $\text{W} \cdot \text{K}^{-1}$ (b). $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
 (c). $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ (d). $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Q5.

Un système évoluant à pression constante et en échangeant du transfert thermique avec l'extérieur a sa température qui vérifie une équation différentielle :

- (a). d'ordre 2 (b). d'ordre 1
 (c). de temps caractéristique $\tau = R_{th} \cdot C$ (d). de temps caractéristique $\tau = \frac{C}{R_{th}}$

 QCM : Résistances thermiques

On donne quelques valeurs de conductivité thermique de quelques matériaux :

Matériau	$\lambda(\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
béton	0,92
terre	0,75
bois	0,15
paille	0,065
laine de bois	0,036
laine de chanvre	0,039

Q6.

Que vaut la résistance thermique d'un mur de terre de surface 30 m^2 et de 60 cm d'épaisseur ?

- (a). $0,027 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ (b). $2,7 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
 (c). $0,044 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ (d). $37,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

Q7.

Que vaut la résistance thermique d'un mur de 30 m^2 constitué de 20 cm de béton recouverts de 12 cm de laine de chanvre ?

- (a). $0,0067 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(c). $0,11 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

- (b). $0,043 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(d). $0,10 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

Q8.

Que vaut la résistance thermique d'un mur de 50 m^2 constitué de 19 cm de bois dont 45 m^2 ont été recouverts de 14 cm de laine de chanvre, le reste n'étant pas recouvert d'isolant ?

- (a). $0,361 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(c). $0,053 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

- (b). $0,076 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(d). $0,100 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

Q9.

Que vaut la résistance thermique d'un mur de 30 m^2 constitué de 80 cm de paille, dans lequel on a percé une fenêtre de $2,4 \text{ m}^2$ ayant pour résistance thermique surfacique $R_w = 1,1 \text{ K} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{W}^{-1}$?

- (a). $0,31 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(c). $0,23 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

- (b). $0,90 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
(d). $0,44 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

Q10.

Que vaut la résistance thermique d'un mur de 30 m^2 formé de 60 cm de terre recouverte de 15 cm de laine de bois, percé d'une fenêtre de $2,0 \text{ m}^2$ de conductance thermique surfacique $U_w = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$?

- (a). 0,42
(c). 0,18

- (b). 0,28
(d). 0,14

Thermodynamiques des liquides et des solides

Exercices

réponses page [465](#)

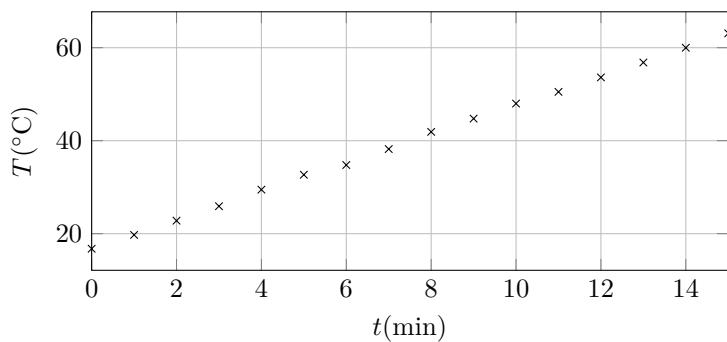
Exercice T2.1 : Calorimétrie [*]

- Dans un calorimètre de capacité thermique négligeable, on plonge $m_{FE} = 250\text{ g}$ de fer à 80°C dans $m_{H_2O} = 120\text{ g}$ d'eau liquide à 20°C . La température d'équilibre est mesurée à $30,9^\circ\text{C}$. Calculez la capacité thermique massique du fer.
- On recommence la même expérience, cette fois la masse du fer vaut 115 g . Calculez la température d'équilibre.

On donne $c(H_2O_l) = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$

Exercice T2.2 : Chauffage d'un liquide [*]

Dans un calorimètre, on place $m = 302\text{ g}$ d'huile d'olive. On la chauffe avec une résistance chauffante $R = 5\Omega$ alimentée par un courant constant $I = 2\text{ A}$. On relève la température au cours du temps :



- Par un bilan enthalpique entre les instants 0 et t , montrez que la température T vérifie une loi $T(t) = T(0) + k.t$ avec k une constante à exprimer en fonction de R , I , m et la capacité thermique massique c de l'huile.
- Par mesure de la pente de la courbe sur le graphique, déterminez c .

Exercice T2.3 : Calorimétrie [*]

- Dans un calorimètre, on place 197 g d'eau à $20,1^\circ\text{C}$. On plonge dedans une résistance électrique $R = 2,5\Omega$. À l'instant $t = 0$, on fait passer un courant constant $I = 5,2\text{ A}$ à travers la résistance ; au bout de 1 min , on constate que la température de l'eau vaut $25,0^\circ\text{C}$. Déterminez la capacité thermique massique c_p de l'eau si on néglige la capacité thermique de la résistance chauffante et du calorimètre.
- On enlève la résistance. Dans l'eau à $25,0^\circ\text{C}$ on plonge une pomme de terre de 124 g sortant du four à 120°C ; très vite, l'ensemble atteint un état d'équilibre à $57,5^\circ\text{C}$. Déterminez la capacité thermique massique de la pomme de terre.

Exercice T2.4 : Calorimétrie [**]

Dans cet exercice, on tiendra compte de la capacité thermique du calorimètre, notée C .
Données : $c_p(\text{eau}) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- On mélange 123 g d'eau à $18,3^\circ\text{C}$ avec 89 g d'eau à $91,2^\circ\text{C}$ dans un calorimètre initialement à $18,3^\circ\text{C}$. On observe une température d'équilibre de l'ensemble égale à $47,1^\circ\text{C}$. Calculez C ; on supposera que le calorimètre est lui aussi à $47,1^\circ\text{C}$ à la fin.
- On verse 152 g d'eau à $19,4^\circ\text{C}$ dans le calorimètre et on y plonge un morceau de zinc de masse 189 g à

80,1 °C. On mesure une température d'équilibre égale à 25,1 °C.

Calculez la capacité thermique massique du zinc.

Indication : tenez compte du calorimètre, qui passe de 19,4 °C à 25,1 °C

3. [***] On verse 181 g d'eau dans le calorimètre et on attend l'équilibre ; on mesure une température de 20,7 °C ; on y ajoute 145 g de sel (chlorure de sodium $NaCl$) à la même température. On mélange et on observe que la température de l'ensemble baisse jusqu'à 10,0 °C.

On admet que la capacité thermique massique du sel vaut $c_{p,sel} = 880 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Calculez l'enthalpie de dissociation D du chlorure de sodium à 10 °C, définie comme la variation d'enthalpie d'1 kg de chlorure de sodium lorsqu'il est dissout et solubilisé dans l'eau à 10 °C.

Exercice T2.5 : Pertes à travers une résistance thermique [*]

1. Un chauffe-eau contient de l'eau à 55 °C et est placé dans une pièce à 15 °C. Son enveloppe de surface $1,8 \text{ m}^2$ est constituée principalement d'une épaisseur $e_1 = 1,5 \text{ cm}$ de laine minérale de conductivité thermique $\lambda_1 = 0,045 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Le contact de l'extérieur avec l'air se fait par conducto-diffusion (loi de Newton) avec un coefficient $h = 5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

Calculez la puissance thermique qu'il perd.

2. On ajoute une seconde couche d'isolant : $e_2 = 3 \text{ cm}$ de laine de mouton de conductivité thermique $\lambda_2 = 0,035 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculez la nouvelle puissance perdue.

Exercice T2.6 : Bouteille isotherme [**]

Une bouteille isotherme a pour but de conserver un liquide à température constante le plus longtemps possible. Pour cela, il est isolé de l'extérieur par une double paroi en aluminium séparée par une lame d'air d'épaisseur $e = 3 \text{ mm}$. Toutes les transformations sont isobares.

1. On considère une bouteille modélisée par un cylindre de rayon 4 cm et de hauteur 22 cm. Calculez son volume V et sa surface totale S (les bords + le haut et le bas).
2. Si on suppose que la lame d'air englobe toute la bouteille (on oublie le bouchon), calculer sa résistance thermique. On donne $\lambda_{air} = 0,0262 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et on néglige la résistance thermique de l'aluminium.
3. La bouteille est remplie d'eau de capacité thermique massique $c_p = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Calculez son C_p (la masse volumique de l'eau est à connaître).
4. Montrez que la température de l'eau obéit à une équation différentielle de la forme $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$ où T_{ext} est la température de l'extérieur et τ une constante à exprimer puis à calculer.
5. On suppose que $T_{ext} = 21^\circ\text{C}$ et $T(0) = 48^\circ\text{C}$. Établissez $T(t)$, et calculez le temps pour atteindre $T = 30^\circ\text{C}$.

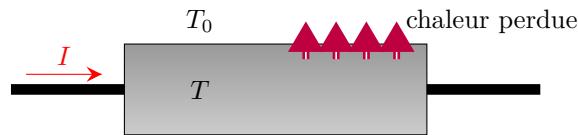
Exercice T2.7 : Refroidissement d'un café [**]

Un café dans un verre est modélisé par un cylindre de hauteur $z = 3 \text{ cm}$ et de rayon $R = 2 \text{ cm}$, de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, de capacité thermique massique $c_p = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Il est, à l'instant $t = 0$, à une température $T_i = 63^\circ\text{C}$. On le place dans une pièce à pression constante et de température constante $T_0 = 21^\circ\text{C}$. On suppose que la puissance thermique perdue à travers la surface S totale (bords+haut+bas) s'écrit $\mathcal{P} = h(T - T_0)S$ avec $h = 50 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ un coefficient constant.

1. En appliquant le premier principe entre t et $t + dt$, déterminez une ED vérifiée par la température $T(t)$ du café.
2. Résolvez-la et déterminez $T(t)$.
3. Au bout de combien de temps le café sera-t-il à 35 °C ?

Exercice T2.8 : Température d'une résistance [**]

Une résistance électrique R de capacité thermique C est placée dans l'air de température T_0 .



Elle échange de la chaleur avec l'air ambiant à travers son enveloppe de résistance thermique R_{th} . De plus, elle reçoit de la puissance électrique via le courant I qui la traverse.

Initialement, la résistance est à l'équilibre thermique avec l'extérieur, à la température T_0 . À $t = 0$, on commence à faire passer dans la résistance un courant I constant ; on suppose que le chauffage de la résistance se fait suffisamment lentement pour qu'elle soit à chaque instant à une température uniforme $T(t)$.

1. En faisant un bilan d'enthalpie entre t et $t + dt$, déterminez une équation différentielle vérifiée par T .
2. Déduisez-en la loi $T(t)$.
3. AN : Pour $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $C = 0,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $R = 1000 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, $R = 100 \Omega$ et $I = 5 \text{ mA}$, calculez $T(\infty)$ ainsi que le temps caractéristique de l'évolution de T .

Exercice T2.9 : Contact thermique entre deux systèmes [***]

On considère deux systèmes S_1 et S_2 en contact thermiques, par exemple deux pièces d'une maison, ou un objet plongé dans l'eau, etc. On prend les hypothèses suivantes :

- les évolutions se font à pression constante
 - les deux systèmes ont des capacités thermiques à pression constante C_1 et C_2
 - l'ensemble formé des deux systèmes est isolé de l'extérieur
 - les deux systèmes s'échangent de la chaleur via une résistance thermique R_{th}
 - les enthalpies de ces deux systèmes ne dépendent que des températures T_1 et de T_2 de ces systèmes, supposées homogène
 - on note T_1^0 et T_2^0 les températures initiales des deux systèmes.
1. Déterminez les deux équations différentielles vérifiées par T_1 et T_2 .
 2. Déterminer les équations différentielles vérifiées par les variables $s = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C_1 + C_2}$ et $e = T_1 - T_2$.
 3. Déduisez-en $s(t)$ et $d(t)$.
 4. Déduisez-en $T_1(t)$ et $T_2(t)$ et commentez leurs limites.

Thermodynamiques des liquides et des solides

TDs numériques

réponses page 467

TD numérique : Fusible électrique

Un fusible est un conducteur ohmique chargé de protéger un circuit des surintensités : si l'intensité est trop forte, il s'échauffe et fond, ce qui coupe le courant.

Pour que la coupure soit rapide, on utilise un métal qui fond à basse température, et on profite du fait que la résistance d'un métal augmente avec la température, ce qui augmente l'échauffement par effet Joule.

On considère donc un fil de plomb parcouru par un courant I supposé constant. On prend le modèle suivant :

- les transformations se font à pression constante $P_0 = 1$ bar. À cette pression, le plomb fond à $T_{fus} = 327,5^\circ\text{C}$
- la capacité thermique massique du plomb vaut $c_{Pb} = 129 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, sa masse volumique vaut $\mu = 11,35 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$
- le fil a la forme d'un cylindre, de longueur $\ell = 1 \text{ cm}$, de diamètre $d = 0,15 \text{ mm}$
- la résistance du fil s'écrit $r(T) = \frac{\rho \ell}{s}$ avec s la section du fil, et $\rho(T)$ la résistivité du plomb, donnée par la formule approchée

$$\rho(T) = aT^2 + bT + c \text{ avec } \begin{cases} a &= 2,41 \times 10^{-13} \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-2} \\ b &= 6,54 \times 10^{-10} \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1} \\ c &= -4,43 \times 10^{-9} \Omega \cdot \text{m} \end{cases}$$

- le fil est placé dans de l'air de température constante $T_e = 21^\circ\text{C}$ et échange de la chaleur avec celui-ci via les bords du cylindre ; le coefficient de flux conducto-diffusif vaut $h = 5 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
- initialement, le fil est à la température de la pièce

1. Exprimez et calculez dans un programme Python :

- la masse m du fil
- la capacité thermique C_p du fil
- la résistance thermique R_{th} entre le fil et la pièce

2. Montrez que la température T du fil, si on la suppose uniforme, vérifie l'équation différentielle

$$\tau \frac{dT}{dt} + T = T_e + r(T)I^2R_{th} \text{ avec } \tau = C_p \cdot R_{th} \quad (\text{T2.7})$$

3. Quelle équation vérifie la limite T_∞ aux temps longs ? Résolvez-la, tracez alors la courbe de $T_\infty(I)$ pour I variant entre 1 mA et 200 mA, et déterminez le courant maximal que supporte ce fusible.

Remarque : on admettra que la bonne racine est la plus petite des deux trouvées.

4. Résolvez l'équation différentielle par la méthode d'Euler pour $I = 0,2 \text{ A}$ sur une durée de 2 s. Commentez.

5. Idem pour des intensités variant entre 0,2 A et 0,8 A. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a)

Q3.(d)

Q4.(d)

Q5.(b) ET (c)

Réponses au QCM : Résistances thermiques

Q6.(a)

$$R = \frac{e}{\lambda S}$$

Q7.(c)

Les résistances sont en série : elles s'ajoutent.

Q8.(b)

Les 45 m^2 ont pour résistance thermique $28 \times 10^{-3} + 80 \times 10^{-3} = 108 \times 10^{-3}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$; les 5 m^2 restant ont pour résistance $253 \times 10^{-3}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Ces deux résistances sont en parallèle.

Q9.(c)

Ici on a deux résistances en parallèle : celle des $27,6\text{ m}^2$ de mur, et celle de la fenêtre qui vaut $\frac{R_w}{2,4}$ (regardez les unités pour savoir comment utiliser R_w). Pour les associer, on ajoute les inverses des résistances.

Q10.(d)

On met la terre et la laine de bois en série, et le tout en parallèle de la fenêtre.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T2.1 : Calorimétrie [*]

1. $c(Fe) = 0,445 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
2. $T_{final} = \frac{80m_{Fe}c(Fe) + 20m_{H_2O}c(H_2O)}{m_{Fe}c(Fe) + m_{H_2O}c(H_2O)} = 25,1^\circ\text{C}$

Réponses de l'exercice T2.2 : Chauffage d'un liquide [*]

1. $m.c.(T - T(0)) = RI^2t$ soit $T = T(0) + \frac{RI^2}{m.c}t$
2. On mesure une pente $k = 0,051 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$. On en tire que $c = 1290 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Réponses de l'exercice T2.3 : Calorimétrie [*]

1. $c_{p,eau} = \frac{RI^2 \cdot \Delta t}{m_{eau} \cdot (T_f - T_i)} = 4200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
2. $\Delta H = 0$ d'où on tire $c_{p,pdt} = 3470 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Réponses de l'exercice T2.4 : Calorimétrie [**]

Dans tout cet exercice : $\Delta H = W' + Q = 0$ car la transformation est isobare et adiabatique.

1. $C = 55,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.
2. $c_{Zn} = 380 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.
3. On imagine un état intermédiaire fictif où tout s'est refroidi à $13,0^\circ\text{C}$ mais le sel n'est pas encore dissout ; on trouve $D = 69,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Réponses de l'exercice T2.5 : Pertes à travers une résistance thermique [*]

1. $\mathcal{P} = \frac{55-15}{0,185+0,111} = 135 \text{ W}$.
2. $\mathcal{P} = 52 \text{ W}$.

Réponses de l'exercice T2.6 : Bouteille isotherme [**]

1. $V = \pi r^2 h = 1,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ et $S = 65,3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$.
2. $R_{th} = 1,75 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$
3. $C_p = 4645 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
4. $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$ avec $\tau = R_{th} \cdot C_p = 8140 \text{ s} = 2 \text{ h}15 \text{ min}$
5. $T(t) = 21 + 27e^{-t/\tau}$ en $^\circ\text{C}$.

On résout : $T(t) = 30 \Leftrightarrow t = 2 \text{ h}30 \text{ min}$

Réponses de l'exercice T2.7 : Refroidissement d'un café [**]

1. $\frac{dT}{dt} + \tau T = \tau T_0$ avec $\tau = \frac{\rho c_p z R}{2h(R+z)} = 504 \text{ s}$
2. $T(t) = T_i + (T_0 - T_i)e^{-t/\tau}$
3. 554 s soit 9 min14 s

Réponses de l'exercice T2.8 : Température d'une résistance [**]

1. $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_\infty$ avec $\tau = C \cdot R_{th}$ et $T_\infty = T_0 + RI^2R_{th}$.
2. $T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau}$.

3. $\tau = 100 \text{ s}$ et $T_\infty = 22,5^\circ\text{C}$.

Réponses de l'exercice [T2.9](#) : Contact thermique entre deux systèmes [***]

$$1. R_{th}C_1 \frac{dT_1}{dt} = T_2 - T_1. \text{ et } R_{th}C_2 \frac{dT_2}{dt} = T_1 - T_2.$$

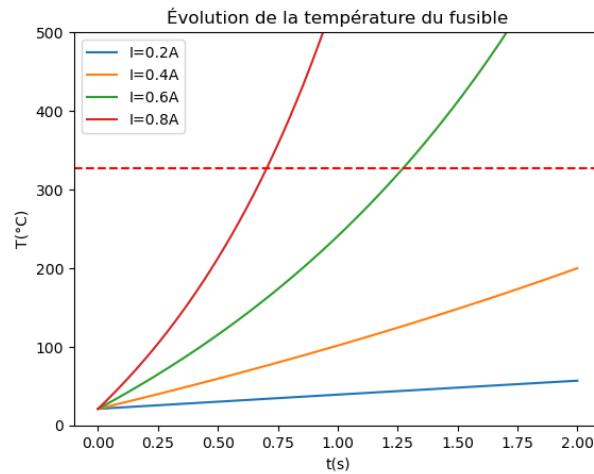
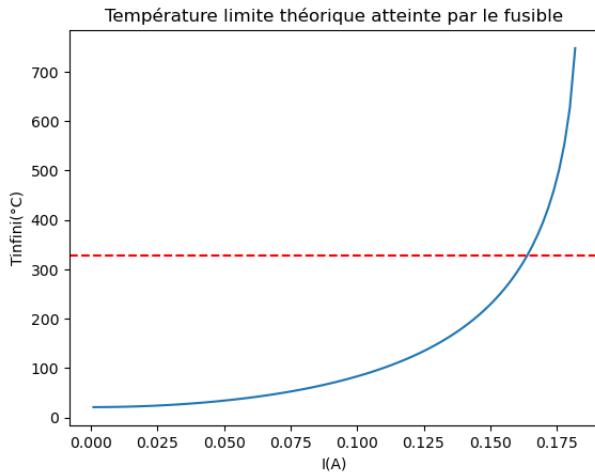
$$2. \frac{ds}{dt} = 0 \text{ et } \frac{de}{dt} = -\frac{C_1+C_2}{C_1C_2R_{th}}e$$

$$3. s(t) = \frac{C_1T_1^0 + C_2T_2}{C_1+C_2} \text{ et } e(t) = (T_1^0 - T_2^0) e^{-t/\tau}$$

$$4. T_1(t) = s(t) + \frac{C_2}{C_1+C_2}e(t) = \frac{(C_1+C_2e^{-t/\tau})T_1^0 + (C_2-C_2e^{-t/\tau})T_2^0}{C_1+C_2} \text{ et } T_2(t) = s(t) - \frac{C_1}{C_1+C_2}e(t) = \frac{(C_2+C_1e^{-t/\tau})T_2^0 + (C_1-C_1e^{-t/\tau})T_1^0}{C_1+C_2}$$

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Fusible électrique



La courbe de température limite semble montrer une coupure à 160 mA ; mais en réalité, même à 200 mA, le fusible met un temps très long pour fondre. La simulation dynamique montre qu'il faut au moins 500 mA pour que le fusible coupe le courant en un temps raisonnable de quelques secondes.

Thermodynamique des gaz

Cours

À la différence des solides et des liquides, les gaz sont sujets à de fortes variations de volumes lorsque la température ou la pression varient. Cela va entraîner des travaux importants, et la possibilité de fabriquer entre autre des moteurs à l'aide de gaz chauffés puis détendus.

Dans ce chapitre, nous allons introduire un modèle simple de gaz, et étudier les nombreuses possibilités que nous offrent la manipulation de cette phase de la matière.

T3.A. Modèles pour les gaz

A.1. Le modèle du gaz parfait

L'étude des gaz a commencé au XVII^e siècle avec l'établissement expérimental de la loi de Boyle-Mariotte : pour un gaz à température constante, le produit PV est constant tant qu'on se limite à des gaz peu denses (pression pas trop élevée), et cette constante est proportionnelle à la température absolue. Cette loi a été expliquée par Maxwell vers 1860 à l'aide de l'hypothèse atomique. Il propose une interprétation de la pression par des chocs des molécules du gaz sur les parois (figure T3.1). Chaque molécule qui rebondit sur le morceau de paroi de surface S appuie dessus, et la somme de toutes ces forces est la force de pression (appelée alors pression cinétique, par opposition à la pression dynamique lorsque le gaz est en mouvement). Bien sûr, ces chocs sont aléatoires, et la force au cours du temps ressemble à la simulation de la figure T3.2 : elle varie beaucoup. Cependant, les lois de la statistique indiquent que, quand le nombre de molécules N augmente, la force moyenne varie proportionnellement à N , tandis que les fluctuations de cette force varient comme \sqrt{N} ; autrement dit le rapport fluctuations de la force/force varie comme $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et devient négligeable pour un système thermodynamique. Ainsi, la pression de l'air sur une surface quelconque a des fluctuations, mais qui sont trop faibles pour être perçues.

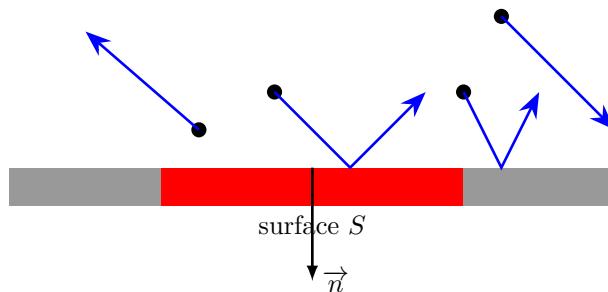


FIGURE T3.1 – Agitation thermique et pression cinétique d'un gaz : les molécules qui rebondissent sur la paroi appuient dessus.

FIGURE T3.2 – Simulation des chocs sur une paroi.

Ainsi, tout d'abord, l'agitation thermique se traduit par l'acquisition de vitesse par les molécules du gaz. Pour quantifier cela, on ne peut pas calculer la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$, car elle est nulle. On pourrait calculer la moyenne de sa norme de la vitesse, mais on utilise plutôt une autre vitesse dont l'utilité physique est plus grande :

Définition : Vitesse quadratique d'un gaz

On définit la vitesse quadratique d'un gaz à partir des vitesses au carré des molécules du gaz par la loi

$$v^* = \sqrt{\langle \|\vec{v}\|^2 \rangle} \quad (\text{T3.1})$$

Cette vitesse des molécules implique qu'elles possèdent de l'énergie cinétique :

Propriété : Énergie cinétique d'un gaz parfait (admise)

L'énergie cinétique moyenne $\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}mv^{*2}$ d'une molécule de masse m dans un gaz à la température T vaut

$$\langle e_c \rangle = \frac{3}{2}k_B T \text{ où } k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ est la constante de Boltzmann} \quad (\text{T3.2a})$$

L'énergie cinétique d'agitation de n moles de gaz parfait à la température T vaut donc

$$E_c = \frac{3}{2}n.R.T \text{ où } R = N_A \cdot k_B = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ est la constante des gaz parfaits} \quad (\text{T3.2b})$$

Cette propriété vient d'un théorème fondamental de mécanique statistique, le *théorème d'équipartition de l'énergie*, qui est hors programme.

Exemple : Vitesse quadratique des molécules d'un gaz parfait

À connaître

Calculez numériquement la vitesse quadratique du diazote, considéré comme un gaz parfait, à 20 °C sous 1 bar. Faites de même pour le dioxygène. On donne $M_N = 14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}m \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T \text{ donc } v^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

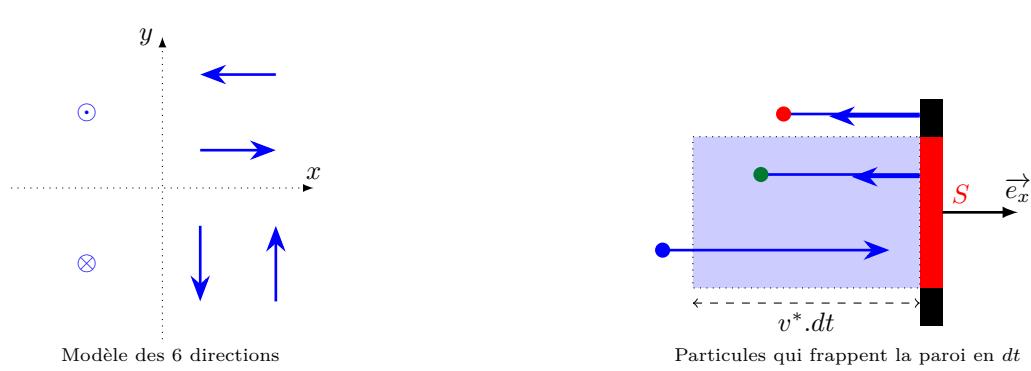
En mettant bien les masses molaires en kg/mol , on trouve $v_{N_2}^* = 511 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{O_2}^* = 478 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. C'est grand, mais bien inférieur à la vitesse de libération terrestre, ce qui explique pourquoi la Terre a toujours une atmosphère.

À partir de là, Maxwell se lance dans le calcul de la force de pression par les lois de la mécanique. La démonstration n'est pas au programme de MP2I, vous pouvez la passer sans problèmes, mais elle est quand même intéressante quant à son raisonnement :

Calcul : Pression cinétique d'un gaz parfait

Maxwell propose de modéliser un gaz peu dense par un ensemble de molécules **ponctuelles, identiques et indépendantes**; ce gaz est **homogène** (ses propriétés sont identiques en tout point), **isotrope** (ses propriétés sont identiques quelle que soit la direction) et **chaotique**.

Considérons donc N molécules de masse m dans un volume V , réparties de façon homogène. Ces molécules ont des vitesses dans toutes les directions. Pour simplifier, le programme officiel des autres classes propose d'effectuer le calcul avec un modèle idéalisé mais évitant les gros calculs et gardant l'essence de la physique du raisonnement : les molécules ont toutes une vitesse de norme v^* et ne se déplacent que suivant les directions $\pm \vec{e}_x$, $\pm \vec{e}_y$ et $\pm \vec{e}_z$, réparties équitablement entre ces 6 directions. En réalité, les molécules vont dans toutes les directions et n'ont pas toutes exactement la vitesse v^* .



Considérons un morceau de paroi de surface S et de normale \vec{e}_x . Des molécules viennent rebondir dessus. On va compter le nombre dN de molécules qui rebondissent sur la surface S en un temps dt . On sait déjà que seules les molécules avec une vitesse $v^* \vec{e}_x$ vont frapper la paroi. En un temps dt , toutes ces molécules avancent de $v^* dt \vec{e}_x$; il y a alors 3 possibilités :

- si ces molécules ne sont pas «en face» de S , elles rebondissent à côté (molécule rouge sur le schéma)
- si ces molécules sont «en face» de S mais à une distance supérieure à $v^* dt$, elles n'iront pas jusqu'à S pendant un temps dt (molécule bleue sur le schéma)
- si ces molécules sont «en face» de S et à une distance inférieure à $v^* dt$, elles rebondiront sur S pendant un temps dt (molécule verte sur le schéma)

Les molécules qui rebondissent en un temps dt sont donc celles qui sont dans la portion de volume située en face de S et de hauteur $v^* dt$. Sur le schéma ci-dessous c'est un rectangle (bleu clair), mais en fait en 3D c'est un cylindre de base S et de hauteur $v^* dt$, donc de volume $dV = S.v^*.dt$. Or dans le volume V , il y a $\frac{N}{6}$ molécules qui ont pour vitesse $v^* \vec{e}_x$; par loi de proportionnalité, dans dV , il y a $dN = \frac{N}{6V} dV = \frac{N.S.v^*}{6V} dt$ molécules qui vont frapper la paroi en un temps dt .

Pour calculer la force de pression résultante, on va considérer les molécules qui rebondissent sur la paroi en un temps dt . Le schéma ci-dessous montre à quoi ce système ressemble aux instants t (avant le rebond) et $t + dt$ (après le rebond).



Considérons une molécule, de masse m . À l'instant t , elle pour vitesse $\vec{v}(t) = v^* \vec{e}_x$ et à l'instant $t + dt$ elle a pour vitesse $\vec{v}(t + dt) = -v^* \vec{e}_x$. Son accélération moyenne entre t et $t + dt$ vaut donc $\frac{\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)}{dt} = -\frac{2v^*}{dt} \vec{e}_x$. Pendant ce temps, elle n'est soumise qu'à une seule force : la force de la paroi lorsqu'elle s'en approche et la touche. Comme on ne sait pas trop à quel instant entre t et $t + dt$ elle frappe la paroi, on va noter $\langle \vec{f} \rangle$ la force moyenne de la particule sur la paroi; alors, d'après la 3^e loi de Newton que nous n'avons pas encore énoncée, ou *principe des actions réciproques*, la paroi exerce sur la particule une force moyenne opposée $-\langle \vec{f} \rangle$. Le PFD appliqué à la particule indique donc que $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\langle \vec{f} \rangle$ donc $\langle \vec{f} \rangle = +\frac{2mv^*}{dt} \vec{e}_x$.

Mais en un temps dt il n'y a pas une seule particule qui rebondit sur la paroi, mais $dN = \frac{NSv^*}{6V} dt$. Par conséquent, la force exercée sur la paroi sera $dN \times \langle \vec{f} \rangle = \frac{NSv^*}{6V} dt \times \frac{2mv^*}{dt} \vec{e}_x = \frac{N.m.S.v^{*2}}{3V} \vec{e}_x$.

En identifiant cette expression avec la force de pression $P.S.\vec{e}_x$, on trouve que la pression cinétique s'écrit $P = \frac{Nmv^{*2}}{3V}$. Comme de plus on a vu plus haut que $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T$ on trouve

$$P = \frac{Nk_B T}{V}$$

Équation d'état du gaz parfait

Un gaz parfait homogène à l'équilibre vérifie l'équation d'état

$$PV = Nk_B T = nRT \quad (\text{T3.3})$$

avec n le nombre de moles, $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits, N le nombre de molécules et $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

! Attention aux unités ! La pression s'exprime en Pascal, le volume en mètres cube, et la température en Kelvin.

Exemple : Hélium

Calculez le volume de 200 g d'hélium à 25 °C sous 1 bar ; on donne $M_{He} = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Dans $m = 200 \text{ g}$ d'hélium il y a $n = \frac{200}{4,0} = 50 \text{ mol}$ d'hélium, d'où $V = \frac{nRT}{P} = \frac{50 \times 8,314 \times (273+25)}{1 \times 10^5} = 1,24 \text{ m}^3$.

Remarque : Le gaz parfait est un modèle idéal où les molécules sont indépendantes. Mais il faut retenir que ce modèle n'est pas complètement farfelu : tout gaz se comporte comme un gaz parfait lorsque sa densité $\frac{N}{V}$ tend vers 0. Dans les CNTP (conditions normales de températures et de pression), le dioxygène et le diazote peuvent être modélisés comme un GP avec une assez bonne précision.

Calcul : Coefficients thermoélastiques d'un GP

Ce calcul n'a aucun intérêt physique, car les coefficients thermoélastiques sont utilisés essentiellement pour les solides et les liquides, mais on le trouve parfois posé comme question. On va donc calculer α et χ_T pour un GP ; pour cela, on part de la relation $V = \frac{nRT}{P}$.

$$\alpha_{GP} = \frac{P}{nRT} \left(\frac{\partial \frac{nRT}{P}}{\partial T} \right)_{P,n} = \frac{P}{nRT} \cdot \frac{nR}{P} = \frac{1}{T}$$

$$\chi_{T,GP} = -\frac{P}{nRT} \left(\frac{\partial \frac{nRT}{P}}{\partial P} \right)_{T,n} = -\frac{P}{nRT} \cdot \left(-\frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{1}{P}$$

Avant de terminer sur le modèle du gaz parfait, une remarque sur le modèle de Maxwell : celui-ci est allé plus loin, en considérant que les molécules entrent parfois en collision, bien que rarement ; en modélisant simplement ces collisions comme des collisions élastiques entre des boules rigides, il a montré que la répartition des vitesses des molécules dans le gaz évolue rapidement vers un état stationnaire où la probabilité pour une molécule d'avoir la vitesse v est donnée par

$$p(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{M}{RT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

Cette répartition peut se voir sur la figure T3.3 dans lequel on a simulé la répartition des vitesses d'un gaz de 3000 particules enfermées dans une boîte, ayant au départ uniquement des vitesses $\pm v^* \vec{e}_x$, et subissant des chocs aléatoires entre elles respectant les lois de la physique des chocs. Au bout de quelques étapes de simulation, on voit la répartition des vitesses qui se rapproche de la loi théorique de Maxwell.

À partir de cette loi, on peut retrouver la pression cinétique, mais aussi d'autres propriétés intéressantes qui dépassent le cadre de ce cours.

Enfin, on peut signaler que des modèles ont été proposés pour modéliser mieux les gaz réels. Ces modèles ajoutent essentiellement deux ingrédients au modèle gaz parfait :

- le fait que chaque molécule n'est pas ponctuelle mais a un petit volume, et que plusieurs molécules ne peuvent pas occuper le même volume
- le fait que les molécules s'attirent faiblement selon des forces de Van der Waals

Le modèle le plus simple, modélisant les molécules par des sphères dures isotrope, est le modèle de Van der Waals, dont l'équation d'état s'écrit

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

avec a et b deux constantes qui dépendent du gaz : a traduit l'attraction entre les molécules et b le volume qu'elles occupent.



FIGURE T3.3 – Simulation de la convergence de la répartition des vitesses des molécules dans un gaz parfait.

A.2. Modèle pour des mélanges de gaz

Les mélanges de gaz sont très importants, car le gaz qu'on va le plus étudier est l'air, qui est un mélange essentiellement de 78% de diazote et 21% de dioxygène (plus 1% d'argon et des traces de vapeur d'eau, gaz rares, dioxyde de carbone,...) Ces pourcentages représentent des fractions molaires, dont il convient de donner la définition.

Définition : Fraction (ou titre) molaire

Si un système contient différents constituants, la fraction (ou titre) molaire du constituant i est définie par

$$x_i = \frac{n_i}{\sum_k n_k} \quad (\text{T3.4})$$

où n_k représente la quantité de matière du k -ième constituant.

Définition : Fraction (ou titre) massique

Si un système contient différents constituants, la fraction (ou titre) massique du constituant i est définie par

$$w_i = \frac{m_i}{\sum_k m_k} \quad (\text{T3.5})$$

où m_k représente la quantité de matière du k -ième constituant.

On considère donc un mélange de gaz : dans un même volume V , à la même température T , on a plusieurs constituants sous forme gazeuse (figure T3.4).

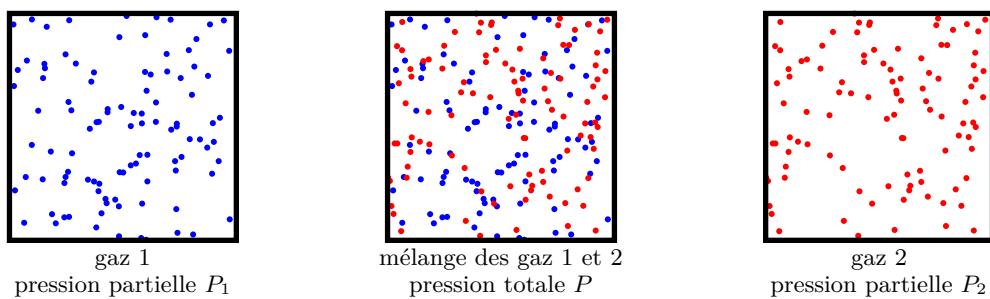


FIGURE T3.4 – Mélange de gaz.

Dans la figure T3.4, au centre, les molécules bleues et rouges sont mélangées. Elles bougent et rebondissent sur les parois ; la pression P subie par la paroi est donc la somme d'une contribution venant des molécules bleues et d'une contribution venant des molécules rouges.

On ne peut pas, en pratique, séparer les molécules rouges des bleues, mais on peut imaginer une expérience où on prend le même volume V , et on le remplit uniquement avec le gaz 1, à la même température et en même quantité que dans le mélange ; on peut alors mesurer sa pression, qu'on appelle la pression partielle de ce gaz.

Définition : Pression partielle d'un gaz dans un mélange

La pression partielle P_i du constituant i dans un mélange est la pression qu'aurait le constituant s'il était seul dans les mêmes conditions de température et de volume.

On peut, de même définir la pression partielle du gaz 2. Alors, quand on les met les deux ensemble, deux choses peuvent se passer :

- soit les deux gaz n'interagissent pas entre eux : les molécules rouges et bleues s'ignorent, et la force totale sur une paroi est la somme des forces issues des deux gaz ; autrement dit, les pressions s'ajoutent simplement ;
 - soit les deux gaz interagissent entre eux, et se perturbent l'un l'autre, de sorte que la pression de chaque gaz est modifiée par la présence de l'autre.

Le premier cas correspond à ce qu'on appelle un mélange idéal.

Propriété : Pression d'un mélange idéal de gaz

Dans un mélange idéal de gaz, les gaz sont indépendants les uns des autres. La pression totale est alors simplement la somme des pressions partielles de tous les constituants : $P = \sum_i P_i$

Remarque : Tout mélange de gaz se comporte comme un mélange idéal lorsque sa densité tend vers 0.

Propriété : Pression d'un mélange idéal de gaz parfaits

Dans un mélange idéal de gaz parfaits,

$$PV = \sum_k n_k RT = n_{total} RT \quad (\text{T3.6})$$

autrement dit, un mélange idéal de gaz parfaits se comporte comme un gaz parfait.

Dans ce cas, la pression partielle du constituant i vaut $P_i = x_i P$

Démonstration

Pour un mélange idéal, $PV = \sum_k P_k V$. Or les gaz étant parfaits, on peut écrire la loi du GP : $P_k V = n_k RT$ avec n_k la quantité de matière du constituant k . Donc $PV = \sum_k n_k RT$.

On peut donc écrire $P_i V = n_i RT$ et $PV = \sum_k n_k RT$. En divisant terme à terme les deux équations, on obtient $\frac{P_i}{P} = \frac{n_i}{\sum_k n_k} = x_i$.

Remarque : En appliquant ce résultat à l'air, on peut montrer facilement ce résultat qu'il est bon de retenir : 1 mol d'air à 20 °C sous 1 bar occupe un volume égal à 24,3 L.

Exemple : Pression partielle des constituants de l'air

Calculez la pression partielle du diazote et du dioxygène dans l'air à la pression de 1 bar.

$P_{\text{V}_1} = x_{\text{N}_2} P = 0.78 \text{ bar}$ at $P_{\text{C}_1} = x_{\text{C}_1} P = 0.21 \text{ bar}$

T3.B. Énergie des gaz

B.1. Énergie d'un gaz parfait

On a déjà vu un terme d'énergie interne d'un gaz : l'énergie cinétique d'agitation des atomes. On a vu que l'énergie cinétique d'agitation de n moles d'un gaz parfait vaut $E_c = \frac{3}{2}nRT$. Dans le cas d'un gaz parfait monoatomique, c'est-à-dire composé d'un seul atome, c'est la seule source d'énergie interne.

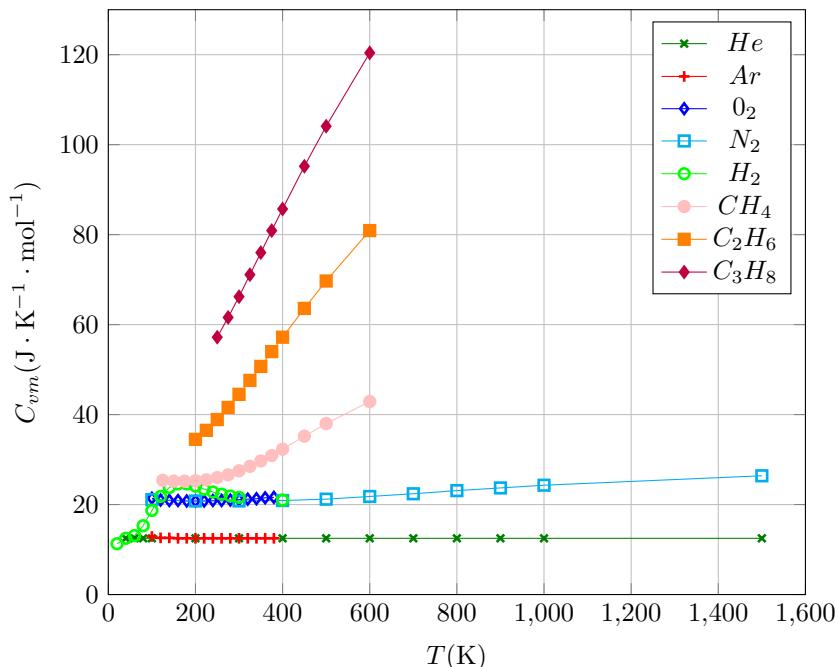
Propriété : Énergie interne d'un GP monoatomique

L'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique (gaz rares : He, Ar, ...) vaut $U = \frac{3}{2}nRT$: elle ne dépend que de la température, et sa capacité thermique molaire vaut $C_{vm} = \frac{3}{2}R = 12,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Si on prend un gaz formé de molécules à plusieurs atomes, d'autres termes vont s'ajouter dans l'énergie interne :

- les différents atomes dans une molécule peuvent vibrer, ce qui ajoute de l'*énergie cinétique de vibration*
- les liaisons entre les atomes d'une molécule sont conservatives, ce qui amène une *énergie potentielle de vibration*
- les molécules sont susceptibles de tourner, ce qui amène une *énergie cinétique de rotation*

Le plus simple est alors de mesurer les capacités de différents gaz. Des résultats partiels montrés figure T3.5, couplés à des calculs compliqués de physique statistique, permettent de proposer les résultats suivants :



Démonstration

$H = U + nRT$ mais il faut faire attention avant de dériver, car le C_v est une dérivée à volume constant et le C_p une dérivée à pression constante. Néanmoins, pour un GP, H et U ne dépendent que de la température, donc les dérivées partielles deviennent des dérivées droites : $C_p = \frac{dH}{dT}$ et $C_v = \frac{dU}{dT}$. Donc en dérivant l'équation du départ : $\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{d(nRT)}{dT}$ soit $C_p = C_v + nR$. On divise par n pour faire apparaître les capacités molaires.

C'est alors l'occasion de redéfinir plus exactement un coefficient déjà vu :

Définition : Coefficient isentropique

Le coefficient isentropique d'un gaz est défini par la relation

$$\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} \quad (\text{T3.8})$$

Pour un GP monoatomique : $\gamma = \frac{5}{3} = 1,67$; pour un GP diatomique : $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$; pour un GP autre, $\gamma \rightarrow 1$ lorsque le nombre d'atomes augmente.

Démonstration

- pour un GP monoatomique : $C_{vm} = \frac{3}{2}R$ et $C_{pm} = \frac{5}{2}R$ donc $\gamma = \frac{5}{3}$
- pour un GP diatomique : $C_{vm} = \frac{5}{2}R$ et $C_{pm} = \frac{7}{2}R$ donc $\gamma = \frac{7}{5}$
- si le nombre d'atomes augmente, C_{vm} augmente et $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{vm}}$ tend vers 1

Exemple : Expression des capacités thermiques en fonction de R et γ À connaître

Exprimez les capacités molaires C_{vm} et C_{pm} d'un gaz parfait en fonction uniquement de R et de son coefficient isentropique γ

On a vu deux relations : $\begin{cases} C_{pm} = C_{vm} + R & (\text{relation de Mayer}) \\ \gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} & (\text{définition de } \gamma) \end{cases}$

On en tire $C_{pm} = \gamma C_{vm}$ donc $\gamma C_{vm} = C_{vm} + R$ d'où $C_{vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$ puis $C_{pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

Vérifions avec un GP diatomique : $\gamma = 1,4$ d'où $C_{vm} = \frac{R}{1,4-1} = 2,5R$ et $C_{pm} = \frac{1,4R}{1,4-1} = 3,5R$.

B.2. Énergie d'un mélange idéal de gaz

Propriété : Mélange idéal de gaz

L'énergie interne d'un mélange idéal de gaz est la somme des énergies internes de chacun de ses constituants. Par conséquent :

- le C_v d'un mélange idéal de gaz est la somme des C_v de chacun de ses constituants : $C_v = \sum_k C_{v,k}$
- le C_{vm} d'un mélange idéal de gaz est la somme des C_{vm} de chacun de ses constituants pondérés par leur fraction molaire : $C_{vm} = \sum_k x_k C_{vm,k}$
- le c_v d'un mélange idéal de gaz est la somme des c_v de chacun de ses constituants pondérés par leur fraction massique : $c_v = \sum_k w_k c_{v,k}$

Démonstration

Si $U = \sum_k U_k$ alors en dérivant $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,n} = \sum_k \left(\frac{\partial U_k}{\partial T}\right)_{V,n}$ donc on a bien $C_v = \sum_k C_{v,k}$.

On peut donc écrire $n_{total} \cdot C_{vm} = \sum_k n_k C_{vm,k}$ avec des notations évidentes. En divisant par n_{total} on obtient bien $C_{vm} = \sum_k x_k C_{vm,k}$.

On procède de même pour les capacités massiques.

Remarque : L'air est souvent considéré comme un mélange idéal de GP ; il y a 78 % de diazote ($C_{vm,N_2} = \frac{5}{2}R$), 21 % de dioxygène ($C_{vm,O_2} = \frac{5}{2}R$) et 1 % d'argon ($C_{vm} = \frac{3}{2}R$) donc $C_{vm} = 0,78 \times \frac{5}{2}R + 0,21 \times \frac{5}{2}R + 0,01 \times \frac{3}{2}R \approx \frac{5}{2}R$: on considérera donc le plus souvent l'air comme un GP diatomique avec $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

Exemple : Chauffage de la salle de cours

Quelle doit être la variation d'énergie interne de l'air de la salle de cours, à la rentrée des vacances d'hiver, pour augmenter sa température depuis 5°C jusqu'à 19°C ?



Si on considère l'air comme un GP diatomique, on connaît son $C_{vm} = \frac{5}{2}R$. Donc $C_v = n.C_{vm}$, il faut donc calculer le nombre de moles d'air n . Pour cela, on utilise la loi du GP : $n = \frac{PV}{RT}$. On prend environ 1 bar = 1×10^5 Pa pour la pression, $273 + 12 = 285$ K pour la température (en moyenne, on calcule un ODG) et $V = 8 \times 10 \times 3 = 240 \text{ m}^3$ environ (à la louche). On trouve donc $n = 11\,000 \text{ mol}$ d'où on tire $C_v = n.C_{vm} = 211 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$. Pour éléver la température de $+14^\circ\text{C}$ il faut que l'énergie interne varie donc de $14.C_v = 3,0 \text{ MJJ}$ ce qui s'obtient en faisant réfléchir 45 taupins pendant 15 min ; sauf qu'il faut aussi chauffer les murs, ce qui est beaucoup plus long...

Remarque : Un modèle un peu plus poussé d'un gaz est le modèle de Van der Waals. Son énergie ne dépend pas que de la température, on peut l'écrire $U_{VdW}(T, V) = U_{GP}(T) - \frac{n^2 a}{V}$ où $U_{GP}(T)$ désigne l'énergie interne du gaz parfait et a est le coefficient qui est déjà apparu dans l'équation d'état du modèle de Van der Waals.

Propriété : Enthalpie d'un mélange idéal de GP

Pour un mélange idéal de gaz, l'enthalpie est la somme des enthalpies des constituants : $H = \sum_i H_i$.
On en déduit que $C_p = \sum_i C_{p,i}$ puis $c_p = \sum_i w_i c_{p,i}$ et $C_{pm} = \sum_i x_i C_{pm,i}$

Démonstration

Si $H = \sum_i H_i$, il suffit de dériver par rapport à T pour obtenir $C_p = \sum_i C_{p,i}$. On en tire $m_{total}c_p = \sum_i m_i c_{p,i}$ ce qui fait apparaître les w_i en divisant par m_{total} .

Remarque : Pour l'enthalpie aussi, on considérera le plus souvent l'air comme un gaz parfait diatomique.

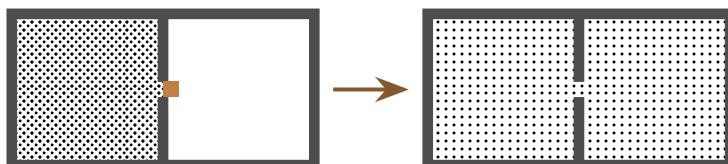
B.3. Détente de Joule-Gay Lussac

La détente de Joule-Gay Lussac est un exemple historique très important à connaître.

Exemple : Détente de Joule-Gay Lussac

À connaître

On partage une boîte indéformable calorifugée en deux compartiments séparés par un robinet ou un bouchon. Dans l'un des compartiments on met un gaz, dans l'autre, on fait le vide. C'est l'état initial i .
On ouvre alors le robinet ou le bouchon : le gaz se détend et occupe tout l'espace disponible : il atteint rapidement l'état final f .



Montrez que l'énergie interne U du gaz est constante lors de cette détente (on dit qu'elle est iso-énergétique).

Il existe deux façons de répondre à cette question :

- Méthode 1 : on prend comme système le gaz. Alors en lui appliquant le premier principe entre l'état initial et l'état final, on obtient $\Delta U_{gaz} = W + Q$ (il n'y a aucune énergie macroscopique ici) par le premier principe. Or $Q = 0$ car le système est calorifugé, et $W = -\int P_{ext} \cdot dV = -\int 0 \cdot dV = 0$ car ici le gaz gagne du volume sur le vide dont la pression est nulle^b. On trouve donc $\Delta U_{gaz} = 0$
- Méthode 2 : on prend comme système le contenu de la boîte, c'est à dire {le gaz + le vide}. Le premier principe appliqué entre l'état initial et l'état final indique que $\Delta U_{gaz} + \Delta U_{vide} = W + Q$. Or $Q = 0$ car la boîte est calorifugée, et $W = 0$ car la boîte est indéformable. De plus, le vide n'a pas d'énergie^b donc

$\Delta U_{vide} = 0$. On en déduit donc que $\Delta U_{gaz} = 0$.

- a. Sauf en mécanique quantique, cf. la force de Casimir !
- b. Sauf, encore, en mécanique quantique.

Joule et Gay Lussac ont mis au point cette expérience et ont testé plein de gaz. Ils ont mesuré les températures finales : pour certains gaz, elle était identique à la température initiale, pour d'autres elle avait baissé. Ils ont alors énoncé une propriété expérimentale connue sous le nom de

Définition : Première loi de Joule

On dit qu'un fluide vérifie la première loi de Joule si sa température ne varie pas lorsqu'il subit une détente de Joule-Gay Lussac.

Remarque : Pour un GP dont l'énergie interne ne dépend que de T , on peut écrire $\Delta U = C_v \cdot \Delta T$. Donc $\Delta U = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$: si un gaz se comporte comme un gaz parfait, alors il vérifie la première loi de Joule ; mais la **réciproque est fausse**, ce qui a poussé Joule à tester une autre détente, la détente de Joule-Thomson qu'on verra plus tard.

T3.C. Étude des transformations classiques

Les résultats de cette section sont essentiels à connaître.

Commençons par quelques rappels :

Définition : Transformation quasi-statique

Une transformation est dite quasi-statique si elle est effectuée suffisamment lentement pour que le système soit quasiment homogène à chaque instant. On dit parfois qu'on a une succession d'états d'équilibre du système, mais il n'y a pas forcément équilibre avec l'extérieur.

Définition : Transformation réversible

Une transformation quasi-statique est réversible mécaniquement si le système est indéformable ou bien si, à chaque instant, la différence de pression (apparente) entre les deux côtés de toutes les parois mobiles est négligeable : $V = cst$ ou $P \approx P_{ext}$.

Une transformation quasi-statique est réversible thermiquement si elle est adiabatique ou bien si, à chaque instant, la différence de température entre les deux côtés de toutes les parois diathermiques est négligeable : $Q = 0$ ou $T \approx T_{ext}$.

C.1. Transformations idéales à connaître

Dans les exercices cette année, on modélisera la majorité des transformations par une des quatre transformations idéales : isochore, mono/isobare, mono/therme et adiabatique réversible. Les résultats seront toujours donnés dans l'hypothèse où il n'y a pas d'énergie macroscopique ; s'il y en a, il suffit de rajouter ΔE_{macro} .

Certaines des transformations ci-dessous ont déjà été vues ; ce ne sont que des rappels. Mais pour d'autres, dans le cas des gaz parfaits, il y a des propriétés supplémentaires à connaître.

Définition : Transformation isochore

Une transformation **isochore** est une transformation à volume constant. On a alors $W = 0$ et $Q = \Delta U$.

Démonstration

Si $V = cst$ alors $dV = 0$ donc $W = -\int P_{ext} \cdot dV = 0$

Définition : Transformation monobare/isobare

Une transformation **monobare** est telle que $P_{ext} = cst$. On a alors $W = -P_{ext} \cdot \Delta V$ et $Q = \Delta U + P_{ext} \cdot \Delta V$.

Si en plus elle est réversible mécaniquement ($P = P_{ext} = cst$), on dit qu'elle est **isobare**. On a alors $W = -P \cdot \Delta V$.

Démonstration

Si $P_{ext} = cst$ alors $W = -P_{ext} \int dV = -P_{ext} \cdot \Delta V$

Définition : Transformation monotherme/isotherme

Une transformation **monotherme** est une transformation à $T_{ext} = cst$.

Si en plus elle est réversible thermiquement ($T = T_{ext} = cst$) et mécaniquement ($P = P_{ext}$), elle est **isotherme**.

Dans le cas général, on n'a aucune propriété permettant de calculer W et Q .

Dans le cas d'un gaz parfait subissant une transformation isotherme, on a $\Delta U = 0$ et

$$W = -Q = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = +nRT \ln \frac{P_f}{P_i} \quad (\text{T3.9})$$

Démonstration

Pour un GP, $\Delta U = C_v \Delta T = 0$ donc $W = -Q$. Notons i l'état initial et f l'état final ; calculons alors le travail de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} W &= - \int_i^f P_{ext} dV \\ &= - \int_i^f P dV \text{ car } P = P_{ext} \\ &= - \int_i^f \frac{nRT}{V} dV \text{ par la loi du GP} \\ &= -nRT \int_i^f \frac{dV}{V} \text{ car } T = cst \\ &= -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_i^f P_{ext} dV \\ &= - \int_i^f P dV \text{ car } P = P_{ext} \\ &= - \int_i^f P d\left(\frac{nRT}{P}\right) \text{ par la loi du GP} \\ &= - \int_i^f nRT P \left(-\frac{dP}{P^2}\right) \text{ par la loi du GP} \\ &= +nRT \int_i^f \frac{dP}{P} \text{ car } T = cst \\ &= +nRT \ln \frac{P_f}{P_i} \end{aligned}$$

Exemple : Travail à fournir pour comprimer un GP

On dispose de 15 mol de GP à 20 °C sous 1 bar. On les comprime de façon isotherme jusqu'à 5 bar. Calculer le travail et la chaleur reçus par le gaz.

Ici le plus rapide consiste à utiliser la formule avec les pressions : $W = nRT \ln \frac{P_f}{P_i} = 15 \times 8,314 \times 293 \times \ln \left(\frac{5}{1}\right) = 58,8 \text{ kJ}$ et $Q = -58,8 \text{ kJ}$.

Si on veut utiliser l'autre formule, il faut d'abord calculer $V_i = 365 \text{ L}$ et $V_f = 73 \text{ L}$ puis on retrouve le même résultat.

Remarque : Quand on comprime un gaz, il s'échauffe. Une compression isotherme consiste à le comprimer très très lentement, de telle sorte qu'il ait le temps de se refroidir et de rester à température constante. Il perd donc de la chaleur, d'où le signe négatif de Q dans l'exemple précédent.

Remarque : Attention à la confusion TRÈS GRAVE entre isotherme et adiabatique. Quand on entend le mot isotherme, on pense à la «bouteille isotherme», celle qui garde notre boisson chaude ou froide, ça dépend. Or dans le cas d'un liquide de volume constant, $W = 0$ (car $V = cst$) et $\Delta U = C_v \cdot \Delta T = Q$ donc **dans ce cas-là seulement** isotherme et adiabatique sont équivalents. Mais pour un gaz, c'est **FAUX** car le volume du gaz varie quand sa température varie, donc $W \neq 0$ donc $Q \neq 0$. L'affirmation «c'est isotherme donc $Q = 0$ » est la PIRE ÂNERIE qu'on puisse dire en thermodynamique aux concours.

Définition : Transformation adiabatique réversible

Une transformation adiabatique réversible est, comme le dirait M. de La Palisse, une transformation qui est adiabatique et réversible : $Q = 0$ donc $W = \Delta U$, $P = P_{ext}$ et $T = T_{ext}$

Bon, d'accord, cette définition ne sert à rien. Ce qui est important, c'est la loi que vérifie un GP soumis à une transformation adiabatique et réversible.

Propriété : Lois de Laplace

Lorsqu'un gaz parfait subit une transformation adiabatique et réversible (AR), il vérifie les lois de Laplace :

$$P \cdot V^\gamma = cst \quad (\text{T3.10a})$$

$$V^{\gamma-1} \cdot T = cst \quad (\text{T3.10b})$$

$$P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma = cst \quad (\text{T3.10c})$$

avec $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ le **coefficient isentropique du gaz**.

Démonstration

La bonne démonstration des lois de Laplace se fait avec l'aide d'un outil qu'on n'a pas pour le moment : l'entropie. On va ici faire une démonstration un peu moins bonne, et qui ne sera pas à connaître.

Considérons n moles d'un GP de capacité thermique molaire C_{vm} , subissant une transformation adiabatique et réversible infinitésimale. Le premier principe peut alors s'écrire $dU = \delta W + \delta Q$. Or $dU = n \cdot C_{vm} \cdot dT$ où dT est sa variation de température ; $\delta W = -P_{ext} \cdot dV = -P \cdot dV$ car $P = P_{ext}$, et $\delta Q = 0$ car la transformation est adiabatique. Donc $n \cdot C_{vm} \cdot dT = -P \cdot dV$. Or, par la loi du GP : $P = \frac{nRT}{V}$ donc $n \cdot C_{vm} \cdot dT = -nRT \frac{dV}{V}$ soit encore $\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_{vm}} \frac{dV}{V}$. En intégrant entre un état initial i et un état final f , on obtient $\ln \frac{T_f}{T_i} = -\frac{R}{C_{vm}} \ln \frac{V_f}{V_i} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V_f}{V_i} = -\ln \frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}}$ ou encore $\ln \frac{T_f}{T_i} + \ln \frac{V_f^{\gamma-1}}{V_i^{\gamma-1}} = 0$. On met tout ensemble : $\ln \frac{V_f^{\gamma-1} T_f}{V_i^{\gamma-1} T_i} = 0$ soit $V_f^{\gamma-1} T_f = V_i^{\gamma-1} T_i$.

On peut alors écrire par la loi du GP : $T_i = \frac{P_i V_i}{nR}$ et $T_f = \frac{P_f V_f}{nR}$ donc $V_f^{\gamma-1} \frac{P_f V_f}{nR} = V_i^{\gamma-1} \frac{P_i V_i}{nR}$ d'où on tire $P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma$.

Enfin en écrivant $V = \frac{nRT}{P}$ on trouve de même $P_f^{1-\gamma} \cdot T_f^\gamma = P_i^{1-\gamma} \cdot T_i^\gamma$.

Remarque : En pratique, on retient la loi $P \cdot V^\gamma = cst$ et on retrouve les autres grâce à la loi du GP.

Remarque : Pour calculer le travail reçu lors d'une AR, on ne calcule surtout pas $W = -\int P \cdot dV$, c'est très difficile. On utilise plutôt le premier principe : $W = \Delta U = C_v \cdot \Delta T$ car $Q = 0$.

Exemple : Compression AR de l'air

On prend 15 mol d'air (GP diatomique) à 20 °C sous 1 bar, et on les comprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à 5 bar.

1. Calculez le volume initial.
2. Calculez le volume final et la température finale.
3. Calculez le travail reçu par le gaz.

1. Loi du GP : $V_i = 368 \text{ L}$

2. La loi de Laplace s'écrit $P_f \cdot V_f^{1,4} = P_i \cdot V_i^{1,4}$. Il faut être soigneux pour isoler V_f . On peut écrire $V_f^{1,4} = \frac{P_i V_i^{1,4}}{P_f}$. On peut en déduire que $V_f = \frac{P_i^{1,4} \cdot (V_i^{1,4})^{1,4}}{P_f^{1,4}}$...je vois ça dans des copies, et inutile de vous dire que le résultat numérique est souvent faux. Donc prenez les bonnes habitudes :

- annulez les puissances sur V_i , car $(V_i^{1,4})^{\frac{1}{1,4}} = V_i$
- factorisez les pressions en un seul rapport, de cette manière-là vous pouvez même garder les pressions en bar

C'est-à-dire qu'on écrit $V_f = V_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 368 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 116,5 \text{ L}$: attention quand même aux parenthèses sur votre calculatrice, la puissance est prioritaire sur la division, donc $(1/5)^{1/1,4}$ sera compris comme $\frac{(1/5)^1}{1,4}$ ce qui n'est pas ce qu'on cherche.

De même pour la température : $P_f^{1-\gamma} \cdot T_f^\gamma = P_i^{1-\gamma} \cdot T_i^\gamma$ donc $T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 293 \left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{-0,4}{1,4}} = 464 \text{ K} = 191^\circ \text{C}$: c'est logique, un gaz qu'on comprime s'échauffe.

3. Par le premier principe appliquée au gaz durant la transformation : $W = \Delta U - Q = n \cdot C_{vm} \cdot \Delta T$ or $Q = 0$, $C_{vm} = \frac{5}{2} R$ et $n = 15 \text{ mol}$ donc $W = 53,3 \text{ kJ}$

C.2. Diagramme de Watt

Définition : Diagramme de Watt et de Clapeyron

Le diagramme de Watt représente l'évolution quasi-statique d'un système dans le plan (P,V).

Le diagramme de Clapeyron représente l'évolution quasi-statique d'un système dans le plan (P,v) (pour 1 kg).

Propriété : Travail reçu dans le diagramme de Watt/-Clapeyron

Dans le diagramme de Watt (resp. Clapeyron), le travail (resp. travail massique) reçu par le système subissant une transformation réversible mécaniquement se lit comme l'opposé de l'aire sous la courbe si le système se déplace vers la droite, et l'aire sous la courbe s'il se déplace vers la gauche (figure T3.6).

Démonstration

Entre deux états i et f : $W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} dV$. S'il y a réversibilité mécanique alors $P = P_{ext}$ donc $W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$.

- Si $V_f > V_i$ alors l'intégrale représente l'aire sous la courbe, donc W est l'opposé de l'aire sous la courbe
- Si $V_f < V_i$ alors l'intégrale représente l'opposé de l'aire sous la courbe, donc W est l'aire sous la courbe

Remarque : L'hypothèse de réversibilité mécanique est souvent oubliée. En fait, même si elle n'est pas vérifiée, la relation peut quand même être vraie, mais c'est une histoire complexe due à la masse de la paroi mobile.

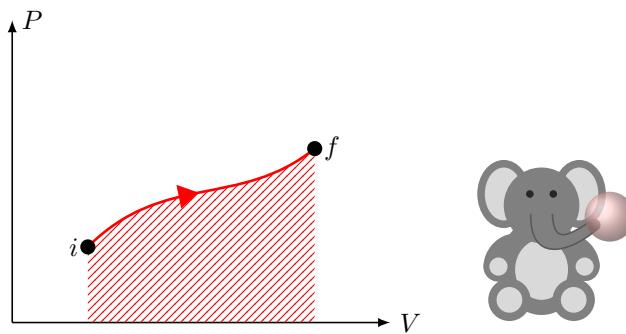


FIGURE T3.6 – Travail d'une transformation dans le diagramme de Watt.

Maintenant, considérons les diagrammes de la figure T3.7, dans laquelle un système décrit un cycle, c'est-à-dire un ensemble de transformations qui le ramènent à son point de départ.

Propriété : Travail reçu au cours d'un cycle dans le diagramme de Watt/Clapeyron

Dans le diagramme de Watt (resp. Clapeyron), le travail (resp. travail massique) reçu par un système au cours d'un cycle réversible mécaniquement est égal :

- à l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens trigonométrique ; dans ce cas, c'est un **cycle récepteur**
- à l'opposé de l'aire du cycle s'il est parcouru dans le sens horaire ; dans ce cas, c'est un **cycle moteur**

Démonstration

Commençons par le diagramme de gauche de la figure T3.7, où le système décrit un cycle $A \rightarrow B \rightarrow A$ dans le sens horaire. Le travail reçu par le système vaut $W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A}$. Or $W_{A \rightarrow B} = -\mathcal{A}_{\text{rouge}}$ et $W_{B \rightarrow A} = \mathcal{A}_{\text{bleu}}$ donc $W = -(\mathcal{A}_{\text{rouge}} - \mathcal{A}_{\text{bleu}}) = -\mathcal{A}_{\text{cycle}}$. Le travail est négatif, donc le système fournit du travail à l'extérieur.

Sur le diagramme de droite de la figure T3.7, le système décrit un cycle $A \rightarrow B \rightarrow A$ dans le sens trigonométrique. Le travail reçu par le système vaut $W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow A}$. Or $W_{B \rightarrow A} = -\mathcal{A}_{\text{bleu}}$ et $W_{A \rightarrow B} = \mathcal{A}_{\text{rouge}}$ donc $W = (\mathcal{A}_{\text{rouge}} - \mathcal{A}_{\text{bleu}}) = +\mathcal{A}_{\text{cycle}}$. Le travail est positif, donc le système reçoit du travail de l'extérieur.

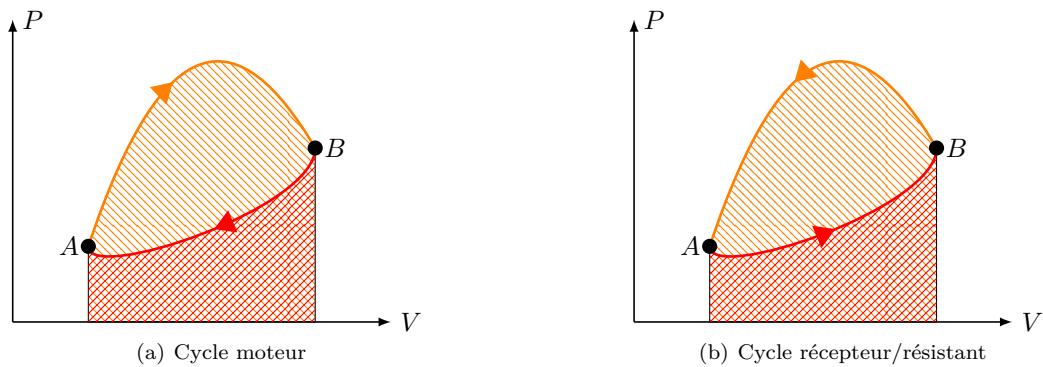


FIGURE T3.7 – Travail d'un cycle dans le diagramme de Watt.

Dans la suite, nous étudierons plusieurs cycles qui seront le plus souvent idéalisés à partir des transformations idéales : isochore, isobare, isotherme et adiabatique réversible. Il faut donc savoir tracer ces 4 transformations principales dans un diagramme de Watt :

Propriété : Transformations idéales dans le diagramme de Watt/Clapeyron

Dans le diagramme de Watt/Clapeyron :

- une isochore $V = cst$ est une droite verticale
 - une isobare $P = cst$ est une droite horizontale
 - une isotherme de GP vérifie $PV = cst$ soit $P = \frac{cst}{V}$; la courbe correspondante est une hyperbole
 - une AR de GP vérifie $P = \frac{cst}{V^\gamma}$; la courbe correspondante est une hyperbole plus penchée que l'isotherme

L'ensemble est résumé sur la figure T3.8.

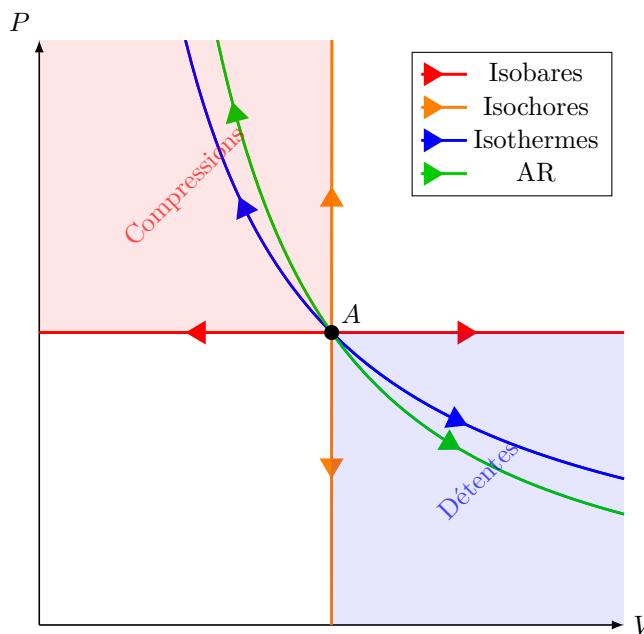


FIGURE T3.8 – Principales transformations d'un GP dans le diagramme de Watt. À partir du point A , on a une compression si on se déplace vers la gauche ou le haut, et une détente si on se déplace vers la droite ou le bas.

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description microscopique et macroscopique d'un système	
Modèle du gaz parfait. Masse volumique, température thermodynamique, pression. Équation d'état du gaz parfait.	Exploiter l'équation d'état du gaz parfait pour décrire le comportement d'un gaz.
Énergie interne du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant du gaz parfait monoatomique. Capacité thermique à volume constant d'un gaz considéré comme parfait.	Exploiter l'expression de la variation de l'énergie interne d'un gaz considéré comme parfait.
Bilan d'énergie pour un système thermodynamique	
Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait.	Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne.
Loi de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.

Thermodynamique des gaz

QCMs

réponses page 500

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

L'énergie cinétique moyenne d'un gaz parfait vaut

- | | |
|-----------------------|------------|
| (a). $\frac{1}{2}nRT$ | (b). nRT |
| (c). $\frac{3}{2}nRT$ | (d). 0 |

Q2.

L'équation d'état du gaz parfait est :

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a). $PV = nRV$ | (b). $P = nRT$ |
| (c). $PT = nRV$ | (d). $PV = nRT$ |

Q3.

Dans un mélange idéal de gaz de pression totale P , la pression partielle d'un constituant de fraction molaire x_i vaut :

- | | |
|------------------------|--------------------|
| (a). $e^{x_i} \cdot P$ | (b). P |
| (c). $P - x_i$ | (d). $x_i \cdot P$ |

Q4.

Le C_{vm} de l'air est souvent pris égal à $\frac{3}{2}R$.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q5.

Lors d'une détente de Joule-Gay Lussac :

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (a). $\Delta P = 0$ | (b). $\Delta T = 0$ |
| (c). $\Delta V = 0$ | (d). $\Delta U = 0$ |

Q6.

Un cycle thermodynamique est moteur si sa courbe dans le diagramme de Watt tourne dans le sens :

- | | |
|--------------|----------------------|
| (a). Horaire | (b). Trigonométrique |
|--------------|----------------------|

Q7.

Pour une transformation isotherme, $Q = 0$.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q8.

Soit un GP de coefficient isentropique $\gamma = 1,2$. Alors :

- | | |
|--|--|
| (a). $C_{vm} = 20,8 \text{ joule/K/mol}$ | (b). $C_{vm} = 12,5 \text{ joule/K/mol}$ |
| (c). $C_{vm} = 41,6 \text{ joule/K/mol}$ | (d). $C_{vm} = 49,9 \text{ joule/K/mol}$ |

 QCM : Loi du gaz parfait

Dans ce quiz, tous les gaz sont considérés comme parfaits.

Q9.

Quel volume occupe 3 mol de gaz à 0 °C sous 1 bar ?

- | | |
|--------------------------|-------------|
| (a). 0 m ³ | (b). 0,15 L |
| (c). 6760 m ³ | (d). 67,6 L |

Q10.

On veut faire entrer 1 kg de vapeur d'eau (masse molaire 18 g · mol⁻¹) à 250 °C dans un volume de 0,8 m³. À quelle pression doit-on la compresser ?

- | | |
|--------------|---------------|
| (a). 3,0 bar | (b). 2400 Pa |
| (c). 2,4 bar | (d). 1,44 bar |

Q11.

200 g d'air (masse molaire 29 g · mol⁻¹) occupent 18 L sous 10 bar ; que vaut la température de l'air ?

- | | |
|------------|------------|
| (a). 41 °C | (b). 314 K |
| (c). 41 K | (d). 65 °C |

Q12.

Une enceinte de volume 200 L contient du diazote (masse molaire 28 g · mol⁻¹) à -40 °C sous 3 bar. Quelle est la masse de diazote enfermée ?

- | | |
|--------------|------------|
| (a). 31 g | (b). 867 g |
| (c). 1,15 kg | (d). 31 kg |

QCM : Application des lois de Laplace

On travaille dans ce QCM sur des gaz modélisés comme un gaz parfait et subissant des transformations adiabatiques réversibles. On rappelle que le coefficient isentropique vaut $\gamma = 1,67$ pour un GP monoatomique et $\gamma = 1,4$ pour un GP diatomique.

Q13.

On comprime 20 L d'un GP monoatomique pris sous 1 bar de façon adiabatique et réversible jusqu'à une pression de 5 bar. Le volume final vaut :

- | | |
|-------------|------------|
| (a). 52,5 L | (b). 4,0 L |
| (c). 1,4 L | (d). 7,6 L |

Q14.

On comprime de façon adiabatique et réversible 24 L d'un GP diatomique à 300 K jusqu'à un volume de 13 L. La température finale vaut :

- | | |
|------------|------------|
| (a). 708 K | (b). 235 K |
| (c). 383 K | (d). 465 K |

Q15.

On détend de façon adiabatique et réversible 2 L d'un GP diatomique à 12 °C jusqu'à un volume de 9 L. La température finale vaut :

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). 5,4 °C | (b). 21,9 °C |
| (c). -117 °C | (d). 6,6 °C |

Q16.

On détend de façon adiabatique et réversible un GP monoatomique à 25 °C sous 1 bar, jusqu'à une température de -14 °C. La pression finale vaut :

- | | |
|---------------|---------------|
| (a). 0,23 bar | (b). 0,70 bar |
| (c). 0,54 bar | (d). 631 Pa |

Q17.

On comprime de façon adiabatique et réversible un GP diatomique de masse volumique $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ sous 1 bar, jusqu'à une pression de 5 bar. La masse volumique finale vaut :

- (a). $0,41 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (b). $12,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 (c). $4,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (d). $6,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

QCM : Travail des forces de pression

Q18.

Un cylindre contient un gaz parfait diatomique à 50°C sous 1 bar ; il occupe 600 L. On le comprime de façon monobare sous 5 bar jusqu'à 120 L. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

- (a). 240 kJ (b). 435 kJ
 (c). 720 kJ (d). 97 kJ

Q19.

Un cylindre contient 3 mol d'un gaz parfait diatomique à 200 K ; il occupe 17 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à 40 L. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

- (a). $-6,4 \text{ kJ}$ (b). $-4,3 \text{ kJ}$
 (c). $-21,2 \text{ J}$ (d). On manque de données

Q20.

Un cylindre contient un gaz parfait à 170 K ; il occupe 11 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à 14 L. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

- (a). -510 J (b). On manque de données
 (c). 510 J (d). -850 J

Q21.

Un cylindre contient un gaz parfait monoatomique à 100°C sous 2 bar ; il occupe 32 L. On le détend de façon isotherme jusqu'à une pression de 1 bar. Le travail reçu par le gaz de la part des forces de pression vaut :

- (a). $4,4 \text{ kJ}$ (b). $-4,4 \text{ kJ}$
 (c). On manque de données (d). $-12,8 \text{ kJ}$

Q22.

7 mol de gaz parfait diatomique subissent une détente adiabatique et réversible qui les amènent de 130°C à 63°C . Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

- (a). -661 J (b). On manque de données
 (c). $-7,4 \text{ kJ}$ (d). $-14,1 \text{ kJ}$

Q23.

1 mol de gaz parfait monatomique subit une compression adiabatique et réversible qui l'amène de 30°C sous 1 bar jusqu'à 4 bar. Le travail reçu par le système de la part des forces de pression vaut :

- (a). $2,8 \text{ kJ}$ (b). On manque de données
 (c). 983 J (d). $7,2 \text{ kJ}$

Thermodynamique des gaz

Exercices

réponses page 501

Exercice T3.1 : Air sec [*]

L'air sec est un gaz composé majoritairement de diazote (pourcentage molaire : 78 %), de dioxygène (21 %) et d'argon (1 %). *Données* : $M_N = 14,01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_O = 16,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Ar} = 39,95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Calculez la masse molaire moyenne de l'air sec.
- Calculez la pression partielle des trois principaux gaz dans une atmosphère à $P = 1,013 \text{ bar}$ en supposant que l'air est un mélange idéal de gaz parfaits.
- Calculez le pourcentage massique de ces trois gaz.

Exercice T3.2 : Détentes et compressions d'un gaz [**]

On enferme 1 mole de méthane gazeux dans une enceinte de volume initial $V_0 = 20 \text{ L}$, et on lui fait subir des compressions et des détentes. On propose pour ce gaz deux modélisations différentes :

- une modélisation très simpliste : le gaz parfait, dont la capacité thermique est prise constante et égale à $C_{vm} = 27 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; on notera $U_{GP}(T)$ son énergie interne.
- une modélisation plus élaborée : le gaz de Van der Waals; on a alors les deux lois : $(P - \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ et $U = U_{GP}(T) - \frac{a}{V}$ avec $a = 2,303 \text{ bar} \cdot \text{L}^{-2}$ et $b = 0,0431 \text{ L}$

- Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz si sa température diminue de 7°C sans changement de volume.
- Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz s'il subit une détente qui quadruple son volume sans changer la température.
- Calculez, avec les deux modèles, la variation d'énergie interne du gaz s'il subit une compression au cours de laquelle son volume diminue de 30 % tandis que sa température augmente de 20 K.
- Calculez, avec les deux modèles, la variation de température du gaz si on lui fait subir une détente où son volume est doublé, tandis que son énergie interne ne varie pas.

Exercice T3.3 : Tables thermodynamiques de la vapeur d'eau [**]

Exercice pas vraiment fondamental apprenant à utiliser des tables thermodynamiques.

- Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V_m et l'énergie interne molaire U_m de la vapeur d'eau à la température $\theta = 500^\circ\text{C}$ pour différentes valeurs de la pression p . On rappelle que $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$p(\text{bar})$	1	10	20	40	70	100
$V_m(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$	$6,43 \times 10^{-2}$	$6,37 \times 10^{-3}$	$3,17 \times 10^{-3}$	$1,56 \times 10^{-3}$	$8,68 \times 10^{-4}$	$5,90 \times 10^{-4}$
$U_m(\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	56,33	56,33	56,08	55,77	55,47	54,78

Justifiez sans calculs que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un gaz parfait.

On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour une mole :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \text{ et } U_m = U_{m,GP}(T) - \frac{a}{V}$$

Calculez le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $p = 1 \text{ bar}$ et à $p = 100 \text{ bar}$. Calculez b en utilisant l'état à $p = 100 \text{ bar}$. Quelles valeurs donne alors le modèle pour U_m à $p = 40 \text{ bar}$? Quelle température obtient-on avec le modèle pour l'état $p = 40 \text{ bar}$ et $V_m = 1,56 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$? Conclusion sur la validité du modèle ?

- On réalise une détente isochore, c'est-à-dire à volume constant, d'une mole de vapeur d'eau, de l'état initial I ($\theta_I = 500^\circ\text{C}$, $p_I = 100 \text{ bar}$) jusqu'à l'état final F ($p_F = 70 \text{ bar}$, $\theta_F = ?$). Le tableau ci-dessous donne le volume molaire V_m et l'énergie interne molaire U_m de la vapeur d'eau sous $p = 70 \text{ bar}$, pour différentes valeurs de θ (en $^\circ\text{C}$).

$\theta(^{\circ}\text{C})$	300	320	340	360	380	400
$V_m(\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1})$	$5,31 \times 10^{-4}$	$5,77 \times 10^{-4}$	$6,18 \times 10^{-4}$	$6,54 \times 10^{-4}$	$6,87 \times 10^{-4}$	$7,20 \times 10^{-4}$
$U_m(\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	47,30	48,38	49,32	50,17	50,96	51,73

Déterminez la température finale θ_F (essayez d'être le plus précis possible) et la variation d'énergie interne $U_F - U_I$.

Exercice T3.4 : Chauffage d'un gaz par une résistance [**]



Une mole de gaz à la température T_0 est enfermée dans un cylindre fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements. À l'extérieur du cylindre, la pression vaut $P_0 = 1$ bar et la température $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$.

Une résistance de 4Ω placée à l'intérieur du cylindre, et reliée à l'extérieur par deux fils, permet de chauffer le gaz par effet Joule. La résistance a une capacité thermique $C_p^r = 4,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; les parois de l'enceinte ont pour capacité thermique $C_p^p = 2,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; on supposera qu'à l'équilibre, le gaz a la même température que les parois et la résistance.

Le gaz est de l'air, modélisé par un gaz parfait diatomique.

1. Calculer numériquement T_i , P_i et V_i .
2. On isole thermiquement le cylindre, et on alimente la résistance avec un courant constant de 2 A pendant 1 min . À l'aide d'un bilan d'enthalpie, calculez P_f , T_f et V_f l'équilibre.
Remarque : comme système, prenez {le gaz + la résistance + les parois} car faudra tenir compte de l'échauffement de la résistance et des parois (puisque'on vous donne leur C_p dans l'énoncé).
3. À la suite de la question précédente, on coupe le courant et on ôte l'isolation thermique et on attend que l'équilibre thermique avec l'extérieur se fasse.
Calculez les nouvelles valeurs de la pression, de la température et du volume, ainsi que la chaleur transférée lors de cette étape.

Exercice T3.5 : Compression d'un gaz en plusieurs étapes [**]

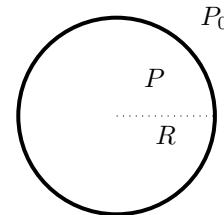
On enferme $V_i = 10\text{ L}$ d'air modélisé comme un gaz parfait diatomique ($\gamma = 1,4$) dans un cylindre, sous pression $P_i = 1$ bar et à la température $T_i = 25^{\circ}\text{C}$. On souhaite le comprimer jusqu'à $P_f = 20$ bar à la même température.

1. Calculez le nombre de moles de gaz, et le volume final V_f .
2. Quel travail W_0 faut-il fournir au gaz si on exécute une compression isotherme ? Quel est l'inconvénient de cette transformation ?
3. On propose une autre solution : on comprime rapidement le gaz de façon adiabatique et réversible de l'état i vers un état 1 de pression P_f , puis on laisse refroidir à pression constante jusqu'à l'état f .
Calculez les caractéristiques de l'état 1, puis le travail total W_1 des deux étapes. Commentez le résultat obtenu.
4. Voici une troisième solution : on comprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à une pression $P_2 = 10$ bar intermédiaire entre P_i et P_f (état 2), puis on laisse refroidir à la température T_0 sous pression constante (état 3), puis on recomprime de façon adiabatique et réversible jusqu'à P_f (état 4) puis on laisse refroidir à pression constante.
Calculez les caractéristiques des états intermédiaires et le travail total W_2 de ces 4 étapes. Commentez.
5. Dessinez dans un diagramme de Watt les 3 trajets correspondant aux 3 questions précédentes.

Exercice T3.6 : Gonflage d'un ballon [**]

Un ballon possède une enveloppe élastique qui exerce une force lorsqu'elle est gonflée. Il en résulte deux choses :

- La pression à l'intérieur est, à l'équilibre mécanique, supérieure à la pression extérieure d'une quantité constante A qu'on prendra égale à 0,2 bar pour les AN
 - Le ballon possède une énergie potentielle élastique $E_p = \frac{4}{3}\pi R^3 A$
- La pression de l'air extérieur vaut ici $P_0 = 1$ bar et sa température $T_0 = 22^\circ\text{C}$. L'air est considéré comme un GP de coefficient $\gamma = 1,4$.

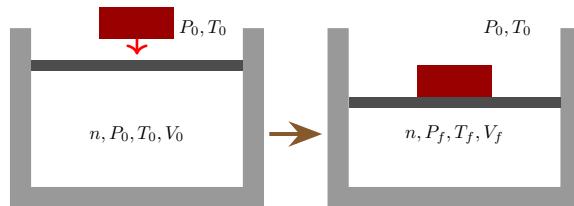


1. Avec une pompe, on comprime le gaz extérieur de façon adiabatique et réversible jusqu'à 1,2 bar, avant de l'envoyer dans le ballon.
Calculez la température de l'air comprimé.
2. On injecte cet air dans le ballon, et on mesure $R = 9$ cm. Calculez le nombre de moles d'air dans le ballon.
3. On attend que l'air dans le ballon se refroidisse à la température extérieure. Calculez le rayon final du ballon, et le transfert thermique reçu par le système {ballon+gaz} en négligeant la capacité thermique du ballon.

Exercice T3.7 : Compression brutale d'un gaz [**]

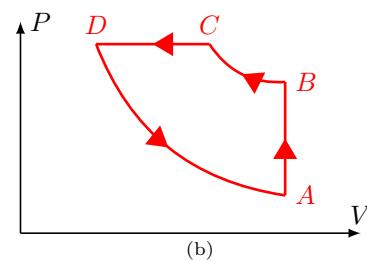
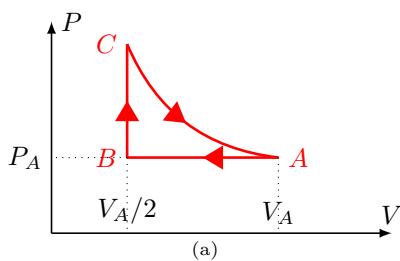
Dans un cylindre vertical, on enferme n moles d'air (considéré comme un gaz parfait diatomique) à l'aide d'un piston de masse négligeable. Il y a équilibre mécanique et thermique avec l'extérieur (pression P_0 , température T_0).

On pose une masse m sur le piston, ce qui exerce une surpression équivalente $\frac{mg}{S}$ sur la face supérieure du piston de section S . On attend l'équilibre mécanique mais pas thermique ; comme la transformation est rapide, on la considérera **adiabatique**.



1. Exprimez P_f ; à l'aide de la loi du GP, établir une équation reliant P_f , V_f et T_f uniquement à P_0 , V_0 et T_0 .
2. Par application du premier principe, établir une seconde équation reliant P_f , V_f et T_f aux données.
3. En déduire les expressions de V_f et T_f .
4. AN pour $P_0 = 1$ bar, $\frac{mg}{S} = 0,2$ bar, $T_0 = 300$ K et $V_0 = 1$ L.
5. On attend maintenant que l'équilibre thermique s'établisse entre le gaz et l'extérieur. Calculez le transfert thermique Q reçu par le gaz.

Exercice T3.8 : Travail des forces de pression [**]



Calculez le travail des forces de pression lorsqu'un GP diatomique décrit ces cycles réversibles :

- (a) À partir de A ($P = 1,0$ bar, $T = 590$ K, $V = 1,5$ m 3), on effectue un refroidissement isobare qui réduit le volume de moitié, puis une isochore, et une détente isotherme.
- (b) À partir de A ($P = 1,0$ bar, $T = 290$ K, $V = 2,5$ L), on effectue un chauffage isochore AB jusqu'à $T_B = 600$ K, puis une compression isotherme BC jusqu'à $P_C = 5$ bar, puis un refroidissement isobare CD , puis une détente isotherme DA .

Conseil : dans chaque cas, calculez d'abord le nombre de moles n , puis remplissez le tableau suivant :

État	T	P	V
A			
B			
C			
(D)			

Exercice T3.9 : Étude d'un cycle moteur [**]

On étudie un moteur dans lequel n moles de gaz parfait diatomique subissent les transformations suivantes :

- de A à B : compression isotherme à la température $T_f = 300\text{ K}$; le rapport de compression vaut $\frac{V_A}{V_B} = 3$;
- de B à C : détente isobare à la pression $P_B = 3\text{ bar}$;
- de C à A : refroidissement isochore avec un volume $V_C = 1,2\text{ L}$.

1. Remplissez le tableau suivant ; profitez-en pour calculer le nombre de moles de gaz, sachant que $R = 8,314\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que la capacité calorifique à volume constant du gaz.

État	$P(\text{bar})$	$T(\text{K})$	$V(\text{L})$
A			
B			
C			

2. Tracez le cycle dans le diagramme de Watt. Est-ce bien un moteur ?
3. Calculez pour chaque étape le travail et le transfert thermique reçus par le gaz.
Déduisez-en le travail total fourni par le moteur au cours d'un cycle.
4. Ce moteur décrit 6 cycles par seconde. Calculez sa puissance.

Exercice T3.10 : Machine frigorifique [**]

Pour refroidir une pièce, on imagine la faire subir à n moles d'air (modélisé par un GP diatomique de $\gamma = 1,4$) les transformations suivantes :

- Compression isotherme de l'état $A(1\text{ bar}, 298\text{ K}, 30\text{ L})$ à l'état B de volume 6 L
- Détente adiabatique réversible jusqu'à l'état C
- Réchauffement isochore jusqu'à l'état A

1. Tracez l'allure du cycle dans le diagramme de Watt
2. Remplissez le tableau suivant :

	$T(\text{K})$	$P(\text{bar})$	$V(\text{L})$
A			
B			
C			

3. Calculez le travail total reçu au cours d'un cycle, ainsi que la quantité de chaleur prélevée à l'étape CA .

Exercice T3.11 : Explosion d'un bloc de TNT [***]

Le TNT est un explosif ayant les caractéristiques suivantes :

- masse molaire : $227,1\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- masse volumique : $1650\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- énergie de décomposition : $4,18\text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- sa décomposition lors d'une explosion produit environ 9 moles de gaz par mole initiale de TNT
- les gaz produits sont essentiellement di- et tri-atomiques, on prendra un C_{vm} moyen de $25\text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On s'intéresse à la décomposition de 300 g de TNT, initialement à 20 °C sous 1 bar. On modélisera les gaz produits par des gaz parfaits.

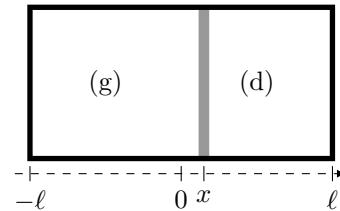
1. Calculez le volume initial du TNT.
2. Calculez le nombre de moles de TNT, le nombre de moles de gaz produits, et le C_v de ces gaz.
3. La décomposition du TNT est très rapide, on va donc considérer que cette étape est adiabatique et isochore. Que vaut alors la variation d'énergie interne ΔU de ce système ?
4. On peut décomposer l'évolution réelle du système en deux étapes fictives :
 - décomposition à température constante : le TNT initial se décompose à 20 °C pour donner des gaz ; la variation d'énergie interne lors de cette étape est alors l'opposé de l'énergie de décomposition donnée dans l'énoncé (on met ce signe – car l'énergie est libérée).
 - échauffement des gaz produits de 20 °C jusqu'à la température T_1 à la fin de cette étape.

Calculez numériquement T_1 . Dédouisez-en la pression P_1 si la transformation est isochore.

5. On a alors une seconde phase : les gaz se détendent. Pour avoir des ordres de grandeur, on va adopter un modèle simplifié : une détente adiabatique et réversible jusqu'à la pression $P_2 = 1$ bar.
À l'aide des lois de Laplace, déterminez le volume V_2 et la température T_2 des gaz à la fin de la détente.

Exercice T3.12 : Oscillations d'un piston [**]

On considère un cylindre fermé à ses deux bouts, de section S , de longueur 2ℓ . Un piston de masse m sépare ce cylindre en 2 ; il peut coulisser sans frottements. On note d le compartiment de droite et g celui de gauche. La position du piston est repérée par la distance x par rapport au milieu du cylindre.



Chaque compartiment contient la même quantité d'un gaz modélisé comme un gaz parfait. Initialement, le piston est au milieu, les deux compartiments ont le même volume $V_0 = S\ell$, la même température T_0 et la même pression P_0 .

1. Le piston se déplace en x ; exprimez les volumes V_d et V_g des deux compartiments.
2. On suppose dans un premier temps que la température des deux compartiments reste la même. Exprimez les pressions P_d et P_g dans les deux compartiments en fonction de P_0 , x et ℓ .
3. En appliquant le PFD au piston, déterminez l'ED vérifiée par x .
4. Exprimez la pulsation des petites oscillations après avoir linéarisé l'ED au voisinage de $x = 0$ (pour $x \ll \ell$).
AN : pour $m = 70$ g, $P_0 = 1$ bar, $\ell = 15$ cm, $S = 1$ cm², calculez la période.
5. En réalité, lors des oscillations, les transformations ne se font pas à température constante : les évolutions dans chaque compartiment peuvent être considérées comme adiabatiques et réversibles, avec $\gamma = 1,4$.
Exprimez alors la pulsation des petites oscillations.

Exercice T3.13 : Fuite de gaz dans la station spatiale [**]

Cet exercice se base sur la démonstration de la pression cinétique du gaz parfait, qui n'est pas directement au programme.

Un module de station spatiale de volume intérieur $V = 8,3$ m³ contient de l'air, modélisé comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g · mol⁻¹, à la température $T = 19$ °C, et avec une pression initiale $P(0) = 1$ bar. Une petite météorite vient frapper le module et perce dans la paroi un trou de surface $S = 5$ mm². Le gaz s'échappe alors à travers ce trou et part dans le vide.

1. Retrouvez l'expression de la vitesse quadratique v^* des molécules du gaz en fonction de T . Calculez numériquement sa valeur.
2. Soit $N(t)$ le nombre de particules dans le volume V à l'instant t .
Exprimez le nombre dN_{trou} de particules qui passent à travers le trou en une durée dt . On pourra adopter le modèle simplifié dans lequel les molécules ne vont que dans les 6 directions principales de l'espace, donc $\frac{N}{6}$ molécules se dirigent vers le trou avec la vitesse v^* .

3. Par un bilan entre t et $t + dt$, montrer que $N(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\tau \frac{dN}{dt} + N = 0$$

avec τ à exprimer ; faire l'AN de τ .

4. En déduire l'évolution de $N(t)$ en fonction de $N(0)$, puis celle de la pression $P(t)$ en fonction de $P(0)$.

Au bout de combien de temps la pression aura-t-elle atteint 0,8 bar ?

Thermodynamique des gaz
TDs numériques

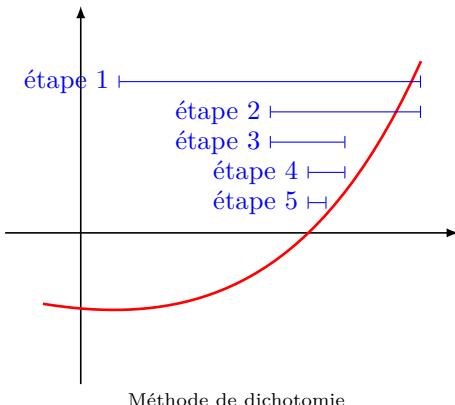
réponses page 504

TD numérique : Modèle du gaz de Van der Waals

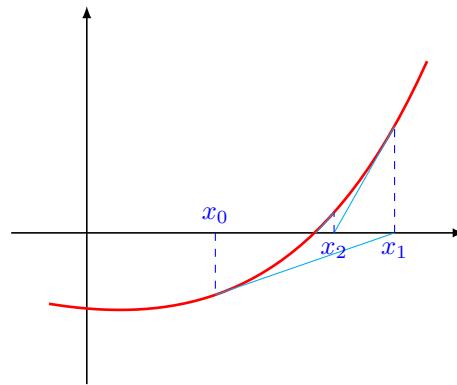
Ce TD un peu théorique est l'occasion de mettre en œuvre les méthodes de résolution d'une équation à une inconnue. Supposons qu'on veuille résoudre une équation d'inconnue x ; en passant tous les termes du même côté, on peut écrire cette équation sous la forme $f(x) = 0$. Résoudre l'équation revient donc à trouver les racines de la fonction f (c'est-à-dire les valeurs qui annulent la fonction).

Il existe plusieurs méthodes numériques ; les principales sont :

- la **méthode de dichotomie** est la meilleure, elle nécessite d'avoir repéré un intervalle $[g; d]$ dans lequel on est sûr que la fonction f a une racine et une seule ; autrement dit, f change une seule fois de signe sur cet intervalle. On va alors découper cet intervalle en deux : on calcule $m = \frac{g+d}{2}$ et on calcule $f(m)$; s'il est de signe opposé à $f(g)$ alors la racine est située dans $[g; m]$, sinon elle est dans $[m; d]$. En répétant cette action, on divise l'intervalle et on repère rapidement un encadrement précis de la racine.
- la **méthode de Newton** est encore plus rapide, mais ne converge pas toujours et nécessite de connaître la dérivée de f . Cette fois, on n'impose pas d'intervalle de recherche, mais on dispose d'une valeur initiale x_0 située pas trop loin de la racine. Alors on trace la tangente à la courbe de f en x_0 , et on note x_1 le point où elle coupe l'axe des abscisses, puis on recommence. On crée ainsi une suite récurrente $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ qui converge vers la racine...ou pas.



Méthode de dichotomie



Méthode de Newton

La première méthode, que vous devez savoir implémenter, est sûre, mais ne marche que pour les équations à une inconnue ; la seconde, moins sûre, se généralise à des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Dans ce TD, on va s'intéresser à un gaz réel modélisé par les équations de Van der Waals :

$$\left(P + a \frac{n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (\text{T3.11a})$$

$$U(T, V) = \frac{5}{2} nRT - a \frac{n^2}{V} \quad (\text{T3.11b})$$

avec a et b des constantes caractéristiques du gaz. Pour modéliser l'air, les valeurs données dans les tables sont $a = 135,8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 36,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. On rappelle que $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Créez une fonction `pressionGP(n, T, V)` qui renvoie la pression d'un gaz parfait (en Pascal) en fonction de n , V et T .

Créez une fonction `pressionGVdW(n, T, V)` qui renvoie la pression du gaz de Van der Waals (en Pascal) en fonction de n , V et T .

Tracez alors les courbes $P(V)$ pour les deux modèles, pour 1 mol à la température $T = 300 \text{ K}$, le volume variant entre 1 L et 50 L. Les deux modèles sont-ils proches pour des pressions de quelques bars ?

2. Tracez maintenant la même courbe entre 0,05 L et 1 L. Commentez.
3. Tracez la courbe $P(V)$ entre 0,05 L et 1 L pour $T = 100 \text{ K}$. Commentez.

4. Créez une fonction `volumeGP(n,P,T)` qui renvoie le volume d'un gaz parfait (en m³) en fonction de n , P et T .

Est-ce facile de créer la même fonction pour un gaz de Van der Waals ?

5. On va créer la fonction `volumeGVdW(n,P,T)` renvoyant le volume du gaz de Van der Waals en fonction de n , P et T . Pour cela, dans cette fonction, on va procéder en plusieurs étapes :

- définissez une fonction `f(V)` qui renvoie la différence entre les deux termes de l'équation (T3.11a)
- stockez dans une variable V_{GP} le volume du gaz dans le modèle du gaz parfait
- initialisez g à $\frac{1}{10}V_{GP}$ et d à $10 * V_{GP}$; on admettra que la racine recherchée se trouve dans cet intervalle dans les cas qui nous intéressent
- choisissez une précision de recherche du volume, par exemple $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}V_{GP}$
- lancez la boucle de dichotomie :

```

tant que  $d - g > \varepsilon$  faire
     $m \leftarrow \frac{g+d}{2}$ 
    si  $f(m) \times f(g) < 0$  alors
        |  $d \leftarrow m$ 
    sinon
        |  $g \leftarrow m$ 
    fin si
fin tq

```

- renvoyez alors g ou d , peu importe.

6. Calculez pour les deux modèles le volume occupé par 1 mole d'air à 300 K sous 1 bar. Faites de même sous 100 bar ; commentez.

7. Écrivez une fonction `volumeGVdW2(n,P,T)` qui fait la même chose, mais au lieu d'implémenter à la main la dichotomie, vous utiliserez la fonction `scipy.optimize.bisect` (documentation à chercher).

8. Dans la détente de Joule-Gay Lussac, la pression du gaz diminue tandis que son énergie interne est constante. On va montrer que, pour un gaz de Van der Waals, cela se traduit par une diminution de la température.

Pour cela, commencez par calculer l'énergie interne U de 1 mole d'air à 300 K occupant 5 L ; on la notera U_0 .

Ensuite, créez un tableau de valeurs de V entre 5 L et 25 L ; calculez le tableau des températures correspondantes, si on laisse U constant à la valeur U_0 . Tracez la courbe $T(V)$ et commentez.

TD numérique : Calcul du travail des forces de pression

Le travail des forces de pression se calcule par l'intégrale

$$W = - \int_{\text{début}}^{\text{fin}} P_{\text{ext}}.dV \quad (\text{T3.12})$$

C'est l'occasion d'apprendre les méthodes de base de l'intégration numérique.

On sait que $\int_a^b f(x).dx$ représente l'aire sous la courbe de la fonction f (en grisé sur la figure de gauche). Pour approcher cette aire, plusieurs formules existent :

- dans la **méthode des rectangles** (deuxième figure), on découpe l'intervalle $[a; b]$ en N sous-intervalles de longueur $dx = \frac{b-a}{N}$; le i -ème sous-intervalle est donc $[a + i.dx; a + (i + 1).dx]$ en numérotant les intervalles de 0 à $N - 1$. Pour chaque sous-intervalle, on calcule la valeur de f à gauche du sous-intervalle, c'est-à-dire $f(a + i.dx)$, et on va dire que l'aire sous la courbe de f sur ce sous-intervalle vaudra l'aire du rectangle ainsi tracé, à savoir $f(a + i.dx) \times dx$. On obtient donc la formule

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i).dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + i.dx \quad (\text{T3.13})$$

On peut montrer que l'erreur commise varie comme $\frac{1}{N}$.

- Pour plus de précision, on peut choisir la hauteur du rectangle non point à gauche de l'intervalle, mais

en son milieu : c'est la **méthode des rectangles au point milieu**. On a alors

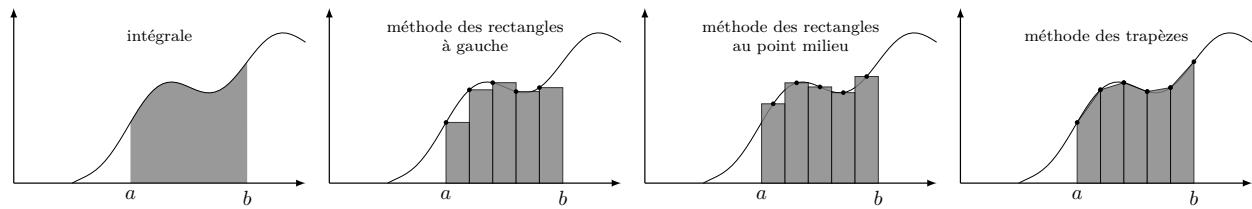
$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i).dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + (i + \frac{1}{2}).dx \quad (\text{T3.14})$$

Cette méthode a une erreur qui varie comme $\frac{1}{N^2}$, elle est donc meilleure.

- On peut aussi approximer l'aire non par un rectangle, mais un trapèze : c'est la **méthode des trapèzes**. On a alors

$$\int_a^b f(x).dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}.dx \text{ avec } dx = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + i.dx \quad (\text{T3.15})$$

Cette méthode est aussi précise que celle des rectangles au point milieu.



Remarque : en physique, on écrira $\delta W = -P_{ext}.dV$ le *travail infinitésimal*, qui correspond à l'aire d'un petit rectangle ; puis $W = \int \delta W$ qui interprète l'intégrale comme une somme : le travail total est la somme (infinie) des travaux infinitésimaux.

Autre remarque : la méthode des rectangle est en fait équivalente à appliquer une méthode d'Euler.

1. Détente isotherme

On considère une mole de gaz qui se détend de façon réversible à la température constante $T = 150^\circ\text{C}$ de $V_1 = 2,5\text{ L}$ jusqu'à $V_2 = 35\text{ L}$.

- On suppose dans cette question que le gaz est modélisable par un gaz parfait.

Créez une fonction **PGP(V)** qui renvoie la pression pour un volume V donné, à la température choisie, puis appliquez la formule (T3.14) avec $N = 100$ pour calculer le travail des forces de pression. Comparez avec la formule théorique : $W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

- Passez à 1000 rectangle et observer comment les deux valeurs se rapprochent
- On modélise maintenant le gaz par un gaz de Van der Waals vérifiant

$$P = \frac{nRT}{V - n.b} - a \frac{n^2}{V^2} \quad (\text{T3.16})$$

Pour l'air on prendra : $a = 135,8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 36,4 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$

Pour la vapeur d'eau on prendra : $a = 557,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 31,0 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$

Définissez deux fonctions **Pair(V)** et **Peau(V)**, puis calculez le travail de la détente de ces deux gaz dans les mêmes conditions que précédemment. Commentez le résultat.

2. Détente adiabatique réversible (AR)

On considère une mole de gaz diatomique initialement à $T_1 = 500^\circ\text{C}$ dans $V_1 = 5\text{ L}$ qui se détend de façon AR jusqu'à T_2 et $V_2 = 50\text{ L}$.

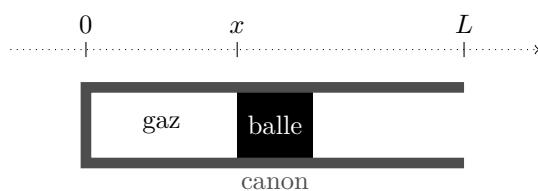
- Calculez numériquement, pour un GP diatomique ($\gamma = 1,4$), la température finale T_{2Lap} puis le travail W_{2Lap} des forces de pression.
- Au cours de la détente AR, $\delta Q = 0$ et $P = P_{ext}$ donc le premier principe appliqué au gaz s'écrit $dU = -P.dV$. Or pour un GP diatomique, $dU = C_v dT$ avec $C_v = \frac{5}{2}nR$; donc $dT = -\frac{P}{C_v}dV$. La température lorsque le volume vaut V au cours de la détente vaut donc $T(V) = T_1 - \int_{V_1}^V \frac{P(T,V)}{C_v} dV$. Pour calculer ainsi une primitive, on procède comme pour calculer une intégrale par méthode des rectangles (50000 rectangles ici), mais en stockant les sommes intermédiaires dans une liste ou un tableau. Générez ainsi deux tableaux contenant T et V au cours de la détente, puis un tableau contenant P . Calculez alors le travail des forces de pression par méthode des rectangles, et comparez au résultat de la question précédente.

- (c) Pour un gaz de Van der Waals, $dU = C_v dT + a \frac{n^2}{V^2} dV$ donc $dT = -\frac{P(T,V) + a \frac{n^2}{V^2}}{C_v} dV$. Calculez la température finale, la pression finale et le travail reçu, pour l'air modélisé comme un gaz de Van der Waals diatomique.
- (d) Reprendre la comparaison entre le modèle du gaz parfait et le modèle de Van der Waals pour une détente AR de 1 kg d'air de 200 bar, 20 °C à 1 bar (commencez par calculer le volume initial ; pour le volume final, on procèdera à tâtons ; la masse molaire de l'air vaut $29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$).

TD numérique : Tir d'une balle

Pour étudier les transformations d'un gaz qui se détend ou se comprime, on néglige souvent la masse du piston qui l'enferme. La prise en compte de cette masse complique les équations. On va essayer d'en tenir compte dans ce devoir en étudiant le tir d'une balle, poussée par la détente d'un gaz.

Le schéma général du problème est représenté ci-dessous ; suivant le cas étudié, ce sera un tir de balle, de boulet de canon, d'obus, ou même le tir le tir du vaisseau spatial de Jules Verne dans *De la Terre à la Lune*.



On prendra les données suivantes correspondant à un pistolet de 9 mm :

- diamètre de tube : 9 mm
- masse de la balle : 8 g
- masse de poudre : 0,35 g occupant un cylindre de 8 mm de diamètre et 17 mm de long
- pouvoir calorifique (c'est-à-dire à peu près l'énergie libérée lors de l'explosion) : $580 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
- masse molaire de la poudre : $270 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- la combustion d'1 mol de poudre produit 5 mol de gaz ; la capacité thermique molaire du gaz obtenu vaut $C_{vm} = 40,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- longueur du canon : 10 cm

En sortie du canon, on annonce une vitesse de $310 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et une énergie cinétique de 380 J.

1. Initialement, on a de la poudre occupant un volume V_0 à la température $T_0 = 20^\circ\text{C}$ sous la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ correspondant aussi à la pression extérieure.
Calculez le volume V_0 , ainsi que le nombre n de moles de poudre.
2. La réaction chimique d'explosion de la poudre produit du gaz. L'énergie libérée lors de la combustion va être transférée à ce gaz ; en première approximation on peut faire comme s'il s'agissait d'un transfert thermique reçu par le gaz.

En supposant que l'explosion est instantanée donc isochore (la balle n'a pas eu le temps de bouger), calculez la température T_1 et la pression P_1 à la fin de l'explosion, qui sera prise dans la suite comme instant $t = 0$.

3. Dans la suite, la balle va avancer et le gaz se détendre. Il faut écrire les équations différentielles vérifiées par les variables $T(t)$, $P(t)$ et $V(t)$.
 - (a) Appliquez le PFD à la balle ; la position de la balle peut être notée x , mais ensuite, comme on veut travailler plutôt sur le volume, on écrira que $x = \frac{V}{S}$ avec S la section du tube. Vous devez donc obtenir une ED reliant \ddot{V} à P et aux constantes.
 - (b) Appliquez le premier principe au système {gaz + balle} entre deux instants t et $t + dt$ en supposant la transformation adiabatique et en tenant compte de l'énergie cinétique de la balle, et montrez que $C_v \dot{T} + \frac{m_b}{S^2} \dot{V} \ddot{V} = -P_0 \dot{V}$
 - (c) On va résoudre ce système de deux ED avec `odeint`. Commencez par préparer la liste des inconnues ; on rappelle la règle : pour toute variable qui apparaît sous forme dérivée n fois, on prendra dans la liste des inconnues cette variable, sa dérivée,...jusqu'à sa dérivée $(n - 1)$ -ème.
 - (d) Implémentez alors la fonction `derivee(inconnues,t)`. Dans cette fonction, on commencera par calculer \dot{V} , puis \dot{T} . Pour la pression, on modélisera le gaz par un gaz parfait, même si ce modèle est discutable au départ.

- (e) Terminez la résolution en simulant sur 1ms pour commencer. Récupérez les tableaux de $V(t)$, $\dot{V}(t)$ et $T(t)$, et déduisez-en $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $P(t)$. Modifiez le temps total de simulation pour que x corresponde exactement à la longueur du tube à la fin. Notez alors le temps mis par la balle pour sortir du tube, et sa vitesse acquise.
- (f) Tracez $P(V)$. Tracez sur le même graphe la courbe donnée par la loi de Laplace : $P = \frac{P_1 V_0^\gamma}{V^\gamma}$ avec $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{vm}}$. Commentez.
4. Dans la suite, on va ajouter des détails supplémentaires dans le modèle. On ajoutera les termes séparément : à chaque question, on repart du modèle de la question 3d.
- On ajoute au modèle précédent des frottements de la forme $\vec{F} = -a - b \cdot \vec{v}$ avec $a = 1\text{ N}$, $b = 10\text{ USI}$ et \vec{v} la vitesse. Retracez les courbes et commentez.
 - On tient compte de la perte de chaleur du gaz, principalement vers la balle. On ajoutera donc une nouvelle variable, T_b , initialement à T_0 . La puissance thermique du gaz vers la balle se fera à travers une résistance thermique R_{th} . Cette puissance thermique devra à la fois être incluse dans le premier principe appliqué au gaz, et aussi au premier principe appliqué à la balle, constitué d'acier de capacité thermique massique $c_a = 460\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- Reécrivez le modèle et tracez les courbes. Ajustez R_{th} pour avoir à la fin $T_b = 60^\circ\text{C}$.
- Pour aller plus loin vers ce modèle, il faudrait tenir compte aussi du transfert thermique vers le canon, mais la température du canon n'est pas homogène, et ça devient trop compliqué.

TD numérique : Simulation de la distribution de vitesses d'un gaz parfait

La simulation exacte d'un gaz parfait demande de traiter de très nombreux degrés de liberté et est très gourmande en ressources. Néanmoins, des modèles simplifiés ont été mis au point, basés sur des méthodes aléatoires dites «méthodes de Monte-Carlo» qui permettent de simuler de façon réaliste certains paramètres du gaz. Ce TD en présente une, tirée du livre de A.L.Garcia, *Numerical Methods for Physics*. C'est un TD assez difficile à comprendre et non essentiel.

On considère un gaz formé de $N = 3000$ particules dans un espace de longueur $L = 1\text{ }\mu\text{m}$ et de très petites dimensions dans les autres directions ; on ne s'intéressera donc qu'à une seule direction notée x . Le gaz est enfermé entre $x = 0$ et $x = L$. Sa température vaut $T = 300\text{ K}$ et sa masse molaire $M = 4\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On va repérer les particules par des tableaux :

- la liste `tab_position` contient les abscisses x des N particules
- les listes `tab_vx`, `tab_vy`, `tab_vz` contiennent les vitesses des particules selon les 3 axes

En effet, les dimensions selon y et z sont très petites, mais cela n'empêche pas les particules d'avoir une vitesse selon ces directions, simplement elles rebondiront sur les parois, ce qui changera fréquemment le signe de v_y et v_z , mais cela importe peu dans cette simulation et on n'en tiendra pas compte.

1. Générez la liste initiale des positions et des vitesses :

- pour les positions, chaque particule est placée aléatoirement entre 0 et L
- pour les vitesses selon x , chaque particule a une vitesse initiale valant $\pm v^*$ avec un signe tiré aléatoirement, v^* étant la vitesse quadratique du gaz
- les vitesses initiales selon y et z sont nulles

On pourra utiliser les fonctions `numpy.random.uniform` et `numpy.random.randint`.

2. On va simuler des collisions entre les particules. Lorsque deux particules se rencontrent, il faut respecter des lois fondamentales de la physique des systèmes matériels (qu'on verra bientôt en mécanique) :

- conservation de la quantité de mouvement totale
- conservation de l'énergie

Néanmoins, si on considère les particules comme des boules de billard, on sait que, selon l'endroit où elles se cognent, les vitesses finales vont pouvoir partir dans un peu toutes les directions. Considérons deux particules de vitesse initiale \vec{v}_{i1} et \vec{v}_{i2} . On admet alors les lois suivantes :

- on tire aléatoirement un angle ϕ selon une loi uniforme entre 0 et 2π
- on tire aléatoirement un angle θ tel que $\cos\theta$ vérifie une loi uniforme entre -1 et 1

- les vitesses finales \vec{v}_{fn} avec $n = 1, 2$ valent :

$$\begin{cases} v_{fn,x} = v_{moy,x} + \epsilon_n v_{d,x} \\ v_{fn,y} = v_{moy,y} + \epsilon_n v_{d,y} \\ v_{fn,z} = v_{moy,z} + \epsilon_n v_{d,z} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \epsilon_1 = +1 \\ \epsilon_2 = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_{moy,xyz} = \frac{v_{i1,xyz} + v_{i2,xyz}}{2} \\ v_{rel} = \|\vec{v}_{i1} - \vec{v}_{i2}\| \\ v_{d,x} = \frac{1}{2} v_{rel} \cos \theta \\ v_{d,y} = \frac{1}{2} v_{rel} \sin \theta \cos \phi \\ v_{d,z} = \frac{1}{2} v_{rel} \sin \theta \sin \phi \end{cases}$$

Implémentez une fonction `vitesses_apres_collision(vx1,vy1,vz1,vx2,vy2,vz2)` qui renvoie la liste des 6 vitesses après collision.

- Définissez une fonction `simule_collisions_une_particule(tx,tvx,tvy,tvz,i,tau)` qui prend comme argument les 4 tableaux et y simule des collisions pour la particule i pendant une durée τ selon le processus suivant appliqué à toutes les autres particules j :

- on calcule les abscisses x des particules i et j à l'instant $t + \tau$
- si les positions des deux particules ont été inversées au cours de la durée τ , on calcule la vitesse relative $|v_x[i] - v_x[j]|$ et on la compare à un réel aléatoire tiré entre 0 et $6v^*$; si la vitesse relative est plus élevée, alors il y a collision entre les deux particules et on met à jour leurs vitesses à l'aide de la fonction de la question précédente.

- Définissez une autre fonction `simule_avancee(tx,tvx,tau)` qui simule l'avancée des particules selon la direction x :

- chaque position de particule avance de $\tau.v_x$
- si $x < 0$ alors la particule rebondit sur le bord de gauche : sa vitesse v_x devient l'opposé et sa position prend la valeur symétrique par rapport à 0
- si $x > L$ alors la particule rebondit sur le bord de droite : sa vitesse v_x devient l'opposé et sa position prend la valeur symétrique par rapport à L

- Définissez alors une fonction `simule_un_pas(tx,tvx,tvy,tvz,tau)` qui simule un pas de durée τ selon le processus suivant :

- tirer au hasard un nombre égal à 5 % du nombre total de particules, et leur appliquer la fonction `simule_collisions_une_particule`
- faire avancer toutes les particules avec la fonction `simule_avancee`

- Simulez alors 25 pas de durée $0,02\frac{L}{v^*}$ à partir de la répartition initiale, et tracez l'histogramme des vitesses $\|\vec{v}\|$ à l'aide de la fonction `matplotlib.pyplot.hist`.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(c)

Q2.(d)

Q3.(d)

Q4.(a)

L'air est un GP diatomique donc on prend $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

Q5.(d)

Q6.(a)

Q7.(a)

C'est faux, **c'est faux**, c'est archi faux, it's false, es ist falsch, es incorrecto, é falso, non è vero, nu e adevarat, to nieprawda, sa pa vré,...je ne sais pas comment le dire autrement, mais C'EST FAUX et ça coûte beaucoup de points en moins en DS/colle/concours quand on sort une telle ÂNERIE.

Q8.(c)

$$C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$$

Réponses au QCM : Loi du gaz parfait

Q9.(d)

Q10.(a)

$$P = \frac{\frac{1000}{18} \times 8,314 \times (250+273)}{0,8}$$

Q11.(a) ET (b)

Q12.(b)

Réponses au QCM : Application des lois de Laplace

Q13.(d)

$$V_f = V_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Q14.(c)

$$T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

Q15.(c)

Attention à passer les températures en Kelvins.

Q16.(b)

$$P_f = P_i \left(\frac{T_i}{T_f} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Q17.(c)

$\rho_i = \frac{m}{V_i}$ et $\rho_f = \frac{m}{V_f}$, la masse n'ayant pas changé. Donc $\rho_f = \rho_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{-\frac{1}{\gamma}}$

Réponses au QCM : Travail des forces de pression

Q18.(a)

Q19.(b)

Q20.(b)

Pour calculer $W = -nR \ln \frac{V_f}{V_i}$ il faudrait connaître n , or on ne connaît pas P donc on ne peut pas calculer n .

Q21.(a)

$$n = \frac{PV}{nR} = 2,06 \text{ mol} \text{ (attention aux unités!)}$$

Q22.(d)

$Q = 0$ donc $W = \Delta U = Cv \cdot \Delta T$.

Q23.(a)

Par les lois de Laplace : $T_f = 255^\circ\text{C}$ puis $W = \Delta U - Q = C_v \cdot \Delta T$ avec $C_v = \frac{3}{2}nR = 12,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T3.1 : Air sec [*]

1. $M = 28,98 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
2. $P_{N_2} = 790,1 \text{ mbar}$, $P_{O_2} = 212,7 \text{ mbar}$ et $P_{Ar} = 10,13 \text{ mbar}$.
3. $w_{N_2} = 75,4\%$; $w_{O_2} = 23,2\%$ et $w_{Ar} = 1,4\%$.

Réponses de l'exercice T3.2 : Détentes et compressions d'un gaz [**]

1. $\Delta U_{GP} = C_{vm} \times (-7) = -189 \text{ J}$ et $\Delta U_{GVdW} = \Delta U_{GP} + 0 = -189 \text{ J}$.
2. $\Delta U_{GP} = 0 \text{ J}$ et $\Delta U_{GVdW} = 8,6 \text{ J}$.
3. $\Delta U_{GP} = 540 \text{ J}$ et $\Delta U_{GVdW} = 535 \text{ J}$.
4. $\Delta T_{GP} = 0^\circ\text{C}$ et $\Delta T_{GVdW} = 0,21^\circ\text{C}$.

Réponses de l'exercice T3.3 : Tables thermodynamiques de la vapeur d'eau [**]

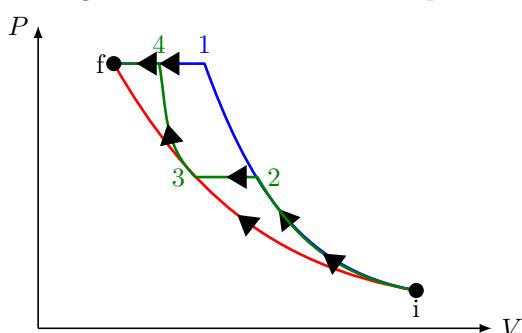
1. U dépend de p donc le gaz n'est pas parfait.
Pour le modèle de Van der Waals : $a = 0,923 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{mol}^{-2}$ et $b = 8,20 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.
Le modèle donne l'énergie à 40 bar à 0,04 % et la température à 0,8 %.
2. $V = 5,90 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ et on en tire $\theta_F = 326^\circ\text{C}$ et $U_F = 48,68 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ donc $\Delta U = -6,10 \text{ kJ}$.

Réponses de l'exercice T3.4 : Chauffage d'un gaz par une résistance [**]

1. À $T_i = T_0 = 293 \text{ K}$; $P_i = P_0 = 1 \text{ bar}$; $V_i = 24,4 \text{ L}$.
2. $P_f = P_0 = 1 \text{ bar}$; $T_f = T_i + \frac{rI^2t}{C_r + C_p + C_g} = 47^\circ\text{C}$; $V_f = 26,7 \text{ L}$.
3. On revient à l'état initial. $Q = \Delta H = -960 \text{ J}$.

Réponses de l'exercice T3.5 : Compression d'un gaz en plusieurs étapes [**]

1. $n = 0,40 \text{ mol}$ et $V_f = 0,5 \text{ L}$.
2. $W_0 = 2996 \text{ J}$. Mais une telle transformation est infiniment lente.
3. $V_1 = 1,2 \text{ L}$ et $T_1 = 701 \text{ K}$. On calcule alors $W_1 = 4737 \text{ J}$.
4. On reprend les mêmes calculs :
 - état 2 : $P_2 = 10 \text{ bar}$, $V_2 = 1,9 \text{ L}$, $T_2 = 575 \text{ K}$
 - état 3 : $P_3 = 10 \text{ bar}$, $V_3 = 1 \text{ L}$, $T_3 = T_0 = 298 \text{ K}$
 - état 4 : $P_4 = 20 \text{ bar}$, $V_4 = 0,6 \text{ L}$, $T_4 = 363 \text{ K}$
 et $W_2 = 4024 \text{ J}$
Donc en deux étapes, c'est un peu plus long qu'en une seule étape, mais ça coûte moins de travail.
5. En rouge l'isotherme, en bleu la compression en 2 étapes, en vert la compression en 4 étapes.



Réponses de l'exercice T3.6 : Gonflage d'un ballon [**]

1. $T = 38^\circ\text{C}$
2. $n = 0,14 \text{ mol}$
3. À la fin on a $T_f = 22^\circ\text{C}$ et $P_f = 1,2 \text{ bar}$ donc $R_f = 8,8 \text{ cm}$. Par le premier principe on trouve $Q = -65 \text{ J}$

Réponses de l'exercice T3.7 : Compression brutale d'un gaz [**]

1. $P_f = P_0 + \frac{mg}{S}$ et $\frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$.
2. $\frac{5}{2}(P_f V_f - P_0 V_0) = -P_f(V_f - V_0)$
3. $V_f = V_0 \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \frac{P_0}{P_f} \right) = V_0 \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \frac{P_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} \right)$ et $T_f = T_0 \frac{P_f V_f}{P_0 V_0} = T_0 \left(1 + \frac{2}{7} \frac{mg}{SP_0} \right)$
4. AN : $P_f = 1,2 \text{ bar}$, $T_f = 317 \text{ K}$, $V_f = 0,88 \text{ L}$
5. Dans l'état final noté f' , on a $P_{f'} = P_f = P_0 + \frac{mg}{S} = 1,2 \text{ bar}$, $T_{f'} = T_0 = 300 \text{ K}$ et $V_{f'} = \frac{P_0}{P_0 + \frac{mg}{S}} V_0 = 0,83 \text{ L}$.
Par le premier principe : $Q = P_{f'} \left(V_{f'} - V_f + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{T_f}{T_0} \right) V_{f'} \right) = -20 \text{ J}$.

Remarque : cet exercice est un grand classique de thermodynamique ; malheureusement, c'est un très mauvais exercice. Comment le système peut-il atteindre son état d'équilibre ? Il faut des forces de frottements pour arrêter le piston. Or on ne les a pas pris en compte. Le résultat final n'est pas tant que ça faux, mais la modélisation du problème est en réalité beaucoup trop simpliste.

Réponses de l'exercice T3.8 : Travail des forces de pression [**]

(a) $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 30,6 \text{ mol}$ donc $C_v = 636 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

État	$T(\text{K})$	$P(\text{bar})$	$V(\text{m}^3)$
A	590	1	1,5
B	295	1	0,75
C	590	2	0,75

$$W = 75 + 0 - 104 = -29 \text{ kJ} \text{ (moteur)}$$

(b) $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 0,10 \text{ mol}$ donc $C_v = 2,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

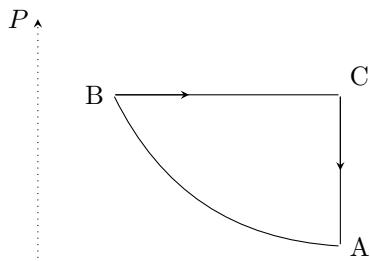
État	$T(\text{K})$	$P(\text{bar})$	$V(\text{L})$
A	290	1,0	2,5
B	600	2,06	2,5
C	600	5,0	1,03
D	290	5,0	0,5

$$W = 0 + 459 + 267 - 402 = 324 \text{ J} \text{ (récepteur)}$$

Réponses de l'exercice T3.9 : Étude d'un cycle moteur [**]

État	$P(\text{bar})$	$T(\text{K})$	$V(\text{L})$
A	1	300	1,2
B	3	300	0,4
C	3	900	1,2

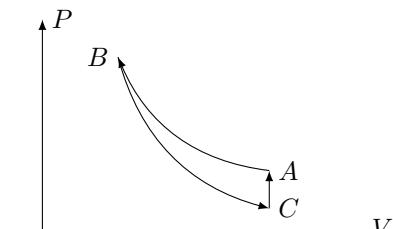
$$n = 0,048 \text{ mol}$$
 et $C_v = 1,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.



2.

3. Sur un cycle, le moteur fournit $W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 132 - 240 + 0 = -108 \text{ J}$
4. D'où une puissance $\mathcal{P} = 6 \times 108 = 648 \text{ W}$.

Réponses de l'exercice T3.10 : Machine frigorifique [**]



2. $n = 1,21 \text{ mol.}$

	$T(\text{K})$	$P(\text{bar})$	$V(\text{L})$
A	298	1	30
B	298	5	6
C	157	0,52	30

3. Le travail total est $W = n R (T_B - T_A) = 1,21 \cdot 4830 \cdot (3550 - 298) = 1280 \text{ J}$ tandis que $Q_{CA} = 3550 \text{ J}$.

Réponses de l'exercice T3.11 : Explosion d'un bloc de TNT [***]

1. $V = 1,8 \times 10^{-4} \text{ m}^3$
2. $n = 1,32 \text{ mol}$ donc $n_{\text{gaz}} = 11,9 \text{ mol}$ et $C_v = 297 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
3. $\Delta U = 0$
4. $T_1 = 4240^\circ\text{C}$ et $P_1 = 24800 \text{ bar}$.
5. $\gamma = 1,33$; $V_2 = 0,36 \text{ m}^3$ et $T_2 = 88^\circ\text{C}$

Réponses de l'exercice T3.12 : Oscillations d'un piston [**]

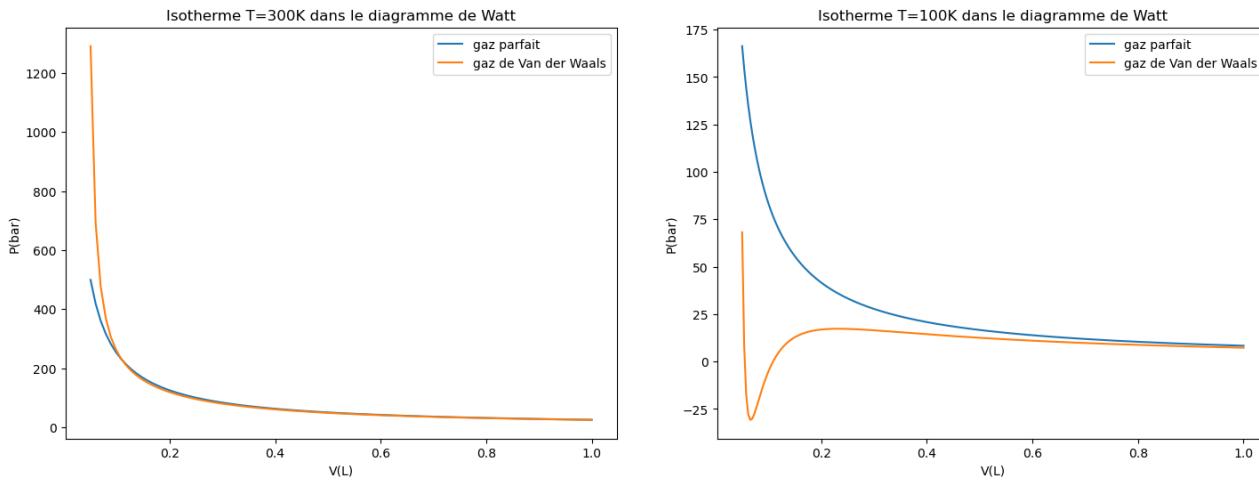
1. $V_g = S(\ell + x)$ et $V_d = S(\ell - x)$.
2. $P_g = P_0 \frac{\ell}{\ell+x}$ et $P_d = P_0 \frac{\ell}{\ell-x}$.
3. $m\ddot{x} = (P_g - P_d)S = P_0 \left(\frac{\ell}{\ell+x} - \frac{\ell}{\ell-x} \right) S$
4. En linéarisant : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2P_0S}{m\ell}} = 44 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit une période de $0,15 \text{ s}$
5. On a maintenant en linéarisant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\gamma P_0 S}{m\ell}} = 52 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit une période de $0,12 \text{ s}$

Réponses de l'exercice T3.13 : Fuite de gaz dans la station spatiale [**]

1. $v^* = 501 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
2. $dN_{\text{trou}} = \frac{N}{6} \frac{v^* dt S}{V}$
3. $\tau \frac{dN}{dt} + N = 0$ avec $\tau = \frac{6V}{v^* S} = 5 \text{ h}30 \text{ min}$
4. $P(t) = P(0)e^{-t/\tau}$. Il faudra $t = -\tau \ln 0,8 = 1 \text{ h}14 \text{ min}$ pour que la pression descende à $0,8 \text{ bar}$.

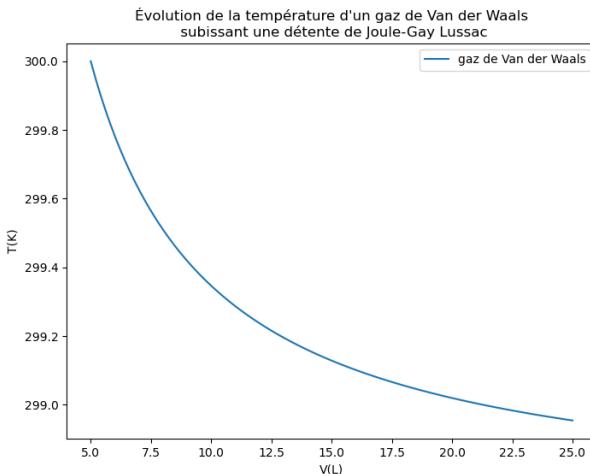
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Modèle du gaz de Van der Waals



Le modèle de Van der Waals diffère sensiblement du modèle du gaz parfait aux fortes pressions et basses températures, ce qui correspond à des cas où la densité de particules devient importante. Le creux qui apparaît dans l'isotherme à $T = 100\text{ K}$ traduit l'apparition de liquide, qu'on verra au chapitre T4.

Le calcul du volume à pression et température fixées donne des valeurs très proches à 300 K sous 1 bar ($V_{GP} = 24,94\text{ L}$ et $V_{VdW} = 24,92\text{ L}$) mais plus différentes sous 100 bar ($V_{GP} = 0,249\text{ L}$ et $V_{VdW} = 0,237\text{ L}$).



On voit bien que, lorsque le gaz se détend à énergie constante, le modèle de Van der Waals prévoit un refroidissement. Ici il est modéré (environ 1 °C) car on parle d'une pression modérée.

Réponses au TD d'info : Calcul du travail des forces de pression

Dans le cas d'une détente isotherme à 150 °C entre les volumes 2,5 L et 35 L, on trouve :

modèle	GP, théorie	GP, rectangles	air (VdW), rectangles	vapeur d'eau (VdW), rectangles
$W(J)$	-9284	-9284	-9281	-9118

Pour la détente AR, la méthode proposée est en fait très proche d'une méthode d'Euler :

modèle	GP, théorie	GP, rectangles	air (VdW), rectangles
$T_f(\text{°C})$	34,6	34,6	34,4
$W(J)$	-9672	-9672	-9673

Enfin, pour une détente de 200 bar à 1 bar :

modèle	GP, rectangles	air(VdW), rectangle
V_f/V_i	42,5	41,1
$T_f(^{\circ}\text{C})$	-207,7	-201,3
$W(\text{kJ})$	-163,2	-158,6

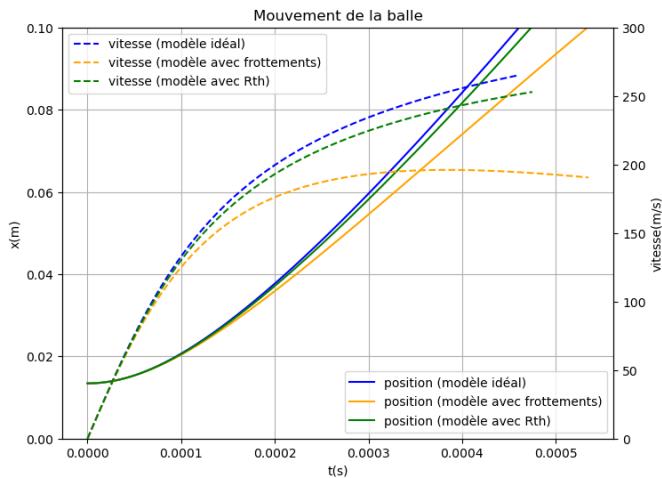
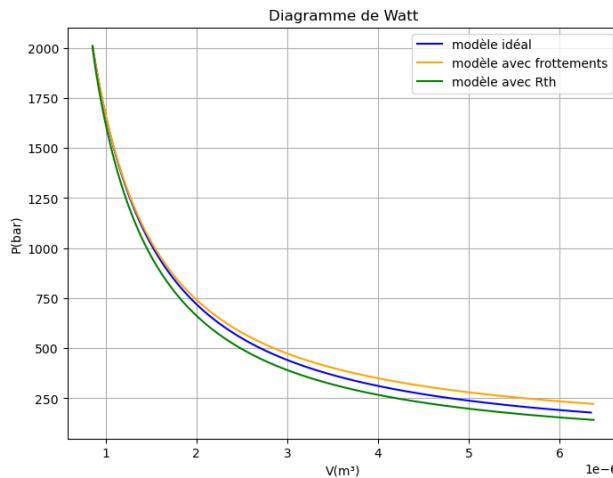
En réalité, pour obtenir de l'air liquide, on procède plutôt à une détente isenthalpique qu'on verra plus tard.

Réponses au TD d'info : Tir d'une balle

On a à résoudre le système général d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{V} = S \frac{(P-P_0)S+F_{autres}}{m_b} \\ C_v \cdot \dot{T} = -P_0 \cdot \dot{V} - \frac{m_b \cdot V \cdot \ddot{V}}{S^2} + \delta Q \end{cases}$$

On a donc 3 inconnues à passer dans `odeint` : $[V, \dot{V}, T]$

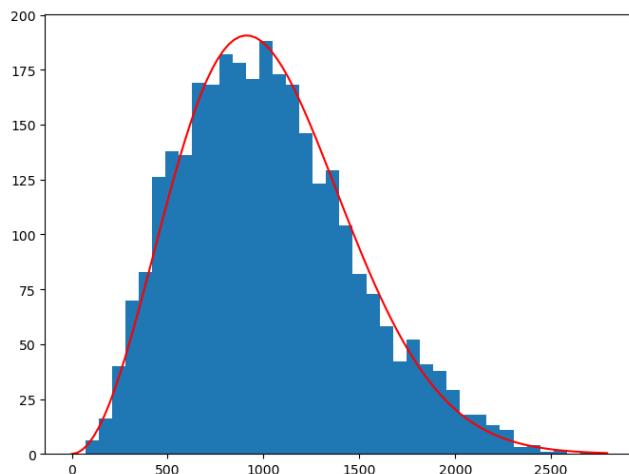


Le modèle idéal, sans frottements ni transferts thermiques, donne une courbe dans le diagramme de Watt qui se superpose exactement à celle donnée par la loi de Laplace ; la balle met 0,46 ms à sortir avec une vitesse de $260 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ environ.

Les frottements ralentissent la balle ; les transferts thermiques diminuent la propulsion de la balle ; dans les deux cas, on obtient une vitesse moindre à la sortie.

Réponses au TD d'info : Simulation de la distribution de vitesses d'un gaz parfait

On obtient une répartition de vitesses qu'on peut comparer à la théorie de Maxwell donnant la probabilité d'avoir une vitesse v sous la forme $p(v) = 4\pi A^3 v^2 e^{-b \cdot v^2}$ avec $A = \frac{\sqrt{3}}{v^* \sqrt{2\pi}}$ et $b = \frac{3}{2v^{*2}}$ (courbe rouge) :



Régime Sinusoïdal Forcé

Cours

Nous avons établi, dans le chapitres d'électricité ou de mécanique, des équations différentielles décrivant la dynamique des systèmes. Ces équations avaient un second membre constant, et leur solution particulière – ou *régime permanent* – était constante, correspondant soit au régime continu en électricité, soit à une position d'équilibre en mécanique.

Très souvent, les circuits électriques sont soumis à des tensions variables ; les systèmes mécaniques à des vibrations ;.... Nous allons donc dans ce chapitre étudier le régime variable le plus important en pratique : le régime sinusoïdal.

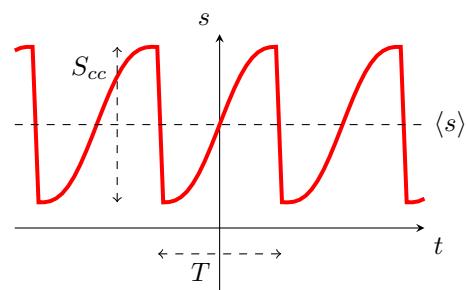
E5.A. Comportement d'un système soumis à un signal sinusoïdal

A.1. Description d'un signal sinusoïdal

Définition : Caractéristiques d'un signal périodique

Soit $s(t)$ un signal périodique.

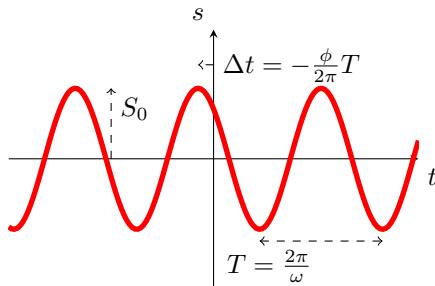
- La *période* T est la durée au bout duquel il se reproduit à l'identique : $s(t + T) = s(t)$. L'inverse de la période est la *fréquence* $f = \frac{1}{T}$, en Hertz (Hz).
- La différence entre la valeur maximale et la valeur minimale s'appelle l'*amplitude crête à crête* (notée ici S_{cc}) ; la moitié de cette valeur est l'*amplitude* du signal.
- La *valeur moyenne* $\langle s(t) \rangle$ du signal est aussi appelée *offset* (décalage en anglais).
- La *valeur efficace* est définie comme $S_{eff} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$.



Propriété : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal de la forme la plus générale s'écrit $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$ avec :

- S_0 son *amplitude* (donc son amplitude crête à crête vaut $2S_0$)
- ω sa *pulsation*, en rad.s^{-1} , qui est reliée à la fréquence par la relation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- ϕ sa *phase à l'origine*



Démonstration

D'où vient la relation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$? Considérons une fonction $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)$. Le cosinus est 2π -périodique, c'est-à-dire que $\cos(\omega t + \phi + 2\pi) = \cos(\omega t + \phi)$. Or $\cos(\omega t + \phi + 2\pi) = \cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \phi)$, ce qui montre que $s(t + \frac{2\pi}{\omega}) = s(t)$, donc que s a pour période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ soit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Que représente ω ? rien d'autre que $2\pi f$. Il faut le voir comme un raccourci d'écriture, c'est la fréquence multipliée par 2π .

Remarque : Un signal sinusoïdal peut être écrit avec un sinus ou un cosinus. On prend souvent un cosinus, car il a la bonne idée d'être pair, donc on peut se contenter d'étudier uniquement les fréquences (ou pulsations) positives.

On comprend donc la signification de S_0 et celle de ω , mais quel rôle joue ϕ ? Pour le comprendre, remarquons qu'on peut écrire $s(t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$; en posant $t' = t + \frac{\phi}{\omega}$, ce qui correspond à changer l'origine des temps en $t = -\frac{\phi}{\omega}$, on peut écrire $s(t') = S_0 \cos(\omega t')$: le terme ϕ a donc eu pour rôle de décaler l'origine des temps (le maximum de la courbe, puisque c'est un cosinus) de $-\frac{\phi}{\omega} = -T\frac{\phi}{2\pi}$; on dit que $T\frac{\phi}{2\pi}$ représente l'*avance à l'origine* de la courbe.

Mais tout ceci n'a pas vraiment de sens physique, puisqu'on choisit l'origine des temps quand on veut ; on peut donc se débrouiller pour que $\phi = 0$. Oui, sauf dans le cas particulier (et qu'on va voir par la suite) où on étudie 2

signaux sinusoïdaux de même pulsation ; dans ce cas, la phase de chacun peut être changée en changeant l'origine des temps, mais la différence de phase entre les deux signaux ne peut pas être changée.

Propriété : Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même pulsation

Soient deux signaux $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ de même pulsation. Le déphasage de s_1 par rapport à s_2 est $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$; il correspond à un décalage temporel $\Delta t = T \frac{\Delta\phi}{2\pi}$. Il est positif si et seulement si la courbe 1 est en avance par rapport à la courbe 2.

Si on travaille en degrés, $\Delta t = T \frac{\phi}{360^\circ}$. On retrouve facilement cette relation par *Remarque* : proportionnalité, en retenant qu'un déphasage de $360^\circ = 2\pi$ est équivalent à un décalage temporel d'une période.

T	360°
Δt	ϕ

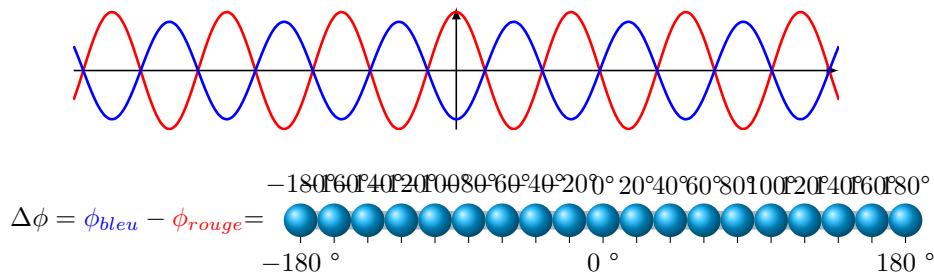


FIGURE E5.1 – Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence.

On peut d'ailleurs remarquer que les déphasages de 0° , $\pm 90^\circ$ et $\pm 180^\circ$ correspondent à des décalages particuliers, illustrés sur la figure E5.2.

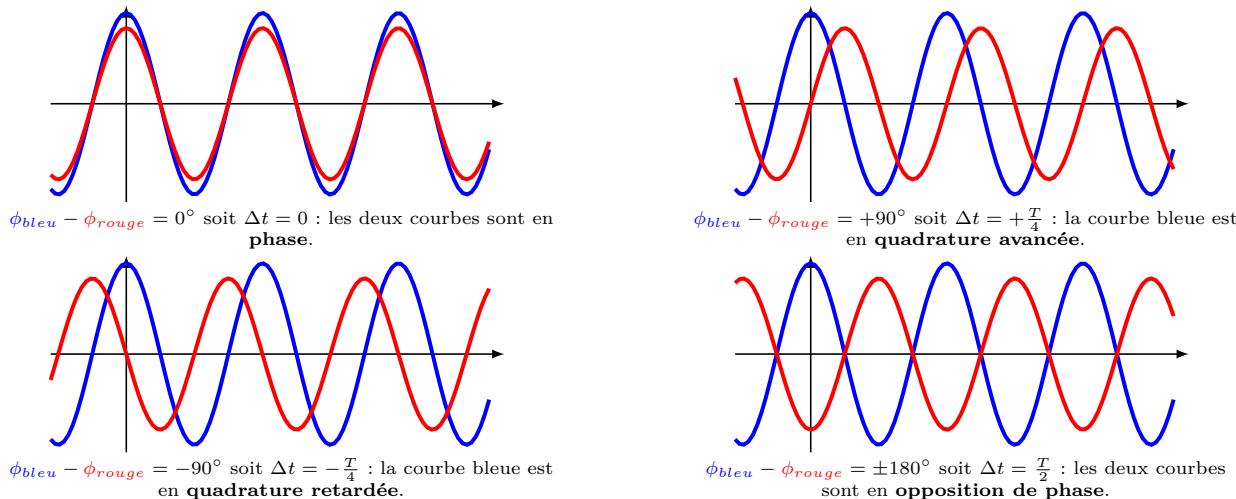


FIGURE E5.2 – Déphasage particuliers.

A.2. Image complexe d'un signal sinusoïdal

Nous allons donc maintenant nous intéresser à un dipôle soumis à une tension sinusoïdale ; par exemple un condensateur de capacité C soumis à $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. D'après la loi $i = C \frac{du}{dt}$ on peut calculer $i(t) = -C.U_0 \cdot \sin(\omega t)$: ce n'est plus un cosinus, mais à l'aide de la relation de trigonométrie $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$ on peut écrire $i(t) = C.U_0 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$: l'intensité donc pour amplitude $C.U_0$ et est déphasée de -90° par rapport à la tension.

Pour simplifier la manipulation des fonctions sinusoïdales et de leurs dérivées, Arthur Kennely a introduit en 1893 une astuce : la notation complexe.

! La notation complexe est un OUTIL. C'est très pratique, ça permet de simplifier les calculs, mais ça n'a aucune existence physique : il n'y a pas de courant ou de tension complexe dans un circuit !

Définition : Image complexe d'un signal sinusoïdal

À un signal sinusoïdal $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$, on associe son image complexe $\underline{s}(t) = S e^{j(\omega t + \phi)}$ où j représente le complexe tel que $j^2 = -1$.^a

Réciproquement, si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$, on peut retrouver le signal réel en prenant la partie réelle : $s(t) = \Re[\underline{s}(t)]$

a. Noté i en maths, mais en électricité i est déjà utilisé pour le courant.

Remarque : En physique, le soulignement d'un symbole indique qu'il s'agit d'un complexe.

Remarque : Certains cours introduisent plutôt l'*amplitude complexe* $\underline{S} = S e^{j\phi}$; c'est un autre outil, qui fonctionne pareil ; l'important est de ne pas le mélanger, on utilise l'un ou l'autre.

Propriété : Passage de l'image complexe au signal réel

Si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$ d'un signal, alors le signal réel vaut $s(t) = |\underline{s}(0)| \cos(\omega t + \arg(\underline{s}(0)))$

Démonstration

Notons $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$ alors par définition $\underline{s}(t) = S e^{j(\omega t + \phi)}$ donc $\underline{s}(0) = S e^{j\phi}$: ce nombre complexe a pour module S et pour argument ϕ .

Un peu de maths : Module et argument d'un nombre complexe

Pour calculer le module et l'argument d'un nombre complexe, il y a deux méthodes à connaître : soit à l'aide de la calculatrice, soit par les formules mathématiques.

Nous aurons essentiellement à calculer des modules et argument de quotients. Pour les modules :

- le module d'un quotient est le quotient des modules
- le module de $x + j.y$ vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$
- le module de $e^{j\theta}$ vaut 1

Pour les arguments :

- l'argument d'un quotient est la différence des arguments
- l'argument de $x + j.y$ vaut $\arctan \frac{y}{x}$ si $x > 0$ et $\arctan \frac{y}{x} \pm \pi$ si $x < 0$
- l'argument de $e^{j\theta}$ vaut θ

Dans le cas particulier où on travaille avec des valeurs numériques (et non pas avec des symboles), on peut utiliser la calculatrice. Votre calculatrice est capable de travailler sur des nombres complexes, et de calculer leurs modules et arguments. Regardez la notice.

Exemple : Passage d'image complexe à signal réel

Une tension $u(t)$ a pour image complexe $\underline{u}(t) = (3 + 2j).e^{300jt}$ en V. Exprimez $u(t)$.

$\underline{u}(0) = 3 + 2j$ a pour module $\sqrt{3^2 + 2^2} = 3,6$ V et pour argument $\arctan \frac{2}{3} = 0,59$ rad. Donc $u(t) = 3,6 \cos(300t + 0,59)$ car ici $\omega = 300$ rad · s⁻¹.

Remarque : Quand un énoncé demande de calculer un argument, on peut le donner en radians ou en degrés ; par contre, dans l'expression mathématique, à l'intérieur du cosinus, l'argument doit être en radians.

Propriété : Image complexe de la dérivée

L'image complexe de $\frac{ds}{dt}$ est $j\omega \underline{s}$

Démonstration

Notons $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$ d'image complexe $\underline{s}(t) = S e^{j(\omega t + \phi)}$; alors $\frac{ds(t)}{dt} = j\omega S e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \underline{s}(t)$. En prenant la partie réelle de chaque côté, on trouve que $\frac{ds}{dt} = \Re[j\omega \underline{s}]$ donc l'image complexe de $\frac{ds}{dt}$ est $j\omega \underline{s}$.

Remarque : L'image complexe de la dérivée seconde $\frac{d^2s}{dt^2}$ est logiquement $(j\omega)^2 \underline{s}$ ou encore $-\omega^2 \underline{s}$.

A.3. Résolution d'équations différentielles à second membre oscillant

Définition : Régime Sinusoïdal Forcé (RSF)

Lorsqu'un système **linéaire** est excité par un signal sinusoïdal de pulsation ω , alors toutes les grandeurs de ce système sont aussi, une fois le régime transitoire atténué, sinusoïdales à la pulsation ω . On appelle cela le Régime Sinusoïdal Forcé.

Ce régime correspond mathématiquement à la solution particulière de l'équation différentielle avec un second membre sinusoïdal.

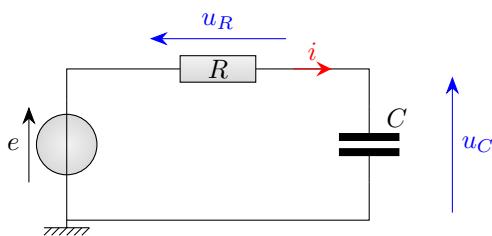
Méthode : Résolution d'un ED linéaire à second membre sinusoïdal

Si on possède une ED linéaire à second membre sinusoïdal de la forme $a.x + b.\dot{x} + c.\ddot{x} + \dots = A.\cos(\omega t)$, on cherche uniquement le régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire la solution particulière de l'équation. Pour cela :

- on «passe l'équation en complexes», c'est-à-dire qu'on transforme l'ED initiale sur $x(t)$ en une équation algébrique sur l'image complexe \underline{x} , selon les lois : $x \rightarrow \underline{x}$, $\dot{x} \rightarrow j\omega\underline{x}$, $\ddot{x} \rightarrow -\omega^2\underline{x}$, $\cos(\omega t + \phi) \rightarrow e^{j(\omega t + \phi)}$
- on isole l'image complexe du terme recherché, ici \underline{x}
- on calcule son module et son argument à $t = 0$, et on en déduit $x(t) = |\underline{x}(0)| \cos(\omega t + \arg \underline{x}(0))$

Exemple : Circuit RC alimenté par une tension sinusoïdale

On considère un circuit RC alimenté par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$.



1. Établissez l'ED vérifiée par u_C .
2. Déterminez les caractéristiques de u_C en régime permanent (sinusoïdal forcé).

1. Loi des mailles : $e = u_R + u_C = R.i + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$ donc $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t + \phi)$
2. On passe l'équation en complexes : $RC j\omega u_C + \underline{u}_C = E_0 e^{j(\omega t + \phi)}$
On isole $\underline{u}_C = \frac{E_0 e^{j(\omega t + \phi)}}{1 + jRC\omega}$
On a donc $\underline{u}_C(t=0) = \frac{E_0}{1 + jRC\omega}$ donc $|\underline{u}_C(t=0)| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ et $\arg \underline{u}_C(t=0) = -\arctan(RC\omega)$.
On en déduit que $u_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(RC\omega))$

A.4. Représentation à l'aide du diagramme de Fresnel

Définition : Diagramme de Fresnel

Le diagramme de Fresnel est une représentation des images complexes $\underline{s}(t)$ dans le plan complexe au moyen de vecteurs, à un instant t donné.

Propriété : Evolution temporelle

Au cours du temps, les vecteurs tournent dans le diagramme de Fresnel avec une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration

$\underline{s}(t) = S.e^{j(\omega t + \phi)} = S.e^{j\phi}.e^{j\omega t} = \underline{s}(0).e^{j\omega t}$. Or multiplier un nombre complexe par $e^{j\theta}$ a pour conséquence de ne pas modifier son module et d'augmenter son argument de θ , autrement dit de faire tourner son vecteur représentatif d'un angle θ . On en déduit que $\underline{s}(t)$ est le vecteur $\underline{s}(0)$ tourné d'un angle ωt .

FIGURE E5.3 – Évolution d'un vecteur du diagramme de Fresnel au cours du temps.

E5.B. Cas des circuits électriques en RSF

La méthode qu'on a vue s'applique à des systèmes électriques, mécaniques,...mais dans le cas des circuits électriques, on dispose d'un outil particulier et très pratique.

B.1. Impédances complexes

On va commencer par rappeler la notion de dipôle linéaire pour des régimes régimes variables.

Définition : Dipôle linéaire

Un dipôle linéaire est un dipôle pour lequel la tension u à ses bornes et l'intensité i qui le traverse sont reliés par une *équation différentielle linéaire* de la forme

$$a_0 \cdot i + a_1 \cdot \frac{di}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \dots = b_0 \cdot u + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots$$

Par exemple, la résistance, le condensateur et l'inductance sont des dipôles linéaires.

Définition : Impédance complexe

Pour un dipôle linéaire, l'équation différentielle qui relie u et i en convention récepteur se traduit par une relation de proportionnalité entre u et i en RSF. Le coefficient de proportionnalité $\underline{Z} = \frac{u}{i}$ s'appelle l'**impédance complexe** du dipôle. On a ainsi la **loi d'Ohm généralisée** :

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i} \quad (\text{E5.1})$$

L'inverse de l'impédance \underline{Z} est l'**admittance** \underline{Y} : $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$.

La notion d'impédance (complexe) est donc une généralisation de la résistance déjà vue. Avant de regarder ce que valent les impédances d'un condensateur et d'une inductance, analysons rapidement le sens de \underline{Z} :

Propriété : Sens physique de l'impédance

Le module de l'impédance $|\underline{Z}| = \frac{|u|}{|i|}$ se mesure en Ω ; il a le sens d'une résistance, c'est-à-dire qu'il indique si le dipôle laisse passer beaucoup de courant ou pas pour une tension fixée.

L'argument de l'impédance $\arg \underline{Z} = \arg \underline{u} - \arg \underline{i}$ indique le déphasage de la tension par rapport au courant.

Propriété : Impédance d'une résistance

L'impédance d'une résistance R est simplement

$$\underline{Z} = R \quad (\text{E5.2})$$

Démonstration

$u = R.i$ donc en prenant les images complexes : $\underline{u} = R.\underline{i}$ donc $\underline{Z} = R$.

Logique, puisque la notion d'impédance sert à généraliser celle de résistance. Cela implique (figure E5.4) que la tension et le courant sont en phase.

FIGURE E5.4 – Illustration de la tension et du courant pour une résistance en RSF.

Propriété : Impédance d'un condensateur

L'impédance d'un condensateur de capacité C vaut

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} \quad (\text{E5.3})$$

Démonstration

La loi du condensateur est $i = C \cdot \frac{du}{dt}$. En passant en complexes, on obtient $\underline{i} = C.j\omega.\underline{u}$ soit $\underline{u} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$. On a donc bien $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$.

$\frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$ a pour argument $-\frac{\pi}{2}$ donc la tension aux bornes d'un condensateur est en quadrature retardée par rapport au courant (figure E5.5). De plus, le module de l'impédance vaut $\frac{1}{C\omega}$ ce qui implique que :

Propriété : Équivalents BF et HF d'un condensateur

En basse fréquence, un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

En haute fréquence, un condensateur est équivalent à un fil.

Démonstration

$|\underline{Z}| = \frac{1}{C\omega}$. En BF, $\omega \rightarrow 0$ donc $|\underline{Z}| \rightarrow \infty$: le condensateur devient équivalent à une très grande résistance, qui ne laisse plus passer le courant, comme un interrupteur ouvert.

En HF au contraire, $|\underline{Z}| \rightarrow 0$: le condensateur devient équivalent à une résistance nulle, donc un fil.

On verra l'utilité de ces équivalents BF et HF plus tard, en étudiant les filtres.

FIGURE E5.5 – Illustration de la tension et du courant pour un condensateur en RSF.

Propriété : Impédance d'une bobine

L'impédance d'une bobine d'inductance L vaut

$$\underline{Z} = jL\omega \quad (\text{E5.4})$$

Démonstration

La loi de la bobine est $u = L \frac{di}{dt}$. En passant en complexes, on a $\underline{u} = L j\omega \underline{i}$ donc $\underline{Z} = jL\omega$.

$jL\omega$ a pour argument $\frac{\pi}{2}$ donc la tension aux bornes d'une bobine est en quadrature avancée par rapport au courant (figure E5.6). De plus, le module de l'impédance vaut $L\omega$ ce qui implique que :

Propriété : Équivalents BF et HF d'une bobine

En basse fréquence, une bobine est équivalente à un fil.

En haute fréquence, une bobine est équivalente à un interrupteur ouvert.

Démonstration

$|\underline{Z}| = L\omega$. En BF, $\omega \rightarrow 0$ donc $|\underline{Z}| \rightarrow 0$; tandis qu'en HF, $|\underline{Z}| \rightarrow +\infty$.

FIGURE E5.6 – Illustration de la tension et du courant pour une bobine en RSF.

B.2. Extensions des lois du régime continu

Commençons par un rappel :

Définition : Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Un circuit électrique en RSF fonctionne en ARQS si la taille du circuit est petite devant la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$ de la lumière à la fréquence de travail.

Propriété : Lois valides en ARQS

Dans le cadre de l'ARQS, la loi des noeuds reste valide avec une bonne approximation, de même que la loi qui dit que le potentiel est constant le long d'un fil. La loi d'additivité des tensions est toujours valide tant qu'il n'y a pas de phénomènes d'induction.

En TP par exemple, les paillasses font 2 m de large. L'ARQS reste valide tant que $\frac{c}{f} \gg 2$ m soit $f \ll 150$ MHz : c'est pour cela qu'en TP on ne dépassera pas les 10 MHz. Les générateurs qu'on utilisera sont appelés «Générateurs Basse Fréquence» (GBF) pour indiquer qu'ils respectent cette limite d'ARQS pour une paillasse de TP ; mais ils peuvent quand même débiter des fréquences élevées !

À l'opposé, le réseau domestique d'électricité est alimenté en 50 Hz ; il est en ARQS tant que sa taille L vérifie $L \ll \frac{c}{50}$ soit $L \ll 6000$ km : ça passe pour le réseau français.

Si on n'est plus en ARQS, les lois deviennent compliquées. Pour cette année, on sera **toujours** dans le cadre de l'ARQS, donc la loi des noeuds sera toujours valable.

Si les lois des noeuds et d'additivité (et donc des mailles) sont valables en instantané, elles le sont aussi pour les images complexes :

Loi des noeuds

En ARQS, la somme des intensités qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités qui partent de ce nœud.

En notant les intensités qui arrivent ou partent d'un noeud avec un indice k , on peut écrire cette loi sous la forme générale :

$$\sum_k \epsilon_k i_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant } i_k \text{ va vers le nœud et } -1 \text{ sinon} \quad (\text{E5.5})$$

Loi d'additivité des tensions

Les tension, qu'on symbolise par des flèches, vérifient la relation de Chasles : $\underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC} = \underline{u}_{AC}$.

Loi des mailles

Considérons une maille d'un circuit ; on l'oriente, c'est-à-dire qu'on choisit un sens de parcours. Alors la somme des tensions orientées autour de cette maille est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u}_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si la tension } \underline{u}_k \text{ tourne dans le sens de la maille et } -1 \text{ sinon} \quad (\text{E5.6})$$

! On ajoute les images complexes, pas les amplitudes ! Si $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}_3$ alors $|\underline{u}_1| + |\underline{u}_2| \neq |\underline{u}_3|$; cf. l'inégalité triangulaire en maths !

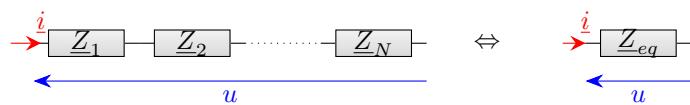
Remarque : Sur un diagramme de Fresnel, ces lois se traduisent en ajoutant les vecteurs.

À partir de ces lois fondamentales, et en ajoutant la loi d'Ohm généralisée, on peut généraliser en RSF tout ce qu'on a vu au chapitre E2 :

Propriété : Association d'impédances en série

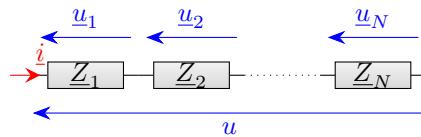
Des impédances \underline{Z}_i placées en série sont équivalentes à une seule impédance équivalente \underline{Z}_{eq} telle que

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_k \underline{Z}_k \quad (\text{E5.7})$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les tensions aux bornes de chaque impédance :



On peut alors écrire : $\underline{u} = \sum_{k=1}^N \underline{u}_k$ (loi d'additivité des tensions)

$$= \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k \cdot i \quad (\text{loi d'Ohm généralisée})$$

$$= \underline{Z}_{eq} \cdot i \text{ avec } \underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$$

Loi du pont diviseur de tension

Soient N impédances en série ; on met une tension \underline{u} aux bornes de l'ensemble. Alors la tension aux bornes de la n -ième impédance vaut

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \underline{u}_1 \quad \underline{u}_2 \quad \underline{u}_N \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \underline{Z}_1 \quad \underline{Z}_2 \quad \cdots \cdots \quad \underline{Z}_N \quad \text{---} \\ | \\ \underline{u} \end{array} \quad \underline{u}_n = \underline{u} \frac{\underline{Z}_n}{\sum_{k=1}^N \underline{Z}_k} \quad (\text{E5.8})$$

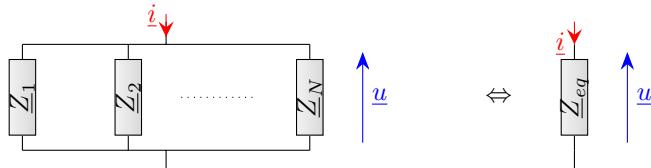
Démonstration

Plaçons le courant i pour que les impédances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm généralisée, $\underline{u}_n = \underline{Z}_n \cdot i$. Or l'ensemble des impédances est équivalent à une seule impédance $\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Z}_k$, donc $\underline{u} = \underline{Z}_{eq} \cdot i$. On en déduit que $i = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_{eq}}$ donc $\underline{u}_n = \underline{u} \frac{\underline{Z}_n}{\underline{Z}_{eq}}$.

Propriété : Association d'impédances en parallèle

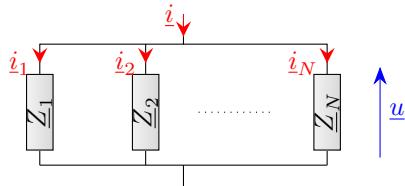
Des impédances \underline{Z}_k placées en parallèle sont équivalentes à une seule impédance équivalente \underline{Z}_{eq} telle que

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k} \text{ soit } \underline{Y}_{eq} = \sum_k \underline{Y}_k \quad (\text{E5.9})$$



Démonstration

Refaisons le schéma en plaçant les courants qui traversent chaque impédance :



$$\begin{aligned} \text{On peut alors écrire : } i &= \sum_{k=1}^N i_k \text{ (loi des noeuds)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{u}{\underline{Z}_k} \text{ (loi d'Ohm généralisée)} \\ &= \frac{u}{\underline{Z}_{eq}} \text{ avec } \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k} \end{aligned}$$

Loi du pont diviseur de courant

Soient N impédances en parallèle ; on alimente l'ensemble par un courant i . Alors le courant qui traverse la n -ième impédance vaut

$$i_n = I \frac{\underline{Y}_n}{\sum_{k=1}^N \underline{Y}_k} = i \frac{\frac{1}{\underline{Z}_n}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad (\text{E5.10})$$

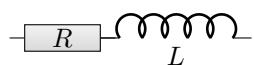
Démonstration

Plaçons la tension \underline{u} pour que les impédances soient en convention récepteur. Par la loi d'Ohm généralisée, $i_n = \underline{Y}_n \cdot \underline{u}$. Or l'ensemble des admittances est équivalent à une seule admittance $\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$, donc $i = \underline{Y}_{eq} \cdot \underline{u}$. On en déduit que $\underline{u} = \frac{i}{\underline{Y}_{eq}}$ donc $i_n = i \frac{\underline{Y}_n}{\underline{Y}_{eq}}$.

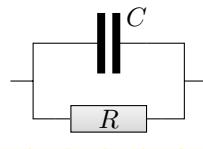
Remarque : Dans le cas où il n'y a que 2 impédances, la loi s'écrit $i_1 = I \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = i \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} = i \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ et de même $i_2 = i \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$, mais ces formules ne se généralisent pas à plus de 2 impédances.

Exemple : Associations d'impédances

Calculez l'impédance des dipôles suivant :



(a)



(b)

$$(a) : \underline{Z} = R + jL\omega$$

$$(b) : \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega \text{ donc } \underline{Z} = \frac{R}{1+jRC\omega}$$

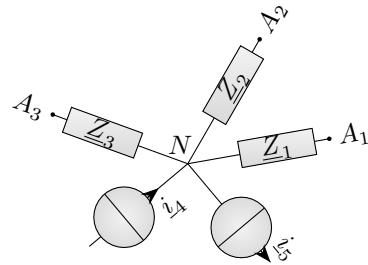
Propriété : Générateurs en RSF

Pour modéliser un générateur linéaire en RSF, on dispose du modèle de Thévenin généralisé, formé d'une source idéale de tension e en série avec une impédance \underline{Z} , de loi caractéristique $\underline{u} = e - \underline{Z}.\underline{i}$.

Théorème de Millman (ou Loi des nœuds en terme de potentiels)

Considérons un noeud N auquel arrivent plusieurs branches :

- des branches par lesquelles le noeud N est relié à d'autres noeuds A_k par des impédances \underline{Z}_k
- des branches par lesquelles un courant i_j arrive au noeud N ($\epsilon_j = +1$) ou en part ($\epsilon_j = -1$)

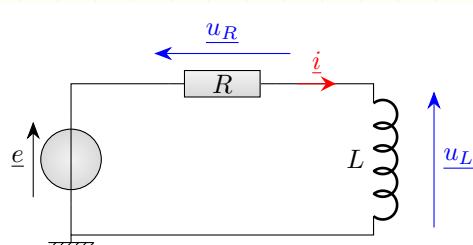


alors le potentiel du noeud N est relié aux autres par la relation :

$$v_N = \frac{\sum_k \frac{v_{A_k}}{\underline{Z}_k} + \sum_j \epsilon_j i_j}{\sum_k \frac{1}{\underline{Z}_k}} \quad (\text{E5.11})$$

Ainsi, à partir de maintenant, quand on travaille sur un circuit électrique linéaire en RSF, on ne passe plus par l'établissement compliqué d'une ED : on applique directement les lois des circuits et des impédances.

Exemple : Étude du circuit RL série



On alimente ce circuit par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ avec $E_0 = 5 \text{ V}$. Pour les AN on prendra $R = 200 \Omega$ et $L = 32 \text{ mH}$.

1. Exprimez e , u_L , u_R et i .
2. Calculez les caractéristiques de $u_L(t)$, $u_R(t)$ et $i(t)$ si la tension e a pour fréquence $f = 1,2 \text{ kHz}$.
3. Calculez les limites de $|u_L|$ et $|u_R|$ en basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) et en haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$).
4. Justifiez que, quelle que soit la fréquence, $u_L(t)$ est en avance sur $e(t)$ tandis que $u_R(t)$ est en retard.

1. Par définition, à partir de $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ on peut écrire $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$.
 Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}_L = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} \underline{e} = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} E_0 e^{j\omega t}$; de même $\underline{u}_R = \frac{R}{R+jL\omega} E_0 e^{j\omega t}$
 Pour le courant, on peut par exemple appliquer la loi d'Ohm à l'impédance totale : $\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R+jL\omega} = \frac{E_0}{R+jL\omega} e^{j\omega t}$
2. Si $\omega = 2\pi \times 1200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ alors on peut calculer numériquement $\underline{u}_L = (2,96 + 2,46j)e^{j\omega t}$ donc $\underline{u}_L(0) = 2,96 + 2,46j$; on trouve que son module vaut 3,85 V et son argument 0,69 rad = 39,7°. Donc $u_L(t) = 3,85 \cos(2400\pi t + 0,69)$ en (V).
 De même on trouve $u_R(t) = 3,19 \cos(2400\pi t - 0,88)$ (en V) et $i(t) = 16 \cos(2400\pi t - 0,88)$ (en mA).
3. En BF, $|\underline{u}_L|$ tend vers 0 et $|\underline{u}_R|$ tend vers E_0 .
 En HF, $|\underline{u}_L|$ tend vers E_0 et $|\underline{u}_R|$ tend vers 0.
 On voit ainsi que la tension ne se répartit pas de la même façon entre les deux dipôles en fonction de la fréquence.
4. On a vu que $\underline{u}_L = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} \underline{e}$ donc en prenant l'argument : $\arg \underline{u}_L = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{L\omega}{R} + \epsilon$; le déphasage de \underline{u}_L par rapport à \underline{e} vaut donc $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{L\omega}{R} > 0$ donc la tension correspondante est en avance.
 De même le déphasage de \underline{u}_R par rapport à \underline{e} vaut $-\arctan \frac{L\omega}{R} < 0$ donc la tension est en retard.

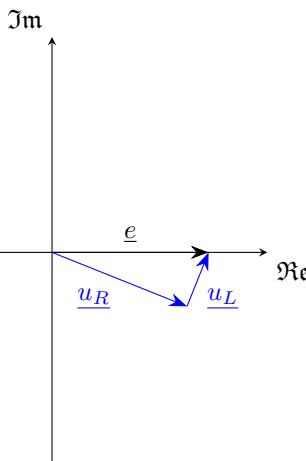


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RL série à basse fréquence

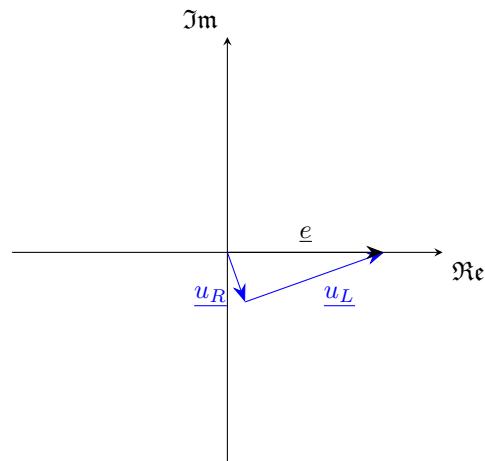


Diagramme de Fresnel en tension du circuit RL série à haute fréquence

B.3. Obtention d'une ED à partir du RSF

On a vu qu'on peut obtenir les relations sur les images complexes à partir d'une ED ; puis qu'on pouvait se passer de l'ED et directement travailler avec les impédances. En fait, on peut même déterminer l'ED d'un circuit grâce aux impédances.

Méthode : Établissement d'ED par les lois amplitudes complexes

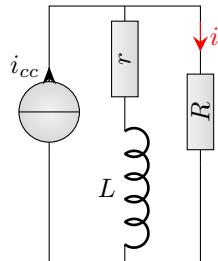
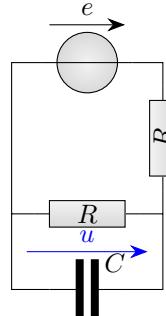
- On trouve l'image complexe de la grandeur recherchée.
- On modifie l'équation de manière à ne plus avoir de termes $j\omega$ à quelque dénominateur que ce soit.
- On en déduit l'ED par la transposition

$$\begin{aligned}\underline{s} &\rightarrow s(t) \\ j\omega \underline{s} &\rightarrow \dot{s} \\ -\omega^2 \underline{s} &\rightarrow \ddot{s} \\ e^{j(\omega t + \phi)} &\rightarrow \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Remarque : En pratique, cette méthode est plus rapide pour les circuits compliqués à plusieurs mailles.

Exemple : Établissement d'une équation différentielle

- Établissez l'équation différentielle vérifiée par i dans le circuit de gauche (en fonction de i_{cc} et des composants).
- Établissez l'équation différentielle vérifiée par u dans le circuit de droite (en fonction de e et des composants).

ED sur i ED sur u

1. Un simple diviseur de courant indique que $\underline{i} = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r+jL\omega}} \underline{i}_{cc}$. On passe le dénominateur à gauche : donc $\frac{1}{R}\underline{i} + \frac{1}{r+jL\omega}\underline{i} = \frac{1}{R}\underline{i}_{cc}$. Il reste du $j\omega$ au dénominateur, dans le terme $r + jL\omega$, donc on multiplie **toute l'équation** par $r + jL\omega$ et on obtient $\frac{r}{R}\underline{i} + \frac{jL\omega}{R}\underline{i} + \underline{i} = \frac{r}{R}\underline{i}_{cc} + \frac{jL\omega}{R}\underline{i}_{cc}$. On repasse alors dans le domaine temporel :

$$\frac{r}{R}\dot{i} + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{r}{R}i_{cc} + \frac{L}{R}\frac{di_{cc}}{dt}$$

2. On associe les deux impédances en bas : $Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}$. Par le diviseur de tension : $\underline{u} = \frac{\frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R}\underline{e}}{\frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R}\underline{e} + R} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + R} \underline{e} = \frac{1}{1+1+jRC\omega} \underline{e} = \frac{1}{2+jRC\omega} \underline{e}$. On passe le dénominateur en face : $2\underline{u} + jRC\omega\underline{u} = \underline{e}$, donc $2u + RC\frac{du}{dt} = e$.

E5.C. Aspect énergétique

Nous avons vu que la puissance reçue par un dipôle en convention récepteur s'écrit $\mathcal{P} = u.i$; ou bien la puissance d'une force s'écrit $\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}$. Il s'agit de relations **non linéaires** : on ne peut donc pas les passer en complexes ; plus exactement, un produit de deux signaux sinusoïdaux n'est pas un signal sinusoïdal. On va néanmoins en montrer une propriété très intéressante : sa valeur moyenne est non nulle.

C.1. Moyenne d'un produit de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation

Propriété : Valeur moyenne du produit de deux signaux sinusoïdaux

Soient deux signaux sinusoïdaux $a(t) = A \cos(\omega t + \phi_a)$ et $b(t) = B \cos(\omega t + \phi_b)$ de même pulsation. Alors $\langle a.b \rangle = \frac{A.B}{2} \cos(\phi_a - \phi_b)$

Démonstration

$a.b = A.B \cos(\omega t + \phi_a) \cos(\omega t + \phi_b)$; par la formule de linéarisation d'un produit de cosinus, $a.b = \frac{A.B}{2} [\cos(\omega t + \phi_a + \omega t + \phi_b) + \cos(\omega t + \phi_a - \omega t - \phi_b)] = \frac{A.B}{2} [\cos(2\omega t + \phi_a + \phi_b) + \cos(\phi_a - \phi_b)]$. Le premier cosinus varie au cours du temps entre +1 et -1, sa moyenne temporelle est nulle ; le second est constant, donc sa valeur moyenne est lui-même. Donc on a bien $\langle a.b \rangle = \frac{A.B}{2} \cos(\phi_a - \phi_b)$.

Propriété : Valeur efficace d'un signal

Un signal sinusoïdal d'amplitude S_0 a pour valeur efficace $S_{eff} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$

Démonstration

$$S_{eff}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{S_0 \cdot S_0}{2} \cos(\phi_s - \phi_s) = \frac{S_0^2}{2}.$$

Remarque : On peut donc aussi écrire $\langle a.b \rangle = A_{eff} \cdot B_{eff} \cdot \cos(\phi_a - \phi_b)$.

Propriété : Valeur moyenne du produit de deux signaux sinusoïdaux en fonction des images complexes

Soient deux signaux sinusoïdaux $a(t)$ et $b(t)$ de même pulsation. Alors

$$\langle a(t).b(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re [a^* \cdot b] \quad (\text{E5.12})$$

où le symbole a^* désigne le complexe conjugué de a .

Démonstration

Notons $a(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi_a)$ et $b(t) = B \cdot \cos(\omega t + \phi_b)$. Alors $\underline{a} = A \cdot e^{j(\omega t + \phi_a)}$ et $\underline{b} = B \cdot e^{j(\omega t + \phi_b)}$ donc $\frac{1}{2} \Re [a^* \cdot b] = \frac{1}{2} \Re [A \cdot B \cdot e^{j(-\omega t - \phi_a + \omega t + \phi_b)}] = \frac{1}{2} \Re [A \cdot B \cdot e^{j(\phi_b - \phi_a)}] = \frac{A \cdot B}{2} \cos(\phi_b - \phi_a)$

Remarque : La formule est symétrique, on peut prendre le conjugué de a ou bien de b .

C.2. Puissance moyenne reçue par un dipôle

Propriété : Puissance moyenne reçue par une impédance

Un dipôle d'impédance \underline{Z} soumis à une tension \underline{u} et traversée par un courant \underline{i} reçoit une puissance moyenne

$$\langle \mathcal{P} \rangle = I_{eff}^2 \cdot \Re [\underline{Z}] = U_{eff}^2 \cdot \Re [\underline{Y}] \quad (\text{E5.13})$$

Démonstration

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\underline{u} \cdot \underline{i}^*] = \frac{1}{2} \Re [\underline{Z} \cdot \underline{i} \cdot \underline{i}^*] = \frac{1}{2} |\underline{i}|^2 \Re [\underline{Z}] = I_{eff}^2 \Re [\underline{Z}]$$

$$\text{De même : } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re [\underline{u}^* \cdot \underline{i}] = \frac{1}{2} \Re [\underline{u}^* \cdot \underline{Y} \cdot \underline{i}] = \frac{1}{2} |\underline{u}|^2 \Re [\underline{Y}] = U_{eff}^2 \Re [\underline{Y}]$$

Propriété : Puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine

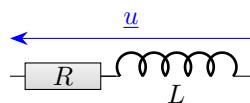
La puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine est nulle.

Démonstration

Il suffit de remarquer que \underline{Z} est imaginaire pur.

Exemple : Calcul d'une puissance moyenne

Exprimez la puissance moyenne reçue par ce dipôle, en fonction de U_{eff} :



Pour exprimer la puissance en fonction de la tension, il faut calculer l'admittance $\underline{Y} = \frac{1}{R+jL\omega}$ et prendre sa partie réelle à l'aide de la quantité conjuguée : $\Re \underline{Y} = \Re \frac{R-jL\omega}{R^2+L^2\omega^2} = \frac{R}{R^2+L^2\omega^2}$. Donc $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{RU_{eff}^2}{2(R^2+L^2\omega^2)}$.

Remarque : Les formules de valeurs moyennes servent aussi pour calculer les énergies moyennes stockées par les condensateur et bobine : $\langle E_C \rangle = C \cdot U_{eff}^2$ et $\langle E_L \rangle = L \cdot I_{eff}^2$.

Régime Sinusoïdal Forcé**Programme officiel****Programme officiel**

Notions et contenus	Capacités exigibles
Signal sinusoïdal Description du comportement d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé. Impédances complexes. Cas d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.	Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
Association de deux impédances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

Régime Sinusoïdal Forcé

QCMs

réponses page 537

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Lesquelles de ces relations sont justes ?

- (a). $f = \frac{2\pi}{T}$
 (c). $T = \frac{2\pi}{\omega}$
 (e). $T = \frac{\omega}{2\pi}$
- (b). $\omega = 2\pi f$
 (d). $T = \frac{1}{f}$
 (f). $\omega = \frac{2\pi}{f}$

Q2.

Un signal sinusoïdal $s(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ a pour image complexe :

- (a). $A e^{j\omega t}$
 (c). $S_0 e^{j(\omega t + \phi)}$
- (b). $A e^{j\theta}$
 (d). $A e^{j(\omega t + \theta)}$

Q3.

Si on connaît l'image complexe $\underline{s}(t)$ d'un signal, alors le signal réel vaut :

- (a). $\Re[\underline{s}(t)]$
 (c). $|\underline{s}(0)| \cos(\omega t + \arg \underline{s}(0))$
- (b). $|\underline{s}(t)|$
 (d). $\underline{s}(t) \cdot \cos(\omega t)$

Q4.

L'impédance d'un condensateur vaut :

- (a). $C\omega$
 (c). $\frac{1}{jC\omega}$
- (b). C
 (d). $jC\omega$

Q5.

L'impédance d'une inductance vaut :

- (a). L
 (c). $L\omega$
- (b). $\frac{1}{jL\omega}$
 (d). $jL\omega$

Q6.

La puissance moyenne reçue par une impédance vaut :

- (a). $\Re[Y] \cdot U_{eff}^2$
 (c). $\Re[Z] \cdot |i|^2$
- (b). $Z \cdot i^2$
 (d). $\Re[Z] \cdot I_{eff}^2$

Q7.

La puissance moyenne reçue par un condensateur vaut :

- (a). 0
 (c). $C \cdot I_{eff}^2$
- (b). $\frac{1}{2} C \cdot U_{eff}^2$
 (d). $C \cdot U_{eff}^2$

 QCM : Image complexe et signal réel

Q8.

Si $s(t) = 3 \cos(300t + 0,2)$ alors $\underline{s}(t) =$

- (a). $3 \cdot e^{0,2jt}$
 (c). $3 \cdot e^{j(\omega t + 0,2)}$
- (b). $3 + 0,2j$
 (d). $3 \cdot e^{j(300t + 0,2)}$

Q9.

Si $\underline{s}(t) = 4e^{j(200t-0,3)}$ alors $s(t) =$

- (a). $4 \cos(200t - 0,3)$
 (c). $4 \sin(200t - 0,3)$
- (b). $4 \cos(-0,3)$
 (d). $4 \cos(\omega t - 0,3)$

Q10.

Si $\underline{s}(t) = (4+2,1j)e^{200jt}$ alors $s(t) =$

- (a). $4 \cos(200t) + 2,1 \sin(200t)$
 (c). $4,5 \cos(200t + 0,5)$
- (b). $6,1 \cos(200t + 0,5)$
 (d). $4 \cos(200t + 2,1)$

Q11.

Si $\underline{s}(t) = 3,2je^{800jt}$ alors $s(t) =$

- (a). $3,2 \cos(800t + 1,6)$
 (c). 0
- (b). $3,2 \sin(800t)$
 (d). $3,2 \cos(800t + 1)$

Q12.

Si $\underline{s}(t) = (0,8+0,5j)e^{1000jt+0,4}$ alors $s(t) =$

- (a). $0,94 \cos(1000t + 1,0)$
 (c). $0,8 \cos(1000t + 0,4)$
- (b). $0,94 \cos(1000t + 0,6)$
 (d). $0,8 \cos(1000t + 0,5)$

Q13.

Si $a(t) = 3 \cos(300t)$ et $b = \frac{3}{1+2j}a$ alors $b(t) =$

- (a). $9 \cos(300t + 0,5)$
 (c). $9 \cos(300t + 1,1)$
- (b). $4 \cos(300t + 1,1)$
 (d). $4 \cos(300t - 1,1)$

Q14.

Si $a(t) = 3 \cos(500t + 0,2)$ et $2,4 \cdot 10^{-3} \frac{db}{dt} + b = 2a$ alors $b(t) =$

- (a). $3,8 \cos(500t - 0,7)$
 (c). $3,8 \cos(500t + 1,1)$
- (b). $3,8 \cos(500t + 0,7)$
 (d). $3,8 \cos(500t - 1,1)$

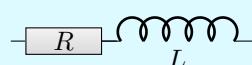


QCM : Association d'impédances



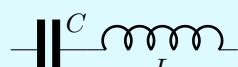
Exprimez simplement les impédances équivalentes sans chercher à simplifier l'expression.

Q15.

 $Z_{eq} =$ 

- (a). $jLR\omega$
 (c). $R + \frac{1}{jL\omega}$
- (b). $R + jL\omega$
 (d). $R + L$

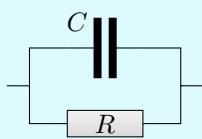
Q16.

 $Z_{eq} =$ 

- (a). $jC\omega + jL\omega$
 (c). $\frac{1}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega}}$
- (b). $\frac{1}{jC\omega} + jL\omega$
 (d). $C + L$

Q17.

$$Z_{eq} =$$

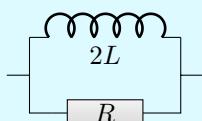


- (a). $R + \frac{1}{jC\omega}$
 (c). $\frac{1}{R} + jC\omega$

- (b). $R + jC\omega$
 (d). $\frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}$

Q18.

$$Z_{eq} =$$

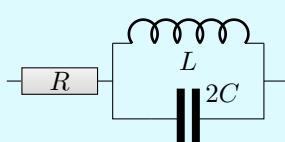


- (a). $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2jL\omega}}$
 (c). $R + j2L\omega$

- (b). $\frac{1}{R} + \frac{1}{j2L\omega}$
 (d). $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}}$

Q19.

$$Z_{eq} =$$

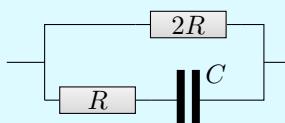


- (a). $\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + j2C\omega}$
 (c). $R + \frac{1}{jL\omega} + j2C\omega$

- (b). $R + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega}$
 (d). $R + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + j2C\omega}$

Q20.

$$Z_{eq} =$$

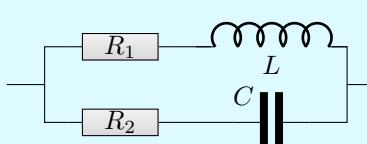


- (a). $\frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R} + jC\omega}$
 (c). $\frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}}$

- (b). $\frac{1}{\frac{1}{2R} + R + \frac{1}{jC\omega}}$
 (d). $\frac{1}{3R + \frac{1}{jC\omega}}$

Q21.

$$Z_{eq} =$$

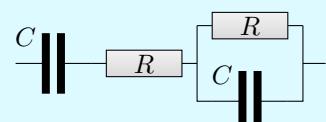


- (a). $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R_2} + jC\omega}$
 (c). $\frac{1}{\frac{1}{R_1 + jL\omega} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}}}$

- (b). $\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega}$
 (d). $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$

Q22.

$$Z_{eq} =$$



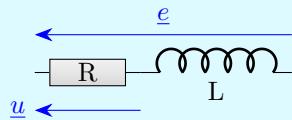
- (a). $R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}}$
 (c). $R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}$

- (b). $\frac{1}{\frac{1}{R} + 2jC\omega}$
 (d). $R + jC\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{jC\omega}$

✓ QCM : Pont diviseur de tension ✗

Q23.

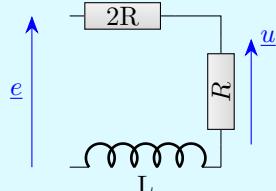
$\underline{u} =$



- (a). $\frac{R}{R+jL\omega}e$
 (b). $\frac{R}{R+jL\omega}e$
 (c). $\frac{R}{R+L}e$
 (d). $\frac{R}{R+jL\omega}$

Q24.

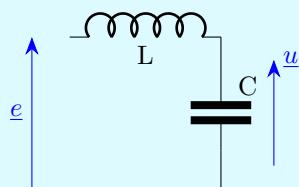
$\underline{u} =$



- (a). $-\frac{R}{R+jL\omega}e$
 (b). $\frac{R}{R+jL\omega}e$
 (c). $\frac{3R}{3R+jL\omega}e$
 (d). $\frac{R}{3R+jL\omega}e$

Q25.

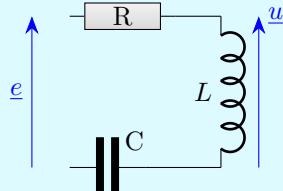
$\underline{u} =$



- (a). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}e$
 (b). $\frac{1}{(jC\omega)(jL\omega)}e$
 (c). $\frac{jC\omega}{jC\omega+\frac{1}{jL\omega}}e$
 (d). $\frac{jC\omega}{jC\omega+jL\omega}e$

Q26.

$\underline{u} =$

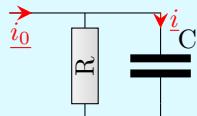


- (a). $\frac{jL\omega}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}e$
 (b). $\frac{L}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}e$
 (c). $\frac{jL\omega}{R+\frac{1}{jC\omega}}e$
 (d). $\frac{L}{R+L+C}e$

✓ QCM : Pont diviseur de courant ✗

Q27.

$\underline{i} =$

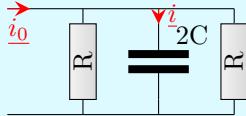


(a). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} i_0$
 (c). $-\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} i_0$

(b). $\frac{jC\omega}{\frac{1}{R} + jC\omega} i_0$
 (d). $\frac{C}{R + C} i_0$

Q28.

$i =$

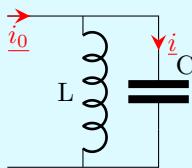


(a). $\frac{\frac{1}{jC\omega/2}}{\frac{R}{2} + jC\omega/2} i_0$
 (c). $\frac{j2C\omega}{\frac{R}{2} + j2C\omega} i_0$

(b). $\frac{\frac{1}{jC\omega/2}}{\frac{R}{2} + jC\omega/2} i_0$
 (d). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{R}{2} + jC\omega} i_0$

Q29.

$i =$

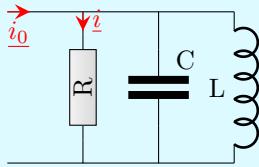


(a). $\frac{jC\omega}{jL\omega + jC\omega} i_0$
 (c). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} i_0$

(b). $\frac{jC\omega}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega} i_0$
 (d). $\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{jC\omega}} i_0$

Q30.

$i =$



(a). $\frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} i_0$
 (c). $\frac{R}{\frac{1}{R} + jC\omega + \frac{1}{jL\omega}} i_0$

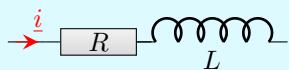
(b). $\frac{\frac{R}{2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} i_0$
 (d). $\frac{\frac{R}{2}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} i_0$

✓ QCM : Puissance reçue par un dipôle ✗

Exprimez la puissance totale reçue par le dipôle représenté, en fonction des données ; quand les circuit deviennent complexe, on se contentera d'une valeur numérique qu'on pourra calculer grâce à une calculatrice travaillant sur les nombres complexes.

Q31.

$\mathcal{P} =$

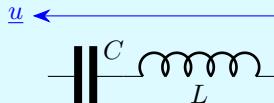


(a). $\frac{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}|i|^2}{2}$
 (c). $\frac{(R + jL\omega)i^2}{2}$

(b). $\frac{R|i|^2}{2}$
 (d). $R|i|^2$

Q32.

$\mathcal{P} =$

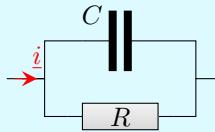


- (a). 0
 (c). $\frac{|\underline{u}|^2}{2(L\omega + \frac{1}{C\omega})}$

- (b). ∞
 (d). $(C + L)\omega \frac{|\underline{u}|^2}{2}$

Q33.

$$\mathcal{P} =$$

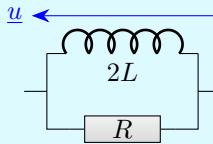


- (a). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2}$
 (c). $\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}|\underline{i}|^2}{2}$

- (b). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$
 (d). $\frac{R|\underline{i}|^2}{2(1+R^2C^2\omega^2)}$

Q34.

$$\mathcal{P} =$$

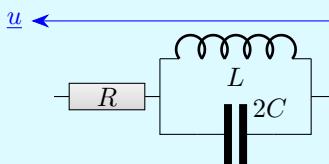


- (a). $\frac{|\underline{u}|^2}{2\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$
 (c). $\frac{|\underline{u}|^2}{R}$

- (b). $\frac{|\underline{u}|^2}{2R}$
 (d). $\frac{|\underline{u}|^2}{2(R+jL\omega)}$

Q35.

Si $R = 200 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$, $C = 120 \text{ nF}$, $\omega = 400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $U_{eff} = 20 \text{ V}$, alors $\mathcal{P} =$

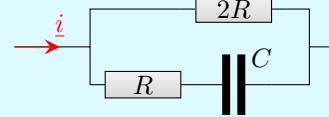


- (a). 1,2 W
 (c). 0,21 W

- (b). 3,6 mW
 (d). 0,46 W

Q36.

Si $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 220 \text{ nF}$, $\omega = 800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $I_{eff} = 20 \text{ mA}$, alors $\mathcal{P} =$

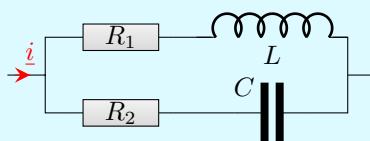


- (a). 0,5 W
 (c). 2,9 W

- (b). 12,0 W
 (d). 1,3 W

Q37.

Si $R_1 = 3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1200 \Omega$, $L = 32 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $f = 1000 \text{ Hz}$ et $I_{eff} = 50 \text{ mA}$, alors $\mathcal{P} =$

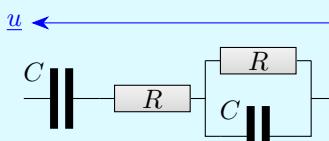


- (a). 3,3 W
 (c). 2,2 W

- (b). 1,3 W
 (d). 2,9 W

Q38.

Si $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 220 \text{ nF}$, $f = 1200 \text{ Hz}$ et $U_{eff} = 15 \text{ V}$, alors $\mathcal{P} =$



- (a). 120 mW
 (c). 300 mW

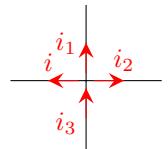
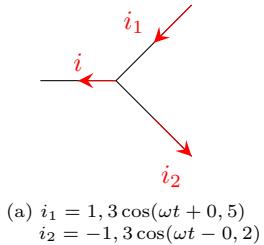
- (b). 12 mW
 (d). 22 mW

Régime Sinusoïdal Forcé

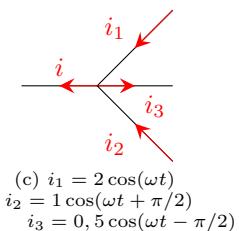
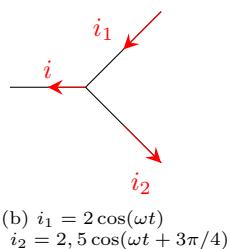
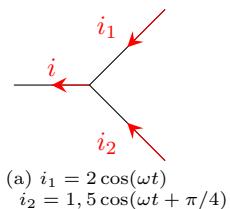
Exercices

réponses page 539

Exercice E5.1 : Loi des nœuds en RSF [*]

Dans chaque cas de figure, calculez $\underline{i}(t)$ puis $i(t)$ (les intensités sont toutes en Ampères).

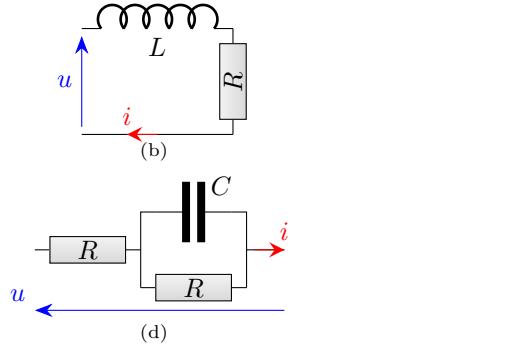
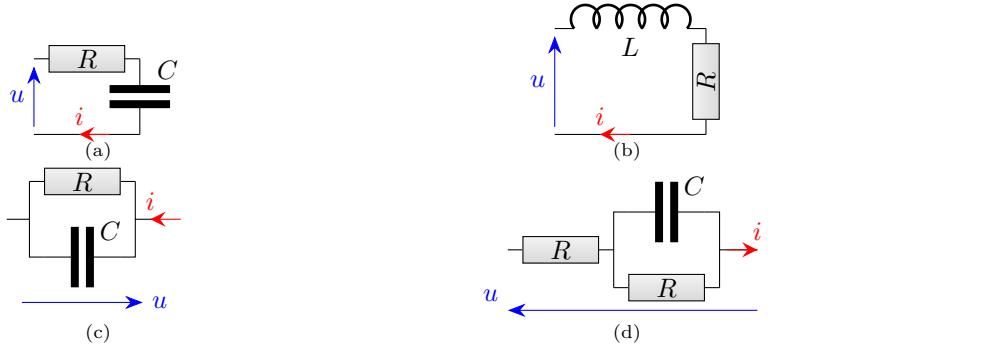
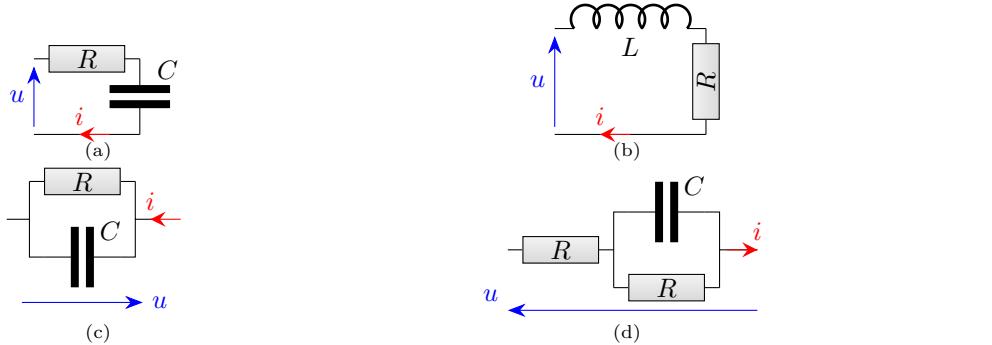
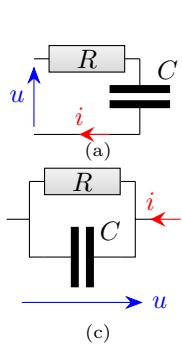
Exercice E5.2 : Loi des nœuds en RSF [*]

Dans chaque cas de figure, calculez $\underline{i}(t)$ puis $i(t)$; toutes les intensités sont en Ampères.

Exercice E5.3 : Association de dipôles [*]

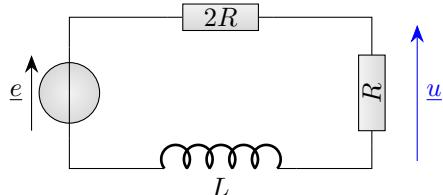
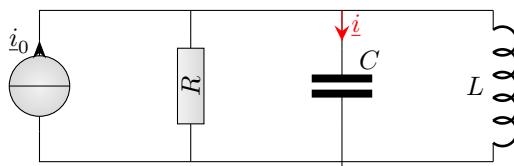
- À l'aide des lois d'associations d'impédances, montrez que des inductances L_1, L_2, \dots, L_n placées en série sont équivalentes à une seule inductance $L_{eq} = \sum L_i$.
- De même, montrez que des inductances L_1, L_2, \dots, L_n placées en parallèle sont équivalentes à une seule inductance L_{eq} telle que $\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L_i}$.
- Trouvez de même le condensateur équivalent à des condensateurs placés en série, puis en parallèle.

Exercice E5.4 : Application de la loi d'Ohm généralisée [*]

Exprimez \underline{i} en RSF, en fonction de \underline{u} . Écrivez alors $i(t)$ si $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

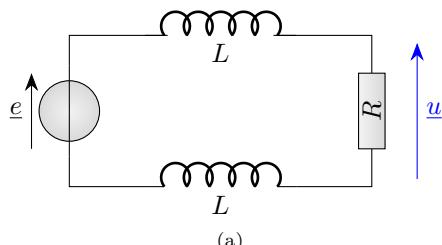
Exercice E5.5 : Ponts diviseurs [*]

Exprimez \underline{u} ou \underline{i} en fonction de e et des composants ; puis déduisez-en $u(t)$ ou $i(t)$:

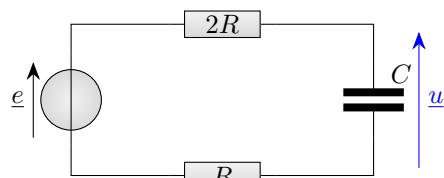
(a) $e(t) = 5 \cos(3000t)V$; $R = 220 \Omega$; $L = 40 \text{ mH}$ (b) $i_0(t) = 0,6 \cos(10000t)A$; $R = 70 \Omega$; $L = 32 \text{ mH}$; $C = 220 \text{ nF}$

Exercice E5.6 : Ponts diviseurs [*]

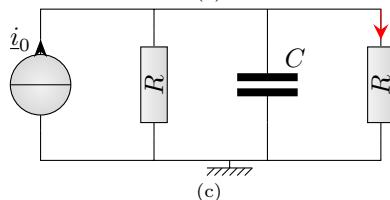
Exprimez \underline{u} ou \underline{i} en fonction des données, puis $u(t)$ ou $i(t)$ en supposant que $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$:



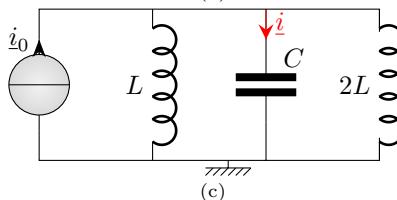
(a)



(b)



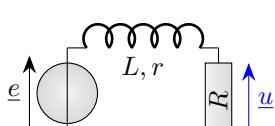
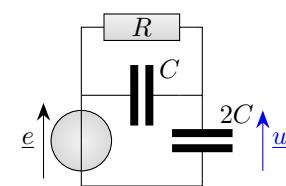
(c)



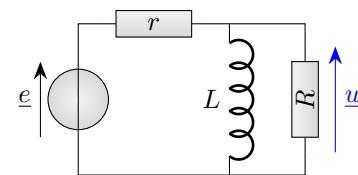
(c)

Exercice E5.7 : Calculs de tensions [**]

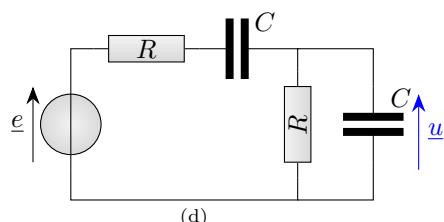
Exprimez \underline{u} en fonction de e , R et L , puis déduisez-en l'expression de $u(t)$ avec les valeurs suivantes : $e(t) = 3,5 \cos(4000t)V$, $i(t) = 0,12 \cos(6000t + 0,3)A$, $R = 120 \Omega$, $r = 8 \Omega$, $C = 470 \text{ nF}$ et $L = 21 \text{ mH}$.

(a) La bobine est modélisée par une inductance L en série avec une résistance r 

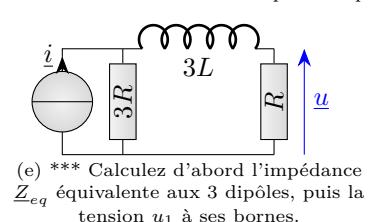
(b) Associez les deux impédances en parallèle.



(c) La tension est la même aux bornes des deux dipôles en parallèle.



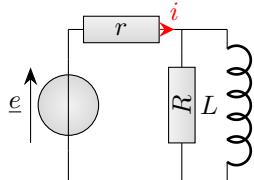
(d)



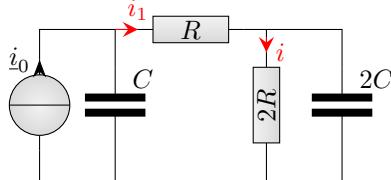
(e) *** Calculez d'abord l'impédance Z_eq équivalente aux 3 dipôles, puis la tension u_1 à ses bornes.

Exercice E5.8 : Calculs d'intensités [**]

Exprimez \underline{i} en RSF, puis exprimez numériquement $i(t)$.

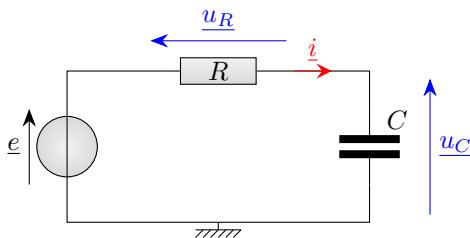


(a) $e(t) = 6 \cos(7000t + 0,4)$ V ;
 $r = 50 \Omega$; $R = 150 \Omega$; $L = 37 \text{ mH}$



(b) *** $i_0(t) = 0,4 \cos(500t)$ A ;
 $C = 1 \mu\text{F}$; $R = 1500 \Omega$; exprimez d'abord i_1 .

Exercice E5.9 : Étude du circuit RC série [**]

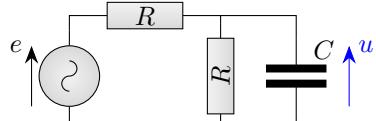


On alimente ce circuit par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t - 0,4)$ avec $E_0 = 5$ V. Pour les AN on prendra $R = 200 \Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$.

- Exprimez e , u_C , u_R et i .
- Exprimez numériquement $u_C(t)$, $u_R(t)$ et $i(t)$ si la tension e a pour fréquence $f = 2,2 \text{ kHz}$.
- Justifiez que, quelle que soit la fréquence, $u_R(t)$ est en avance sur $e(t)$ tandis que $u_C(t)$ est en retard.
- Calculez les limites de $|u_C|$, $|u_R|$ et $|i|$ en basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) et en haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$).

Exercice E5.10 : Circuit R,RC [*]

On considère le circuit ci-contre : Pour les AN : $R = 2,2 \text{ k}\Omega$ et $C = 470 \text{ nF}$.

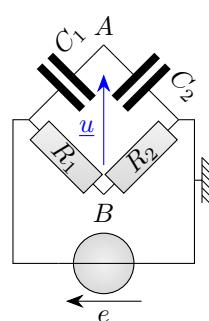


- $e(t)$ est une tension sinusoïdale d'amplitude $E_0 = 5$ V, de pulsation ω quelconque et de phase à l'origine nulle. Écrire la forme de $e(t)$ puis l'image complexe e .
- Exprimez u .
- On choisit une fréquence $f = 100 \text{ Hz}$. Que vaut la pulsation ? Calculez numériquement l'amplitude et la phase à l'origine de u . Déduisez-en $u(t)$. Tracez sur un même graphique e et u .
- On se place maintenant en très haute fréquence. Vers quelle limite tend l'amplitude de u ? Est-ce cohérent avec le circuit équivalent en HF ?

Exercice E5.11 : Pont de Sauty [**]

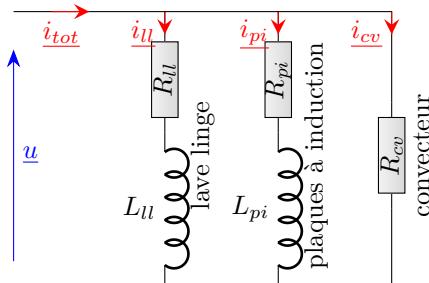
On considère le circuit ci-contre :

- Exprimez la tension u en fonction des données et de e .
- Montrez que le pont est équilibré si et seulement si $R_1 C_1 = R_2 C_2$.
- On choisit $R_1 = 1,3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2,3 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 120 \text{ nF}$ et $C_2 = 220 \text{ nF}$; $e(t)$ est une tension sinusoïdale d'amplitude 3 V, de fréquence 800 Hz et de phase à l'origine nulle. Exprimez numériquement $u(t)$.



Exercice E5.12 : Alimentation d'un réseau domestique [**]

On considère une installation électrique minimalist : un lave-linge, une plaque à induction et un convecteur. Le circuit électrique équivalent est représenté ci-dessous :



La tension $u(t)$ est une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_0 = 220 \text{ V}$ et de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$, avec une phase prise nulle par convention.

Pour les AN :

- $R_{ll} = 70 \Omega$ et $L_{ll} = 260 \text{ mH}$

- $R_{pi} = 8 \Omega$ et $L_{pi} = 47 \text{ mH}$

- $R_{cv} = 48 \Omega$

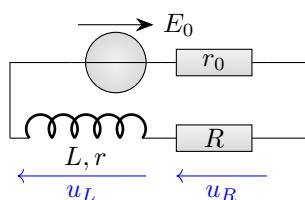
1. Exprimez u , i_{ll} , i_{pi} et i_{cv} . Que vaut i_{tot} en fonction des autres ?
2. Calculez numériquement les amplitudes des courants : I_{ll} , I_{pi} , I_{cv} puis I_{tot} ; a-t-on $I_{tot} = I_{ll} + I_{pi} + I_{cv}$?
3. On place en parallèle des différents équipements un condensateur de capacité $C = 75 \mu\text{F}$; recalculez I_{tot} .
4. Quelle valeur faudrait-il donner à C pour que la phase de i_{tot} soit nulle ? Que vaut I_{tot} dans ce cas-là ?

Exercice E5.13 : Étude d'une bobine en régime sinusoïdal forcé [**]

Dans tout cet exercice, on dispose d'une bobine qu'on modélisera par une inductance L en série avec une résistance r .

1. Détermination directe de r

On construit un circuit en mettant en série un générateur de Thévenin (fem $E_0 = 1,0 \text{ V}$, résistance interne $r_0 = 2,0 \Omega$), la bobine et une résistance $R = 40 \Omega$.

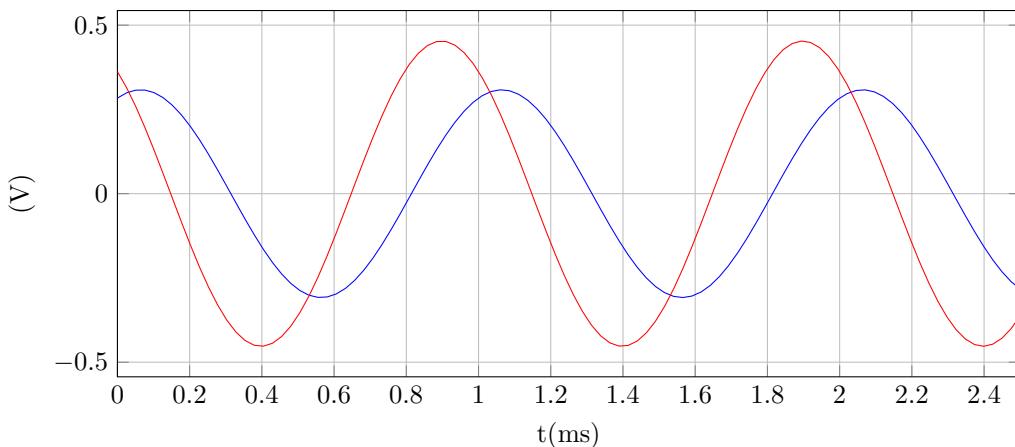


- (a) Redessinez le schéma équivalent en régime continu.
- (b) Exprimer la tension U_R aux bornes de R en régime permanent continu.
- (c) On mesure $U_R = 0,56 \text{ V}$; calculer r .

2. Détermination de L à partir d'un oscilloscopage

On remplace alors le générateur de tension continue par un GBF produisant une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ avec $\frac{\omega}{2\pi} = 1 \text{ kHz}$; la résistance interne du GBF vaut désormais $r_0 = 50 \Omega$, et R vaut toujours 40Ω .

On observe à l'oscilloscope les tensions u_L et u_R ; l'oscilloscopage est le suivant :

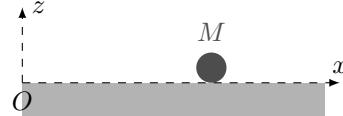


- Exprimez le rapport $\frac{\underline{u}_L}{\underline{u}_R}$ en fonction de r , R et L .
- Déduisez-en que $\arg \underline{u}_L - \arg \underline{u}_R = \arctan \frac{L\omega}{r}$. La tension u_L est-elle en avance ou en retard sur u_R ? Identifiez alors les deux courbes de l'oscillosgramme.
- Mesurez sur l'oscillosgramme le déphasage entre les deux courbes; déduisez-en L .
- À partir de l'expression de $\frac{\underline{u}_L}{\underline{u}_R}$, exprimez puis calculez numériquement le rapport des amplitudes de u_L et u_R . Comparez à la valeur mesurée sur l'oscillosgramme.

Exercice E5.14 : Objet soumis à une force sinusoïdale [*]

On considère une petite bille d'acier de masse m posée sur un sol horizontal sur lequel elle peut rouler sans frottements. Elle est soumise à son poids, à la réaction du support, à des frottements de l'air de la forme $-\lambda \vec{v}$ et à une force exercée par un champ magnétique variant au cours du temps et s'exprimant ainsi :

$$\vec{F} = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x.$$



- Écrivez le PFD appliqué à la bille et projetez-le sur \vec{e}_x . Déduisez-en que $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} = F_0 \cos(\omega t)$.
- Passez cette équation en complexes et déduisez-en $\underline{x}(t)$ en RSF.
- AN : $m = 3\text{ g}$, $\lambda = 0,03\text{ USI}$, $F_0 = 10\text{ mN}$ et la fréquence de la force magnétique vaut $f = 4,2\text{ Hz}$. Déterminez numériquement $x(t)$.

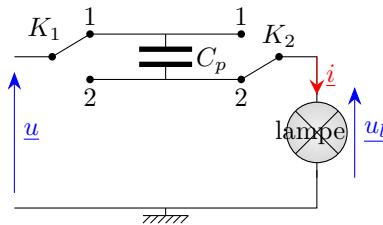
Exercice E5.15 : Puissance électrique consommée par une bobine [**]

Une bobine d'inductance $L = 21\text{ mH}$ et de résistance $r = 8\Omega$ est alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence f et de valeur efficace E .

- Exprimez l'intensité \underline{i} à travers cette bobine.
- Exprimez la puissance moyenne \mathcal{P} dissipée dans la résistance en fonction de E , f , L et r .
- Que vaut cette puissance pour $f = 0\text{ Hz}$? pour $f \rightarrow \infty$?
- Pour quelle valeur de f a-t-on $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{P}(f=0)}{2}$?

Exercice E5.16 : Lampe branchée sur un va-et-vient [***]

Dans un couloir, on branche souvent l'éclairage sur un va-et-vient, c'est-à-dire avec un interrupteur à chaque bout. Le schéma général de câblage est alors le suivant :

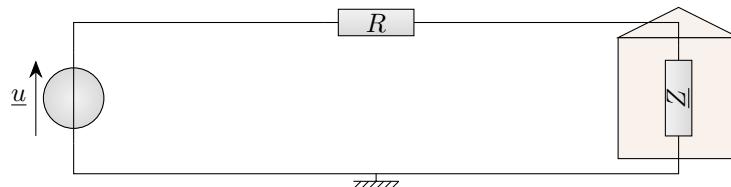


Le système est alimentée par une tension U de valeur efficace $U_{eff} = 220\text{ V}$ et de fréquence $f = 50\text{ Hz}$. On a ensuite deux interrupteurs K_1 et K_2 ; s'ils sont tous les deux sur la même position 1 ou 2, le courant passe et la lampe s'allume; s'ils sont en positions opposées (comme sur la figure), le courant ne devrait pas passer. Néanmoins, le plus souvent, les deux fils qui relient les deux interrupteurs sont situés dans la même gaine, et une capacité parasité C_p apparaît entre ces deux fils; pour les AN on prendra $C_p = 5\text{ nF}$.

- On place comme lampe une ampoule à incandescence qui consomme 60 W sous $U_{eff} = 220\text{ V}$. On suppose qu'on peut la modéliser par une résistance R_l ; calculez numériquement R_l .
- Calculez le courant efficace qui traverse la lampe lorsque le système de va-et-vient est en position allumée, puis en position éteinte. Calculez la puissance consommée dans ce dernier cas.
- On remplace l'ampoule par une ampoule à LEDs. Celle-ci, lorsqu'elle est éteinte, se comporte en première approximation comme une résistance $R_g = 400\text{ k}\Omega$. Calculez alors le courant efficace qui traverse la lampe, et la puissance consommée; commentez.
- Pour compenser ce phénomène, on propose de placer un condensateur C en parallèle de la lampe. Exprimez la nouvelle intensité i_l qui passe dans la lampe uniquement, puis sa valeur efficace $I_{l,eff}$. Calculez numériquement $I_{l,eff}$ puis la puissance consommée par la lampe, si $C = 100\text{ nF}$. Que se passe-t-il si on augmente encore la capacité C ?

Exercice E5.17 : Relèvement du facteur de puissance [***]

Une installation électrique est branchée sur le réseau qui la relie, via des fils, à une centrale électrique. On peut modéliser la centrale par un générateur idéal de tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\text{ Hz}$ et de tension efficace $U_0 = 220\text{ V}$, les fils par une résistance $R = 80\text{ m}\Omega$, et l'installation domestique par une impédance Z .



Dans la suite, on notera $Z = |Z|$ et $\varphi = \arg Z$. Le cosinus de φ s'appelle le *facteur de puissance*.

- Exprimer en fonction de Z , $\cos \varphi$, R et U_0 , la puissance moyenne \mathcal{P}_c consommée par l'installation, et la puissance moyenne \mathcal{P}_f consommée par les fils.
- Le fournisseur d'électricité fournit la puissance $\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c$, mais seule la seconde est facturée. On définit donc le rendement de la distribution par $e = \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_c}$. Exprimez ce rendement en fonction de R , Z et du facteur de puissance.
- Comment doit être le facteur de puissance dans l'intérêt du distributeur d'électricité?
- Les usines possédant plusieurs moteurs ont souvent un facteur de puissance éloigné de 1; le distributeur d'électricité leur oblige à le ramener à plus de 0,9 en ajoutant des condensateurs en parallèle de l'installation.
Considérons par exemple une usine comportant plusieurs moteurs en parallèles, représentée globalement par une bobine de $4,7\text{ mH}$ en série avec une résistance de $0,3\Omega$. Calculez :
 - son facteur de puissance
 - puis la valeur du condensateur C à placer en parallèle pour ramener le facteur de puissance à 0,95
 - les puissances \mathcal{P}_f et \mathcal{P}_c sans ce condensateur, puis avec.

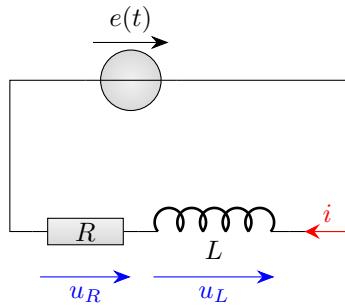
Régime Sinusoïdal Forcé

TDs numériques

réponses page 542

TD numérique : Signaux sinusoïdaux et images complexes

Ce TD a pour but d'aider à mieux cerner le rapport entre un signal sinusoïdal et son image complexe. Pour cela, on va travailler sur un simple circuit RL série :



- Établir l'équation différentielle vérifiée par i , en fonction de e et des constantes.
- On prend : $R = 100 \Omega$ et $L = 3 \text{ mH}$. On choisit pour $e(t)$ une tension sinusoïdale d'amplitude $E = 5 \text{ V}$, de fréquence $f = 5000 \text{ Hz}$ et de phase à l'origine $0,6 \text{ rad}$.

Résolvez numériquement sous Python l'équation trouvée au 1 avec comme conditions initiales $i(0) = 0 \text{ A}$, sur une durée de 5 périodes avec 1000 points par période. Tracez la courbe $i(t)$.

- À la main, passez l'équation de la question 1 en complexes. Isolez i . À l'aide de Python, calculez $|i(0)|$ et $\arg i(0)$.

Indication : pour manipuler des nombres complexes avec Python :

- les parties imaginaires sont notées avec un `j` accolé ; par exemple `3j` ou `3+1.2j`
- la librairie `cmath` permet de faire des calculs sur les complexes : `cmath.phase` donne l'argument, `cmath.exp` l'exponentielle,...Pour le module, on utilise la fonction `abs` native de Python
- la librairie `numpy` permet aussi les calculs sur les complexes : `numpy.abs` donne le module, `numpy.angle` donne l'argument, `numpy.exp` l'exponentielle,...

À partir de ces deux valeurs, tracez, sur le même graphique que la courbe de la question précédente, la courbe $i_{RSF}(t)$ en RSF, en prenant le même tableau des abscisses que pour $i(t)$. Commentez.

- Tracez sur un autre graphique $i(t) - i_{RSF}(t)$; que représente cette courbe ?
- Tracez, sur un autre graphique, $e(t)$ et $u_R(t)$ en RSF. Commentez.
- Question optionnelle* : déterminez la solution complète de l'ED avec les conditions initiales proposées.
- On met maintenant en série la bobine $L = 3 \text{ mH}$, un condensateur $C = 220 \text{ nF}$ et une résistance $R = 15 \Omega$, alimentés par la même tension $e(t)$. Reprenez les mêmes questions avec u_C .

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

- Q1.(b) ET (c)
- Q2.(d)
- Q3.(a) ET (c)
- Q4.(c)
- Q5.(d)
- Q6.(a) ET (d)
- Q7.(a) ET (d)

Réponses au QCM : Image complexe et signal réel

- Q8.(d)
- Q9.(a)
- Q10.(c)
- Q11.(a)
- Q12.(a)
- Q13.(d)
- $\underline{a} = 3e^{300jt}$ et $\underline{b} = \frac{9}{1+2j}e^{300jt}$.
- Q14.(a)
- $\underline{a} = 3e^{j(500t+0,2)}$ et $2,4.10 - 3j\omega \underline{b} + \underline{b} = 2\underline{a}$ donc $\underline{b} = \frac{2}{1+1,2j}3e^{j(500t+0,2)}$.

Réponses au QCM : Association d'impédances

- Q15.(b)
- Q16.(b)
- Q17.(d)
- Q18.(a)
- Q19.(d)
- Q20.(c)
- Q21.(c)
- Q22.(c)

Réponses au QCM : Pont diviseur de tension

- Q23.(b)
- Q24.(d)
- Q25.(a)
- Q26.(a)

Réponses au QCM : Pont diviseur de courant

- Q27.(b)
- Q28.(c)
- Q29.(b)
- Q30.(a)

Réponses au QCM : Puissance reçue par un dipôle

- Q31.(b)
- Q32.(a)
- \underline{Z} est un imaginaire pur.
- Q33.(d)
- Q34.(b)
- Q35.(b)

Q36.(c)

Q37.(c)

Q38.(d)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E5.1 : Loi des noeuds en RSF [*]

- (a) $i(t) = 2,44 \cos(\omega t + 0,15)$
- (b) $i(t) = 0,55 \cos(300t - 2,7)$

Réponses de l'exercice E5.2 : Loi des noeuds en RSF [*]

- (a) $i(t) = 3,2 \cos(\omega t + 0,33)$
- (b) $i(t) = 4,2 \cos(\omega t - 0,44)$
- (c) $i(t) = 2,5 \cos(\omega t + 0,64)$

Réponses de l'exercice E5.3 : Association de dipôles [*]

Évident à partir des lois d'association des impédances. Les lois des condensateurs sont inversées : en série, $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$ tandis qu'en parallèle, $C_{eq} = \sum_i C_i$.

Réponses de l'exercice E5.4 : Application de la loi d'Ohm généralisée [*]

- (a) $i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}}} \cos(\omega t - \arctan \frac{1}{RC\omega})$
- (b) $i(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctan \frac{L\omega}{R})$
- (c) $i(t) = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + C^2 \omega^2} \cos(\omega t + \arctan(RC\omega))$
- (d) $i(t) = \frac{U_0}{R} \frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{\sqrt{4+R^2C^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctan(RC\omega) - \arctan \frac{RC\omega}{2})$

Réponses de l'exercice E5.5 : Ponts diviseurs [*]

- (a) $u(t) = 1,6 \cos(3000t - 0,18)\text{V}$
- (b) $i(t) = 0,092 \cos(10000t + 1,63)\text{A}$

Réponses de l'exercice E5.6 : Ponts diviseurs [*]

- (a) $u(t) = \frac{RE_0}{\sqrt{R^2 + (2L\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{2L\omega}{R}))$
- (b) $u(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (3RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(3RC\omega))$
- (c) $i(t) = \frac{I_0}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\frac{RC\omega}{2}))$
- (d) $i(t) = \frac{C\omega I_0}{C\omega - \frac{3}{2}L\omega} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Réponses de l'exercice E5.7 : Calculs de tensions [**]

- (a) $u(t) = 2,7 \cos(4000t - 0,6)\text{V}$
- (b) $u(t) = 3,0 \cos(4000t - 0,37)\text{V}$
- (c) $u(t) = 3,27 \cos(4000t + 0,09)\text{V}$
- (d) $u(t) = 0,19 \cos(4000t + 0,95)\text{V}$
- (e) $u(t) = 8,5 \cos(6000t - 0,37)\text{V}$

Réponses de l'exercice E5.8 : Calculs d'intensités [**]

- (a) $i(t) = 34 \cdot 10^{-3} \cos(7000t + 0,02)\text{A}$

- (b) $i(t) = 0,074 \cos(500t - 1,80)\text{A}$

Réponses de l'exercice E5.9 : Étude du circuit RC série [**]

1. $\underline{u}_C = \frac{1}{1+jRC\omega} E_0 e^{j(\omega t - 0,4)}$; $\underline{u}_R = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} E_0 e^{j(\omega t - 0,4)}$ et $\underline{i} = \frac{jC\omega E_0}{1+jRC\omega} e^{j(\omega t - 0,4)}$
2. $u_C(t) = 4,27 \cos(4400\pi t - 0,95)\text{V}$; $u_R(t) = 2,60 \cos(4400\pi t + 0,62)\text{V}$ et $i(t) = 13 \cos(4400\pi t + 0,62)\text{mA}$.
3. $\arg \underline{u}_C - \arg \underline{e} = -\arctan RC\omega < 0$ donc la tension correspondante est en retard.
4. En BF, $|\underline{u}_C|$ tend vers E_0 , $|\underline{u}_R|$ tend vers 0 et $|\underline{i}|$ aussi vers 0.
En HF, $|\underline{u}_C|$ tend vers 0, $|\underline{u}_R|$ tend vers E_0 et $|\underline{i}|$ aussi vers $\frac{E_0}{R}$.

Réponses de l'exercice E5.10 : Circuit R, RC [**]

1. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ et $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$.
2. Par le diviseur de tension : $\underline{u} = \frac{E_0}{2+jRC\omega} e^{j\omega t}$
3. $u(t) = 2,38 \cos(628t - 0,31)\text{V}$.
4. Sur le circuit équivalent en HF, le condensateur est remplacé par un fil, et la tension aux bornes d'un fil est nulle.

Réponses de l'exercice E5.11 : Pont de Sauty [**]

1. Par le théorème de Millman ou par des ponts diviseurs de tension : $\underline{u} = \left(\frac{C_1}{C_1+C_2} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \right) \underline{e}$.
2. $\underline{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \Leftrightarrow R_1 C_1 + R_2 C_1 = R_2 C_1 + R_2 C_2 \Leftrightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2$.
3. $\underline{e}(t) = 3e^{1600j\pi t}$ d'où on tire $\underline{u}(t) = -0,863e^{1600j\pi t}$ d'où $u(t) = 0,86 \cos(1600\pi t + \pi)$ en V.

Réponses de l'exercice E5.12 : Alimentation d'un réseau domestique [**]

1. $i_{ll} = \frac{U_0\sqrt{2}}{R_{ll}+j2\pi f L_{ll}}$ par exemple; et par la loi des noeuds, $i_{tot} = i_{ll} + i_{pi} + i_{cv}$
2. $I_{ll} = 2,33\text{ A}$; $I_{pi} = 14,9\text{ A}$; $I_{cv} = 5,2\text{ A}$ et $I_{tot} = 20,4\text{ A}$ donc $I_{ll} + I_{pi} + I_{cv} = 22,5\text{ A} > I_{tot}$: on ajoute les amplitudes complexes, mais pas les amplitudes tout court.
3. $I_{tot} = 16,5\text{ A}$: sans changer le courant fourni à chaque machine, on a diminué le courant total demandé.
4. $C = 189\mu\text{F}$. On a alors $I_{tot} = 13,9\text{ A}$.

Réponses de l'exercice E5.13 : Étude d'une bobine en régime sinusoïdal forcé [**]

1. **Détermination directe de r**
 - (a) Il faut remplacer la bobine par la seule résistance r .
 - (b) Diviseur de tension : $U_R = \frac{R}{R+r_0+r} E_0$
 - (c) $r = R \frac{E_0}{U_R} - R - r_0 = 29,4\Omega$
2. **Détermination de L à partir d'un oscilloscopage**
 - (a) $\frac{\underline{u}_L}{\underline{u}_R} = \frac{r+jL\omega}{R}$
 - (b) $\arg \underline{u}_L - \arg \underline{u}_R = \arg(r + jL\omega) - \arg(R) = \arctan \frac{L\omega}{r} > 0$ donc u_L est en avance sur u_R , c'est donc la courbe de plus grande amplitude.
 - (c) On mesure $\Delta\phi = 360 \frac{0,17}{1} = 61^\circ$. On en déduit que $L = \frac{r}{\omega} \tan(\Delta\phi) = 8,4\text{ mH}$
 - (d) $\left| \frac{\underline{u}_L}{\underline{u}_R} \right| = \left| \frac{r+jL\omega}{R} \right| = 1,5$ ce qui correspond au schéma.

Réponses de l'exercice E5.14 : Objet soumis à une force sinusoïdale [*]

1. $\vec{e}_x : m\ddot{x} + \lambda\dot{x} = F_0 \cos(\omega t)$
2. $\underline{x} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{\lambda j\omega - m\omega^2}$
3. $\omega = 8,4\pi$ donc $x(t) = 4,5 \cos(8,4\pi t - 2,8)\text{mm}$.

Réponses de l'exercice E5.15 : Puissance électrique consommée par une bobine [**]

1. Par la loi d'Ohm : $\underline{i} = \frac{\sqrt{2}E}{r+jL\omega} e^{j\omega t}$ avec $\omega = 2\pi f$.

$$2. \mathcal{P} = \frac{rE^2}{r^2+L^24\pi^2f^2}$$

$$3. \mathcal{P}(\omega = 0) = \frac{E^2}{r} \text{ et } \mathcal{P}(\omega \rightarrow \infty) = 0$$

4. 61 Hz

Réponses de l'exercice E5.16 : Lampe branchée sur un va-et-vient [***]

$$1. R_l = \frac{U_{eff}^2}{\langle \mathcal{P} \rangle} = 807 \Omega.$$

$$2. \text{Position allumée : } I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R_l} = 272 \text{ mA}$$

$$\text{Position éteinte : } I_{eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R_l^2 + \frac{1}{C_p^2 \omega^2}}} = 346 \mu\text{A} \text{ et } \langle \mathcal{P} \rangle = 97 \mu\text{W}$$

3. $I_{eff} = 292 \mu\text{A}$ et $\langle \mathcal{P} \rangle = 34 \text{ mW}$: ça consomme beaucoup plus, la lampe va rester légèrement allumée.

$$4. I_{l,eff} = \frac{U_{eff}}{\sqrt{R_g^2 \left(1 + \frac{C}{C_p}\right)^2 + \frac{1}{C_p^2 \omega^2}}}$$

AN : pour $C = 100 \text{ nF}$ on trouve $I_{eff} = 26 \mu\text{A}$ et $\langle \mathcal{P} \rangle = 0,27 \text{ mA}$: on a divisé par 100 la puissance consommée.

Réponses de l'exercice E5.17 : Relèvement du facteur de puissance [***]

$$1. \mathcal{P}_c = \frac{U_{eff}^2 Z \cos \varphi}{R^2 + Z^2 + 2RZ \cos \varphi} \text{ et } \mathcal{P}_f = \frac{U_{eff}^2 R}{R^2 + Z^2 + 2RZ \cos \varphi}.$$

$$2. e = \frac{Z \cos \varphi}{R + Z \cos \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z \cos \varphi}}$$

3. $C = 1,9 \text{ mF}$: il faut un gros condensateur.

Sans condensateur, on trouve $I_{eff} = 144 \text{ A}$, $\mathcal{P}_f = 1,7 \text{ kW}$ et $\mathcal{P}_c = 6,3 \text{ kW}$ soit $e = 79 \%$.

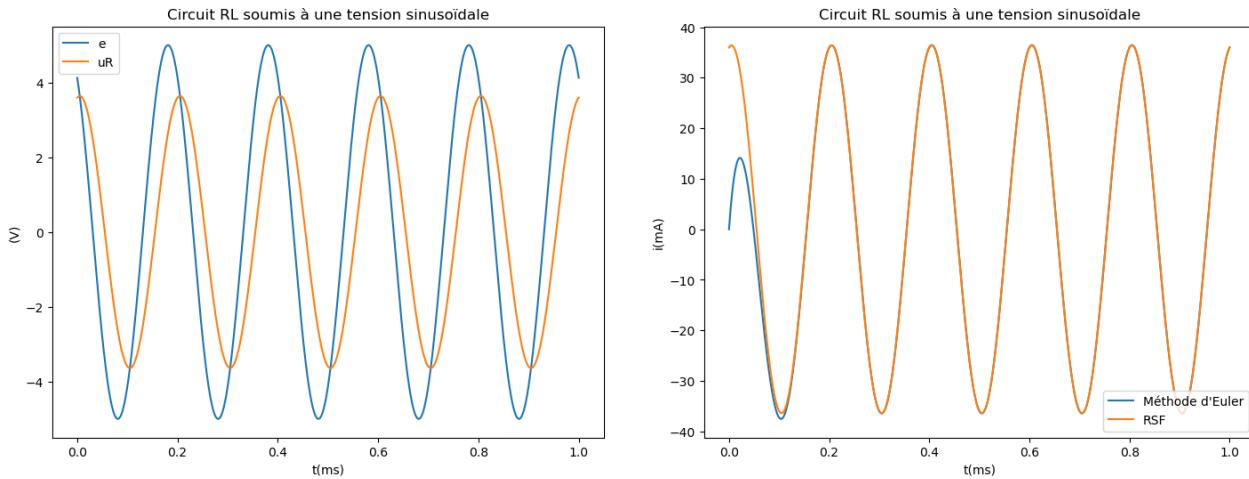
Avec condensateur, on trouve $I_{eff} = 31 \text{ A}$, $\mathcal{P}_f = 77 \text{ W}$ et $\mathcal{P}_c = 6,3 \text{ kW}$ soit $e = 99 \%$.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Signaux sinusoïdaux et images complexes

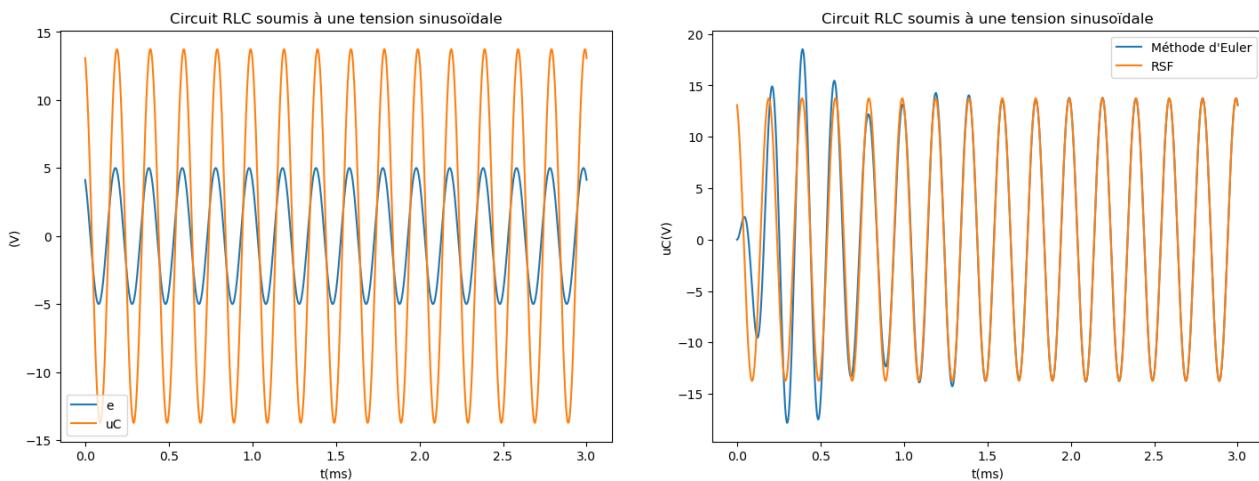
Pour le RL série, l'équation différentielle $L\frac{di}{dt} + Ri = e(t)$ donne en complexes $i = \frac{1}{R+jL\omega}e$; avec $e(t) = 5e^{j\omega t+0,6j}$ (en V) on trouve $i(t) = 36,4e^{j\omega t-0,156j}$ soit $i(t) = 36,4 \cos(\omega t - 0,156)$ mA.

La différence entre les deux courbes fait apparaître une exponentielle : c'est le régime transitoire.



La tension u_R a une amplitude plus faible que $e(t)$ et est en retard. La différence entre la solution $i(t)$ obtenue par la méthode d'Euler et celle obtenue par les complexes, est due au transitoire. Si on résout la solution complète de l'équation, on trouve $i(t) = 36,4 \cos(\omega t - 0,156) + Ke^{-R/Lt}$ et les conditions initiales indiquent que $K = -36,4 \cos(-0,156) = 35,9$ mA.

Avec un RLC, le transitoire est plus complexe, et peut parfois être très important si la fréquence de $e(t)$ est proche de la fréquence propre du circuit.



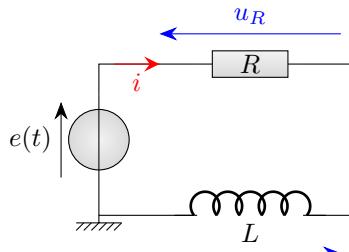
Résonances

Cours

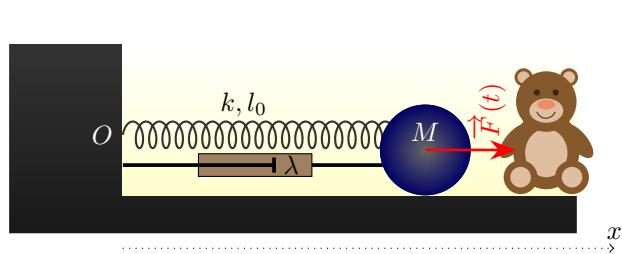
En étudiant l'électricité puis la mécanique, nous avons mis en évidence deux systèmes modèles présentant de fortes analogies : le RLC série d'une part, l'oscillateur harmonique d'autre part. Nous allons étudier dans ce chapitre leur comportement en RSF, et mettre en évidence un phénomène essentiel en physique : la résonance.

E6.A. Équations du RLC et de l'OH en RSF

On a déjà étudié ces modèles ; on va simplement rappeler ici leurs équations.



(a) RLC série



(b) Oscillateur Harmonique

FIGURE E6.1 – Systèmes d'ordre 2 en RSF.

Propriété : ED vérifiée par la tension du condensateur

La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 e(t) \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{E6.1})$$

Démonstration

Par la loi des mailles : $u_C + u_L + u_R = e$ or $u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$ donc $LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = e$.

En divisant par LC et en identifiant, on trouve $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ donc $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, puis $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ donc $Q = \frac{L\omega_0}{R}$.

Propriété : ED vérifiée par la position

L'allongement $x = l - l_0$ du ressort de l'oscillateur harmonique vérifie l'équation

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} \quad (\text{E6.2})$$

Démonstration

La masse a pour accélération $\ddot{x}\vec{e}_x$. Elle est soumise à son poids, vertical, à la réaction du support, verticale aussi en l'absence de frottements solides, à la force du ressort, $-k.x\vec{e}_x$, à la force de l'amortisseur, $-\lambda.\dot{x}\vec{e}_x$, et à la force $F(t)$. Le PFD projeté sur \vec{e}_x donne donc l'équation $m\ddot{x} = -k.x - \lambda.\dot{x} + F$ soit $\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$. Il ne reste plus qu'à identifier avec la forme canonique.

On va donc étudier ces systèmes en Régime Sinusoïdal Forcé, c'est-à-dire chercher la solution particulière lorsque le second membre est sinusoïdal. On pourrait commencer par étudier u_C ou x , mais en fait il vaut mieux commencer par u_R ou la vitesse v .

E6.B. Étude de la résonance aux bornes de la résistance, ou résonance en vitesse

Propriété : Tension aux bornes de la résistance

La tension aux bornes de la résistance vaut

$$\underline{u_R} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (\text{E6.3})$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes de la résistance, on peut repartir de l'équation (E6.1), mais il y a plus rapide : il suffit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u_R} = \frac{R\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

Pour mettre $\underline{u_R}$ sous forme canonique, il faut commencer par remplacer $R = \frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}}$ et on trouve $\underline{u_R} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ\sqrt{LC}\omega + \frac{Q}{j\sqrt{LC}\omega}}$. Or $\sqrt{LC} = \frac{1}{\omega_0}$ et $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$ d'où la forme proposée :

$$\underline{u_R} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Remarque : Pour la vitesse, on doit partir de l'équation (E6.2) et la passer en complexes : $(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2)\underline{x} = \frac{F}{m}$ donc $\underline{x} = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$. Ensuite, $v = \dot{x}$ donc $\underline{v} = j\omega\underline{x} = \frac{j\omega F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$ ce qui donne après quelques calculs :

$$\underline{v} = \frac{\frac{Q}{m\omega_0}F}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{\underline{F}/\lambda}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On retrouve donc, à une constante près, la même forme que pour $\underline{u_R}$. Toute les résultats qu'on va trouver dans la suite seront donc aussi valables pour la vitesse.

Propriété : Limites de la tension en basse et haute fréquence

En BF et en HF, l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance vaut 0.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe :

$$|\underline{u_R}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

avec $E_0 = |\underline{e}|$.

En basses fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0, le numérateur tend vers E_0 et $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ tend vers $+\infty$ donc le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $|\underline{u_R}| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$.

En hautes fréquences, c'est-à-dire lorsque ω tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers E_0 et $\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$ tend vers $+\infty$ donc le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $|\underline{u_R}| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $|\underline{u_R}|$ est positive (c'est un module) et tend vers 0 en BF et en HF ; donc soit $|\underline{u_R}|$ est nulle partout, soit elle possède un maximum.

Propriété : Résonance de la tension aux bornes de la résistance

L'amplitude de la tension aux bornes de la résistance passe par un maximum à la pulsation non nulle $\omega = \omega_0$; on appelle cela une *résonance*.

Démonstration

La démonstration exacte consiste à étudier les variations de $|u_R|$ en fonction de ω . Pour cela, on calcule la dérivée :

$$\frac{d|u_R|}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \right] = -\frac{E_0}{2} \frac{0+2Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(\frac{1}{\omega_0^2}+\frac{\omega^2}{\omega^2}\right)}{\left(1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{3/2}}$$

donc $\frac{d|u_R|}{d\omega} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega^2 < \omega_0^2 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ car on travaille sur \mathbb{R}^+ .

On en déduit le tableau de variations :

ω	0	ω_0	$+\infty$
$\frac{d u_R }{d\omega}$	+	0	-
$ u_R $	0	E_0	0

Remarque : En devoir, on peut se contenter de montrer qu'il existe une annulation de la dérivée et admettre que c'est un maximum sans le justifier par un tableau de variations complet. On peut même faire plus simple : comme $|u_R|$ est de la forme $\frac{cst}{\sqrt{f(\omega)}}$ on peut se contenter de dériver f par rapport à ω pour chercher une annulation de la dérivée.

Il est alors facile de calculer que $|u_R|(\omega_0) = E_0$ et de tracer la courbe de la figure E6.2.

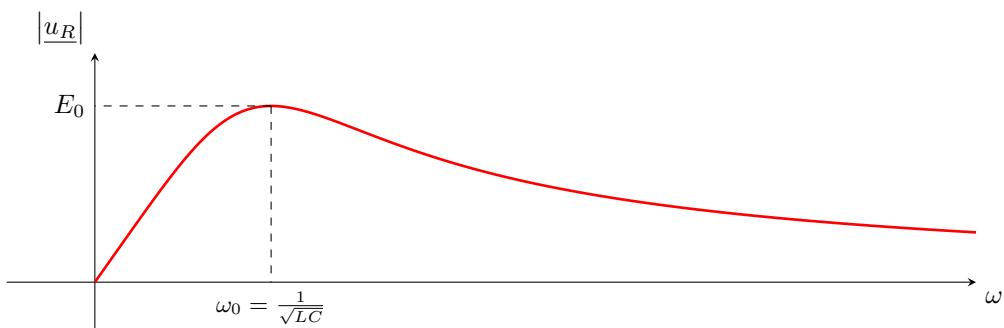


FIGURE E6.2 – Allure de la courbe de résonance aux bornes de la résistance.

On a tracé cette allure de courbe en mettant des limites nulles en BF et en HF, et un maximum en ω_0 ; mais quelle est l'allure exacte de la résonance ? Est-ce un pic ou une colline ? Pour savoir cela, il faut utiliser un outil très important :

Définition : Bande passante à -3 décibels

La bande passante à -3 dB est l'intervalle de pulsations (ou de fréquences) pour lesquelles $|u_R|$ est supérieur à $\frac{U_{R,max}}{\sqrt{2}}$

L'idée de cette définition, c'est de donner une valeur de la largeur de la bosse. Pour donner une largeur, il faut se mettre d'accord sur où on mesure la largeur ; la règle universelle, c'est de prendre le maximum divisé par $\sqrt{2}$, et de mesurer la largeur à cette hauteur-là. On verra plus tard pourquoi on appelle cela «à -3 décibels».

Propriété : Largeur de la bande passante à -3 dB de la résonance en tension aux bornes de la résistance

La tension aux bornes de la résistance a une résonance dont la bande passante à -3 dB a pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Démonstration

On a vu que le maximum de $|\underline{u}_R|$ valait E_0 . On cherche donc à résoudre l'équation $|\underline{u}_R| = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ pour trouver les bornes de la bande passante.

$$\begin{aligned}
 |\underline{u}_R| = \frac{E_0}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \\
 &\Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 2 \\
 &\Leftrightarrow Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow Q \frac{\omega}{\omega_0} - Q \frac{\omega_0}{\omega} = 1 \text{ ou } Q \frac{\omega}{\omega_0} - Q \frac{\omega_0}{\omega} = -1 \\
 &\Leftrightarrow Q\omega^2 - \omega\omega_0 - Q\omega_0^2 = 0 \text{ ou } Q\omega^2 + \omega\omega_0 - Q\omega_0^2 = 0 \\
 &\text{ces deux polynômes ont le même discriminant : } \Delta = \omega_0^2 + 4Q^2\omega_0^2 = \omega_0^2(1 + 4Q^2) \\
 &\Leftrightarrow \omega = \frac{\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \text{ ou } \omega = \frac{-\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}
 \end{aligned}$$

On a donc 4 solutions, mais en les triant on trouve : $\frac{-\omega_0 - \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < \frac{\omega_0 - \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < 0 < \frac{-\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < \frac{\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$. La bande passante est donc l'intervalle

$$BP_{-3 \text{ dB}} = \left[\frac{-\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}, \frac{\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} \right]$$

de largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} - \frac{-\omega_0 + \omega_0\sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} = \frac{\omega_0}{Q}$.

Ainsi, on commence à voir l'influence du facteur de qualité Q : plus il est grand, plus la résonance est étroite (figure E6.3).

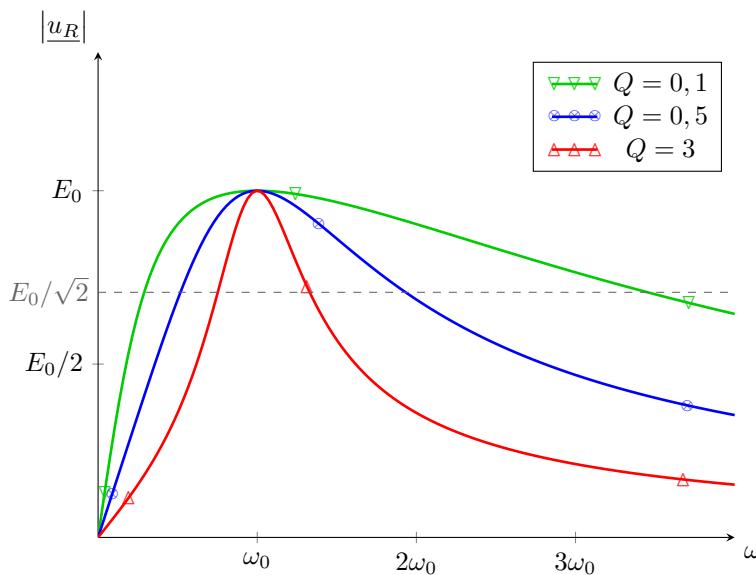


FIGURE E6.3 – Courbe de résonance aux bornes de la résistance en fonction du facteur de qualité.

Pour mieux comprendre le lien entre la courbe de résonant $|\underline{u}_R|(\omega)$ et le signal temporel $u_R(t)$, l'animation de la figure E6.4 permet de faire varier la fréquence et de visualiser les variations de $u_R(t)$. En plus de l'effet d'amplitude qu'on a déjà vu, il y a aussi un effet de phase qu'on étudiera plus tard.

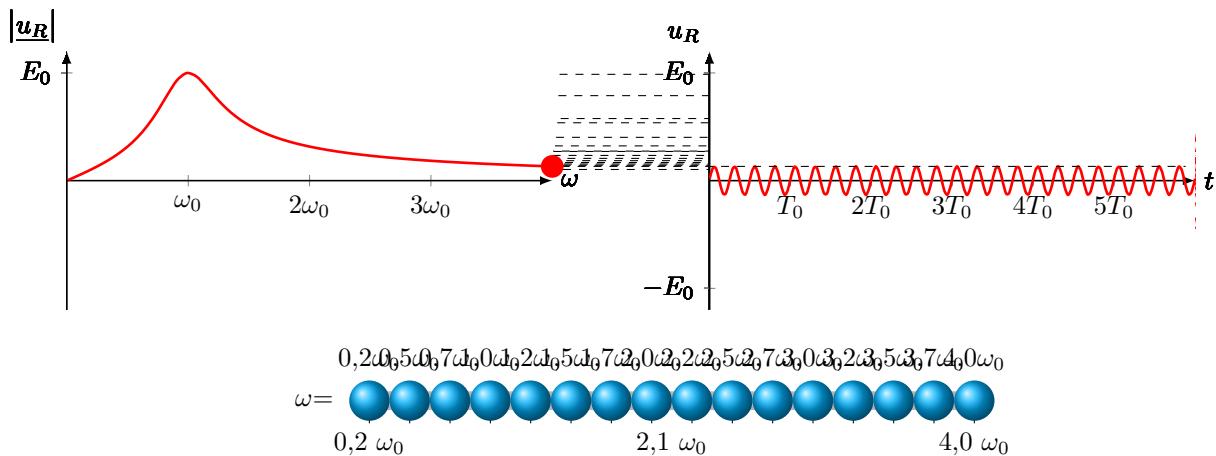


FIGURE E6.4 – Lien entre la courbe de résonance aux bornes de la résistance, et la tension aux bornes de celle-ci ; pour $Q = 2$.

E6.C. Étude de la résonance aux bornes du condensateur, ou résonance en position

Nous avons vu que, aux bornes de la résistance, il y a toujours une résonance, qui a lieu pour $\omega = \omega_0$, et qui est d'autant plus étroite que le facteur de qualité est grand. Nous allons voir s'il en est de même aux bornes du condensateur.

Propriété : Tension aux bornes du condensateur

La tension aux bornes du condensateur vaut

$$\underline{u_C} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (\text{E6.4})$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes du condensateur, il suffit soit de passer l'équation (E6.1) en complexes, soit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u_C} = \frac{\frac{1}{jC\omega}\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}}C\omega - LC\omega} = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Remarque : De même, pour la position de l'OH : $\underline{x} = \frac{\underline{F}/k}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Remarque : On trouve les mêmes expressions pour ω_0 et Q car on travaille sur le même circuit, même si ce n'est pas la même tension ; si on change de circuit, l'expression de ces grandeurs peut changer.

Propriété : Limites de la tension en basse et haute fréquence

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur tend vers $E_0 = |\underline{e}|$ en BF et tend vers 0 en HF.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe :

$$|\underline{u_C}| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

En basses fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers 1 donc $|\underline{u_C}| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} E_0$.

En hautes fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $|\underline{u_C}| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $|u_C|$ part de E_0 est tend vers 0 ; est-elle strictement décroissante ?

Propriété : Résonance de la tension aux bornes du condensateur

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur possède une résonance (maximum à une pulsation non nulle) si et seulement si le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration

Comme précédemment, on va faire ici l'étude complète des variations de $|u_C|$:

$$\frac{d|u_C|}{d\omega} = \frac{d}{dt} \left[\frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}} \right] = -\frac{E_0}{2} \frac{2\left(0 - \frac{2\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2}}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)^{3/2}} = -\frac{E_0}{2} \frac{\frac{2\omega}{\omega_0^2} \left[2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{1}{Q^2} \right]}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)^{3/2}}$$

Le signe de la dérivée est donc du signe opposé à $2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{1}{Q^2}$. Il y a deux cas possibles :

- si $-2 + \frac{1}{Q^2} > 0$ c'est-à-dire si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{d|u_C|}{d\omega} < 0$ d'où le tableau de variations :

ω	0	$+\infty$
$\frac{d u_C }{d\omega}$	0	-
$ u_C $	E_0	0

- si $-2 + \frac{1}{Q^2} < 0$ c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{d|u_C|}{d\omega} > 0 \Leftrightarrow 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 2 - \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow \omega < \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (car on travaille sur \mathbb{R}^+) d'où le tableau de variations :

ω	0	$\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$\frac{d u_C }{d\omega}$	0	+	0
$ u_C $	E_0	$\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$	0

Ainsi, on voit que la tension aux bornes du condensateur ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; cette résonance a alors lieu en $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ c'est-à-dire un peu avant ω_0 (contrairement à la résonance aux bornes de la résistance, qui a lieu exactement en ω_0).

Remarque : Dans un devoir, on peut se contenter de trouver l'existence d'une annulation de la dérivée ; mieux encore, puisque $|u_C|$ est de la forme $\frac{cst}{\sqrt{f(\omega)}}$, on peut se contenter de chercher les pulsations telles que $\frac{df}{d\omega} = 0$. On trouve alors que $\frac{df}{d\omega} = \frac{2\omega}{\omega_0^2} \left[-2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{1}{Q^2} \right]$, puis que :

- si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée ne s'annule qu'en $\omega = 0$, donc la courbe est strictement monotone de E_0 à 0, donc elle n'a pas de résonance
- si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée s'annule en $\omega = 0$ et en $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$; cela pourrait correspondre à un point d'inflexion, mais on admet qu'il s'agit d'un maximum.

On peut alors tracer la courbe de $|u_C|$ pour différentes valeurs de Q (figure E6.5) ; elle fait apparaître un fait très important : quand la résonance existe, le maximum de $|u_C|$ est plus grand que E_0 . Autrement dit, on alimente un circuit avec une tension E_0 , et on arrive à obtenir une tension supérieure à E_0 dans le circuit : on appelle cela une *surtension à la résonance*. On peut constater en traçant différentes courbes que cette surtension augmente lorsque le facteur de qualité augmente.

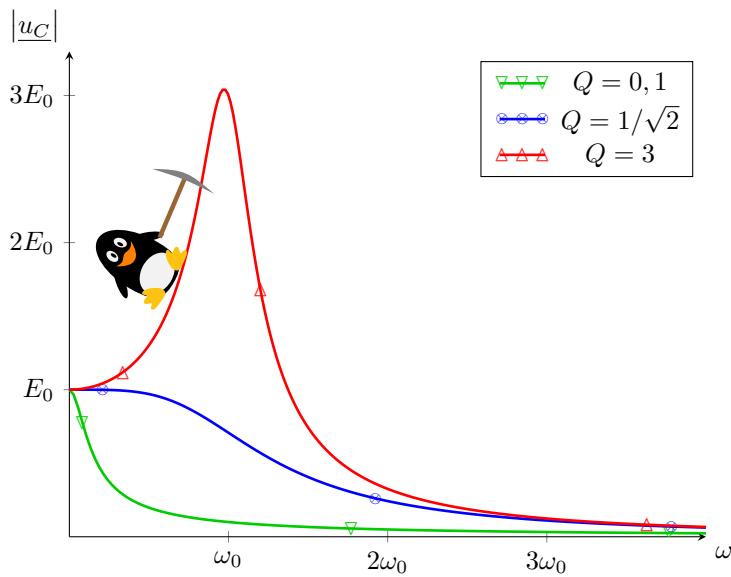


FIGURE E6.5 – Courbe de résonance aux bornes du condensateur en fonction du facteur de qualité.

On pourrait alors calculer la largeur de la bande passante pour savoir si le comportement avec Q est le même que pour $|u_R|$. En fait, ce calcul est très compliqué, sauf dans un cas particulier :

Propriété : Résonance aux bornes du condensateur lorsque Q grand

Lorsque le facteur de qualité Q est grand devant 1, la résonance a lieu quasiment à ω_0 , elle a pour amplitude $Q.E_0$ et pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

Démonstration

On a trouvé que la résonance a lieu pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$; si $Q \gg 1$ alors elle a lieu quasiment pour $\omega = \omega_0$.

$$\text{Le maximum vaut alors } |u_C|(\omega_0) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega_0^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} = Q.E_0.$$

Le reste de la démonstration est compliqué, il ne faudra pas savoir le refaire, mais il faut au moins savoir écrire l'équation vérifiée par les limites de la bande passante :

$$|u_C| = \frac{U_{C,max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega_0^2}}} = \frac{Q.E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} = \frac{2}{Q^2}$$

En posant $X = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ et en développant, on arrive à l'équation $X^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)X + 1 - \frac{2}{Q^2} = 0$. On calcule $\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 2\right)^2 - 4 + \frac{8}{Q^2} = \frac{1}{Q^4} + \frac{4}{Q^2} > 0$. Comme $Q \gg 1$, on va garder le terme en $\frac{1}{Q^2}$ (qui est très très petit) mais négliger le terme en $\frac{1}{Q^4}$ (qui est très très très très petit). On a donc $\Delta = \frac{4}{Q^2} = \left(\frac{2}{Q}\right)^2$. Les racines sont donc $X = \frac{\left(2 - \frac{1}{Q^2}\right) \pm \frac{2}{Q}}{2} \approx 1 \pm \frac{1}{Q}$ en négligeant le terme $\frac{1}{Q^2}$ devant $\frac{1}{Q}$ ^a.

On a alors $\omega = \omega_0 \sqrt{X}$ d'après la définition de X ; donc les limites de la BP sont données par $\omega = \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}}$. Or, avec les développements limités en maths, on montre que pour un $\varepsilon \ll 1$, on a $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Ici $\frac{1}{Q} \ll 1$ donc $\sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$. La bande passante à -3 dB est donc $\left[\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}; \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}\right]$ de largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

a. Ces histoires de «négliger des termes» se rapportent aux développements limités en maths. On fait un développement des racines à l'ordre 1 en $\frac{1}{Q}$.

On voit donc que, à fort facteur de qualité, les résonances aux bornes de la résistance et du condensateur ont des comportements quasi-identiques, alors que ce n'est pas le cas pour Q faible. En pratique, la limite se trouve au voisinage de $Q = 2,5$.

Remarque : On pourrait s'étonner qu'en mettant une tension d'amplitude E_0 aux bornes d'un circuit, on obtienne une tension supérieure à E_0 aux bornes d'un des composants. Cela est dû à un effet de déphasage entre les différentes tensions. La figure E6.6 illustre ce qui se passe avant la résonance, à la résonance et après la résonance.

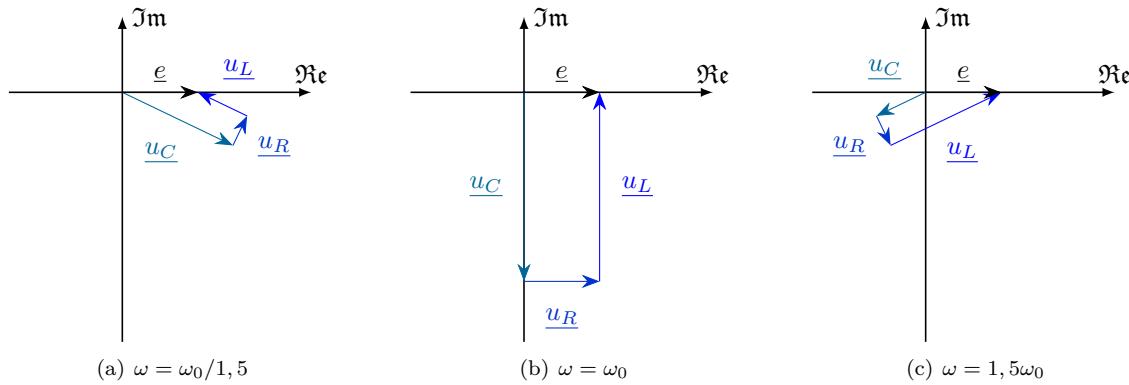


FIGURE E6.6 – Diagramme de Fresnel du RLC série pour $Q = 2,5$.

Cet effet est utilisé pour obtenir de fortes tensions dans différents dispositifs ; le plus spectaculaire étant les bobines de Tesla (figure E6.7) produisant, par plusieurs résonances successives, des tensions de millions de Volts créant de gigantesques étincelles.



FIGURE E6.7 – Bobines de Tesla. (Crédit : Wikipedia/Antivolt)

Ce phénomène d'amplification à la résonance peut parfois être utile, mais parfois aussi destructeur, c'est pour cela qu'il n'y a pas de règle générale comme quoi il faut mieux que Q soit grand ou petit.

L'animation de la figure E6.8 permet de faire varier la fréquence et de visualiser les variations de $u_C(t)$.

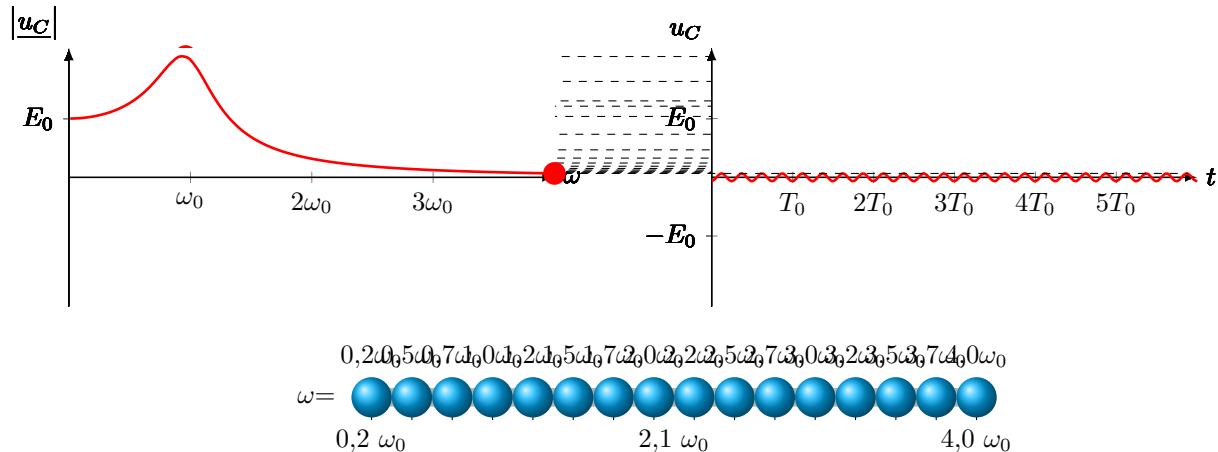


FIGURE E6.8 – Lien entre la courbe de résonance aux bornes du condensateur, et la tension aux bornes de celui-ci ; pour $Q = 2$.

E6.D. Étude de la résonance aux bornes de la bobine, ou résonance en accélération

Il nous reste à considérer la tension aux bornes de la bobine. Nous allons le traiter rapidement, les résultats sont les mêmes qu'aux bornes du condensateur en inversant BF et HF.

Propriété : Tension aux bornes de la bobine

La tension aux bornes de la bobine vaut

$$\underline{u}_L = \frac{\underline{e}}{1 - j \frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{\underline{e}}{1 - j \frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (\text{E6.5})$$

Démonstration

Pour calculer la tension aux bornes de la bobine, il suffit d'appliquer le diviseur de tension (figure E6.1) :

$$\underline{u}_L = \frac{jL\omega\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{\underline{e}}{1 - j \frac{R}{L\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{\underline{e}}{1 - j \frac{\sqrt{L}}{Q\sqrt{C}\omega} - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{\underline{e}}{1 - j \frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

Remarque : De même, dans l'OH, l'accélération a pour image complexe $\underline{a} = \frac{\underline{F}/m}{1 - j \frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$

Propriété : Limites de la tension en basse et haute fréquence

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine tend vers 0 en BF et vers $E_0 = |\underline{e}|$ en HF.

Démonstration

L'amplitude de la tension est le module de l'image complexe : $|\underline{u}_L| = |\underline{u}_L| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}}}$

En basses fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers $+\infty$ donc $|\underline{u}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$.

En hautes fréquences, le numérateur tend vers E_0 et le dénominateur tend vers 1 donc $|\underline{u}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} E_0$.

Propriété : Résonance de la tension aux bornes de la bobine

L'amplitude de la tension aux bornes de la bobine possède une résonance si et seulement si le facteur de qualité Q est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Démonstration

Comme précédemment, on va faire ici l'étude complète des variations de $|\underline{u}_L|$:

$$\frac{d|\underline{u}_L|}{d\omega} = \frac{d}{dt} \left[\frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}}} \right] = -\frac{E_0}{2} \frac{2\left(0 + \frac{2\omega_0^2}{\omega^3}\right)\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) - \frac{2\omega_0^2}{Q^2\omega^3}}{\left(\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}\right)^{3/2}} = \frac{E_0}{2} \frac{\frac{2\omega_0^2}{\omega^3} \left[2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2 + \frac{1}{Q^2} \right]}{\left(\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2}\right)^{3/2}}$$

Le signe de la dérivée est donc le signe de $2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2 + \frac{1}{Q^2}$. Il y a deux cas possibles :

— si $-2 + \frac{1}{Q^2} > 0$ c'est-à-dire si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{d|\underline{u}_L|}{d\omega} < 0$ d'où le tableau de variations :

ω	0	$+\infty$
$\frac{d \underline{u}_L }{d\omega}$	0	+
$ \underline{u}_L $	0	E_0

- si $-2 + \frac{1}{Q^2} < 0$ c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{d|\underline{u}_C|}{d\omega} > 0 \Leftrightarrow 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 2 - \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow \omega < \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ (car on travaille sur \mathbb{R}^+) d'où le tableau de variations :

ω	0	$\frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$	$+\infty$
$\frac{d \underline{u}_L }{dt}$	0	+	0
$ \underline{u}_L $	E_0	$\frac{QE_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$	0

Ainsi, on voit que la tension aux bornes de la bobine ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; cette résonance a alors lieu en $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ c'est-à-dire un peu après ω_0 .

Remarque : Dans un devoir, on peut se contenter de trouver l'existence d'une annulation de la dérivée; mieux encore, puisque $|\underline{u}_L|$ est de la forme $\frac{cst}{\sqrt{f(\omega)}}$, on peut se contenter de chercher les pulsations telles que $\frac{df}{d\omega} = 0$. On trouve alors que $\frac{df}{d\omega} = \frac{2\omega^2}{\omega^3} \left[2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 2 + \frac{1}{Q^2} \right]$, puis que :

- si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée ne s'annule jamais, donc la courbe est strictement monotone de 0 à E_0 , donc elle n'a pas de résonance
- si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors la dérivée s'annule en $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$; cela pourrait correspondre à un point d'inflexion, mais on admet qu'il s'agit d'un maximum.

On peut alors tracer la courbe de $|\underline{u}_L|$ pour différentes valeurs de Q (figure E6.9); elle est globalement symétrique de celle de $|\underline{u}_C|$.

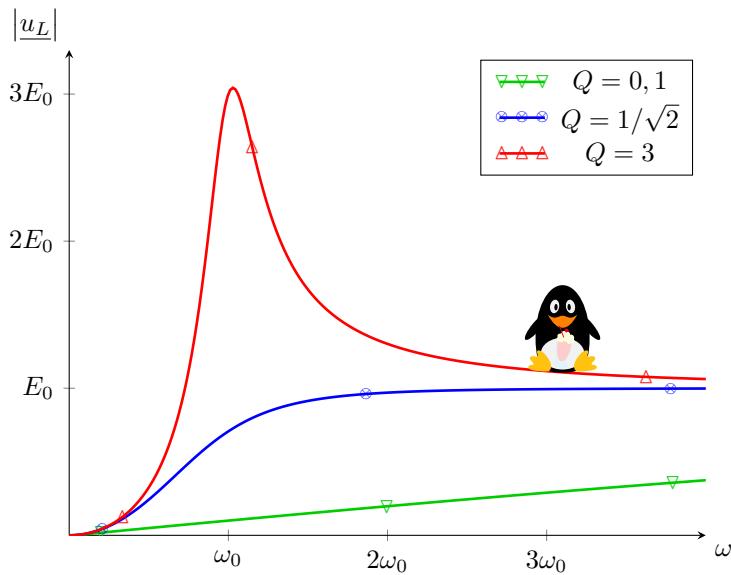


FIGURE E6.9 – Courbe de résonance aux bornes de la bobine en fonction du facteur de qualité.

Propriété : Résonance aux bornes de la bobine lorsque Q grand

Lorsque le facteur de qualité Q est grand devant 1, la résonance a lieu quasiment à ω_0 , elle a pour amplitude $Q \cdot E_0$ et pour largeur $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

E6.E. Résonance en puissance

Le phénomène de résonance est commun à beaucoup de domaines de la physique. Dans de nombreux domaines, en particulier dans l'étude de l'infiniment petit, on n'a pas accès à d'autres grandeurs que l'énergie absorbée. On va donc calculer ici la courbe de résonance de la puissance absorbée, même si ce calcul n'est pas vraiment au programme.

Calcul : Bilan énergétique du circuit RLC

On rappelle ce bilan qu'on a déjà vu : la loi des mailles indique que $e = u_L + u_C + u_R = L \cdot \frac{di}{dt} + u_C + R \cdot i$. En multipliant par i , il vient $e \cdot i = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot u_C + r \cdot i^2 = L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} + C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot u_C + r \cdot i^2 = \frac{d}{dt} [\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2] + R \cdot i^2$ soit

$$\mathcal{P}_{fournie} = \frac{d(E_C + E_L)}{dt} + R \cdot i^2$$

ce qui montre que la puissance fournie par le générateur est partiellement stockée dans le condensateur et la bobine, et partiellement dissipée dans la résistance par effet Joule.

Prenons la valeur moyenne : si f est une fonction T -périodique, alors $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt$ par définition ; si on considère sa dérivée, $\langle f' \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f'(t) \cdot dt = \frac{1}{T} [f]_0^T = \frac{f(T) - f(0)}{T} = 0$ par périodicité de f . On en déduit ce résultat universel : la dérivée d'une fonction périodique a une moyenne nulle.

En appliquant ce résultat au calcul précédent, on trouve que

$$\langle \mathcal{P}_{fournie} \rangle = \langle R i^2 \rangle$$

Propriété : Puissance moyenne dissipée

C'est la résistance qui dissipe de l'énergie ; la puissance moyenne reçue par la résistance vaut

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{|e|^2}{2R \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]} \quad (\text{E6.6})$$

Démonstration

La résistance dissipe une puissance moyenne $\mathcal{P} = R i^2 = \frac{u_R^2}{R}$. La puissance moyenne vaut donc

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2R} \Re \left[u_R \cdot u_R^* \right] = \frac{1}{2R} |u_R|^2 = \frac{1}{2R} \left| \frac{E_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right|^2 = \frac{E_0^2}{2R \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$$

Remarque : De même, la puissance dissipée par la force de frottements vaut $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \lambda v^2 \rangle = \frac{|F|^2}{2\lambda \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}$

Propriété : Résonance de la puissance reçue

La puissance moyenne reçue par la résistance a des limites nulles en BF et en HF, et a une résonance en ω_0 .

Démonstration

Pour les limites, c'est évident. Pour les variations, on dérive : $\frac{d\langle \mathcal{P} \rangle}{d\omega} = -\frac{E_0^2}{4R} \frac{2Q^2 \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{\left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^2}$ donc $\frac{d\langle \mathcal{P} \rangle}{d\omega} > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} < 0 \Leftrightarrow \omega < \omega_0$ d'où le tableau de variations :

ω	0	ω_0	$+\infty$
$\frac{d\langle \mathcal{P} \rangle}{d\omega}$	+	0	-
$\langle \mathcal{P} \rangle$	0	$\frac{E_0^2}{2R}$	0

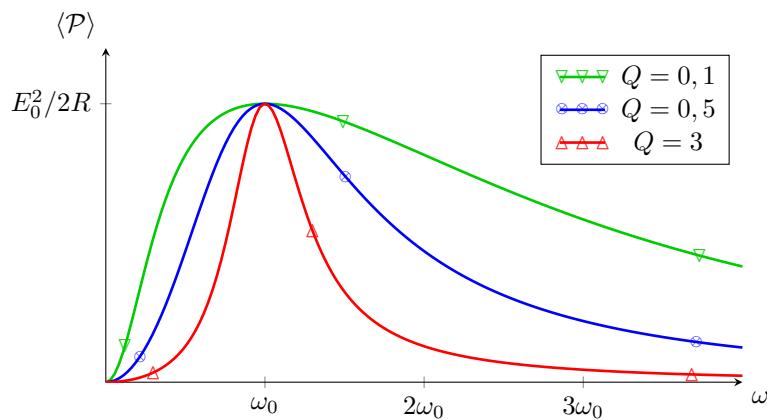


FIGURE E6.10 – Courbe de résonance en puissance.

Remarque : Pour la puissance, on ne parle pas de largeur de bande passante à -3 dB, mais de largeur à mi-hauteur. Pourquoi ? parce que si $|u_R|$ est divisé par $\sqrt{2}$ alors la puissance est divisée par 2. On pourrait donc montrer facilement que la largeur à mi-hauteur de la résonance vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

E6.F. Autres exemples de résonances

La résonance est un phénomène physique très répandu. En mécanique, par exemple, la résonance amplifie des phénomènes ; c'est le cas des marées, qui entrent en résonance avec certaines baies comme celle du mont Saint-Michel ou de Fundy, ou encore des instruments de musique, dans lesquels la résonance va provoquer l'amplification d'une fréquence déterminée par l'objet (par exemple la longueur d'un tuyau d'orgue, ou la tension et la masse d'une corde) et la vibration correspondante va se transmettre à l'air pour donner un son (figure E6.11).



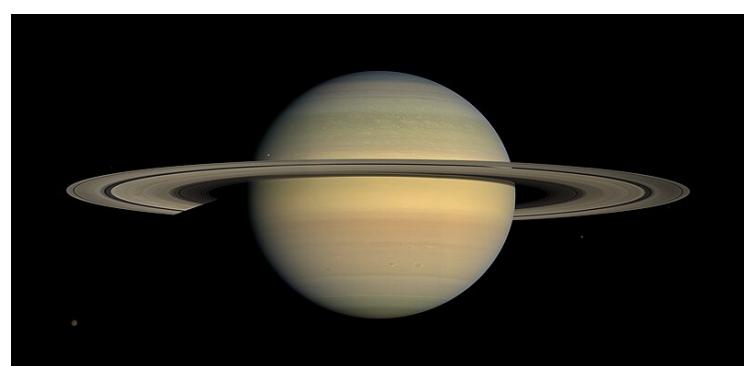
(a) Rochers d'Hopewell dans la baie de Fundy. Le point le plus étroit du pied des rochers montre le niveau moyen atteint par l'eau à marée haute. (Crédit : Wikipedia/J.Rover)



(b) Tuyaux d'orgue ; la fréquence de résonance dépend de la longueur du tuyau. (Crédit : Wikipedia/Tolanor)



(c) Effondrement du pont de Tacoma Narrows en 1940. (Crédit : Wikipedia/Botaurus)



(d) Anneaux de Saturne ; la bande noire, appelée *division de Cassini*, présente une résonance avec le satellite Mimas qui expulse les cailloux présents. (Crédit : Wikipedia/NASA)

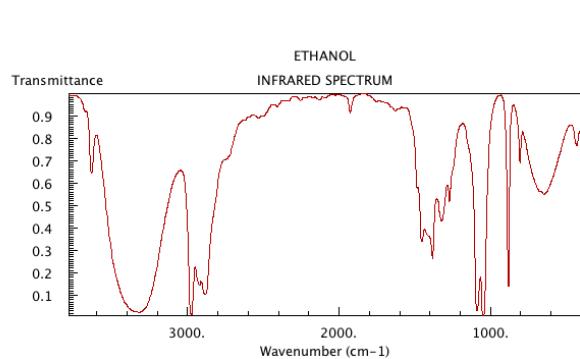
FIGURE E6.11 – Exemples de résonances.

Au contraire, cette amplification peut être destructrice, comme lors de l'écroulement du pont de la Basse-Chaîne à Angers en 1850 suite au passage d'un régiment militaire marchant au pas, ou celui de Tacoma ; on en trouve même en astronomie, par exemple dans les anneaux de Saturne où la bande noire, appelée division de Cassini, est une zone de vide due à une résonance avec le satellite Mimas qui expulse tout cailloux se trouvant dans cette zone.

Mais il existe aussi des résonances qu'on ne peut pas observer : dans l'infiniment petit, les électrons vibrent autour des noyaux des atomes, et possèdent des résonances, mais invisibles ; par contre, on peut accéder à la puissance dissipée, et observer une résonance en puissance de laquelle on peut mesurer les deux grandeurs essentielles, à savoir ω_0 et Q . La figure E6.12 montre ainsi quelques exemples de courbes de résonances dans l'étude de la matière. Par exemple, les creux dans les spectres infrarouges des molécules sont des pics d'absorption dus à des résonances : quand on envoie de la lumière, il s'agit d'une onde électromagnétique qui «secoue» les électrons et lorsque la fréquence de la lumière correspond à une résonance des électrons de la molécule, il y a un creux dans la transmission de l'échantillon. Ce même phénomène explique les molécules colorées : elles ont une résonance dans le visible, qui se traduit par l'absorption d'une couleur.

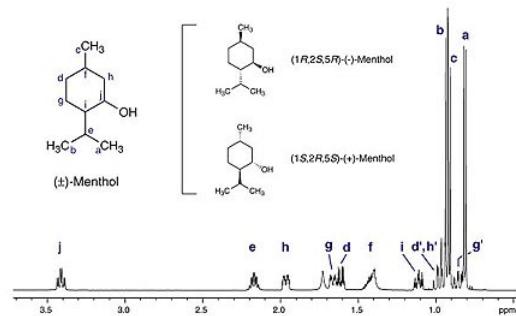
De même dans la Résonance Magnétique Nucléaire, ce sont cette fois les noyaux des atomes d'hydrogène qui résonnent sous l'action d'un champ magnétique, comme de petits aimants. On peut ainsi sonder la matière par une étude des résonances énergétiques.

De telles résonances se retrouvent dans tous les domaines de la physique ; ce qui faisait dire à Richard Feynman à ses élèves : «Dans chaque numéro de chaque revue de physique, il y a au moins une courbe de résonance.»



(a) Spectre infrarouge en transmission de l'éthanol. (Crédit : Wikipedia/SAH002)

1D PROTON SPECTRUM



(b) Spectre de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) du menthol. (Crédit : Wikipedia)

FIGURE E6.12 – Exemples de résonances dans l'infiniment petit.

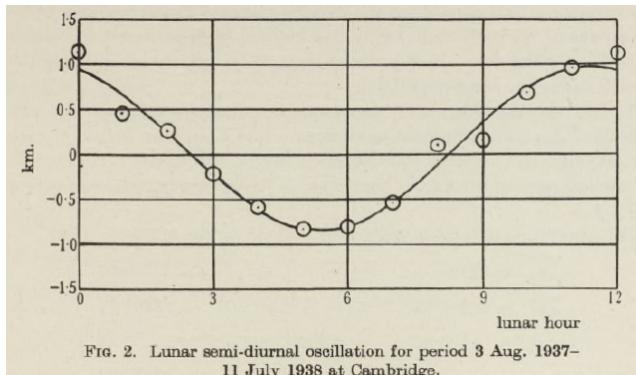
Un dernier exemple intéressant présenté par Richard Feynman dans son cours est celui de l'atmosphère terrestre.

On sait que, quand on souffle dans une bouteille, elle produit un son : l'air contenu dans la bouteille se met à vibrer. L'atmosphère terrestre, c'est un peu comme l'air d'une bouteille géante : elle peut aussi osciller verticalement. Mais comment connaître sa pulsation propre ω_0 et son facteur de qualité Q ?

La Lune nous prête un coup de main. Par le moyen des marées, elle secoue la mer, mais aussi l'atmosphère, avec une période de 12,42 h. L'oscillation qui en résulte se voit sur la courbe de variation de la pression atmosphérique (figure E6.13) : on constate une oscillation de 12 h environ superposée à une autre, de 24 h, correspondant à l'alternance diurne. En extrayant la partie oscillant à 12,42 h on a une première information, mais pas suffisamment pour déterminer ω_0 , Q , et tracer la courbe.

Comment en savoir plus ? On peut essayer de secouer l'atmosphère à une autre pulsation... Mais il existe aussi le régime libre : pour cela il suffit de mettre une grosse pichenette à l'atmosphère et de regarder comment elle oscille. Cette pichenette, c'est un volcan qui l'a mise : en 1883, l'île du Krakatoa en Indonésie s'est effondrée ; l'eau de mer s'est engouffrée dans la chambre de magma, provoquant la plus forte explosion de l'histoire (équivalente à 13000 bombes d'Hiroshima). L'explosion a été entendue en Australie à 5000 km de là, a provoqué un raz-de-marée de 46 m de haut qui a fait le tour du monde, et, surtout, a fait osciller l'atmosphère terrestre pendant 5 jours avec une période propre qui a été mesurée précisément : 10,3 h ; le facteur de qualité aussi a été mesuré, proche de 5.

Ainsi, en mettant ensemble une mesure en régime forcé, et une mesure en régime libre, on a pu déterminer complètement les caractéristiques d'une modélisation simpliste de l'atmosphère terrestre.



(a) Part des oscillations de la pression atmosphérique correspond à la réponse aux marées lunaires. ([Crédit : E.Appleton et K.WEEKES, Proceedings of the Royal Society A, 19 mai 1939](#))



(b) Le volcan Krakatoa avant son explosion du 27 août 1883. ([Crédit : Wikipedia // G.Clerc-Rampal](#))

FIGURE E6.13 – Étude des oscillations de l'atmosphère.

 Résonances

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Oscillateurs électriques soumis à une excitation sinusoïdale. Résonance.	<p>Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.</p> <p>Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.</p> <p>Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.</p> <p>Mettre en œuvre un dispositif expérimental visant à caractériser un phénomène de résonance.</p>

Résonances
QCMs

réponses page 565

QCM : Compréhension du cours

Q1.

Le circuit RLC série est le seul circuit d'ordre 2.

Q2.

La résonance aux bornes de la résistance existe :

Q3.

La résonance aux bornes du condensateur existe :

Q4.

La résonnance aux bornes de la résistance a lieu pour

- (a). $\omega < \omega_0$ (b). $\omega = \omega_0$
(c). $\omega > \omega_0$

Q5.

La résonnance aux bornes du condensateur a lieu pour

Q6.

La largeur de la BP à -3 dB de la résonance aux bornes de la résistance, ou aux bornes du condensateur lorsque $Q \gg 1$, vaut :

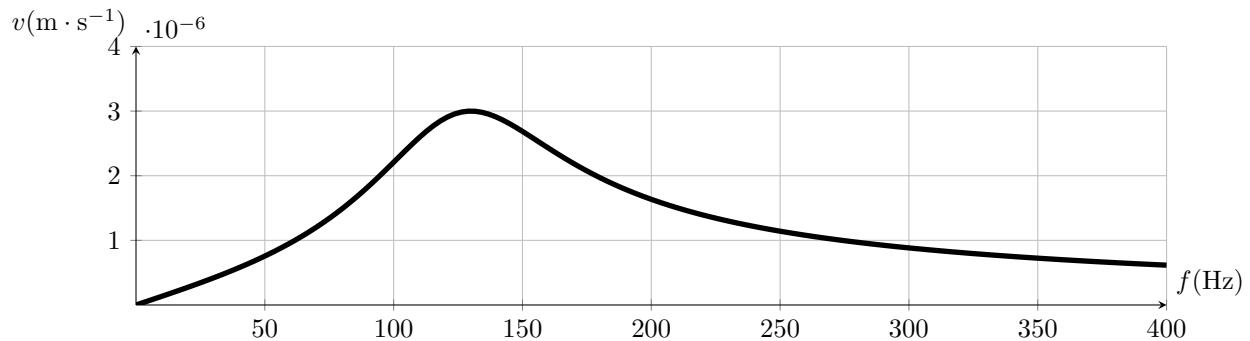
- (a). $\frac{\omega_0}{2}$
 (b). Q
 (c). $\frac{Q}{\omega_0}$
 (d). $\frac{\omega_0}{Q}$

Résonances
Exercices

réponses page 566

Exercice E6.1 : Lecture des caractéristiques d'un résonateur [*]

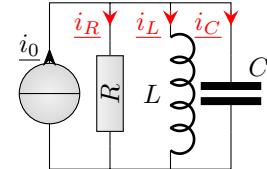
Un résonateur de Helmholtz possède la courbe de résonance suivante (équivalente à celle aux bornes de la résistance) :



Mesurez la fréquence propre, la pulsation propre, et le facteur de qualité de ce résonateur.

Exercice E6.2 : Circuit RLC parallèle []**

Un circuit composé d'une résistance R , d'une bobine L et d'un condensateur C placés en parallèles, est alimentée par un courant sinusoïdal i_0 de pulsation ω et d'amplitude I_0 .

**1. Intensité dans la résistance**

- (a) Exprimez l'amplitude I_R de i_R en fonction de I_0 et des constantes.
- (b) Calculez ses limites en basse et haute fréquence.
- (c) Montrer que I_R passe par un maximum lorsque $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et exprimer sa valeur.
- (d) En déduire l'allure de la courbe de résonance de I_R .

2. Intensité dans la bobine

- (a) Exprimez l'amplitude I_L .
- (b) Calculez ses limites en basse et haute fréquence.
- (c) Montrer que I_L passe par un maximum pour une pulsation à préciser qui n'existe que si R est plus grand qu'une certaine valeur.
- (d) En déduire l'allure de la courbe de résonance de I_L en fonction de la valeur de R .

3. Intensité dans le condensateur

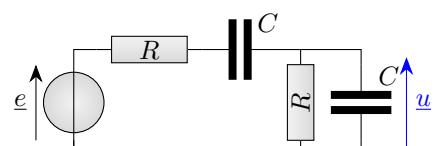
Mêmes questions que pour la bobine.

Exercice E6.3 : Pont de Wien []**

Le circuit ci-contre, appelé Pont de Wien, est constitué de deux résistances R identiques et de deux condensateurs C identiques.

Exprimez \underline{u} et mettez-le sous la forme $\frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}$ en exprimant H_0 , ω_0 et Q en fonction de R et C .

Vous pouvez ensuite, si vous le voulez, tracer la courbe de $|\underline{u}|$ en fonction de ω .



Exercice E6.4 : Masse-ressort secoué [**]

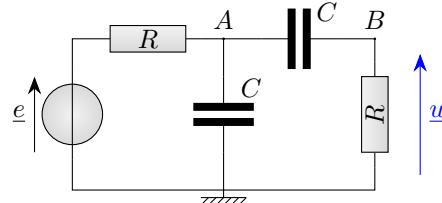
Un objet M de masse m est suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité A est secouée selon la loi $z_A(t) = L \cos(\omega t)$. On modélise les frottements de l'air par force $-f \cdot \vec{v}(M)$ avec f une constante. On note z l'altitude du point M , et $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ le champ de pesanteur. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

1. Exprimez la longueur \ll du ressort en fonction de z et z_A . Déduisez-en la force exercée par le ressort sur M .
 2. Établissez l'ED vérifiée par z .
 3. Le second membre contient deux termes : un constant, l'autre sinusoïdal. La solution particulière est la somme des solutions particulières correspondant à chaque terme. Déterminez la solution particulière correspondant au terme constant.
 4. Déterminez la solution particulière correspondant au terme sinusoïdal ; mettez-la sous la forme $\underline{z} = \frac{L e^{j\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$
 5. Exprimez l'amplitude Z de $z(t)$ en régime sinusoïdal.
 6. On prend : $L = 1 \text{ cm}$, $k = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 500 \text{ g}$ et $f = 2,5 \text{ USI}$. Calculez Z pour une fréquence d'excitation égale à $0,8 \text{ Hz}$.
 7. On admet que Z admet un maximum pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (vous pouvez vous entraîner à le redémontrer). Calculez la pulsation correspondante, ainsi que la valeur de Z_{max} .
 8. Écrivez l'équation vérifiée par les deux pulsations ω qui limitent la bande passante à -3 dB . Résolvez cette équation numériquement à l'aide de la calculatrice.
- Indication :* le solveur de la calculatrice trouve une seule valeur à la fois. Il faut lui préciser, selon les modèles : une valeur initiale proche de la solution, ou bien un intervalle dans lequel chercher la solution, ou bien les deux. Ici, on cherche deux solutions : une comprise dans $]0; \omega_r[$ et l'autre dans $]\omega_r; \infty[$ (pour la deuxième, on prendra une borne supérieure très grande).
9. Tracez la courbe $Z(\omega)$.



Exercice E6.5 : Tracé d'une courbe de résonance [***]

On considère le circuit ci-contre ($R = 2200 \Omega$, $C = 220 \text{ nF}$) alimenté par une source de tension $e(t) = 10 \cos(\omega t)$.



1. Indiquez l'impédance \underline{Z} équivalente aux deux dipôles de droite.
2. À l'aide du théorème de Millman appliqué 2 fois, ou bien du diviseur de tension appliqué 2 fois, montrer que
$$\underline{u} = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}} \underline{e}$$
3. Exprimez l'amplitude U de \underline{u} et trouvez ses limites en BF et HF.
4. Montrez que U passe par un maximum pour une pulsation ω à exprimer ; on en fera l'AN. Calculez numériquement U_{max} .
5. Écrivez l'équation vérifiée par les pulsations ω limitant la bande passante à -3 dB . Résoudre numériquement cette équation sur la calculatrice, et en déduire la bande passante, et sa largeur.
6. Tracez la courbe de U en fonction de ω .

Exercice E6.6 : Modèle atomique de Thomson [**]

Un des tous premiers modèles de l'atome d'hydrogène est dû à Sir Joseph John Thomson (1856-1940) qui, après avoir découvert l'électron, a proposé en 1904 le «modèle de l'électron élastiquement lié» dans lequel l'électron peut se déplacer *librement* tout en étant soumis à une force de rappel qui le ramène vers le centre de l'atome. Dans cet exercice, l'atome est immobile dans un référentiel galiléen, auquel on associe le repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le repérage est donc cartésien. On appelle M la position de l'électron, dont la masse vaut $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. On suppose que l'électron est soumis à une force $\vec{F} = -k\vec{r}$. Le poids de l'électron est négligé, ainsi que l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le reste de l'atome. On admettra que, lorsqu'un électron est accéléré, il perd de l'énergie par rayonnement électromagnétique, ce qui est équivalent à l'apparition d'une force de frottements $-f\frac{d\vec{r}}{dt}$.

1. Par une estimation rapide d'ordres de grandeurs, justifiez pourquoi on peut négliger le poids et l'interaction gravitationnelle entre l'électron et le reste de l'atome.

Donnée : la masse d'un proton vaut $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg; $G = 6,17 \times 10^{-11}$ USI; le rayon a de l'atome est de l'ordre de l'Angström ($1 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-10}$ m).

2. Écrivez le PFD appliqué à l'électron et projetez-le sur les 3 axes pour obtenir 3 ED sur x , y et z .

3. Régime libre (révisions)

On constate qu'un ensemble d'atomes excités (c'est-à-dire dont les électrons bougent) émet de l'énergie lumineuse; des mesures expérimentales montrent alors que l'énergie totale de l'ensemble décroît comme une exponentielle, de constante de temps τ .

- (a) Écrivez la forme théorique des solution : $x(t) = \dots$ en supposant qu'on est en régime pseudo-périodique. On note τ le temps caractéristique de décroissance des oscillations; reliez τ à f et m .
- (b) Pour un certain atome, on mesure $\tau = 8,4$ ns et la théorie indique que $k = 230$ USI. Déduisez-en f , puis la valeur du facteur de qualité Q ; commentez.
- (c) Justifiez que les oscillations de l'électron se font à une pulsation très proche de $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}}$. Calculez numériquement ω_0 ; calculez la longueur d'onde dans le vide correspondante.

4. Régime forcé

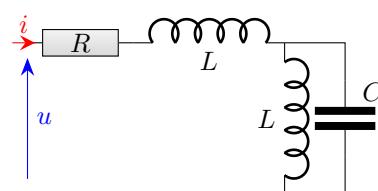
On éclaire l'atome avec de la lumière; celle-ci est une onde électromagnétique, qui exerce sur l'électron une force supplémentaire $-eE \cos(\omega t)\vec{e}_z$ avec E le champ électrique.

- (a) Écrivez la nouvelle ED vérifiée par z .
- (b) Donnez les caractéristiques de $z(t)$ en régime permanent en fonction de ω , ω_0 , τ , E , m_e et e .
- (c) Tracez l'allure de la courbe donnant l'amplitude des oscillations en fonction de la pulsation. On se contentera de calculer les limites en BF et HF, et le maximum dont on admettra qu'il a lieu en $\omega \approx \omega_0$. Le schéma ne sera bien sûr pas à l'échelle.

On prendra $E = 1 \times 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ pour les calculs.

Exercice E6.7 : Antirésonance en intensité [***]

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, qui débite un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$. On note $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\omega_1^2 = 2\omega_0^2$;

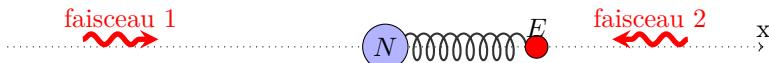


1. Montrez que l'impédance du circuit s'écrit $\underline{Z} = R + jL\omega \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$; déduisez-en l'expression de I_0 en fonction de U_0 , ω , ω_0 , ω_1 , R et L .
2. Trouvez les pulsations pour lesquelles I_0 est minimal, puis maximal, ainsi que les valeurs de I_0 correspondantes (normalement, il n'y a pas de gros calculs à faire). Trouvez aussi les limites en haute et basse fréquence.
3. Représentez l'allure de $I_0(\omega)$ graphiquement. On admettra que cette fonction varie de façon monotone entre 0 et ω_0 , entre ω_0 et ω_1 , et entre ω_1 et $+\infty$.

Exercice E6.8 : Refroidissement d'atomes par laser [***]

Dans un gaz, les différents atomes sont animés de vitesses différentes. Pour refroidir le gaz, il faut ralentir ces atomes. Pour cela, on les éclaire à l'aide de lasers.

Dans le modèle simple de l'atome appelé «modèle de l'électron élastiquement lié», un atome est modélisé par un noyau N (masse M) et un électron E beaucoup plus léger (masse m_e), les deux étant reliée par un ressort de raisseur k et de longueur à vide nulle; de plus, l'électron est soumis à une force d'amortissement qui s'écrit $-\frac{m_e}{\tau} \cdot \frac{d\vec{N}\vec{E}}{dt}$ avec τ une constante. Pour simplifier, on se placera dans ce problème en une seule dimension. On notera ℓ la longueur du ressort.



On note \mathcal{R} le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. On suppose pour le moment que N est immobile dans \mathcal{R} .

L'électron est éclairé par de la lumière de fréquence f . La lumière exerce sur l'électron une force qui s'écrit $F(t)\vec{e}_x = F_0 \cos(2\pi ft) \vec{e}_x$ d'image complexe $\underline{f} = F_0 e^{j2\pi ft}$.

En écrivant le PFD appliqué à l'électron dans \mathcal{R} , exprimer \underline{v} , image complexe de la vitesse $v = \dot{\ell}$ de l'électron, en régime permanent, en fonction de f , k , m_e , τ et F_0 .

2. Exprimer la puissance $p(t)$ fournie par la force $F(t)\vec{e}_x$ à l'électron en fonction de F et v . En déduire la puissance moyenne P correspondante en fonction de \underline{f} et \underline{v} , puis montrer que $P = \frac{A}{1 + \tau^2 \left(2\pi f - \frac{k}{2\pi f m_e} \right)^2}$ avec A constante à déterminer.

3. Étudier les limites de P lorsque f tend vers 0, puis vers l'infini.

Montrer que P passe par un maximum pour une fréquence f_0 qu'on exprimera en fonction de k et m_e ; exprimer la valeur de ce maximum en fonction de A .

Tracer alors l'allure de la courbe $P(f)$.

4. En réalité, deux faisceaux de lumière arrivent sur l'atome, le premier venant de la droite, le second de la gauche. Ces deux faisceaux ont la même fréquence f très légèrement inférieure à f_0 .

On tient compte maintenant du mouvement de l'atome qui se déplace à la vitesse v_0 . En première approximation, on peut considérer que les équations écrites précédemment restent vraies, seulement, par effet Doppler, les fréquences des faisceaux lumineux sont modifiées :

- le faisceau venant de la gauche est vu par l'atome comme ayant une fréquence $f_1 = (1 - \frac{v_0}{c}) \cdot f$
- le faisceau venant de la droite est vu par l'atome comme ayant une fréquence $f_2 = (1 + \frac{v_0}{c}) \cdot f$

Tracez sur un graphique l'allure de la puissance P_1 que l'atome absorbe de la part du faisceau 1, en fonction de sa vitesse v_0 . On pourra commencer par rechercher la vitesse pour laquelle cette puissance est maximale. Tracez aussi P_2 sur le même graphique, pour l'autre faisceau.

5. En réalité, lorsque l'atome absorbe de la lumière, il absorbe des photons qui possèdent aussi une quantité de mouvement, et cela crée une force. On admet que, si un faisceau fournit à l'atome une puissance moyenne P , alors il exerce sur lui une force $\frac{P}{c} \vec{u}$ avec \vec{u} le vecteur unitaire dans la direction de propagation du faisceau.

On note $f_{tot}\vec{e}_x$ la force moyenne totale subit par l'atome de la part des deux faisceaux. Exprimer f_{tot} en fonction de P_1 , P_2 et c .

Tracer alors l'allure de f_{tot} en fonction de v_0 .

6. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{v_0}{c}$ au voisinage de 0, montrer que, pour ces vitesses faibles, cette force s'écrit $f_{tot} = -\lambda v_0$ avec λ à exprimer.

Faire l'AN de λ pour : $c = 3,9 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $F_0 = 5,5 \times 10^{-11} \text{ N}$; $\tau = 1,6 \text{ ns}$; $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$; $f_0 = 3,2 \times 10^{15} \text{ Hz}$; et $f = 0,999 f_0$.

7. On considère maintenant l'atome complet soumis uniquement à cette force. Établir l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse v_0 et calculer le temps caractéristique correspondant si sa masse vaut $m = 1,5 \times 10^{-25} \text{ kg}$.

8. En pratique, cette méthode permet de refroidir des gaz d'atomes jusqu'à des températures de l'ordre de $T = 100 \mu\text{K}$. Calculer la température quadratique correspondante. Pourquoi ne peut-on pas plus ralentir les atomes ?

Résonances

TDs numériques

réponses page 568

TD numérique : Résonances

Dans ce TD nous allons utiliser Python pour faire les calculs sur les nombres complexes à notre place.

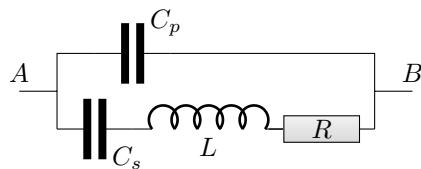
1. RLC série

On construit un RLC série avec une bobine d'inductance $L = 21 \text{ mH}$, un condensateur $C = 470 \text{ nF}$ et une résistance $R = 70 \Omega$, alimenté par une tension sinusoïdale d'amplitude $E = 4 \text{ V}$ et de fréquence f variable. On veut tracer la courbe de résonance aux bornes de la résistance.

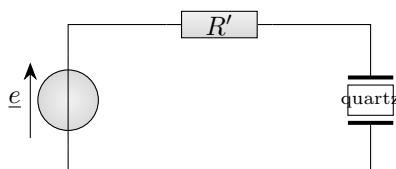
- Exprimez l'image complexe de la tension aux bornes de la bobine, u_L , en fonction de ω puis de f .
- Définissez sous Python la fonction `_uL(f)` correspondante (plus exactement, cette fonction renvoie $u_L(f, t = 0)$; le temps n'apparaît plus) ; pour obtenir le nombre complexe j en Python, on tape `1j` ; par exemple $2 + 3j$ peut s'écrire `2+3*j` ou éventuellement `2+3j`.
- Définissez un tableau de fréquences entre 10 Hz et 10 kHz, et générez le tableau des u_L correspondant ; générez alors :
 - le tableau des $|u_L|$ à l'aide de la fonction `np.abs`
 - le tableau des $\arg(u_L)$ à l'aide de la fonction `np.angle`
- Tracez alors $|u_L|(f)$ et $\arg(u_L(f))$.
- À l'aide de la fonction `np.max`, mesurez l'amplitude maximale de u_L . Définissez alors une fonction `equation(f)` qui doit s'annuler pour les deux fréquences correspondant aux bornes de la bande passante à -3 dB .
À l'aide de la fonction `scipy.optimize.bisect`, déterminez les deux fréquences limitant la bande passante. Cette fonction prend trois arguments obligatoires : la fonction à annuler, et deux valeurs encadrant la racine recherchée ; utilisez le graphique pour proposer de bonnes valeurs de départ.
- En réalité, la bobine est modélisable de façon plus réaliste par une inductance L en série avec une résistance $r = 7,1 \Omega$. Reprenez le tracé de la courbe et le calcul de la bande passante.
- Tracez sur le même graphique la courbe de l'amplitude pour $R = 300 \Omega$.

2. Résonance d'un quartz

On considère maintenant le dipôle suivant qui modélise un quartz de montre, avec $R = 250 \Omega$, $L = 500 \text{ mH}$, $C_s = 0,0800 \text{ pF}$ et $C_p = 8,00 \text{ pF}$:



- Exprimez son impédance Z sans chercher à la simplifier.
- On réalise un circuit série avec un générateur de tension d'amplitude $E = 5 \text{ V}$ et de fréquence f , une résistance $R' = 100 \text{ k}\Omega$ et le quartz.



Tracez l'amplitude de la tension aux bornes du quartz, pour des fréquences comprises entre 780 kHz et 820 kHz. Commentez les deux effets observés.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a)

Il en existe plein d'autres, à commencer par le RLC parallèle.

Q2.(b)

Q3.(c)

Q4.(b)

Q5.(b)

En $\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$ mais lorsque Q devient grand alors cette résonance est quasiment à ω_0 .

Q6.(d)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E6.1 : Lecture des caractéristiques d'un résonateur [*]

$f_0 = 130 \text{ Hz}$ donc $\omega_0 = 2\pi f_0 = 817 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La BP a pour largeur $\Delta f = 70 \text{ Hz}$. On en déduit $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1,9$.

Réponses de l'exercice E6.2 : Circuit RLC parallèle [**]

1. Intensité dans la résistance

(a) $I_R = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega - \frac{R}{L\omega})^2}} I_0$

(b) I_R tend vers 0 en BF et en HF.

(c) I_R est maximal lorsque $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; on a alors $I_{R,max} = I_0$.

(d) C'est la même que U_R dans le cours.

2. Intensité dans la bobine

(a) $I_L = \frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (\frac{L}{R}\omega)^2}} I_0$

(b) Limite I_0 en BF et 0 en HF.

(c) I_L est maximal lorsque $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2R^2C^2}}$ qui n'existe que si $\frac{1}{LC} > \frac{1}{2R^2C^2}$ soit $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$

(d) C'est la même que U_C dans le cours ; résonance si R est grand, pas de résonance sinon.

3. Intensité dans le condensateur

(a) $I_C = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{RC\omega}\right)^2}} I_0$

(b) Limite 0 en BF et I_0 en HF.

(c) I_C est maximal si $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{L^2}{2R^2}}$ qui n'existe que si $R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$

(d) C'est la même que U_L dans le cours ; résonance si R est grand, pas de résonance sinon.

Réponses de l'exercice E6.3 : Pont de Wien [**]

$H_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

On obtient alors une courbe de résonance semblable à U_R dans le cours.

Réponses de l'exercice E6.4 : Masse-ressort secoué [**]

Réponses de l'exercice E6.5 : Tracé d'une courbe de résonance [***]

1. $Z = R + \frac{1}{jC\omega}$

2. Il faut appliquer Millman en A puis B ; ou bien noter \underline{u}' la tension entre la masse et A , appliquer le diviseur de tension pour relier \underline{u}' à \underline{e} puis \underline{u} à \underline{u}' .

3. $U = \frac{10}{\sqrt{9+(RC\omega - \frac{1}{RC\omega})^2}}$ qui a pour limites 0 en BF et en HF.

4. U est maximum lorsque $\omega = \frac{1}{RC} = 2070 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $U_{max} = 3,33 \text{ V}$.

5. La BP est $[625; 6850] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ de largeur $6225 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

6. On trace en plaçant d'abord le point de résonance, puis les bornes de la BP.

Réponses de l'exercice E6.6 : Modèle atomique de Thomson [**]

1. La force électrique est de l'ordre de $2 \times 10^{-8} \text{ N}$, la force gravitationnelle $1 \times 10^{-47} \text{ N}$, et le poids $9 \times 10^{-30} \text{ N}$

2. $m_e \ddot{x} + f \dot{x} + kx = 0$ et la même chose sur y et z .

3. Régime libre

(a) $\tau = \frac{2m_e}{f}$

(b) $f = 2 \times 10^{-22}$ USI et $Q = \frac{\sqrt{km_e}}{f} = 6,7 \times 10^9$: c'est très très grand.

(c) $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_e}} = 1,6 \times 10^{16}$ rad · s⁻¹ d'où on tire $\lambda = 118$ nm : c'est dans l'UV lointain.

4. Régime forcé

(a) $\ddot{z} + \frac{2}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{eE}{m_e} \cos(\omega t)$

(b) $z(t)$ a pour amplitude $Z = \frac{\frac{eE}{m_e}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{2\omega}{\tau})^2}}$ et pour phase $-\arctan\left(\frac{2\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$

(c) En BF, Z tend vers $\frac{eE}{m\omega_0^2} = \frac{eE}{k} = 7 \times 10^{-19}$ m

En HF, Z tend vers 0.

En $\omega = \omega_0$, $Z = \frac{eE\tau}{m_e 2\omega_0} = 9,3 \times 10^{-11}$ m soit approximativement la taille de l'atome.

Si on veut tracer la courbe à l'échelle, on ne voit qu'un pic gigantesque et très très étroit.

Réponses de l'exercice E6.7 : Antirésonance en intensité [***]

- $I_0 = \frac{U}{|Z|} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2}}$

- I_0 a un maximum en 0 qui vaut $\frac{U}{R}$ un minimum en ω_0 qui vaut 0, un maximum en ω_1 qui vaut $\frac{U}{R}$, et tend vers 0 quand ω tend vers l'infini.

- À tracer sous Python, rien de compliqué.

Réponses de l'exercice E6.8 : Refroidissement d'atomes par laser [***]

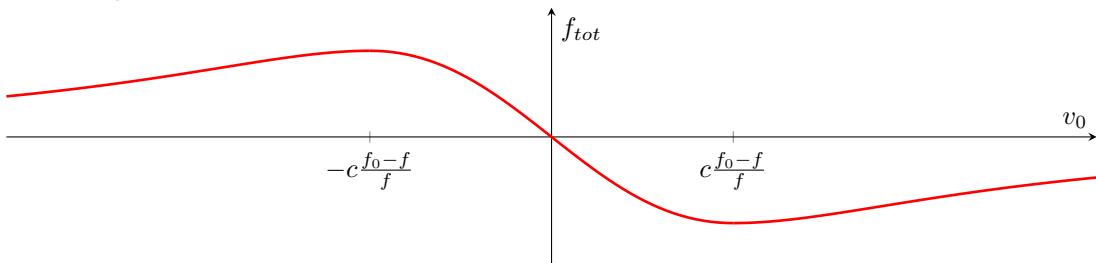
- $v = \frac{j2\pi f F_0 e^{j2\pi f t}}{k + j2\pi f \frac{m_e}{\tau} - m_e (2\pi f)^2}$

- $A = \frac{\tau}{2m_e} F_0^2$.

- Le maximum vaut $P = A$ pour $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}}$.

- P_1 est maximum en $v_0 = c \frac{f-f_0}{f} < 0$. De même P_2 est maximum pour $v_0 = c \frac{f_0-f}{f}$.

- $f_{tot} = \frac{P_1 - P_2}{c}$:



- Après un long DL, on trouve $\lambda = \frac{16A\pi^2\tau^2 \left(\frac{f_0^2}{f} - f\right) \left(f + \frac{f_0^2}{f}\right)}{c^2 \left(1 + 4\pi^2\tau^2 \left(f - \frac{f_0^2}{f}\right)^2\right)^2} = 2,7 \times 10^{-23}$ USI.

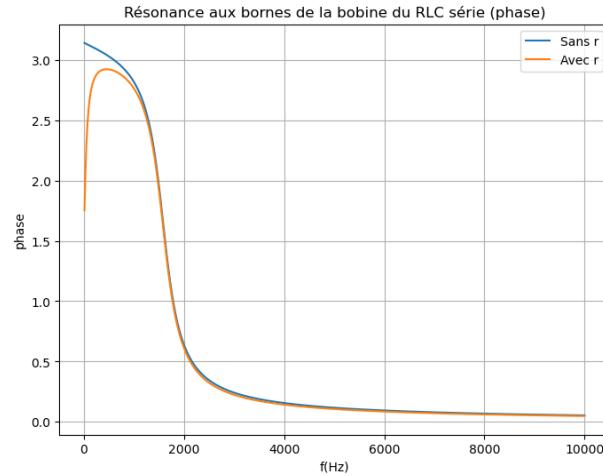
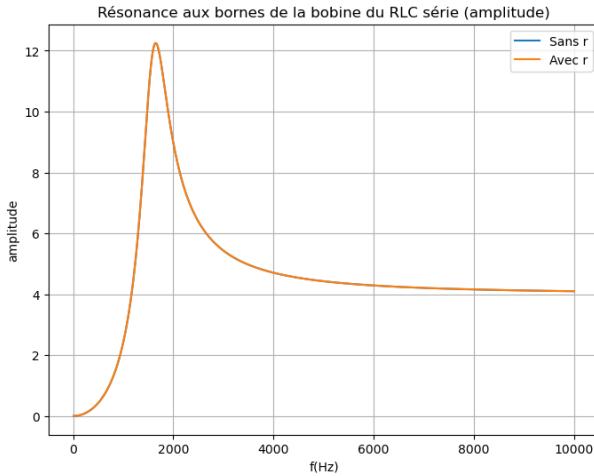
- On trouve facilement $\tau' \frac{dv_0}{dt} + v_0 = 0$ avec $\tau' = \frac{m}{\lambda} = 5,5$ ms : l'atome est arrêté très vite.

- $v^* = \sqrt{3k_B T} m = 0,17$ m · s⁻¹

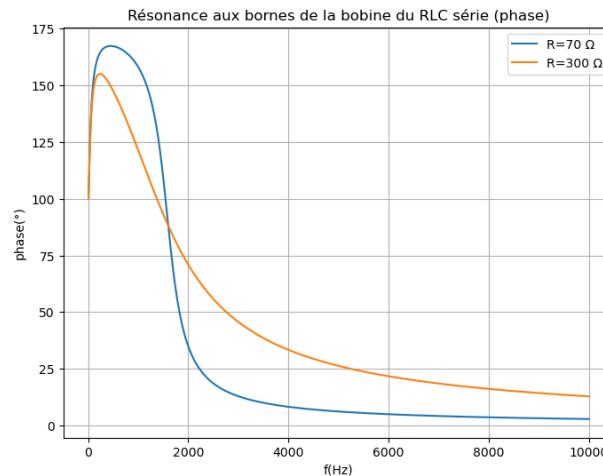
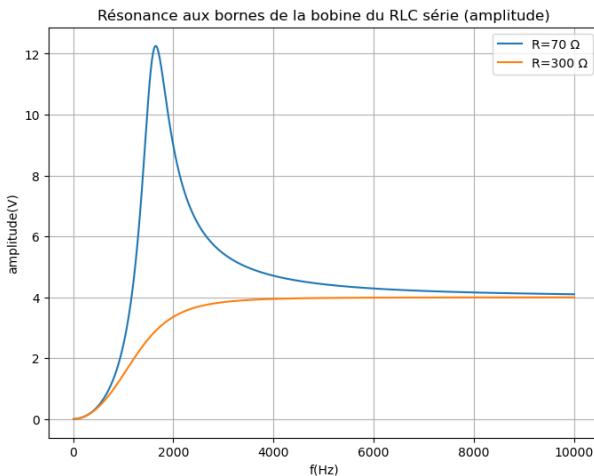
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Résonances

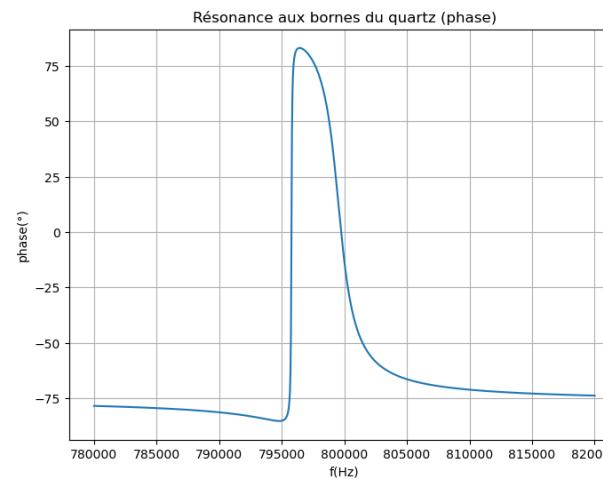
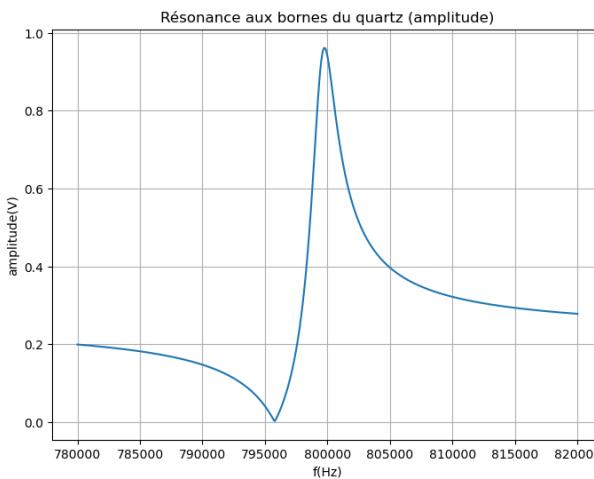
On a simplement $u_R = \frac{RE}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}$:



Les limites de la bande passante à -3dB valent 1420 Hz et 2037 Hz en l'absence de r , puis 1409 Hz et 2113 Hz en tenant compte de r .



L'impédance du quartz vaut $Z = \frac{1}{jC_p\omega + \frac{1}{R+jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}}}$; puis on effectue un pont diviseur de tension :



On constate une résonance à 800 kHz et une antirésonance à 796 kHz.

Filtres linéaires

Cours

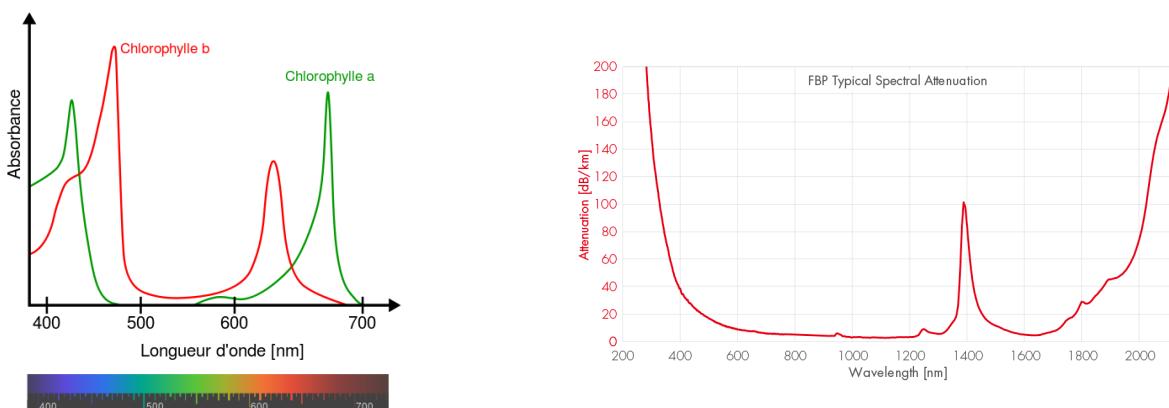
L'étude du régime sinusoïdal forcé a mis au jour un comportement très important des circuits électriques : leur comportement dépend de la fréquence. En réalité, tout système physique possède la même propriété. Dans ce chapitre, nous allons temporairement quitter l'électricité pour étudier les propriétés générales des systèmes physiques soumis à des signaux sinusoïdaux.

E7.A. Les filtres

Définition : Filtre

Un filtre est un système qui reçoit en entrée un signal, et donne en sortie un autre signal, de nature identique ou différente, modifiée en fonction de ses caractéristiques, en particulier sa fréquence.

Considérons par exemple une feuille d'arbre : elle reçoit de la lumière blanche, et renvoie de la lumière verte. Si maintenant on lui envoie dessus de la lumière de diverses couleurs, du rouge au bleu, on verra que certaines couleurs sont renvoyées, tandis que d'autres sont absorbées. Pour aller plus loin, on peut extraire la chlorophylle qu'elle contient et réaliser son spectre d'absorption (figure E7.1). Ce spectre montre que, si on envoie de la lumière sur de la chlorophylle, les couleurs rouges et bleues sont absorbées, tandis que la couleur verte ne l'est pas. La chlorophylle agit donc comme un filtre : elle reçoit de la lumière, et en renvoie plus ou moins en fonction de la longueur d'onde, donc de la fréquence. Sur la même figure, on voit le spectre d'absorption des fibres optiques qui servent à transmettre les informations numériques.¹



(a) Spectre d'absorption de différentes chlorophylles.
(Crédit : Wikipedia/D. Pugliesi)

(b) Spectre d'atténuation d'une fibre optique à large spectre. (Crédit : Lasercomponent)

FIGURE E7.1 – Spectres d'absorptions.

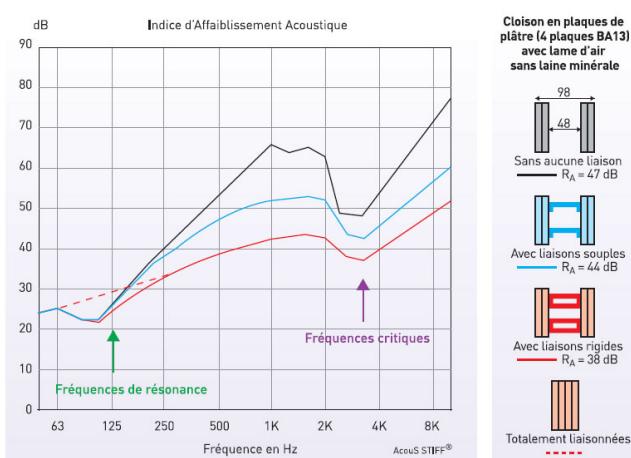
Mais l'optique n'est pas le seul domaine où on trouve des filtres ; l'acoustique en est un autre. Une paroi ou une vitre permettent d'atténuer le son : elles agissent comme des filtres sonores. De même, l'oreille des animaux a une sensibilité qui varie en fonction de la fréquence, ce qui traduit un filtrage du signal sonore entendu² (figure E7.2).

Les filtres mécaniques ne sont pas de reste. Les suspensions des voitures sont là pour atténuer les vibrations de la route. La réponse fréquentielle de cette suspension est étudiée par les ingénieurs qui conçoivent la voiture. De même, la figure E7.3, montre l'allure de l'accélération maximale admissible d'un immeuble en fonction de la période des ondes sismiques.

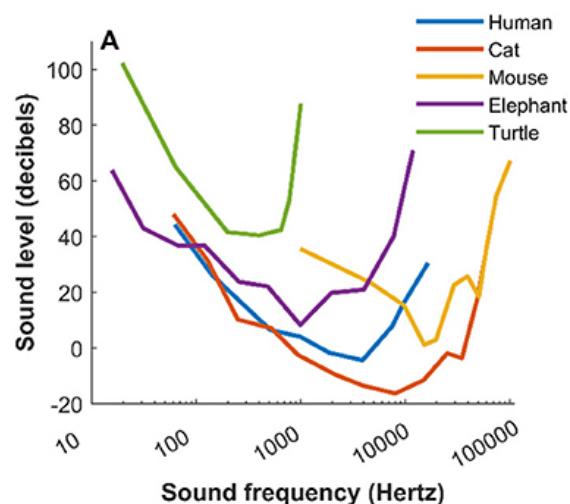
Il existe ainsi des filtres dans tous les domaines de la physique ; en électricité, par exemple, la figure E7.4 représente les caractéristiques normalisées d'un filtre électronique placé à la sortie des platines lisant les disques vinyle.

1. On ne s'intéressera pas pour le moment à ce que représente l'échelle verticale.

2. L'oreille est un filtre un peu différent des autres, en ce que la sortie n'est pas un signal analogique, mais nerveux.



(a) Indice d'affaiblissement acoustique de cloisons doubles en plaques de plâtre. (Crédit : MD)



(b) Seuil d'audition de quelques animaux. (Crédit : Sumner, Bergevin, Oxenham and Shera)

FIGURE E7.2 – Exemples de filtres sonores.

Classe de sol	S	$T_B(\text{s})$	$T_C(\text{s})$	$T_D(\text{s})$
A	1	0,15	0,4	2
B	1,2	0,15	0,5	2
C	1,15	0,2	0,6	2
D	1,35	0,2	0,8	2
E	1,4	0,15	0,5	2

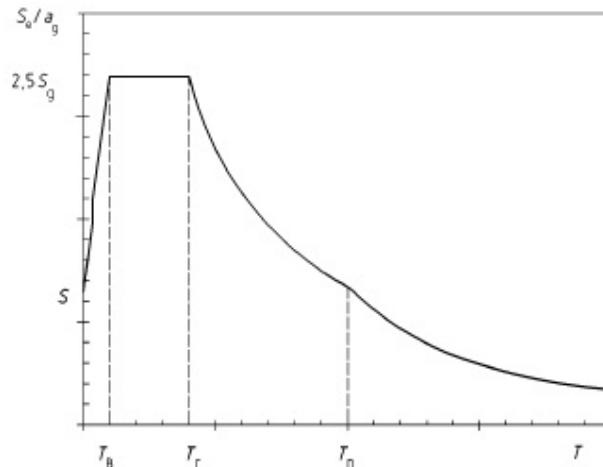


FIGURE E7.3 – Norme européenne NF EN 1998-1 de réponse d'un bâtiment à un séisme.

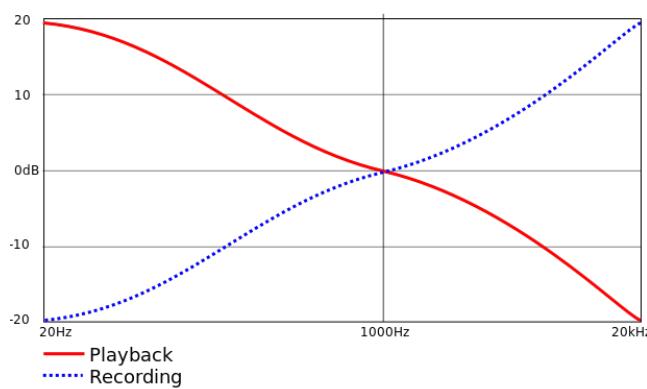


FIGURE E7.4 – Courbe de filtrage normalisée RIAA d'une platine tourne disque. (Crédit : Wikipedia/Iainf)

E7.B. Étude des filtres linéaires

B.1. Propriétés d'un filtre linéaire

Définition : Filtre linéaire

Un filtre est linéaire s'il vérifie les propriétés suivantes :

- Si on multiplie pas k le signal d'entrée, le signal de sortie est multiplié par k
- Si on met en entrée la somme de deux signaux, on obtient en sortie la somme des sorties correspondantes.

Autrement dit :

La grande majorité des filtres que nous avons vus sont linéaires. L'oreille ne l'est pas ; c'est d'ailleurs ce qui est à la base de la compression du son en MP3.

Propriété : Action d'un filtre linéaire sur un signal sinusoïdal

Si on met en entrée d'un filtre linéaire un signal sinusoïdal de pulsation ω , on obtient en sortie un signal sinusoïdal de même pulsation.

Il s'agit d'une propriété mathématique que admettrons.

Considérons donc un signal $e(t) = E_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_e)$ en entrée ; alors la sortie est de la forme $s(t) = S_0 \cdot \cos(\omega t + \phi_s)$. Le filtre a donc eu 2 effets : il a modifié l'amplitude, et la phase.

Pour l'écrire de manière plus simple, considérons les images complexes : $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t} e^{j\phi_e}$ et $\underline{s}(t) = S_0 e^{j\omega t} e^{j\phi_s}$. Si on calcule le rapport : $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0}{E_0} e^{j(\phi_s - \phi_e)}$: il ne dépend plus du temps, mais il peut sans doute dépendre de la fréquence (ou de la pulsation), puisqu'on a dit que le filtre modifie différemment les différentes fréquences.

Définition : Fonction de transfert

On définit la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\text{sortie}}{\text{entrée}}$$

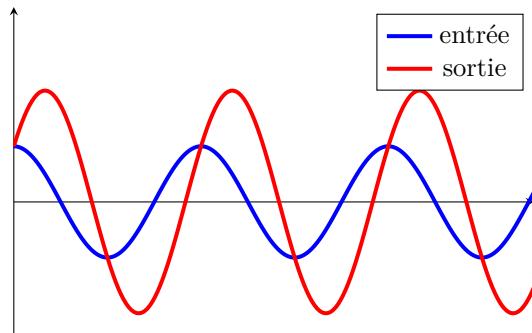
Alors si on met en entrée du filtre un signal sinusoïdal de pulsation ω , on obtiendra en sortie un signal de même pulsation, amplifié d'un facteur $|\underline{H}(\omega)|$ et déphasé de $\arg \underline{H}(\omega)$, où \underline{H} est calculé à la pulsation du signal d'entrée :

$$e(t) = E \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{filtre}} s(t) = |\underline{H}(\omega)| \cdot E \cos(\omega t + \phi + \arg \underline{H}(\omega)) \quad (\text{E7.1})$$

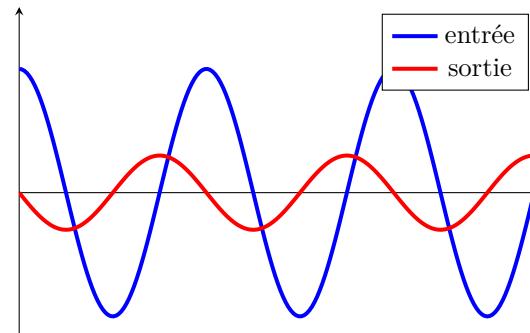
Démonstration

Par définition, $\underline{e} = E e^{j(\omega t + \phi)}$ et $\underline{s} = \underline{H} E e^{j(\omega t + \phi)} = |\underline{H}| e^{j \arg \underline{H}} E e^{j(\omega t + \phi)} = |\underline{H}| E e^{j(\omega t + \phi + \arg \underline{H})}$.

La figure E7.5 montre l'effet d'un filtre dans deux cas particuliers.



(a) Effet d'un filtre tel que $|\underline{H}| = 2$ et $\arg \underline{H} = -60^\circ$



(b) Effet d'un filtre tel que $|\underline{H}| = 0,3$ et $\arg \underline{H} = +90^\circ$

FIGURE E7.5 – Exemples de l'effet d'un filtre linéaire sur un signal sinusoïdal.

Remarque : Un filtre linéaire est un filtre dans lequel la sortie et l'entrée sont reliées par une équation différentielle linéaire. La fonction de transfert est la transcription dans le domaine des complexes de cette relation. Par exemple, si un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1+j\alpha\omega}{2+j\beta\omega}$. Cela signifie que $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1+j\alpha\omega}{2+j\beta\omega}$ donc que $(2+j\beta\omega)\underline{s} = (1+j\alpha\omega)\underline{e}$ donc que $s(t)$ et $e(t)$ (signaux réels) sont reliés par l'équation différentielle $2s + \beta\dot{s} = e + \alpha\dot{e}$.

B.2. Diagramme de Bode

Les deux caractéristiques d'un filtre sont donc le module et l'argument de sa fonction de transfert, et surtout comment ils varient en fonction de la pulsation ou de la fréquence. On pourrait donc tracer ces deux fonctions, mais la lecture de $|\underline{H}|$ sera difficile. En effet, un filtre va souvent être utilisé pour...filtrer, c'est-à-dire éliminer certaines fréquences. Pour éliminer un signal, il faut multiplier son amplitude par un petit nombre. Si $|\underline{H}| = 0,1$, c'est pas mal ; si $|\underline{H}| = 0,01$, c'est mieux ; si $|\underline{H}| = 0,001$ c'est encore mieux. Or sur un diagramme, il est très difficile de faire la différence entre de si petites valeurs. On définit donc le gain du filtre :

Définition : Gain d'un filtre

On définit le gain en décibels du filtre :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \quad (\text{E7.2})$$

À l'inverse, si on connaît le gain, alors $|\underline{H}| = 10^{G_{\text{dB}}/20}$.

Remarque : Il est bon de connaître quelques valeurs particulières de gain :

- un gain de 0 dB correspond à une amplitude inchangée : $|\underline{H}| = 1$
- un gain de +20 dB correspond à une amplitude multipliée par 10 : $|\underline{H}| = 10$
- un gain de -20 dB correspond à une amplitude divisée par 10 : $|\underline{H}| = 0,1$
- un gain de -40 dB correspond à une amplitude divisée par 100 : $|\underline{H}| = 0,01$
- etc...
- un gain de -3 dB correspond à une amplitude divisée par $\sqrt{2}$: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exemple : Filtrage d'un signal sinusoïdal

On envoie en entrée d'un filtre un signal d'amplitude 4 (peu importe l'unité) et de phase nulle. À la fréquence du signal, le gain vaut -5 dB et la phase vaut 40° ; que vaut la sortie $s(t)$?

L'entrée vaut $e(t) = 4 \cos(\omega t)$. Or $|\underline{H}| = 10^{-5/20} = 0,56$ donc l'amplitude de la sortie vaut $0,56 \times 4 = 2,2$ et la phase de sortie vaut $0 + 40 = 40^\circ = 0,7$ rad donc le signal de sortie vaut $s(t) = 2,2 \cos(\omega t + 0,7)$

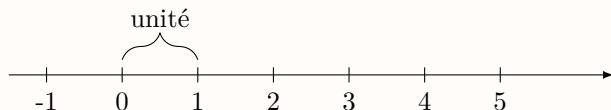
Définition : Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est constitué de deux diagrammes représentant le gain et la phase (c'est-à-dire l'argument de \underline{H}) du filtre en fonction de la fréquence ou de la pulsation, tracée en échelle logarithmique.

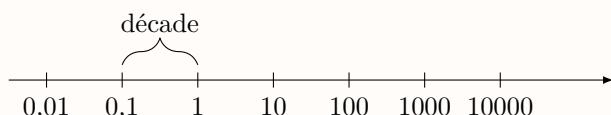
Un peu de maths : Échelle logarithmique

Pour représenter une grandeur sur un axe (abscisses ou ordonnées), il existe 2 types d'échelles : l'échelle linéaire et l'échelle logarithmique :

- en *échelle linéaire* : on choisit une distance représentant une *unité* : à chaque fois qu'on avance de 1 unité, la valeur augmente de 1.



- en *échelle logarithmique* : on choisit une distance représentant une *décade* : à chaque fois qu'on avance de 1 décade, la valeur est multipliée par 10.



Remarque : Sur une échelle logarithmique, seules les valeurs strictement positives peuvent être représentées. Quand on trace une allure de diagramme de Bode, on ne place qu'un point toutes les décades ; quand on aura besoin de placer des points intermédiaires (en TP en particulier), on utilisera du papier semi-logarithmique dont l'axe des abscisses est déjà gradué en échelle log.

Pourquoi utiliser cette échelle logarithmique en abscisses ? Parce que les fréquences qu'on va utiliser varient sur beaucoup d'ordres de grandeurs, et une échelle linéaire n'est pas adaptée. Par exemple, en TP, on va travailler entre 10 Hz et 100 kHz ; si on met une échelle linéaire entre 0 et 100000, il va être difficile de représenter les valeurs 10 ou 100 !

Sur la figure E7.6, on peut visualiser l'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal, en regard de la valeur du gain et de la phase lus sur le diagramme de Bode du filtre.

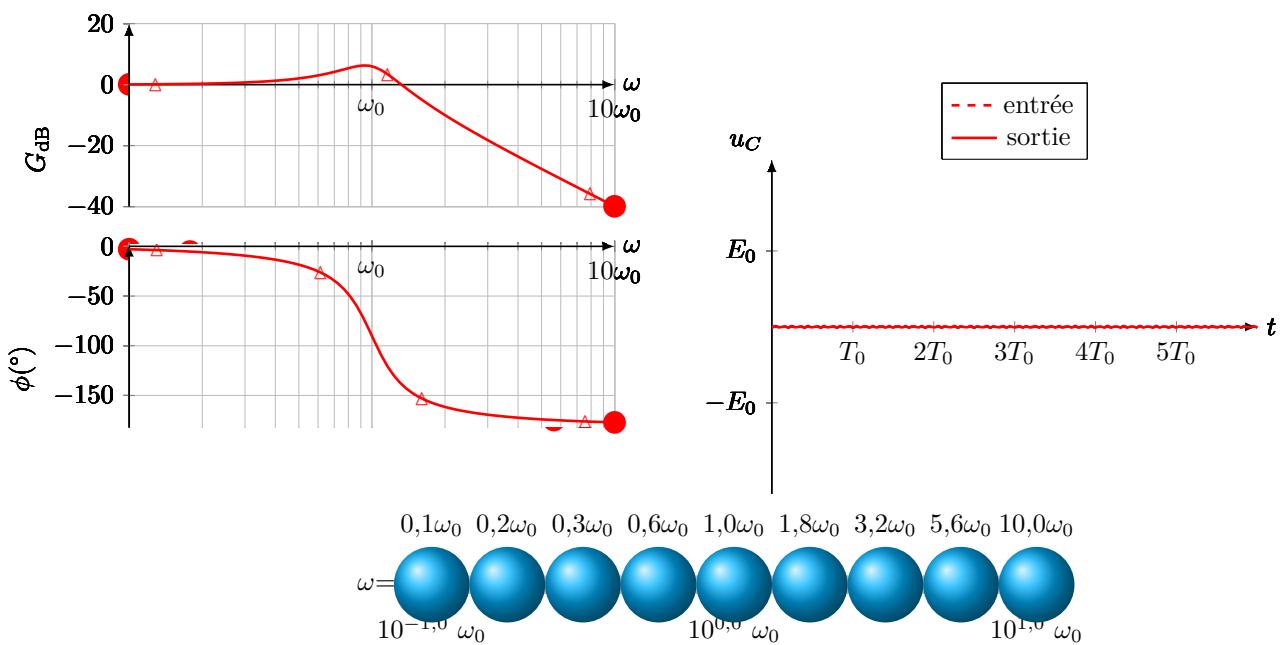
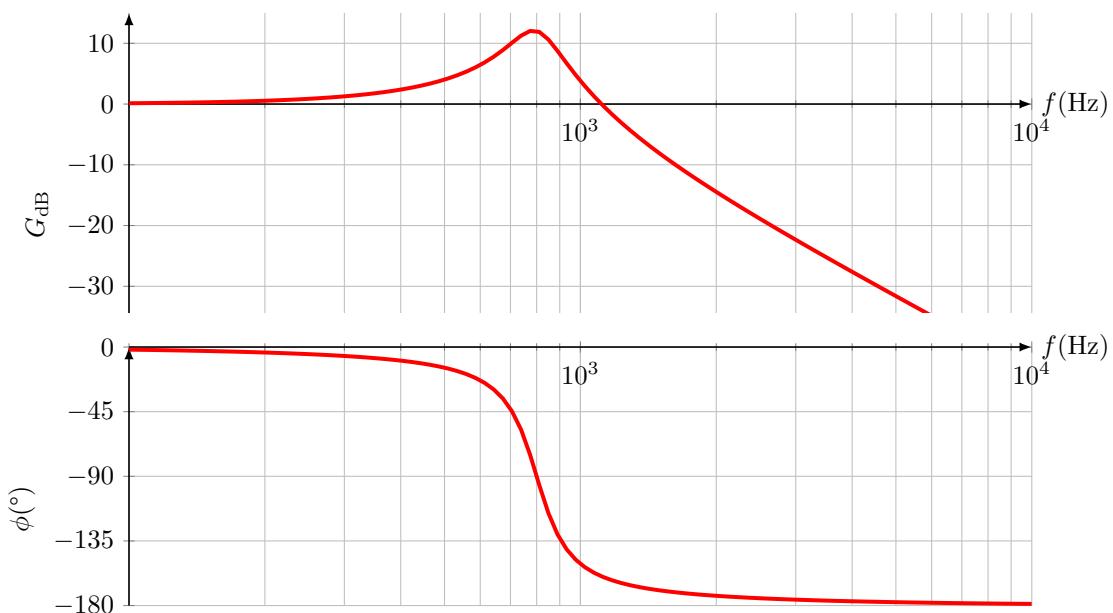


FIGURE E7.6 – Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal d'amplitude E_0 .

Exemple : Lecture d'un diagramme de Bode

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



3. L'amplitude du signal de sortie vaut $|H| \times 5$. Elle est donc inférieure à 1 si et seulement si $|H| < \frac{1}{5} = 0,2$ soit $G_{\text{dB}} < -14 \text{ dB}$; sur le diagramme, on voit que c'est le cas à partir de 2000 Hz environ

B.3. Familles de filtres

La plupart des filtres ont des comportements qui peuvent être rangés dans 4 grandes catégories. Pour les comprendre, il faut se souvenir que plus le gain tend vers $-\infty$, plus $|H|$ tend vers 0, donc plus le signal de sortie est atténué. Ainsi, si $G_{\text{dB}} \rightarrow -\infty$ en basses ou en hautes fréquences, on dira que le filtre coupe ces fréquences ; au contraire, si le gain a une limite finie, le filtre laisse passer ces fréquences.

Propriété : Filtre passe-bas

Un filtre passe-bas laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences.

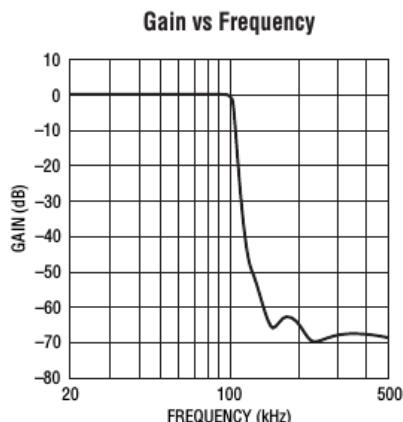
La figure E7.7 montre quelques exemples : un amortisseur de voiture, par exemple, filtre essentiellement les secousses rapides, donc les hautes fréquences. Il en va de même des isolants phoniques, qui arrêtent les sons aigus mais pas le grondement du tonnerre. On y voit aussi deux exemples de diagrammes de Bode de filtres passe-bas réels, un électronique, l'autre mécanique.



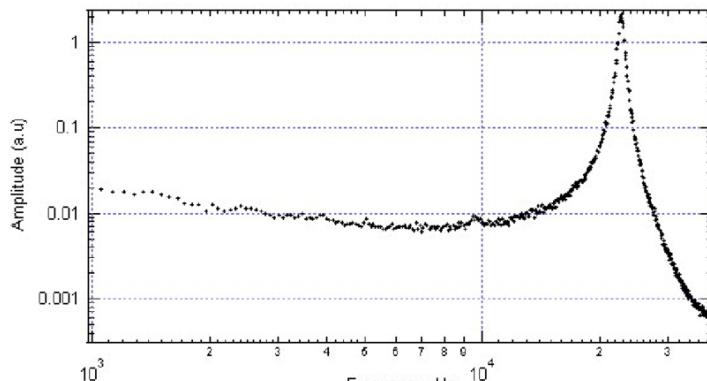
(a) Isolation phonique par 10 mm de liège : les aigus sont mieux absorbés que les graves



(b) Amortisseur de voiture



(c) Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas basé sur un circuit LTC 1068



(d) Courbe de réponse d'une pointe de microscope à force atomique. (Crédit : S.K.Ayop et al.)

FIGURE E7.7 – Exemples de filtres passe-bas.

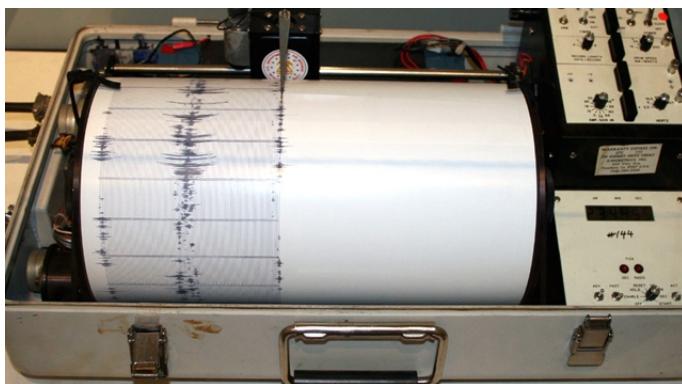
Propriété : Filtre passe-haut

Un filtre passe-haut coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences.

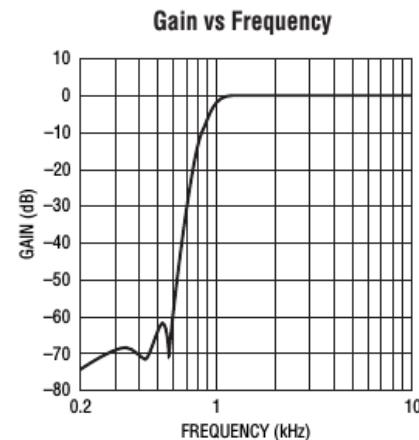
Un sismomètre, par exemple (figure E7.8), ne garde trace que des mouvements rapides du sol.

Propriété : Filtre passe-bande

Un filtre passe-bande coupe les basses et les hautes fréquences et laisse passer juste un intervalle de fréquences.



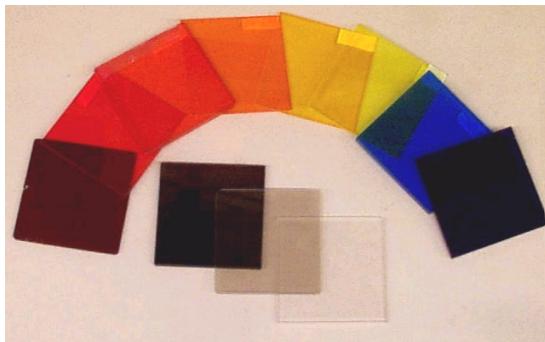
(a) Sismographe (Crédit : Wikipedia/Yamaguchi)



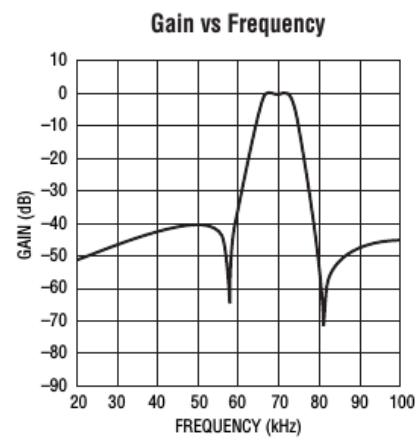
(b) Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut basé sur un circuit LTC 1068

FIGURE E7.8 – Exemples de filtres passe-haut.

Un filtre coloré, par exemple (figure E7.9), est un filtre passe-bande optique. On utilise aussi un filtre passe-bande pour sélectionner une radio particulière.



(a) Filtres colorés.(Crédit : Wikipedia/DrBob)



(b) Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande basé sur un circuit LTC 1068

FIGURE E7.9 – Exemples de filtres passe-bande.

Propriété : Filtre coupe-bande

Un filtre coupe-bande laisse tout passer sauf un intervalle de fréquences.

Ce genre de filtre est peu utilisé, parfois pour éliminer un parasite. Un autre exemple est donné sur la figure E7.10, des lunettes qui ne filtrent que la longueur d'onde précise émise par un laser dans un labo de physique.

B.4. Gabarits(Hors programme)

Quand on a besoin de concevoir un filtre, il faut commencer par préciser ce qu'on attend de ce filtre.

Définition : Gabarit

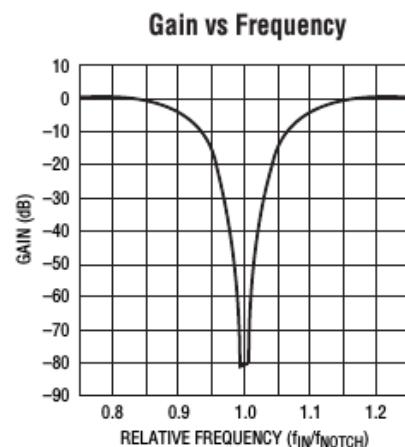
Un gabarit est une représentation, sur un diagramme de Bode en gain, des contraintes imposées par le cahier des charges, par le moyen de zones interdites.

En pratique, on hachure ou on colorie des zones pour dire : «pour telle fréquence, le gain doit être supérieur ou inférieur à telle valeur».

La figure E7.11 montre ainsi des gabarits correspondant aux 4 familles de filtres vues précédemment.

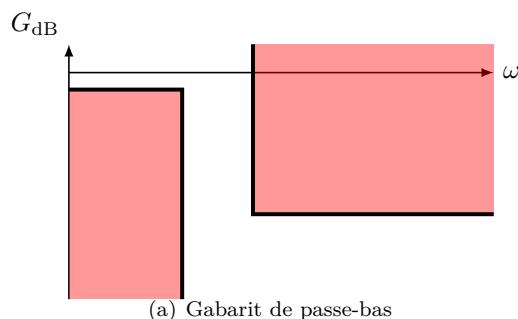


(a) Lunettes interférentielles de protection contre les lasers. (Crédit : Laser 2000)

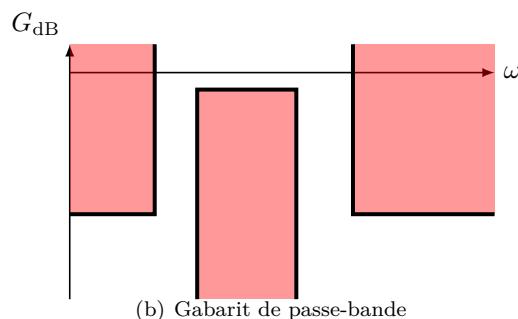


(b) Diagramme de Bode d'un filtre coupe-bande basé sur un circuit LTC 1068

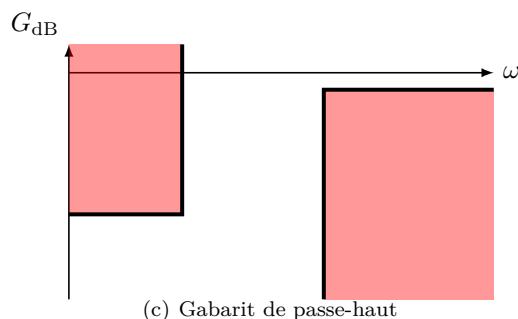
FIGURE E7.10 – Exemples de filtres coupe-bande.



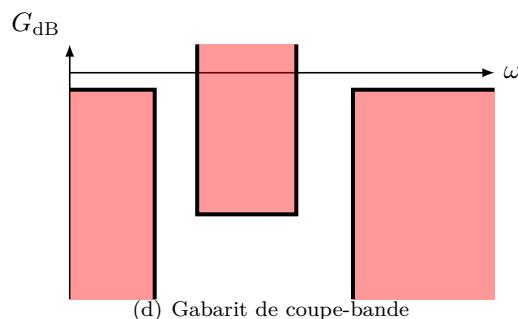
(a) Gabarit de passe-bas



(b) Gabarit de passe-bande



(c) Gabarit de passe-haut



(d) Gabarit de coupe-bande

FIGURE E7.11 – Gabarits des principaux filtres.

Exemple : Tracé d'un gabarit

On souhaite construire un filtre ayant les caractéristiques suivantes :

- Filtre passe-bas
- La bande passante à -3 dB doit aller de 0 à au moins $1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- La résonance (si elle existe) ne doit pas dépasser 5 dB
- Les fréquences au-delà de $10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ doivent être atténées par un facteur égal au moins à 50

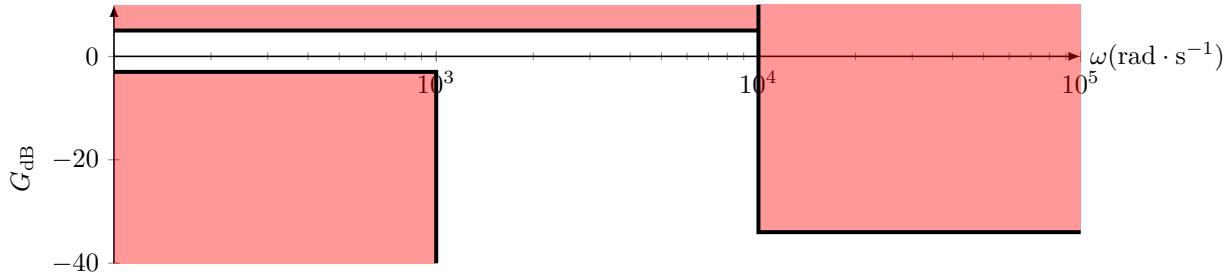
Tracez le gabarit de ce filtre.

Prenons les spécifications une à une :

- la première n'apporte rien, hormis une idée de l'allure finale.
- la seconde indique que toutes les pulsations inférieures à $1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ doivent avoir $|H| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{\text{dB}} > 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$; donc pour toutes les pulsations $< 1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ on hachure les gains $< -3 \text{ dB}$.

- la troisième ne donne pas de condition de pulsations : pour toute pulsation, le gain doit être inférieur à 5 dB. On hachure donc la zone > 5 dB pour toute pulsation.
- la quatrième est plus subtile. Atténuer un signal, c'est le diviser ; ici on veut le diviser par au moins 50, ce qui signifie que $|H| < \frac{1}{50}$ soit $G_{\text{dB}} < 20 \log \frac{1}{50} = -34$ dB. On hachure donc la zone > 34 dB pour les pulsations $> 10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On obtient donc le gabarit suivant :



B.5. Filtres en cascade

Définition : Filtres en cascade

Des filtres sont en cascade (ou en série) si la sortie du premier est l'entrée du second.

Dans la vie courante, il y a des filtres en cascade de partout. Par exemple, vous écoutez de la musique : le signal électrique passe dans un haut-parleur (filtre 1), qui produit un son ; ce son se propage dans l'environnement qui vous entoure (filtre 2) jusqu'à votre oreille ; votre oreille (filtre 3) capte le son et envoie un signal au cerveau. Tous ces filtres sont à la suite l'un de l'autre.

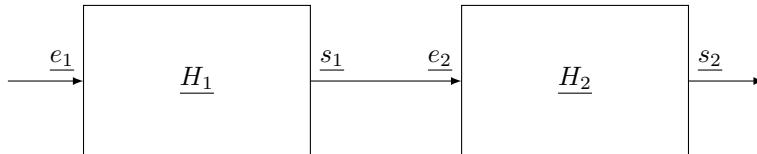


FIGURE E7.12 – Filtres en cascade.

Propriété : Filtres en cascade

Lorsqu'on met des filtres en cascade, leurs fonctions de transfert se multiplient ; par conséquent, leurs gains et leurs phases s'ajoutent.

Démonstration

Notons e_1 l'entrée du filtre 1 et s_1 sa sortie ; de même pour le filtre 2. Par définition des fonctions de transfert, $s_1 = H_1 \cdot e_1$ et $s_2 = H_2 \cdot s_1$. Or $e_2 = s_1$, donc $s_2 = H_2 \cdot s_1 = H_2 \cdot H_1 \cdot e_1$. Donc la fonction de transfert de l'ensemble vaut $H = \frac{s_2}{e_1} = H_1 \cdot H_2$.

On en déduit que $|H| = |H_1| \cdot |H_2|$ et $\arg H = \arg H_1 + \arg H_2$: les phases s'ajoutent. De plus, en prenant le logarithme des modules : $\log |H| = \log |H_1| + \log |H_2|$ d'où $G_{\text{dB}} = G_{\text{dB}1} + G_{\text{dB}2}$.

Le figure E7.13 montre un exemple du diagramme de Bode de deux filtres en cascade.

B.6. Équivalents et asymptotes

Les fonctions de transfert s'expriment toujours comme des quotients de polynômes en ω (ou plus précisément en $j\omega$). Cela a des conséquences sur l'allure des diagrammes de Bode.

Pour tracer le diagramme de Bode, on pourrait calculer exactement $G_{\text{dB}} = 20 \log |H|$ et $\phi = \arg H$. En fait, en pratique, tous les diagrammes de Bode de fonctions de transferts simples auront un comportement en basses

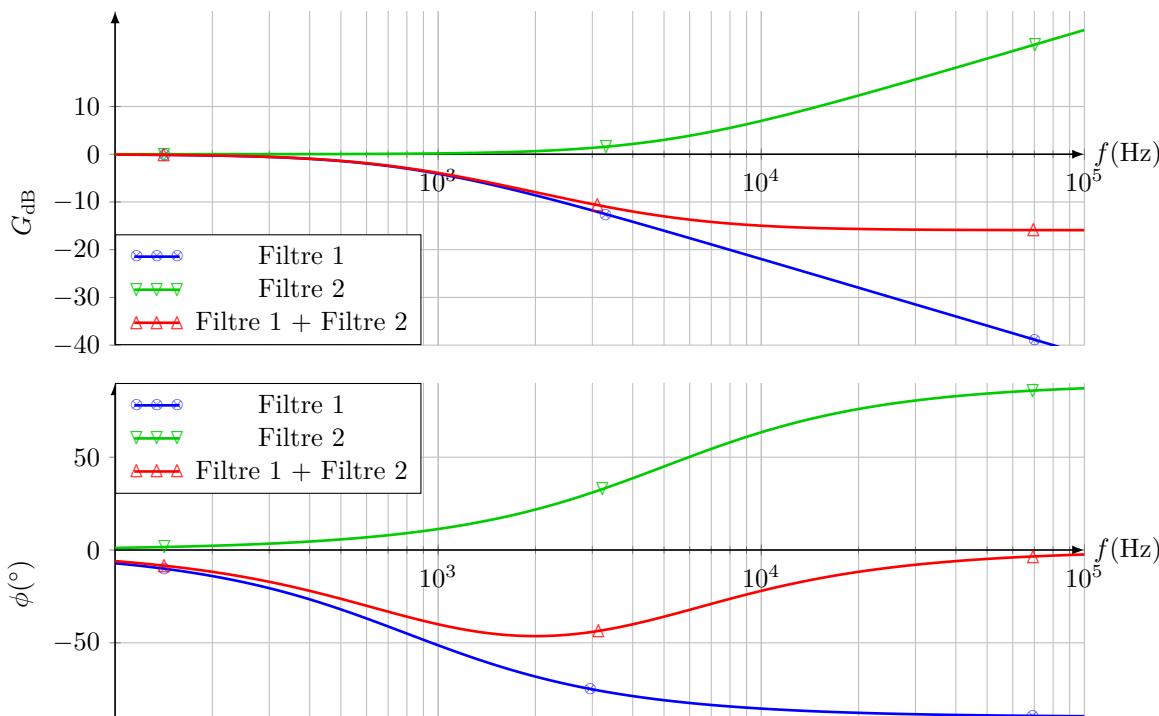


FIGURE E7.13 – Diagramme de Bode d'un filtre composé de 2 filtres.

fréquences (BF) et en hautes fréquences (HF) qui tendra vers des asymptotes. On a donc l'habitude de tracer d'abord ces asymptotes, puis de compléter le tracé en regardant rapidement ce qui se passe au milieu.

Pour tracer les asymptotes, on va utiliser un outil mathématique pratique : les équivalents.

Un peu de maths : Fonctions équivalentes

Soient 2 fonctions f et g définies au voisinage du même réel a . On dit que f et g sont équivalentes en a , si le quotient des deux tend vers 1 :

$$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{a} \frac{f}{g} = 1$$

Par exemple, les fonctions $x \mapsto x + x^2$ et $x \mapsto x + 2x^2 + x^3$ sont équivalentes en 0 ; mais elles ne sont pas équivalentes à $x \mapsto x^2$, bien qu'elles aient la même limite.

Pour nous, en physique, on se contentera de quelques propriétés à appliquer :

- un polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré
- un polynôme est équivalent en $+\infty$ à son terme de plus haut degré
- comme équivalent d'un quotient, on peut prendre le quotient des équivalents du numérateur et du dénominateur

Par exemple, $x \mapsto \frac{x+x^3}{3x^2+x^3} \underset{0}{\sim} x \mapsto \frac{x}{3x^2}$ soit $\frac{1}{3x}$.

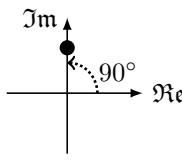
Exemple : Diagramme de Bode asymptotique

On considère un filtre de fonction de transfert $H = \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2j\frac{\omega}{\omega}}$ avec ω_0 une constante.

1. Déterminer les asymptotes du gain et de la phase en basse fréquence.
2. Déterminer les asymptotes du gain et de la phase en haute fréquence.
3. Déterminer la pulsation où les asymptotes du gain se coupent, et la valeur du gain correspondante.
4. Tracez le diagramme de Bode asymptotique de ce filtre.

1. En BF, les termes de plus bas degré dominent, donc $H \underset{0}{\sim} \frac{1}{-2j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{j\omega}{2\omega_0}$.

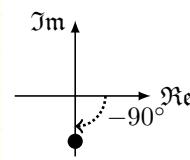
Le gain vaut donc $G_{\text{dB}} \sim 20 \log \left| \frac{j\omega}{2\omega_0} \right| = 20 \log \frac{\omega}{2\omega_0} = 20 \log \omega - 20 \log(2\omega_0)$. Or $\log \omega$ est l'abscisse d'un diagramme de Bode, donc le gain a pour asymptote une droite dont la pente vaut +20 dB/déc (c'est ainsi qu'on exprime la pente). Pour la phase, on a un imaginaire pur de partie imaginaire positive : un simple schéma montre que sa phase vaut +90°.



2. En HF, les termes de plus haut degré dominent, donc $\underline{H} \sim \frac{j\omega_0}{-\omega^2} = \frac{j\omega_0}{\omega^2}$.

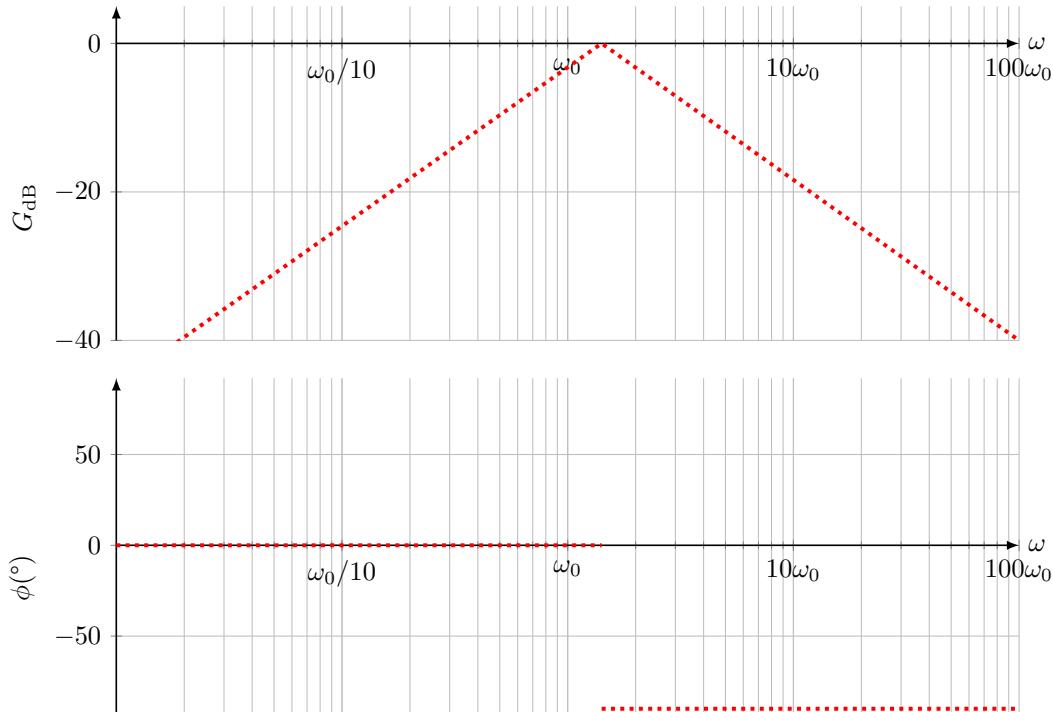
Le gain vaut donc $G_{\text{dB}} \sim 20 \log \left| \frac{-j\omega_0}{\omega} \right| = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} = 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$, donc le gain a pour asymptote une droite dont la pente vaut -20 dB/déc.

Pour la phase, on a un imaginaire pur de partie imaginaire négative : un simple schéma montre que sa phase vaut -90°.



3. On a donc deux asymptotes du gain : $20 \log \frac{\omega}{2\omega_0}$ en BF et $20 \log \frac{\omega_0}{\omega}$ en HF. On cherche leur intersection : $20 \log \frac{\omega}{2\omega_0} = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow \frac{\omega}{2\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{2}\omega_0$. Pour avoir l'ordonnée du point d'intersection, on renvoie cette valeur de ω dans l'équation d'une des deux asymptotes, et on trouve $20 \log \frac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui fait environ -3 dB.

4. On trace alors le diagramme de Bode asymptotique :



Remarque : On constatera en pratique que les pentes des asymptotes du gain sont toujours des multiples de 20 dB/déc ; elles peuvent être nulles parfois (asymptote horizontale).

B.7. Propriétés générales des filtres linéaires d'ordre n

Définition : Ordre d'un filtre

L'ordre d'un filtre est la différence de degré entre le terme de plus haut degré et le terme de plus bas degré au dénominateur de la fonction de transfert, considéré comme un polynôme en ω ^a.

a. Parfois, on dit «en $j\omega$ car ω va toujours avec un j à côté de lui.

Par exemple, un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1+3j\omega}{1+2j\omega-j\frac{3}{\omega}}$ est d'ordre 2.

Un théorème de maths montre que tout filtre d'ordre $n > 2$ peut être décomposé comme le produit de filtres d'ordre 1 et 2. On doit donc surtout apprendre à étudier ces filtres. Pour les filtres d'ordre 1, vous devez connaître leur forme canonique et leur étude ; pour les filtres d'ordre 2, vous devez seulement connaître le principe de leur étude. On verra cela dans le prochain chapitre.

Pour le moment, on va admettre quelques propriétés des filtres linéaires d'ordre n de numérateur simple (polynôme contenant un seul terme) :

Propriété : Pentes des asymptotes

Pour un filtre d'ordre n de numérateur simple, la différence entre les pentes des asymptotes HF et BF vaut $-20 \times n$ dB/déc.

Ainsi, on a une différence de -20 dB/déc pour un ordre 1, de -40 dB/déc pour un ordre 2, etc.

Propriété : Limites de la phase

Pour un filtre d'ordre n de numérateur simple, la différence entre les limites de la phase en HF et en BF vaut $-90^\circ \times n$.

Propriété : Résonance

Un filtre d'ordre 1 n'a jamais de résonance. Un filtre d'ordre 2 passe-haut ou passe-bas a une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; un filtre d'ordre 2 passe-bande a toujours une résonance.

Enfin, une propriété qu'on n'utilisera pas vraiment, mais qui rappelle pourquoi on se contente d'étudier les ordres 1 et 2 :

Propriété : Filtre d'ordre $n > 2$

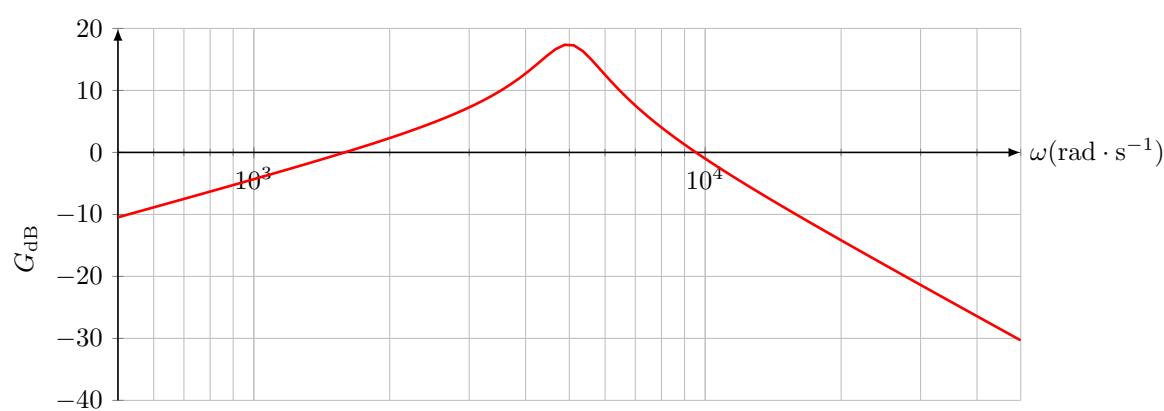
Un filtre d'ordre quelconque peut se factoriser en un produit de filtres d'ordre 1 ou 2.

Ces propriétés générales des filtres d'ordre n montrent l'intérêt d'utiliser des filtres d'ordre élevé : en ayant des pentes plus grandes des asymptotes, ils permettent une coupure plus abrupte des fréquences qu'on souhaite enlever du signal. En TP, on ne dépassera pas l'ordre 2, mais dans les montages électroniques, on utilise couramment des filtres d'ordre 6 ou 8.

Remarque : Par défaut, on suppose toujours que le filtre a un numérateur simple.

Exemple : Ordre d'un filtre

On considère un filtre dont le diagramme de Bode est le suivant :



Mesurez les pentes des deux asymptotes, et déduisez-en l'ordre de ce filtre.

Cet exercice présente un point important : la mesure de pentes. D'abord, pour mesurer les pentes, il faut bien être dans la zone asymptotique.

Par exemple, pour l'asymptote BF, on va considérer entre 500 rad · s⁻¹ (au bord du diagramme) et 1000 rad · s⁻¹.

On mesure les gains : -11 dB à $500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et -4 dB à $1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Si on ne réfléchit pas, on écrit que la pente en BF vaut $p_{BF} = \frac{-4 - (-11)}{1000 - 500} = 0,014 \text{ dB} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$: la valeur est bizarre, et l'unité aussi. En fait, il faut comprendre l'échelle logarithmique en abscisse : c'est comme si la véritable abscisse était $\log \omega$ et non pas ω . La pente vaut donc $p_{BF} = \frac{-4 - (-11)}{\log(1000) - \log(500)} = 23 \text{ dB/déc}$ donc sans doute $+20 \text{ dB/déc}$. De même en HF, on mesure -1 dB à $10\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et -30 dB à $50\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ d'où une pente $p_{HF} = \frac{-30 - (-1)}{\log(50\,000) - \log(10\,000)} = -41 \text{ dB/déc}$ donc sans doute -40 dB/déc . La différence des pentes vaut donc -60 dB/déc , donc ce filtre est d'ordre 3.

E7.C. Filtrage d'un signal périodique quelconque

Jusqu'ici, nous n'avons étudié que l'influence d'un filtre sur un signal sinusoïdal. Mais la plupart des signaux périodiques ne sont pas de pures sinusoïdes.

C.1. Principe de superposition

Le principe de superposition est une conséquence fondamentale de la propriété de linéarité des filtres :

Principe de superposition

Si on met en entrée d'un filtre linéaire la somme de plusieurs signaux, le signal en sortie sera égal à la somme des sorties correspondant à chaque terme de l'entrée.

Exemple : Filtrage d'une somme de deux cosinus

Un filtre a pour FT $\underline{H}(j\omega) = 0,5 + \frac{j\omega}{500}$. On met en entrée un signal $e(t) = 4 \cos(400t + 0,4) + 2,7 \cos(800t - 0,2) + 3,4$. Déterminez le signal de sortie $s(t)$.

L'entrée est une somme de 3 termes ; on les traite un après l'autre :

- le terme $e_1(t) = 4 \cos(400t + 0,4)$ est sinusoïdal à la pulsation $\omega = 400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; on calcule $\underline{H}(400) = 0,5 + 0,8j$ de module $|\underline{H}| = 0,94$ et d'argument $\arg \underline{H} = 1,0 \text{ rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_1(t) = 3,8 \cos(400t + 1,4)$.
- le terme $e_2(t) = 2,7 \cos(800t - 0,2)$ est sinusoïdal à la pulsation $\omega = 800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; on calcule $\underline{H}(800) = 0,5 + 1,6j$ de module $|\underline{H}| = 1,7$ et d'argument $\arg \underline{H} = 1,3 \text{ rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_2(t) = 4,5 \cos(800t + 1,1)$.
- le terme $e_3(t) = 3,4$ est constant ; il faut le traiter comme un terme de pulsation nulle : $s_3(t) = 3,4 \cos(0t)$; on calcule $\underline{H}(0) = 0,5$ de module $|\underline{H}| = 0,5$ et d'argument $\arg \underline{H} = 0 \text{ rad}$. On en déduit que la sortie correspondante vaut $s_3(t) = 1,7 \cos(0t) = 1,7$

La sortie complète est la somme des trois : $s(t) = 3,8 \cos(400t + 1,4) + 4,5 \cos(800t + 1,1) + 1,7$

C.2. Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Nous savons donc maintenant filtrer une somme de cosinus. Une théorème mathématique que nous admettrons nous indique que nous savons alors filtrer n'importe quel signal sinusoïdal :

Décomposition en série de Fourier

Tout signal T -périodique $f(t)$ peut être décomposé sous la forme d'une somme infinie de cosinus de période $\frac{T}{k}$ avec k un entier ; autrement dit on peut écrire

$$f(t) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + \phi_k\right)$$

où les coefficients c_k et ϕ_k peuvent être calculés à partir du signal $f(t)$.

Le terme en $\cos\left(\frac{2k\pi}{T}t + \phi_k\right)$ s'appelle l'*harmonique de rang k*.

L'harmonique de rang 1 s'appelle le *fondamental*, car elle a la même période que le signal.

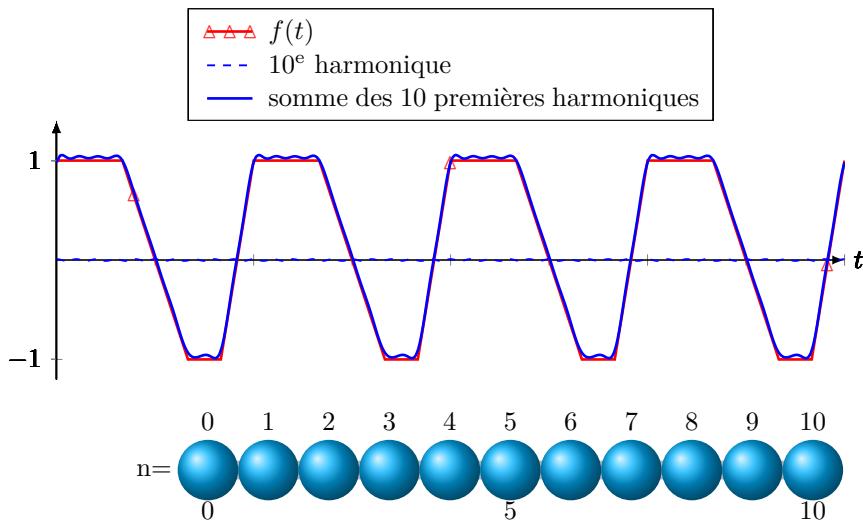


FIGURE E7.14 – Recomposition d'un signal périodique par somme de ses harmoniques.

Remarque : Le terme c_0 , ou harmonique d'ordre 0, correspond à la valeur moyenne de la fonction : $c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t).dt$. Ainsi, un filtre passe-bas coupant à très basse fréquence donnera en sortie la valeur moyenne de l'entrée.

On peut citer aussi un théorème concernant l'énergie d'une fonction décomposée en série de Fourier.

Théorème de Parseval

La valeur moyenne d'une fonction périodique se calcule en fonction des coefficients de sa série de Fourier : avec les notations de la propriété précédente,

$$\langle f^2(t) \rangle = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2 \quad (\text{E7.3a})$$

ou encore avec $c_{k,eff} = \frac{c_k}{\sqrt{2}}$:

$$f_{eff} = \sqrt{c_0^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_{k,eff}^2} \quad (\text{E7.3b})$$

De nombreuses énergies sont associées au carré d'un signal. Par exemple, la puissance reçue par une résistance vaut $\mathcal{P}_{Joule} = \frac{u^2}{R}$; il en va de même pour les ondes sonores, lumineuses,... Dans ce cas, le théorème de Parseval indique que, pour une fonction périodique de moyenne nulle, l'énergie moyenne du signal $f(t)$ est la somme des énergies moyennes contenues dans ses harmoniques.

Vous devez connaître le principe de la décomposition d'un signal en série de Fourier, mais n'avez pas à savoir calculer les coefficients c_k qui interviennent. Par contre, si on vous donne la décomposition d'une fonction en série de Fourier, vous devez savoir appliquer le théorème de superposition pour déterminer la sortie d'un filtre, selon la méthode illustrée sur la figure E7.15 :

- on décompose le signal initial en harmoniques ; on coupe au bout de quelques harmoniques, en fonction de la précision recherchée
- on calcule la sortie correspondant à chaque harmonique
- on somme ces sorties pour obtenir la sortie complète.

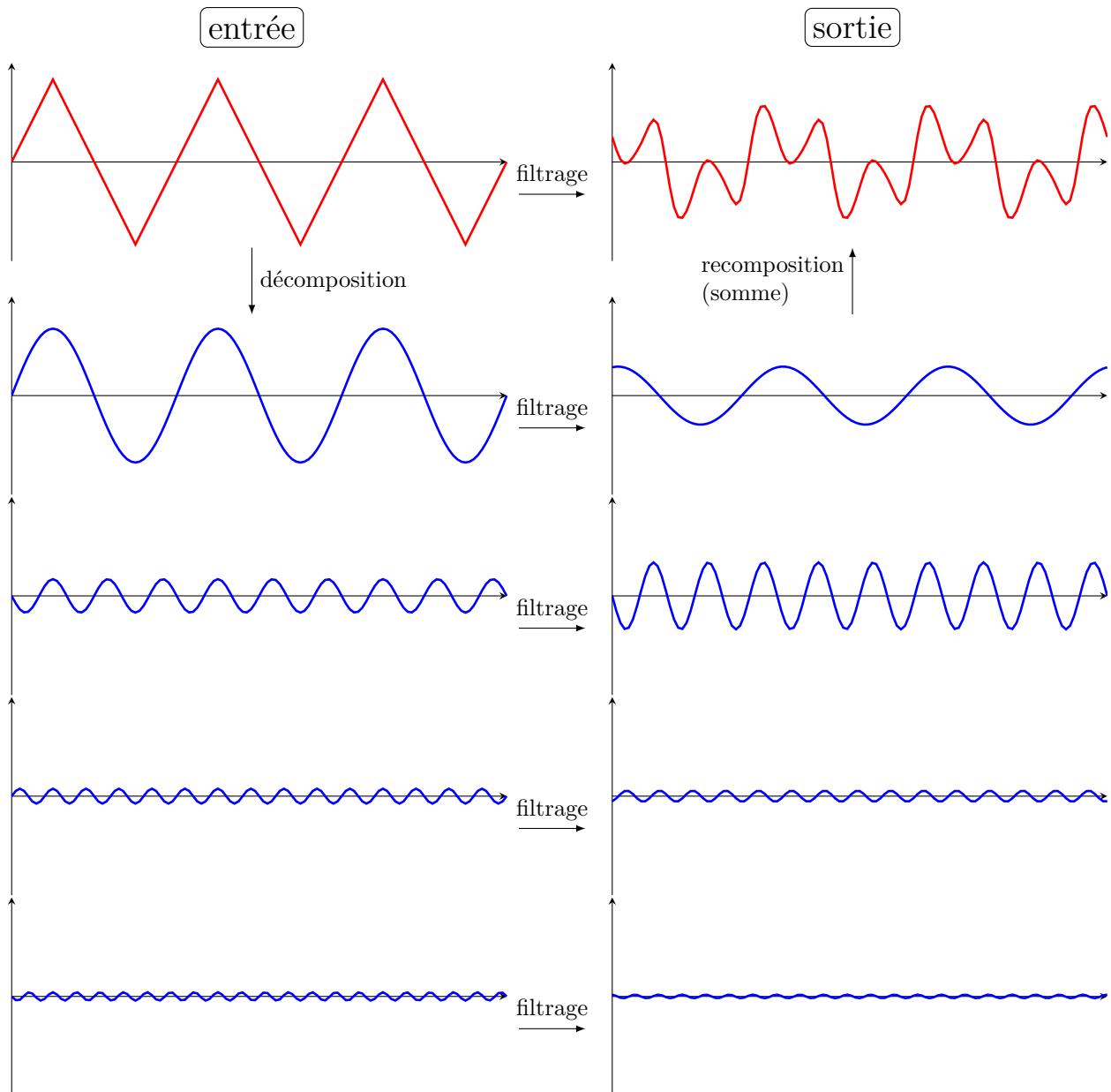


FIGURE E7.15 – Filtrage d'un signal décomposé en harmoniques.


 Filtres linéaires

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Signaux périodiques.	Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal périodique. Calculer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal. Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert. Mettre en œuvre un dispositif expérimental exploitant les propriétés des fonctions de transfert d'un système linéaire.

Filtres linéaires

QCMs

réponses page 598

QCM : Compréhension du cours

Q1.

Un filtre est linéaire si :

- (a). si on somme deux entrées, alors la sortie est la somme des sorties correspondantes
 (c). sa sortie est toujours sinusoïdale
- (b). sa sortie est proportionnelle à son entrée
 (d). si on multiplie l'entrée par k , alors la sortie est multipliée par k

Q2.

Le gain en décibels est défini par $G_{dB} =$

- (a). $\arg \underline{H}$
 (c). $|\underline{H}|$
- (b). $20 \log |\underline{H}|$
 (d). $20 \log \underline{H}$

Q3.

Sur une échelle logarithmique, l'intervalle pour passer d'une valeur à 10 fois plus s'appelle :

- (a). une décurie
 (c). une décennie
- (b). une dizaine
 (d). une décade

Q4.

L'effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal est de :

- (a). changer sa pulsation
 (c). le multiplier par \underline{H}
- (b). multiplier son amplitude par G_{dB} et le déphaser de $\arg \underline{H}$
 (d). multiplier son amplitude par $|\underline{H}|$ et le déphaser par $\arg \underline{H}$

Q5.

Quelle est la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 ?

- (a). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
 (c). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$
- (b). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
 (d). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$

Q6.

Quelle est la forme canonique d'un filtre passe-haut d'ordre 1 ?

- (a). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$
 (c). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
- (b). $\underline{H} = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega_0}{\omega}}$
 (d). $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_0}{\omega}}$

Q7.

Un filtre d'ordre 3 a une asymptote en HF de pente :

- (a). -60 dB/déc
 (c). 0 dB/déc
- (b). la pente en BF moins 60 dB/déc
 (d). la pente en BF moins 20 dB/déc

Q8.

Il n'existe que des filtres de type passe-bas, passe-bande ou passe-haut.

- (a). Vrai
 (b). Faux

Q9.

La fonction de transfert $\underline{H} = \frac{2}{j\omega + 1 + 2j\omega}$ a pour équivalents :

- (a). $\frac{1}{j\omega}$ en BF et $\frac{j\omega}{2}$ en HF
 (c). 2 en BF et $\frac{1}{j\omega}$ en HF

- (b). $\frac{j\omega}{2}$ en BF et $\frac{1}{j\omega}$ en HF
 (d). 2 en BF et 2 en HF

Q10.

Un filtre de fonction de transfert $H = \frac{cst}{j\omega}$ joue un rôle

- (a). de déivateur
 (b). de suiveur
 (c). d'amplificateur
 (d). d'intégrateur

QCM : Filtrage d'un signal sinusoïdal

Q11.

On envoie un signal $e(t) = 3 \cos(300t)$ sur un filtre de FT $H = \frac{1}{1+0,02j\omega}$. La sortie vaut :

- (a). $0,6 \cos(-1,4)$
 (b). $3 \cos(300t + 0,02)$
 (c). $0,5 \cos(300t - 1,4)$
 (d). $1,2 \cos(300t + 1,2)$

Q12.

On envoie un signal $e(t) = 2 \cos(1000t + 0,5)$ sur un filtre de FT $H = \frac{1}{1-j\frac{1200}{\omega}}$. La sortie vaut :

- (a). $0,8 \cos(1000t + 1,7)$
 (b). $0,45 \cos(1000t - 1,4)$
 (c). $1,3 \cos(1000t + 1,4)$
 (d). $2,3 \cos(1000t)$

Q13.

On envoie un signal $e(t) = 1,2 \cos(150t) + 2,1 \cos(800t + 0,2)$ sur un filtre de FT $H = \frac{1,7}{1+j\frac{\omega}{250}}$. La sortie vaut :

- (a). $1,7 \cos(150t - 0,5) + 1,1 \cos(800t - 1,1)$
 (b). $0,3 \cos(150t - 0,7) + 0,5 \cos(800t + 1,3)$
 (c). $0,7 \cos(150t - 0,2) + 0,3 \cos(800t - 0,2)$
 (d). $1,1 \cos(150t - 0,7) + 2,1 \cos(800t - 1,1)$

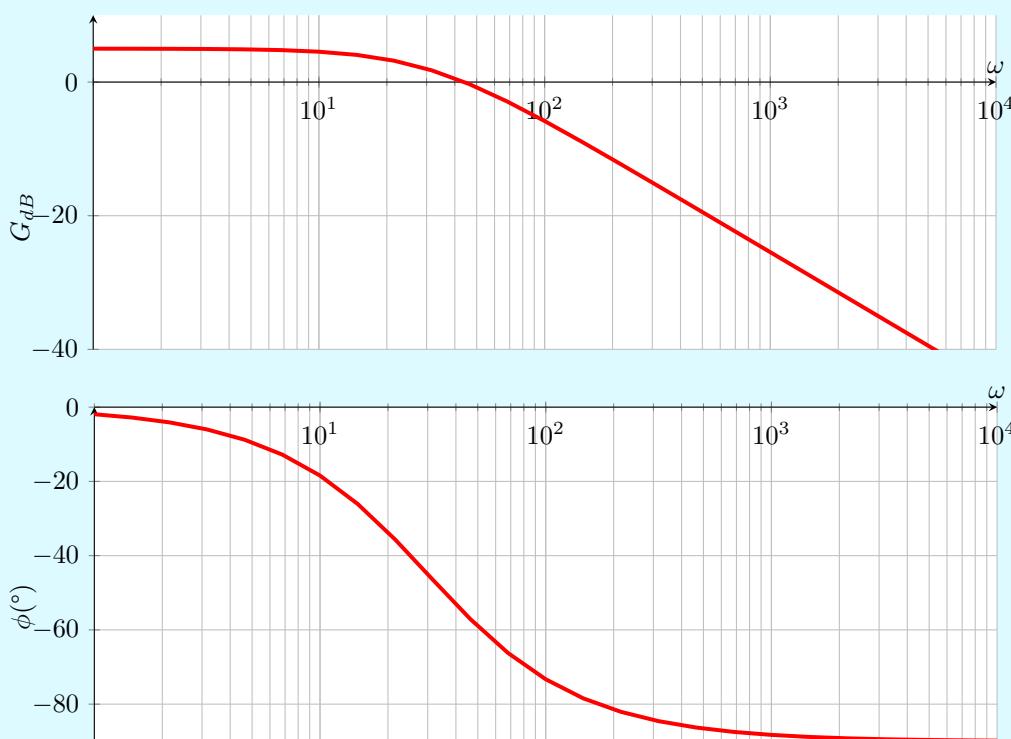
Q14.

On envoie un signal $e(t) = 3 + 3 \cos(500t)$ sur un filtre de FT $H = \frac{0,5}{1+j\frac{\omega}{400} - \frac{\omega^2}{400^2}}$. La sortie vaut :

- (a). $1,2 \cos(500t - 0,2)$
 (b). $1,5 + 1,3 \cos(500t + 1,2)$
 (c). $0,6 \cos(500t - 0,7)$
 (d). $1,5 + 1,1 \cos(500t - 1,2)$

QCM : Lecture d'un diagramme de Bode

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



Q15.

Que vaut $|H|$ à $2000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$?

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). 0,1 | (b). 0,03 |
| (c). 0,04 | (d). -35 |

Q16.

Un signal en entrée a pour fréquence 11 Hz ; par combien son amplitude est-elle multipliée ?

- | | |
|----------|----------|
| (a). 0,1 | (b). 0,7 |
| (c). 1,8 | (d). 1 |

Q17.

Pour quelles pulsations le signal est-il atténue d'un facteur supérieur à 10 ?

- | | |
|--|--|
| (a). $> 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | (b). toute pulsation |
| (c). $> 650 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | (d). $> 430 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ |

Q18.

À quelle fréquence le signal est-il déphasé de -45° ?

- | | |
|------------|-------------|
| (a). 60 Hz | (b). 220 Hz |
| (c). 35 Hz | (d). 6 Hz |

Filtres linéaires

Exercices

réponses page 599

Exercice E7.1 : Filtrage de cosinus [*]

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = \frac{2}{1 + j\omega/1000}$.

1. On met en entrée une tension $e(t) = 2,5 \cos(2000t + 0,2)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.
2. On met en entrée une tension $e(t) = 3 \cos(50t) + 3 \cos(5000t + 0,52)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.

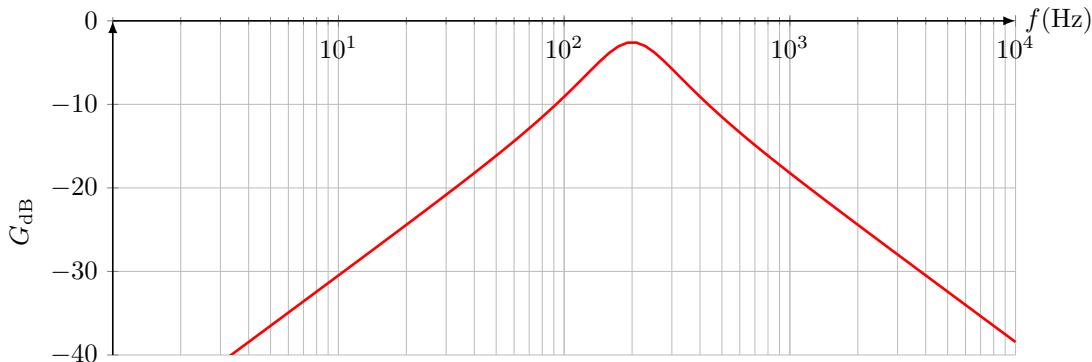
Exercice E7.2 : Filtrage par un filtre [*]

Un filtre a pour fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1 + \frac{j\omega}{300}}{0,7 + \frac{j\omega}{800} - \frac{\omega^2}{10^5}}$.

1. On met en entrée une tension $e(t) = 5 \cos(500t + 0,2) + 5 \cos(1500t)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.
2. On met en entrée une tension $e(t) = 6 + 2 \cos(300t) + 12 \cos(3000t - 1,5)$. Calculez la sortie $s(t)$ de ce filtre.

Exercice E7.3 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

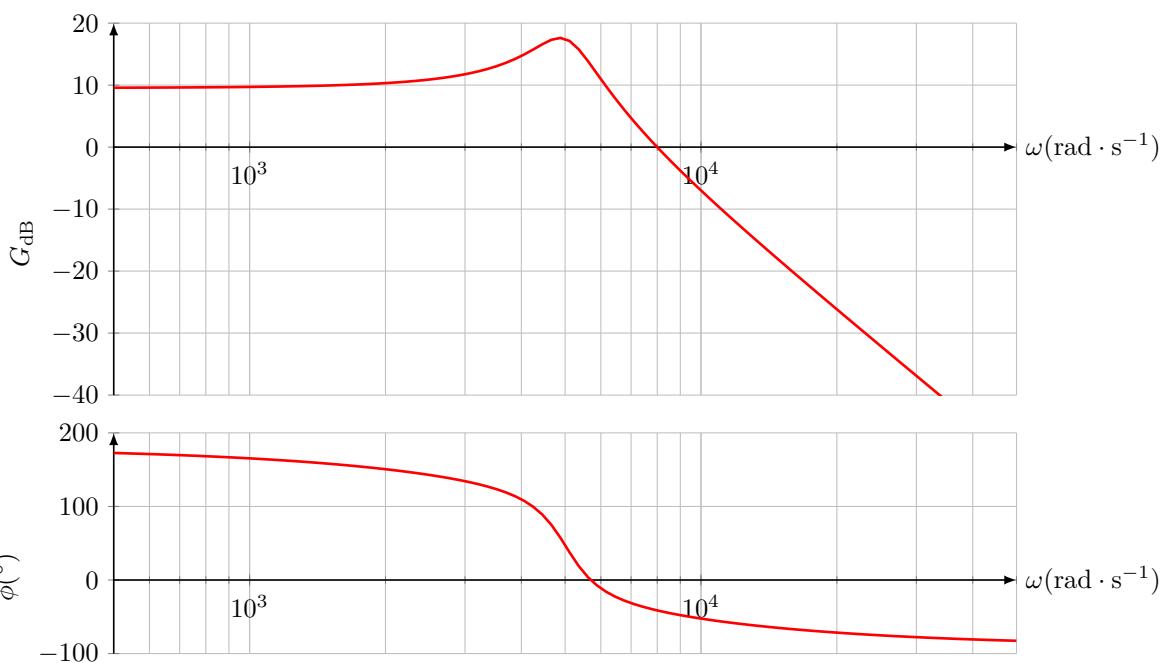
Un filtre a le diagramme de Bode en gain suivant :



1. Que vaut le gain à 100 Hz ? à 200 Hz (le maximum) ? à 1000 Hz ?
2. Déduisez-en $|\underline{H}|$ à ces trois fréquences.
3. On met en entrée de ce filtre une tension d'amplitude 10 V. Que vaut l'amplitude de la sortie si la tension a pour fréquence 100 Hz ? à 200 Hz ? à 1000 Hz ?

Exercice E7.4 : Caractéristiques d'un filtre **

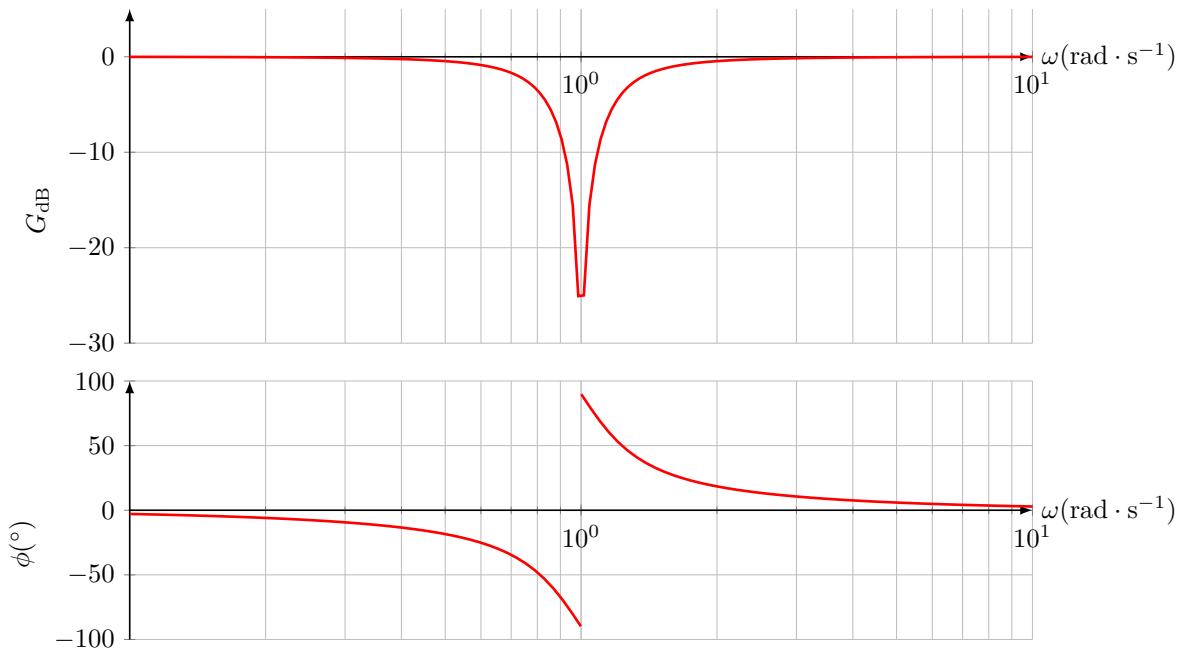
Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



1. Quel est la famille de ce filtre ?
2. Déterminez la valeur de l'amplification en basse fréquence, H_0 ?
3. Quelle est la **fréquence** de résonance ? Que vaut la largeur en fréquence de la bande passante à -3 dB ?
4. Mesurez la pente de l'asymptote HF de la courbe du gain. Dédouisez-en l'ordre de ce filtre. Est-ce cohérent avec la courbe en phase ?

Exercice E7.5 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

Un filtre a le diagramme de Bode suivant :



1. On met en entrée un signal $e(t) = 2 \cos(10t)$; déterminez le signal de sortie.
2. On met en entrée un signal $e(t) = 2 \cos(10t) + 5 \cos(0,9t)$; déterminez le signal de sortie.
3. Quel est (très approximativement) l'intervalle des pulsations qui sont atténueres par un facteur supérieur à $\sqrt{2}$?

Exercice E7.6 : Filtre d'ordre 1 [*]

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + j\frac{\omega}{100}}$

1. Tracez son diagramme de Bode asymptotique.
2. Calculez sa pulsation de coupure à -3 dB .

Exercice E7.7 : Filtre d'ordre 1 [*]

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 - j\frac{100}{\omega}}$

1. Tracez son diagramme de Bode asymptotique.
2. Calculez sa pulsation de coupure à -3 dB .

Exercice E7.8 : Filtrage par un masse-ressort [**]

On a vu qu'un masse-ressort de raideur k , avec un amortisseur de coefficient f , secoué par une force F , a une position qui a pour image complexe $\underline{x} = \frac{F}{k - m\omega^2 + jfw}$. On considère ici un amortisseur de voiture avec les valeurs : $k = 44\,000\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $m = 300\text{ kg}$, $f = 8000\text{ USI}$.

1. On considère la sortie comme position ; on définit donc $\underline{H} = \frac{\underline{x}}{\underline{F}}$.
 - (a) Étudiez les asymptotes du diagramme de Bode de ce filtre.
 - (b) Calculez le vrai gain et la vraie phase à la pulsation de croisement des asymptotes.
 - (c) Montrez que le gain n'admet pas de résonance. Calculez numériquement la bande passante à -3 dB .
 - (d) Tracez alors le vrai diagramme de Bode en gain entre $0,1\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1000\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. On considère la sortie comme vitesse ; on définit donc $\underline{H} = \frac{\underline{v}}{\underline{F}}$ avec $v = \dot{x}$.
 - (a) Étudiez les asymptotes du diagramme de Bode de ce filtre.
 - (b) Calculez le vrai gain et la vraie phase à la pulsation de croisement des asymptotes.
 - (c) Montrez que le gain est maximal à la pulsation de croisement des asymptotes. Calculez numériquement la bande passante à -3 dB .
 - (d) Tracez alors le vrai diagramme de Bode en gain entre $0,1\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1000\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
3. Vous pouvez essayer la même chose avec l'accélération.

Exercice E7.9 : Isolation phonique [**]

Une cloison en plaques de plâtre remplie de laine de chanvre a une atténuation égale à 34 dB à 250 Hz et 43 dB à 1500 Hz . On pose par-dessus une plaque de liège ayant une atténuation de 14 dB à 250 Hz et 3 dB à 1500 Hz ; c'est comme si on mettait ces deux filtres sonores en cascade.

1. Calculez l'atténuation en dB à 250 Hz et à 1500 Hz , puis le facteur par lequel est divisé le son à ces fréquences.
2. En supposant que l'atténuation varie linéairement entre 250 Hz et 1500 Hz , calculez la pente du gain dans le diagramme de Bode, en $\text{dB}/\text{déc}$.
3. *** Déterminez alors l'atténuation à 800 Hz .

Exercice E7.10 : Mesure de la vitesse d'éloignement des galaxies [**]

Quand on observe les galaxies lointaines, on observe que leur spectre est décalé vers les basses fréquences (grandes longueurs d'ondes) à cause de l'effet Doppler : cela traduit le fait qu'elles s'éloignent de nous. Pour mesurer cette vitesse, on s'intéresse à la «raie à 21 cm » de l'hydrogène de longueur d'onde $\lambda_0 = 21,11\text{ cm}$. *Données* : vitesse de la lumière $c = 299\,792\,458\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

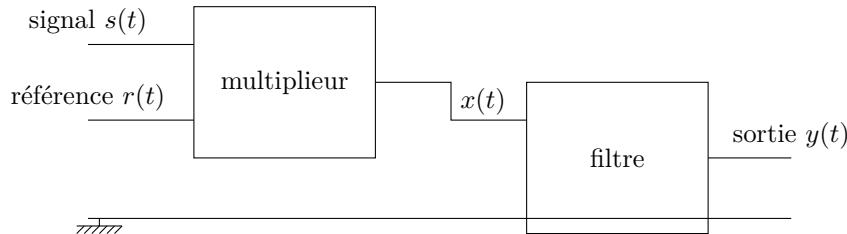
1. Calculez la fréquence f_0 correspondante.
2. Quand une galaxie s'éloigne de nous à la vitesse v , la raie à 21 cm est décalée en fréquence : la fréquence

captée vaut $f = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f_0$.

Calculez le décalage pour la galaxie du Sombrero qui s'éloigne de nous à $1368 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$; commentez.

3. Un radiotélescope mesure le signal émis par la galaxie et isole la raie à 21 cm; on a alors un signal $s(t) = S_0 \cdot \cos(2\pi ft)$. Le but est de mesurer f pour connaître la vitesse v de fuite de la galaxie.

Pour cela, on génère sur place une raie à 21 cm de référence, $r(t) = R_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t)$, et on envoie ces deux signaux dans le montage suivant :



La première étape est le passage par un multiplicateur qui donne en sortie $x(t) = K \cdot s(t) \cdot r(t)$ avec K une constante.

Montrez que $x(t)$ est la somme de deux cosinus dont on précisera la fréquence en fonction de f et f_0 , puis en fonction de f_0 et $\frac{v}{c}$.

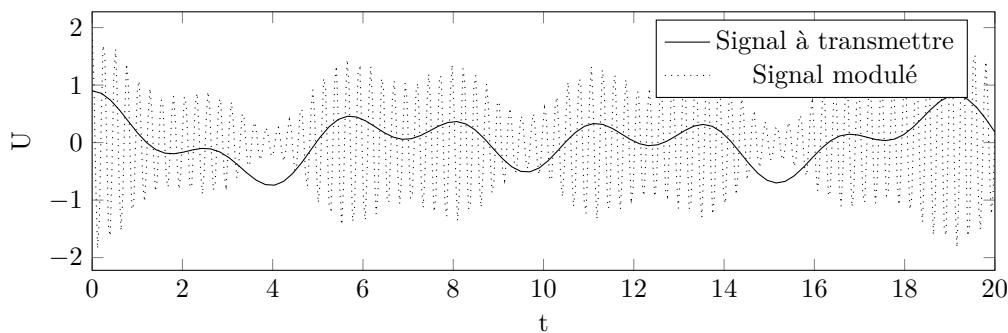
4. On envoie alors le signal dans un filtre passe-bas.

Proposer un choix d'ordre et de fréquence de coupure de ce filtre pour que le cosinus basse fréquence passe, et que l'autre soit atténué d'un facteur 100? Quelle est alors la forme de $y(t)$ en négligeant les termes qui sont négligeables?

5. Pour une autre galaxie, on observe que $y(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence $f_1 = 2,4 \text{ MHz}$. Calculez la vitesse de fuite de cette galaxie.

Exercice E7.11 : Démodulation d'amplitude [***]

La modulation est une technique consistant à coder un signal $s(t)$ qu'on veut transmettre dans un autre signal $p(t)$, appelé *porteuse*, de haute fréquence. La technique la plus simple est la modulation d'amplitude (AM) qui consiste à créer un signal de la même fréquence que p , mais dont l'amplitude varie comme $s(t) + C$ où C est une constante.



On va s'intéresser ici au cas le plus simple d'un signal sinusoïdal. On prendra donc $s(t) = S_0 \cos \omega_s t$; la porteuse est de la forme $p(t) = P_0 \cos \omega_p t$ avec $\omega_p \gg \omega_s$.

Pour les applications numériques, on considérera la radio France Inter sur grandes ondes; elle émet à une fréquence de porteuse $f_p = 162 \text{ kHz}$ et les signaux transmis ont pour fréquence maximale $f_s = 4,5 \text{ kHz}$.

1. Pour créer le signal modulé, on prend la porteuse qui a une amplitude constante, et on la multiplie par $s(t)$ auquel on a ajouté une constante. On obtient donc $m(t) = K \cdot p(t) \cdot [s(t) + C]$ avec K et C des constantes. Montrez que $m(t)$ est la somme de 3 tensions sinusoïdales de pulsations à exprimer.

2. Le résultat $m(t)$ est transmis par voie hertzienne, car il est composé de très hautes fréquences qui se propagent bien. Il est reçu par l'utilisateur qui veut le démoduler, c'est-à-dire récupérer le signal $s(t)$.

Pour cela, on remultiplie $m(t)$ par $p(t)$. On obtient la tension $d(t) = K' \cdot p(t) \cdot m(t)$ dont on peut montrer

par des calculs (admis) qu'elle vaut

$$d(t) = A \left[\frac{C}{2} + \frac{C}{2} \cos 2\omega_p t + \frac{S_0}{2} \cos \omega_s t + \frac{S_0}{4} \cos (2\omega_p - \omega_s) t + \frac{S_0}{4} \cos (2\omega_p + \omega_s) t \right]$$

avec $A = K' \cdot K \cdot P_0$.

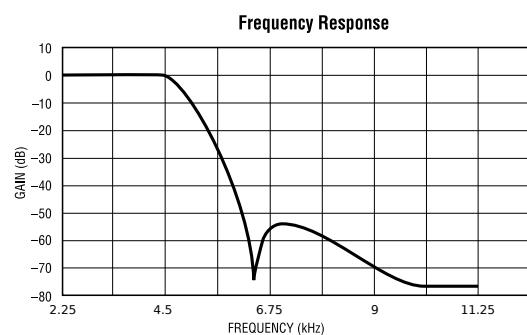
Dans le tableau ci-dessous, remplissez pour chacun des 5 termes de $d(t)$ les colonnes 1 et 2.

Fréquence	Amplitude dans $d(t)$	$ H $	Amplitude dans $f(t)$
0			
$f_s =$			
$2f_p - f_s =$			
$2f_p =$			
$2f_p + f_s =$			

- On envoie $d(t)$ dans un filtre passe-bas. Comment doit-on choisir sa pulsation de coupure si on veut conserver le signal initial et éliminer la porteuse ?
- On propose d'envoyer $d(t)$ dans un filtre de fonction de transfert $H_1 = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0} - \frac{f^2}{f_0^2}}$ avec $f_0 = 4,5 \text{ kHz}$; on obtient en sortie un signal $f(t)$. Remplissez alors les colonnes 3 et 4 du tableau. Déduisez-en que le signal de sortie, à un facteur près, est égal à $C + s(t)$, si on suppose que le filtre n'amène pas de déphasage.
- On envoie ce signal restant dans un filtre $H_2 = \frac{1}{1-j\frac{f}{f_1}}$ avec $f_1 = 1 \text{ Hz}$. Que reste-t-il en sortie ?
- En réalité, cela ne fonctionne pas. En effet, une autre radio peut émettre sur une porteuse voisine. Les signaux de cette autre radio se retrouvent très proches dans $d(t)$, entre $5,5 \text{ kHz}$ et $14,5 \text{ kHz}$. Il faut donc que notre filtre laisse passer le $4,5 \text{ kHz}$ et coupe le $5,5 \text{ kHz}$. Justifiez que ce n'est pas vraiment le cas.
- On achète un filtre LTC 1069-1 de Linear Technology ; il s'agit d'un filtre passe-bas du 8ème ordre. Son gain en fonction de la fréquence est donné dans la notice (la pulsation de coupure peut être réglée entre 3 kHz et $4,5 \text{ kHz}$, ici on a réglé sur $4,5 \text{ kHz}$) :



Low Power, 8th Order
Progressive Elliptic,
Lowpass Filter



Déterminer par combien va être multiplié un cosinus de fréquence $5,5 \text{ kHz}$; puis 6 kHz . Conclusion ?

Filtres linéaires

TDs numériques

réponses page [602](#)

TD numérique : Série de Fourier et filtrage

Nous allons simuler le filtrage d'une tension périodique par un filtre.

1. Filtre passe-bas d'ordre 2

On considère un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \frac{f}{2f_0}}$ avec $H_0 = 2$ et $f_0 = 1500$ Hz.

- (a) Définissez sous Python une fonction `H_(f)` qui renvoie \underline{H} , puis deux fonctions `modH(f)` et `argH(f)` qui renvoient son module et sa phase.

Rappel : le module se calcule avec `np.abs` et la phase avec `np.angle`.

- (b) Tracez le diagramme de Bode de ce filtre entre 100 Hz et 10 kHz ; pour cela, il faudra tracer une courbe comme on le fait habituellement, mais avec deux différences :

- l'échelle horizontale doit être logarithmique; cela s'obtient avec la commande `plt.xscale("log")`
- les points de l'abscisse (tableau des fréquences) doivent se répartir de façon régulière sur cette échelle logarithmique;, ce qui n'est pas le cas avec un `numpy.linspace`; on utilisera donc la commande `numpy.logspace(2,5,1000)` qui crée 1000 point entre 10^2 et 10^5 régulièrement espacés sur l'échelle logarithmique (cette commande est équivalente à `10**numpy.linspace(2,5,1000)`).

Rappel : le logarithme en base 10 se calcule avec `np.log10()`.

- (c) On suppose qu'on met pour le moment en entrée une fonction $e_1(t)$ sinusoïdale d'amplitude 5 V, de fréquence $f = 500$ Hz et de phase nulle.

Écrivez la forme mathématique de $e_1(t)$ et tracez-la avec Python entre 0 et $3T$ (T la période).

- (d) Quelle est la forme mathématique de la sortie $s_1(t)$ (on gardera l'expression avec $|\underline{H}|$ et $\arg \underline{H}$) ? Tracez alors sur le même graphique $s_1(t)$.

- (e) On met maintenant en entrée en signal dont la décomposition en série de Fourier est

$$e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k f t) + b_k \sin(2\pi k f t) \text{ avec } a_k = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) (\cos(2\alpha k \pi) - 1)$$

$$\text{et } b_k = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha - 1} \right) \sin(2\alpha k \pi) \text{ pour } \alpha = 0,8$$

Tracez le signal e_2 obtenu en faisant la somme, par exemple, des 25 premiers termes.

- (f) Tracez alors sur le même graphique la sortie correspondante.

Remarque : les sinus sont transformés au passage du filtre de la même manière que les cosinus.

2. Filtre dérivateur/intégrateur

Tracez de même l'effet d'un filtre dérivateur $\underline{H} = j \frac{f}{f_0}$ sur les dents de scie, puis d'un filtre intégrateur $\underline{H} = -j \frac{f_0}{f}$.

3. Vous pouvez reprendre la même chose avec un signal en créneaux de fréquence f . On admet qu'il se décompose en série de Fourier selon la formule

$$e_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2\pi(2k+1)f t) \text{ avec } b_k = 5 \times \frac{4}{(2k+1)\pi}$$

et on prendra au moins 100 harmoniques.

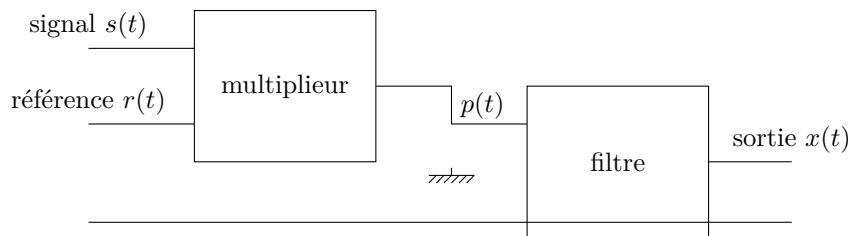
TD numérique : Mesure d'un effet Doppler

Pour mesurer la vitesse d'un objet, un sonar envoie une onde ultrasonore de fréquence bien connue f_0 ; on prendra $f_0 = 40$ kHz dans la suite. Cette onde se réfléchit sur un objet et revient avec une fréquence $f_0 + \Delta f$ différente, le décalage Δf étant proportionnel à la vitesse de l'objet : c'est l'effet Doppler. En mesurant Δf on

peut en déduire la vitesse de l'objet. Mais c'est difficile car $\Delta f \ll f_0$.

Numériquement, pour les simulations, on prendra $\Delta f = 500$ Hz.

Le but est de mesurer le décalage en fréquence Δf . Pour cela, on envoie le signal dans un multiplicateur puis un filtre passe-bas :



1. Signal et référence

On prendra pour le signal et pour la référence des fonctions sinusoïdales d'amplitude 1 et de phase nulle, pour simplifier. Le signal a pour fréquence $f_0 + \Delta f$ tandis que la référence a pour fréquence f_0 .

- Écrivez littéralement les formes de $s(t)$ et $r(t)$.
- Définissez ces deux fonctions sous Python.

2. Spectre de s et r

- Dessinez à la main sur un même graphique le spectre de s et celui de r .
- On va maintenant tracer ces spectres automatiquement avec Python. Pour cela, commencez par générer un tableau `tab_t` des temps avec 250000 points entre 0 et $\frac{5}{\Delta f}$ (pour faire un bon spectre, il faut beaucoup de points et plusieurs de périodes), et générez les tableaux `tab_s` et `tab_r` correspondant.
- Le programme suivant permet de tracer le spectre de s grâce à un algorithme appelé *transformée de Fourier rapide* (FFT) :

```

1 import numpy.fft as nfft # librairie pour la fft
2 tab_a_s=np.abs(nfft.rfft(tab_s))*2/len(tab_s) # amplitudes de la fft réelle
3 tab_f=nfft.rfftfreq(len(tab_t),d=tab_t[1]) # fréquences de la fft
4 plt.figure()
5 plt.plot(tab_f,tab_a_s,label="spectre_de_s")
6 plt.xlim([0,100e3]) # échelle horizontale, les trop hautes fréquences ne servent à rien
7 plt.xlabel("f(Hz)")
8 plt.ylabel("(V)")
9 plt.legend()
10 plt.show()

```

Exécutez-le, puis modifiez-le pour y ajouter le spectre de r . Zoomez pour bien voir le décalage en fréquence entre les deux signaux.

3. Sortie du multiplicateur

À la sortie du multiplicateur, on obtient $p(t) = K.s(t).r(t)$ avec $K = 1$.

- Montrez théoriquement que p est la somme de deux cosinus de fréquences à préciser.
- Calculez le tableau `tab_p` des valeurs de $p(t)$ sous Python, et tracez $p(t)$; calculez aussi le tableau `tab_a_p` des amplitudes de son spectre par FFT, tracez-le et vérifiez la cohérence avec la théorie.

4. Filtrage

On filtre $p(t)$ par un simple passe-bas $H = \frac{H_0}{1+j\frac{f}{f_c}}$ avec $H_0 = 1$ et $f_c = 1$ kHz.

- Quel est l'effet théorique du filtre sur l'amplitude d'un signal de fréquence f ? En déduire comment on peut calculer le tableau des amplitudes du spectre de x en fonction de `tab_f` et `tab_a_p`. Tracez ce spectre et commentez le résultat.
- On peut retrouver ce spectre d'une autre façon. En effet, la fonction de transfert du filtre peut être vue comme une équation différentielle linéaire reliant son entrée et sa sortie.
Établissez l'ED reliant $x(t)$ et $p(t)$.
- Résolvez alors cette ED par méthode d'Euler; on prendra comme pas temporel `tab_t[1]` (pas temporel du tableau des temps) et comme nombre total de points `len(tab_t)`. Tracez $x(t)$.
- Tracez le spectre par FFT de $x(t)$ obtenu, et vérifiez la cohérence avec la question 4a.

TD numérique : Détection synchrone

On suppose qu'on enregistre un son à la fréquence $f_0 = 400$ Hz noyé dans du bruit. Par exemple, on générera le signal avec le programme suivant :

```

1 f0=400
2 A=0.1
3 np.random.seed(2)
4 tsf=np.arange(0,1000,20)
5 i0=np.where(tsf==f0)[0]
6 tsf=tsf+np.random.uniform(-2,2,len(tsf))
7 tsA=np.random.uniform(-0.15,0.15,len(tsf))
8 tsp=np.random.uniform(0,2*np.pi,len(tsf))
9 tsf[i0],tsA[i0],tsp[i0]=f0,A,0
10 def signal(t):
11     if isinstance(t,int|float):
12         return np.sum(tsA*np.cos(2*np.pi*tsf*t+tsp))
13     else:
14         return [np.sum(tsA*np.cos(2*np.pi*tsf*xt+tsp)) for xt in t]
15 tab_t=np.linspace(0,400/f0,500000)
16 tab_signal=signal(tab_t)
```

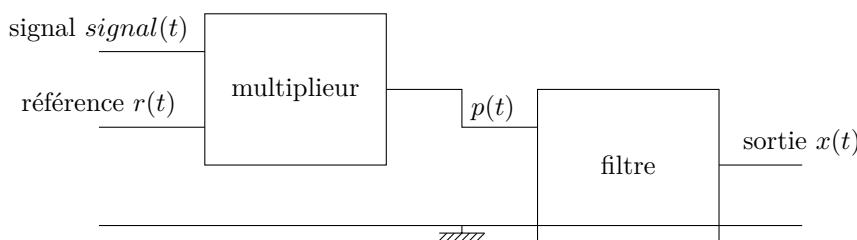
1. Recopiez ce programme et tracez le signal en fonction du temps.
2. Le programme suivant permet de tracer le spectre du signal grâce à un algorithme appelé *transformée de Fourier rapide* (FFT) :

```

1 import numpy.fft as nfft # librairie pour la fft
2 tab_a_signal=np.abs(nfft.rfft(tab_signal))*2/len(tab_signal) # amplitudes de la fft réelle
3 tab_f=nfft.rfftfreq(len(tab_t),d=tab_t[1]) # fréquences de la fft
4 plt.figure()
5 plt.plot(tab_f,tab_a_signal,label="spectre du signal")
6 plt.xlim([0,1e3]) # échelle horizontale, les trop hautes fréquences ne servent à rien
7 plt.xlabel("f(Hz)")
8 plt.ylabel("(V)")
9 plt.legend()
10 plt.show()
```

Exécutez-le et constater que le son à f_0 ne ressort pas franchement.

3. Le but est de mesurer dans ce fouillis l'amplitude A du cosinus intéressant. Pour cela, on traite le signal de la façon suivante :



Le signal de référence $r(t)$ est de la forme $R_0 \cos(2\pi f_0 t)$ avec $R_0 = 1$. À la sortie du multiplicateur, on obtient $p(t) = K \cdot \text{signal}(t) \cdot r(t)$ avec $K = 1$.

Étude théorique : on écrit le bruit sous la forme d'une somme de plein de cosinus de fréquences aléatoires. On écrit donc le signal sous la forme $\text{signal}(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + \sum_k B_k \cos(2\pi f_k t)$.

Écrivez la sortie $p(t)$ du multiplicateur sous la forme d'une somme de beaucoup de cosinus et d'un terme constant.

4. Si on récupère le terme constant, on peut avoir accès à l'amplitude A . Pour cela, on passe $p(t)$ dans un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 2$ Hz et de gain statique $H_0 = 10$. On supposera pour le moment un filtre idéal : tout signal de fréquence $f < f_c$ est multiplié par H_0 tandis que tout signal de fréquence $f > f_c$ est supprimé.

Que vaut la sortie théorique si on suppose que $\forall k, |f_k - f_0| \gg f_c$?

5. On prend pour commencer un filtre d'ordre 1, de fonction de transfert $H = \frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{2\pi f_c}}$.

Pour appliquer ce filtre à $p(t)$ sous Python, on est embêté car il n'est pas sinusoïdal. Mais on peut s'en sortir en remarquant que \underline{H} traduit en fait une équation différentielle reliant $p(t)$ à $x(t)$.

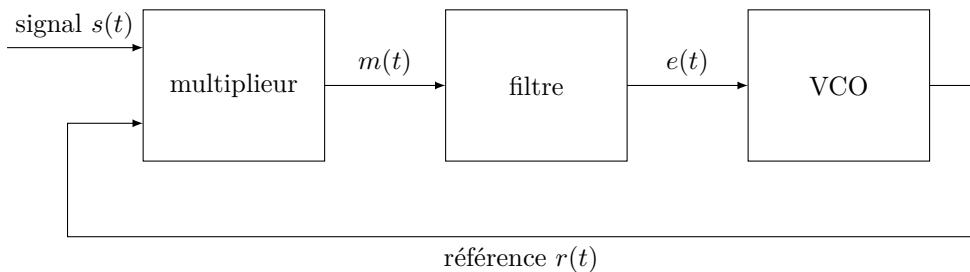
Établissez cette ED.

6. À l'aide d'une méthode d'Euler (de pas $\text{tab_t}[1]-\text{tab_t}[0]$ avec $\text{len}(\text{tab_t})$ pas), générez $x(t)$ avec comme condition initiale $x(0) = 0$ et tracez-le. Observez qu'après un court régime transitoire, la valeur de $x(t)$ se stabilise autour d'une valeur constante, d'où on peut tirer A , mais qu'il reste pas mal d'oscillations.
7. S'il vous reste du temps, essayez avec un filtre d'ordre 2 : $\underline{H} = \frac{10}{1 - \frac{\omega^2}{(2\pi f_c)^2} + j \frac{\omega}{\pi f_c}}$

TD numérique : Boucle à verrouillage de phase

Lorsqu'on souhaite démoduler un signal, il faut disposer d'un signal de référence exactement de même fréquence que la porteuse. Or il est impossible de générer un tel signal ayant exactement la même fréquence ; on utilise alors un système asservi appelé Boucle à Verrouillage de Phase (PLL en anglais).

Le schéma d'une PLL est représenté ci-dessous :



- le signal $s(t)$ est celui qu'on capte, sa porteuse est de fréquence f_s ; on le notera $s(t) = S_0 \cos(2\pi f_s t)$
- il est multiplié par un signal de référence $r(t)$ (cf. ci-dessous)
- le produit $m(t) = K \cdot s(t) \cdot r(t)$ passe dans un filtre passe-bas
- la sortie $e(t)$ du filtre sert de commande à un Oscillateur Commandé en Tension (VCO) qui génère en sortie le signal de référence $r(t)$, sinusoïdal, et de fréquence f_1 variable en fonction de e selon une loi affine : $f_1 = f_0 + \alpha \cdot e$

1. On suppose pour le moment que la PLL a réussi à se fixer sur la bonne fréquence, c'est-à-dire que $r(t) = R_0 \cos(2\pi f_s t + \varphi)$.

Que vaut $m(t)$? et $e(t)$? Établir la relation entre f_s , f_0 , α et $\cos \varphi$, et en déduire que la PLL ne peut se fixer sur la bonne fréquence que si f_s appartient à un intervalle $[f_0 - \Delta f; f_0 + \Delta f]$ avec Δf à exprimer en fonction de f_0 , K , S_0 , R_0 et α .

2. Pour savoir si la PLL arrive à atteindre cet état, on va faire une simulation :

- le filtre passe-bas est un simple filtre d'ordre 1 de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\tau\omega}$
- on admet que, lorsque $e(t)$ varie, le VCO donne en sortie une tension s'écrivant $r(t) = R_0 \cos(2\pi \int (f_0 + \alpha e(t)) dt)$

On pose $E(t) = \int e(t) dt$. Montrer que E vérifie l'équation différentielle

$$\tau \ddot{E} + \dot{E} = K \cdot S_0 \cdot R_0 \cdot \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi(f_0 + E)t) \quad (\text{E7.4})$$

3. Résolvez cette équation différentielle avec `odeint` avec les valeurs suivantes : $f_0 = 5000 \text{ Hz}$; $f_s = 4980 \text{ Hz}$; $\tau = 50 \text{ ms}$; $K \cdot S_0 \cdot R_0 = 10 \text{ V}$ et $\alpha = 50 \text{ Hz} \cdot \text{V}^{-1}$; on prendra des conditions initiales nulles pour $E(t)$ et $e(t)$, et on tracera $e(t)$ puis $f_1(t)$ sur une durée de 500 ms.
4. L'intérêt de la PLL est d'obtenir en $r(t)$ un signal sinusoïdal de même fréquence que la porteuse, même si le signal est modulé. Par exemple, dans la simulation précédente, changer l'amplitude du signal en $S_0 (1 + 0,3 \cos(200\pi t))$ et observez que la PLL se stabilise aussi bien.
5. La PLL peut être stable dans un intervalle $f_0 \pm \Delta f$, mais cela ne prouve pas qu'elle réussira à se stabiliser. Pour le savoir, on remplace maintenant le signal en entrée par un signal dont la fréquence varie continument : $f_s(t) = 4600 + 400t$ en Hertz, ce qui donne un signal $s(t) = S_0 \cos(2\pi \int f_s(t) dt)$. Simulez la PLL pendant 2s et tracez $f_1(t)$ et $f_s(t)$. Observez la valeur pour laquelle la PLL accroche le signal, et la valeur pour laquelle elle se décroche.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET **(d)**

Q2.(b)

Q3.(d)

Q4.(d)

Q5.(b)

Q6.(a)

Q7.(b)

Q8.(b)

Ce sont les 3 principaux, mais il existe aussi les coupe-bande, des correcteurs, ...

Q9.(b)

Le terme $\frac{4}{j\omega}$ est de degré -1, le terme constant de degré 0, le terme $2j\omega$ de degré 1.

Q10.(d)

Réponses au QCM : Filtrage d'un signal sinusoïdal

Q11.(c)

$$\underline{H} = \frac{1}{1+6j} = 0,16e^{-1,4j}$$

Q12.(c)

$$\underline{H} = \frac{1}{1-1,2j} = 0,64e^{0,9j}$$

Q13.(a)

Il faut calculer \underline{H} à deux pulsations différentes.

Q14.(d)

Le terme constant 3 correspond à un cosinus de pulsation nulle.

Réponses au QCM : Lecture d'un diagramme de Bode

Q15.(b)

$G_{dB} = -30$ dB environ.

Q16.(b)

$\omega = 2\pi f = 70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $G_{dB} = -3$ dB environ

Q17.(c)

$G_{dB} < -20dB$

Q18.(d)

On lit $35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ qu'on divise par 2π pour avoir la fréquence.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E7.1 : Filtrage de cosinus [*]

1. $s(t) = 2,24 \cos(2000t + 0,2 - 1,11)$
2. $s(t) = 6 \cos(50t - 0,05) + 1,2 \cos(5000t - 0,85)$.

Réponses de l'exercice E7.2 : Filtrage par un filtre [*]

1. $s(t) = 5,0 \cos(500t - 1,6) + 1,2 \cos(1500t - 1,7)$
2. $s(t) = 8,4 + 6,6 \cos(300t - 1,3) + 1,2 \cos(3000t - 3,1)$

Réponses de l'exercice E7.3 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

L'amplitude de l'entrée est multipliée par $|H| = 10^{G_{\text{dB}}/20}$, donc l'amplitude de la sortie vaut 3,5 V à 100 Hz, 7,1 V à 200 Hz et 1,4 V à 1000 Hz.

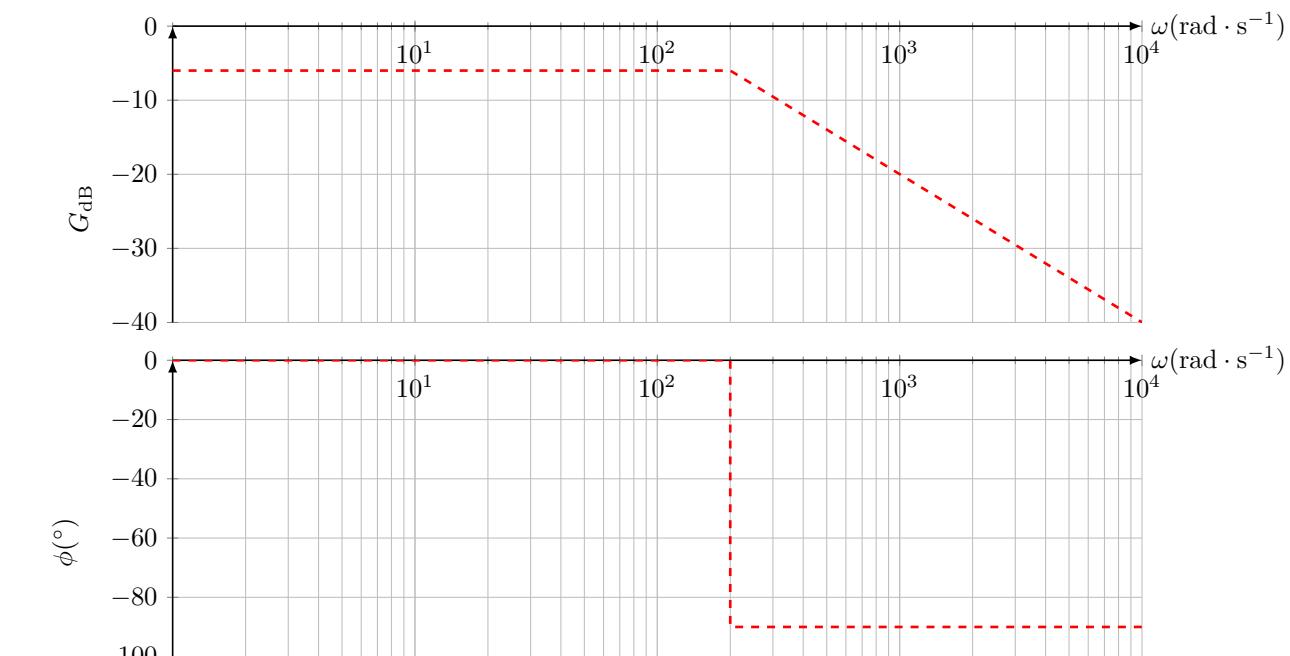
Réponses de l'exercice E7.4 : Caractéristiques d'un filtre [**]

1. Filtre passe-bas.
2. $H_0 = 3,2$.
3. $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 800 \text{ Hz}$. la largeur de la BP vaut $\Delta f = 240 \text{ Hz}$.
4. On mesure une pente en HF d'environ -60 dB/déc d'où on déduit un ordre 3.

Réponses de l'exercice E7.5 : Lecture d'un diagramme de Bode [*]

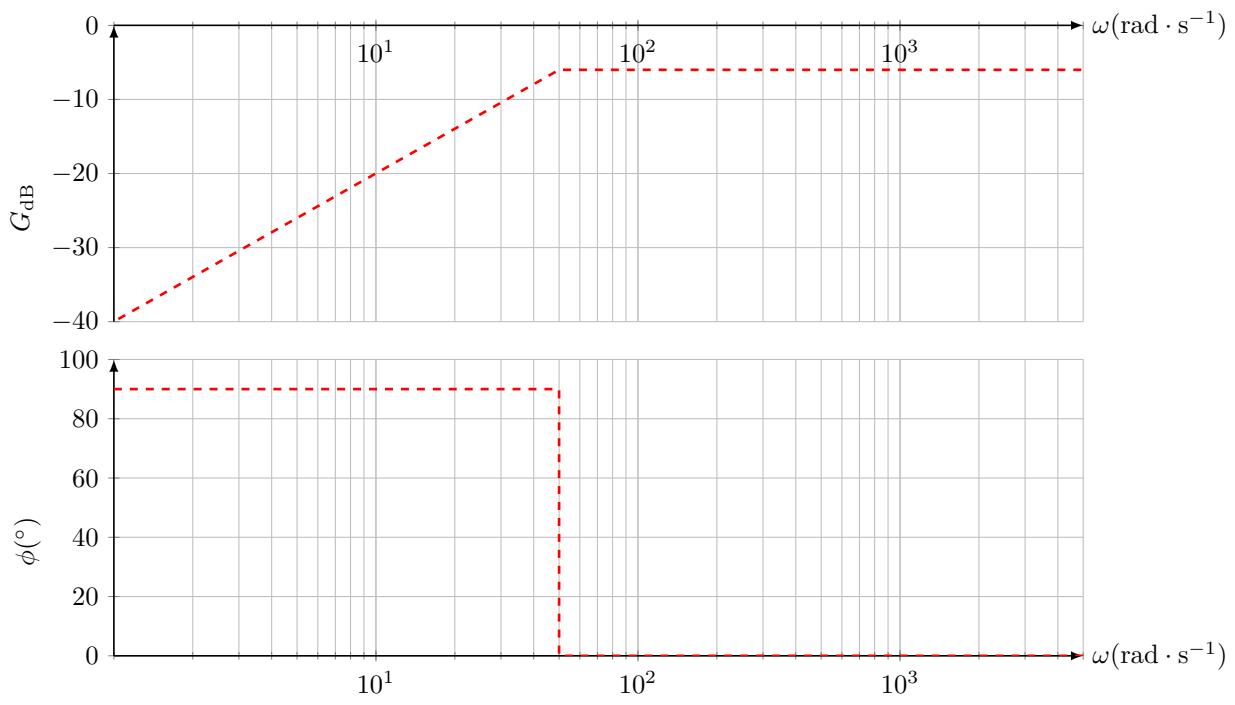
1. $s(t) \approx e(t)$.
2. $s(t) = 2 \cos(10t) + 1,6 \cos(0,9t - 1,22)$
3. $[0,7 : 1,5] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice E7.6 : Filtre d'ordre 1 [*]



2. $\frac{1}{\sqrt{4 + \frac{\omega^2}{10^4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponses de l'exercice E7.7 : Filtre d'ordre 1 [*]

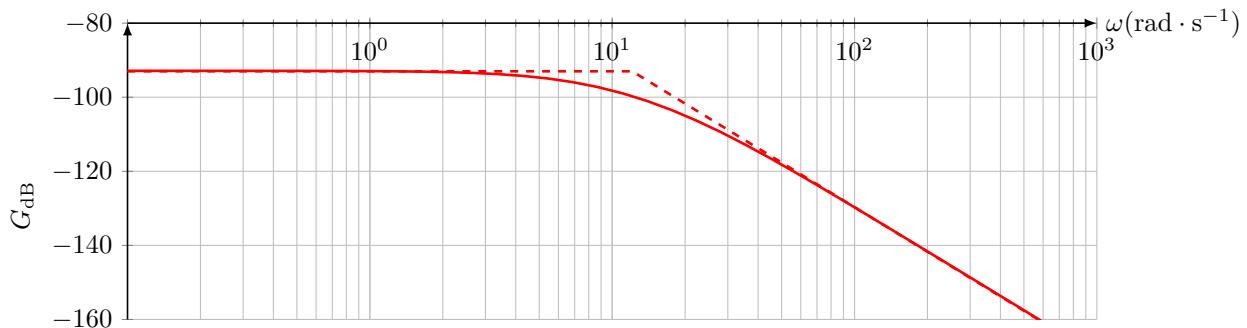


1.

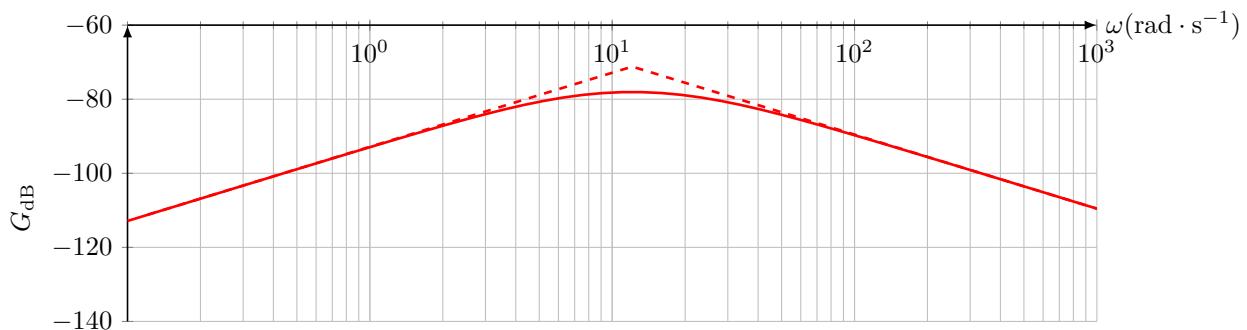
$$2. \frac{1}{\sqrt{4+\frac{10^4}{\omega^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Réponses de l'exercice E7.8 : Filtrage par un masse-ressort [**]

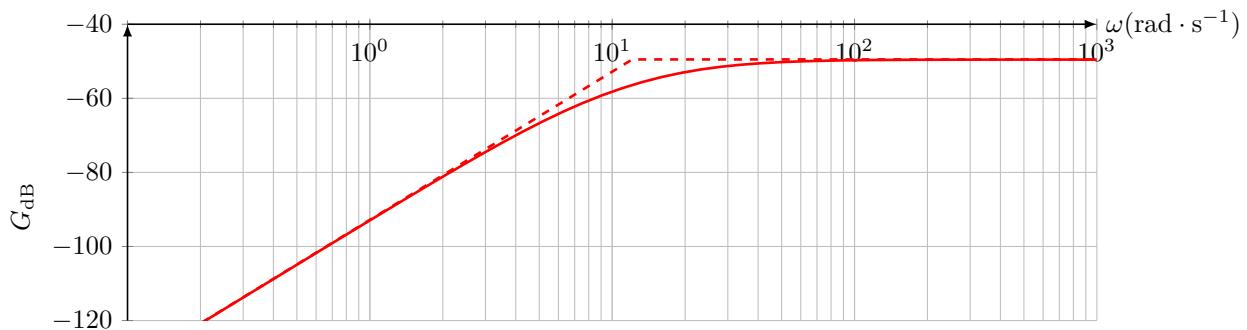
1. Pour la position : $\underline{H} = \frac{1}{k-m\omega^2+jf\omega}$



2. Pour la vitesse : $\underline{H} = \frac{j\omega}{k-m\omega^2+jf\omega} = \frac{1}{mj\omega+f-j\frac{k}{\omega}}$



3. Pour l'accélération : $\underline{H} = \frac{-\omega^2}{k-m\omega^2+jf\omega} = \frac{1}{m-j\frac{f}{\omega}-\frac{k}{\omega^2}}$



Réponses de l'exercice E7.9 : Isolation phonique [**]

1. L'amplitude du son est divisée par 250 à 250 Hz et 5000 à 1500 Hz.
2. $p = 33,4 \text{ dB/déc}$
3. 59,4 dB

Réponses de l'exercice E7.10 : Mesure de la vitesse d'éloignement des galaxie [**]

Réponses de l'exercice E7.11 : Démodulation d'amplitude [***]

1. $m(t) = KP_0(C \cos \omega_p t + S_0/2 \cos(\omega_p - \omega_s)t + S_0/2 \cos(\omega_p + \omega_s))$
2. Tableau complet (y compris questions suivantes) :

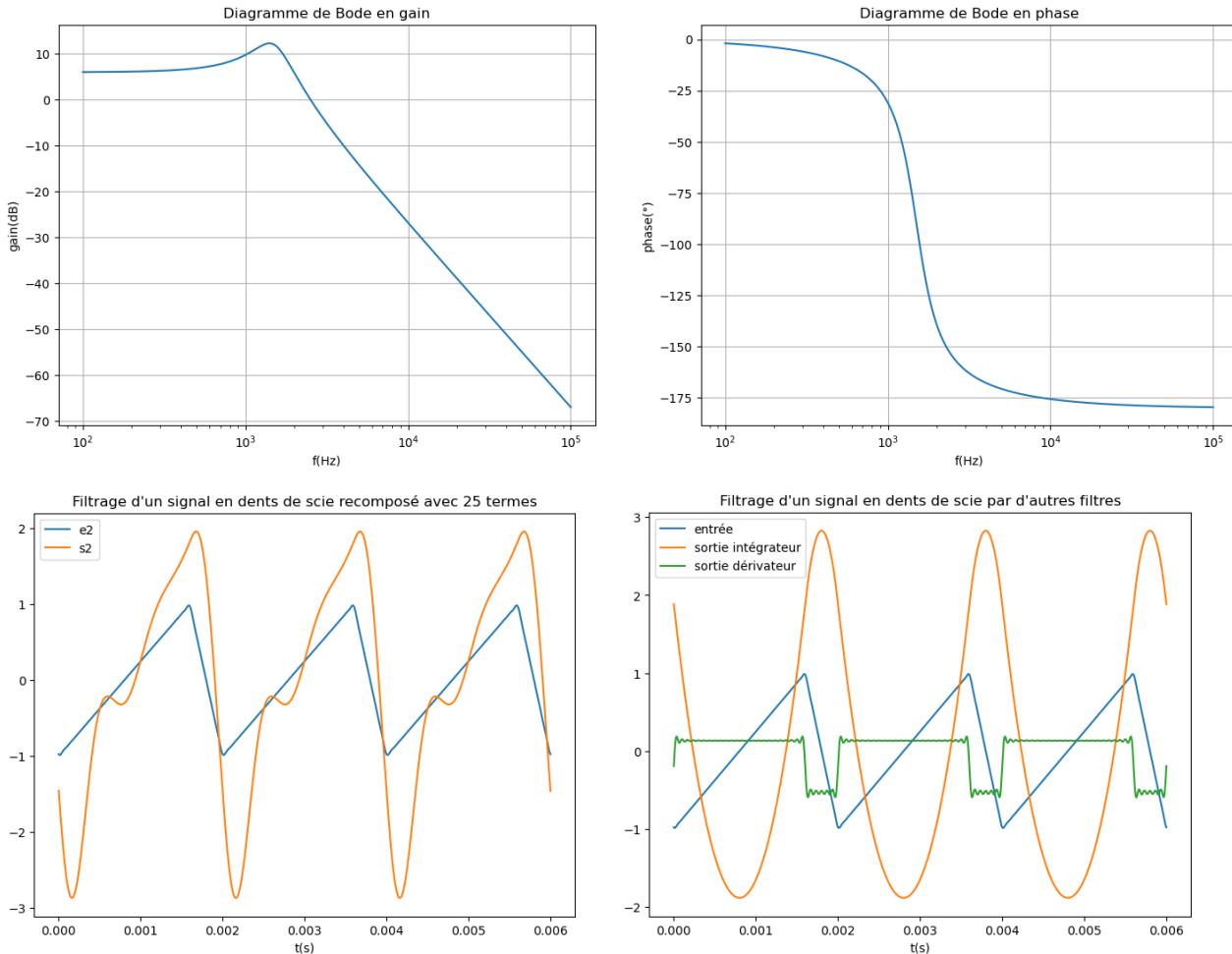
Fréquence	Amplitude dans $d(t)$	$ H $	Amplitude dans $f(t)$
0	$\frac{AC}{2}$	1	$\frac{AC}{2}$
$f_s = 4,5 \text{ kHz}$	$\frac{AS_0}{2}$	≈ 1	$\frac{AS_0}{2}$
$2f_p - f_s = 320 \text{ kHz}$	$\frac{AS_0}{4}$	8×10^{-4}	≈ 0
$2f_p = 324 \text{ kHz}$	$\frac{AC}{2}$	8×10^{-4}	≈ 0
$2f_p + f_s = 329 \text{ kHz}$	$\frac{AS_0}{4}$	7×10^{-4}	≈ 0

3. On choisit la fréquence de coupure juste au-dessus de 4,5 kHz.
4. Cf. tableau. Le signal final est donc $\frac{A}{2}(C + S_0 \cos(\omega_s t))$.
5. $\underline{H}_2(0) = 0$ et $\underline{H}_2(4500) = 1$ donc il reste $\frac{A}{2}S_0 \cos \omega_s t$ c'est-à-dire le signal initial.
6. Un signal à 5,5 kHz est multiplié par 0,76.
7. Le signal à 5,5 kHz va être multiplié par 0,1 (-20 dB) et le signal à 6 kHz par 0,01 (-40 dB) donc ce sera mieux.

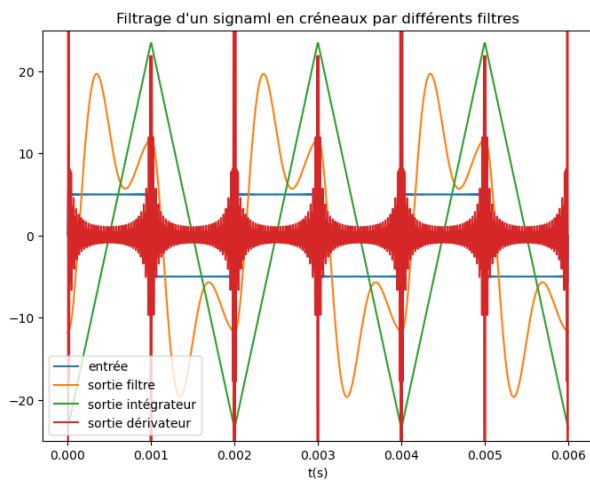
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Série de Fourier et filtrage

Le diagramme de Bode montre un filtre passe-bas d'ordre 2 avec une petite résonance :



Le filtrage de la tension en dents de scie par \underline{H} donne une courbe quelconque. Dans le cas d'un déivateur, on voit des portions à peu près constantes correspondant aux morceaux de pente constante dans l'entrée ; l'intégrateur, lui, donne des portions de paraboles.

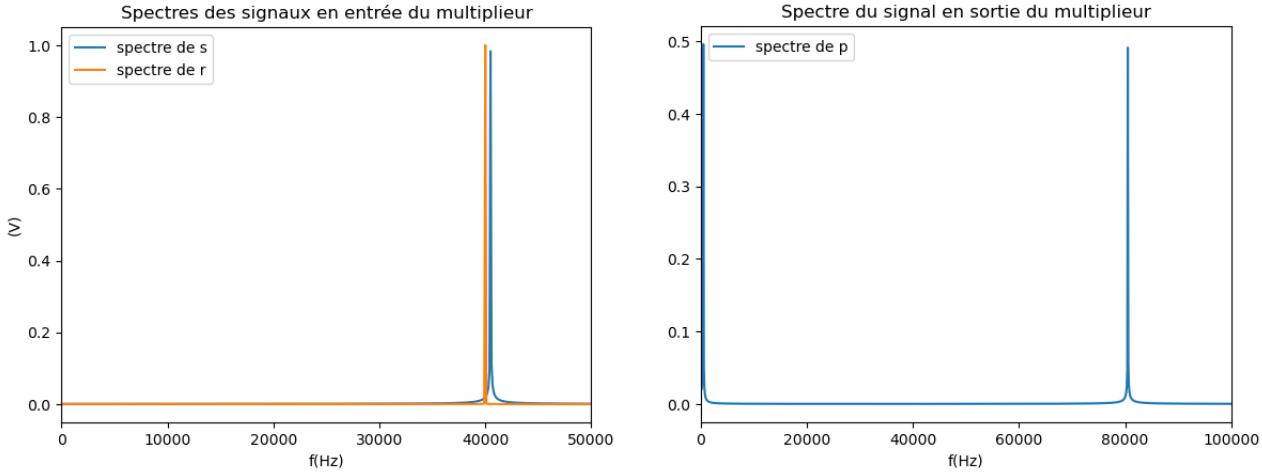


La tension en créneaux présente des discontinuités : sur de telles tensions, la décomposition en série de Fourier est peu performante (convergence simple mais non uniforme) et donne lieu à des oscillations résiduellesz. Quand on

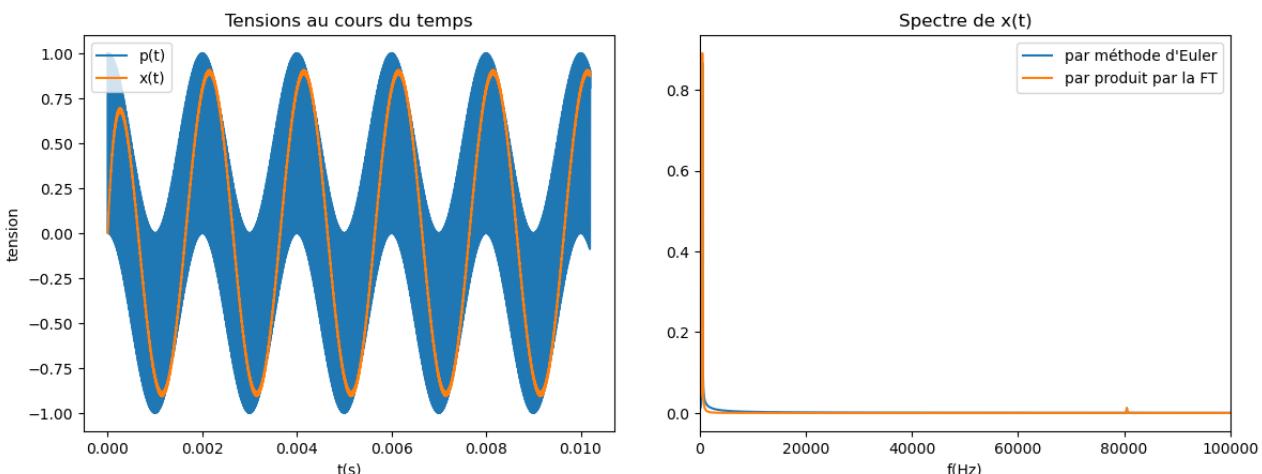
envoie cela dans un filtre intégrateur, l'intégration lisse ces oscillations ; par contre le filtre dérivateur les amplifie, et le résultat est assez peu satisfaisant.

Réponses au TD d'info : Mesure d'un effet Doppler

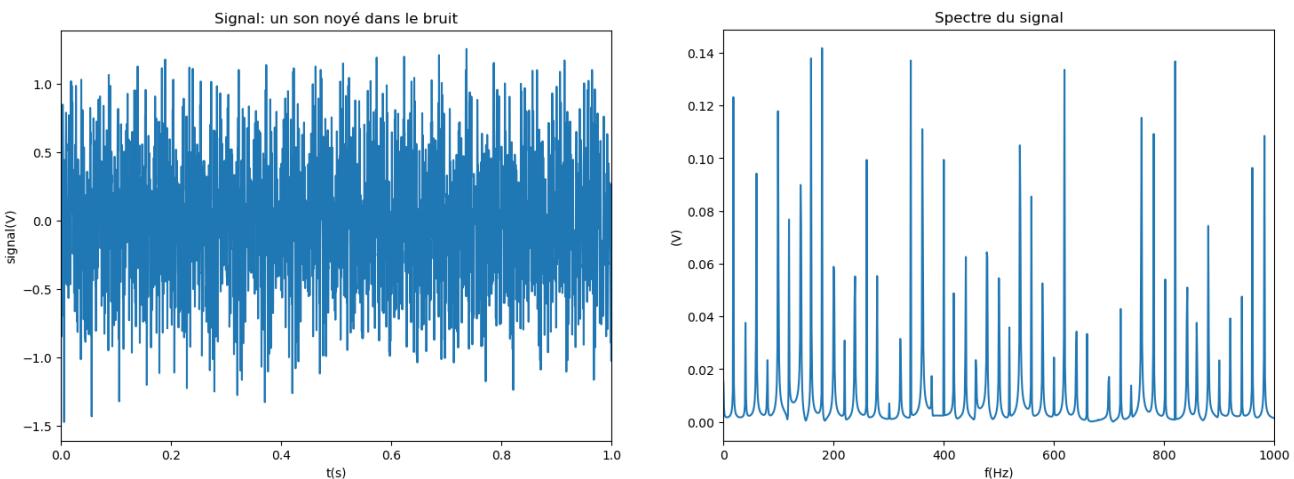
Au départ, on a les fréquences f_0 et $f_0 + Df$; après le multiplicateur on a les fréquences Df et $2f_0 + Df \approx 2f_0$.



Le filtre passe-bas ne laisse que le terme de fréquence Df , qui est la fréquence qu'on veut mesurer. La méthode par équation différentielle donne le même résultat après un transitoire d'une durée d'environ $\frac{1}{f_0} = 1 \text{ ms}$.



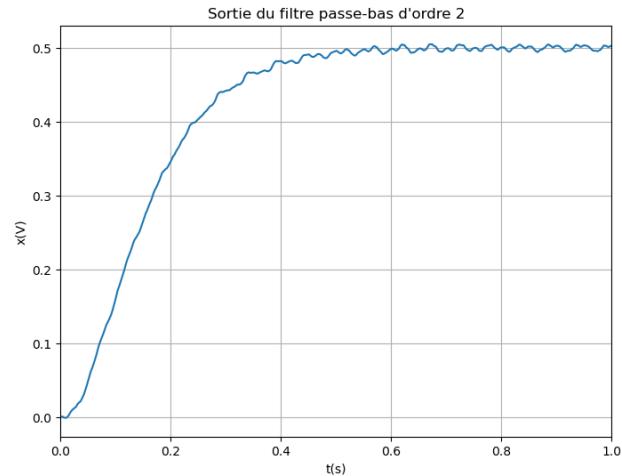
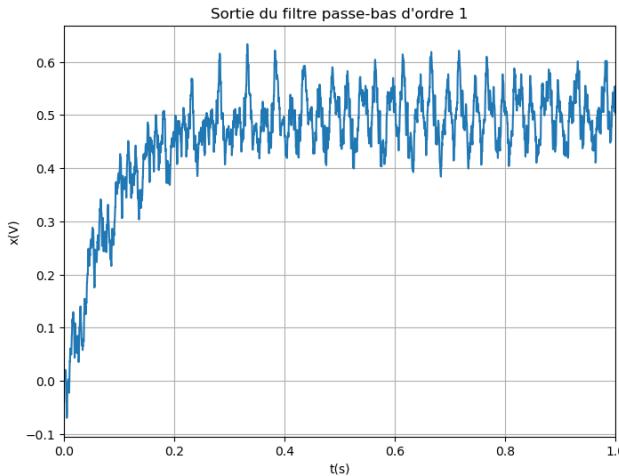
Réponses au TD d'info : Détection synchrone



Après linéarisation, $p(t) = \frac{K \cdot R_0 \cdot A}{2} + \frac{K \cdot R_0 \cdot A}{2} \cos(4\pi f_0 t) + \sum_k \frac{K \cdot R_0 \cdot B_k}{2} (\cos(2\pi(f_k + f_0)t) + \cos(2\pi(f_k - f_0)t))$

Le filtre passe-bas ne laisse idéalement que le terme constant qui vaut $\frac{K \cdot R_0 \cdot A}{2} = 5A$ ici.

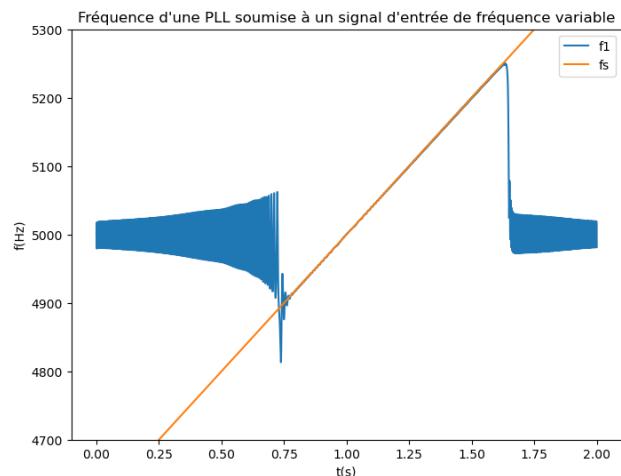
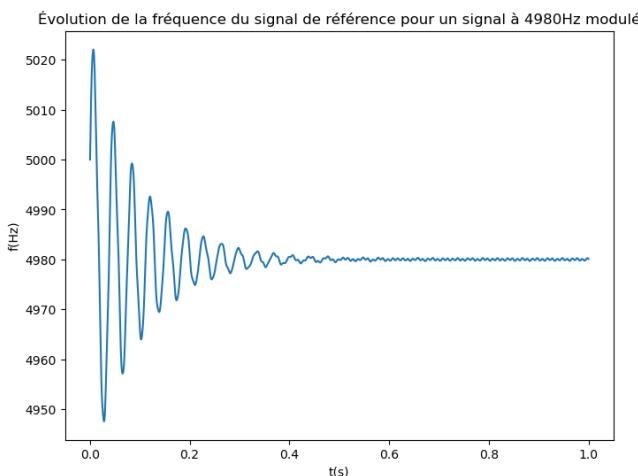
Pour le filtrage, le premier filtre réalise l'équation différentielle $\frac{1}{2\pi f_c} \dot{x} + x = 10p$ tandis que pour le second, $\frac{1}{4\pi^2 f_c^2} \ddot{x} + \frac{1}{4\pi f_c} \dot{x} + x = 10p$. Plus l'ordre est élevé, plus les oscillations résiduelles sont faibles. On pourrait aussi diminuer f_c , mais alors la durée du transitoire du filtre augmenterait.



Réponses au TD d'info : Boucle à verrouillage de phase

En régime stabilisé, $m(t) = \frac{K \cdot S_0 \cdot R_0}{2} [\cos(4\pi f_s t + \varphi) + \cos \varphi]$ donc après filtrage $e(t) = \frac{K \cdot S_0 \cdot R_0}{2} \cos \varphi$ et $f_1 = f_0 + \alpha \frac{K \cdot S_0 \cdot R_0}{2} \cos \varphi = f_s$. On en déduit que $f_s \in [f_0 - \Delta f; f_0 + \Delta f]$ avec $\Delta f = \frac{\alpha \cdot K \cdot S_0 \cdot R_0}{2}$

En régime variable, le filtre introduit l'équation $\tau \ddot{e} + e = m(t)$ ce qui donne facilement l'équation différentielle non linéaire d'ordre 2 $\tau \ddot{E} + \dot{E} = K \cdot S_0 \cdot R_0 \cdot \cos(2\pi f_s t) \cos(2\pi(f_0 + E)t)$; on la résout avec `odeint` :



Sur un signal sinusoïdal ou modulé, la PLL converge très vite vers f_s . En balayant f_s , l'accroche se fait à $4900 \text{ Hz} \approx f_0 - 0,4\Delta f$ et le décrochage à $f_0 + \Delta f$: la plage d'accroche est donc plus faible que la plage de stabilité.

Filtres électroniques

Cours

Après avoir vu de manière générale ce qu'est un filtre linéaire et comment il agit, nous allons appliquer maintenant ces connaissances aux filtres électroniques, très utiles dans une chaîne d'acquisition ou de transmission de données. On n'étudiera dans ce chapitre que des filtres en tension, mais il existe aussi des filtres en intensité.

E8.A. Étude de filtres simples

A.1. Filtre passe-bas d'ordre 1

Définition : Filtre passe-bas d'ordre 1

Un filtre passe-bas d'ordre 1 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (\text{E8.1})$$

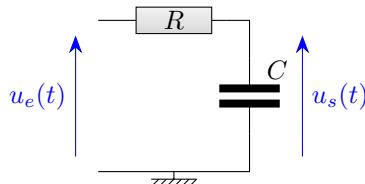
Il est utile de connaître, pour chaque type de filtre que nous allons voir, un exemple de circuit simple. Pour le passe-bas d'ordre 1, il s'agit du filtre «R-C série» qui prend u_e en entrée et donne u_s en sortie.

On va donc tracer le diagramme de Bode de ce filtre dans l'exemple ci-dessous à connaître. Mais avant de se lancer dans l'étude des asymptotes, on peut vérifier par des schémas équivalents le caractère de ce filtre. En effet, on a vu qu'en basses fréquences (BF), une bobine est équivalente à un fil et un condensateur à un interrupteur ouvert ; au contraire, en hautes fréquences (HF), la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et le condensateur à un fil.

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un filtre «RC série»

À connaître

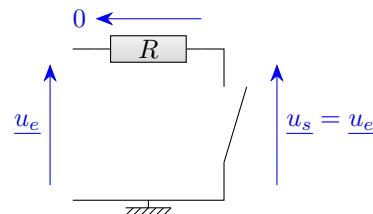
On considère le filtre suivant d'entrée u_e et de sortie u_s :



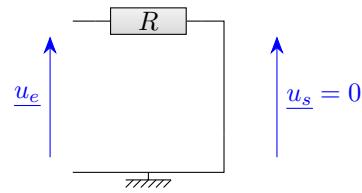
1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Tracez le diagramme de Bode.

1. On va montrer que ce filtre sera bien un passe-bas. Pour cela, on redessine le circuit en BF et en HF et utilisant les équivalents du condensateur :

En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm. La loi d'additivité des tensions indique donc que $u_s = u_e$: ce filtre laisse passer les basses fréquences.



En HF : le condensateur est équivalent à un fil ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc $\underline{u}_s = 0$: ce filtre coupe les hautes fréquences.



Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_e = \frac{1}{jRC\omega + 1} \underline{u}_e$. Donc

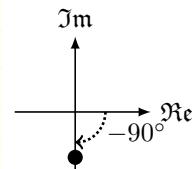
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. On part de $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$. En haut, le numérateur n'a qu'un seul terme ; en bas, on a un terme constant (ordre 0) et un terme d'ordre 1 ($j\frac{\omega}{\omega_0}$) puisque la variable est ω .

En BF : $\underline{H} \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{1} = H_0$ donc $G_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20 \log |H_0| = 20 \log H_0$ et $\phi \underset{0}{\rightarrow} 0$. ^a Donc le gain admet en BF une asymptote horizontale $G_{\text{dB}} = 20 \log H_0$, et la phase tend vers 0° .

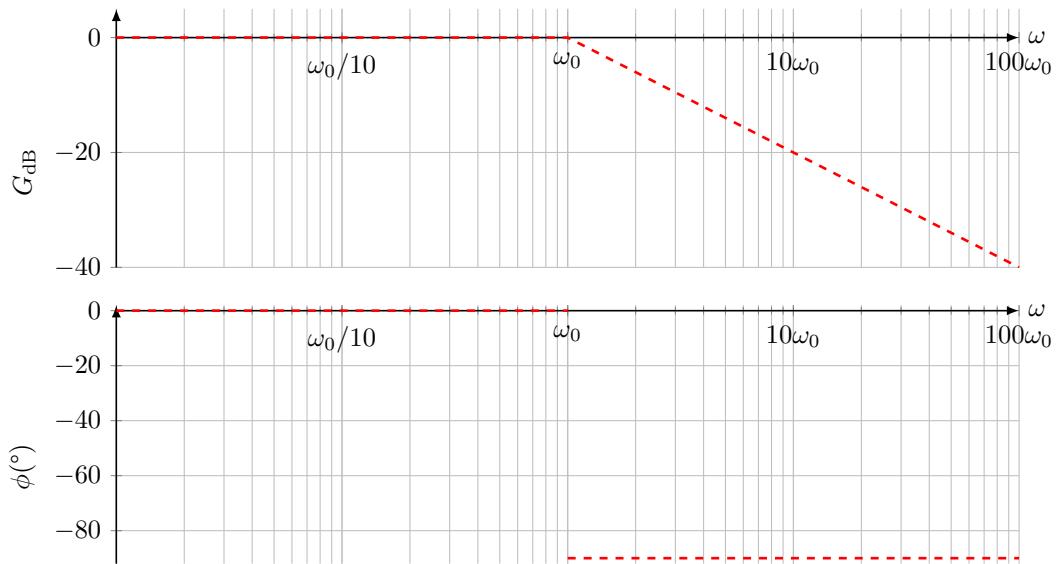
En HF : $\underline{H} \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0\omega_0}{j\omega} = -j\frac{H_0\omega_0}{\omega}$ puisque $\frac{1}{j} = -j$. Donc $G_{\text{dB}} \underset{+\infty}{\sim} 20 \log \left| -j\frac{H_0\omega_0}{\omega} \right| = 20 \log \frac{H_0\omega_0}{\omega}$; pour faire apparaître l'asymptote, on cherche une équation de type $y = a.x + b$ avec ici $y = G_{\text{dB}}$ et $x = \log \omega$ (car on trace ω en échelle logarithmique). Pour cela, on sépare le ω du reste dans la fraction : $G_{\text{dB}} \underset{+\infty}{\sim} 20 \log(H_0\omega_0) - 20 \log \omega$, ce qui donne comme asymptote une droite de pente -20 dB/déc (qu'on lit «-20 décibels par décade» ; en effet, une décade représente une multiplication par 10 de ω . Si ω est multipliée par 10, alors $\log \omega$ augmente de 1, et le gain diminue de 20 dB).

Pour ce qui est de la phase en HF, on a $\phi \underset{+\infty}{\rightarrow} \arg(-j\frac{\omega_0}{\omega})$. Il s'agit de placer dans le plan complexe un imaginaire pur de partie réelle négative ; une fois cela fait, on voit que son argument vaut -90° . Donc $\phi \underset{+\infty}{\rightarrow} -90^\circ$.



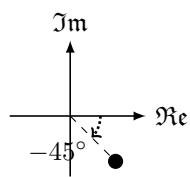
Pour terminer le tracé des asymptotes, on a l'habitude de calculer le point où elles se croisent. On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}} = 20 \log H_0$ et $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{H_0\omega_0}{\omega}$. Elles se croisent lorsque $H_0 = \frac{H_0\omega_0}{\omega}$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $20 \log H_0$.

On peut alors tracer le diagramme de Bode asymptotique (on note $G_0 = 20 \log H_0$) :

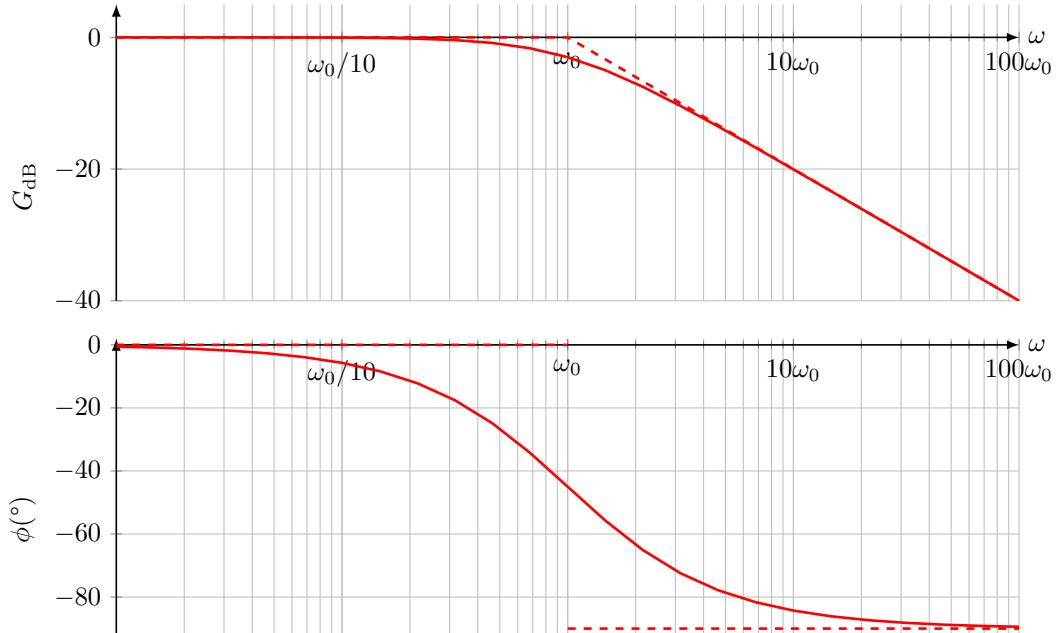


4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0 . On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1+j}$.

Le gain à cette pulsation vaut donc $20 \log \left| \frac{H_0}{1+j} \right| = 20 \log \frac{H_0}{\sqrt{1^2+1^2}} = 20 \log H_0 - 3 \text{ dB}$ et la phase vaut $\arg \frac{1}{1+j} = \arg \frac{1-j}{2} = -45^\circ$ en plaçant le point correspondant dans le plan complexe.



5. On trace alors le diagramme de Bode complet :



a. Il est incorrect en maths d'écrire ~ 0 , mais on ne vous embêtera pas avec ça si vous le faites.

Un dernier calcul qu'on peut faire, c'est celui de la bande passante à -3 dB :

Calcul : Bande passante à -3 dB

Pour cela, il faut d'abord remarquer sur le diagramme de Bode que le gain maximum est atteint en BF et vaut $20 \log H_0$, ce qui correspond à $|H|_{\max} = H_0$. La bande passante est donc constituée des pulsations telles que

$$\begin{aligned} |H| > \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} > \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_0 \end{aligned}$$

Donc la BP est $[0 : \omega_0]$; on dit parfois que ω_0 est la *pulsation de coupure*, au-delà de laquelle le filtre commence à couper les signaux.

Remarque : En HF, $H \approx \frac{H_0 \omega_0}{j\omega}$ donc $j\omega u_s = H_0 \omega_0 u_e$; or $j\omega$ correspond à la dérivation dans le domaine temporel, donc $\frac{du_s}{dt} = \omega_0 u_e$ soit $u_s(t) = \omega_0 \int u_e(t) dt$: la sortie est, à une constante près, la primitive de l'entrée. On dit que le filtre a un **caractère intégrateur** lorsqu'il est équivalent à $\frac{cst}{j\omega}$.

A.2. Filtre passe-haut d'ordre 1

Définition : Filtre passe-haut d'ordre 1

Un filtre passe-haut d'ordre 1 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

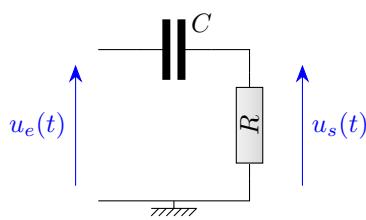
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}} = H_0 \frac{j \frac{\omega_0}{\omega}}{1 + j \frac{\omega_0}{\omega}} \quad (\text{E8.2})$$

Le circuit type est le «filtre C-R».

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un filtre «CR série»

À connaître

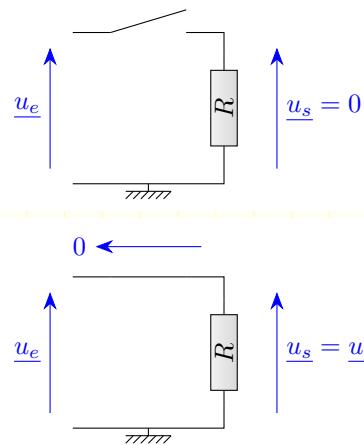
On considère le filtre suivant d'entrée u_e et de sortie u_s :



1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Tracez le diagramme de Bode.

1. On dessine des schémas équivalents :

En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm $\underline{u}_s = 0$: ce filtre coupe les basses fréquences.



En HF : le condensateur est équivalent à un fil ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc par la loi d'additivité on trouve $\underline{u}_s = \underline{u}_e$: ce filtre laisse passer les hautes fréquences.

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-haut.

2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_e = \frac{1}{1 - j \frac{1}{RC\omega}} \underline{u}_e$. Donc

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - j \frac{1}{RC\omega}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}} \text{ avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. On part de $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$. Il faut bien faire attention au dénominateur : le terme 1 est d'ordre 0, le terme $-j \frac{\omega_0}{\omega}$ est d'ordre -1 (car c'est du ω^{-1}). Donc le terme constant est celui de plus haut degré.

En BF : $\underline{H} \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{-j \frac{\omega_0}{\omega}} = j \frac{H_0 \omega}{\omega_0}$ donc $G_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20 \log \left| j \frac{H_0 \omega}{\omega_0} \right| = 20 \log \frac{H_0 \omega}{\omega_0} = 20 \log \omega + 20 \log \frac{H_0}{\omega_0}$: le gain admet en BF une asymptote de pente +20 dB/déc ; et $\phi \underset{0}{\sim} \arg \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$; or $j \frac{\omega}{\omega_0}$ est un imaginaire pur de partie

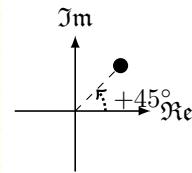
imaginaire positive, d'argument $+90^\circ$, donc $\phi \xrightarrow{0} +90^\circ$.

En HF : $\underline{H} \sim \frac{H_0}{1} = 20 \log H_0$. Donc $G_{\text{dB}} \sim 20 \log H_0$ et $\phi \xrightarrow{0} \arg 1 = 0^\circ$.

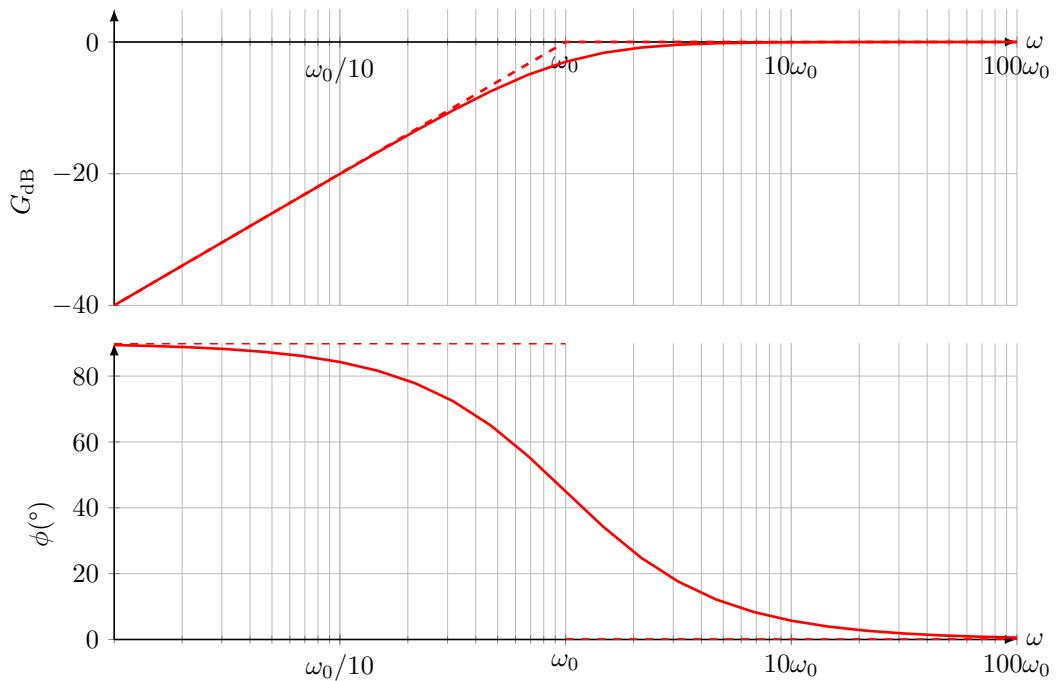
On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{H_0 \omega}{\omega_0}$ et $G_{\text{dB}} = 20 \log H_0$. Elles se croisent lorsque $\frac{H_0 \omega}{\omega_0} = H_0$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $20 \log H_0$.

4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0 . On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1-j}$.

Le gain à cette pulsation vaut donc $20 \log \left| \frac{H_0}{1-j} \right| = 20 \log \frac{H_0}{\sqrt{1^2+1^2}} = 20 \log H_0 - 3 \text{ dB}$ et la phase vaut $\arg \frac{1}{1-j} = \arg \frac{1+j}{2} = +45^\circ$ en plaçant le point correspondant dans le plan complexe.



5. On pose $G_0 = 20 \log H_0$:



Calcul : Bande passante à -3 dB

On remarque sur le diagramme de Bode que le gain maximum est atteint en HF et vaut $20 \log H_0$, ce qui correspond à $|\underline{H}|_{\max} = H_0$. La bande passante est donc constituée des pulsations telles que

$$\begin{aligned} |\underline{H}| > \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} > \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \omega > \omega_0 \end{aligned}$$

Donc la BP est $[\omega_0 : +\infty]$

Remarque : En BF, $\underline{H} \approx \frac{j H_0 \omega}{\omega_0}$ donc $\underline{u}_s = j \frac{H_0}{\omega_0} \omega \underline{u}_e$; or $j\omega$ correspond à la dérivation dans le domaine temporel, donc $\underline{u}_s = \frac{H_0}{\omega_0} \frac{d \underline{u}_e}{dt}$: la sortie est, à une constante près, la dérivée de l'entrée. On dit que le filtre a un **caractère dérivateur** lorsqu'il est équivalent à $cst.j\omega$.

A.3. Filtre passe-bas d'ordre 2

Les deux filtres d'ordre 1 étudiés ont montré des comportements assez semblables, avec des courbes symétriques. Nous allons maintenant étudier rapidement un filtre d'ordre 2.

Remarque : Les formes canoniques des filtres d'ordre 2 ne sont pas à connaître, elles seront redonnées dans les exercices.

Le circuit type est le filtre RLC dont la tension de sortie est prise aux bornes de C, mais on a vu aussi l'OH pour lequel la position correspond à un filtre passe-bas d'ordre 2.

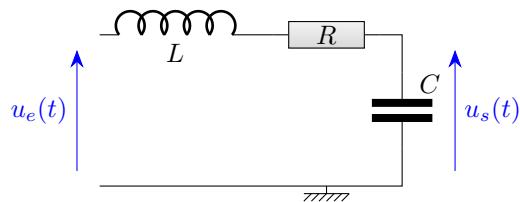
Définition : Filtre passe-bas d'ordre 2

Un filtre passe-bas d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (\text{E8.3})$$

Exemple : Tracé du diagramme de Bode d'un RLC aux bornes de C

On considère le circuit suivant de tension d'entrée u_e et de tension de sortie u_s :



1. Déterminez le type de ce filtre à l'aide de schémas équivalents.
2. Calculez la fonction de transfert. Mettez-la sous forme canonique.
3. Déterminez donc les asymptotes du gain et de la phase de ce filtre.
Calculez les coordonnées du point d'intersection des asymptotes.
4. Calculez la phase et le gain exacts à la pulsation d'intersection des asymptotes.
5. Montrez que ce filtre ne possède une résonance que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
6. Tracez le diagramme de Bode pour $Q = 0,1$ et $Q = 3$.

1. On dessine des schémas équivalents :

En BF : le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. Aucun courant ne traverse donc le circuit, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle d'après la loi d'Ohm. Par la loi d'additivité des tensions $u_s = u_e$: ce filtre laisse passer les basses fréquences.

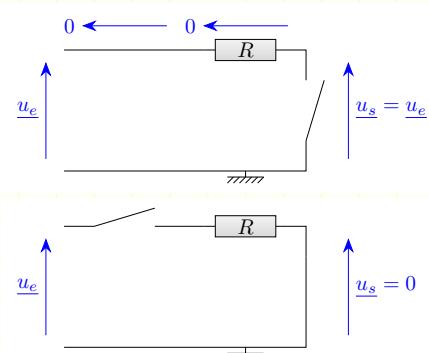
En HF : le condensateur est équivalent à un fil et la bobine à un interrupteur ouvert ; la tension aux bornes d'un fil est nulle, donc $u_s = 0$: ce filtre coupe les hautes fréquences.

Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

2. Par le pont diviseur de tension : $\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} \underline{u}_e = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} \underline{u}_e$. Pour identifier avec la forme canonique, il faut écrire $RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0}$ et $LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. On en déduit que

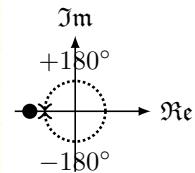
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{avec } H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

3. En BF : $\underline{H} \underset{0}{\sim} \frac{H_0}{1} = \text{donc } G_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20 \log H_0$: le gain admet en BF une asymptote horizontale ; et $\phi \underset{0}{\sim}$



$\arg 1 = 0^\circ$.

En HF : $\underline{H} \underset{+\infty}{\sim} \frac{H_0}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}$. Donc $G_{\text{dB}} \underset{+\infty}{\sim} 20 \log \frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2} = 20 \log(H_0\omega_0^2) - 40 \log \omega$ donc le gain admet en HF une asymptote de pente -40 dB/déc ; et $\phi \underset{0}{\rightarrow} \arg -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \pm 180^\circ$. ^a



On a deux asymptotes d'équation $G_{\text{dB}} = 20 \log H_0$ et $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2}$. Elles se croisent lorsque $\frac{H_0\omega_0^2}{\omega^2} = H_0$ soit à l'abscisse $\omega = \omega_0$. Pour cette abscisse-là, on peut calculer l'ordonnée des asymptotes : $20 \log H_0$.

4. On a vu que les asymptotes se croisent pour ω_0 . On calcule la véritable FT en ce point : $\underline{H}(\omega_0) = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q} - 1} = -jH_0Q$.

Le gain à cette pulsation vaut donc $20 \log |jH_0Q| = 20 \log(H_0Q)$ et la phase vaut $\arg(-jQ) = -90^\circ$.

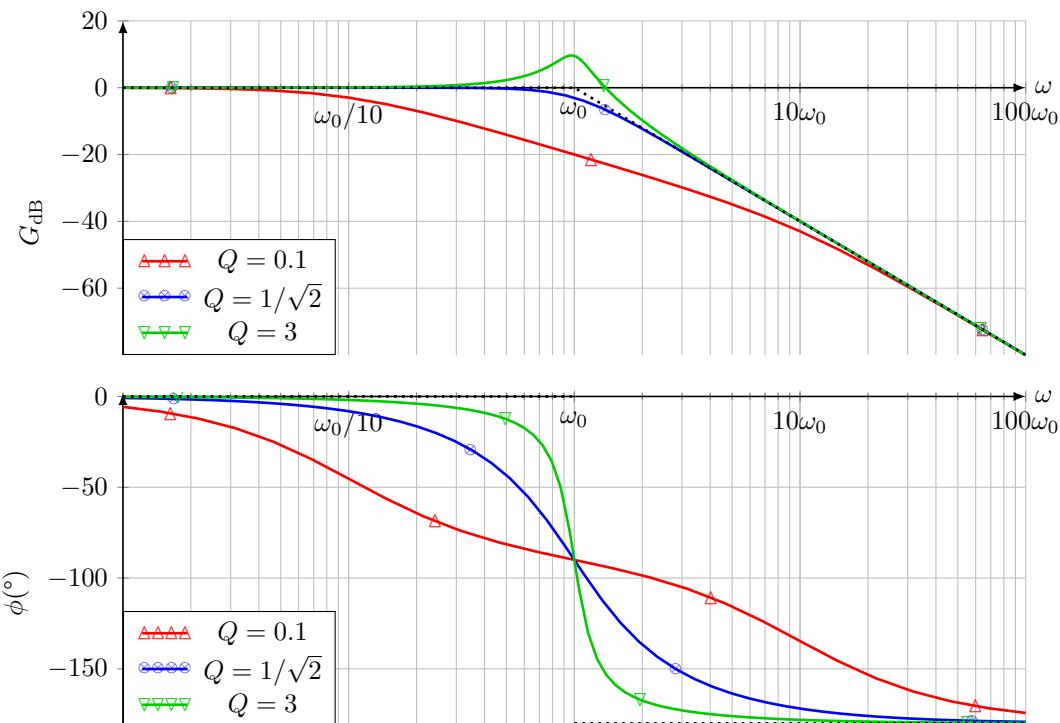
On voit que la valeur du gain au centre va dépendre de la valeur du facteur de qualité ; elle sera supérieure à $20 \log H_0$ si $Q > 1$ et inférieure si $Q < 1$.

5. Le gain passe par un maximum si $|H| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$ passe par un maximum, donc si $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ passe par un minimum. Pour savoir cela, on dérive :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \right] &= 0 \Leftrightarrow 2 \left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\omega}{\omega_0^2} \left[-2 + 2\omega^2 + \frac{1}{Q^2} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ou } \omega^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{aligned}$$

La seconde équation n'a de solution que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ donc $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est la condition de résonance.

6. On trace alors le diagramme de Bode complet pour différentes valeurs de Q :



a. À ce moment-là de l'étude, on ne peut pas choisir le signe. On le choisira plus tard par continuité, lorsqu'on aura trouvé une valeur intermédiaire de la phase.

On voit que la condition d'existence d'un maximum ($Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$) est légèrement différente de la condition pour que la courbe passe au-dessus du point d'intersection des asymptotes ($Q > 1$). Dans l'intervalle $\frac{1}{\sqrt{2}} < Q < 1$, le comportement est celui-ci : la courbe a un maximum bien avant ω_0 , puis plonge avant ω_0 sous l'asymptote $G_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$. C'est un cas très rare.

Remarque : Le calcul de la bande passante à -3 dB est compliqué. On peut montrer que, si $Q \gg 1$, alors la largeur de la BP vaut $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

A.4. Filtre passe-haut d'ordre 2

En prenant la tension de sortie aux bornes de la bobine d'un RLC série, on obtient un filtre d'ordre 2. On va donner ici uniquement les résultats généraux.

Définition : Filtre passe-haut d'ordre 2

Un filtre passe-haut d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{Q\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \quad (\text{E8.4})$$

Calcul : Diagramme de Bode

Résultats rapides sans calculs :

En BF, $\underline{H}_0 \sim -\frac{H_0\omega^2}{\omega_0^2}$ donc le gain a une asymptote de pente $+40 \text{ dB/déc}$ et la phase tend vers $\pm 180^\circ$.

En HF, $\underline{H}_\infty \sim H_0$ donc le gain a une asymptote horizontale $G_{\text{dB}} = 0$ et la phase tend vers 0° .

Les asymptotes se coupent en $(\omega_0; 0)$. À cette pulsation-là, le vrai gain vaut $20 \log Q$ et la phase vaut $+90^\circ$. Il existe une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On trace alors le diagramme de Bode complet (figure E8.1) pour différentes valeurs de Q :

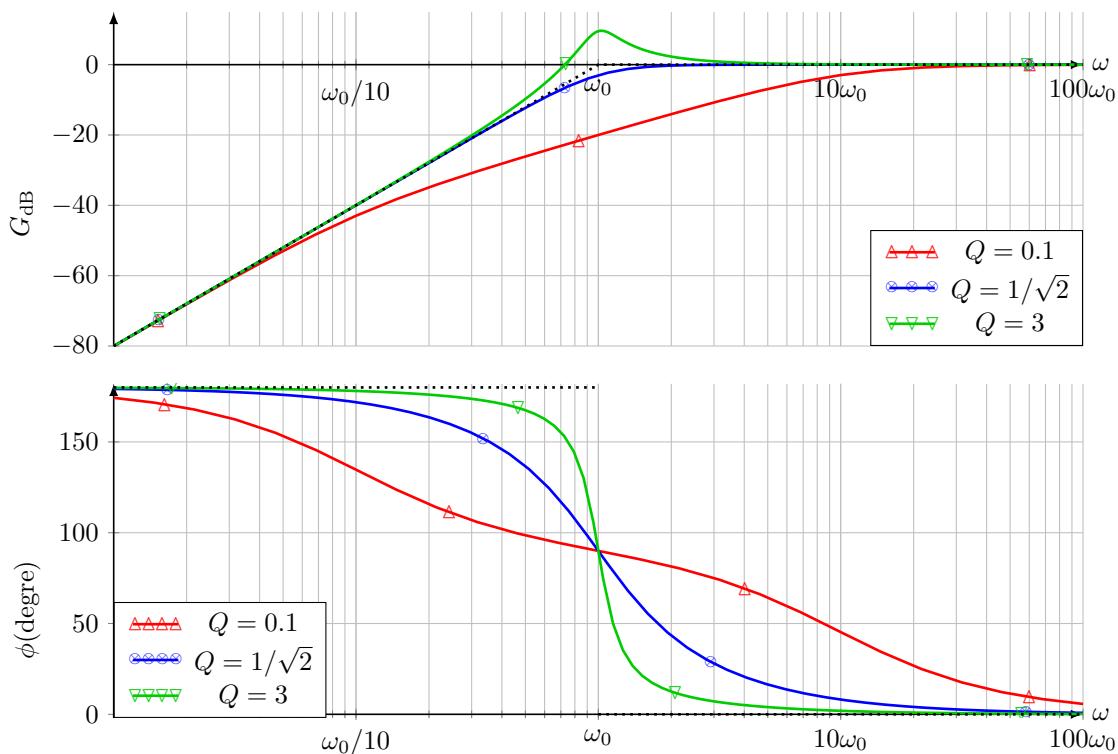


FIGURE E8.1 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-haut d'ordre 2.

A.5. Filtre passe-bande d'ordre 2

En prenant la tension de sortie aux bornes de la résistance d'un RLC série, on obtient un filtre passe-bande d'ordre 2.

Définition : Filtre passe-bande d'ordre 2

Un filtre passe-bande d'ordre 2 a une fonction de transfert qui peut se mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (\text{E8.5})$$

Calcul : Diagramme de Bode

Résultats rapides sans calculs :

En BF, $\underline{H}_0 \sim \frac{jH_0\omega}{\omega_0}$ donc le gain a une asymptote de pente +20 dB/déc et la phase tend vers $+90^\circ$.

En HF, $\underline{H}_0 \sim \frac{-jH_0\omega_0}{\omega}$ donc le gain a une asymptote de pente -20 dB/déc et la phase tend vers -90° .

Les asymptotes se coupent en $(\omega_0; -20 \log Q)$. À cette pulsation-là, le vrai gain vaut 0 dB et la phase vaut 0° . Il existe toujours une résonance.

On trace alors le diagramme de Bode complet (figure E8.2) pour différentes valeurs de Q :

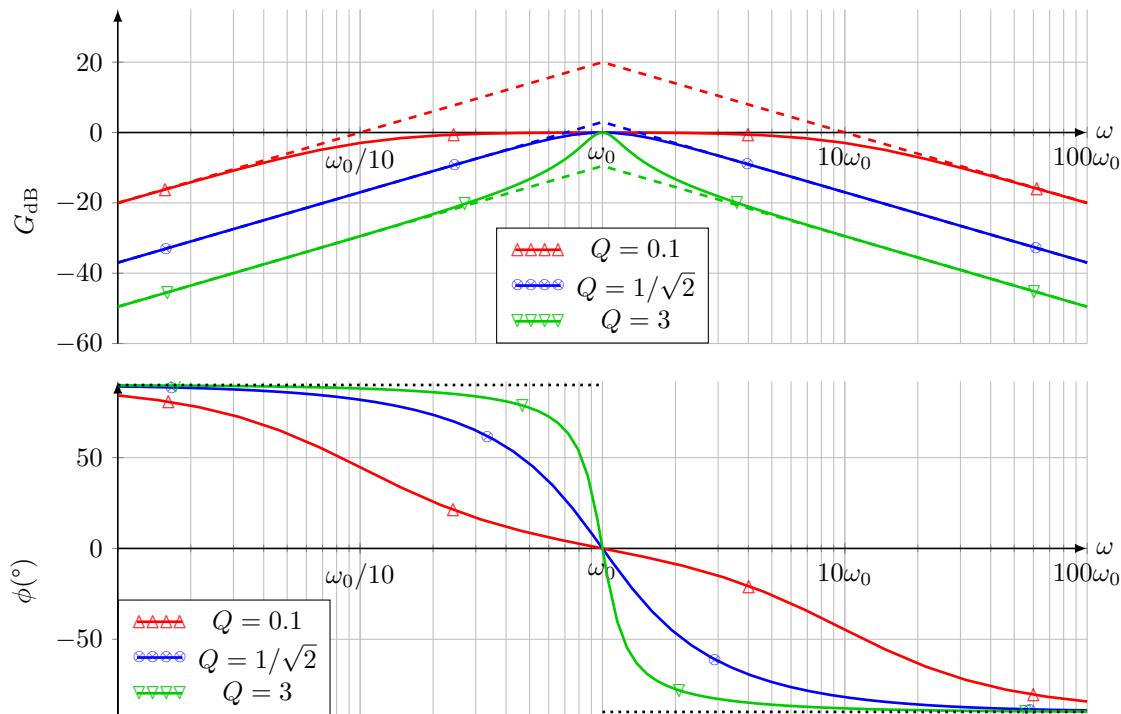


FIGURE E8.2 – Diagramme de Bode d'un filtre passe-bande d'ordre 2.

E8.B. Filtres en cascade

Nous avons étudié les filtres essentiels, d'ordre 1 et 2. Que se passe-t-il si on met ces filtres en cascade ? A priori, leurs fonctions de transfert vont se multiplier, permettant de réaliser des filtres d'ordre plus élevé. En réalité, c'est le cas, mais à un détail près très important : les filtres peuvent se perturber l'un l'autre, et changer la fonction de transfert l'un de l'autre.

Prenons l'exemple de la figure E8.3. À gauche, on reconnaît un simple filtre RC de fonction de transfert $\underline{H}_1 = \frac{1}{1+jRC\omega}$. À droite on place deux filtres RC en cascade, c'est-à-dire que le premier filtre a pour entrée u_e et pour sortie u_i , qui devient l'entrée du second filtre, qui en donne une sortie u_s . On pourrait alors penser que la fonction de transfert de ce «double RC » vaudra $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_1 = \frac{1}{(1+jRC\omega)^2} = \frac{1}{1+2jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$.

Calcul : Fonction de transfert du filtre «double RC»

Calculons la vraie FT $H_2 = \frac{u_s}{u_e}$ pour voir. Le calcul est un peu compliqué, mais il faut d'abord appliquer le théorème de Millman au nœud A pour obtenir $\underline{u}_i = \underline{v}_A = \frac{\frac{\underline{u}_e}{R} + \frac{\underline{u}_s}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{\underline{u}_e + \underline{u}_s}{2 + jRC\omega}$. Ensuite, par le pont diviseur de tension, $\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{jC\omega} + R}{\frac{1}{jC\omega} + R + \underline{R}} \underline{u}_i = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{u}_i$. En combinant les deux équations, après quelques calculs on trouve $H_2 = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$.

On voit alors que H_2 vaut presque $H_1 \cdot H_1$...presque, mais pas exactement, il y a un 3 à la place d'un 2. Pourtant, on a vu que les FT de filtres en cascade se multiplient. La seule explication, c'est qu'en mettant les deux filtres l'un à côté de l'autre, leurs fonctions de transfert ont été modifiées.

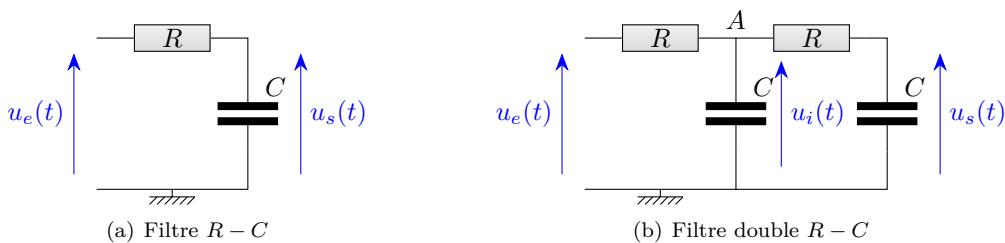


FIGURE E8.3 – Filtre RC et double RC.

Pour comprendre ce qui se passe, il faut étudier de façon un peu plus complète le fonctionnement d'un filtre.

Définition : Quadripôle

Un quadripôle est une portion de circuit reliée au reste par 4 bornes. On distingue 2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie et on place (figure E8.4) :

- le courant d'entrée i_e et la tension d'entrée u_e
- le courant de sortie i_s et la tension de sortie u_s

Remarque : Souvent, la masse est une borne commune à l'entrée et à la sortie.

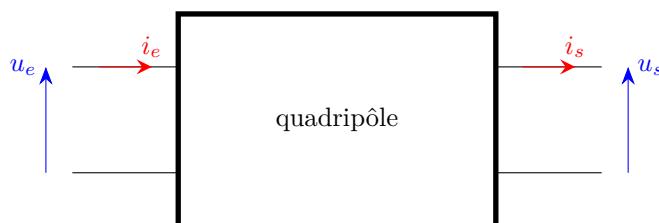


FIGURE E8.4 – Schéma général d'un quadripôle.

Définition : Quadripôle linéaire

Un quadripôle est linéaire s'il existe des relations linéaires entre i_e , i_s , u_e et u_s .
Un filtre linéaire est un quadripôle linéaire.

Définition : Impédance d'entrée

L'entrée d'un quadripôle linéaire vérifie la relation $\underline{u}_e = \underline{Z}_e \cdot \underline{i}_e$ où \underline{Z}_e représente l'impédance d'entrée du quadripôle.

Autrement dit, un quadripôle est vu, du côté de l'entrée, comme une simple impédance. Par exemple, quand on branche un voltmètre dans un circuit, tout se passe comme si ce voltmètre se comportait comme une forte résistance ; or, en fait, les deux bornes du voltmètre qu'on branche ne sont que les deux bornes d'entrée d'un quadripôle — un convertisseur analogique-numérique, qui va mesurer la tension d'entrée.

Remarque : Parfois, la relation en entrée est affine : $\underline{u}_e = \underline{Z}_e \cdot \underline{i}_e - \underline{u}_{Oe}$ où \underline{u}_{Oe} s'appelle la force contre-électromotrice. On ne verra pas de tels cas.

Définition : Impédance et fem de sortie

La sortie d'un quadripôle linéaire vérifie la relation $\underline{u}_s = \underline{u}_{0s} - \underline{Z}_s \cdot \underline{i}_s$ avec \underline{u}_{0s} la fem de sortie et \underline{Z}_s l'impédance de sortie du quadripôle.

Par exemple, un générateur GBF est un quadripôle : son entrée, c'est la prise électrique qu'on branche ; la sortie, ce sont les deux bornes qu'on branche, et qu'on modélise habituellement par un générateur de Thévenin.

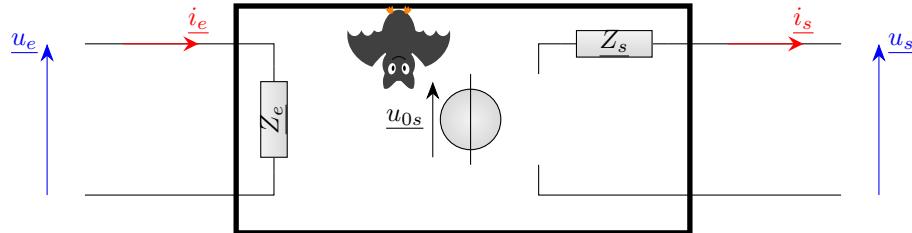


FIGURE E8.5 – Schéma équivalent d'un quadripôle linéaire.

Regardons alors ce qui se passe si on met en cascade deux filtres linéaires. Avec les notations de la figure E8.6, on voit au milieu apparaître un circuit avec un générateur de fem \underline{u}_{s01} et deux impédances \underline{Z}_{s1} et \underline{Z}_{e2} en série. Par le pont diviseur de tension, on peut calculer la tension de sortie du premier quadripôle :

$$\underline{u}_{s1} = \underline{u}_{0s1} \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} = \underline{u}_{0s1} \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}}}$$

On voit que, en l'absence d'un second filtre, on a $\underline{Z}_{e2} = \infty$ et $\underline{u}_{s1} = \underline{u}_{0s1}$; si on met un second filtre, la tension de sortie du premier sera peu modifiée si $\left| \frac{\underline{Z}_{s1}}{\underline{Z}_{e2}} \right| \ll 1$, c'est-à-dire si $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$.

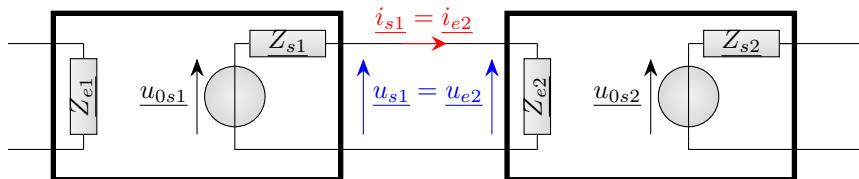


FIGURE E8.6 – Quadripôles en cascade.

Propriété : Influences des filtres

Un filtre 2 n'a pas d'influence sur la FT du filtre 1 placé avant lui si $|\underline{Z}_{e2}| \gg |\underline{Z}_{s1}|$

Propriété : Filtre idéal

Un filtre idéal présente une impédance d'entrée très grande et une impédance de sortie très faible.

Un tel filtre idéal ne perturbera pas un filtre placé avant lui, et ne sera pas perturbé par un filtre placé après lui. Mais les filtres passifs, c'est-à-dire constitués de composants passifs, n'ont jamais cette propriété. Il faut alors se tourner vers des filtres actifs.

E8.C. Filtres actifs avec AOp

C.1. Rappels sur le composant

Propriété : AOp en régime linéaire

Lorsque le circuit dans lequel est placé l'AOp permet un *rebouclage sur l'entrée inverseuse*, l'AOp essaye de fonctionner en *régime linéaire*; l'AOp idéal a alors les propriétés suivantes :

- Les courants de polarisation sont nuls : $i^+ = i^- = 0 \text{ A}$
- La tension différentielle est nulle : $\varepsilon = 0 \text{ V}$ donc $v^+ = v^-$
- La tension de sortie ne doit pas dépasser V_{sat} en valeur absolue : $|v_s| < V_{sat}$

L'AOp possède cependant des limitations, entre autres, le courant fourni par sa sortie est limité à quelques dizaines de mA, et son comportement change en très hautes fréquences.

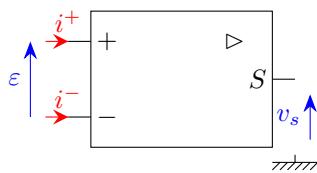


FIGURE E8.7 – Schéma d'un AOp

C.2. Montages fondamentaux

On a déjà vu trois circuits fondamentaux : le suiveur, l'amplificateur inverseur et l'amplificateur non inverseur :

- le montage suiveur (figure E8.8) a pour fonction de transfert $H = 1$; son rôle est de séparer deux filtres passifs en cascade. En effet, il est facile de voir que l'intensité d'entrée est nulle, donc l'impédance d'entrée est quasiment infinie; et l'impédance de sortie d'un AOp est très faible.
- le montage amplificateur inverseur a pour fonction de transfert $H = -\frac{R_2}{R_1}$; son impédance d'entrée est grande mais pas infinie; son impédance de sortie est quasiment nulle.
- le montage amplificateur non inverseur a pour fonction de transfert $H = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$; son impédance d'entrée quasiment infinie; son impédance de sortie est quasiment nulle.

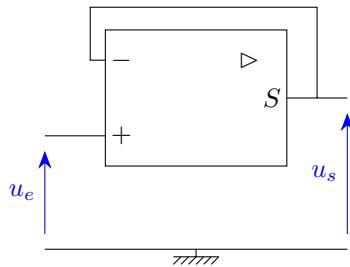


FIGURE E8.8 – Montage suiveur.

Il existe deux autres montages fondamentaux : le déivateur et l'intégrateur (figure E8.9).

Calcul : FT du montage déivateur

Par linéarité de l'AOp : $v_- = v_+$ donc $v_A = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $v_A = \frac{u_e j C \omega + \frac{u_s}{R}}{j C \omega + \frac{1}{R}}$ d'où on tire $u_e j C \omega + \frac{u_s}{R} = 0$ donc $u_s = -j R C \omega u_e$ donc $H = -j R C \omega$

Calcul : FT du montage intégrateur

Par linéarité de l'AOp : $v_- = v_+$ donc $v_A = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $v_A = \frac{\frac{u_e}{R} + u_s j C \omega}{j C \omega + \frac{1}{R}}$ d'où on tire $u_s j C \omega + \frac{u_e}{R} = 0$ donc $u_s = -\frac{1}{j R C \omega} u_e$ donc $H = -\frac{1}{j R C \omega}$

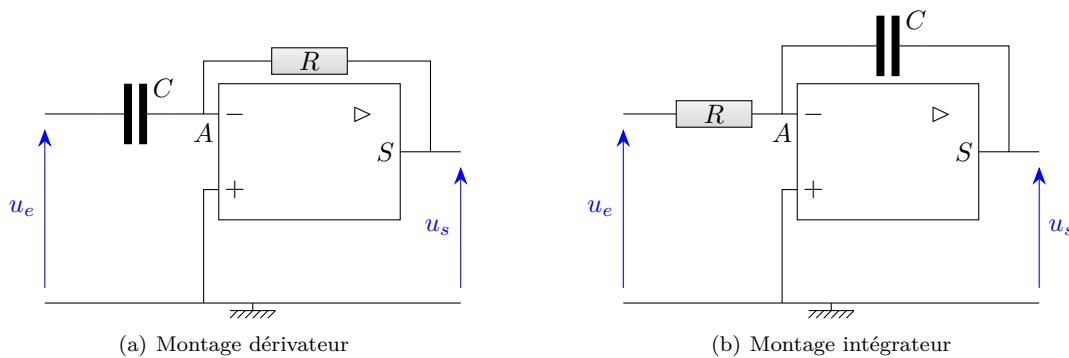


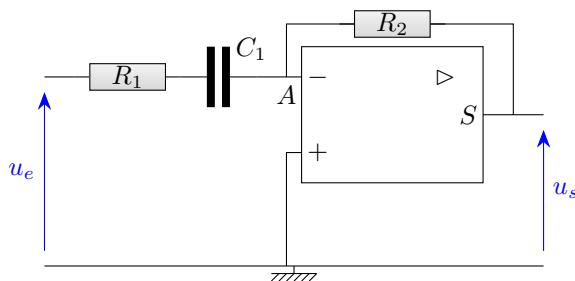
FIGURE E8.9 – Montages déivateur et intégrateur.

C.3. Filtres actifs

Les montages précédents ne sont que des cas particuliers de filtres qu'on peut fabriquer avec un AOp. Cette famille de filtre s'appelle les *filtres actifs*. Ils n'ont pas tous une impédance d'entrée infinie, mais ont tous une impédance de sortie très faible.

Exemple : Filtre actif

Calculez la FT du filtre suivant :



et mettez-la sous forme canonique.

Par linéarité de l'AOp : $v_- = v_+$ donc $v_A = 0$. Or d'après le théorème de Millman : $v_A = \frac{\frac{u_e}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} + \frac{u_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} + \frac{1}{R_2}}$ d'où
 on tire $\frac{u_e}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} + \frac{u_s}{R_2} = 0$ donc $H = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{-\frac{R_2}{1-j\frac{1}{R_1C_1\omega}}}{1-j\frac{1}{R_1C_1\omega}}$: c'est un passe-haut d'ordre 1, avec $H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$ et
 $\omega_0 = \frac{1}{R_1C_1}$

Les filtres actifs sont essentiels en électronique ; ce sont ceux qui sont le plus utilisés. Aujourd’hui, ces filtres sont intégrés dans des puces électroniques ; on trouve facilement des filtres actifs d’ordre 6, 8 ou 10 qu’on a juste à brancher. Néanmoins, il faut faire attention aux limitations (courant de sortie limité, fréquence maximale au-delà de laquelle le comportement du filtre se détériore....Il existe tout type de filtres pour toute sorte d’applications.

De plus, nous nous sommes limités dans ce cours aux filtres analogiques ; les signaux numériques, que manipulent les ordinateurs ou les cartes d'acquisition, peuvent eux aussi être filtrés par des filtres numériques, dont le comportement est assez différent des filtres analogiques.

E8.D. Annexe : Bande passante et temps de réponse d'un filtre

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'aspect fréquentiel de la réponse d'un filtre : on met en entrée un signal sinusoïdal, et on observe la sortie. On peut définir une bande passante de largeur $\Delta\omega$: plus un filtre sélectionne une bande étroite de fréquences, plus sa bande passante est étroite.

Mais la fonction de transfert d'un filtre traduit en réalité une équation différentielle. La fonction de transfert permet d'obtenir le régime permanent de cette équation différentielle, mais il y a aussi un régime transitoire, caractérisé par

un temps τ tel que, au bout de quelques τ (le temps de réponse), le régime transitoire est établi et le régime permanent reste seul.

En réalité, ces deux caractéristiques d'un filtre sont reliées par une formule magique, due à une théorie mathématique derrière tout cela : la théorie de la transformée de Fourier. Observons seulement deux exemples pour observer cette relation.

Prenons un simple filtre d'ordre 1 passe-bas : le RC série. Son temps de réponse est $\tau = RC$, tandis que la largeur de sa bande passante est $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$: cf. figure E8.10.

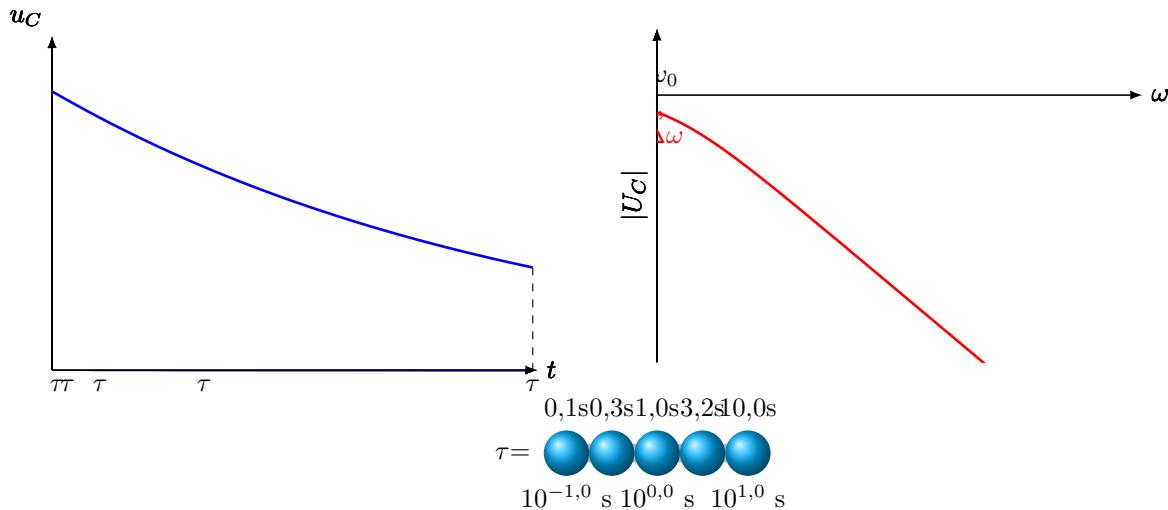


FIGURE E8.10 – Tension aux bornes du condensateur du RC en régime libre et forcé.

Si on considère maintenant un circuit RLC pris aux bornes de C , l'allure des courbes tant fréquentielles que temporelles dépend non seulement de ω_0 , mais aussi du facteur de qualité Q . Les relations générales sont complexes, mais les cas limites sont faciles à étudier (cf. figure E8.11) :

- si $Q \gg 1$ alors la largeur de la bande passante vaut environ $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ tandis que, en régime transitoire, le système effectue environ $N = Q$ oscillations de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$ donc le temps de réponse vaut environ $\frac{2\pi Q}{\omega_0}$
- si $Q \ll 1$ alors le passe-bas n'a pas de résonance ; on calcul de bande passante montre que celle-ci s'étend de 0 à environ $Q\omega_0$, soit $\Delta\omega = Q\omega_0$, tandis que le régime transitoire possède deux exponentielles dont la plus lente s'atténue en un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{Q\omega_0}$

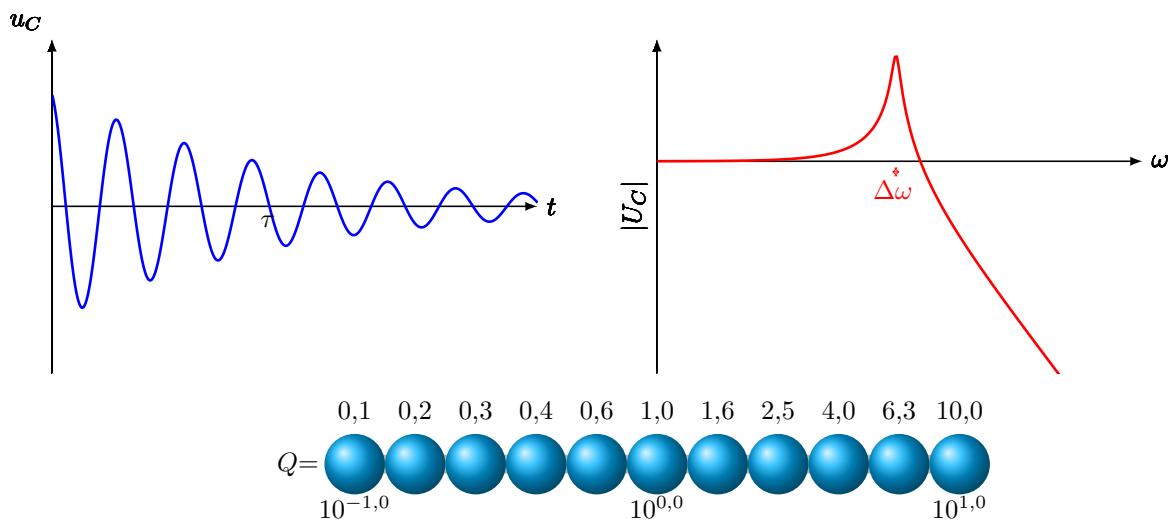


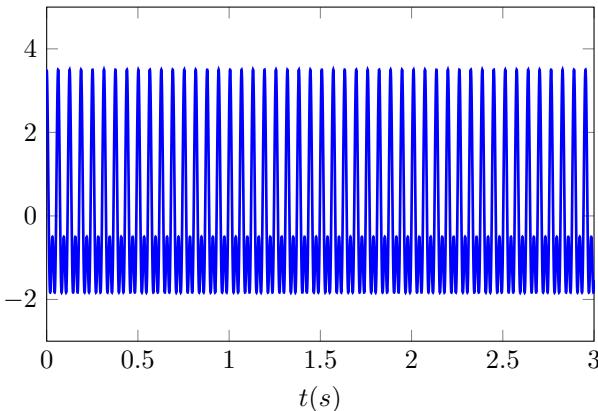
FIGURE E8.11 – Tension aux bornes du condensateur du RLC en régime libre et forcé.

Ces deux exemples nous donnent la relation suivante :

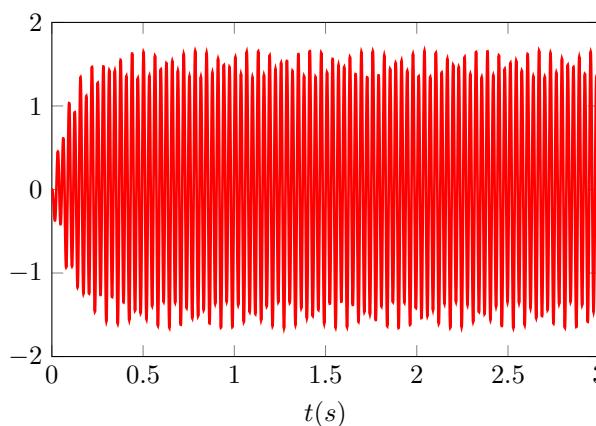
Propriété : Temps de décroissance et bande passante

La produit de la largeur de la bande passante d'un filtre par le temps de réponse de ce filtre est toujours de l'ordre de l'unité.

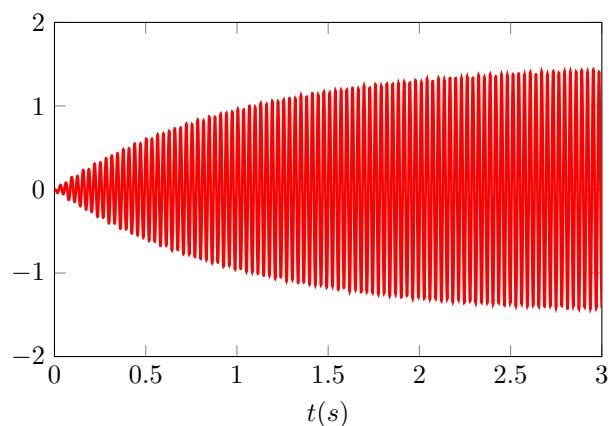
La conséquence, c'est que plus un filtre est sélectif (c'est-à-dire qu'il ne laisse passer que peu de fréquences), plus son temps de réponse est long. Par exemple, sur la figure E8.12, on voit une somme de deux cosinus filtrés par un filtre passe-bas. Si le filtre a un facteur de qualité pas trop élevé, le cosinus à $110 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ est mal filtré, ce qui donne des oscillations de l'amplitude en sortie. Si on augmente le facteur de qualité, on filtre mieux, mais la mise en place est plus longue.



(a) Signal d'origine, somme de deux cosinus de pulsations $110 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



(b) Signal filtré par un passe-bande d'ordre 2 de pulsation propre $200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité 10.



(c) Signal filtré par un passe-bande d'ordre 2 de pulsation propre $200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité 100.

FIGURE E8.12 – Filtrage d'une somme de cosinus.

Filtres électroniques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Fonction de transfert harmonique. Diagramme de Bode.	Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1. Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
Modèles de filtres passifs d'ordre 1 : passe-bas et passe-haut.	Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. Étudier le filtrage linéaire d'un signal non sinusoïdal à partir d'une analyse spectrale.
Filtre passe-bande.	SIMULER, À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION, L'ACTION D'UN FILTRE D'ORDRE 1 OU 2 SUR UN SIGNAL PÉRIODIQUE DONT LE SPECTRE EST FOURNI. METTRE EN ÉVIDENCE L'INFLUENCE DES CARACTÉRISTIQUES DU FILTRE SUR L'OPÉRATION DE FILTRAGE.

QCMs

réponses page [627](#)
✓ QCM : Compréhension du cours ✗
Q1.

Un circuit RC série dont on prend la tension de sortie aux bornes du condensateur donne un filtre :

- (a). passe-haut d'ordre 1
- (b). passe-bas d'ordre 1
- (c). passe-haut d'ordre 2
- (d). passe-bas d'ordre 2

Q2.

Avec un circuit RLC série, on peut réaliser :

- (a). un passe-bas
- (b). un passe-haut
- (c). un passe-bande
- (d). un coupe-bande

Q3.

Un filtre électronique prend toujours une tension en entrée, et donne une tension en sortie.

- (a). Vrai
- (b). Faux

Q4.

Pour qu'un filtre 2 placé après un filtre 1 ne le perturbe pas, il faut que :

- (a). $|Z_{s2}| \ll |Z_{e1}|$
- (b). $|Z_{e2}| \ll |Z_{s1}|$
- (c). $|Z_{e1}| \ll |Z_{s2}|$
- (d). $|Z_{s1}| \ll |Z_{e2}|$

Q5.

On dispose de deux filtres passifs de FT \underline{H}_1 et \underline{H}_2 . Comment obtenir un filtre de FT $\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$?

- (a). On met le filtre 1, un montage suiveur, puis le filtre 2
- (b). On met le filtre 1, puis le filtre 2
- (c). On ne peut pas
- (d). On met le filtre 2, puis le filtre 1

Filtres électriques

Exercices

réponses page 628

Exercice E8.1 : Filtres à partir d'un RLC série [**]

On a vu en cours le filtre passe-bas d'ordre 2 formé en prenant la tension de sortie aux bornes du condensateur dans un RLC série. On considère le même schéma :

- La tension de sortie est celle aux bornes de la résistance.

Effectuez l'étude du diagramme de Bode de ce filtre (tracé pour $Q = 0,5$ et $Q = 3$). On pourra mettre sa FT sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$

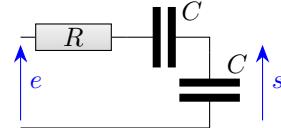
- La tension de sortie est celle aux bornes de la bobine.

Effectuez l'étude du diagramme de Bode de ce filtre (tracé pour $Q = 0,5$ et $Q = 3$). On pourra mettre sa FT sous la forme canonique $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - j \frac{\omega_0}{Q\omega}}$

Exercice E8.2 : Filtre d'ordre 1 [**]

On considère le filtre ci-contre.

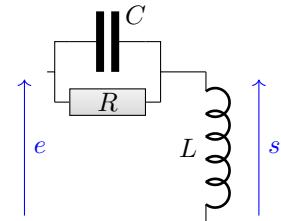
- Dessinez les schémas équivalents en basse et haute fréquence ; peut-on conclure quelque chose en BF ?
- Calculez sa fonction de transfert.
- Tracez son diagramme de Bode.
- Calculez sa pulsation de coupure à -3 dB.



Exercice E8.3 : Filtre non canonique [**]

On considère le filtre ci-contre, avec $R = 120 \Omega$, $L = 22 \text{ mH}$ et $C = 220 \text{ nF}$.

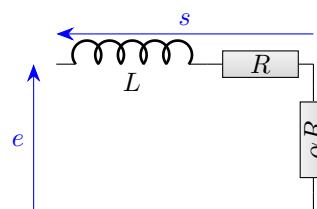
- Déterminez sans calculs le type de ce filtre.
- Calculez sa fonction de transfert.
- Étudiez les asymptotes du gain et de la phase, ainsi que l'intersection des asymptotes du gain. Calculez le vrai gain et la vraie phase à ce point.
- Tracez son diagramme de Bode.



Exercice E8.4 : Filtre atténuateur de basses [**]

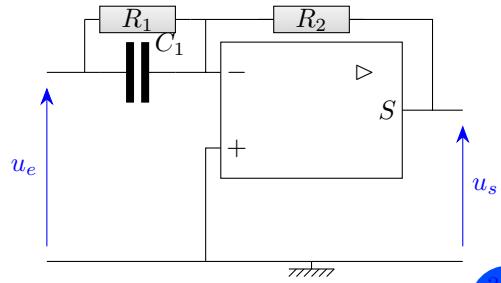
On considère le filtre ci-contre (les deux résistances sont différentes, le coefficient α est un réel positif) :

- Exprimez sa fonction de transfert \underline{H} . Mettez-la sous la forme $\underline{H} = K \cdot \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$ avec K un réel positif, $\underline{H}_1 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$ et $\underline{H}_2 = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$
- Quelle sont les limites du gain total (de \underline{H}) en BF et en HF ?
- Pour déterminer vraiment ce qui se passe entre ces deux limites, il faut étudier la fonction de transfert en deux morceaux.
Déterminer les asymptotes de \underline{H}_1 dans le diagramme de Bode.
- Déterminez les asymptotes de \underline{H}_2 dans le diagramme de Bode.
- Tracez alors le diagramme de Bode asymptotique de \underline{H} . Comme on ne connaît pas α , on ne cherchera pas des valeurs exactes sur les échelles, mais on respectera le fait que $\omega_2 > \omega_1$ et $K < 1$.

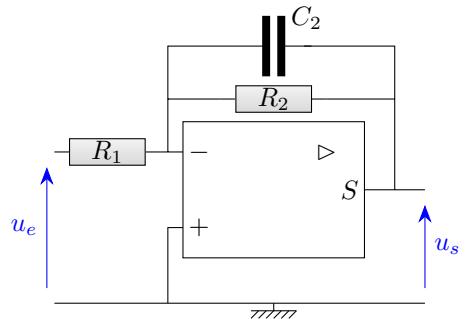


Exercice E8.5 : Filtre actif []**

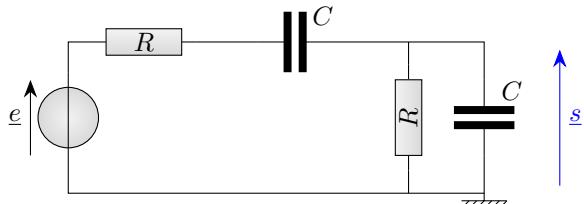
Calculez la FT du filtre ci-contre, et tracez son diagramme de Bode dans le cas $\frac{R_2}{R_1} = 5$; on posera $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$.

**Exercice E8.6 : Filtre actif [**]**

On considère le filtre ci-contre où l'AO fonctionne en régime linéaire : Exprimez sa fonction de transfert, et mettez-la sous forme canonique. Vous pouvez ensuite tracer son diagramme de Bode pour vous entraîner, avec les valeurs : $R_1 = 2,2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 10 \text{ k}\Omega$; $C_2 = 10 \text{ nF}$.

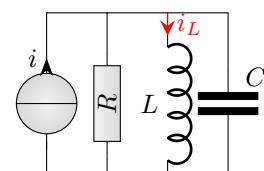
**Exercice E8.7 :**

1. Déterminez la fonction de transfert de ce filtre.
2. Déterminez ses asymptotes, entre autre le point où elles se coupent.
3. Montrez que le gain passe par un maximum en $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et déterminez la vraie valeur du gain et de la phase pour cette pulsation-là.
4. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.
5. On prend $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $C = 220 \text{ nF}$. Si l'entrée vaut $e(t) = 3 + 5 \cos(1000t + 0,2)$, que vaut la sortie ?

**Exercice E8.8 :**

On considère le circuit RLC parallèle ci-contre comme un filtre en intensité dont l'entrée est i et la sortie i_L .

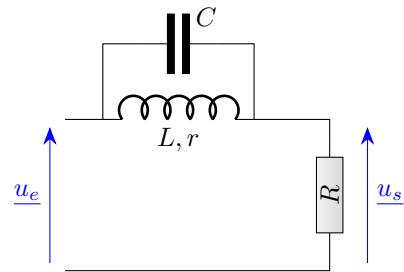
1. Exprimez la fonction de transfert de ce filtre.
2. On prend $L = 20 \text{ mH}$, $C = 0,1 \mu\text{F}$ et $R = 600 \Omega$; déterminez les pentes des asymptotes du gain, les valeurs de limite de la phase, et la pulsation pour laquelle les asymptotes du gain se coupent.
3. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation ω_m à calculer; calculer aussi la valeur du gain maximum.
4. Déterminer numériquement les limites de la bande passante à -3 dB .
5. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.



Exercice E8.9 : Circuit bouchon [**]

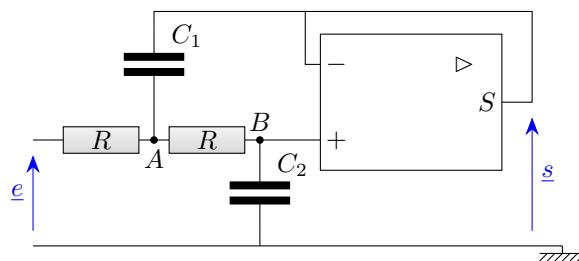
On considère le filtre ci-contre avec $R = 100\Omega$, $C = 220\text{nF}$, $L = 22\text{mH}$ et $r = 6,3\Omega$.

1. Étudiez sans calculs les comportements en BF et HF ; commençez.
2. Déterminez sa fonction de transfert ; on ne cherchera ni à la simplifier, ni à la mettre sous forme canonique.
3. Tracez son diagramme de Bode entre $1 \times 10^2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ avec Python. Quel est le type de ce filtre ?
4. *** Définissez et mesurez sur le graphique la bande coupante à $+3\text{dB}$



Exercice E8.10 : Filtre de type "Sallen-Key" [***]

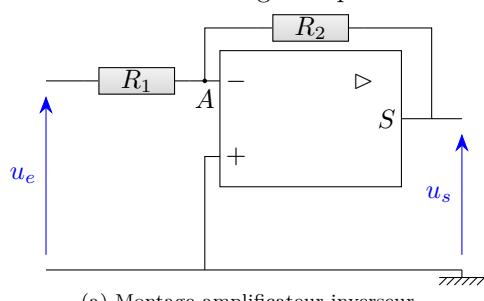
On considère le filtre suivant où l'AO fonctionne en régime linéaire :



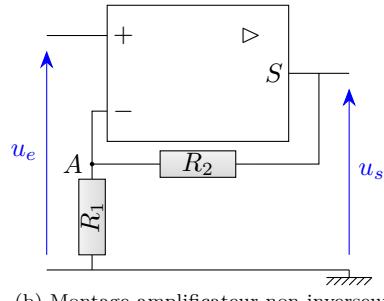
1. Appliquez le théorème de Millman en A et reliez v_A , e et s . On pensera à appliquer la condition de linéarité de l'AO.
2. Appliquez le théorème de Millman en B et reliez v_A et s par une seconde relation.
3. En éliminant v_A entre les deux relations, montrer que $\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ en exprimant ω_0 et Q .
4. Proposez des valeurs des composants pour avoir $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1600\text{Hz}$ et $Q = 8$.
5. Étudiez les asymptotes de ce filtre dans le diagramme de Bode.
6. Montrez que le gain admet une résonance, donc on calculera numériquement la pulsation et le gain.
7. Tracez le diagramme de Bode de ce filtre.

Exercice E8.11 : AO non idéal [****]

On considère deux montages amplificateurs classiques :



(a) Montage amplificateur inverseur



(b) Montage amplificateur non inverseur

Pour chaque montage on définit la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$.

1. On prend un premier modèle d'AO «à gain fini» dans lequel les courants de polarisation sont toujours nuls, mais la tension différentielle est faible mais non nulle : la tension de sortie est reliée à la tension différentielle par la relation $v_S = \frac{\mu_0 \omega}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \underline{e}$ avec $\mu_0 \approx 1 \times 10^5$ et $\omega_0 \approx 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- Déterminer \underline{H} pour les deux montages avec ce modèle. Calculez les caractéristiques du filtre obtenu si

$$R_2 = 10R_1.$$

2. Pour tenir encore plus compte du caractère non idéal de l'AO, on suppose maintenant qu'en plus les courants de polarisation ne sont pas nul, mais qu'il y a entre les deux entrée une impédance équivalente à une résistance R_e de valeur supérieure à $1\text{ G}\Omega$ (cela dépend des AO).
Retrouver H pour l'un des deux montages. Est-il modifié de façon significative pour des résistances R_1 et R_2 typiques utilisées en TP ?
3. Déterminez pour les deux montages la valeur de l'impédance d'entrée du quadripôle dans la limite des basses fréquences.
4. Que se passe-t-il si on inverse les entrée + et - des montages ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a) ET (b) ET (c) ET (d)

Eh oui, même un coupe bande, même si on ne l'a pas vu. C'est le complémentaire du passe-bande, il suffit donc de prendre la tension de sortie aux bornes de C et L .

Q3.(b)

Il existe des filtres en intensité.

Q4.(d)

Q5.(a)

Il faut un suiveur entre les deux pour que les filtres ne s'influencent pas l'un l'autre.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice E8.1 : Filtres à partir d'un RLC série [**]

Cf. les indications données dans le cours.

Réponses de l'exercice E8.2 : Filtre d'ordre 1 [**]

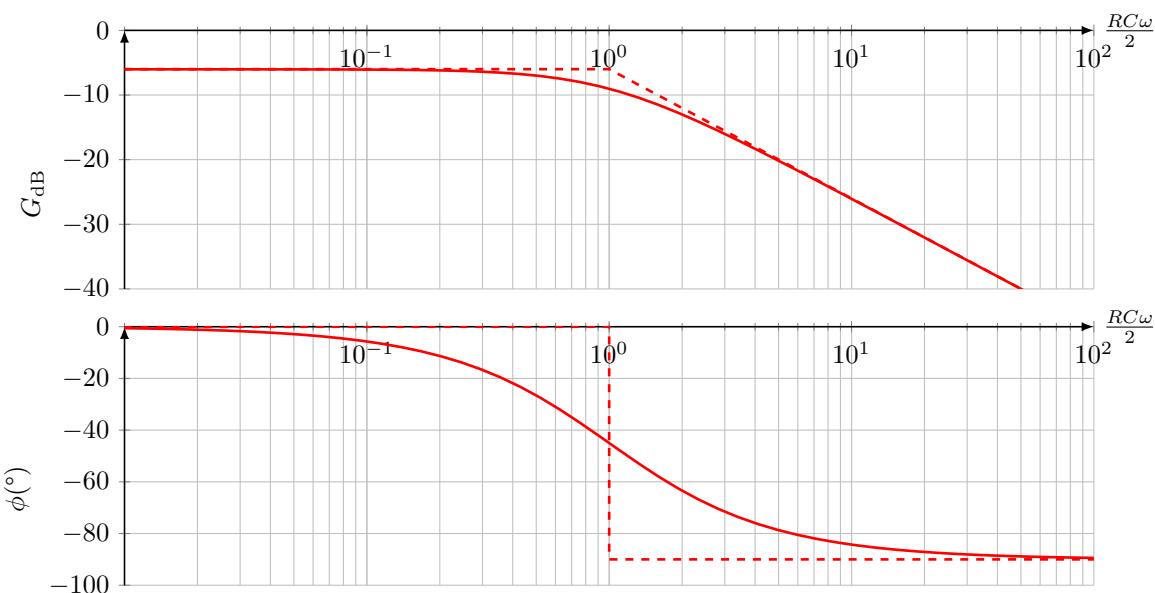
- En HF, $\underline{s} \approx 0$, mais en BF on n'en sait rien.

- $$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

- Le gain a une asymptote horizontale à basse fréquence, de valeur -6 dB, et la phase tend vers 0° .

Le gain a une asymptote de pente -20 dB/déc à haute fréquence, et la phase tend vers -90° .

Les deux asymptotes se coupent pour $\omega_c = \frac{2}{RC}$; pour cette pulsation, le gain vaut -9 dB et la phase vaut -45° .



- $|H|_{\max} = \frac{1}{2}$ et la coupure à -3 dB a lien à $\omega = \frac{2}{RC}$.

Réponses de l'exercice E8.3 : Filtre non canonique [**]

- C'est donc un passe-haut.

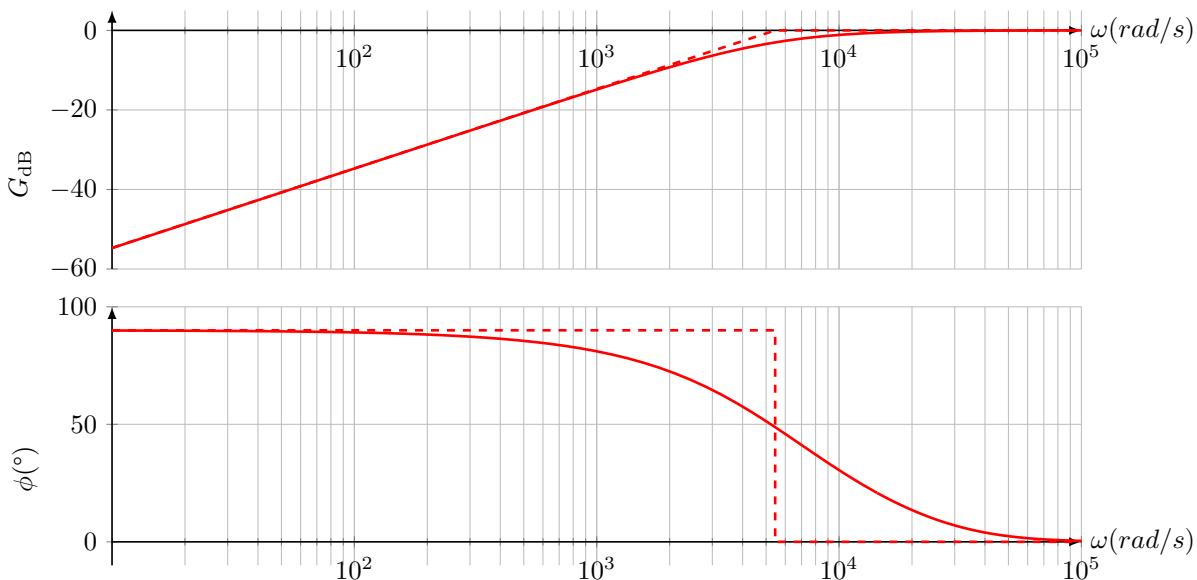
- $$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega - RLC\omega^2}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

- En BF : le gain a une asymptote de pente $+20$ dB/déc, et la phase tend vers 90° .

En HF : $G_{\text{dB}} \sim 0$ dB (asymptote horizontale) et la phase tend vers 0° .

Les deux asymptotes se coupent pour $\omega_c = \frac{R}{L}$; à cette pulsation, le gain vaut $-2,3$ dB et la phase vaut 49° .

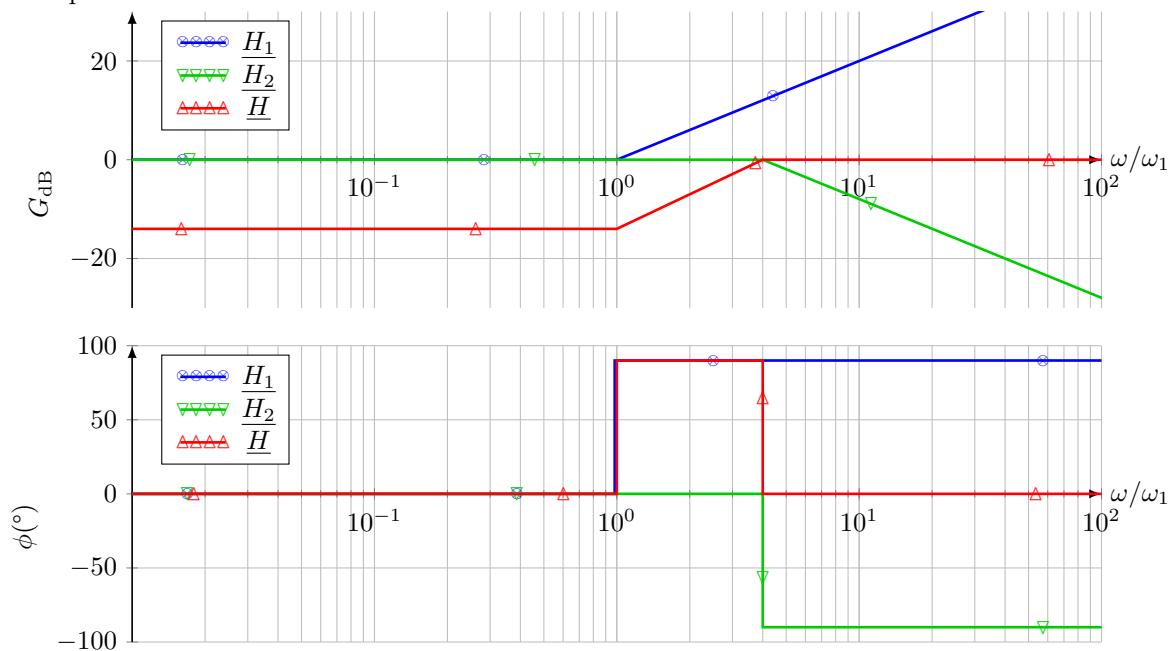
- 4.



Réponses de l'exercice E8.4 : Filtre atténuateur de basses [**]

1. $K = \frac{1}{1+\alpha}$, $\omega_1 = \frac{R}{L}$ et $\omega_2 = \frac{R+\alpha R}{L} = (1+\alpha)\omega_1$
2. Le gain total tend vers $-20 \log(1+\alpha) < 0$ en BF et vers 0 dB en HF.
3. Le gain a une asymptote horizontale à 0 dB et la phase vaut 0° en BF.
Le gain a une asymptote de pente +20 dB/déc et la phase vaut $+90^\circ$ en BF.
Les asymptotes se coupent en ω_1 pour un gain nul.
4. Le gain a une asymptote horizontale à 0 dB et la phase vaut 0° en BF.
Le gain a une asymptote de pente -20 dB/déc et la phase vaut -90° en BF.
Les asymptotes se coupent en ω_2 pour un gain nul.
5. On trace les asymptotes précédentes, et on les ajoute en tenant compte aussi du facteur K qui va avoir pour effet de ramener le gain à 0 en HF. C'est une question plus ou moins difficile suivant qu'on visualise bien l'ajout des deux courbes ou pas.

Exemple avec $\alpha = 4$:



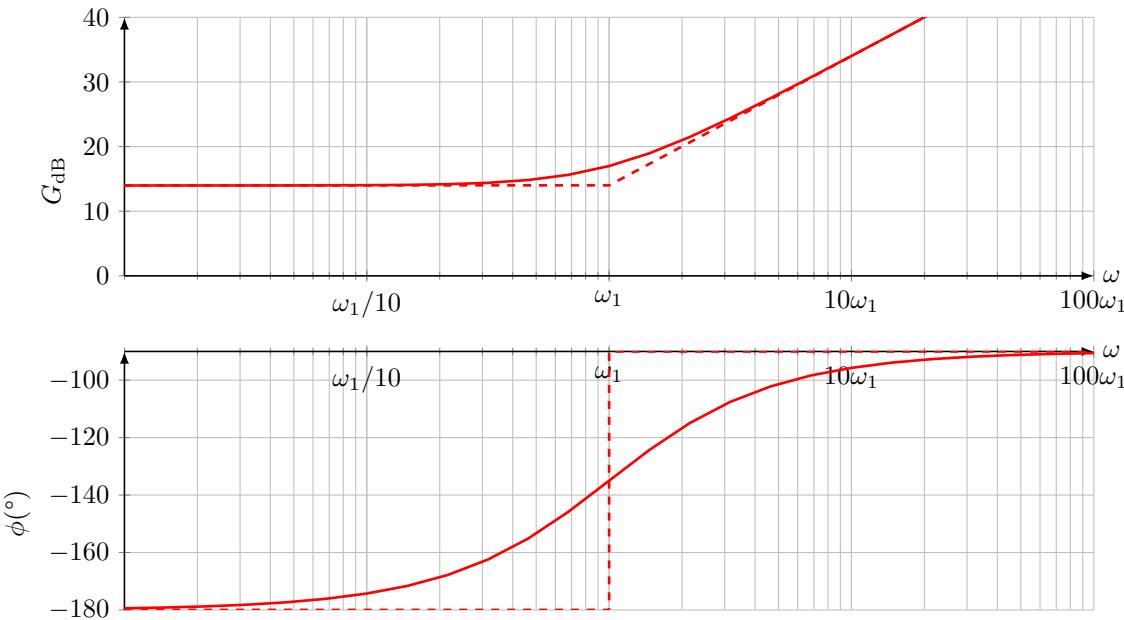
Réponses de l'exercice E8.5 : Filtre actif [**]

$$\underline{H} = -R_2 \left(\frac{1}{R_1} + jC_1\omega \right)$$

En BF : asymptote horizontale $G_{\text{dB}} = +14 \text{ dB}$ et phase de $\pm 180^\circ$.

En HF : asymptote du gain de pente $+20 \text{ dB/dec}$ et phase de -90° .

Les asymptotes se coupent lorsque $\omega = \frac{1}{R_1 C_1} = \omega_1$. En cette pulsation, le gain réel vaut 17 dB et la phase -135° . D'où le diagramme de Bode :



Le gain tend vers $+\infty$ en haute fréquence : cela pose problème, tous les parasites vont être amplifiés. Un tel filtre n'est pas utilisable en pratique.

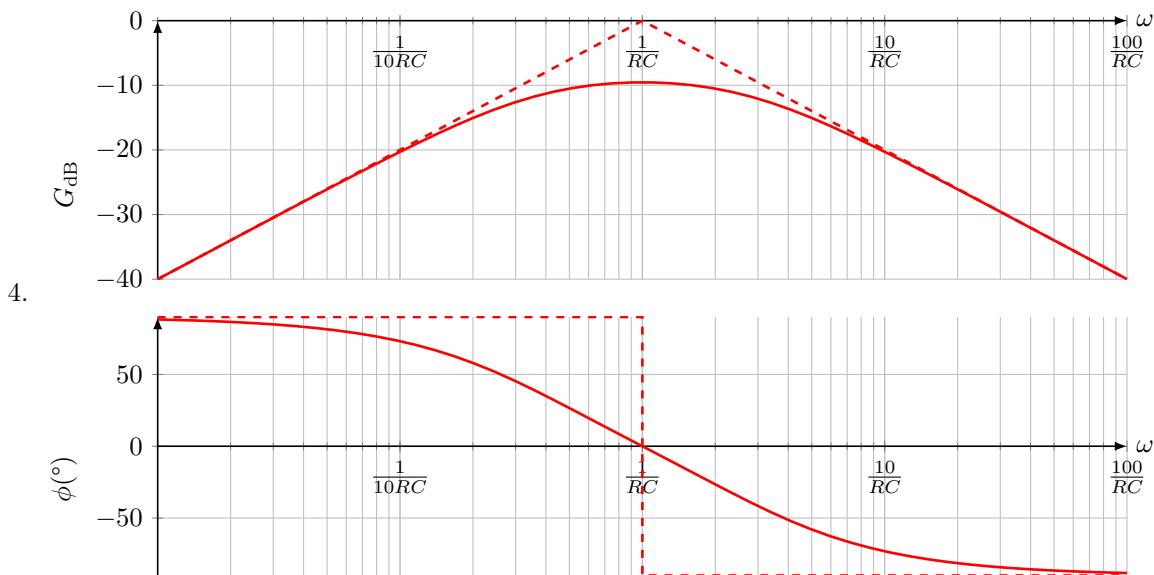
Réponses de l'exercice E8.6 : Filtre actif [**]

$$\underline{H} = -\frac{Z}{R_1} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + j R_1 C_2 \omega} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j \frac{R_2}{R_1} C_2 \omega}$$

On a donc un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\frac{1}{R_2 C_2}$ et de gain en basse fréquence $20 \log \frac{R_2}{R_1}$.

Réponses de l'exercice E8.7 :

1. $\underline{H} = \frac{1}{3+jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$
2. En basse fréquence, $G_{\text{dB}} \underset{0}{\sim} 20 \log(RC) + 20 \log \omega$ (asymptote de pente $+20 \text{ dB/déc}$) et $\phi \underset{0}{\rightarrow} +90^\circ$.
En haute fréquence, $G_{\text{dB}} \underset{\infty}{\sim} -20 \log(RC) - 20 \log \omega$ (asymptote de pente -20 dB/déc) et $\phi \underset{\infty}{\rightarrow} \pm -90^\circ$.
Les asymptotes se coupent en $\omega = \frac{1}{RC}$ pour un gain nul.
3. La dérivée de $|\underline{H}|$ s'annule pour $\omega = \frac{1}{RC}$. Pour cette pulsation, $\underline{H} = \frac{1}{3}$ donc $G_{\text{dB}} = -20 \log 3 = -9,5 \text{ dB}$ et $\phi = 0^\circ$.



5. En sortie, il restera $s(t) = 0,95 \cos(1000t - 0,76)$.

Réponses de l'exercice E8.8 :

1. $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$

2. En basse fréquence, $G_{\text{dB}} \xrightarrow[0]{} 0$ (asymptote horizontale) et $\phi \xrightarrow[0]{} 0^{\circ}$.

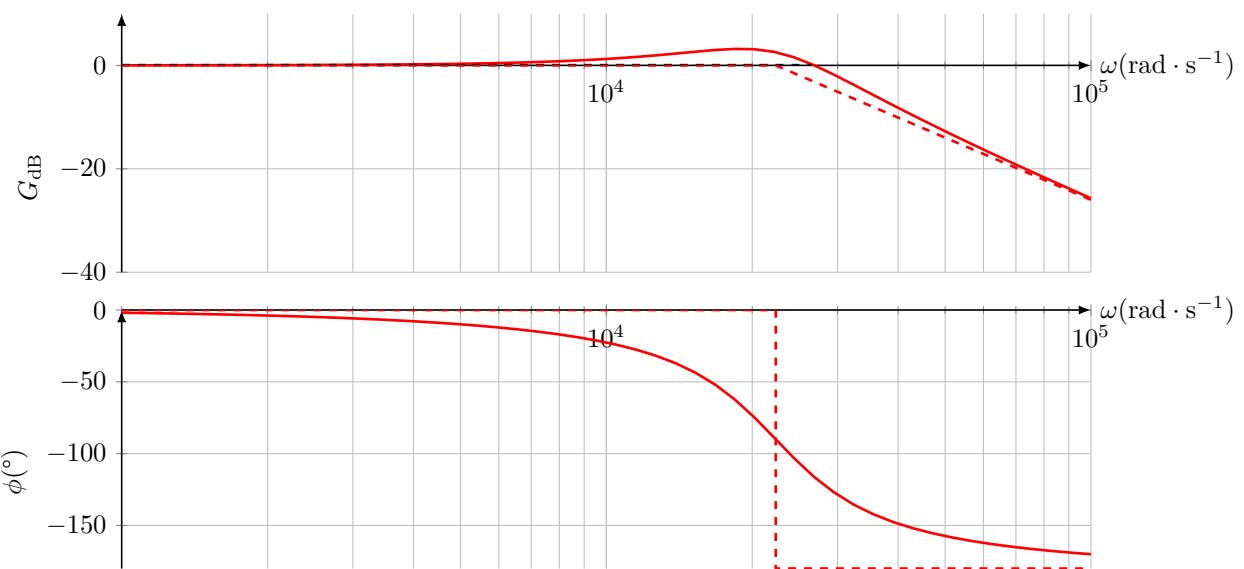
En haute fréquence, $G_{\text{dB}} \underset{\infty}{\sim} -20 \log(LC\omega^2) = -20 \log(LC) - 40 \log \omega$ (asymptote de pente -40 dB/déc) et $\phi \xrightarrow[\infty]{} \pm 180^{\circ}$.

Les asymptotes se coupent lorsque en $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 22\,400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour un gain nul.

3. La dérivée de $|H|$ s'annule pour $\omega_m = \sqrt{\frac{2LC - \frac{L^2}{R^2}}{2L^2C^2}} = 19\,000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. À cette pulsation, $|H|_m = 1,44$ donc le gain vaut $3,2 \text{ dB}$, et la phase vaut -66° .

4. On résout numériquement $\frac{1}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (\frac{L}{R}\omega)^2}} = \frac{|H|_m}{\sqrt{2}}$ et on trouve la bande passante $[3950; 26500] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

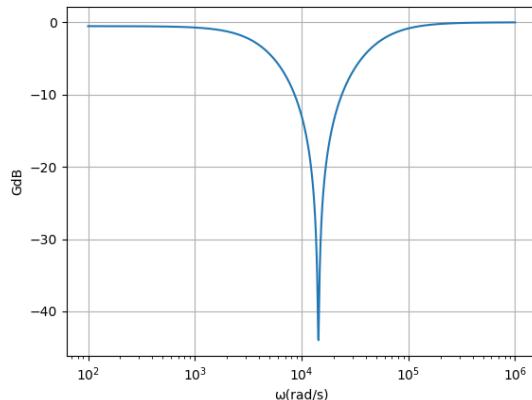
5.



Réponses de l'exercice E8.9 : Circuit bouchon [**]

1. En BF : $\underline{u}_s = \frac{R}{r+R}\underline{u}_e$. En HF : $\underline{u}_s = \underline{u}_e$.

2. $\underline{H} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{r+jL\omega}}$



3.

C'est donc un coupe-bande.

4. [2259; 2317]Hz de largeur 58 Hz.

Réponses de l'exercice E8.10 : Filtre de type "Sallen-Key" [***]

1. $v_A \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC_1\omega \right) = \frac{e}{R} + sjC_1\omega + \frac{s}{R}$
2. $s \left(\frac{1}{R} + jC_2\omega \right) = \frac{v_A}{R}$
3. $\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$ et $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$

4. On a 3 inconnues pour 2 équations, donc un degré de liberté. Prenons par exemple $C_1 = 1 \mu F$, alors on trouve $C_2 = \frac{C_1}{4Q^2} = 4 nF$ et $R = \frac{1}{2\pi f_0\sqrt{C_1C_2}} = 1,6 k\Omega$

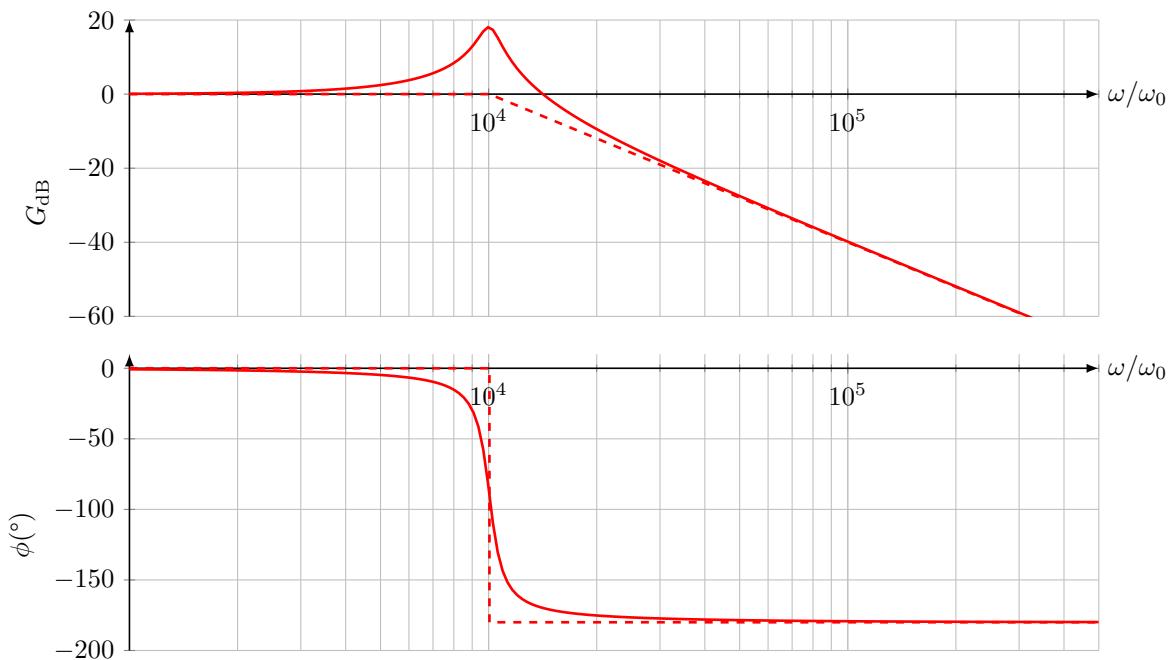
5. En BF : une asymptote horizontale $G_{dB} = 0$ dB et phase nulle.

En HF : une asymptote du gain de pente -40 dB/déc et une phase de $\pm 180^\circ$.

Les asymptotes se coupent en ω_0 pour un gain nul ; à cette pulsation, le vrai gain vaut $20 \log Q = 18$ dB et la phase vaut -90° .

6. En dérivant le dénominateur de $|H|$ par rapport à ω , on trouve un maximum en $\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 10\,013$ rad·s⁻¹ (fréquence 1593 Hz) et le gain correspondant vaut 18,1 dB.

7.



Réponses de l'exercice E8.11 : AO non idéal [****]

1. Pour le montage amplificateur inverseur : $\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}}{1 + j \frac{\frac{R_1 + R_2}{\mu_0} \frac{\omega}{\mu_0 \omega_0}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}} = \frac{-9,999}{1 + j \frac{\omega}{9092 \text{ rad.s}^{-1}}}$

Pour le montage amplificateur non inverseur : $\underline{H} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}}{1 + j \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}} \frac{\omega}{\mu_0 \omega_0}}{1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}} = \frac{10,999}{1 + j \frac{\omega}{9092 \text{ rad.s}^{-1}}}.$

2. Pour l'amplificateur inverseur, par exemple, $\underline{H} = \frac{-\frac{R_2}{R_1 + \frac{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_e}}{\mu_0}}}{1 + j \frac{\frac{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_e}}{\mu_0} \frac{\omega}{\mu_0 \omega_0}}{1 + \frac{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_e}}{\mu_0}}}$

3. Il suffit de placer le courant i_e qui entre et de le relier à u_e .

- pour l'amplificateur inverseur, $\underline{Z}_e = \frac{R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{1 + \frac{\mu_0}{\mu_0 R_1 + R_1 + R_2}} = 0,9999R_1 \approx R_1$.

- pour l'amplificateur non inverseur, $\underline{Z}_e = R_e \frac{R_1 + \frac{R_1 + R_2}{\mu_0}}{R_1 + R_2} = 0,0909R_e$ qui est donc très grand si R_e est très grand.

4. L'équation différentielle vérifiée par u_s devient instable.

Coordonnées cylindriques

Cours

Le seul système de coordonnées que nous avons vu jusqu'à présent est le système cartésien. Il nous a permis d'étudier un certain nombre de situations, mais n'est pas adapté pour les mouvements circulaires. Nous allons donc introduire dans ce chapitre un nouveau système de coordonnées adapté aux cercles.

M5.A. Coordonnées polaires

Commençons en 2D, pour repérer un point dans le plan. Vous avez déjà vu en maths qu'un point du plan peut être associé à un nombre complexe, et que ce nombre complexe peut s'écrire soit sous forme cartésienne (partie réelle, partie imaginaire) soit sous forme polaire (module, argument). C'est le même principe que nous allons utiliser ici.

Considérons un point M dans le plan (figure M5.1). Il peut être repéré de manière univoque par la donnée de l'angle θ et de la distance r .

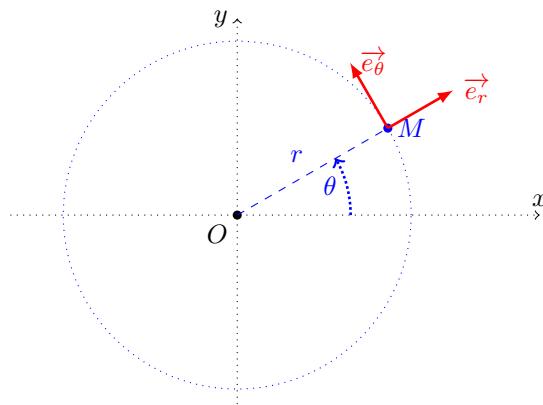


FIGURE M5.1 – Coordonnées polaires.

Définition : coordonnées polaires

Un point M est repéré en coordonnées polaires par (r, θ) avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OM}})$.

Le rayon r varie dans \mathbb{R}^+ tandis que l'argument θ varie entre 0 et 2π ; on peut remarquer que, si M est à l'origine, l'angle θ peut prendre toutes les valeurs.

Propriété : Coordonnées cartésiennes

Un point de coordonnées polaires (r, θ) a pour coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{M5.1})$$

Démonstration

Il suffit de projeter le point M sur les axes Ox et Oy puis d'appliquer les définitions de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Les coordonnées permettent de repérer un point ; mais pour écrire le PFD, il nous faut aussi une base sur laquelle on va pouvoir projeter ; orthonormée, si possible. Cette base est définie en regardant les directions dans lesquelles se déplace le point M lorsque r ou θ varient.

Définition : Base polaire

On définit la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ (figure M5.1) avec

- $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ le *vecteur radial*, unitaire et colinéaire à \overrightarrow{OM}
- $\overrightarrow{e_\theta}$ le *vecteur orthoradial*, unitaire, tourné de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $\overrightarrow{e_r}$

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad (\text{M5.2})$$

Démonstration

Pour aller de O à M , on se déplace uniquement selon la direction de \vec{e}_r , sur une longueur r .

Une fois le vecteur position connu, on veut en déduire la vitesse ; pour cela on le dérive. Mais une difficulté arrive alors : le vecteur \vec{e}_r n'est pas constant ; en effet, si θ varie, le point M tourne autour de O , et le vecteur \vec{e}_r tourne avec. Pour s'en sortir, il faut repasser par les vecteurs fixes.

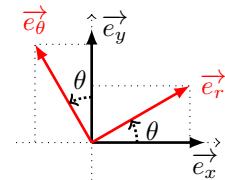
Propriété : Dérivées des vecteurs de base

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r \end{cases} \quad (\text{M5.3})$$

Démonstration

On commence par décomposer les vecteurs de base sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Avec un bon

schéma, on trouve : $\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$



Si on dérive : $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d(\cos \theta \vec{e}_x)}{dt} + \frac{d(\sin \theta \vec{e}_y)}{dt}$
 $= \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{e}_x + \frac{d \sin \theta}{dt} \vec{e}_y$ puisque \vec{e}_x et \vec{e}_y sont fixes
 $= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

De même, on trouve que $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y = -\dot{\theta} \vec{e}_r$.

Cette propriété nous permet d'exprimer la vitesse et l'accélération de M sur la base polaire :

Propriété : Vitesse

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (\text{M5.4})$$

Démonstration

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Remarque : $\dot{\theta}$ s'appelle la *vitesse angulaire*.

Propriété : Accélération

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \right) \vec{e}_\theta \quad (\text{M5.5})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r)}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Propriété : Accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme

Dans le cas particulier d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R à la vitesse v , la *vitesse angulaire* $\dot{\theta}$ est constante, et l'accélération est *radiale* (selon \vec{e}_r), *centripète* (vers le centre), et de norme $\frac{v^2}{R}$.

Démonstration

On a $r = cst$; on en déduit que $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Si on suppose que $\|\vec{v}\| = v = cst$ (mouvement uniforme), alors $r\dot{\theta} = cst$ donc $\dot{\theta} = cst$: la vitesse angulaire du mouvement est constante. L'accélération ne contient alors plus qu'un seul terme : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r = -\frac{v^2}{r}\vec{e}_r$, une accélération dirigée vers le centre.

On peut aussi considérer le petit déplacement, c'est à dire le déplacement de M si r et θ varient un peu :

Propriété : Petit déplacement

$$d\overrightarrow{OM} = dr.\vec{e}_r + r.d\theta.\vec{e}_\theta \quad (\text{M5.6})$$

Démonstration

Si r varie de dr tandis que θ reste constant, alors le point M se déplace selon la direction \vec{e}_r d'une distance dr , donc $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r$.

Si θ varie de $d\theta$ tandis que r reste constant, alors le point M tourne d'un angle $d\theta$ sur le cercle de rayon r . Il décrit donc un arc de cercle de longueur $r.d\theta$ dans la direction tangente au cercle, qui est \vec{e}_θ ; donc $d\overrightarrow{OM} = rd\theta\vec{e}_\theta$.

Si les deux varient, on a donc $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$.

M5.B. Le pendule simple

Le pendule simple est un exemple fondamental à bien connaître.

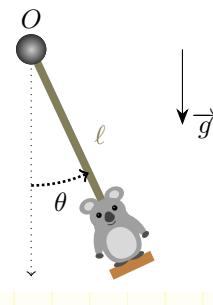
B.1. Étude par les forces

Exemple : Le pendule simple

À connaître

Une masse m est suspendue à une tige (ou un fil) de longueur ℓ fixe, libre de tourner autour d'un axe O .

- Par application du PFD, déterminez l'équation différentielle du mouvement (c'est-à-dire l'ED vérifiée par θ). Est-elle linéaire ?
- Linéarisez-la pour de petites oscillations, et déterminez la période des petites oscillations.



- On étudie la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = \ell\vec{e}_r$ avec $\ell = cst$ donc $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r$.

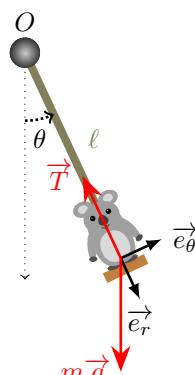
La masse est soumise à deux actions : son poids $m\vec{g} = mg\cos\theta\vec{e}_r - mg\sin\theta\vec{e}_\theta$ et la tension de la tige $-T\vec{e}_r$.

Le PFD projeté sur les deux axes donne alors les équations

$$\begin{cases} -m\ell\ddot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

L'équation du mouvement est donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$. Elle n'est pas linéaire, donc on ne sait pas la résoudre analytiquement.

- Pour de petits angles, l'équation devient $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Si les angles deviennent supérieurs à 20°, l'approximation des petits angles ne fonctionne plus. On doit passer par un schéma numérique pour résoudre cette équation. La figure M5.2 montre les simulations pour différents angles

initiaux ; on constate que, plus l'amplitude augmente, plus les oscillations du pendule ralentissent.

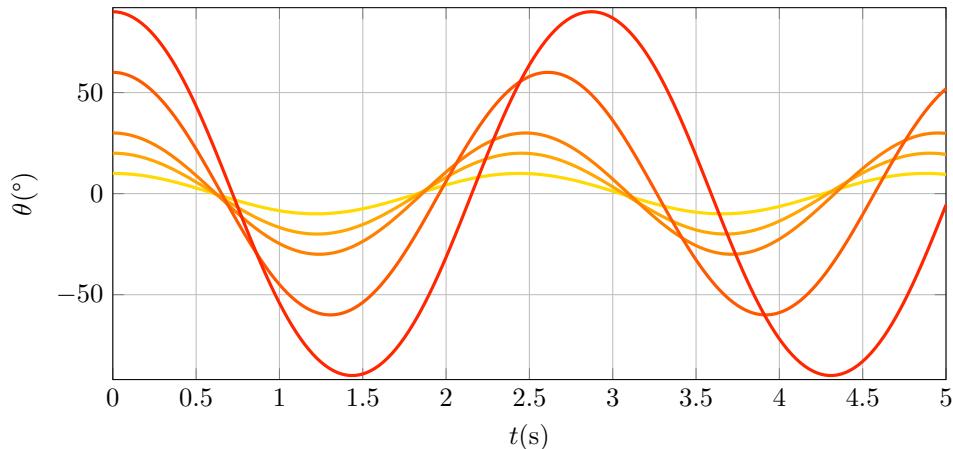


FIGURE M5.2 – Simulations numériques des oscillations d'un pendule de longueur $\ell = 1,5\text{ m}$: on voit un ralentissement lorsque l'amplitude augmente.

B.2. Étude par l'énergie

Le pendule simple est un système conservatif à un seul degré de liberté. On peut donc l'étudier selon la méthode vue dans le chapitre sur l'énergie mécanique.

Exemple : Étude du pendule simple par l'énergie

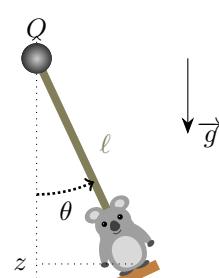
À connaître

On reprend le modèle d'un pendule simple de masse m et de longueur ℓ .

1. Justifiez que ce système est conservatif, et exprimez ses énergies cinétique et potentielles en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des constantes.
 2. Tracez le profil de $E_p(\theta)$ et déduisez-en si le mouvement est borné ou pas.
 3. Déterminez les positions d'équilibre. Sont-elles stables ?
 4. Déterminez l'équation différentielle du mouvement.

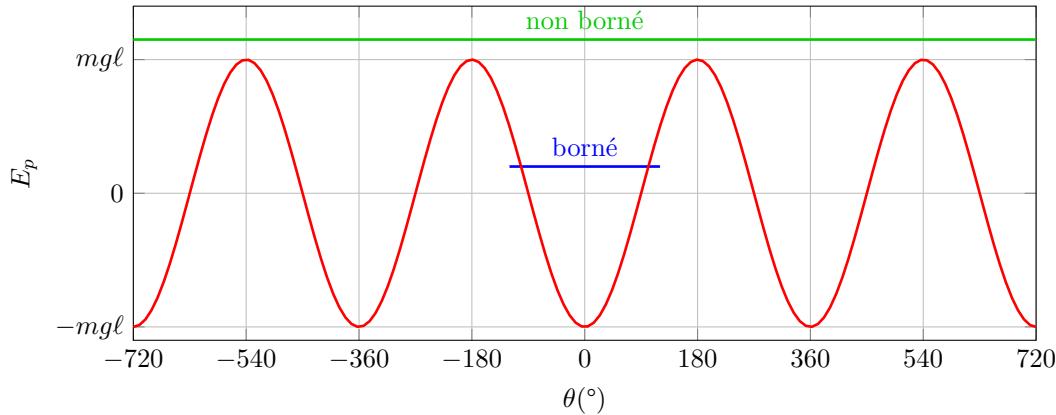
1. L'étude cinématique en coordonnées polaires est simple : $\overrightarrow{OM} = \ell \overrightarrow{e_r}$ donc $\overrightarrow{v} = \ell \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$ d'où on tire l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$.

La masse M est soumise à deux actions : la tension du fil est selon \vec{e}_r donc orthogonale au mouvement, elle ne travaille donc pas. L'autre force est le poids, d'énergie potentielle mgz avec z l'altitude. Sur le schéma ci-contre, on a indiqué cette altitude z en prenant O comme référence des altitudes. On voit facilement avec un peu de trigonométrie que $|z| = \ell \cos \theta$, et comme M est en-dessous de O on a $z = -\ell \cos \theta$. Donc $E_p = -mg\ell \cos \theta$



On en conclut que le système est conservatif, d'énergie mécanique $E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$.

2. À chaque instant, $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = E_m$ donc $mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - E_m$. Or $\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \geq 0$ (c'est un carré) donc $mg\ell \cos \theta \geq -E_m$ soit $\cos \theta > -\frac{E_m}{mg\ell}$. Il y a alors deux possibilités :



- si $-\frac{E_m}{mgl} > -1$ c'est-à-dire $E_m < mgl = E_p(180^\circ)$, alors cette équation implique $|\theta| < \arccos\left(\frac{-E_m}{mgl}\right)$ donc θ est bornée entre deux angles limites, et le système oscille entre les deux
 - si $-\frac{E_m}{mgl} < -1$ c'est-à-dire $E_m > mgl = E_p(180^\circ)$, alors cette équation est toujours vraie, donc le système n'a pas d'angle limite ; de plus, on a $mgl \cos \theta > -E_m$ à chaque instant, ce qui signifie que θ ne s'annule jamais : le système tourne donc toujours dans le même sens sans jamais revenir en arrière.
3. Pour chercher les positions d'équilibre, on cherche les angles θ tels que $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$ soit $\sin \theta = 0$ qui a pour solutions $\theta = 0[2\pi]$.
- Pour avoir la stabilité, il faut étudier le signe de la dérivée seconde en ces positions. Or $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = mgl \cos \theta$. On a donc deux possibilités :
- les positions telles que $\theta = 0[2\pi]$ sont stables car la dérivée seconde en ces points vaut $mgl > 0$.
 - les positions telles que $\theta = \pi[2\pi]$ sont instables car la dérivée seconde en ces points vaut $mgl < 0$.
- Remarque : cela correspond au bon sens : la position vers le bas est stable, celle vers le haut est instable.
4. $E_m = cst$ donc $\frac{dE_m}{dt} = 0$. On calcule : $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\ell^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = m\ell\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g \sin \theta)$. Cette dérivée est nulle ; comme $\dot{\theta}$ n'est pas toujours nul lorsqu'il y a mouvement, c'est la parenthèse qui est nulle : $\ell\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$.

L'animation de la figure M5.3 montre à quoi ressemble le mouvement dans le cas d'un mouvement borné puis non borné. Dans le cas non borné, il existe deux possibilités de sens de rotation.

(a) Mouvement à faible énergie

(b) Mouvement à grande énergie

FIGURE M5.3 – Simulations du pendule simple.

La figure M5.4 illustre sur un même schéma le profil d'énergie potentielle en haut, et la trajectoire dans le plan de phase en bas ; on y voit les trajectoires bornées ou non bornées.

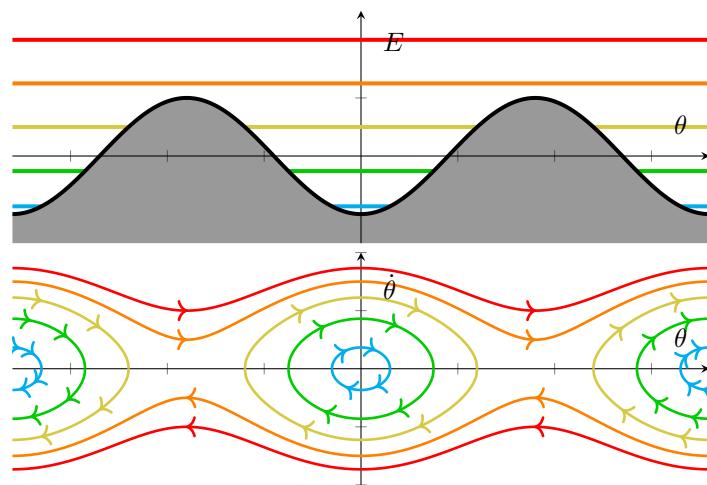


FIGURE M5.4 – Énergie potentielle et portrait de phase du pendule simple.

En réalité, évidemment, il y a toujours des frottements. Néanmoins, cette étude du cas idéal sans frottements sert pour comprendre ce qui se passe s'il y a des frottements : les barrières de potentiel existent toujours, seulement, l'énergie mécanique diminue lentement. La figure M5.5 montre l'exemple d'un pendule simple amorti lancé avec une énergie supérieure à $E_p(180^\circ)$: initialement, son mouvement est non-périodique, le pendule tourne mais ralentit ; puis son énergie mécanique devient inférieure à $E_p(180^\circ)$, et le système se trouve bloqué dans un puits de potentiel : il se met donc à osciller, et comme son énergie mécanique continue de diminuer, l'amplitude de l'oscillation diminue toujours plus, jusqu'à atteindre le fond de la cuvette de potentiel, c'est-à-dire la position d'équilibre stable du pendule.

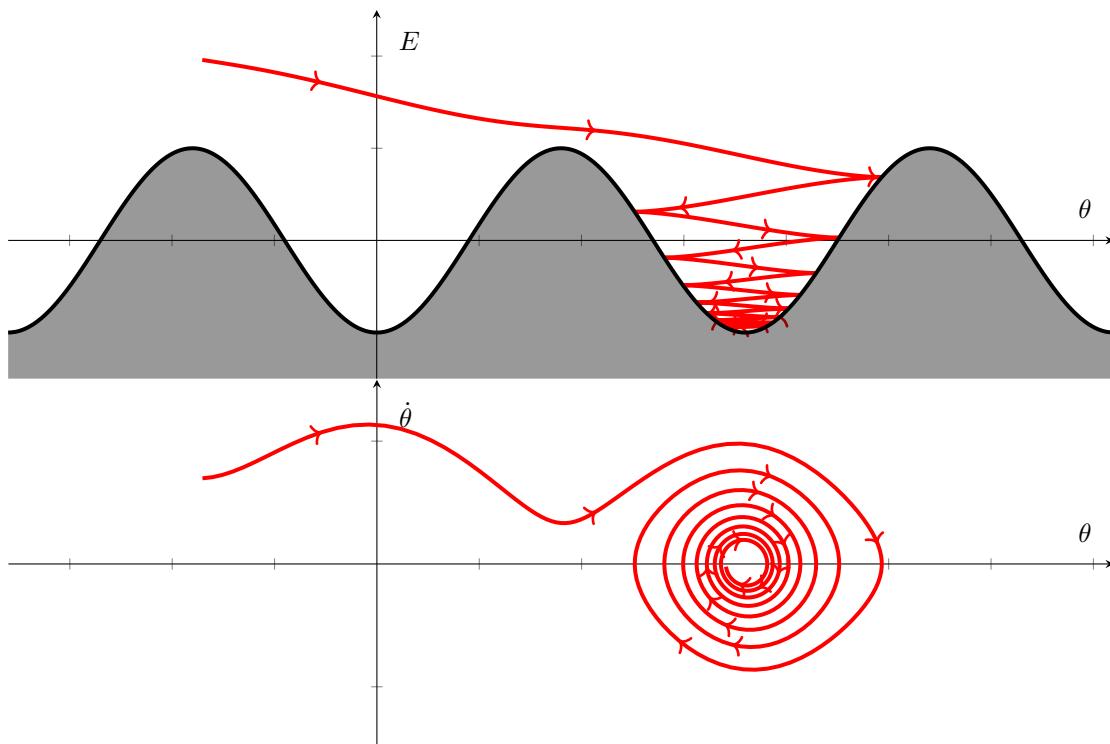


FIGURE M5.5 – Pendule simple amorti.

Propriété : Calcul de la période exacte d'oscillation (HP)

La période du pendule dépend de l'angle maximal atteint θ_0 selon la loi

$$T = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \sqrt{\frac{2l}{g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta \quad (\text{M5.7})$$

Démonstration

Le système étant conservatif, on sait qu'à chaque instant, $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$. En appliquant cette relation au moment où le pendule atteint son angle maximal θ_0 , on a aussi $E_m = -mgl \cos \theta_0$ puisqu'à ce moment-là, $\dot{\theta} = 0$.

On en déduit que $\forall t, \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_0$. On peut en isoler

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}}$$

Sur un aller-retour, le pendule va de $-\theta_0$ à $+\theta_0$ (alors $\dot{\theta} > 0$) puis revient de $+\theta_0$ à $-\theta_0$ (alors $\dot{\theta} < 0$). Si on se limite à la première moitié de l'oscillation, on peut prendre le signe + dans l'égalité précédente. Or $\theta = \frac{d\theta}{dt}$. En séparant les variables on obtient donc

$$d\theta \sqrt{\frac{l}{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = dt$$

On va intégrer à gauche entre $-\theta_0$ et $+\theta_0$; cela correspond à une demi-période, donc

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} d\theta \sqrt{\frac{l}{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \int_0^{T/2} dt = \frac{T}{2}$$

ce qui donne bien la relation affirmée.

Cette intégrale est une intégrale elliptique, compliquée à calculer pour nous, mais pas pour un ordinateur qui en donne la courbe [M5.6](#).

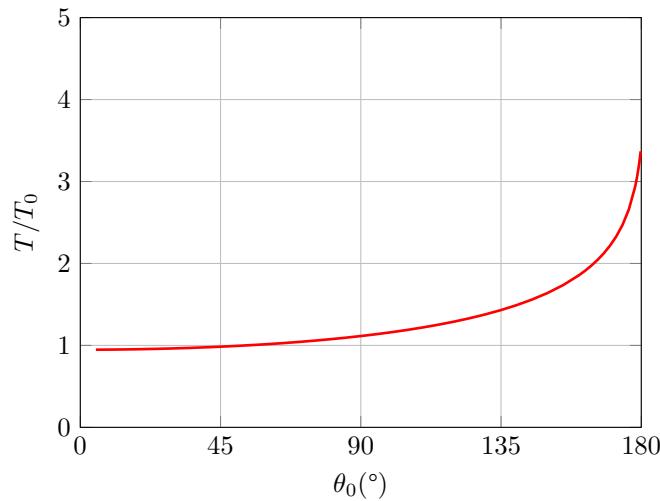


FIGURE M5.6 – Période du pendule simple ($T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est la période des petites oscillations).

La dépendance de la période du pendule avec son amplitude d'oscillation est connue depuis longtemps. Au XVIII^e siècle, le chevalier de Borda établit, par des mesures une formule approchée de la période du pendule simple :

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

où $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est la période des petites oscillations et θ_0 est en radians. Cette formule est un développement limité

de la formule exacte (M5.7) :

Calcul : Formule de Borda

On part de la formule (M5.7) et on effectue un développement limité à l'ordre 4 des cosinus :

$$\begin{aligned}
 T &= \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - 1 + \frac{\theta_0^2}{2} - \frac{\theta_0^4}{24}}} = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{-\frac{\theta^2 - \theta_0^2}{2} + \frac{\theta^4 - \theta_0^4}{24}}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\theta_0^2 - \theta^2) \left(1 - \frac{\theta^2 + \theta_0^2}{12}\right)}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \sqrt{1 - \frac{\theta^2 + \theta_0^2}{12}}} \\
 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1 + \frac{\theta^2 + \theta_0^2}{24}}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} d\theta \text{ par DL de } \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} \\
 &= -2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\pi}^0 \frac{1 + \theta_0^2 \frac{1 + \cos^2 u}{24}}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} \cos^2 u} \theta_0 \sin u du \text{ par changement de variable } \theta = \theta_0 \cos u \\
 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi} \left(1 + \theta_0^2 \frac{3 + \cos(2u)}{48}\right) du \text{ puisque } 1 - \cos^2 u = \sin^2 u \text{ et } \cos^2 u = \frac{1 + \cos(2u)}{2} \text{ et } \sin u \geq 0 \\
 &= 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left[u + \theta_0^2 \frac{3u + \frac{1}{2} \sin(2u)}{48}\right]_0^{\pi} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left(\pi + \frac{3\pi\theta_0^2}{48} + 0\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)
 \end{aligned}$$

M5.C. Coordonnées cylindriques

Si on passe dans l'espace tridimensionnel, il faut ajouter une troisième coordonnée : l'altitude z .

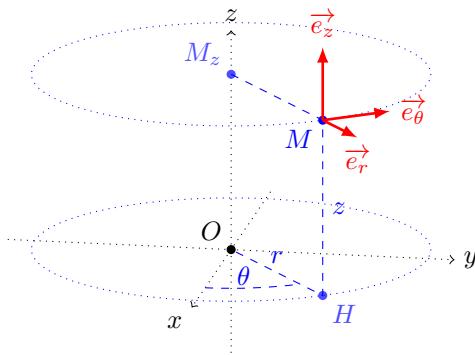


FIGURE M5.7 – Coordonnées cylindriques.

Définition : Coordonnées cylindriques

Soit un point M de l'espace (figure M5.7). On note M_z son projeté orthogonal sur l'axe Oz , et H son projeté orthogonal sur le plan xOy . Alors on repère M par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où :

- r et θ sont les coordonnées polaires de H dans le plan xOy
- $z = \overline{OM_z}$

Ce système est celui utilisé par les grutiers dans les chantiers (figure M5.8) : pour amener son chargement à destination, le grutier :

- tourne sa grue pour être en face de la destination (réglage de θ)
- déplace le chariot sur la grue pour être au-dessus de la destination (réglage de r)
- descend son chargement (réglage de z)

On définit alors la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ en complétant la base polaire avec le vecteur fixe \vec{e}_z . On a donc $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$; et $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$.



FIGURE M5.8 – Grue de chantier. (Crédit : Wikipedia/Zeartul)

Propriété : Étude cinématique en coordonnées cylindriques

$$\text{le vecteur position vaut } \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad (\text{M5.8})$$

$$\text{le vecteur vitesse vaut } \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad (\text{M5.9})$$

$$\text{le vecteur accélération vaut } \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (\text{M5.10})$$

Démonstration

Pour le vecteur position, il suffit d'utiliser Chasles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Ensuite, on dérive en utilisant les relations des dérivées des vecteurs de base.

Comme précédemment, on a aussi le petit déplacement qui nous servira bientôt pour les calculs d'énergie :

Propriété : Petit déplacement

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \quad (\text{M5.11})$$

Remarque : La base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est mobile, mais cela ne change rien aux méthodes de calcul déjà connues. Ainsi, si on a deux vecteurs $\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_z\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_z\vec{e}_z$,

- le produit scalaire s'écrit $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_r \cdot B_r + A_\theta \cdot B_\theta + A_z \cdot B_z$
- la norme d'un vecteur s'écrit $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_z^2}$

Coordonnées cylindriques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Système de coordonnées cylindriques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas des coordonnées cylindriques.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

Coordonnées cylindriques

QCMs

réponses page 657

QCM : compréhension du cours

Q1.

En coordonnées polaires, on repère un point par

Q2.

La base polaire est une base

- (a). immobile (b). mobile

Q3.

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} =$$

- (a). $-\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ (b). $-\dot{\theta} \vec{e}_r$
 (c). $\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ (d). $\dot{\theta} \vec{e}_r$

Q4.

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} =$$

- (a). $-\dot{\theta} \vec{e_r}$ (b). $-\dot{\theta} \vec{e_\theta}$
 (c). $\dot{\theta} \vec{e_r}$ (d). $\dot{\theta} \vec{e_\theta}$

Q5.

Si un point a un mouvement circulaire à vitesse constante, son accélération est nulle.

✓ QCM : Vitesse dans un mouvement circulaire ✗

Rappel : la vitesse d'un point en mouvement circulaire de rayon R s'écrit $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. On appelle *vitesse angulaire* la variable $\dot{\theta}$.

Si le mouvement est uniforme, alors la période T du mouvement est reliée à la vitesse angulaire par $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$.

Q6.

Une nacelle de grande roue décrit un cercle de 20 m de rayon en 1 min. Sa vitesse angulaire vaut

Q7.

et sa vitesse vaut

Q8.

Un train aborde une courbe de rayon 700 m à $220 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Il décrit cette courbe avec une vitesse angulaire :

- (a). $11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (b). $0,087 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
 (c). $0,31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (d). $3,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q9.

Un disque tourne à $33 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Sa vitesse angulaire vaut :

- | | |
|--|---|
| (a). $3,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | (b). $0,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| (c). $207 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ | (d). $0,03 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ |

Q10.

Un point de ce disque situé à 12 cm du centre a pour vitesse :

- | | |
|---|---|
| (a). $4,1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ | (b). $0,4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| (c). $408 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ | (d). $42 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ |

**QCM : Accélération dans un mouvement circulaire uniforme**

Rappel : dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, l'accélération va vers l'intérieur (centripète) et sa norme vaut $R\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R}$ avec R le rayon du cercle.

Q11.

Une voiture aborde à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ un virage de rayon 130 m. L'accélération centripète vaut :

- | | |
|---|---|
| (a). $3,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | (b). $2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| (c). $63,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | (d). $49,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |

Q12.

Une nacelle de grande roue décrit un cercle de 20 m de rayon en 1 min. Son accélération vaut :

- | | |
|---|--|
| (a). $0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | (b). $1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| (c). $0,08 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | (d). $2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |

Q13.

Un train aborde à une vitesse $280 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ un virage de rayon R . Les passagers subiront une accélération inférieure à $2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ si :

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a). $R > 1400 \text{ m}$ | (b). $R > 3800 \text{ m}$ |
| (c). $R > 2900 \text{ m}$ | (d). $R > 900 \text{ m}$ |

Q14.

À quelle vitesse maxi un pilote d'avion peut-il réaliser un virage de rayon 300 m s'il ne veut pas ressentir une accélération supérieure à 3,5 fois l'accélération de la pesanteur (risque de voile noir) ?

- | | |
|--|--|
| (a). $360 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ | (b). $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| (c). $220 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ | (d). $160 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ |

Coordonnées cylindriques

Exercices

réponses page 658

Exercice M5.1 : Pendule simple amorti [*]

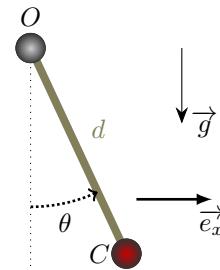
Le pendule du professeur Tournesol est constitué d'un fil de longueur $\ell = 19\text{ cm}$ terminé par une masse $m = 50\text{ g}$. Lors de son mouvement, la masse est soumise à une force de frottements de la forme $-\vec{f} \cdot \vec{v}$ avec $f = 3,5 \times 10^{-3}\text{ USI}$ et \vec{v} la vitesse.

- On repère la position du pendule par son angle α avec la verticale. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par α .
- Simplifiez cette équation pour de petites oscillations.
Calculez la période propre T_0 .
- On lâche le pendule sans vitesse initiale depuis un angle $\alpha = 15^\circ$. Déterminez $\alpha(t)$.

Exercice M5.2 : Pendule dans le vent [**]

Un crochet de grue C de masse $m = 48\text{ kg}$ est suspendu au bout d'un câble inextensible de longueur $d = 42\text{ m}$ accroché en un point fixe O . On note $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ le champ de pesanteur. On néglige les frottements.

Le vent se met à souffler et exerce sur la masse une force horizontale $\vec{F} = F \cdot \vec{e}_x$ avec $F = 60\text{ N}$.



- Déterminez l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ entre le câble et la verticale.
- Calculer la valeur de l'angle correspondant à une position d'équilibre.
- Initialement, le câble est vertical vers le bas et immobile. Le vent se met à souffler ; déterminez $\theta(t)$ en supposant que les angles restent petits, donc que l'ED peut être linéarisée.

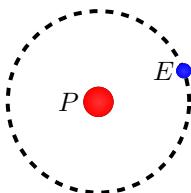
Exercice M5.3 : Atome d'hydrogène [*]

Un électron E de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}\text{ kg}$ tourne autour d'un proton P immobile, attiré par la force de Coulomb

$$\vec{f} = -\frac{Ke^2}{EP^2} \vec{u}_{PE}$$

où $K = 9 \times 10^9\text{ USI}$, $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$, EP est la distance entre l'électron et le proton, et \vec{u}_{PE} le vecteur unitaire du proton vers l'électron.

On suppose pour simplifier que l'orbite de l'électron est circulaire, de rayon r .



- Placez la base polaire sur la figure ; exprimer \vec{f} à l'aide des coordonnées polaires.
- Exprimez l'accélération de l'électron en coordonnées polaires.
- En appliquant le PFD à l'électron, montrez que $\dot{\theta}$ est constant, et exprimez sa valeur en fonction de r et des constantes.
- En déduire la vitesse v de l'électron. AN pour $r = 52\text{ pm}$.

Exercice M5.4 : Mouvement circulaire uniforme d'une planète [**]

On suppose que la Terre effectue autour du Soleil un mouvement circulaire de rayon R_0 et de période T_0 .

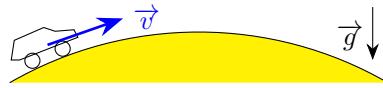
1. Exprimez la position puis la vitesse de la Terre (T) sur la base cylindrique, et enfin son accélération.
2. Appliquez le PFD à la Terre (masse M_T), qui est soumise uniquement à la force d'attraction du Soleil (masse M_S), dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.
En projetant sur \vec{e}_θ , déduisez-en que la vitesse angulaire et la vitesse sont constantes (mouvement uniforme).
En projetant sur \vec{e}_r , exprimez la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ en fonction des constantes de l'énoncé et de la constante d'attraction universelle G .
3. En exprimant le temps T_0 mis par la Terre à faire un tour (donc à parcourir la longueur de son orbite), reliez T_0 à $\dot{\theta}$. Déduisez-en une relation de la forme $\frac{T_0^2}{R_0^3} = cst$; comment s'appelle cette relation ?
4. A.N. : $R_0 = 1,5 \times 10^{11}$ m ; T_0 à connaître ; $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI ; calculez M_S .

Exercice M5.5 : Décollage d'une voiture [*]

Un concurrent du Paris-Dakar aborde une dune avec sa voiture (V) de masse m . Sa trajectoire a alors la forme d'un arc de cercle de rayon R et de centre O ; on notera θ l'angle entre \vec{e}_r et la verticale.

On suppose qu'il parcourt cette trajectoire avec une vitesse constante v .

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.



1. Exprimez la vitesse de la voiture dans la base polaire ; déduisez-en $\dot{\theta}$ en fonction de v et R .
 2. Exprimez l'accélération de la voiture en fonction de v , R et \vec{e}_r .
 3. Déduisez du PFD projeté sur \vec{e}_r , la valeur de la réaction normale \vec{N} .
 4. À quelle condition sur v la voiture reste-t-elle en contact avec le sol ?
- AN : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $R = 100 \text{ m}$, θ variant entre -45° et 45° .

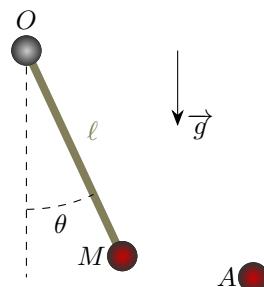
Exercice M5.6 : Pendule électrisé [*]

On considère un pendule simple formé d'une sphère de polystyrène aluminisé, de masse $m = 1,4 \text{ g}$, suspendue au bout d'un fil inextensible de longueur $\ell = 28 \text{ cm}$ et de masse négligeable.

On approche en A un objet chargé électriquement ; il apparaît alors une force d'attraction entre la charge et la sphère aluminisée ; on admet que l'énergie potentielle d'interaction peut s'écrire approximativement comme

$$U(\theta) = -\frac{C}{(p - \cos(\theta - \frac{\pi}{4}))^2}$$

avec C une constante et $p = 1,1$. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

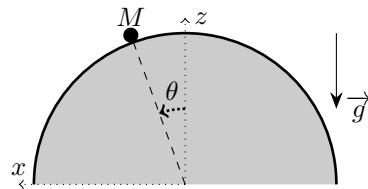


1. Quelle est la dimension de C ?
2. Montrer que le pendule est conservatif, et exprimez son énergie potentielle en fonction de θ et des données.
3. Déterminez l'équation vérifiée par θ à l'équilibre.
4. On mesure $\theta_{\text{équilibre}} = 21^\circ$; calculez numériquement C .

Exercice M5.7 : Glissement sur un dôme enneigé [**]

Cet exercice un peu tiré par les cheveux est un grand classique, à connaître.

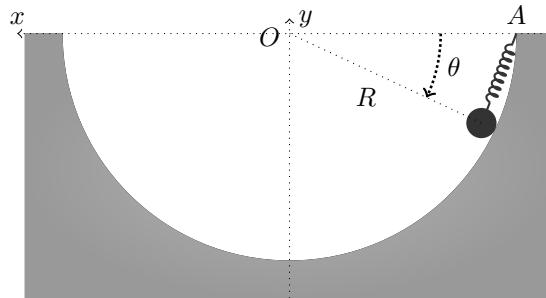
Une montagne imaginaire a la forme d'une demi-sphère de rayon R . Elle est recouverte de neige. On pose un objet de masse m au sommet de la montagne, avec une vitesse initiale très faible (quasi nulle) ; il se met alors à glisser sans frottements sur la montagne. On repère sa position par son angle θ .



1. Placez la base polaire sur le schéma, ainsi que les forces qui s'exercent sur M .
2. Exprimez la position puis la vitesse et l'accélération du point M en coordonnées polaires.
3. Appliquez le PFD au point M projeté sur le vecteur \vec{e}_r ; déduisez-en la réaction $N\vec{e}_r$ du sol sur le point M , en fonction de θ et $\dot{\theta}^2$.
4. Justifiez que le système est conservatif, et exprimez son énergie mécanique en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des constantes.
Déduisez-en une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes.
5. En combinant les deux questions précédentes, exprimez N en fonction de θ et des constantes.
6. Montrez que l'objet décolle pour un angle dont on fera l'AN.

Exercice M5.8 : Objet sur une glissière circulaire retenu par un ressort [**]

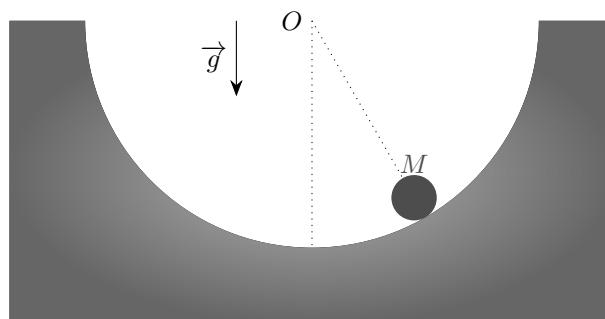
Un objet M de masse m peut coulisser sans frottements sur une glissière de centre O et de rayon R . Sa position est repérée par l'angle θ compris entre 0 et π . Un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 est attaché à M à un bout et au point fixe A à l'autre bout.



1. Exprimez la longueur AM en fonction de R et de $\theta/2$.
Indication : divisez en deux le triangle OMA qui est isocèle.
2. Montrez que le système M est conservatif, et exprimez ses énergies cinétique et potentielle.
3. Établissez l'équation différentielle du mouvement.
4. Trouvez l'équation à résoudre pour trouver les positions d'équilibre.
Résolvez cette équation dans le cas où $\ell_0 = 0$.
5. Calculez dans ce cas la pulsation des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Exercice M5.9 : Mouvement avec frottements dans une glissière circulaire [**]

Un objet M de masse m peut glisser avec un coefficient de frottements solides $f = 0,2$ à l'intérieur d'une glissière ayant la forme d'un cercle de rayon $R = 50\text{ cm}$. On repère sa position par l'angle θ par rapport à la verticale.



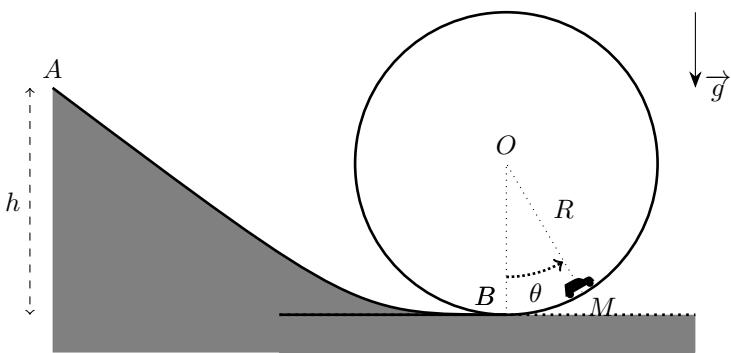
1. Établir les deux équations différentielles fournies par le PFD dans le cas où la masse M glisse vers la gauche ($\dot{\theta} < 0$).
2. En éliminant la réaction entre les deux équations, établir l'ED du mouvement.
3. Résolvez cette équation numériquement avec Python et tracez $\theta(t)$; déterminez l'angle θ minimum atteint.
4. Une fois cet angle minimal atteint, l'équation précédente n'est plus valable car le mouvement change. Vérifiez, avec les valeurs numériques trouvées, que la masse reste immobile à cette position.

Exercice M5.10 : Looping [***]

Une petite voiture (considérée comme très petite : point M), de masse m , est lâchée d'une hauteur h (point A) ; elle descend jusqu'au point B puis entre dans un looping de rayon R et de centre O . On va chercher à déterminer si elle réussira à passer la boucle.

On considère que les frottements (de l'air et de la piste) sont négligeables. La position de la voiture une fois qu'elle est sur la boucle repérée par l'angle θ .

On note g la norme de l'accélération de la pesanteur, et on se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.



1. En utilisant l'énergie, trouvez la vitesse v_0 de la voiture lorsqu'elle atteint le point B en bas de la boucle.

Remarque : ici, une étude cinématique poussée n'est pas nécessaire, car seuls les points de départ et d'arrivée sont utiles.

2. Établissez l'expression de l'énergie mécanique de la voiture une fois qu'elle est dans la boucle, en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des constantes.

Que vaut cette énergie mécanique en fonction de v_0 et des données ? puis de h et des données ?

3. Montrez que la voiture ne pourra jamais dépasser un certain angle θ_m ; cet angle existe-t-il toujours ?

4. En fait, la voiture n'arrivera pas forcément à cet angle : elle risque de tomber avant, car la liaison avec la piste est unilatérale.

(a) À l'aide du PFD projeté sur \vec{e}_r , exprimez la valeur de la réaction du support en fonction de m , R , $\dot{\theta}$, θ et g tant que la voiture reste en contact avec la piste.

(b) En reprenant l'expression de l'énergie mécanique trouvée précédemment, exprimez la vitesse $R\dot{\theta}$ lorsque la voiture a atteint un angle θ donné (on supposera pour l'instant que la voiture reste en contact avec la piste) en fonction de θ et des constantes.

(c) À l'aide des résultats précédents, déterminez la réaction du support uniquement en fonction de θ et des constantes.

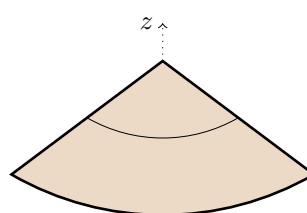
(d) Montrer que la voiture décroche de la piste pour un angle θ_d à exprimer. Cet angle existe-t-il toujours ?

Exercice M5.11 : La promenade d'un dahu [***]

Un dahu se promène sur une montagne en forme de cône, dont la surface est donnée en coordonnées cylindriques par la relation

$$r(z) = \frac{h - z}{p}$$

où h est l'altitude de la montagne et $p = 0,4$ sa pente.



1. Le dahu veut faire le tour de la montagne selon une trajectoire circulaire à l'altitude z

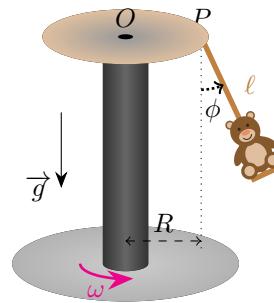
(a) Le dahu considéré dans cet exercice fait partie de la sous-espèce qui a les jambes de droite plus courtes que les jambes de gauche. Dans quel sens tourne-t-il autour de la montagne (vu de dessus) ? En déduire le signe de $\dot{\theta}$.

- (b) On note v la norme de la vitesse du dahu. Exprimer sa vitesse puis son accélération dans la base cylindrique, en fonction de h , p , z et v .
2. Le dahu décide maintenant de grimper la montagne en formant une hélice ; à chaque tour de la montagne, il monte ainsi d'une hauteur b .
À l'instant initial, $z = z_0$, $r = r(z_0) = r_0$, $\|\vec{v}\| = v_0$ et $\theta = 0$.
- Reliez z à θ par une loi affine.
 - Le dahu s'essouffle en montant, et ralentit, de sorte que $\dot{\theta}$ reste égal à sa valeur initiale $-\frac{v_0}{r_0}$.
Exprimez la vitesse du dahu dans la base cylindrique en fonction des conditions initiales, de t et des constantes.
 - Exprimez alors l'accélération du dahu.
3. Le dahu étudié a les pattes séparées latéralement de 30 cm.
(a) Calculez la différence de longueur entre ses pattes de droite et de gauche en supposant qu'il est horizontal à flanc de cette montagne.
(b) Calculez la longueur supplémentaire parcourue par ses pattes de gauche à chaque tour de la montagne.
4. Cet exercice vous sera-t-il utile pour chasser le dahu ?

Exercice M5.12 : Position d'équilibre d'une nacelle de manège [****]

On modélise une nacelle de manège et son passager par un point matériel M , de masse m , suspendu au bout d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable. L'autre extrémité de cette tige reliée par une liaison pivot à un axe horizontal, solidaire de l'axe vertical du manège. La liaison pivot P se trouve à une distance R de l'axe central. L'ensemble tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe du manège.

On repère le mouvement de M par l'angle ϕ entre la tige et la verticale. On admet (il faudrait le cours sur la mécanique des solides pour le montrer) qu'on peut considérer que la tige peut exercer sur M une force qui ne contient qu'une composante parallèle à PM et une composante perpendiculaire au plan de la figure ; autrement dit, la projection de la force exercée par la tige sur M , sur la direction perpendiculaire à la tige dans le plan de la figure, est nulle.



- On se place dans un système de coordonnées cylindriques, avec l'axe Oz confondu avec l'axe vertical du manège. Placez la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ sur la figure (Attention : c'est une question délicate).
- Écrire les équations du mouvement est ici une tâche fort compliquée. On va se contenter de chercher les positions d'équilibre. On suppose donc qu'on est à une position d'équilibre, c'est-à-dire que ϕ est constant (faites attention, ce n'est pas une vraie position d'équilibre, puisque le système tourne encore autour de l'axe du manège). Quel est alors la trajectoire de M ? Déduisez-en sa vitesse et son accélération en fonction de R , ℓ , ϕ et ω .
- Faites le bilan des forces s'exerçant sur M , et projetez-le sur la base locale cylindrique (on appellera R_r et R_p les composantes de la force exercée par la tige sur M , respectivement selon PM et perpendiculairement à la figure).
- Écrivez alors le PFD projeté sur la base cylindrique. En éliminant R_r , montrez que l'angle ϕ doit vérifier l'équation $\tan \phi = \frac{\omega^2}{g} (R + \ell \sin \phi)$.
- Tracez sur un même graphique, en fonction de ϕ , $\tan \phi$, puis l'allure de $\frac{\omega^2}{g} (R + \ell \sin \phi)$ dans le cas particulier où $R = \ell$ (pour simplifier le dessin) et pour différentes valeurs de $\frac{\omega^2}{g}$. En déduire le nombre de solutions et l'intervalle dans lequel chacune d'elles se trouve. Quelle est la position d'équilibre la plus confortable pour les occupants de la nacelle ?

Coordonnées cylindriques

TDs numériques

réponses page 661

TD numérique : Le pendule simple

On va étudier numériquement un pendule simple de longueur ℓ ; pour les AN on prendra $\ell = 180 \text{ cm}$, $m = 1 \text{ kg}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Reétablir l'équation vérifiée par l'angle θ du pendule :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (\text{M5.12})$$

- Résoudre cette équation à l'aide de `odeint` pour $\theta(0) = 1^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$.

Indication : pour la résolution numérique, les angles doivent être en radians.

Tracez $\theta(t)$, ainsi que le portrait de phase.

- Calculez les tableaux donnant les énergies E_c , E_p (on prendra une énergie nulle en bas) et E_m . Tracez ces énergies en fonction du temps.
- Tracez sur le même graphique les courbes $\theta(t)$ pour des angles $\theta(0)$ valant 10° , 20° , ..., 120° . Commentez.
- Tracez $\theta(t)$ pour les CI : $\theta(0) = -60^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = +240^\circ/\text{s}$. Commentez.
- Pour un mouvement périodique, la période du pendule est donnée en fonction de l'angle θ_{max} maximal par la formule

$$T = \int_{-\theta_{max}}^{\theta_{max}} \sqrt{\frac{2\ell}{g(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} d\theta \quad (\text{M5.13})$$

Calculez cette période pour des angles θ_{max} allant de 10° à 170° à l'aide d'une méthode des rectangles. Tracez la courbe $T(\theta_{max})$ et vérifiez la compatibilité avec les simulations de la question 4.

- On peut aussi essayer de mesurer la période directement sur les simulations. Écrivez une fonction `T_si mul(theta_max)` qui simule par `odeint` la courbe de $\theta(t)$, puis mesure la période. Tracez cette période entre 10° et 170° et comparez avec la valeur donnée par l'intégrale.

TD numérique : Le pendule simple (2)

On va continuer à étudier dans ce TD le pendule simple un peu modifié. On part toujours d'un pendule formé d'une masse m suspendue au bout d'un fil de longueur ℓ fixé en un point O . On prendra les valeurs numériques : $\ell = 1,80 \text{ m}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $f = 0,1 \text{ USI}$, $m = 500 \text{ g}$

1. Pendule amorti

La masse m est soumise à une force de frottements $-f \cdot \|\vec{v}\| \cdot \vec{v}$.

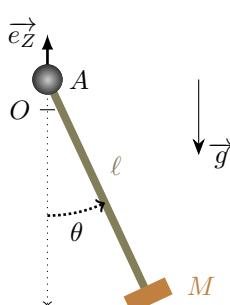
- Établissez la nouvelle ED vérifiée par θ .

(b) Résolvez-la pour et comme CI : $\theta(0) = 40^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$, sur $10T_0$ ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$). Tracez $\theta(t)$ ainsi que le portrait de phase.

(c) Idem pour $\theta(0) = 0^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 400^\circ/\text{s}$.

2. Pendule secoué

On secoue maintenant ce pendule ; plus exactement le point de fixation est mobile, on le note A et il bouge verticalement selon la loi $Z(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ avec $Z_0 = 5 \text{ cm}$. On a donc $\overrightarrow{OA} = Z(t) \cdot \vec{e}_Z$.

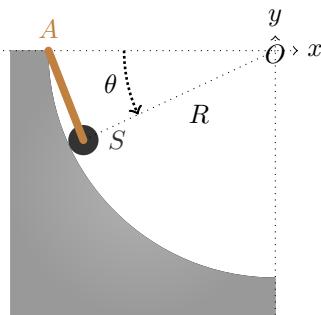


- (a) Projetez \vec{e}_Z dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Déduisez-en l'accélération $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ de la masse.
- (b) On admet que la force de frottements vaut toujours $-f\cdot\ell^2\cdot|\dot{\theta}|\dot{\theta}$. Montrez que θ obéit à l'équation différentielle
- $$\ddot{\theta} + \frac{f\cdot\ell}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta - \frac{Z_0\omega^2}{\ell} \cos(\omega t) \sin \theta = 0 \quad (\text{M5.14})$$
- (c) Résolvez cette équation pour $\theta(0) = 1^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/\text{s}$, sur $50T_0$, avec $\omega = \omega_0$.
- (d) Même question avec $\omega = 2\omega_0$, puis $\omega = 3\omega_0$. Commentez.
- (e) Tracez la courbe de résonance (non linéaire).

3. Vous pouvez reprendre le même genre d'étude si on secoue maintenant horizontalement le point A .

TD numérique : Descente en rappel d'un spéléologue contre une paroi circulaire

Un spéléologue S de masse $m = 68 \text{ kg}$, assimilé à un point matériel, se laisse glisser sur une paroi ayant la forme d'un cercle de centre O et de rayon $R = 55 \text{ m}$. Sa position est repérée par l'angle θ compris entre 0 et π . Un câble élastique, équivalent à un ressort de raideur $k = 1300 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 variable lorsqu'il est tendu (si sa longueur est inférieure à ℓ_0 , alors il n'exerce aucune force), est attaché à S à un bout et au point fixe A à l'autre bout. Le contact entre S et la paroi se fait avec un coefficient de frottements $f = 0, 9$. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour les applications numériques.



- Placez la base polaire. Décomposez le vecteur \overrightarrow{AM} sur cette base.
- Montrez que le PFD projeté sur la base polaire donne les équations suivantes lorsque le câble est tendu :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 &= mg \sin \theta - N - k \frac{R\sqrt{2-2\cos\theta-\ell_0}}{\sqrt{2-2\cos\theta}} (1 - \cos \theta) \\ mR\ddot{\theta} &= mg \cos \theta + T - k \frac{R\sqrt{2-2\cos\theta-\ell_0}}{\sqrt{2-2\cos\theta}} \sin \theta \end{cases}$$

avec $-N\vec{e}_r + T\vec{e}_\theta$ la force de frottements.

- On suppose pour le moment que le spéléologue est immobile. Simplifiez les équations précédentes ; en appliquant les lois de Coulomb des frottements solides, établir les équations vérifiées par les angles θ_1 et θ_2 correspondant aux angles extrêmes pour lesquels il peut y avoir équilibre.
Résolvez ces deux équations par un programme Python et la méthode de dichotomie, pour $\ell_0 = 31 \text{ m}$.
- Au départ, le spéléologue ne peut pas être à l'équilibre sur la paroi verticale en $\theta = 0^\circ$. On procède donc ainsi pour le descendre : à partir de la position de départ ($\theta(0) = 0,02^\circ$, $\dot{\theta}(0) = 2^\circ/\text{s}$, $\ell(0) = 0$), on déroule la corde selon la loi $\ell_0(t) = \alpha \cdot t$ avec $\alpha = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Simulez $\theta(t)$ avec une méthode d'Euler jusqu'au moment où le spéléologue s'arrête. Mesurez l'angle à ce moment-là, ainsi que ℓ_0 .

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : compréhension du cours

- Q1.(a)
- Q2.(b)
- Q3.(c)
- Q4.(a)
- Q5.(b)

La vitesse a une norme constante, mais sa direction change, donc l'accélération est non nulle.

Réponses au QCM : Vitesse dans un mouvement circulaire

- Q6.(c)
- Q7.(a)
- Q8.(b)
- Q9.(a)
- Q10.(d)

Réponses au QCM : Accélération dans un mouvement circulaire uniforme

- Q11.(a)
- Q12.(a)
- Q13.(c)
- Q14.(b)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M5.1 : Pendule simple amorti [*]

1. $m\ell\ddot{\alpha} + f\ell\dot{\alpha} + mg \sin \alpha = 0$
2. $\alpha(t) = e^{-0,035t} [15 \cos(7,2t) + 0,073 \sin(7,2t)]^\circ$

Réponses de l'exercice M5.2 : Pendule dans le vent [**]

1. $md\ddot{\theta} + mg \sin \theta - F \cos \theta = 0$
2. $\theta_{eq} = \arctan \frac{F}{mg} = 0,13 \text{ rad} = 7,3^\circ$.
3. $\theta(t) = \frac{F}{mg} (1 - \cos(\omega_0 t))$

Réponses de l'exercice M5.3 : Atome d'hydrogène [*]

1. $\vec{f} = -\frac{Ke^2}{r^2} \vec{e}_r$
2. $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$
3. $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Ke^2}{mr^3}}$
4. $v = \sqrt{\frac{Ke^2}{mr}} = 2,2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M5.4 : Mouvement circulaire uniforme d'une planète [**]

1. $\vec{a} = -R_0\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R_0\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.
2. $\dot{\theta}^2 = \frac{GM_S}{R_0^3}$.
3. $\frac{T_0^2}{R_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$: c'est la troisième loi de Képler.
4. $M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$

Réponses de l'exercice M5.5 : Décollage d'une voiture [*]

1. $\dot{\theta} = \frac{v}{R} = cst$
2. $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$
3. $N = m \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{R} \right)$
4. La voiture ne décolle pas si $v < 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 95 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Réponses de l'exercice M5.6 : Pendule électrisé [*]

1. C est une énergie.
2. $E_p(\theta) = -mgl \cos \theta - \frac{C}{(p - \cos(\theta - \frac{\pi}{4}))^2}$
3. $mgl \sin \theta_{eq} (p - \cos(\theta_{eq} - \frac{\pi}{4}))^3 + 2C \sin(\theta_{eq} - \frac{\pi}{4}) = 0$
4. $C = 1,1 \times 10^{-5} \text{ J}$

Réponses de l'exercice M5.7 : Glissement sur un dôme enneigé [**]

- 1.
2. $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$.
3. $N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2$.
4. $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)$

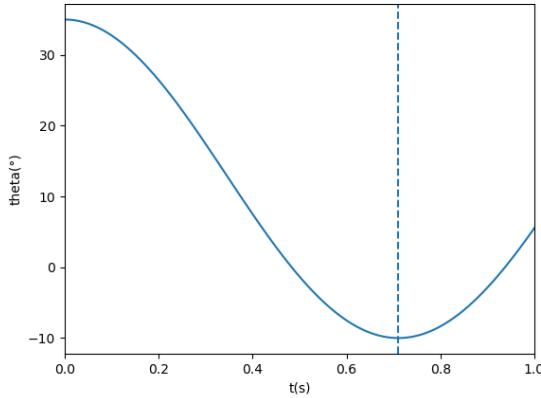
5. $N = mg(3 \cos \theta - 2)$.
 6. L'objet décolle lorsque N devient négatif, donc pour $\theta > \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ$

Réponses de l'exercice M5.8 : Objet sur une glissière circulaire retenue par un ressort [**]

1. $AM = 2R \sin \frac{\theta}{2}$
2. $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \sin \theta + \frac{1}{2}k(2R \sin \frac{\theta}{2} - \ell_0)^2$
3. $mR^2\ddot{\theta} - mgR \cos \theta + kR \cos \frac{\theta}{2}(2R \sin \frac{\theta}{2} - \ell_0) = 0$
4. $\tan \theta = \frac{mg}{kR}$
5. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{kR}\right)^2}}$

Réponses de l'exercice M5.9 : Mouvement avec frottements dans une glissière circulaire [**]

1. $\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -N + mg \cos \theta \\ mR\ddot{\theta} = f.N - mg \sin \theta \end{cases}$
2. $R\ddot{\theta} = fR\dot{\theta}^2 + fg \cos \theta - g \sin \theta$



3.

On voit qu'à 0,71 s, l'objet fait demi-tour pour un angle minimal de -10° ; à partir de là, la courbe n'est plus juste.

4. $|\frac{T}{N}| = \tan \theta = 0,176 < f$ donc l'objet reste bien immobile.

Réponses de l'exercice M5.10 : Looping [***]

1. $v_0 = \sqrt{2gh}$.
2. $E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \cos \theta = mg(h - R)$
3. Donc θ ne peut pas dépasser l'angle limite $\arccos\left(1 - \frac{h}{R}\right)$ qui n'existe que si $h < R$.
4. $N = mg(3 \cos \theta - 2 + 2\frac{h}{R})$ qui s'annule si $\cos \theta = \frac{2}{3} - \frac{2h}{3R}$.
 Si $h > \frac{5}{2}R$, cette limite n'existe plus et la voiture effectue le looping sans tomber.

Réponses de l'exercice M5.11 : La promenade d'un dahu [***]

1. $\dot{\theta} < 0$ et $\vec{a} = -v\dot{\theta}\vec{e}_r = -\frac{pv^2}{h-z}\vec{e}_r$
2. $\vec{a} = -\frac{h-z_0+b\frac{v_0t}{2\pi r_0}}{pr_0^2}v_0^2\vec{e}_r - \frac{bv_0^2}{2\pi pr_0^2}\vec{e}_\theta$
3. Il y a 12 cm d'écart de hauteur des pattes.
4. Non, car le dahu est un animal protégé.

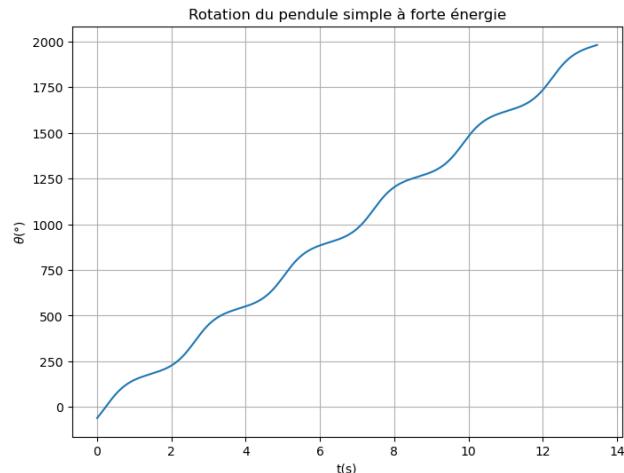
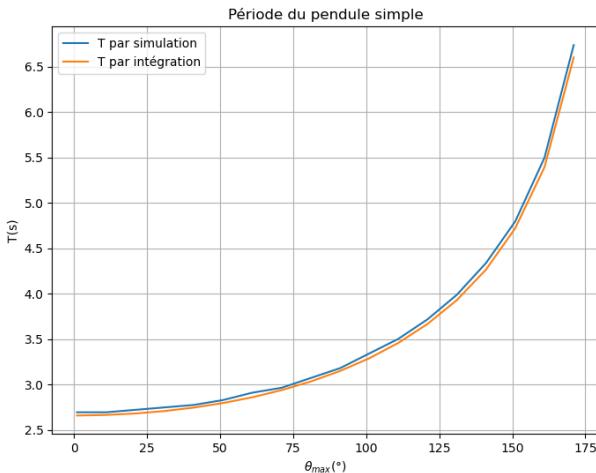
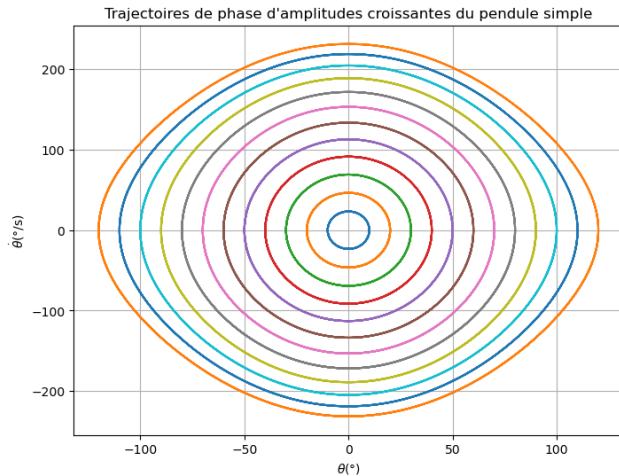
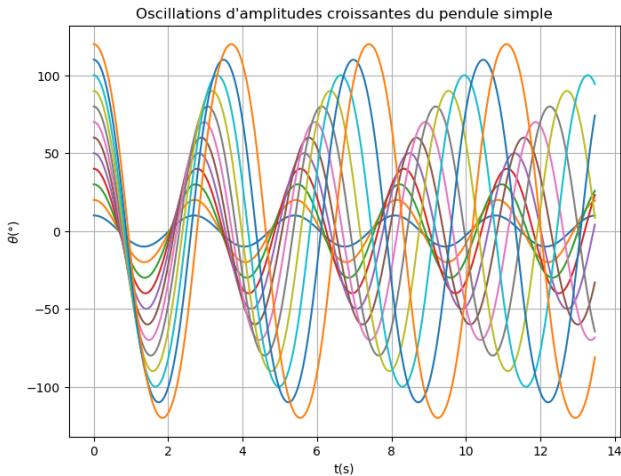
Réponses de l'exercice M5.12 : Position d'équilibre d'une nacelle de manège [****]

1. \vec{e}_r est horizontal sur la figure, vers l'extérieur ; \vec{e}_θ est perpendiculaire à la figure, rentrant ; \vec{e}_z est dans le plan de la figure, vertical, vers le haut.
2. $\vec{a} = -(R + \ell \sin \phi) \omega^2 \vec{e}_r$.
3. Deux forces s'exercent sur M : son poids $-mg\vec{e}_z$ et la force de la tige $\vec{R} = R_r \sin \phi \vec{e}_r + R_p \vec{e}_\theta - R_r \cos \phi \vec{e}_z$.
4. $\tan \phi = \frac{\omega^2}{g}(R + \ell \sin \phi)$
5. On trace la courbe de $\tan \phi$ et celle de $\frac{\omega^2}{g}R(1 + \sin \phi)$, pour différentes valeurs de $\frac{\omega^2}{g}$. Les solutions de l'équation précédente sont données par l'intersection des courbes. On constate facilement qu'il y a toujours deux solutions :
 - Une solution qui sera forcément comprise entre 0 et $\pi/2$. Quand ω est faible, cette solution est proche de 0 ; si ω augmente, elle tend vers $\pi/2$. C'est une solution qu'on comprend facilement en imaginant la situation physique.
 - Une solution qui sera forcément entre π et $3\pi/2$. Cette solution est peu confortable ; on peut montrer (chapitre sur les référentiels non galiléens) que cette position est instable.

Réponses aux TDs numériques

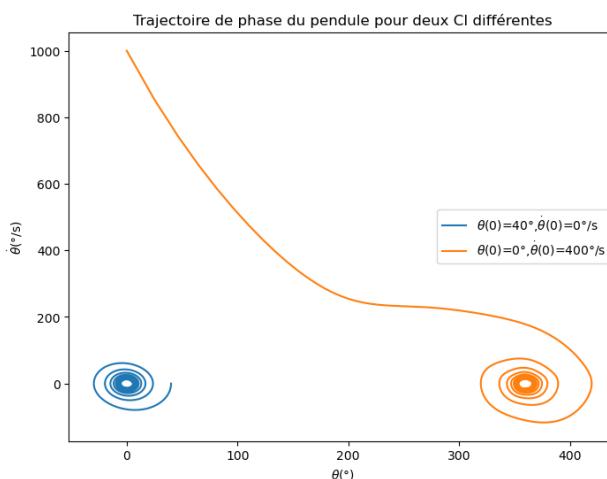
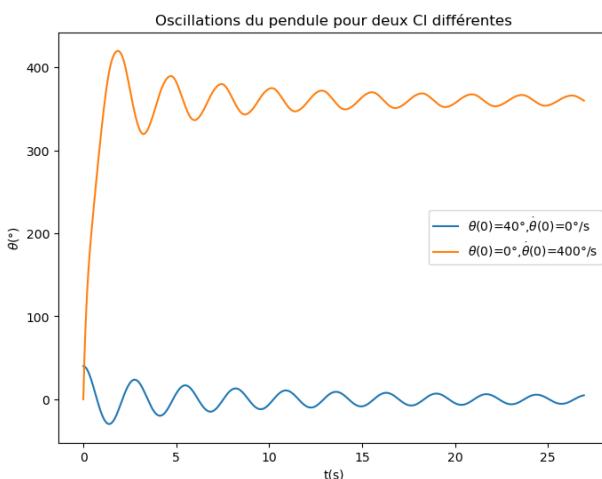
Réponses au TD d'info : Le pendule simple

Pour des conditions initiales avec peu d'énergie, on observe des oscillations quasi-sinusoidales et une trajectoire de phase elliptique ; pour de fortes amplitudes, la période s'allonge et les trajectoires de phase se déforment. Enfin, pour une énergie trop importante, le système tourne sans osciller.



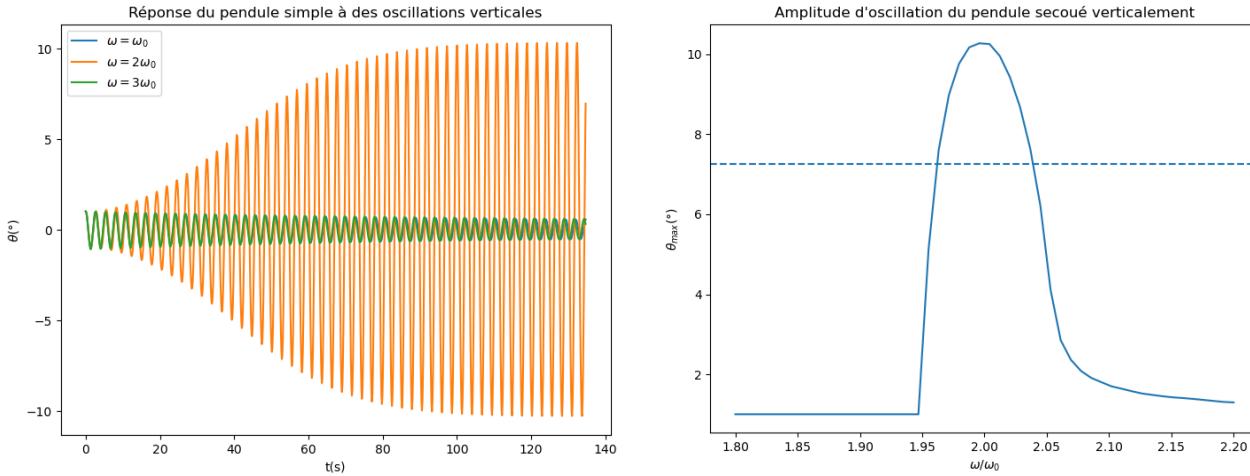
Réponses au TD d'info : Le pendule simple (2)

Le pendule amorti vérifie l'équation différentielle $\ddot{\theta} = -\frac{f \cdot \ell}{m} |\dot{\theta}| \dot{\theta} - \frac{g}{\ell} \sin \theta$; il converge vers un état d'équilibre stable $\theta = 0[360^\circ]$.



Pour le pendule secoué verticalement, on écrit que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = Z(t)\overrightarrow{e_Z} + \ell\overrightarrow{e_r}$ et on en déduit que l'accélération vaut $\ddot{\vec{d}} = \ddot{Z}\overrightarrow{e_Z} - \ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + \ell\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ avec $\overrightarrow{e_Z} = -\cos\theta\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$. Le PFD donne alors l'équation proposée.

Le pendule secoué verticalement présente une résonance lorsque $\omega = 2\omega_0$. La courbe de résonance montre une largeur à -3 dB égale à $0,077\omega_0$ ce qui donne $Q = 26$.



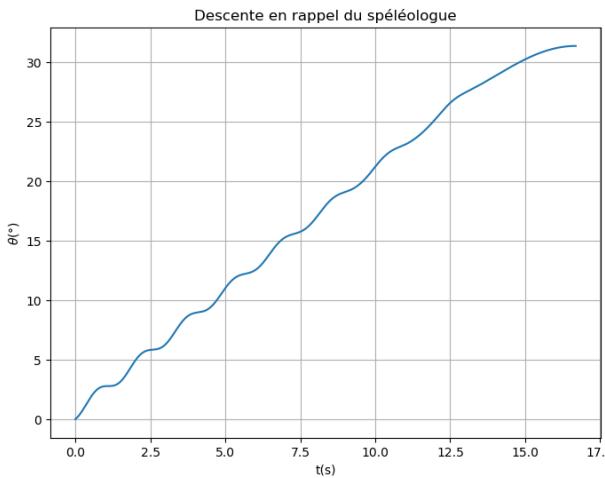
Si on secoue le pendule horizontalement, on trouve une résonance à $\omega = \omega_0$.

Réponses au TD d'info : Descente en rappel d'un spéléologue contre une paroi circulaire

$\overrightarrow{AM} = R(\cos\theta - 1)\overrightarrow{e_r} - R\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$ (attention, $\overrightarrow{e_\theta}$ est vers en bas à droite) de norme $\|\overrightarrow{AM}\| = R\sqrt{2 - 2\cos\theta}$ d'où on tire la force de l'élastique : $-k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{R\sqrt{2-2\cos\theta}} [R(1-\cos\theta)\overrightarrow{e_r} + R\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}]$. Le PFD donne alors facilement les équations demandées.

À l'équilibre, l'angle θ vérifie $mg\cos\theta + T - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{R\sqrt{2-2\cos\theta}} \sin\theta = 0$ avec $|T| \leq f$. $\left[mg\sin\theta - k\frac{R\sqrt{2-2\cos\theta}-\ell_0}{\sqrt{2-2\cos\theta}} (1-\cos\theta) \right]$. La résolution par dichotomie avec les valeurs extrêmes de T donnent $\theta \in [33,0^\circ; 33,3^\circ]$.

Lors de la descente, il y a mouvement, donc cette fois $T = -f.N$:



Le spéléologue se stabilise à $\theta = 31,4^\circ$ pour une longueur de câble $\ell_0 = 33,4$ m.

Mouvements de particules chargées

Cours

Après l'introduction de l'énergie aux chapitres précédents, nous allons faire une pause dans les outils théoriques pour nous intéresser, dans ce chapitre, à une application particulière : les mouvements de particules chargées. Cette étude sera illustrée par de nombreuses applications, dans la vie ordinaire ou dans la recherche scientifique.

M6.A. Forces s'exerçant sur une particule chargée

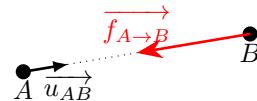
A.1. Étude de la force de Coulomb

Nous allons partir de ce que nous connaissons : la force électrique qui s'applique entre deux particules chargées, appelée encore *force de Coulomb*.

Force de Coulomb

Une particule A de charge électrique q_A exerce sur une particule chargée B de charge électrique q_B une force :

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^2} \vec{u}_{AB} \quad (\text{M6.1})$$



où $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ USI}$ (ϵ_0 est la *permittivité diélectrique du vide*) et \vec{u}_{AB} le vecteur unitaire de A vers B.

Cette force est attractive si les charges sont de signe opposé, et répulsive si les charges sont de même signe.

Calculons quelques ordres de grandeur de cette force par 2 comparaisons.

Considérons un proton et un électron dans un atome d'hydrogène ; ils ont pour charge $+e$ et $-e$ avec $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et sont situés à une distance $a_0 = 5,3 \times 10^{-11} \text{ m}$. La force électrique du proton sur l'électron vaut donc $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N}$. En même temps, il existe entre le proton de masse $m_P = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et l'électron de masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ une force d'attraction gravitationnelle de norme $G \frac{m_P m_e}{a_0^2} = 3,7 \times 10^{-47} \text{ N}$, soit environ 10^{39} fois plus faible.

On peut aussi calculer le poids de l'électron, résultant de l'attraction gravitationnelle de la Terre ; on trouve $m_e g = 8,9 \times 10^{-30} \text{ N}$ soit 10^{22} fois moins que la force électrique.

Propriété : Importance de la force électrique

Dans un problème faisant intervenir des particules chargées, le poids et les autres forces gravitationnelles sont négligeables ; on n'en tiendra jamais compte.

Pourquoi donc le poids joue-t-il un rôle si important dans la vie de tous les jours ? Pourquoi l'attraction gravitationnelle fait-elle tourner la Terre autour du Soleil ? Parce que ce sont des objets neutres, pour lesquels il existe des forces électriques, mais plus faibles et surtout de courte portée. Pour de gros objets neutres, les effets gravitationnels l'emportent.

Illustrons cela par un petit calcul. Considérons, en TP de chimie, deux bêchers remplis de 100 mL d'une solution de sulfate de cuivre à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Chaque bêcher contient $1 \times 10^{-2} \text{ mol}$ de Cu^{2+} et $1 \times 10^{-2} \text{ mol}$ de SO_4^{2-} , soit une charge positive $2 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 10^{-2} \times 6,0 \times 10^{23} = 1920 \text{ C}$ et une charge négative -1920 C qui se compensent.

Il faut espérer qu'elles se compensent bien. Imaginons qu'en versant le sulfatate de cuivre dans les bêchers, un excès de 0,001 % de Cu^{2+} soit allé dans l'un des bêchers. Cela signifie qu'il possède une charge $+0,0192 \text{ C}$ tandis que l'autre bêcher contient une charge $-0,0192 \text{ C}$. Si ces deux bêchers sont placés à 50 cm l'un de l'autre, il va s'exercer entre eux une force électrique attractive de norme $9 \times 10^9 \frac{0,0192^2}{0,5^2} = 13 \times 10^6 \text{ N}$ soit à peu près la poussée de la fusée Ariane 5 au décollage !

On comprend donc pourquoi la matière autour de nous est neutre : si elle ne l'était pas, la force électrique aurait vite fait de réunir les charges positives et négatives pour retrouver la neutralité. Et même lorsque des charges électrostatiques apparaissent, il s'agit de fractions infimes.

Maintenant, imaginons un problème avec N charges électriques q_i placées en des points A_i . Une charge q_B placée en B subit alors une force de la part de toutes ces charges :

$$\vec{f}_{\rightarrow B} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_B}{A_i B^2} \vec{u}_{A_i B}$$

ce qui donne un calcul rapidement très compliqué. C'est pour cela qu'on a décidé de séparer le calcul en deux parties, de manière à le simplifier. Pour cela, réécrivons la force sous la forme :

$$\vec{f}_{\rightarrow B} = q_B \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{A_i B^2} \vec{u}_{A_i B} \right)$$

Le terme entre parenthèses dépend des charges q_i (et de leur emplacement A_i), ainsi que de la **position** de B . Ce terme peut être calculé en tout point B de l'espace, même si aucune charge ne s'y trouve ; notons-le $\vec{E}(B)$. Alors si on place la particule B quelque part, elle subira une force électrique $q_B \cdot \vec{E}(B)$.

A.2. Force de Lorentz

Plus encore, depuis Ampère, on sait que les courants (c'est-à-dire les particules chargées en mouvement) interagissent eux aussi entre eux. Au cours du XIX^e siècle, on a pu montrer que ces deux phénomènes sont liés.

Définition : Champs électrique et magnétique

En tout point de l'espace, on peut définir un *champ électrique* \vec{E} qui est créé par les charges électriques, et qui agit sur les charges électriques. Il s'exprime en $V \cdot m^{-1}$.

En tout point de l'espace, on peut définir un *champ magnétique* \vec{B} qui est créé par les charges électriques en mouvement (les courants), et qui agit sur les charges électriques en mouvement (les courants). Il s'exprime en Tesla (T).

Remarque : Le Tesla est une unité très grande ; on utilise parfois le Gauss : $1 G = 1 \times 10^{-5} T$. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de quelques dizaines de microtesla ; sa valeur au centre de la France métropolitaine est $47 \mu T$.

Le calcul de ces champs n'est pas au programme de première année ; nous verrons simplement plus loin deux dispositifs permettant de créer des champs électriques et magnétiques simples ; vous verrez l'an prochain les théorèmes permettant de calculer ces champs (théorème de Gauss et d'Ampère).

Pour cette année, nous allons admettre l'expression de ces champs, et regarder comment les particules se déplacent dans ces champs. Pour cela, il faut connaître l'action de ces champs sur les particules chargées.

Force de Lorentz

Une particule chargée de charge q placée en un point M et animée d'une vitesse \vec{v} subit une *force électromagnétique* ou *force de Lorentz*

$$\vec{F}_{Lorentz} = q \vec{E}(M) + q \vec{v} \wedge \vec{B}(M) \quad (\text{M6.2})$$

On distingue parfois la *force électrique* $q \vec{E}$ et la *force magnétique* $q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

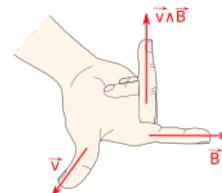
Remarque : $\vec{a} \wedge \vec{b}$ désigne le *produit vectoriel* de \vec{a} par \vec{b} . Il s'agit d'un vecteur qui a les propriétés suivantes :

- il est orthogonal à \vec{a} et à \vec{b}
- son sens est tel que le triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ soit direct (règle de la main droite, cf. ci-dessous)
- sa norme vaut $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$; par conséquent, le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est toujours nul.

Pour déterminer qualitativement le sens de la force de Lorentz, on utilise donc la règle de la main droite : on place le pouce selon \vec{v} , l'index selon \vec{B} , et le produit vectoriel est selon le majeur ; ensuite, si la charge est négative, on inverse le sens pour avoir celui de la force.

Pour ce qui est du calcul exact du produit vectoriel, on le verra un peu plus loin, paragraphe C.3..

La notation $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est une notation française ; à l'international, on utilise plutôt $\vec{a} \times \vec{b}$.



A.3. Aspects énergétiques

Les deux parties de la force de Lorentz ont des comportements énergétiques très différents.

Propriété : Potentiel électrique

On admet qu'il existe un champ scalaire appelé *potentiel électrique* V (en Volts) tel que

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (\text{M6.3})$$

Remarque : C'est le même potentiel électrique déjà vu en électricité. Quand on impose une différence de potentiel entre deux points, il apparaît un gradient de potentiel et donc un champ électrique, opposé à ce gradient, dirigé du + vers le -. Ce champ exerce une force sur les charges électriques et les met en mouvement, ce qui crée un courant.

Propriété : Aspect énergétique de la force électrique

La force électrique dérive d'une énergie potentielle $E_{pe} = q.V$ et est donc conservative.

Démonstration

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \text{ donc } q\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(q.V) = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{pe}) \text{ en posant } E_{pe} = q.V.$$

Remarque : Cette relation explique la définition de l'unité *electron-volt* : 1 eV, c'est (en valeur absolue) l'énergie potentielle d'un électron dans un potentiel de 1 V.

Propriété : Aspect énergétique de la force magnétique

La force magnétique ne travaille jamais.

Démonstration

Par définition, $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à \vec{v} , donc sa puissance est nulle.

M6.B. Mouvement dans un champ électrique uniforme constant

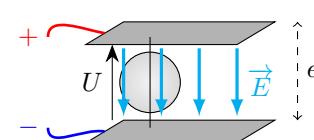
Le premier exemple que nous allons traiter, c'est celui du mouvement d'une particule de charge q dans un champ électrique uniforme et constant, en l'absence de champ magnétique.

B.1. Production d'un champ électrique constant

Pour produire un champ électrique, il faut des charges. Pour cela, le plus simple est de charger un condensateur.

Propriété : Production d'un champ électrique uniforme par deux plaques parallèles

Si on place deux plaques métalliques l'une en face de l'autre, parallèles, de taille très supérieure à l'écart e entre elles, et qu'on impose une tension U entre ces plaques, alors il apparaît entre ces plaques un champ électrique uniforme de norme $E = \frac{U}{e}$ dirigé du + vers le -.



Vous montrerez cette relation l'année prochaine, en étudiant l'électrostatique. Les deux plaques ainsi disposées réalisent un condensateur.

B.2. Accélération d'une particule

La force électrique travaille, donc en l'orientant comme il faut, on peut s'en servir pour communiquer de l'énergie cinétique à une particule.

Exemple : Accélération d'une particule

À connaître

On considère une particule de masse m et de charge q , initialement au repos, placée dans un champ électrique uniforme et constant \vec{E} ; on place l'axe x selon le champ électrique, de sorte que $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Le point de départ est choisi comme origine.

1. Établir l'expression de la position de la particule $x(t)$.
 2. Exprimer la vitesse v du point à l'abscisse x .
 3. À l'aide de la relation (M6.3), justifier que $V(0) - V(x) = E.x$. En déduire l'expression de la vitesse v en fonction de $V(0) - V(x)$ et des constantes.
 4. Redémontrer cette dernière relation à l'aide d'un bilan énergétique.

1. On étudie la particule M de charge q dans le référentiel terrestre galiléen.

Étude cinématique : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$ donc $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x$.

La particule est soumise à la force électrique $q.\vec{E} = q.E\hat{e}_x$.

Le PFD projeté sur $\vec{e_x}$ donne donc $m\ddot{x} = qE$ soit $\ddot{x} = \frac{qE}{m}$. En intégrant : $\dot{x} = \frac{qE}{m}t$ et $x = \frac{qE}{2m}t^2$.

2. On peut isoler t en fonction de la position : $t = \sqrt{\frac{2mx}{qE}}$. On en déduit que $\dot{x} = \frac{qE}{m} \sqrt{\frac{2mx}{qE}} = \sqrt{\frac{2qEx}{m}}$

3. La relation $\vec{E} = -\nabla V$ est ici à projeter sur l'axe x : on obtient $E = -\frac{dV}{dx}$ (inutile de mettre des dérivées partielles, puisqu'on travaille en 1D ici). En intégrant entre 0 et x on trouve $E.x = -(V(x) - V(0)) = V(0) - V(x)$.

On en déduit que $\dot{x} = \sqrt{\frac{2q(V(0)-V(x))}{m}}$

4. La seule force à laquelle est soumise la particule est la force électrique, conservative, d'énergie potentielle $q.V$. Le système est donc conservatif, donc $E_m(0) = E_m(x)$ soit $0 + q.V(0) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + q.V(x)$. On en déduit que $\dot{x} = \sqrt{\frac{2q(V(0)-V(x))}{m}}$.

On voit donc qu'un a pu accélérer une particule chargée, et que la vitesse atteinte ne dépend pas du champ électrique, mais plutôt de la tension entre le point de départ et le point d'arrivée :

Propriété : Accélération d'une particule

En accélérant une particule de charge q entre deux points séparée d'une différence de potentiel U , on lui communique une énergie cinétique $E_c = |q.U|$.

Démonstration

La force électrique étant conservative, la particule est un système conservatif : $E_c + qV = cst$. Si la particule est initialement immobile, on a donc $0 + qV_{initial} = E_{c,final} + qV_{final}$ soit $E_{c,final} = q(V_{initial} - V_{final})$ qui fait bien apparaître la tension. Évidemment, il faut choisir le bon signe de tension en fonction du signe de q .

Par exemple, un proton de masse $1,7 \times 10^{-27}$ kg et de charge $1,6 \times 10^{-19}$ C accéléré par une tension de 1 kV atteint la vitesse de $4,3 \times 10^5$ m · s⁻¹ : comme il est très léger, il accélère très vite ! Pour un électron, avec la même tension (dans l'autre sens) on atteint $1,9 \times 10^7$ m · s⁻¹ : on voit qu'on s'approche de la limite relativiste. Si les vitesses atteintes dépassent $c/10 \approx 3 \times 10^7$ m · s⁻¹, la loi de l'énergie cinétique gagnée $E_c = |q.U|$ reste vraie, mais l'expression de E_c en fonction de v change ; la vitesse ne pourra jamais dépasser c .

Pour faire de la recherche en physique des particules, on a besoin de communiquer une grande énergie cinétique à des particules, puis les faire entrer en collision ; l'énergie cinétique peut alors être transformée en nouvelles particules selon la relation $E = mc^2$. En étudiant les particules créées, on espère trouver de nouvelles particules qui n'existent pas à l'état naturel.

Le but est donc de communiquer le plus possible d'énergie cinétique aux particules. Pour cela, il suffit de mettre une très grande tension entre deux plaques métalliques. Mais on est limité par les tensions maximales qu'on sait générer. Il faut donc trouver une autre solution pour communiquer à la particule de l'énergie par étapes.

La figure M6.1 présente (en haut) le principe d'un accélérateur linéaire. Un émetteur de particule à gauche produit des particules avec une vitesse initiale négligeable; sur le schéma, ce sont des particules chargées négativement. Ces particules sont immédiatement placées entre deux plaques percées (ou des anneaux) séparées par une tension U ; elles sont alors attirées par la deuxième plaque et acquièrent une énergie cinétique $q.U$. Au moment où les particules traversent la deuxième plaque, on inverse les polarités : la deuxième plaque devient $-$ tandis que la troisième devient $+$; ainsi, la particule va de nouveau être accélérée vers la troisième plaque, et gagner encore $q.U$ d'énergie cinétique. On recommence le processus à chaque section, et au bout de N sections, la particule a acquis une énergie cinétique $N.q.U$. Elle entre alors en collision avec une cible immobile.

La photo du bas montre le plus grand accélérateur linéaire de particules du monde; il permet de communiquer 60 GeV aux particules accélérées. De nombreuses particules ont été découvertes dans cet accélérateur.

Un projet international, l'ILC, envisage de construire un tel accélérateur atteignant $2 \times 500 \text{ GeV}$ sur une longueur de 50 km.

(a) Principe d'un accélérateur linéaire



(b) Accélérateur linéaire de Stanford (3,2 km, 60 GeV) ; ([Crédit : Wikipedia/P.Kaminski](#))

FIGURE M6.1 – Accélérateur linéaire.

B.3. Déviation d'une particule

Nous allons voir rapidement comment un champ électrique peut dévier une particule, sans entrer dans trop de détails de calculs ; les détails seront vus dans un exercice.

Calcul : Déviation d'une particule par un champ électrique orthogonal à sa vitesse

Supposons qu'une particule de masse m et de charge q arrive avec une vitesse initiale \vec{v}_0 ; on prendra l'axe x selon cette direction, de sorte que $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Pour la dévier, on la soumet à un champ électrique uniforme et constant $\vec{E} = E \vec{e}_y$. Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \frac{qE}{m} t \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ puis } \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{qE}{2m} t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

En combinant les équations sur x et y , on trouve que

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

donc la particule va suivre une trajectoire parabolique.

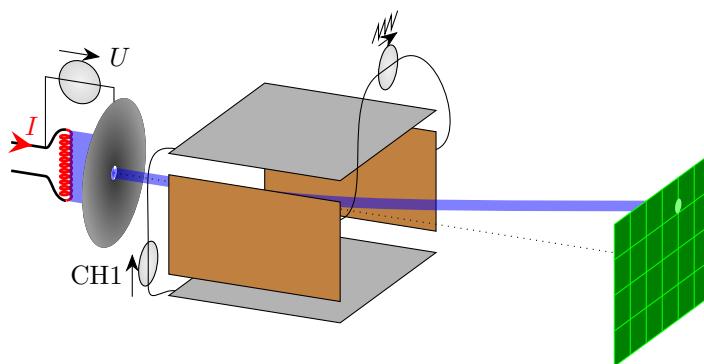
Cette propriété est à la base des tubes cathodiques de première génération (figure M6.2). Prenons l'exemple des premiers oscilloscopes. Au départ du tube, une cathode chauffée par un courant émet des électrons qui «sautent» dans le vide, mais reviennent vite sur le fil qu'ils ont quitté, sauf si on les attire ailleurs. Pour cela, on place en face de la cathode une anode percée d'un petit trou. Les électrons sont accélérés, et un fin pinceau passe à travers le trou. On place alors des paires de plaques de part et d'autres pour dévier le faisceau : les plaques du dessus et du dessous, reliées à la tension mesurée, font bouger le faisceau verticalement, tandis que les plaques de droite et de gauche, reliées au générateur de balayage, le font bouger horizontalement. Le faisceau va alors jusqu'à l'écran où il marque un point lumineux.



(a) Écran cathodique long ([Crédit : Wikipedia/Catalogo collezioni](#))



(b) Détail du canon à électrons (à droite). Le cylindre sert à focaliser le faisceau. On voit ensuite un disque percé qui laisse passer un pinceau d'électrons, puis les plaques de déviation, qui s'écartent pour pouvoir dévier le faisceau sur une longueur plus grande. ([Crédit : Wikipedia/Willemdd](#))



(c) Principe de la déviation dans un oscilloscope cathodique

FIGURE M6.2 – Déviation électrique d'un faisceau d'électrons.

Néanmoins, cette façon de dévier les électrons est peu efficace, car on voit dans le calcul ci-dessus qu'elle varie comme $\frac{1}{v_0^2}$: il est très difficile de dévier des électrons rapides.

M6.C. Mouvement dans un champ magnétique uniforme constant

La force magnétique est très différente de la force électrique. D'une part, elle ne travaille pas, donc ne permettra jamais d'accélérer une particule ; elle pourra seulement la dévier. D'autre part, sa norme grandit avec la vitesse v , donc plus la particule va vite, plus cette force sera importante.

C.1. Production d'un champ magnétique uniforme

Les champs magnétiques sont produits par des courants. Le champ magnétique produit par un courant même de quelques ampères reste faible. Pour avoir plus d'effet, il faut mettre plusieurs fils parcouru par un courant ; c'est ce qu'on fait en enroulant le fil sur un cylindre pour former une bobine.

Le champ magnétique créé par une bobine n'est pas uniforme. Pour obtenir un champ uniforme, il existe une astuce toute simple : les *bobines de Helmholtz*.

Propriété : Bobines de Helmholtz

Le dispositif des bobines de Helmholtz consiste à placer deux bobines plates de même rayon R , avec N tours de fil chacune, parcourues par le même courant I , sur le même axe et à une distance l'une de l'autre égale à leur rayon R .

Dans l'espace entre les bobines apparaît alors un champ magnétique dirigé selon l'axe des bobines, orienté selon le sens de rotation du courant, uniforme et égal à $0,716 \frac{\mu_0 N I}{R}$ où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ USI}$ est la *perméabilité magnétique du vide*.

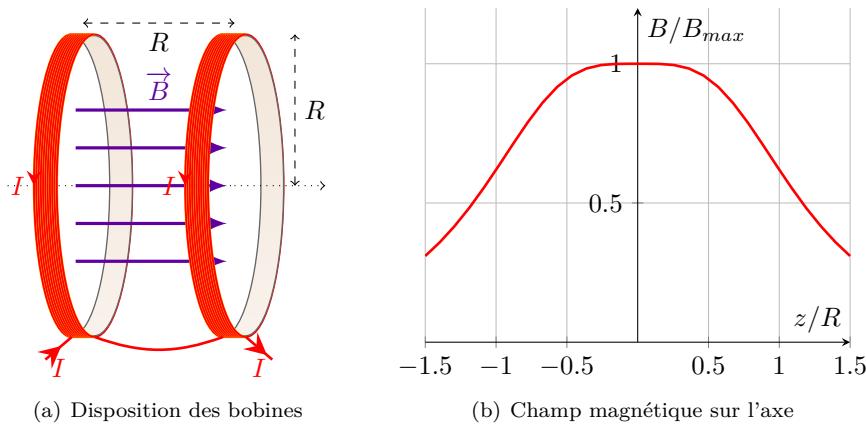


FIGURE M6.3 – Bobines de Helmholz.

C.2. Propriétés générales du mouvement dans un champ magnétique uniforme

Propriété : Vitesse de la particule

Une particule qui se déplace dans un champ magnétique uniforme a une vitesse constante.

Démonstration

Que le champ soit uniforme ou pas, la force magnétique ne travaille pas, donc $E_m = E_c = cst$ d'où on tire que $v = cst$.

Propriété : Vitesse de la particule parallèle au champ

Si une particule qui se déplace dans un champ magnétique uniforme, sa vitesse selon l'axe du champ est constante.

Démonstration

Par propriété du produit vectoriel, $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ est toujours perpendiculaire à \vec{B} , donc la force projetée sur l'axe parallèle à \vec{B} est toujours nulle. Par conséquent, la vitesse selon cet axe est constante.

C.3. Résolution du mouvement

À partir de maintenant, puisque le champ magnétique est uniforme, on supposera qu'il est dirigé selon \vec{e}_z ; on posera donc $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

On sait donc que la particule a un mouvement uniforme; mais quelle est sa trajectoire?

Un peu de maths : Produit vectoriel

Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs, on écrit les coordonnées des deux vecteurs en colonnes, on répète la première ligne en-dessous de la troisième, puis on effectue des calculs en «gamma» :

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ a_x & b_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{vmatrix}$$

On peut aussi décomposer les vecteurs sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et utiliser les relations des produits vectoriels de base :

- le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$
- le produit vectoriel de deux vecteurs de la base donne le troisième, avec un signe plus si les vecteurs sont dans l'ordre x, y, z, x, y, \dots et un signe moins sinon : $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = +\vec{e}_z$ mais $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$, etc.

Exemple : Mouvement dans un champ magnétique uniforme

À connaître

On considère une particule M de masse m et de charge q se déplaçant dans un champ magnétique uniforme et constant $B\vec{e}_z$. On prend la position de la particule à l'instant $t = 0$ comme origine. On suppose que la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ magnétique, et on prend l'axe x selon cette vitesse : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$.

1. Établir les 3 équations différentielles vérifiées par x , y et z ; on posera $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron.

2. Résoudre rapidement $z(t)$.

3. **Méthode 1 de résolution** : par double intégration.

(a) Intégrer l'équation différentielle obtenue pour \ddot{y} de manière à relier \dot{y} et x .

(b) Renvoyer ce résultat dans l'autre équation, de manière à établir une ED d'ordre 2 vérifiée par x .

(c) Résoudre cette ED et trouver $x(t)$.

(d) En déduire $y(t)$.

4. **Méthode 2 de résolution** : par les complexes.

On pose $u = x + iy$.

(a) Établit l'ED d'ordre 2 vérifiée par u .

(b) On pose $v = \dot{u}$; établir l'ED d'ordre 1 vérifiée par v .

(c) La résoudre et établir $v(t)$.

(d) En déduire $u(t)$ puis $x(t)$ et $y(t)$.

1. On étudie le point M dans le référentiel terrestre, repéré par ses coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ donc $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

$$\text{La seule force qui s'exerce sur le point est la force magnétique : } q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} \dot{x} & 0 & qB\dot{y} \\ \dot{y} & 0 & -qB\dot{x} \\ \dot{z} & B & 0 \end{vmatrix}$$

$$qB\dot{y}\vec{e}_x - qB\dot{x}\vec{e}_y$$

$$\text{Le PFD projeté sur les 3 axes donne alors les équations} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} & (\text{a}) \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} & (\text{b}) \\ \ddot{z} = 0 & (\text{c}) \end{cases}$$

2. En intégrant (c) avec les CI $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 0$ on trouve facilement que $z(t) = 0$.

3. **Méthode 1 de résolution** : par double intégration.

(a) En intégrant l'équation (b) entre 0 et t , on trouve $\dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -\omega_c x(t) + \omega_c x(0)$ soit $\dot{y} = -\omega_c x$.

(b) En remplaçant \dot{y} dans l'équation (a), on obtient alors $\ddot{x} = -\omega_c^2 x$.

(c) $\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0$ a des solutions de la forme $x(t) = A \cos(\omega_c t) + C \sin(\omega_c t)$ donc $\dot{x}(t) = -A\omega_c \sin(\omega_c t) + C\omega_c \cos(\omega_c t)$. On applique alors les CI : $x(0) = A = 0$ et $\dot{x}(0) = C\omega_c = v_0$. On en déduit que $x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$.

(d) Donc $\dot{y}(t) = -\omega_c x = -v_0 \sin(\omega_c t)$ qu'on intègre entre 0 et t : $y(t) - y(0) = \left[\frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \right]_0^t$ soit $y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1)$

4. **Méthode 2 de résolution** : par les complexes.

On pose $u = x + iy$.

(a) On effectue l'opération (a)+i.(b) et on obtient $\ddot{x} + i\ddot{y} = \omega_c \dot{y} - i\omega_c \dot{x} = -i\omega_c (\dot{x} + i\dot{y})$ d'où on tire $\ddot{u} + i\omega_c \dot{u} = 0$

(b) On a donc $\dot{v} + i\omega_c v = 0$: ED d'ordre 1.

(c) On peut l'écrire $\tau \dot{v} + v = 0$ avec $\tau = \frac{1}{i\omega_c}$: c'est complexe, mais peu importe, les calculs sont les mêmes. On a alors des solutions de la forme $v(t) = K e^{-i\omega_c t}$. Or $v(0) = K = \dot{u}(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = v_0$ donc $v(t) = v_0 e^{-i\omega_c t}$.

(d) On intègre entre 0 et t : $u(t) - u(0) = \left[\frac{v_0}{-i\omega_c} e^{-i\omega_c t} \right]_0^t = \frac{iv_0}{\omega_c} (e^{-i\omega_c t} - 1)$.

Pour trouver $x(t)$ et $y(t)$, il faut prendre les parties réelle et imaginaire de $u(t)$. Pour cela, on développe l'exponentielle complexe : $u(t) = \frac{iv_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - i \sin(\omega_c t) - 1) = \frac{v_0}{\omega_c} (i \cos(\omega_c t) + \sin(\omega_c t) - i)$. On en déduit que $x(t) = \Re(u(t)) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$ et $y(t) = \Im(u(t)) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1)$.

À quoi ressemble alors le mouvement décrit par les équations $\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$? Remarquons que $\frac{v_0}{\omega_c}$ a la dimension d'un longueur ; on va donc poser $R_c = \frac{v_0}{\omega_c}$, on peut écrire le vecteur position comme $\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} = -R_c\overrightarrow{e_y} + R_c \sin(\omega_c t)\overrightarrow{e_x} + R_c \cos(\omega_c t)\overrightarrow{e_y}$. En posant C le point tel que $\overrightarrow{OC} = -R_c\overrightarrow{e_y}$, on a alors $\overrightarrow{CM} = R_c \sin(\omega_c t)\overrightarrow{e_x} + R_c \cos(\omega_c t)\overrightarrow{e_y}$, ce qui correspond à la projection d'un point sur un cercle de centre C , de rayon $|R_c|$, placé à un angle $\omega_c t$. On en déduit donc que le mouvement est un mouvement circulaire de centre C tel que $\overrightarrow{OC} = -R_c\overrightarrow{e_y}$, de rayon $|R_c|$, parcouru à la pulsation ω_c .

Il faut néanmoins remarquer que $\omega_c = \frac{qB}{m}$ a le signe de q , il peut donc être positif ou négatif; en en va de même pour R_c . Deux cas de figure existent donc en fonction du signe de la charge (figure M6.4).

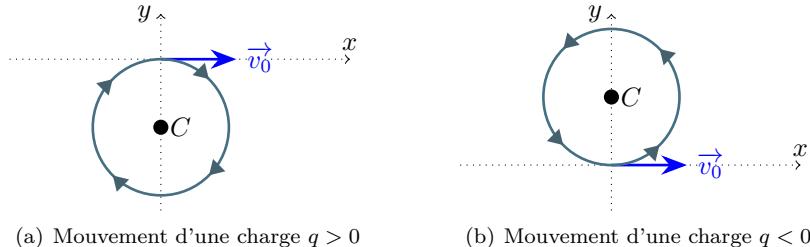


FIGURE M6.4 – Mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant, dans le plan xOy .

Le fait que le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique ou horaire en fonction de la charge, est relié au fait que la direction de la force magnétique dépend du signe de la charge.

On retiendra donc le résultat :

Propriété : Mouvement plan dans un champ magnétique uniforme et constant

Une particule placée dans un champ magnétique uniforme et constant, et lancée avec une vitesse initiale v_0 perpendiculaire à \vec{B} , parcourt un cercle de rayon $R_c = \frac{v_0}{|\omega_c|}$ avec une pulsation $\omega_c = \frac{qB}{m}$ appelée *pulsation cyclotron*; le sens de parcourt dépend du signe de la charge.

Démonstration

Il faut connaître la démonstration complète, explicitée dans l'exemple d'application ci-dessus. Néanmoins, si on admet que le mouvement est circulaire, on peut retrouver rapidement les caractéristiques du mouvement sans tout recalculer. Voici comment.

Admettons que la charge a un mouvement circulaire de rayon R_c , et plaçons-nous dans un repère ayant pour origine le centre de ce cercle. En coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = R_c\overrightarrow{e_r}$ donc $\vec{v} = R_c\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ et $\vec{a} = R_c\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - R_c\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$.

La particule de charge q est soumise à la force $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R_c\dot{\theta} & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = qR_c\dot{\theta}B\overrightarrow{e_r}$.

Le PFD projeté sur les deux axes indique donc que $\begin{cases} -mR_c\dot{\theta}^2 = qR_c\dot{\theta}B \\ mR_c\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$. La seconde équation impose $\dot{\theta} = cst$

donc la vitesse $R_c\dot{\theta}$ est constante (ce qu'on a déjà démontré avec l'énergie) et $R_c |\dot{\theta}| = v_0$ (par les conditions initiales). La première équation implique que $m\dot{\theta} = -qB$ soit $\dot{\theta} = -\omega_c$: le sens de rotation dépend bien du signe de ω_c , donc du signe de la charge. De plus, on a $R_c = \frac{v_0}{|\dot{\theta}|} = \frac{v_0}{|\omega_c|}$.

Remarque : On peut aussi retrouver ce résultat dans la base de Frenet si on admet que le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse : la force magnétique aura pour norme $|qv_0B|$; le PFD fournit alors $R_c = \frac{mv_0^2}{|qv_0B|} = \frac{v_0}{|\omega_c|}$.

Regardons quelques ordres de grandeur. Avec des bobines de Helmholtz classiques, on atteint un champ de quelques dizaines de milliTesla ; prenons $B = 10$ mT, et envoyons-y un électron (masse $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C) d'énergie cinétique $E_c = 1$ keV. On peut alors calculer :

- sa pulsation cyclotron : $|\omega_c| = 1,8 \times 10^9$ rad · s⁻¹ soit une fréquence $f_c = 280$ MHz
- sa vitesse initiale : $v_0 = 1,9 \times 10^7$ m · s⁻¹ (on est encore dans le domaine non-relativiste)
- le rayon de sa trajectoire : $R_c = 11$ cm

Ainsi, un champ magnétique assez faible permet de dévier des électrons très rapide selon un cercle d'à peine 11 cm de rayon ! La déviation magnétique est très efficace. C'est pour cela que, dans les écrans cathodiques, les plaques de déviation ont été ensuite remplacées par des bobines créant une déviation magnétique du faisceau.

Ce qui est très intéressant dans le résultat trouvé, c'est que la pulsation ne dépend pas de la vitesse, donc la période de parcours $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ non plus. Ce phénomène a été à l'origine de l'invention du premier accélérateur de particule efficace, le *cyclotron*, mis au point au début des années 1930 par Ernest Lawrence.

Le principe du cyclotron est montré sur la figure M6.5. On place deux aimants en forme de demi-cylindres creux, les «Dees» (en violet sur le dessin), qui créent en leur sein un champ magnétique orthogonal à la figure. Ces Dees sont séparés d'un petit espace. On les relie aux deux bornes d'un générateur de tension alternative de pulsation ω_c , ce qui crée entre eux un champ électrique qui oscille à cette même pulsation.

FIGURE M6.5 – Fonctionnement d'un cyclotron.

Au départ, on envoie des particules chargées (électrons émis par un filament, par exemple) au centre des Dees ; leur vitesse initiale est négligeable. Ces particules vont être accélérées par le champ électrique qui règne entre les Dees. Une fois arrivées à l'intérieur d'un Dee, elles ne sont plus soumise au champ électrique, mais au champ magnétique, qui leur fait faire un demi-tour en une durée $\frac{T_c}{2}$, soit exactement le temps nécessaire pour que le champ électrique entre les Dees ait changé de sens. Les particules traversent alors de nouveau l'espace entre les Dees en étant accélérées, puis font de nouveau demi-tour dans l'autre Dee. Le mouvement continue, et à chaque passage, les particules gagnent de l'énergie.

Cependant, plus les particules vont vite, plus le rayon des trajectoires circulaires augmente, ce qui fait qu'au bout d'un moment, les particules sortent du Dee, par une petite ouverture prévue pour cela. L'énergie maximale qu'on peut transférer aux particules dépend donc du rayon du cyclotron : plus il est grand, plus on peut accélérer les particules¹.

La figure M6.6 montre le premier cyclotron installé en France en 1937. Aujourd'hui, ce dispositif est très utilisé dans les hôpitaux pour produire des isotopes radioactifs utilisés pour de l'imagerie ou des traitements.

Pour aller plus loin dans la découverte de particules, il faut donner toujours plus d'énergie aux particules qu'on fait s'entrechoquer. La limitation du cyclotron, c'est son rayon : plus la particule va vite, plus son rayon de giration est grand. Pour atteindre de plus grandes énergies, il faut donc un plus grand rayon ; mais il est difficile de fabriquer des Dees immenses.

On a alors fabriqué des *synchrotrons* : des anneaux dans lesquels alternent des sections où un champ électrique accélère les particules, et des sections où un champ magnétique les dévie. La figure M6.7 montre par exemple le fonctionnement d'un accélérateur de particules de signes opposés ; quand elles se croisent, elles ont une probabilité faible mais non nulle de se rencontrer, et ce sont ces chocs qui créent de nouvelles particules.

De tels synchrotrons permettent d'obtenir des énergies gigantesques. La figure M6.8 montre le double anneau du synchrotron du Fermilab, près de Chicago. La plus gros anneau fait 6 km de circonférence et accélère des protons avec une énergie de 2 TeV. Le plus gros synchrotron du monde est le LHC, situé sous Genève, qui atteint 14 TeV dans des anneaux de 27 km de circonférence.

Néanmoins, tous les synchrotrons ne servent pas à créer des collisions. Une autre propriété est intéressante : toute particule chargée accélérée rayonne de la lumière, et plus l'accélération est forte, plus l'énergie de la lumière émise est élevée. On crée donc aujourd'hui des synchrotrons assez petits, de l'ordre du kilomètre de circonférence, comme

1. Cela est d'autant plus vrai si on tient compte du fait que, quand les particules font demi-tour, elles perdent en réalité de l'énergie par rayonnement.



FIGURE M6.6 – Le premier cyclotron du Collège de France (de 7 MeV), exposé au Conservatoire National des Arts et Métiers. On distingue les Dees sous la plaque en verre. (Crédit : Wikipedia/Edal)

FIGURE M6.7 – Principe d'un synchrotron avec des particules de signes opposés.

l'ESRF à Grenoble ou Soleil à Saclay, dans lesquels on intercale des «wiggler» (des «tortilleurs», suites de petits cube oranges sur le schéma de la figure M6.8) qui font osciller les particules. Celles-ci émettent alors vers l'avant des rayons X de très grande qualité, quasiment monochromatiques, qui servent à des recherches cristallographiques ou des imageries médicales.

C.4. Aspect tridimensionnel

Le mouvement circulaire n'est suivi par la particule chargée que si sa vitesse initiale est orthogonale à \vec{B} . Si elle possède aussi une vitesse initiale selon \vec{B} , on a déjà montré que cette vitesse sera inchangée. Par conséquent, le mouvement global de la particule sera la combinaison :

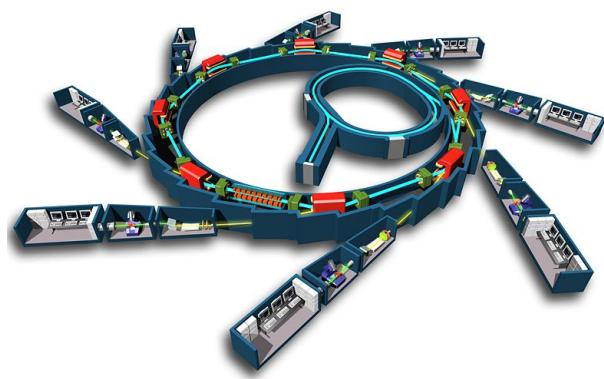
- d'un mouvement de rotation dans le plan xOy
- d'un mouvement uniforme selon Oz

ce qui donne un mouvement hélicoïdal (figure M6.9). La particule se met donc à suivre le champ magnétique : on dit parfois que le mouvement de la particule est «canalisé par le champ magnétique» : vu de loin, on l'impression que la particule suit simplement le champ magnétique.

Ce principe est essentiel pour nous. En effet, le Soleil nous envoie en permanence des particules chargées très énergétiques : le *vent solaire*. Ces particules sont très dangereuses pour les êtres vivants. Mais la Terre possède un champ magnétique (figure M6.10) qui arrête ces particules, qui se mettent à suivre les lignes de champ magnétique (en rouge, ce sont des lignes qui sont parallèles au champ magnétique) ; du coup, les habitants de la Terre sont protégés.



(a) Anneaux du synchrotron du Fermilab (Crédit : Wikipedia/R. Hahn)



(b) Schéma du synchrotron Soleil (Crédit : Wikipedia/EPSIM 3D/JF Santarelli)

FIGURE M6.8 – Exemples de synchrotrons.



FIGURE M6.9 – Mouvement hélicoïdal dans un champ magnétique uniforme.

Néanmoins, si les particules suivent les lignes de champ magnétique, elles arrivent aux pôles. Il intervient alors un autre phénomène : le champ magnétique n'est pas uniforme ; aux pôles, les lignes de champ magnétique se rapprochent. L'effet, illustré à droite de la figure M6.10, c'est que la force magnétique repousse les particules en arrière ; du coup, les particules n'arrivent pas aux pôles ; elles font plutôt des rebonds, des aller-retours d'un pôle à l'autre.

Cependant, les choses sont plus compliquées. D'une part, les particules chargées créent elles-mêmes un champ magnétique qui s'ajoute à celui de la Terre ; avec le temps, elles s'accumulent et cet effet grandit. D'autre part, la Terre tourne. Tout cela crée une dynamique complexe de l'atmosphère, et parfois, des modifications brutales des lignes de champ magnétique amènent la précipitation de particules chargées au niveau des pôles. Ces particules ionisent l'atmosphère, qui émet de la lumière : ce sont les *aurores boréales*.

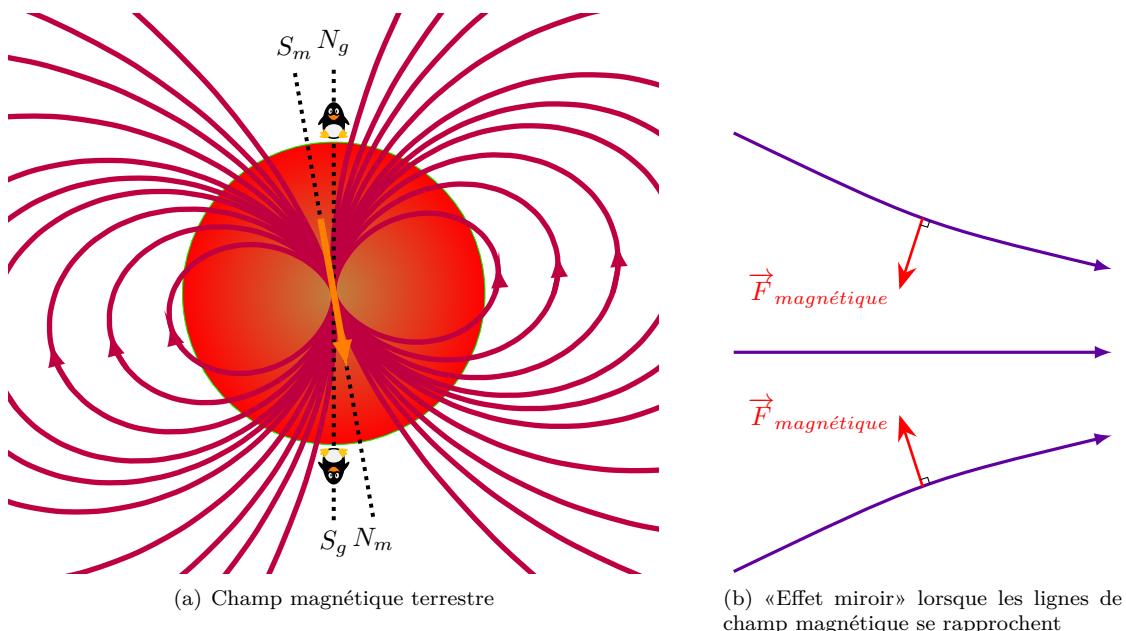


FIGURE M6.10 – Piégeage des particules dans la magnétosphère terrestre.

Ce confinement des particules chargées par des champs magnétiques a d'autres applications, par exemple pour la fusion nucléaire dans les réacteurs de type *Tokamak*.

M6.D. Mouvement dans des champs électrique et magnétique uniformes constants

En présence d'un champ magnétique et d'un champ électrique, de nombreuses configurations existent qui donnent lieu à d'autant plus nombreuses applications. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique a la particularité de dépendre du rapport charge/masse. Cela en fait un mouvement de choix lorsqu'on veut séparer des isotopes, c'est-à-dire des atomes qui ont le même numéro atomique mais des nombres de masse différents. On peut citer comme applications :

- le spectromètre de masse, dans lequel un faisceau d'ions est filtré en vitesse dans un champ magnétique et un champ électrique (figure M6.11) : la force électrique pousse les ions d'un côté, et la force magnétique de l'autre. Si les ions vont trop vite, la force magnétique gagne, s'ils vont trop lentement, la force électrique gagne ; il existe une vitesse particulière pour laquelle le faisceau va tout droit ; il arrive alors dans une seconde partie où le champ magnétique le dévie, et il frappe un écran au bout d'un demi-tour, à une distance proportionnelle à sa masse.

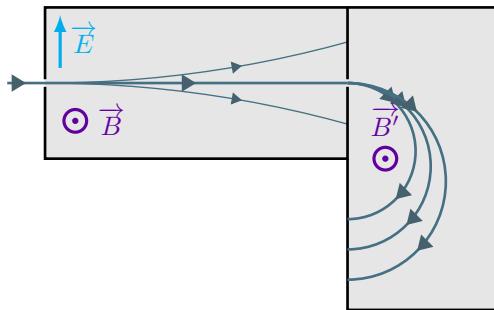


FIGURE M6.11 – Principe d'un spectromètre de masse.

- l'enrichissement de l'uranium par résonance cyclotron : quand des ions tournent en rond dans un champ magnétique, l'ajout d'un champ électrique oscillant va créer une résonance à la pulsation cyclotron, qui va permettre de faire résonner un isotope et pas un autre.

Mouvements de particules chargées

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique. Puissance de la force de Lorentz.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles. Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.

Mouvements de particules chargées

QCMs

réponses page 687

QCM : Compréhension du cours**Q1.**

Un champ électrique :

- (a). est créé par des charges
 (c). agit sur des charges
 (b). agit sur des courants
 (d). est créé par des courants

Q2.

Un champ magnétique :

- (a). agit sur des charges
 (c). agit sur des courants
 (b). est créé par des courants
 (d). est créé par des charges

Q3.

La force de Lorentz s'écrit :

- (a). $q\vec{E} + \vec{B}$
 (c). $q\vec{E} + q\vec{B}$
 (b). $q\vec{E} + q\vec{v} \cdot \vec{B}$
 (d). $q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Q4.

La force électrique

- (a). est nulle
 (c). ne travaille jamais
 (b). est non conservative
 (d). est conservative

Q5.

La force magnétique

- (a). est nulle
 (c). est保守的
 (b). ne travaille jamais
 (d). est non conservative

Q6.

Un champ électrique uniforme et constant peut servir à :

- (a). faire tourner en rond des charges
 (c). accélérer des charges
 (b). dévier des charges
 (d). faire pousser des pommes de terre

Q7.

Dans un champ magnétique uniforme, les charges :

- (a). tournent en rond
 (c). tournent en carré
 (b). tournent en bourrique
 (d). tournent au vinaigre

Q8.

Dans un champ magnétique uniforme, le sens de rotation des charges dépend :

- (a). du signe de la charge
 (c). de la vitesse initiale
 (b). de la masse
 (d). du sens du champ magnétique

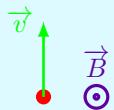
Q9.

Dans un champ magnétique uniforme, la fréquence de rotation des charges dépend :

- (a). de la masse
 (c). de la charge
 (b). de la vitesse initiale
 (d). du champ magnétique

✓ QCM : Sens de la force magnétique ✗

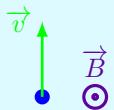
Pour connaître le sens de $\vec{v} \wedge \vec{B}$, on utilise la règle de la main droite : on place sa main droite de manière à avoir le pouce selon \vec{v} et l'index selon \vec{B} , alors le produit vectoriel est selon le majeur. Ensuite, il ne faut pas oublier de tenir compte du signe de q pour avoir le sens de la force magnétique.



Q10.

Un proton dans la configuration

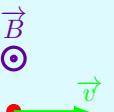
subit une force vers :



Q11.

Un électron dans la configuration

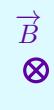
○ subit une force vers :



Q12.

Un proton dans la configuration

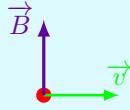
subit une force vers :



Q13.

Un électron dans la configuration

→ subit une force vers :

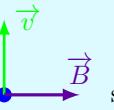


Q14

Un proton dans la configuration

subit une force :

- (a). sortante (vers l'œil de l'observateur) (b). rentrante (fuyant l'œil de l'observateur)



Q15

Un électron dans la configuration

subit une force :

- (a). rentrante (fuyant l'œil de l'observateur) (b). sortante (vers l'œil de l'observateur)

Mouvements de particules chargées

Exercices

réponses page 688

Exercice M6.1 : Champ électrique et pesanteur [*]

On néglige toujours le poids des charges quand il y a des forces électromagnétiques. Pour le justifier, on peut évaluer quelques ordres de grandeur.

- Calculez le champ électrique nécessaire pour compenser le poids d'un électron ($m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg) puis d'un proton ($m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg); on rappelle que la charge de ces deux particules vaut $\pm 1,6 \times 10^{-19}$ C.
- En supposant que les électrons libres d'un métal sont en équilibre sous l'action de leur poids et du champ électrique trouvé ci-dessus, calculez la tension qui existe entre le pied et le sommet de la Tour Eiffel.

Exercice M6.2 : Spectromètre de masse [**]

Un spectromètre de masse est un appareil permettant de mesurer la masse des différents atomes constituant un objet, ainsi que leurs proportions. Il est très utilisé pour l'analyse d'échantillons inconnus, que ce soit dans l'exploration planétaire ou en archéologie.

L'échantillon à analysé est d'abord décomposé en atomes, qui sont ionisés. On suppose pour simplifier qu'on a des ions qui ont tous la même charge $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C (en réalité, il peut y avoir des ions ionisés deux fois, ou plus).

1. Sélection des vitesses

On note m_i la masse de l'ion i ; il pénètre dans l'appareil avec une vitesse $\vec{v}_i = v_i \vec{e}_y$. Il entre alors dans une première zone où règnent :

- un champ magnétique constant $\vec{B} = B \vec{e}_z$ avec $B = 0,1$ T,
- un champ électrique constant $\vec{E} = -E \vec{e}_x$ avec $E = 1 \times 10^4$ V · m $^{-1}$.

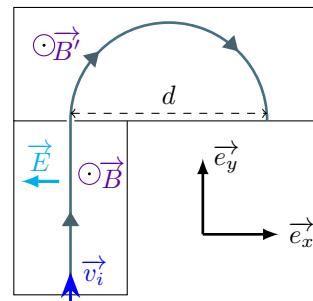
En effectuant un bilan des forces qui s'exercent sur l'atome i , montrez qu'il existe une vitesse v_l indépendante de m_i telle que, si $v_i = v_l$, alors l'ion i a un mouvement rectiligne uniforme. Faites l'AN de v_l .

Que se passe-t-il si $v_i < v_l$? si $v_i > v_l$?

2. Mesure de la masse

Au bout de la première zone, un petit trou permet de ne laisser passer que les ions qui sont allés exactement tout droit. Ces ions entrent alors dans une seconde zone où il y a uniquement un champ magnétique $\vec{B}' = B' \vec{e}_z$ avec $B' = 0,5$ T. Les ions ont alors un mouvement circulaire (admis). Après avoir parcouru un demi-cercle, ils frappent un écran. On mesure alors la distance d entre le trou et le point d'impact.

Montrez que la mesure de d permet de remonter à m_i . AN : on mesure $d = 5,0$ cm; déduisez-en la masse de l'atome, puis l'élément en question (on donne $N_A = 6,0 \times 10^{23}$ mol $^{-1}$).



Exercice M6.3 : Dérive dans des champs électrique et magnétique orthogonaux [**]

Une particule de masse m et de charge q est placée dans le vide et soumise à des champs électrique et magnétique orthogonaux. On choisit les axes tels que $\vec{e} = E \vec{e}_y$ et $\vec{B} = B \vec{e}_z$ avec E et B positifs. La vitesse initiale de la particule est nulle; on prend l'origine du repère à sa position initiale.

- Écrivez les 3 équations différentielles du mouvement; on posera $\omega_c = \frac{qB}{m}$
- Trouvez $z(t)$
- Intégrez l'équation selon \vec{e}_x , et déduisez-en une ED d'ordre 2 vérifiée par y .
- Trouvez $y(t)$ puis $x(t)$.
- Tracez l'allure de la trajectoire pour une particule de charge positive.

6. Calculez le vecteur vitesse moyen de la particule (on l'appelle parfois *vitesse de dérive*).

Exercice M6.4 : Chambre à bulles [**]

Lors des chocs qui se produisent dans les accélérateurs, de nombreuses particules sont créées. Pour les identifier, les physiciens placent différents détecteurs autour des lieux de choc. L'un deux, qui a été longtemps utilisé, est la chambre à bulles. Il s'agit d'une enceinte fermée contenant un liquide en état de surébullition. Il est donc liquide, mais le simple passage d'une particule suffit à déclencher l'ébullition dans son sillage. Si on prend rapidement une photo, on peut visualiser le trajet de la particule.

Pour identifier les molécules, on fait régner dans la chambre à bulles un champ magnétique \vec{B} uniforme. On pose $\vec{B} = B\hat{e}_z$. On suppose que les particules subissent, en plus de la force magnétique, une force de frottement qu'on peut modéliser par une loi $-f\vec{v}$ avec f un coefficient constant positif.

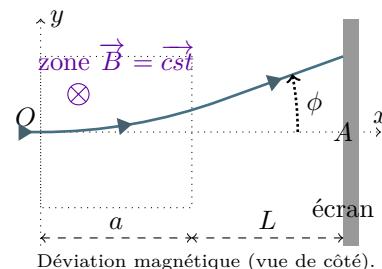
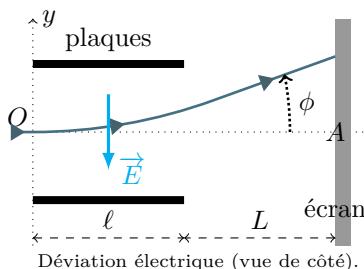
- Écrivez les équations du mouvement d'une particule de masse m et de charge q ; on posera ω_c la pulsation cyclotron, et $\tau = \frac{m}{f}$.
- On suppose qu'initialement, la particule a une vitesse $\vec{v}(0) = v_0\hat{e}_x + v_1\hat{e}_z$, et est à l'origine O du repère. Résolvez l'équation du mouvement en z .
- Pour résoudre le mouvement dans le plan xOy , la méthode de double intégration marche mal. Il faut donc passer par la variable complexe $u = x + iy$ avec $i^2 = -1$. Écrivez l'équation vérifiée par u , et résolvez-la.
- Que vaut la limite u_∞ de u aux temps longs ?
- On pose $v = u - u_\infty$. Que représentent physiquement $|v|$ et $\arg(v)$? Exprimez ces deux grandeurs en fonction du temps. Quel est donc le mouvement de la particule dans le plan xOy ?

Exercice M6.5 : Déviation des électrons dans un tube cathodique [***]

Dans un tube cathodique (anciens écrans d'oscilloscopes, d'ordinateurs ou de télévisions), un faisceau d'électrons est dévié par un champ électrique ou magnétique. On va comparer ces deux techniques.

Dans cet exercice, on suppose que les électrons (charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C, masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg) ont tous la même énergie cinétique initiale $E = 2,5$ keV. On négligera le poids des électrons. électromagnétiques.

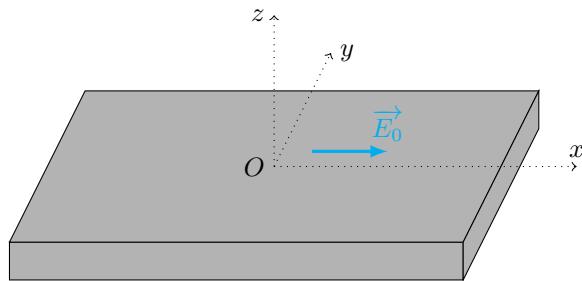
- Calculez la vitesse initiale v_0 des électrons, et commentez.
- Déviation électrique :** Le faisceau passe entre deux plaques parallèles séparées d'une distance $d = 1$ cm, entre lesquelles on impose une tension $V = 200$ V. On note $\ell = 5$ cm la longueur des plaques, et on suppose pour simplifier que le champ électrique vaut V/d entre les plaques et est strictement nul en-dehors (en réalité, la transition est progressive).
On choisit un repère comme indiqué sur la figure. À $t = 0$, l'électron pénètre entre les plaques (en O).
 - Établissez les équations différentielles du mouvement d'un électron tant qu'il est entre les plaques (on négligera les forces entre les différents électrons du faisceau).
 - Résolvez-les et déduisez-en :
 - le temps mis pour traverser les plaques
 - la vitesse de l'électron lorsqu'il sort des plaques
 - l'angle que fait sa vitesse avec sa direction initiale Ox
 - les coordonnées de l'électron lorsqu'il sort des plaques.
 - On place un écran à une distance $L = 10$ cm derrière les plaques. Calculez à quelle distance du centre A l'électron frappera l'écran.



3. **Déviation magnétique :** On remplace désormais les plaques par un électroaimant qui produit un champ magnétique qu'on peut faire varier. On suppose, pour simplifier, que le champ magnétique est nul partout sauf dans une zone de longueur $a = 1\text{ cm}$ où il vaut $B = 10\text{ mT}$ (là encore, la transition est progressive en réalité).
- Vérifiez que vous savez établir les équations du mouvement de l'électron lorsqu'il est dans la zone de champ magnétique, et les résoudre (cf. le cours). Faites attention : sur le schéma, $\vec{B} = -Be_z$.
 - Calculez :
 - Le rayon de la trajectoire
 - la position de l'électron lorsqu'il sort de la zone où \vec{B} existe
 - l'angle que fait sa vitesse avec l'axe lorsqu'il sort.
 - On place encore un écran à une distance $L = 10\text{ cm}$; calculez la position de l'impact.

Exercice M6.6 : Effet Hall [***]

On considère un conducteur ohmique contenant n électrons par unité de volume, de largeur ℓ selon y , de hauteur h selon z , soumis à un champ électrique $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{x}$ avec $E_0 > 0$.



- Le modèle de Drude modélise les électrons dans le conducteur comme des électrons libres de se déplacer, mais soumis à une force de frottements de la forme $-f \cdot \vec{v}$. Effectuez le bilan des forces s'exerçant sur un électron du métal. Montrez que, en régime permanent, la vitesse est proportionnelle à \vec{E} .
- On considère une section S du conducteur perpendiculaire à \vec{E} . Où se situent à l'instant t les électrons qui vont traverser S pendant une durée dt ? En déduire que le courant total I à travers S vaut $I = \frac{ne^2S}{f} \cdot E_0$.
- On ajoute un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = Be_z$. Indiquer qualitativement dans quelle direction les électrons vont être déviés.
Cette déviation fait apparaître des charges sur les côtés $y = \pm \frac{\ell}{2}$ qui créent un champ électrique $\vec{E}_H = E_H \cdot \vec{e}_y$. Déterminer par un raisonnement qualitatif le signe de E_H .
- Le système atteint son équilibre lorsque la force électrique due à \vec{E}_H compense la force magnétique, et que les électrons circulent à nouveau comme sans champ magnétique. En déduire E_H en fonction de E_0 , B et des données.
- On mesure la tension de Hall $U_H = V(x, -\frac{\ell}{2}, z) - V(x, +\frac{\ell}{2}, z)$; on définit le coefficient de Hall $R_H = \frac{U_H h}{IB}$. Montrer que $R_H = -\frac{1}{ne}$
Cet effet est-il plus important pour un métal ou pour un semi-conducteur? Pourquoi la résistance de Hall de certains semi-conducteurs a-t-elle un signe opposé?

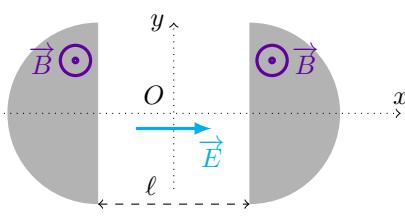
Exercice M6.7 : Cyclotron [***]

Cet exercice reprend plusieurs calculs faits en cours ; c'est un exercice de révision. Il n'est pas difficile, mais long.

On s'intéresse à une particule de masse m chargée avec une charge $q > 0$. Cette particule est émise en un point situé entre deux zones où règne un champ magnétique \vec{B} ; dans la zone centrale de largeur $\ell = 6\text{ cm}$, le champ magnétique est négligeable mais on applique un champ électrique oscillant. Les détails seront précisés au fur et à mesure.

Données :

- masse d'un nucléon : $m_n = 1,7 \times 10^{-27}\text{ kg}$
- charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$



1. Première phase : accélération

La particule démarre à l'origine O , avec une vitesse initiale négligeable. Elle se trouve dans la zone $-\frac{\ell}{2} \leq x \leq \frac{\ell}{2}$ dans laquelle le champ magnétique est négligeable, et le champ électrique uniforme : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ avec $E_0 = 2 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

- Écrivez le PFD appliqué à la particule et déduisez-en \ddot{x} , puis $x(t)$.
- Exprimez le temps t_0 que met la particule à atteindre les bords $x = \pm \frac{\ell}{2}$. AN pour un ions Fe^{2+} ($A = 56$, $Z = 26$).
- Exprimez la vitesse v_0 de la particule lorsqu'elle atteint les bords, ainsi que son énergie cinétique E_0 . AN pour la vitesse.

2. Seconde phase : rotation

La particule arrive dans la zone de champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 = 0,2\text{ T}$, où le champ électrique est négligeable, avec une vitesse $v_0 \vec{e}_x$ à l'instant $t = 0$ (on prend une nouvelle origine des temps).

- Justifiez que la vitesse absolue de la particule ne va pas être modifiée.
 - Écrivez le PFD appliqué à la particule et projeté sur les 3 axes.
 - Résoudre des équations et déterminez $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.
 - Déterminez l'instant t_1 où la particule va ressortir de la zone de champ magnétique.
- Faire l'AN pour un ion Fe^{2+} . Dans les deux cas, comparez t_1 à t_0 .
- Déterminez la position et la vitesse de la particule au moment où elle ressort de la zone de champ magnétique.

3. Troisième phase : accélération

La particule traverse de nouveau le zone $-\frac{\ell}{2} < x < \frac{\ell}{2}$ mais le champ électrique a changé de signe.

Déterminez $x(t)$ sur cette troisième phase, puis le temps t_2 de traversée, la vitesse v_2 à la fin de cette phase et l'énergie cinétique correspondante.

AN pour t_2 .

4. Quatrième phase : rotation

En appliquant rapidement les résultats de la seconde phase, déterminez la durée t_3 du demi-tour, et la position du point à la fin de celui-ci.

- Dessiner sur la figure le trajet de la particule pendant ces 4 phases, dans le cas d'un ion Fe^{2+} ; comment serait-elle pour un ion négatif ?
- Vérifiez que le temps total écoulé pour ces 4 phases est approximativement égal à $\frac{2\pi m}{eB_0}$. Déduisez-en la fréquence à laquelle il faut faire osciller le champ électrique pour accélérer l'ion.
- On répète N fois ce processus (2 accélérations, 2 demi-tours), avec $N \gg 1$. Avec un peu d'intuition, exprimez la vitesse v_f et l'énergie cinétique E_f de la particule à la fin de ces N tours. Exprimez aussi le rayon r_f du dernier demi-tour effectué par la particule.
Déduisez-en E_f en fonction de r_f .
- Le dispositif générant le champ magnétique a un rayon $R = 1,2\text{ m}$ fixé. Exprimez l'énergie cinétique maximale qu'on peut communiquer à la particule. AN pour un ions Fe^{2+} .
- Comment pourrait-on communiquer plus d'énergie à l'ion fer ?

Mouvements de particules chargées

TDs numériques

réponses page 691

TD numérique : Séparation isotopique par résonance cyclotron

La résonance cyclotron exploite la différence de pulsation cyclotron d'isotopes du même élément chimique pour provoquer une résonance sur certains isotopes et pas d'autres, afin de les séparer. Cette technique a été testée par exemple pour séparer l'uranium 235 de l'uranium 238.

Les données suivantes serviront dans plusieurs questions :

- charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
- électron-Volt : $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
- unité de masse atomique : $1 \text{ uma} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- masse de l'uranium 235 : $m_{235} = 235 \text{ uma}$
- masse de l'uranium 238 : $m_{238} = 238 \text{ uma}$

On considère un ion de masse m , de charge q , placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ ($B_0 > 0$) orienté selon l'axe Oz d'un référentiel galiléen muni d'une base orthonormée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ directe, ainsi que dans un champ électrique $\vec{E} = E(t) \vec{u}_y$.

1. Écrivez rapidement les équations différentielles vérifiées par x , y et z .
2. Résolvez le mouvement pour de l'uranium 238 ionisé une fois (charge $+e$), dans $B_0 = 0,5 \text{ T}$ et $E(t) = 0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, avec comme CI : $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x + v_1 \vec{u}_z$ avec $\frac{1}{2}mv_0^2 = 10 \text{ eV}$ et $\frac{1}{2}mv_1^2 = 5 \text{ eV}$. On simulera sur une durée de 20 périodes environ.
Tracez la trajectoire dans le plan xy à l'aide de `odeint`. On pourra utiliser la commande `plt.axis('equal')` pour avoir une figure orthonormée.
3. À l'aide du programme suivant, tracez la trajectoire en 3D :

```
1 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
2 fig=plt.figure()
3 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
4 ax.plot(tab_x,tab_y,tab_z)
5 plt.show()
```

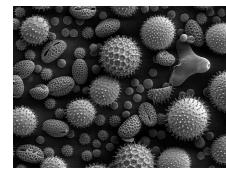
4. On ajoute maintenant un champ électrique $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ avec $E_0 = 80 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Simulez la courbe avec $\omega = \frac{\omega_c}{2}$. Notez les dimensions approximatives de la courbe.
5. Reprenez la même chose pour $\omega = 0,9\omega_c$, puis $0,99\omega_c$.
6. On note désormais $\omega_{c,235}$ la pulsation cyclotron de l'uranium 235 et $\omega_{c,238}$ celle de l'uranium 238. On se place à $\omega = \omega_{c,235}$. Simulez les deux courbes pour de l'uranium 235 puis 238, et tracez-les sur le même graphe ; on poussera la simulation jusqu'à 50 périodes.
7. On note $R_{max}(\omega)$ le rayon maximal atteint par la trajectoire. Tracez la courbe $R_{max}(\omega)$ pour un atome d'uranium 238, puis pour un atome d'uranium 235, sur le même graphique.
Remarque : pour être sûr d'atteindre R_{max} on pourra simuler sur 200 périodes. À la résonance exacte le rayon croît indéfiniment donc de toutes façons on n'atteindra jamais de maximum.

TD numérique : Lentille magnétique

On étudie le passage d'un électron à travers une spire parcourue par un courant, dans le but de montrer qu'on obtient un effet de lentille, qui permet de construire des microscopes électroniques sur le même principe que les microscopes optiques.

La spire crée un champ magnétique qui s'exprime en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}(r, z) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(z) \vec{e}_z = \frac{3zrB_0}{2a^2 \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{5/2}} \vec{e}_r + \frac{B_0}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{3/2}} \vec{e}_z \quad (\text{M6.4})$$



L'écriture du PFD $m\vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ projeté sur les 3 axes de la base cylindrique permettent d'obtenir les équations (admisses, mais c'est un bon exercice par ailleurs) :

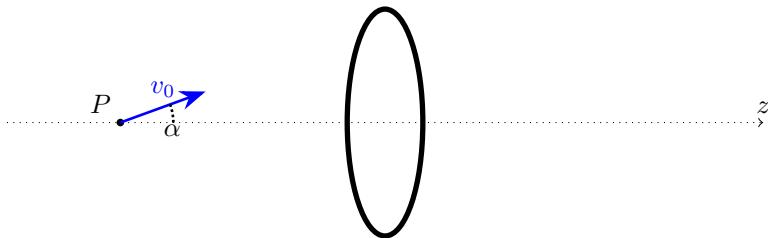
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{e}{m}r\dot{\theta}B_z(z) \quad (\text{M6.5})$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{e}{m}\dot{r}B_z(z) - \frac{e}{m}\dot{z}B_r(r, z) \quad (\text{M6.6})$$

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}r\dot{\theta}B_r(r, z) \quad (\text{M6.7})$$

avec $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

On va simuler le trajet d'une particule émise depuis un point P de l'axe ($r(0) \approx 0$) à une ordonnée $z(0) < 0$ partant avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec la direction \vec{e}_z . On remarquera que la seconde équation possède un problème en $r = 0$.



1. On considère une lentille telle que $B_0 = 40 \text{ mT}$ et $a = 1 \text{ mm}$. Définissez sous Python les constantes ainsi que les fonctions B_r et B_z .
2. Résolvez le mouvement avec `odeint` pour les CI : $r(0) = \frac{a}{1000}$, $\theta(0) = 0 \text{ rad}$, $z(0) = -100a$, $v_0 = 2 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ et $\alpha = 0,001 \text{ rad}$, sur un temps total $\frac{200a}{v_0}$. Tracez la courbe $r(z)$ et interprétez en comparant avec l'effet d'une lentille convergente (placée en $z = 0$) sur un rayon lumineux.
Remarque : lorsque la simulation amène le point trop près de l'axe, il y a un risque de divergence de $\ddot{\theta}$. On l'éviter en ajoutant la ligne `if r<a*1e-4: r=a*1e-4` dans la fonction dérivée.
3. On note Z l'abscisse de départ ; mesurez à l'aide du curseur l'abscisse Z' où l'électron revient sur l'axe. On définit la distance focale f' de la lentille par la relation $\frac{1}{f'} = \frac{1}{Z'} - \frac{1}{Z}$. Comment s'appelle cette loi ? Déterminez f' .
Choisissez d'autres valeurs de Z et vérifiez que f' reste constant.
4. Tracez un ensemble de courbes partant de $z(0) = -100a$ et avec des angles variant entre $0,001 \text{ rad}$ et $0,04 \text{ rad}$. Observez en zoomant le déplacement du point de focalisation. Comment appelle-ton ce phénomène en optique ?
5. Tracez la trajectoire pour $z(0) = -100a$, $\alpha = 0,001 \text{ rad}$ et B_0 variant de 25 mT à 100 mT .
6. La théorie indique que la distance focale de la lentille vaut approximativement $f' \approx \frac{32m^2v_0^2}{3\pi ae^2B_0^2}$. Vérifiez cette loi.

TD numérique : Piège de Paul

Pour étudier un électron et mesurer précisément ses caractéristiques, des scientifiques ont mis au point des pièges qui permettent de les confiner dans une petite zone de l'espace entre des électrodes. Nous allons ici étudier un piège 2D : le piège de Paul.

Dans ce piège, l'électron ne se déplace qu'en 2D dans un potentiel électrique $V(x, y, t) = -U(t)\frac{y^2-x^2}{2r_0^2}$ avec $U(t) = U_0 + U_s \cos(\omega t)$.

Pour les AN : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

1. Établir l'expression du champ électrique \vec{E} .
2. En déduire les deux équations différentielles vérifiées par x et y :

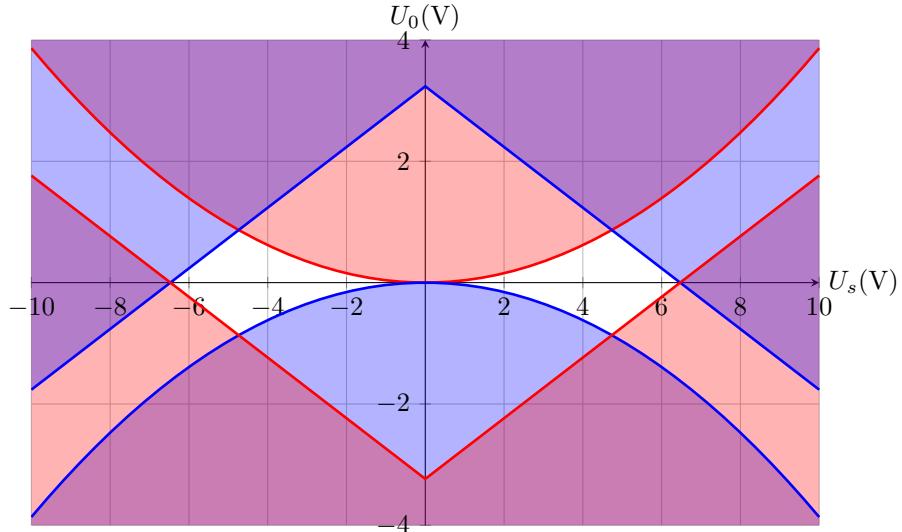
$$\begin{cases} \ddot{x} - \alpha U(t)x = 0 \\ \ddot{y} + \alpha U(t)y = 0 \end{cases} \quad (\text{M6.8})$$

avec α une constante à déterminer.

3. Résoudre numériquement la trajectoire de l'électron pour les valeurs : $U_s = 5 \text{ V}$, $U_0 = 0,45 \text{ V}$, $r_0 = 2 \text{ mm}$

et $\omega = 2\pi \times 120 \text{ MHz}$, avec $x(0) = y(0) = \frac{r_0}{10}$ et $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, sur une durée égale à environ 100 fois la période de la tension.

4. En fait, la trajectoire de l'électron est stable ou instable en fonction des valeurs de U_0 , U_s , α et ω . Pour les valeurs de α et ω précédentes, le diagramme de stabilité pour U_0 et U_s est le suivant (les zones non colorées sont stables) :



Simulez la trajectoire pour différents couples (U_0, U_s) dans la partie stable, ou instable.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

- Q1.(a) ET (c)
- Q2.(b) ET (c)
- Q3.(d)
- Q4.(d)
- Q5.(b)
- Q6.(b) ET (c)
- Q7.(a)
- Q8.(a) ET (d)
- Q9.(a) ET (c) ET (d)

Réponses au QCM : Sens de la force magnétique

- Q10.(b)
- Q11.(b)
- Q12.(a)
- Q13.(a)
- Q14.(a)
- Q15.(b)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M6.1 : Champ électrique et pesanteur [*]

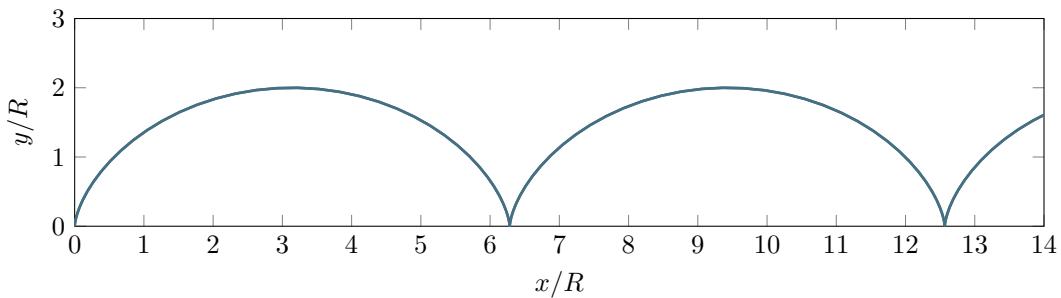
1. $E = 5,6 \times 10^{-11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ pour un électron et $1,0 \times 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ pour un proton : c'est très faible.
2. 17 nV

Réponses de l'exercice M6.2 : Spectromètre de masse [**]

1. $v_l = \frac{E}{B} = 1 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. $m_i N_A = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$:

Réponses de l'exercice M6.3 : Dérive dans des champs électriques et magnétiques orthogonaux [**]

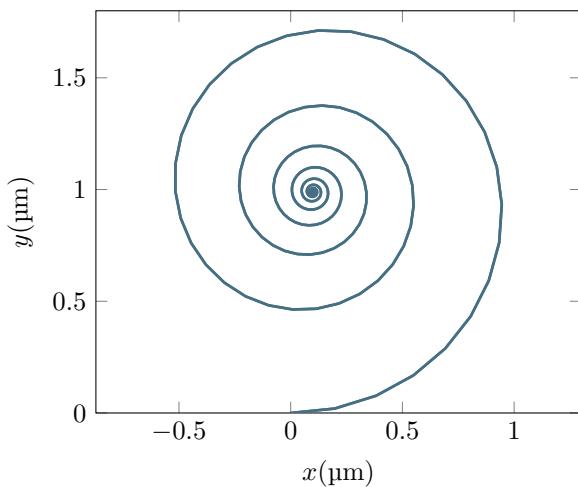
1.
$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{qE}{m} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$
2. $z = 0$
3. $\ddot{y} + \omega_c^2 y = \frac{qE}{m} = \omega_c \frac{E}{B}$
4.
$$\begin{cases} x(t) &= \frac{E}{B\omega_c} [\omega_c t - \sin(\omega_c t)] \\ y(t) &= \frac{E}{B\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)] \end{cases}$$
5. On obtient une cycloïde ($R = \frac{E}{B\omega_c}$) :



6. $\vec{v}_d = \frac{E}{B} \vec{e}_x$

Réponses de l'exercice M6.4 : Chambre à bulles [**]

1.
$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} = 0 \end{cases}$$
2. $z = v_1 \tau [1 - e^{-t/\tau}]$
3. $\ddot{u} + \left[\frac{1}{\tau} + i\omega_c \right] \dot{u} = 0$ d'où on établit $u = \frac{v_0}{1/\tau + i\omega_c} [1 - e^{[-t/\tau - i\omega_c t]}]$
4. $u_\infty = \frac{v_0}{1/\tau + i\omega_c}$
5. On a une spirale convergeant vers u_∞ :



Réponses de l'exercice M6.5 : Déviation des électrons dans un tube cathodique [***]

1. $v_0 = 3 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = c/10$: on est en limite de régime relativiste.
2. Les équations sont $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y} = \frac{eV}{m_e d}$. On en déduit que $x = 0 + v_0 t$ et $y = 0 + \frac{eV}{2m_e d} t^2$. L'électron traverse les plaques en temps $1,7 \text{ ns}$; à la fin de la traversée, sa position est donnée par $x = l = 5 \text{ cm}$ et $y = \pm 5 \text{ mm}$, et sa vitesse $3 \times 10^7 \vec{e}_x + 6 \times 10^6 \vec{e}_y$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) fait un angle de 11° environ avec l'axe. Après les plaques, l'électron continue en ligne droite et frappe l'écran à $2,5 \text{ cm}$ du centre.
3. Cf. cours : $x(t) = \frac{v_0 m_e}{eB} \sin \frac{eB t}{m_e}$ et $y(t) = \frac{v_0 m_e}{eB} \left(1 - \cos \frac{eB t}{m_e}\right)$. L'électron parcourt un cercle de rayon $R = 17 \text{ mm}$; il ressort au bout de $0,36 \text{ ns}$, avec pour coordonnées $x = 1 \text{ cm}$ et $y = 3,3 \text{ mm}$, et une vitesse faisant un angle de 32° avec l'axe. On trouve alors un impact à $6,7 \text{ cm}$ du centre.

Réponses de l'exercice M6.6 : Effet Hall [***]

1. En régime permanent, l'accélération est nulle et $\vec{v} = -\frac{e}{f} \vec{E}$.
2. Les électrons qui vont traverser en dt sont ceux situés dans le pavé de section S et de hauteur $\frac{-eE_0 dt}{f}$, ils ont une charge totale $-en \frac{-eE_0 S dt}{f}$.
3. Les électrons sont déviés selon $-\vec{e}_y$. Il apparaît donc des charges positives en $+\ell/2$ et négatives en $-\ell/2$, ce qui crée un champ dirigé du + vers le - donc selon $-\vec{e}_y$ donc $E_H < 0$.
4. $E_H = -\frac{eE_0 B}{f}$
5. $\int_{-\ell/2}^{+\ell/2} (-E_H) dy = V(-\ell/2) - V(+\ell/2) = U_H = -\frac{eE_0 B \ell}{f} = -\frac{BI}{neh}$ d'où on tire bien $R_H = -\frac{1}{ne}$. Pour un semi-conducteur, n est faible donc l'effet important. Pour des demi-conducteurs dopés p , il a le signe inverse car ce sont les trous positifs qui conduisent le courant.

Réponses de l'exercice M6.7 : Cyclotron [***]

1. Première phase : accélération

En $t_0 = 299 \text{ ns}$, l'électron a atteint le bord avec une vitesse de $2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (énergie $E_0 = \frac{\ell q E_0}{2}$).

2. Seconde phase : rotation

L'électron effectue un demi-tour à vitesse constante de rayon $\frac{v_0}{\omega_c}$ en une durée $t_1 = 4,7 \mu\text{s}$.

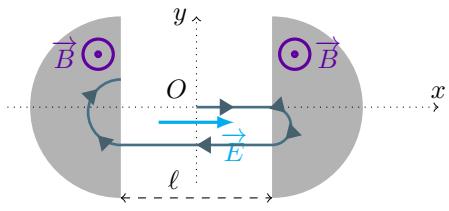
3. Troisième phase : accélération

$$E_2 = 3E_0 = \frac{3\ell q E_0}{2}$$

4. Quatrième phase : rotation

On a encore un demi-tour de durée $t_3 = t_1 = 4,7 \mu\text{s}$ à vitesse constante.

5. Pour un ion négatif, la figure est symétrique par rapport à l'origine.



$$6. f = \frac{qB_0}{2\pi m} = 107 \text{ kHz}$$

$$7. r_f = \sqrt{\frac{2E_f m}{q^2 B_0^2}} \text{ et } E_f = \frac{q^2 B_0^2 r_f^2}{2m}$$

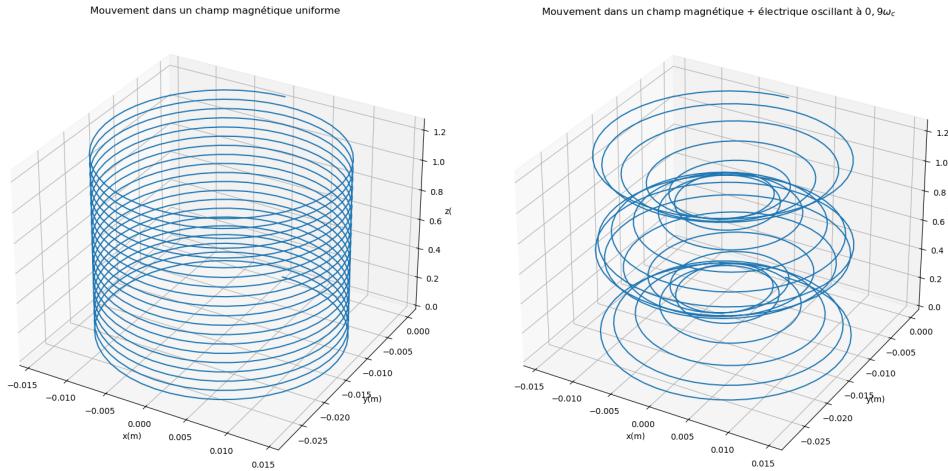
$$8. E_{max} = 3,1 \times 10^{-14} \text{ J} = 194 \text{ keV}$$

9.

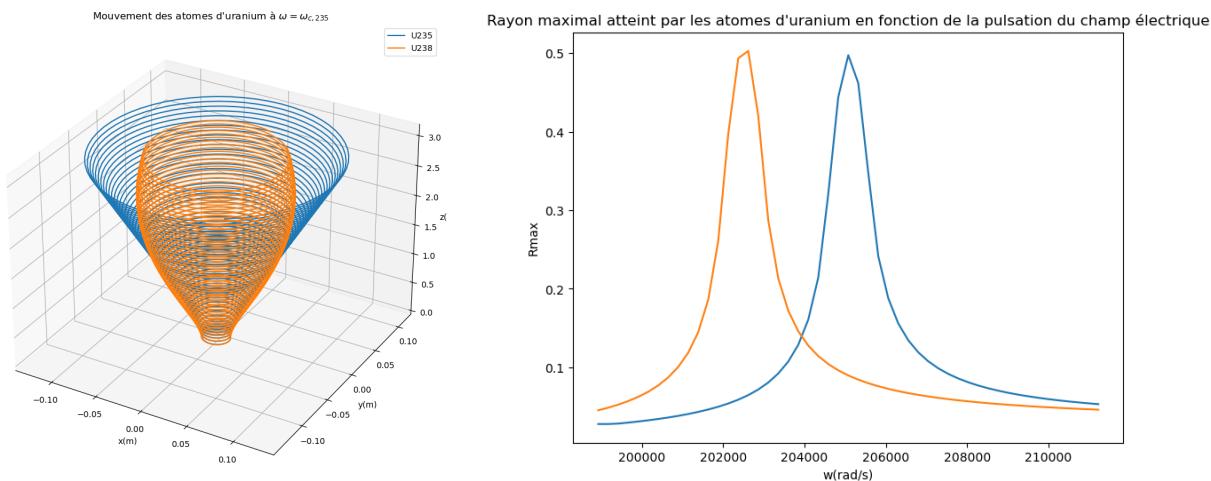
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Séparation isotopique par résonance cyclotron

Avec un simple champ magnétique, l'ion décrit une hélice. Avec l'ajout d'un champ électrique, la courbe change d'allure, suivant la pulsation du champ électrique elle peut se mettre à se resserrer puis à s'écartier.



Mais au voisinage de $\omega = \omega_c$, il y a une résonance, et le rayon croît. Néanmoins les deux isotopes d'uranium résonant à des pulsations différentes, on peut trouver une pulsation à laquelle l'un des isotopes atteint de grands rayons et pas l'autre, et ainsi le récupérer.

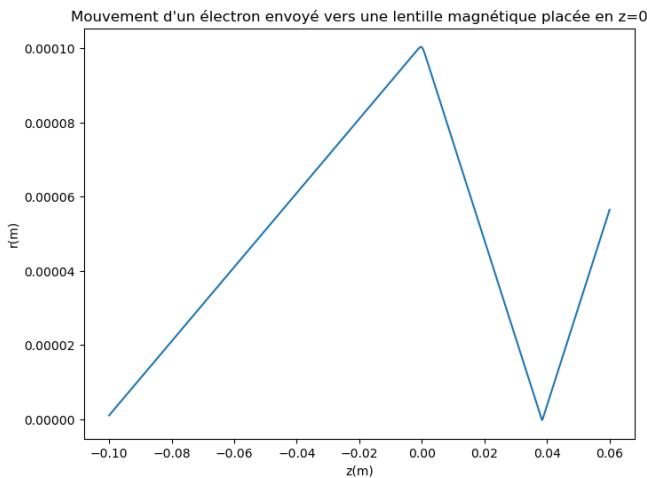


Il y a cependant des problèmes à cette technique :

- toute charge accélérée rayonne de l'énergie, ce qui est équivalent à une force de frottements et va élargir la courbe de résonance ; mais cet effet est faible
- si on veut isoler une quantité suffisante d'atomes, il faut mettre plusieurs ions d'un coup, alors ils se perturbent l'un l'autre et ça marche mal

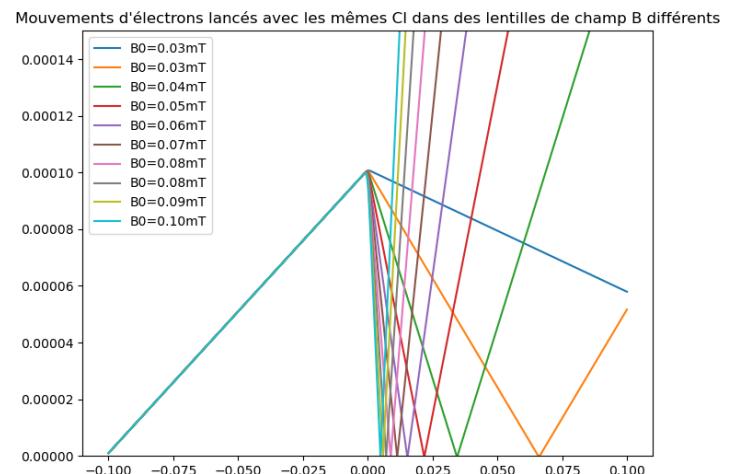
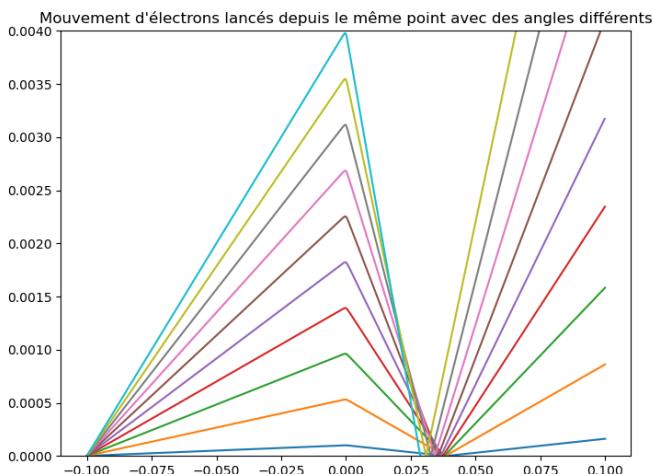
Réponses au TD d'info : Lentille magnétique

La simulation donne une courbe dans laquelle on voit l'électron avancer en ligne droite jusqu'à $z = 0$, puis changer de direction et repartir vers l'axe. Le «rebond» sur l'axe est dû au fait qu'on trace r qui est positif; en fait la particule traverse l'axe en ligne droite, mais la valeur absolue donne cet aspect de rebond. Sur la simulation ci-dessous par exemple, on mesure $Z = -10$ cm et $Z' = +4$ cm d'où on tire $f' = 2,86$ cm; on retrouve la même valeur en modifiant Z .



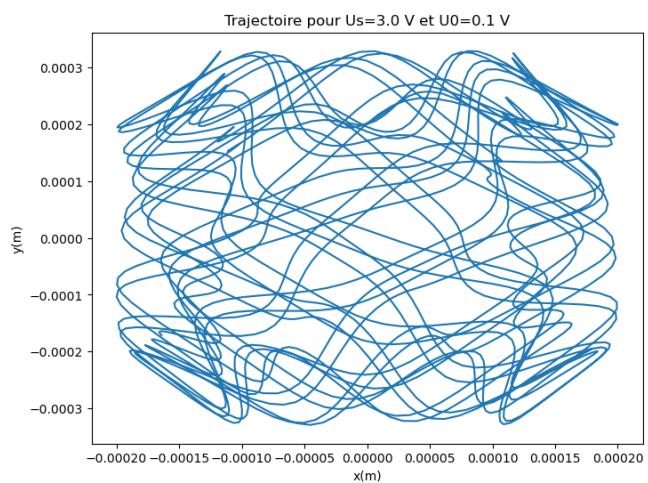
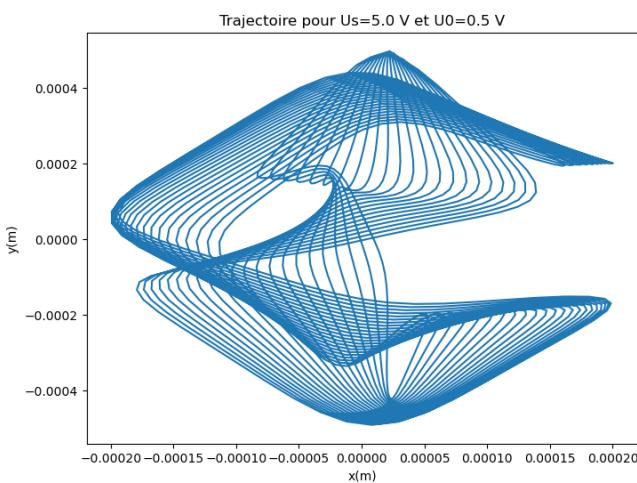
Si on fait varier l'angle, on constate que pour de grands angles, le point de convergence est plus près de la lentille : c'est l'analogue de l'aberration sphérique avec les lentilles minces.

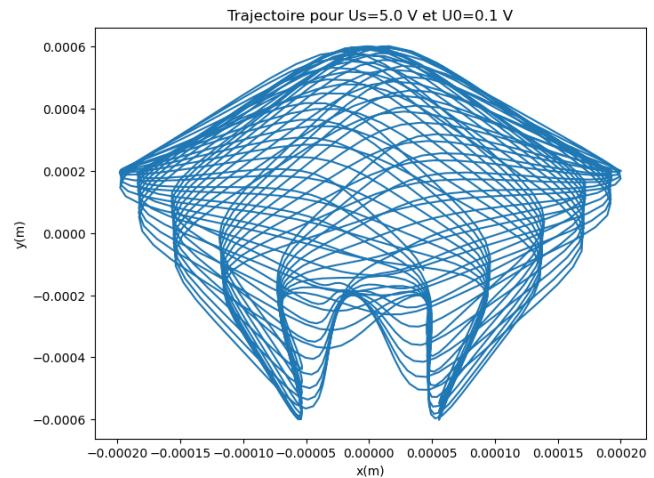
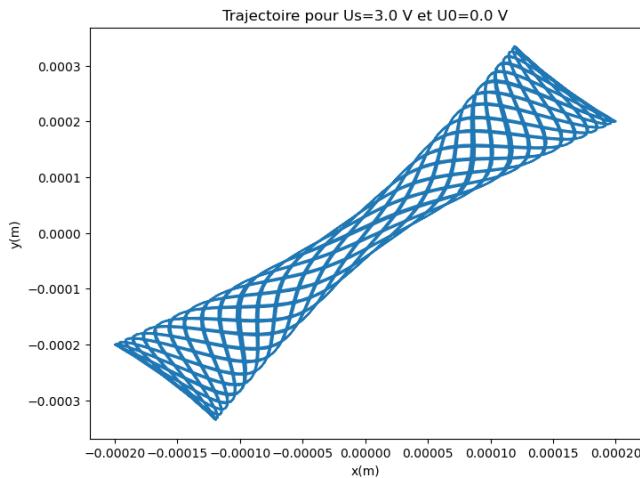
Si on fait varier le champ magnétique, on peut faire varier la distance focale de la lentille.



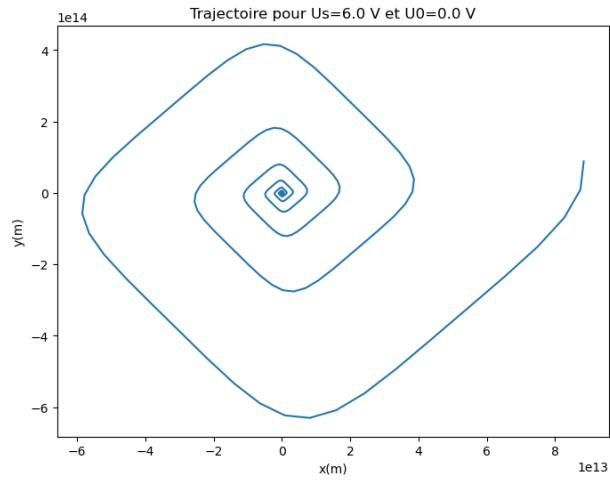
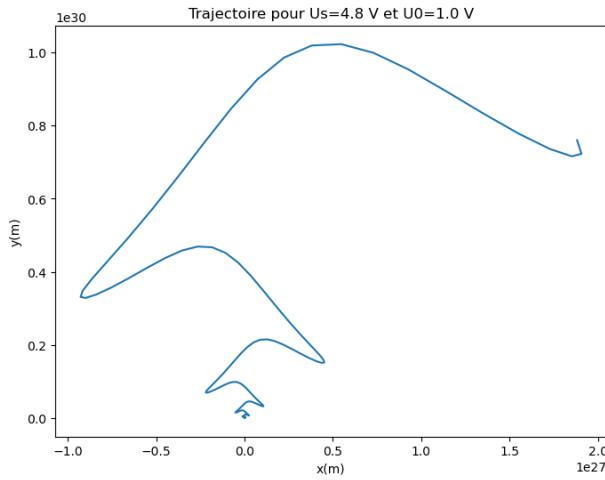
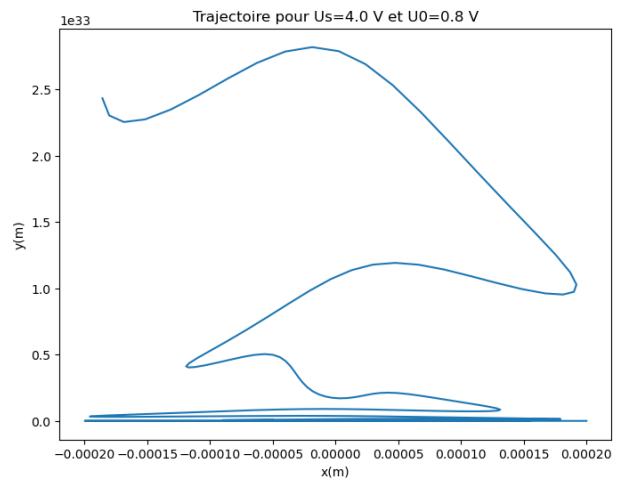
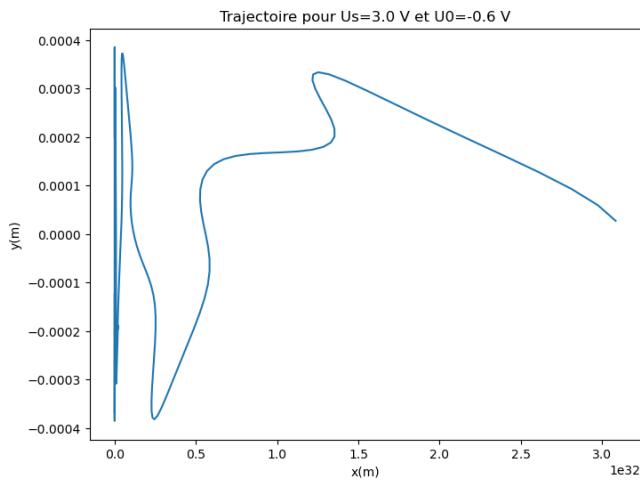
Réponses au TD d'info : Piège de Paul

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = \frac{U(t)}{r_0^2} (-x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$ En appliquant le PFD on obtient donc les équations proposées avec $\alpha = \frac{e}{mr_0^2}$
Des simulations dans la zone stable donnent des trajectoires dessinant d'étranges figures :





Dans la zone instable, l'électron part au loin avec des trajectoires très différentes et parfois étonnantes :



Dynamique des systèmes matériels

Cours

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des points matériels. Pour pouvoir passer à des objets plus concrets, nous allons les considérer comme des ensemble de points matériels (les atomes). Dans ce chapitre, nous allons établir les propriétés générales de la dynamique des ensembles de points matériels ; dans le chapitre suivant, nous étudierons un cas particulier, les solides.

! Dans tout ce chapitre, \mathcal{S} désigne un système formé de N points matériels M_i de masse m_i ; autrement dit, $\mathcal{S} = \{M_i, i = 1, \dots, N\}$.

M7.A. Troisième loi de Newton, ou Principe de l'action et de la réaction

Nous avons déjà introduit le première loi de Newton (ou Principe d'inertie) et la seconde (ou Principe fondamental de la dynamique). Nous allons compléter ici avec la troisième (ou Principe de l'action et de la réaction).

Troisième loi de Newton

Si un point matériel M_1 exerce une force sur un point matériel M_2 , alors le point M_2 exerce sur M_1 une force opposée $\vec{f}^{2 \rightarrow 1} = -\vec{f}^{1 \rightarrow 2}$; de plus, ces deux forces sont parallèles à la droite ($M_1 M_2$).

Remarque : L'hypothèse qu'il s'agit de deux *points matériels* est importante. Si ce n'est pas le cas, la première partie de la loi est encore vraie, mais pas la seconde. Par exemple, deux molécules d'eau exercent l'une sur l'autre des forces opposées, mais qui ne sont pas dirigées selon la droite qui les relie.

M7.B. Théorème de la quantité de mouvement et variations

La première conséquence de cette loi va être de nous permettre de décrire de façon globale le mouvement d'un système matériel.

Définition : Quantité de mouvement d'un système matériel

On définit la quantité de mouvement de \mathcal{S} comme la somme des quantités de mouvements des points qui le constituent :

$$\vec{P}_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i \vec{v}(M_i) \quad (\text{M7.1})$$

Cette quantité de mouvement vérifie alors une loi qui ressemble à un PFD, mais avec des différences :

Théorème de la quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système matériel est égal à la somme des forces **extérieures** qui s'exercent sur ce système :

$$\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces ext. } k \\ \text{s'appliquant sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} \right) \quad (\text{M7.2})$$

Démonstration

Calculons cette dérivée :

$$\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}(M_i)) = \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces } k \\ \text{s'appliquant sur } M_i}} \vec{f}_k^{\rightarrow M_i} \right) \text{ en appliquant le PFD à chaque point } M_i$$

Pour chaque point M_i , on sépare les forces provenant d'autres points de \mathcal{S} , et les autres forces, dites *extérieures* :

$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} + \sum_{j \neq i} \vec{f}^{M_j \rightarrow M_i} \right)$$

Pour chaque force de M_j sur M_i , il existe aussi une force de M_i sur M_j ; on les regroupe donc par paires :

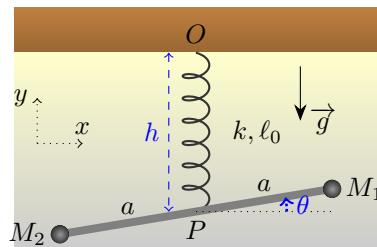
$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} \right) + \sum_{\text{paires } (i,j)} \left(\vec{f}^{M_j \rightarrow M_i} + \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \right)$$

Or d'après la troisième loi de Newton, $\vec{f}^{M_j \rightarrow M_i} + \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} = \vec{0}$:

$$= \sum_i \left(\sum_{\substack{\text{forces extérieures } k \\ \text{s'appliquant} \\ \text{sur } M_i}} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} \right)$$

Exemple : Oscillations d'une barre au bout d'un ressort

Cet exemple n'a aucun intérêt physique, il n'est là que pour illustrer l'application du principe précédent. Une barre de masse négligeable et de longueur $2a$ est suspendue en son milieu P à un plafond par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Aux deux extrémités de cette barre sont fixées deux masses m_1 et m_2 .



Les deux variables servant à décrire ce système sont la longueur h du ressort et l'angle θ entre l'horizontale et la barre.

1. Exprimez la vitesse des masses m_1 et m_2 .
2. On note $\mathcal{S} = \{m_1 + m_2 + \text{barre}\}$.
 - (a) Exprimez la quantité de mouvement totale de \mathcal{S} (la barre, n'ayant pas de masse, n'a pas de quantité de mouvement).
 - (b) Effectuez un bilan des forces extérieures appliquées sur le système.

1. On utilise la relation de Chasles, par exemple $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM_1} = -h\vec{e}_y + a \cos \theta \vec{e}_x + a \sin \theta \vec{e}_y$ puis on

dérive ; on trouve
$$\begin{cases} \vec{v}_1 = -a\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + (-\dot{h} + a\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_y \\ \vec{v}_2 = a\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + (-\dot{h} - a\dot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_y \end{cases}$$

2. (a) $\overrightarrow{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = -(m_1 + m_2) \dot{h} \vec{e}_y + (m_1 - m_2) a\dot{\theta} [\cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_x]$

(b) On a les forces suivantes :
$$\begin{cases} -m_1 g \vec{e}_y \text{ en } M_1 \\ -m_2 g \vec{e}_y \text{ en } M_2 \\ k(h - \ell_0) \vec{e}_y \text{ en } P \end{cases}$$

Le théorème précédent est souvent assez compliqué à mettre en œuvre. Pour le simplifier, on va définir un point particulier ; sa définition va faire intervenir la notion de *barycentre*.

On connaît tous le milieu d'un segment $[AB]$: c'est le point qui est à égale distance de A et de B . On peut presque voir cela comme une «moyenne» des deux points ; d'ailleurs, c'est une moyenne dans le sens des vecteurs, car si I est le milieu de $[AB]$, alors pour tout point O , $\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Maintenant, il peut arriver que, dans une moyenne, un terme ait plus d'importance qu'un autre : il a un coefficient

plus important. C'est pareil avec les points : si le point A a plus d'importance que le point B , alors la «moyenne» des deux points sera plus proche de A que de B .

Si on veut donner un sens mathématique à cette notion, et la généraliser à plus de deux points, il faut utiliser les barycentres :

Un peu de maths : Barycentre d'un ensemble de points pondérés

Soient N points A_k pondérés par des valeurs α_k telles que $\sum_k \alpha_k \neq 0$; alors on définit le barycentre de ces points comme l'unique point B vérifiant $\overrightarrow{OB} = \frac{\sum_k \alpha_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_k \alpha_k}$. On peut montrer mathématiquement que ce point ne dépend pas du point O choisi comme origine.

Puisque tout point O convient, on peut l'appliquer par rapport à B , et en déduire que $\sum_k \alpha_k \overrightarrow{BA_k} = \vec{0}$.

Définition : Centre de masse de \mathcal{S}

Le centre de masse d'un système \mathcal{S} de points matériels, noté G , est le barycentre de ces points pondérés par leurs masses respective. Il vérifie donc les propriétés :

$$\forall O, \left(\sum_i m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \quad (\text{M7.3a})$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0} \quad (\text{M7.3b})$$

Propriété : Expression de la quantité de mouvement à l'aide du centre de masse

La quantité de mouvement d'un système matériel fermé est égale au produit de sa masse totale par la vitesse de son centre de masse :

$$\vec{P}_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}} \vec{v}(G) \text{ avec } M_{\mathcal{S}} = \sum_i m_i \quad (\text{M7.4})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\mathcal{S}} &= \sum_i m_i \vec{v}(M_i) = \sum_i m_i \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(M_{\mathcal{S}} \overrightarrow{OG} \right) = M_{\mathcal{S}} \vec{v}(G) \text{ d'après (M7.3a).} \end{aligned}$$

Théorème du centre de masse

Dans un référentiel galiléen, le produit de la masse totale d'un système matériel fermé par l'accélération de son centre de masse est égal à la somme des forces **extérieures** qui s'exercent sur ce système :

$$M_{\mathcal{S}} \vec{a}(G) = \sum_i \left(\sum_{\text{forces ext. k s'appliquant sur } M_i} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} \right) \quad (\text{M7.5})$$

Démonstration

D'après (M7.2), $\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = \sum_i \left(\sum_{\text{forces ext. k s'appliquant sur } M_i} \vec{f}_{ext,k}^{\rightarrow M_i} \right)$. Or $\vec{P}_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}} \vec{v}(G)$ d'après (M7.4), donc $\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = \frac{d}{dt} (M_{\mathcal{S}} \vec{v}(G))$; si le système est fermé, sa masse est constante donc $\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = M_{\mathcal{S}} \vec{a}(G)$.

Cette loi nous dit donc qu'il existe un point particulier du système, son centre de masse, dont le mouvement peut être étudié comme un point matériel de masse $M_{\mathcal{S}}$ soumis à toutes forces extérieures s'appliquant sur le système. Cela justifie ce qu'on a fait depuis le début de la mécanique : on a étudié certains solides comme si c'étaient des points matériels ; en fait, sans le dire, on étudiait le mouvement de leur centre de masse.

Pour appliquer ce théorème, encore faut-il savoir où se trouve le centre de masse. Dans le cas d'un système

indéformable, c'est facile, il est fixe par rapport au système ; c'est dans ce cas-là qu'on utilisera principalement le Théorème du centre de masse (cf. chapitre suivant).

M7.C. TEC pour un système matériel

Regardons maintenant ce qu'il en est pour l'aspect énergétique d'un système matériel.

Définition : Énergie cinétique d'un système

L'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques de tous les points qui le composent :

$$E_c(\mathcal{S}) = \sum_i E_c(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i) \quad (\text{M7.6})$$

Théorème de l'Énergie Cinétique pour un système

Le Théorème de l'Énergie Cinétique en référentiel galiléen se généralise à un système, à condition de prendre toutes les forces, extérieures comme intérieures :

$$\frac{dE_c}{dt}(\mathcal{S}) = \sum_{\text{forces extérieures } k} \mathcal{P}_{\vec{f}_k} + \sum_{\text{forces intérieures } k'} \mathcal{P}_{\vec{f}_{k'}} \quad (\text{M7.7a})$$

$$\Delta E_c(\mathcal{S}) = \sum_{\text{forces extérieures } k} W_{\vec{f}_k} + \sum_{\text{forces intérieures } k'} W_{\vec{f}_{k'}} \quad (\text{M7.7b})$$

Il en est de même pour le Théorème de l'Énergie Mécanique, en ne prenant que les forces non conservatives à droite.

Démonstration

Il n'y a rien à démontrer... Il suffit de faire la somme des Théorèmes de l'Énergie Cinétique appliqués à chaque point M_i du système.

Dans le cas des forces, celles-ci s'annulaient 2 à 2 ; dans le cas des puissances (ou des travaux), elles ne s'annulent pas, mais il y a quand même des propriétés importantes à connaître.

Propriété : Puissance des forces intérieures d'une paire de points

Les forces intérieures s'exerçant entre deux points M_i et M_j ont pour puissance

$$\mathcal{P}_{int(i,j)} = \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} \quad (\text{M7.8a})$$

et pour travail infinitésimal

$$\delta W_{int(i,j)} = \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} \quad (\text{M7.8b})$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int(i,j)} &= \mathcal{P}_{\vec{f}^{M_i \rightarrow M_j}} + \mathcal{P}_{\vec{f}^{M_j \rightarrow M_i}} \\ &= \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot \vec{v}(M_j) + \vec{f}^{M_j \rightarrow M_i} \cdot \vec{v}(M_i) \text{ en faisant attention au point d'application de chaque force} \\ &= \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot (\vec{v}(M_j) - \vec{v}(M_i)) \text{ par la troisième loi de Newton} \\ &= \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \right) = \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} \end{aligned}$$

Cette propriété n'est pas à connaître ; ce sont deux de ses conséquences qu'il faut connaître :

Propriété : Puissance intérieure entre deux points à distance constante

Si deux points de \mathcal{S} sont à une distance qui reste constante au cours du mouvement, la puissance des forces intérieures entre ces deux points est nulle :

$$\|\overrightarrow{M_i M_j}\| = cst \Rightarrow \mathcal{P}_{int(i,j)} = 0$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{M_i M_j}\| = cst &\Rightarrow \|\overrightarrow{M_i M_j}\|^2 = cst \Rightarrow \overrightarrow{M_i M_j}^2 = cst \\ &\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}^2}{dt} = 0 \Rightarrow 2\overrightarrow{M_i M_j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} = 0 \\ &\Rightarrow \overrightarrow{M_i M_j} \perp \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} \\ &\Rightarrow \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \perp \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} \text{ puisque } \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \parallel \overrightarrow{M_i M_j} \text{ par la troisième loi de Newton} \\ &\Rightarrow \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \cdot \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_{int(i,j)} = 0 \end{aligned}$$

On en tire une conséquence immédiate pour le chapitre suivant :

Propriété : Puissance intérieure dans un système indéformable

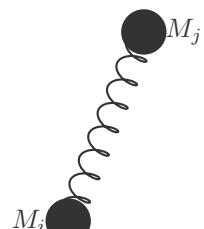
Pour un système indéformable, la puissance totale des forces intérieures est nulle.

Dans le cas où le système se déforme, il y a un cas intéressant, c'est celui des forces conservatives. Pour cela, au lieu de faire une démonstration générale et abstraite, on va simplement étudier un cas particulier et généraliser le résultat trouvé :

Calcul : Travail d'un ressort fixé à deux points mobiles

Considérons un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 , attaché à deux points M_i et M_j . Alors $\vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} = -k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0) \frac{\overrightarrow{M_i M_j}}{\|\overrightarrow{M_i M_j}\|}$ donc

$$\begin{aligned} W_{int(i,j)}^{t_1 \rightarrow t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} -k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0) \frac{\overrightarrow{M_i M_j}}{\|\overrightarrow{M_i M_j}\|} \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0) \frac{d\overrightarrow{M_i M_j}^2}{2\|\overrightarrow{M_i M_j}\|} \text{ car } d\overrightarrow{M_i M_j}^2 = 2\overrightarrow{M_i M_j} \cdot d\overrightarrow{M_i M_j} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0) \frac{d\|\overrightarrow{M_i M_j}\|^2}{2\|\overrightarrow{M_i M_j}\|} \text{ car } \overrightarrow{M_i M_j}^2 = \|\overrightarrow{M_i M_j}\|^2 \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0) d\|\overrightarrow{M_i M_j}\| \text{ car } d\|\overrightarrow{M_i M_j}\|^2 = 2\|\overrightarrow{M_i M_j}\| \cdot d\|\overrightarrow{M_i M_j}\| \\ &= - \left[\frac{1}{2} k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0)^2 \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$



On voit donc que le travail total des forces entre M_i et M_j (2 forces) s'écrit somme l'opposé de la variation de la quantité $\frac{1}{2} k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0)^2$: cette *paire de forces* est donc conservatif, d'énergie potentielle $\frac{1}{2} k (\|\overrightarrow{M_i M_j}\| - \ell_0)^2$.

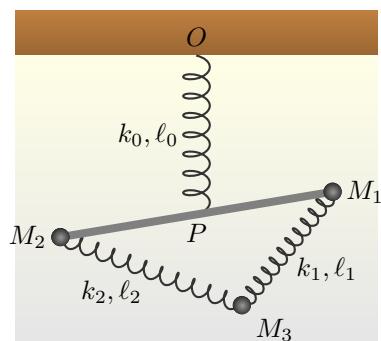
Propriété : Énergie potentielle d'une paire de forces intérieures

Si les forces intérieures entre deux points M_i et M_j sont conservatives, on ne compte qu'une seule fois l'énergie potentielle intérieure pour la paire de points.

Ainsi, dans les bilans des forces, il faut bien distinguer :

- les forces intérieures, qui sont comptées par paires de forces
- les forces extérieures, qui sont comptées une par une

Considérons par exemple le schéma ci-contre, où M_1 et M_2 sont reliés par une barre inextensible de masse négligeable. On prend comme système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2, M_3\}$ avec les barres/ressorts qui les relient. Pour écrire l'énergie mécanique totale de ce système, il faut compter :



- l'énergie cinétique de chaque point : $E_c = E_c(M_1) + E_c(M_2) + E_c(M_3) = \frac{1}{2}m_1v(M_1)^2 + \frac{1}{2}m_2v(M_2)^2 + \frac{1}{2}m_3v(M_3)^2$ avec des notations évidentes
- l'énergie potentielle intérieure de chaque paire de points du système : $E_{p,int} = E_{p,int}(M_1, M_2) + E_{p,int}(M_1, M_3) + E_{p,int}(M_2, M_3) = 0 + \frac{1}{2}k_1(M_1M_3 - \ell_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(M_2M_3 - \ell_2)^2$
- l'énergie potentielle extérieure de chaque point ou chaque force extérieure : $E_{p,ext} = E_{p,ext}(M_1) + E_{p,ext}(M_2) + E_{p,ext}(M_3) + E_{p,ext}(P) = m_1gz(M_1) + m_2gz(M_2) + m_3gz(M_3) + \frac{1}{2}k_0(OP - \ell_0)^2$

Il reste un cas particulier à connaître : les fils. Si un fil inextensible relie deux points du système, alors la distance entre ces deux points est constante, donc le travail de la tension du fil est nul. On va admettre que c'est aussi le cas si le fil passe sur une poulie :

Propriété : Fil sur une poulie parfaite

Une poulie est un dispositif qui permet de modifier la direction d'un fil, et donc de sa tension. Dans le cas d'un fil passant sur une poulie parfaite (c'est-à-dire de masse négligeable et ne subissant pas de frottements) :

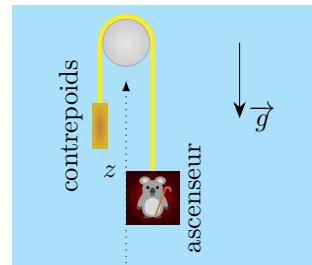
- la tension du fil a la même norme aux deux bouts, mais pas la même direction
- cette paire des deux forces de tensions ne travaille pas



Exemple : Ascenseur

Un ascenseur de masse $M = 320 \text{ kg}$ à vide est attaché à un câble inextensible qui passe sur une poulie parfaite ; de l'autre côté est attaché un contrepoids de masse $m = 380 \text{ kg}$. Un moteur (fixé sur la poulie) entraîne le mouvement de l'ensemble.

On note z l'altitude de l'ascenseur. Le référentiel terrestre est galiléen. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



1. Soit z_c l'altitude du contrepoids, et $z_c(0)$ son altitude lorsque $z = 0$ (ascenseur au sol).
Le câble est inextensible : que vaut z_c en fonction de $z_c(0)$ et de z à un instant quelconque ?
2. On note $\mathcal{S} = \{\text{ascenseur} + \text{contrepoids} + \text{fil}\}$.
Exprimez son énergie mécanique.
3. Trois personnes de 60 kg montent dans l'ascenseur. Calculez la puissance \mathcal{P} que doit fournir le moteur pour faire monter l'ascenseur et ses passagers à la vitesse $\dot{z} = 2,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
4. Lors d'un test, l'ascenseur est vide, et on débraye le moteur (sa puissance est alors nulle).
Calculez alors l'accélération \ddot{z} de l'ascenseur.

1. Quand l'ascenseur monte de z , le contrepoids descend de z , donc $z_c = z_c(0) - z$
2. L'ascenseur a pour vitesse $\dot{z}\vec{e}_z$, et le contrepoids $-\dot{z}\vec{e}_z$. L'énergie cinétique du système vaut donc $\frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m_c\dot{z}^2$.
L'énergie potentielle extérieure du système est due au poids : $E_{p,ext} = Mgz + m_cg(z_c(0) - z)$.
L'énergie potentielle intérieure est nulle car le fil est inextensible et la poulie parfaite.
Donc $E_m = \frac{1}{2}(M + m_c)\dot{z}^2 + Mgz + m_cg(z_c(0) - z)$

3. Il y a aussi la force du moteur qui n'est pas conservative. Par le théorème de l'énergie mécanique : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}$ donc $(M + m_c)\dot{z}\ddot{z} + (M - m_c)g\dot{z} = \mathcal{P}$.
Si $\dot{z} = 2,1 = cst$ alors $\ddot{z} = 0$ donc $\mathcal{P} = (M - m_c)g\dot{z} = 2,47 \text{ kW}$ en prenant $M = 500 \text{ kg}$.
4. Cette fois l'ED devient $(M + m_c)\dot{z}\ddot{z} + (M - m_c)g\dot{z}$ d'où on tire $\ddot{z} = \frac{(m_c - M)g}{M + m_c} = 0,84 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

M7.D. Utilisation des lois de conservation

Les lois vues précédemment permettent d'établir des équations différentielles décrivant le mouvement, qui sont plus ou moins difficiles à résoudre. Parfois, la conservation de certaines quantités (c'est-à-dire, l'existence de quantités qui restent constantes au cours du temps) permet de simplifier l'étude. Ce paragraphe n'est cependant pas essentiel, car peu utile dans l'esprit général du programme actuel.

D.1. Conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique a déjà été vue, on la généralise simplement à un système matériel :

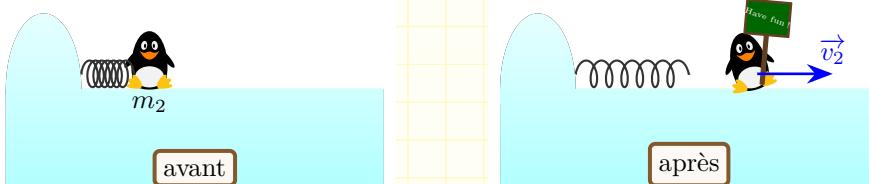
Propriété : Conservation de E_m dans un système conservatif

Si un système n'est soumis à aucune force non conservative (force intérieure ou extérieure), alors il est conservatif : son énergie mécanique est constante.

Cette conservation de l'énergie permet de trouver l'état final de systèmes ayant **un seul degré de liberté**.

Exemple : Propulsion d'un pingouin par un ressort

Un pingouin de masse m_2 est posé sur le sol. On place entre le pingouin et un bloc de glace immobile un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , comprimé initialement à la longueur $\ell_0/2$. Initialement, tout est immobile.



On lâche alors le pingouin. Le ressort se détend, et le pingouin part avec une vitesse v_2 .
Exprimez v_2 si on néglige les frottements.

Il est facile de justifier que le système {pingouin} est conservatif, avec $E_m = \frac{1}{2}m_2v^2(\text{pingouin}) + \frac{1}{2}k(\text{allongement du ressort})^2$ (on remarquera que l'énergie potentielle du poids est constante, le mouvement étant horizontal).

À l'instant initial, la vitesse est nulle et l'allongement vaut $\frac{\ell_0}{2}$.

À l'instant final, la vitesse vaut v_2 et l'allongement est nul.

Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$ donc $v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}\frac{\ell_0}{2}$

D.2. Conservation de la quantité de mouvement selon un axe fixe

Les pingouins, après avoir bien joué au jeu de l'exercice précédent, ont commencé à se disputer : ça allait trop lentement, et chacun voulait doubler l'autre. Pour aller plus vite, l'un d'entre eux a eu une idée : au lieu de placer le ressort entre un pingouin et un bloc de glace, on allait le placer entre deux pingouin et les propulser en même temps ; ainsi le débit serait doublé.

Mais du point de vue de la physique, on a maintenant 2 degrés de liberté : chaque pingouin a sa propre vitesse. Une seule équation de conservation ne suffit donc plus ; il faut en trouver une deuxième. Pour cela, on va revenir à la notion de *système isolé*.

Définition : Système isolé

Un système est isolé s'il n'est soumis à aucune forces, et pseudo-isolé s'il est soumis à des forces dont la somme est nulle.

Propriété : Quantité de mouvement d'un système isolé

La quantité de mouvement d'un système (pseudo-)isolé est constante.

Évidemment, c'est assez rare de trouver des systèmes isolés, à part dans le vide interstidal. Mais il y a un cas plus courant :

Définition : Système isolé suivant une direction fixe

Un système est isolé suivant une direction \vec{u} FIXE si toutes les forces qui s'exercent sur ce système sont perpendiculaires à cette direction.

Par exemple, un objet qui se déplace sur un sol horizontal sans frottements est isolé suivant la direction horizontale.

Propriété : Quantité de mouvement d'un système isolé suivant une direction fixe

Si un système est isolé suivant une direction FIXE \vec{u} , alors composante suivant \vec{u} de la quantité de mouvement de ce système est constante : $\vec{P} \cdot \vec{u} = cst$.

Démonstration

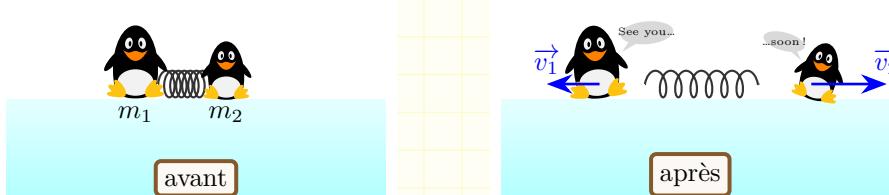
Soit S un système soumis à des forces extérieures $\vec{F}_{i,ext}$ qui sont toutes perpendiculaires à une direction \vec{u} . Alors $\forall i, \vec{F}_{i,ext} \cdot \vec{u} = 0$.

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement à S : $\frac{d\vec{P}(S)}{dt} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}$. On multiplie par \vec{u} : $\frac{d\vec{P}(S)}{dt} \cdot \vec{u} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} \cdot \vec{u} = 0$. Or \vec{u} est constant, donc on peut le faire rentrer dans la dérivée : $\frac{d(\vec{P}(S) \cdot \vec{u})}{dt} = 0$ donc $\vec{P}(S) \cdot \vec{u} = cst$.

Armés de cette seconde loi de conservation, nous pouvons résoudre le problème des deux pingouins :

Exemple : Propulsion de deux pingouins par un ressort

Deux pingouins de masses m_1 et m_2 sont posés sur la banquise. On place entre eux un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , comprimé initialement à la longueur $\ell_0/2$. Initialement, tout est immobile.



On lâche alors les pingouins. Le ressort se détend, et les pingouins partent avec des vitesses v_1 et v_2 . Exprimez v_1 et v_2 si on néglige les frottements.

Soit $S=\{\text{pinguin } 1 + \text{ pinguin } 2 + \text{ ressort}\}$.

La conservation de l'énergie mécanique se justifie comme précédemment, mais avec 2 termes désormais dans l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{8}k\ell_0^2$.

Faisons un bilan des forces extérieures appliquées à S : les deux poids, et les deux réactions du sol sur les pingouins. Si on note \vec{e}_x l'axe horizontal orienté vers la droite, alors ces quatre forces sont perpendiculaires à \vec{e}_x : c'est évident pour les poids, et pour les réactions cela est dû à l'absence de frottements. Donc le système est isolé suivant \vec{e}_x .

Au départ, les pingouins sont immobiles, donc $\vec{P} = \vec{0}$ donc $\vec{P} \cdot \vec{e}_x = 0$.

À la fin, $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. En notant $\vec{v}_1 = v_1\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2\vec{e}_x$, on a donc $\vec{P} \cdot \vec{e}_x = m_1v_1 + m_2v_2$.

Par conservation de la quantité de mouvement horizontale : $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$

En combinant les deux équations, on obtient $v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$ soit $\frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{8} k \ell_0^2$. On simplifie :

$$m_1 \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) v_1^2 = \frac{1}{4} k \ell_0^2 \text{ d'où après quelques calculs :}$$

$$\begin{cases} v_1 &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{k}{m_1+m_2} \frac{\ell_0^2}{2}} \\ v_2 &= -\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{k}{m_1+m_2} \frac{\ell_0^2}{2}} \end{cases}$$

Remarque : pour les signes, on les choisit en fonction du dessin, puisque quand on prend la racine, les deux signes sont possibles.

Autre remarque : il existe des forces horizontales, mais ce sont des forces intérieures, donc elles ne comptent pas.

D.3. Étude générale des chocs(Hors programme)

Les chocs ne sont pas au programme, mais il est intéressant d'en dire un mot, vu leur importance en physique.

Définition : Choc

Un choc est une interaction entre plusieurs parties d'un système qui se passe sur une durée très brève et une zone très petite de l'espace.

Exemple : choc de deux particules élémentaires, de deux boules de billard, de deux voitures,...

Lors d'un choc, il y a des forces très grandes qui s'exercent entre les différentes parties du système ; ce sont des forces intérieures au système. Il y a aussi des forces extérieures, mais elles sont normales (comprenez : elles ne sont pas très grandes comme les forces intérieures ; parfois on dit aussi qu'elles sont bornées) donc, sur la durée du choc, elles ont peu d'influence.

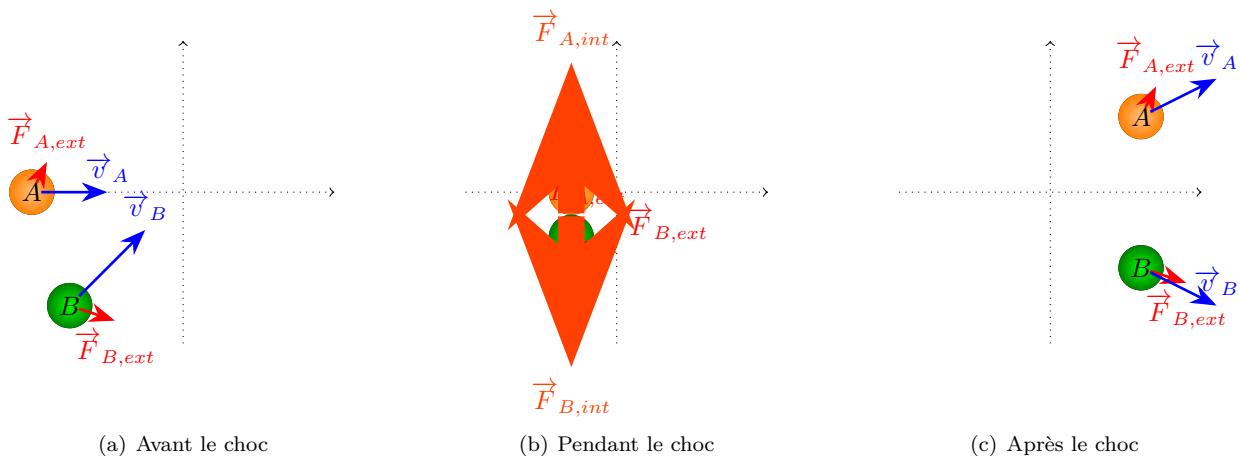


FIGURE M7.1 – Étapes d'un choc de deux boules.

Propriété : Conservation de la quantité de mouvement lors d'un choc

Lors d'un choc, la quantité de mouvement totale du système est conservée.

Démonstration

Soit \vec{P} la quantité de mouvement du système. Alors par le théorème de la quantité de mouvement : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$.

Supposons que le choc ait lieu entre O et Δt où Δt est très très petit. Alors on peut approcher la dérivée par son taux d'accroissement : $\frac{\vec{P}(\Delta t) - \vec{P}(0)}{\Delta t} = \sum \vec{F}_{ext}$. Donc $\vec{P}(\Delta t) = \vec{P}(0) + \Delta t \sum \vec{F}_{ext}$. Or $\Delta t \approx 0$ et les

forces extérieures sont normales donc le terme $\Delta t \sum \vec{F}_{ext}$ est nul.

On en déduit que $\vec{P}(\Delta t) = \vec{P}(0)$: la quantité de mouvement après le choc est égale à celle avant le choc.

Remarque : Si on applique le même raisonnement à une seule particule, par exemple la particule notée A : $\vec{p}_A(\Delta t) = \vec{p}_A(0) + \Delta t \sum \vec{F}_{\rightarrow A}$. Or les forces s'exerçant sur A sont les forces extérieures s'appliquant sur A , qui sont normales, et les forces intérieures, qui sont très très grandes. Donc le produit $\Delta t \cdot \sum \vec{F}_{A,int}$ n'est pas nul a priori, ce qui explique que la vitesse de la particule A a été modifiée.

Remarque : Il existe aussi une quantité nommée *moment cinétique*, qu'on définira au chapitre M8, qui n'est modifiée que par les actions extérieures, et qui est donc conservée lors d'un choc.

Propriété : Bilan énergétique lors d'un choc

Lors d'un choc, la variation d'énergie cinétique est non nulle a priori, car la puissance des forces intérieures est non nulle. Dans le cas particulier où $\Delta E_c = 0$, on dit que le choc est *élastique* ; sinon il est *inélastique*.

Démonstration

Le choc a lieu sur un temps très bref, mais aussi dans une zone très limitée de l'espace. Or le travail d'une force pendant le choc s'écrit $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$; comme $d\vec{OM} \approx \vec{0}$, ce travail est quasiment nul sauf si \vec{F} est très grande. Autrement dit, seules les forces intérieures ont le temps de travailler.

Remarque : Les forces de déformation sont la principale cause de dissipation de l'énergie cinétique. Ainsi, une balle de tennis qui rebondit perd de l'énergie ; au contraire, les chocs de boules de billard sont quasiment élastiques.

La principale application des chocs en physique est dans le domaine des accélérateurs de particules, où on amène en collision des particules élémentaires accélérées à de grandes vitesses. On connaît les caractéristiques des particules avant le choc (vitesse, moment cinétique (y compris le spin, qui est un moment cinétique), énergie). Le choc produit de nombreuses nouvelles particules ; pour en tenir compte, il faut ajouter dans le bilan énergétique un terme d'**énergie de masse** donné par la relation $E = mc^2$. On analyse alors les trajectoires des particules créées dans différents détecteurs, dont de chambres à bulles et des chambres à brouillard (figure M7.2). On en déduit la vitesse, la quantité de mouvement et donc la masse, et la charge des particules créées. Si on découvre une particule inconnue, les bilans de quantité de mouvement, de moment cinétique et d'énergie permettent de déterminer les caractéristiques de la particule inconnue : masse, spin,...

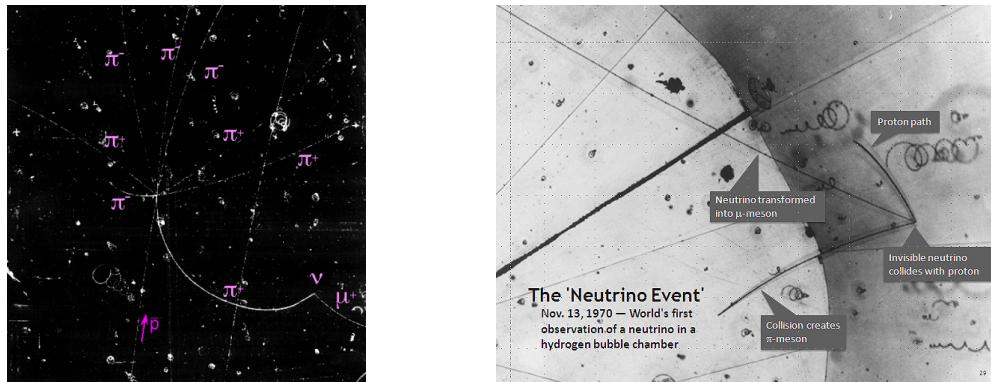


FIGURE M7.2 – Exemples de collisions de particules énergétiques. (Crédit : Wikipedia/Argonne National Laboratory).

Dynamique des systèmes matériels**Programme officiel****Programme officiel**

Notions et contenus	Capacités exigibles
Quantité de mouvement	
Masse d'un système. Centre de masse d'un système.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
Quantité de mouvement d'un système de points.	Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
Loi de Newton	
Troisième loi de Newton.	

Dynamique des systèmes matériels

QCMs

réponses page 712

QCM : Compréhension du cours

Q1.

Si un point matériel M_1 exerce une force sur un point matériel M_2 , et que M_2 exerce une force sur M_1 , alors ces deux forces sont :

- | | |
|--|------------------------------|
| (a). parallèles à $(M_1 M_2)$
(c). égales | (b). opposées
(d). nulles |
|--|------------------------------|

Q2.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un système par rapport au temps est égale à :

- | | |
|---|--|
| (a). la masse totale du système multipliée par l'accélération de son centre de masse
(c). la somme de toutes les forces sur ce système | (b). la somme des forces intérieures à ce système
(d). la somme des forces extérieures sur ce système |
|---|--|

Q3.

En mécanique, les forces intérieures d'un système ne jouent jamais aucun rôle :

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). True |
|-----------|-----------|

Q4.

Pour établir l'énergie mécanique d'un système, on ajoute :

- | | |
|--|---|
| (a). l'énergie potentielle intérieure de chaque paire de points
(c). l'énergie potentielle intérieure de chaque point | (b). l'énergie potentielle extérieure de chaque point
(d). l'énergie cinétique de chaque point |
|--|---|

Q5.

Le travail des forces intérieures est nulle pour un système :

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| (a). indéformable
(c). fermé | (b). conservatif
(d). quelconque |
|---------------------------------|-------------------------------------|

Q6.

La quantité de mouvement d'un système est constante si :

- | | |
|--|--|
| (a). le système est fermé
(c). le système est isolé | (b). le système est en translation
(d). le système est pseudo-isolé |
|--|--|

Q7.

L'énergie mécanique d'un système est constante si :

- | | |
|--|--|
| (a). toutes les forces appliquées au système sont conservatives
(c). toutes les forces extérieures appliquées au système sont conservatives | (b). le système est isolé et indéformable
(d). le système est isolé |
|--|--|

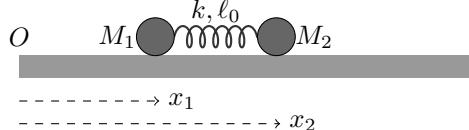
Dynamique des systèmes matériels

Exercices

réponses page 713

Exercice M7.1 : Deux points reliés par un ressort [**]

Dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, on considère deux objets M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 qui se déplacent sans frottements sur un banc à coussin d'air, le long d'un axe horizontal fixe Ox . Ils sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

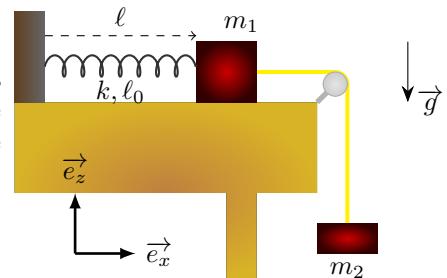


Les positions de M_1 et M_2 sont repérées par $x_1 = \overline{OM_1}$ et $x_2 = \overline{OM_2}$. Initialement (à $t = 0$), M_1 est en O , le ressort est à sa longueur à vide, M_1 est immobile, et on communique une vitesse v_0 à M_2 . On appelle $L = \overline{M_1 M_2} = x_2 - x_1$ la longueur du ressort.

- Exprimez x_G (abscisse du centre de masse G de M_1 et M_2) en fonction de x_1 , x_2 et les masses. En déduire les expressions de x_1 et x_2 en fonction de x_G , L et les masses.
- Écrivez les valeurs de $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(0)$ puis $L(0)$ et $\dot{L}(0)$, $x_G(0)$ et $\dot{x}_G(0)$.
- En appliquant le théorème du centre de masse au système formé des deux points, trouvez $x_G(t)$.
- Appliquez le PFD au point M_1 ; montrez que L vérifie une équation du type $\ddot{L} = -\omega_0^2(L - \ell_0)$, où ω_0 est une constante à déterminer en fonction de k , m_1 et m_2 .
- On prend le cas $m_1 = m_2$ pour simplifier ; exprimez $L(t)$, puis $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction de ℓ_0 et v_0 .
- Tracez alors l'allure de $x_1(t)$ et $x_2(t)$; montrez que chaque point s'arrête périodiquement.

Exercice M7.2 : Oscillation de deux masses reliées par une poulie [**]

Une masse m_1 peut glisser sans frottements sur une table horizontale ; elle est reliée par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 à une butée. On attache un fil à cette masse ; ce fil passe sur une poulie fixée au coin de la table, et on fait pendre au bout de ce fil une autre masse m_2 . On suppose que le fil est inextensible, et la poulie parfaite. Le référentiel terrestre est galiléen. On note ℓ la longueur du ressort et \vec{g} l'accélération de la pesanteur.

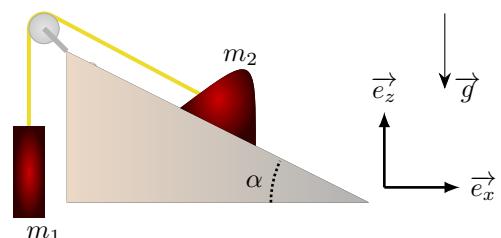


- On note $\mathcal{S} = \{m_1 + m_2 + \text{fil}\}$. Écrivez les vitesses de m_1 puis de m_2 dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) en fonction de $\dot{\ell}$. Déduisez-en l'énergie cinétique $E_C(\mathcal{S})$.
- Exprimez l'énergie potentielle totale $E_P(\mathcal{S})$ à une constante près.
- Établissez l'équation différentielle du mouvement. Trouvez les positions d'équilibre possibles, ainsi que la période des oscillations.

Exercice M7.3 : Système de deux masses dont une sur un plan incliné [**]

On considère le système ci-contre formé de deux masses m_1 (point M_1) et m_2 (point M_2) reliées par un fil inextensible passant sur une poulie parfaite.

On note z l'altitude de la masse m_1 . La masse m_2 glisse sans frottements sur le plan incliné. Pour les AN : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\alpha = 25^\circ$; $m_2 = 150 \text{ g}$.

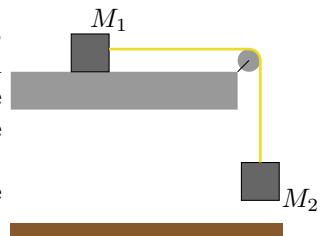


- Que vaut l'énergie cinétique de la masse m_1 ? de la masse m_2 (on rappelle que le fil est inextensible) ?

2. Soit Z_0 l'altitude de la masse m_2 lorsque $z = 0$. En traduisant le fait que le fil est inextensible, exprimez l'altitude z_2 de la masse m_2 en fonction de z et des constantes.
3. En déduire une expression de l'énergie mécanique du système $\{m_1 + m_2 + \text{fil}\}$ en fonction de z et \dot{z} .
4. Justifiez que le système est conservatif. Déduisez-en l'équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par z .
5. Quelle valeur de m_1 permet d'avoir un système à l'équilibre ?
6. On suppose que $m_1 = 80\text{ g}$. Déterminez l'accélération \ddot{z} de la chute.

Exercice M7.4 : Bilan énergétique d'un système de deux masses [**]

Une masse m_1 (point M_1) bouge sur une table horizontale, avec un coefficient de frottement f (on rappelle que la composante parallèle au plan de la réaction du support est opposée au mouvement et de norme égale à f fois la composante normale). Elle est reliée par un fil inextensible, passant sur une poulie idéale (qui exerce une force sur le fil, mais ne dissipe aucune énergie), à une masse m_2 (M_2) située à une hauteur h au-dessus du sol. On note g le module du champ de pesanteur.

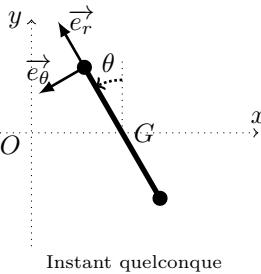
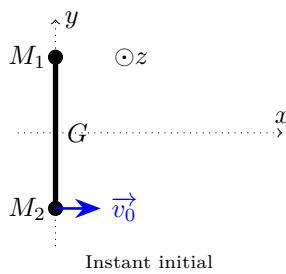


À $t = 0$, on lâche la masse m_2 ; elle descend d'une hauteur h en entraînant m_1 , puis touche le sol.

1. Que vaut la force de frottement sur M_1 lorsque M_1 bouge ?
2. Quelle relation relie les normes des vitesses v_1 de M_1 et v_2 de M_2 tant que le fil reste tendu (avant que M_2 ne touche le sol) ?
3. On s'intéresse à la première phase (avant que M_2 ne touche le sol). Appliquez le théorème de l'énergie mécanique au système entre l'instant initial et l'instant où M_2 touche le sol; déduisez-en une relation entre les paramètres du problème, et la vitesse v_1^- de M_1 juste avant que M_2 ne touche le sol.
Indication : il faudra calculer le travail de la force de frottements lorsque M_1 parcourt une distance h .
4. Quand M_2 touche le sol, son énergie cinétique est dissipée brutalement par le choc. Par contre, celle de M_1 ne subit pas de variation pendant ce temps très court : si on note v_1^+ la vitesse de M_1 juste après que M_2 a touché le sol, alors $v_1^- = v_1^+$. Ensuite, M_1 continue son mouvement en n'étant plus tirée par le fil. Elle parcourt une distance d avant de s'arrêter.
En utilisant encore le théorème de l'énergie cinétique, appliqué cette fois à M_1 , exprimez d en fonction de h , f , m_1 et m_2 .

Exercice M7.5 : Mouvement de deux masses reliées par un fil [****]

On s'intéresse à deux objets M_1 et M_2 de même masse m qui peuvent glisser sans frottements sur un sol horizontal xy (une patinoire par exemple). Ces deux masses sont reliées par un fil inextensible de longueur ℓ .



Le référentiel terrestre est galiléen. On note $S = \{M_1 + M_2 + \text{fil}\}$ le système complet et G son centre de masse, qui est ici le milieu de $[M_1 M_2]$. On note $\overrightarrow{OG} = x_G \vec{e}_x + y_G \vec{e}_y$.

Initialement (figure de gauche), on a $\overrightarrow{OM_1}(0) = \frac{\ell}{2} \vec{e}_y$, $\overrightarrow{OM_2}(0) = -\frac{\ell}{2} \vec{e}_y$, $\overrightarrow{v_{M_1}}(0) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{v_{M_2}}(0) = v_0 \vec{e}_x$.

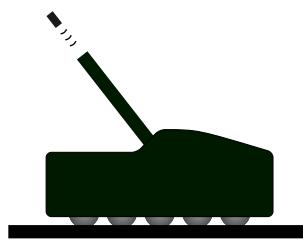
1. Rappeler la relation entre \overrightarrow{OG} , $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. En déduire $\overrightarrow{OG}(0)$ et $\overrightarrow{v_G}(0)$.
2. Faire un bilan des forces extérieures appliquées au système. En déduire que \ddot{x}_G et \ddot{y}_G sont nuls.
3. Par intégrations successives, en déduire $\overrightarrow{OG}(t)$.

4. Le centre de masse bouge, mais en même temps, le système tourne autour de G (figure de droite). On repère par θ l'angle dont il a tourné.
Exprimez $\overrightarrow{OM_1}$ sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , puis la vitesse \vec{v}_{M_1} ; exprimez de même \vec{v}_{M_2} . En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c du système en fonction de m , v_0 , l et $\dot{\theta}$.
5. Appliquez le théorème de l'énergie cinétique au système; en déduire que $\dot{\theta}$ est constant, et justifiez par les CI qu'il vaut $\frac{v_0}{\ell}$. En déduire $\theta(t)$.
6. En déduire l'expression de $\overrightarrow{OM_1}(t)$ en fonction uniquement des données de l'énoncé et du temps t (et de même pour $\overrightarrow{OM_2}(t)$).
7. Tracez l'allure de la trajectoire de M_1 et M_2 .

Exercice M7.6 : Les canons de Paris [*]

Durant la première guerre mondiale, l'armée allemande a utilisé des canons de très longue portée (120 km) pour bombarder Paris. Ces canons étaient fixés sur un wagon de chemin de fer. On supposera qu'un wagon roulait sans frottements sur les rails, donc que la réaction des rails sur le canon était uniquement orthogonale aux rails.

Un canon complet avait une masse de 750 t. Il tirait des obus de 100 km avec une vitesse de $1600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ faisant un angle de 52° avec l'horizontale. Calculez la vitesse de recul du canon juste après le tir.



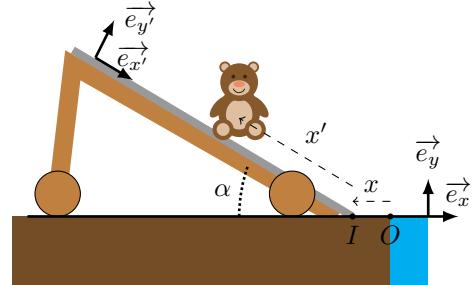
Exercice M7.7 : Toboggan mal fixé [***]

Un ours (repéré par son centre de masse G) de masse m' , décide de faire un plongeon depuis un toboggan. Il amène donc un toboggan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale au bord d'un lac, et se laisse glisser depuis le haut du toboggan.

Le problème, c'est que le toboggan est sur roulettes (c'est plus pratique à déplacer) et qu'il a oublié de bloquer les roues. Le toboggan, de masse m , peut donc se déplacer sans frottements sur le sol horizontal (direction \vec{e}_x).

On note O le bord du lac et I le point correspondant au bas du toboggan. On repère la position du toboggan par $\overrightarrow{OI} = x \vec{e}_x$ ($x < 0$ sur la figure) et la position de l'ours sur le toboggan par $\overrightarrow{IG} = x' \vec{e}_x'$.

On pose $S = \{\text{ours+toboggan}\}$; tout est immobile à $t = 0$. L'ours glisse sans frottements sur le toboggan. Pour les AN : $m' = 200 \text{ kg}$ (c'est un jeune ours), $m = 560 \text{ kg}$ en $\alpha = 30^\circ$.



- Exprimez la vitesse du toboggan dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , puis celle de l'ours, en fonction de \dot{x} et de \dot{x}' .
- Montrez que la quantité de mouvement horizontale de S est conservée.
En déduire une relation entre \dot{x} et \dot{x}' à tout instant.
- Initialement, $x(0) = 0$ et $x'(0) = -L = -4 \text{ m}$.
Déterminez la position du toboggan quand l'ours arrive en bas. Commentez.
- Justifiez que l'énergie mécanique est aussi conservée au cours du mouvement; exprimez cette E_m .
À l'aide de la relation de la question 2, montrez que

$$E_m = \frac{1}{2} m' \left[1 - \frac{m'}{m + m'} \cos^2 \alpha \right] \dot{x}'^2 - m' g x' \sin \alpha$$

- Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par x' .
- Résolvez-la et trouvez $x'(t)$; déduisez-en le temps que met l'ours à atteindre le bas du toboggan.

Exercice M7.8 : Propulsion d'une fusée [**]

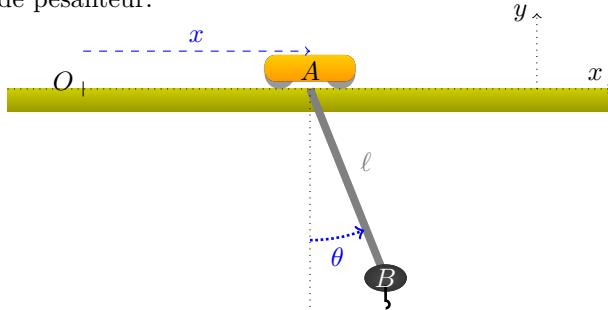
Une fusée de masse M contient une masse $m(t)$ de carburant qu'elle brûle et éjecte derrière elle pour se propulser. On note D_m le débit massique, c'est-à-dire la masse de gaz qui est éjectée par seconde. Soit V la vitesse d'éjection des gaz **par rapport à la fusée**.



- On note $v(t)$ la vitesse de la fusée à l'instant t ; exprimez la vitesse des gaz en fonction de v et V .
- À un instant donné, la fusée contient une masse $M + m(t)$ de carburant, tandis qu'une masse $m(0) - m(t)$ de gaz a été éjectée derrière. Soit S le système formé de la fusée et du carburant qu'elle contient. Exprimez la quantité de mouvement $\vec{P}_S(t)$ de la fusée à l'instant t , en fonction de $v(t)$, $m(t)$ et des constantes.
- À un instant $t + dt$, une masse $dm = D_m \cdot dt$ de gaz supplémentaires a été éjectée par la fusée; le système S à l'instant $t + dt$ est donc constitué :
 - de la fusée et de la masse $m(t) - D_m \cdot dt$ de carburant qui lui reste, animés d'une vitesse $v(t + dt)$
 - de la masse $D_m \cdot dt$ de gaz éjectés à la vitesse $v(t) - V$
 En déduire l'expression de $\vec{P}_S(t + dt)$
- Supposons que ce système soit isolé (dans l'espace). Par application de la conservation de la quantité de mouvement, montrez que la vitesse $v(t)$ de la fusée obéit à l'équation $(M + m(t)) \frac{dv}{dt} = D_m V$
- Le terme de droite s'appelle la *force de poussée*; commentez ce nom.
AN : pour Ariane 5, $V = 4000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $D_m = 250 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Calculez la force de poussée.

Exercice M7.9 : Oscillations d'une grue sur un portique [***]

On modélise un portique de chantier par un rail horizontal sur lequel peut se déplacer sans frottements un chariot A de masse M . Un crochet B de masse m est suspendu au chariot par un fil de longueur ℓ constante. On note $x = OA$ (O point fixe), et θ l'angle entre AB et la verticale. Le référentiel terrestre \mathcal{R} est galiléen. On note g le module du champ de pesanteur.



On note \mathcal{S} le système formé des points A et B et du câble qui les relie. À $t = 0$, on a $x = 0$, l'angle θ vaut θ_0 , et tout est immobile.

- Exprimez la vitesse de A et celle de B en fonction de x , θ , leurs dérivées, l et des constantes, sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_z) . Déduisez-en la quantité de mouvement totale de \mathcal{S} .
- Montrez qu'une des composantes de la quantité de mouvement de \mathcal{S} est conservée. Déduisez-en une relation entre \dot{x} , θ , $\dot{\theta}$, les constantes et les conditions initiales.
- Exprimez l'énergie cinétique de \mathcal{S} .
- Montrez que ce système est conservatif, et calculez son énergie potentielle.
- Déduisez des deux équations trouvées précédemment une équation du type $f(\theta, \dot{\theta}) = cst$.
- Trouvez l'équation différentielle vérifiée par θ .
- Linéarisez cette équation dans le cas de petites oscillations, et donner l'expression de la période T des petites oscillations du crochet.
- Quel est le mouvement du chariot si le crochet oscille avec la période T ?

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (b)

Q2.(a) ET (d)

Q3.(a)

Elles jouent un rôle énergétique : dans le TEC, elles apparaissent.

Q4.(a) ET (b) ET (d)

Q5.(a)

Q6.(c) ET (d)

Q7.(a) ET (b)

Isolé ne suffit pas, car les forces intérieures travaillent.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M7.1 : Deux points reliés par un ressort [**]

1. $x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$ d'où on tire $x_1 = x_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2}L$ et $x_2 = x_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2}L$

2. $L(0) = \ell_0$, $\dot{L}(0) = v_0$, $x_G(0) = \frac{m_2\ell_0}{m_1 + m_2}$ et $\dot{x}_G(0) = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2}$.

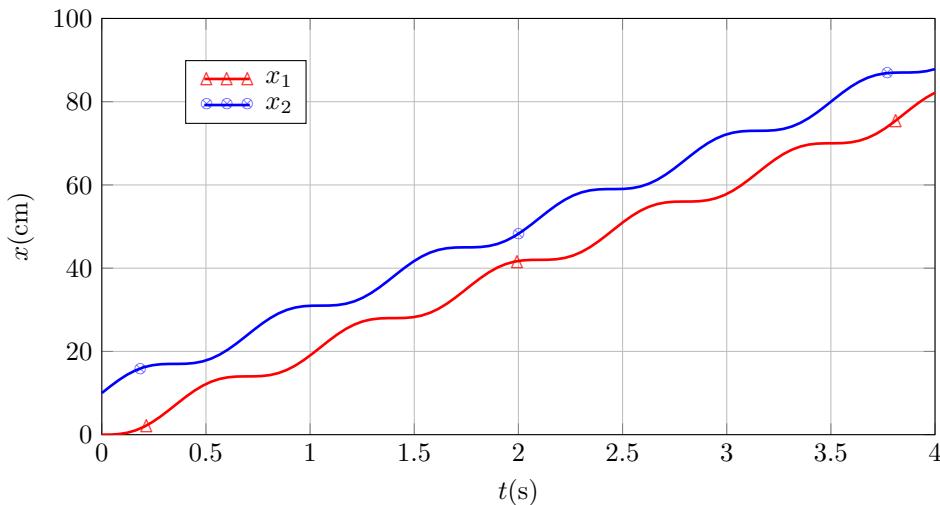
3. $\ddot{x}_G = 0$ donc $\dot{x}_G = cst = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2}$ et $x_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\ell_0 + v_0 t)$.

4. $\ddot{L} = -\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}(L - \ell_0)$

5. On trouve alors $L(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$ puis

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{v_0}{2}t - \frac{v_0}{\omega_0} \frac{1}{2} \sin \omega_0 t \\ x_2(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{2}t + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{1}{2} \sin \omega_0 t \end{cases}$$

6. Exemple avec $\ell_0 = 10$ cm, $v_0 = 40$ cm · s⁻¹ et $\frac{2\pi}{\omega_0} = 0,7$ s :



Réponses de l'exercice M7.2 : Oscillation de deux masses reliées par une poulie [**]

1. $\vec{v}_1 = \dot{\ell} \vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = -\dot{\ell} \vec{e}_z$

$$E_C(S) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\ell}^2$$

2. $E_{P_{int}}(S) = 0$

$$E_{P_{ext}}(S) = \frac{1}{2}k(\ell - l_0)^2 - m_2 g \ell + cst$$

3. $(m_1 + m_2)\ddot{\ell} + k\ell = k\ell_0 + m_2 g$ donc $\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{m_2 g}{k}$ et $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$

Réponses de l'exercice M7.3 : Système de deux masses dont une sur un plan incliné [**]

1. $E_{c1} = E_{c2} = \frac{1}{2}m_1 \dot{z}^2$.

2. $z_2 = Z_0 - z \sin \alpha$.

3. $E_m = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 + (m_1 - m_2 \sin \alpha)gz + cst$

4. $(m_1 + m_2)\ddot{z} + (m_1 - m_2 \sin \alpha)g = 0$

5. $m_1 = m_2 \sin \alpha = 63,4$ g

6. $\ddot{z} = \frac{(m_1 - m_2 \sin \alpha)g}{m_1 + m_2} = 0,7$ m · s⁻²

Ce système permet de simuler une chute dans une gravité faible, donc une chute plus lente et plus facile à étudier.

Réponses de l'exercice M7.4 : Bilan énergétique d'un système de deux masses [**]

1. Elle a pour norme fm_1g et elle est constante et opposée au mouvement.

2. $v_1 = v_2$.

3. $v_1^- = \sqrt{2gh \frac{m_2 - fm_1}{m_1 + m_2}}$ à condition que $m_2 > fm_2$.

4. $d = h \frac{m_2 - fm_1}{f(m_1 + m_2)}$.

Réponses de l'exercice M7.5 : Mouvement de deux masses reliées par un fil [****]

1. $\overrightarrow{OG}(0) = \vec{0}$ et $\vec{v}_G(0) = \frac{v_0}{2} \vec{e}_x$.

2. $\ddot{x}_G = \ddot{y}_G = 0$.

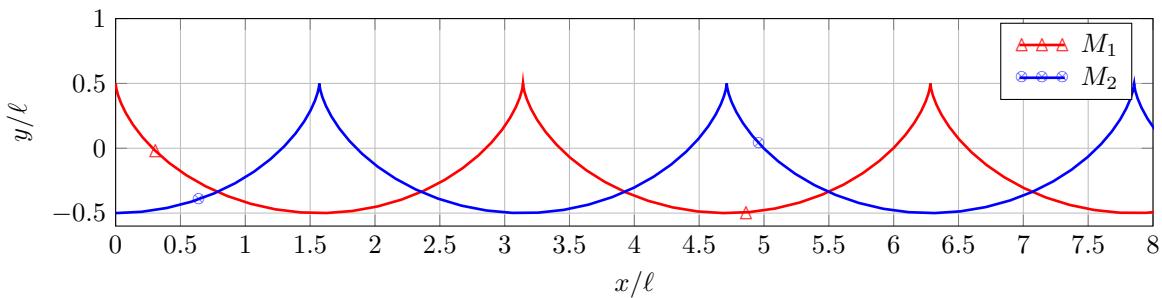
3. $\overrightarrow{OG} = \frac{v_0}{2} t \vec{e}_x$.

4. $\vec{v}_{M_1} = \left(\frac{v_0}{2} - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right) \vec{e}_x - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y$ et $\vec{v}_{M_2}^2 = \frac{v_0^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2v_0 \ell \dot{\theta} \cos \theta}{4}$. On en déduit que $E_c = m \frac{v_0^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2}{4}$

5. $E_c = cst$ d'où $\dot{\theta} = cst$. Par les conditions initiales : $\theta = \frac{v_0 t}{\ell}$.

6.
$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_1} = \left(\frac{v_0}{2} t - \frac{\ell}{2} \sin \left(\frac{2v_0 t}{\ell} \right) \right) \vec{e}_x + \frac{\ell}{2} \cos \left(\frac{v_0 t}{\ell} \right) \vec{e}_y \\ \overrightarrow{OM_2} = \left(\frac{v_0}{2} t + \frac{\ell}{2} \sin \left(\frac{2v_0 t}{\ell} \right) \right) \vec{e}_x - \frac{\ell}{2} \cos \left(\frac{v_0 t}{\ell} \right) \vec{e}_y \end{cases}$$

7.



Réponses de l'exercice M7.6 : Les canons de Paris [*]

Par conservation de P_x , on trouve $v = 13 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponses de l'exercice M7.7 : Toboggan mal fixé [***]

1. $\vec{v}(\text{toboggan}) = \dot{x} \vec{e}_x$ et $\vec{v}(\text{ours}) = (\dot{x} + \dot{x}' \cos \alpha) \vec{e}_x - \dot{x}' \sin \alpha \vec{e}_y$

2. $(m + m')\dot{x} + m'\dot{x}' \cos \alpha = 0$

3. $x = -\frac{m'}{m+m'} L \cos \alpha = -0,91 \text{ m}$: ça va faire mal !

4. $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'((\dot{x} + \dot{x}' \cos \alpha)^2 + (\dot{x}' \sin \alpha)^2) - m'gx' \sin \alpha = cst.$

On développe et on simplifie avec l'aide de la relation $\dot{x} = -\frac{m'}{m+m'}\dot{x}' \cos \alpha$ et on trouve la formule demandée.

5. $\left[1 - \frac{m'}{m+m'} \cos^2 \alpha\right] \ddot{x}' = g \sin \alpha$

6. $t = 1,1 \text{ s}$

Réponses de l'exercice M7.8 : Propulsion d'une fusée [**]

1. $(v(t) - V)\vec{e}_x$

2. $\vec{P}(t) = (M + m(t))v(t)\vec{e}_x$ et $\vec{P}(t + dt) = [(M + m(t))v(t + dt) - D_m \cdot dtV]\vec{e}_x$

3. Le système est isolé, donc la quantité de mouvement est constante : $(M + m(t))\frac{dv}{dt} = D_m V$

4. Cela ressemble à un théorème du centre de masse dans lequel la fusée est soumise à une force $D_m \cdot V = 1 \times 10^6 \text{ N}$

Réponses de l'exercice M7.9 : Oscillations d'une grue sur un portique [***]

1. $\vec{P} = (M + m)\dot{x}\vec{e}_x + m\ell\dot{\theta}(\cos \theta\vec{e}_x + \sin \theta\vec{e}_z)$

2. $(M + m)\dot{x} + m\ell\dot{\theta} \cos \theta = 0$

3. $E_c = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}\ell\dot{\theta} \cos \theta$

4. $E_p = -mg\ell \cos \theta$

5. $\frac{1}{2}\frac{m}{M+m}\ell^2\dot{\theta}^2 [M + m \sin^2 \theta] - mg\ell \cos \theta = -mg\ell \cos \theta_0$

6. $\frac{m}{M+m}\ell^2\ddot{\theta} [M + m \sin^2 \theta] + \frac{m}{M+m}\ell^2\dot{\theta}^2 m \cos \theta \sin \theta + mg\ell \sin \theta = 0$

7. Les petites oscillations se font avec une période $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{M+m}\frac{\ell}{g}}$

8. La question 2 montre que le chariot va avoir des oscillations horizontales de même période T .

Dynamique des solides

Cours

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des systèmes particuliers : les solides. Ces systèmes ont des propriétés simplifiées par rapport aux systèmes déformables, ce qui justifie leur étude.

Néanmoins, la notion de solide est vague car différentes dans les différents domaines de la physique. Pour un mécanicien, par exemple, le verre est un solide ; pourtant, au niveau microscopique, un cristallographe le décrira plutôt comme un liquide : le verre est un «liquide gelé», ou trempé. Et la pâte dentifrice ? Elle tient bien fixement sur notre brosse à dents, mais s'écoule comme un liquide dès qu'elle est soumise à une contrainte de cisaillement. Même l'eau, dans certaines conditions, peut avoir un comportement qui se rapproche plus du solide.

En résumé, la notion de solide est plus difficile à cerner que ce que la première impression montrait. Chaque domaine de la physique a sa propre définition du solide. En mécanique, on va travailler sur le modèle du «solide indéformable».

! Dans tout ce chapitre, on notera S un solide, et M_S sa masse. Pour les démonstrations, on considérera qu'il est constitué d'atomes M_i de masse m_i , avec $\sum_i m_i = M_S$.

M8.A. Caractéristiques d'un solide indéformable

A.1. Propriétés générales et lois d'étude

Définition : Solide indéformable

Un solide indéformable S est un système tel que $\forall A, B \in S, \|\overrightarrow{AB}\| = cst$.

Attention à la définition ! C'est la distance entre A et B qui est constante ; pas le vecteur \overrightarrow{AB} , qui, lui, peut varier. Par exemple, sur le schéma de la figure M8.1, le vecteur \overrightarrow{AB} tourne clairement, mais sa longueur est constante.

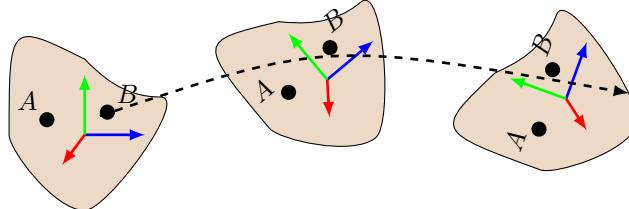


FIGURE M8.1 – Solide en mouvement quelconque.

Remarque : Conséquence : si on connaît le mouvement de deux points (2D) ou 3 points (3D) on connaît le mouvement de tous les points.

Pour étudier un tel solide, il faut utiliser les lois des systèmes matériels, mais il y a ici deux simplifications :

- Si on passe par les forces : dans un solide, la position du centre de masse G est fixe par rapport au solide. C'est donc l'outil adapté pour étudier le mouvement. Par conséquent, on utilisera le théorème du centre de masse.
- Si on passe par l'énergie : l'indéformabilité du solide implique que **la puissance des forces intérieures est nulle**.

On utilisera donc pour le moment les lois suivantes :

$$\text{Théorème du centre de masse : } M_S \overrightarrow{d}(G) = \sum_{\text{forces ext. k}} \overrightarrow{f}_k \quad (\text{M8.1a})$$

$$\text{Théorème de l'énergie cinétique : } \frac{dE_c(S)}{dt} = \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{P}_{\overrightarrow{f}_k} \quad (\text{M8.1b})$$

$$\text{Théorème de l'énergie mécanique : } \frac{dE_m(S)}{dt} = \sum_{\text{forces ext. non conservatives k}} \mathcal{P}_{\overrightarrow{f}_k} \quad (\text{M8.1c})$$

A.2. Poids d'un solide

Il peut être utile, ici, d'effectuer deux calculs concernant le poids d'un solide. En effet, le poids est ce qu'on appelle une **force répartie** : chaque atome est soumis à son propre poids, donc il y a autant de poids que d'atomes. Mais on va voir que toutes ces forces se résument à une seule force particulière.

Propriété : Poids et énergie potentielle de pesanteur d'un solide

- Le poids d'un solide est égal à sa masse totale multipliée par \vec{g} : $\overrightarrow{\text{poids}}(S) = M_S \vec{g}$.
- L'énergie potentielle de pesanteur d'un solide est la même que si toute la masse du solide était concentrée en son centre de masse G : $E_{pp}(S) = M_S g z(G)$.

Démonstration

Pour démontrer la première affirmation, il faut sommer les poids de chaque point M_i pour trouver la force totale :

$$\overrightarrow{\text{poids}}(S) = \sum_i m_i \vec{g} = M_S \vec{g}$$

donc le poids total est simplement le poids associé à la masse M_S .

Considérons maintenant l'énergie potentielle de pesanteur du solide par sommation des énergies potentielles de chaque point M_i : Pour cela, notons $x(M_i), y(M_i), z(M_i)$ les coordonnées cartésiennes du point M_i . On a alors

$$E_{pp} = \sum_i m_i g z(M_i)$$

Notons $\overrightarrow{OM}_i = x(M_i) \vec{e}_x + y(M_i) \vec{e}_y + z(M_i) \vec{e}_z$ le vecteur position du point M_i . Alors on voit bien que $\overrightarrow{OM}_i \cdot \vec{e}_z = z(M_i)$. On peut alors écrire

$$E_{pp} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \cdot \vec{e}_z g$$

et on voit apparaître la définition du centre de masse : $\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = M_S \overrightarrow{OG}$. Donc

$$E_{pp} = M_S \overrightarrow{OG} \cdot \vec{e}_z g = M_S g z(G)$$

Remarque : C'est pour cela que G s'appelle aussi le centre de gravité. En fait, il y a fondamentalement une petite différence : le centre de masse (ou centre d'inertie) est le point auquel s'applique le théorème du centre de masse ; le centre de gravité est le point où s'applique le poids. Ils sont confondus en vertu du principe d'équivalence, qui indique que la masse inerte et la masse gravitationnelle sont confondus.

M8.B. Mouvement de translation

B.1. Aspect cinématique

Définition : Mouvement de translation

Un solide est en translation si tous ses points ont la même vitesse à chaque instant : $\exists \vec{v}, \forall A \in S, \vec{v}(A) = \vec{v}$. On parle alors de la **vitesse du solide** ; elle peut varier au cours du temps. C'est aussi la vitesse du centre de masse $\vec{v}(G)$.

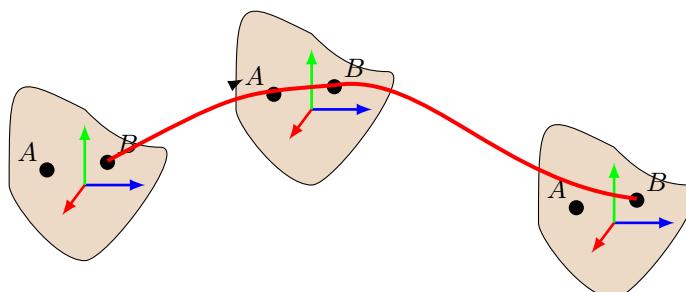


FIGURE M8.2 – Solide en translation.

Propriété : Non rotation du solide

Une conséquence en est que, pour deux points A et B d'un solide en translation, le vecteur \overrightarrow{AB} est constant : il ne tourne pas, bien qu'il se déplace ; voir figure M8.2.

Démonstration

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{v}(B) - \vec{v}(A) = \vec{0} \text{ si le solide est en translation.}$$



(a) Tramway en ligne droite



(c) Bouée en mer (peu agitée) (Crédit : Wikipedia/A.Burgess)



(b) Nacelle de grande roue



(d) Portique de manutention (Crédit : Wikipedia/Gazouya)

FIGURE M8.3 – Exemples de solides en translation.

Remarque : Si la vitesse $\vec{v}(G)$ a toujours la même direction, on dit que le solide est en **translation rectiligne**. Voir par exemple le tramway ou la bouée sur la figure M8.3.

Si la vitesse $\vec{v}(G)$ est constante (en direction et en norme), on dit que le solide est en **translation rectiligne uniforme**.

Si chaque point du solide décrit en cercle, on dit que le solide est en **translation circulaire**. Voir par exemple la nacelle de grande roue sur la figure M8.3.

B.2. Étude par les forces

Méthode : Étude d'un solide en translation à l'aide des forces

Pour un solide en translation, il suffit de connaître le mouvement du centre de masse pour connaître le mouvement du solide tout entier. Par conséquent, pour étudier le mouvement d'un solide en translation, il suffit d'appliquer le théorème du centre de masse (équation (M8.1a)).

Cela justifie que, depuis le début de la mécanique, nous avons étudié les solides en translation comme des points matériels ; en fait, nous étudions, sans le savoir, le centre de masse du solide.

B.3. Étude par l'énergie

Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique à un solide, il faut exprimer son énergie mécanique. La formule générale est compliquée, mais elle se simplifie dans le cas d'un solide en translation :

Propriété : Énergie cinétique d'un solide en translation

L'énergie cinétique d'un solide en translation est identique à celle d'un point matériel de masse M_S placé en G .

Démonstration

Tous les points de S ont la même vitesse, donc la même vitesse que G ; donc

$$E_s(S) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}^2(G) = \frac{1}{2} M_S \vec{v}^2(G)$$

Méthode : Étude d'un solide en translation à l'aide de l'énergie

Pour étudier un solide en translation à l'aide des théorèmes de l'énergie cinétique ou mécanique, on procède comme pour un point matériel de masse M_S placé en G .

M8.C. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

La description d'un mouvement de rotation ne peut pas se faire à l'aide des forces. D'abord parce que le mouvement d'un solide en rotation ne peut se limiter à celle de son centre de masse. Si, par exemple, celui-ci se trouve sur l'axe de rotation, sa vitesse est nulle, tandis que le reste du solide tourne. Ensuite, parce que la vie courante nous prouve que la force n'est pas la seule quantité en jeu dans les mouvements de rotation.

Nous allons commencer par revenir au point matériel, et mettre en place un outil adapté à celui-ci lorsqu'il est en rotation autour d'un axe fixe ; ensuite, nous pourrons généraliser cet outil pour un solide en rotation.

! Dans toute la suite, un axe sera repéré par un point et un vecteur qui l'orienté. Par exemple l'axe Oz est l'axe passant par le point O et dirigé par le vecteur \vec{e}_z .

C.1. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, appliqué à un point

Quant on veut ouvrir une porte, on tourne la poignée et on pousse ou on tire la porte ; elle tourne alors autour de ses gonds. Si ce geste est évident pour chacun, il a fallu l'apprendre un jour, car il ne suffit pas de pousser ou de tirer une porte pour qu'elle s'ouvre, il faut le faire dans la bonne direction :

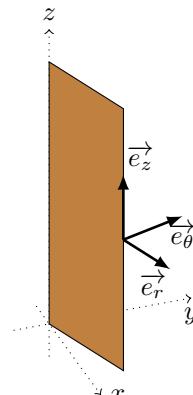
- si on pousse/tire perpendiculairement à la porte, ça marche
- si on pousse/tire vers le haut ou le bas, ça n'ouvre pas la porte
- si on pousse/tire dans la direction de l'axe de la porte, ça n'ouvre pas la porte

D'un point de vue cinématique, si on place un repère cylindrique avec l'axe Oz comme axe de la porte, alors la porte tourne selon l'angle θ . Les trois observations ci-dessus indiquent alors (figure ci-contre) que :

- une force selon \vec{e}_θ ouvre la porte
- une force selon \vec{e}_z n'ouvre pas la porte
- une force selon \vec{e}_r n'ouvre pas la porte

L'autre observation qu'on fait, c'est qu'il est beaucoup plus facile d'ouvrir une porte en poussant loin de l'axe (là où, d'ailleurs, on a mis la poignée !) que près de l'axe (en plus, on risque de se coincer les doigts) : l'effet d'une force pour faire tourner un objet est d'autant plus grand que la force s'applique loin de l'axe.

Ces différentes observations nous mènent à définir une grandeur proportionnelle à la fois à la projection de la force suivant \vec{e}_θ , et à la distance à l'axe.



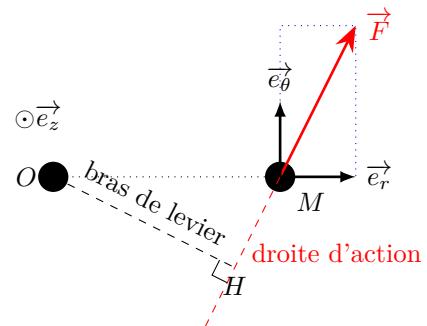
Définition : Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force s'appliquant en un point M par rapport à un axe Oz traduit la capacité d'une force à faire tourner un point/solide autour de l'axe. On le calcule par une des trois formules au choix :

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = OM \cdot F_\theta = OM \cdot \vec{F} \cdot \vec{e}_\theta \quad (\text{M8.2a})$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = \pm \|\vec{F}\| \cdot \text{bras de levier} \quad (\text{M8.2b})$$

$$\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{M8.2c})$$



Démonstration

La troisième définition est la définition de référence ; il faut bien comprendre que O est un point quelconque de l'axe, et \vec{e}_z le vecteur unitaire qui dirige l'axe.

Si on écrit la force $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z$, alors

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z &= (OM \vec{e}_r \wedge (F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_z \vec{e}_z)) \cdot \vec{e}_z \\ &= (OM \cdot F_\theta \vec{e}_z - OM \cdot F_z \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z = OM \cdot F_\theta \end{aligned}$$

ce qui correspond à la première formule. Cette première formule est celle qui est la plus intuitive : on multiplie la distance à l'axe par la force selon \vec{e}_θ .

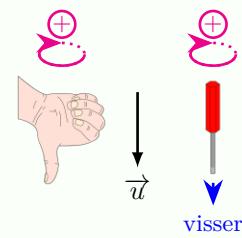
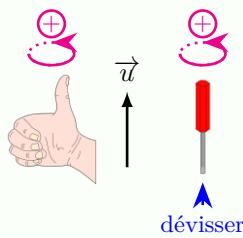
La deuxième formule est très utile quand on la comprend, et très compliquée quand on ne la comprend pas... Notons ϕ l'angle (\vec{e}_r, \vec{F}) . Alors on a $OM \cdot F_\theta = OM \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin \phi$. Or $\phi = \widehat{OMH}$ et un peu de trigonométrie dans le triangle OMH indique que $OM \cdot \sin \phi = OH$. On a donc bien $\mathcal{M}_{\vec{F}}^{Oz} = OH \cdot \|\vec{F}\|$ où OH correspond à la plus courte distance entre l'axe (point O ici) et la droite d'action (droite qui prolonge la force) : on l'appelle le *bras de levier*.

La formule avec le bras de levier laisse choisir le signe à la fin. Pour cela, il faut se souvenir que l'axe est orienté : le vecteur qui l'oriente définit un **sens positif de rotation autour de l'axe** selon la règle de la main droite, du tire-bouchon, du tournevis, ...

Méthode : Règle d'orientation des angles

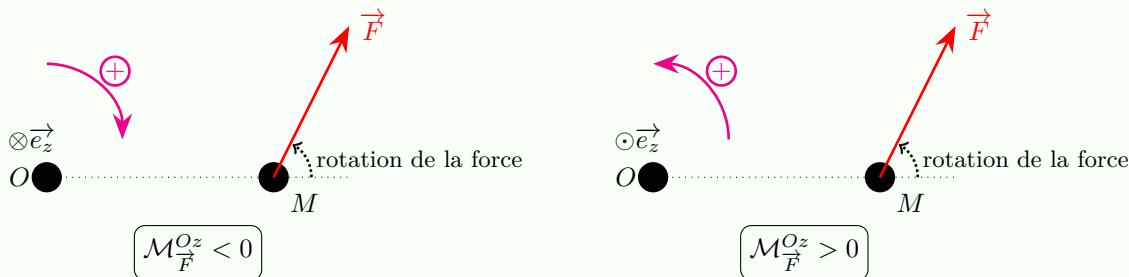
Pour déterminer le sens positif de rotation autour d'un axe orienté par un vecteur \vec{u} , on peut :

- placer sa main DROITE avec le pouce tendu dans la direction de \vec{u} , les autres doigts partiellement repliés indiquent alors le sens positif.
- imaginer qu'on dispose d'un tire-bouchon ou d'un tournevis dans la main, et qu'on cherche à faire avancer le tire-bouchon/la vis dans le sens de \vec{u} ; le sens dans lequel on doit tourner l'outil est le sens positif.



Méthode : Signe d'un moment de force

Pour trouver ou vérifier le signe du moment d'une force, on regarde si la force a tendance à faire tourner le point dans le sens positif ou négatif.



On définit alors la même chose appliquée à la quantité de mouvement d'un point :

Définition : Moment cinétique d'un point par rapport à un axe

Soit M un point de masse m animé d'une vitesse \vec{v} . Son moment cinétique par rapport à l'axe Oz est défini par

$$\mathcal{L}^{Oz}(M) = (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{e}_z \quad (\text{M8.3})$$

On peut alors démontrer le

Théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à un axe fixe, pour un point

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces qui s'appliquent, par rapport à ce même axe

$$\frac{d\mathcal{L}^{Oz}(M)}{dt} = \sum_k \mathcal{M}_{f_k}^{Oz} \quad (\text{M8.4})$$

Démonstration

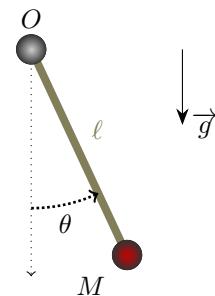
$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{Oz}(M)}{dt} &= \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{e}_z}{dt} \\ &= \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v})}{dt} \cdot \vec{e}_z \text{ car } \vec{e}_z = \vec{cst} \text{ (axe fixe)} \\ &= \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Or $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{v}$ car O est fixe (car l'axe est fixe) et $\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}^{Oz}(M)}{dt} &= \left(\overrightarrow{OM} \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &\stackrel{PFD}{=} \left(\overrightarrow{OM} \wedge \sum_k \vec{f}_k \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \sum_k \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_k \right) \cdot \vec{e}_z = \sum_k \mathcal{M}_{f_k}^{Oz} \end{aligned}$$

Exemple : Le pendule simple

À connaître



Un pendule simple est constitué d'un fil inextensible de longueur ℓ , fixé en O , au bout duquel se trouve un objet M de masse m . Par application du théorème du moment cinétique, déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ entre le fil et la verticale.

On étudie le point M dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Étude cinématique en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \ell \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ donc

$$\mathcal{L}^{Oz}(M) = m (\ell \vec{e}_r \wedge \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = m \ell^2 \dot{\theta}$$

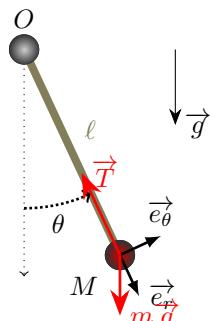
Bilan des actions :

- la tension du fil a un moment nul car elle passe par l'axe
- le poids a un moment non nul ; on peut le calculer de 3 manières :
 - en projetant : $m \vec{g} = mg (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$; la formule (M8.2a) indique alors que $\mathcal{M}_{m \vec{g}}^{Oz} = -\ell mg \sin \theta$
 - en projetant et en utilisant la formule (M8.2c) avec le produit vectoriel ; on trouve le même résultat
 - en remarquant que le bras de levier vaut $\ell \sin \theta$ et que la force fait tourner le point M dans le sens négatif ; on utilise alors la formule (M8.2b).

Dans les 3 cas, on trouve $\mathcal{M}_{m \vec{g}}^{Oz} = -\ell mg \sin \theta$

Le TMC appliqué à M fournit alors l'équation $m \ell^2 \ddot{\theta} = -m \ell g \sin \theta$ qui se simplifie en

$$\ell \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$



C.2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, appliqué à un système

Si on considère maintenant un ensemble de points M_i de masse m_i , on peut définir son moment cinétique et lui appliquer le TMC à condition de ne tenir compte que des forces extérieures.

Définition : Moment cinétique d'un système par rapport à un axe fixe

Le moment cinétique d'un système est la somme des moments cinétiques de ses points :

$$\mathcal{L}^{Oz}(S) = \sum_i \mathcal{L}^{Oz}(M_i)$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe, pour un système

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système par rapport à un axe fixe est égale à la somme des moments des forces **extérieures** qui s'appliquent, par rapport à ce même axe

$$\frac{d\mathcal{L}^{Oz}(S)}{dt} = \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{f_k}^{Oz}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{L}^{Oz}(S)}{dt} &= \sum_i \frac{d\mathcal{L}^{Oz}(M_i)}{dt} \\
 &\stackrel{TMC}{=} \sum_i \sum_{\text{forces k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz} \\
 &= \sum_i \left[\sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_{j \neq i} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{M_j \rightarrow M_i} \right] \\
 &= \sum_i \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_{\text{paire}(i,j)} [\mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{M_j \rightarrow M_i} + \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{M_i \rightarrow M_j}] \\
 &= \sum_i \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_{\text{paire}(i,j)} [\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{f}^{M_j \rightarrow M_i} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j}] \cdot \vec{e}_z \\
 &= \sum_i \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_{\text{paire}(i,j)} [(\overrightarrow{OM_j} - \overrightarrow{OM_i}) \wedge \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j}] \cdot \vec{e}_z \quad (\text{3ème loi de Newton}) \\
 &= \sum_i \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} + \sum_{\text{paire}(i,j)} [\overrightarrow{M_i M_j} \wedge \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j}] \cdot \vec{e}_z \\
 &= \sum_i \sum_{\text{forces ext. k}} \mathcal{M}_{\vec{f}_k}^{Oz}{}_{ext \rightarrow M_i} \text{ car } \overrightarrow{M_i M_j} \parallel \vec{f}^{M_i \rightarrow M_j} \quad (\text{3ème loi de Newton})
 \end{aligned}$$

Quand on travaille sur un système de points, toutes les forces ne s'appliquent pas au même point. Cela peut donner lieu à des couples.

Définition : Couple de forces

Un couple (de forces) est un ensemble de forces donc la somme est nulle, mais le moment par rapport à un axe n'est pas nul. Le moment de ce couple ne dépend pas de l'axe considéré ; on confondra parfois le couple et son moment.



Démonstration

On considère le couple dessiné ci-dessus. Soit Oz un axe. Alors

$$(\overrightarrow{OA} \wedge (-\vec{F})) \cdot \vec{e}_z + (\overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z = (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{e}_z$$

Cette expression est bien indépendante de la position de O .

Remarque : Un couple peut être la somme de deux forces (comme quand on tourne le volant d'une voiture) ou de beaucoup de forces (quand on tourne un tournevis) : on parle alors de *couple réparti* (figure M8.4).

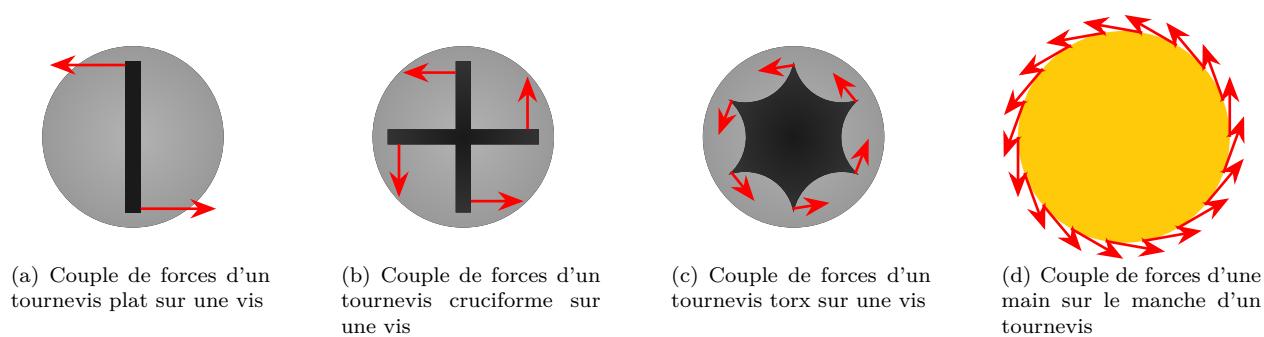


FIGURE M8.4 – Exemples de couples de forces.

C.3. Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Définition : Mouvement de rotation autour d'un axe

Un solide est en rotation autour d'un axe Δ si tous les points de Δ sont immobiles (figure M8.5).

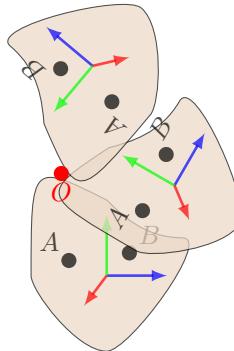


FIGURE M8.5 – Solide en rotation autour d'un axe fixe.



(a) Ailes d'un syrphe en vol stationnaire (Crédit : Wikipedia)



(c) Éoliennes (Crédit : Wikipedia/M.T.Rader)



(b) Axes de la grande roue



(d) Balais d'essuie-glace

FIGURE M8.6 – Exemples de solides en rotation autour d'un axe fixe.

Soit O un point de l'axe et M un point du solide. Alors on peut écrire en coordonnées cylindriques avec \vec{e}_z selon l'axe : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ donc $\vec{v}(M) = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ car $OM = cst$ (c'est un solide) et $z = cst$ (à cause du mouvement de rotation). $\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation (ou vitesse angulaire) du point M . Si maintenant on prend un autre point M' , il est facile de comprendre que si M' a une vitesse angulaire différente de M , le solide va se déformer, ce qui est en contradiction avec sa définition. On en conclut que $\dot{\theta}$ est le même pour tous les points.

Calcul : Nécessité de la même vitesse angulaire pour tous les points

Soient A et B deux points, repérés par leurs coordonnées (r_A, θ_A, z_A) et (r_B, θ_B, z_B) où seuls les angles varient. Supposons que A et B soient dans le même plan $z = cst$, c'est-à-dire que $z_A = z_B$; prenons O dans ce

même plan, sur l'axe. Alors par le théorème d'Al-Kashi, $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\theta_B - \theta_A)$ et comme $AB = cst$ (solide indéformable) alors il faut que $\theta_B - \theta_A = cst$ donc $\dot{\theta}_B - \dot{\theta}_A = 0$.

Dans le cas général, posons C le point de coordonnées (r_A, θ_A, z_B) alors ABC est rectangle en C donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (z_B - z_A)^2 + BC^2$; comme $AB = cst$ alors il faut que $BC = cst$ et comme B et C sont dans le même plan $z = cst$ on en revient au cas précédent.

Définition : Vitesse angulaire ou vitesse de rotation

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, il existe un nombre ω appelé *vitesse angulaire* tel que pour tout point en coordonnées cylindriques on a $\vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta$.

Remarque : θ est un angle ; $\omega = \dot{\theta}$ est une vitesse angulaire en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Remarque : Dans le cas d'une translation, tous les points ont la même vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Dans le cas d'une rotation, tous les points ont la même vitesse angulaire (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) mais des vitesses différentes : plus un point est loin de l'axe, plus il se déplace vite.

On introduit parfois le *vecteur rotation*, noté souvent $\vec{\Omega}$ ou \vec{R} : vecteur de norme ω , dirigé selon l'axe de rotation, et orienté suivant la règle du tire-bouchon. On peut alors vérifier que pour tout point M , on a $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$. On s'en servira peu en physique cette année ; cependant cela peut servir à démontrer la propriété énoncée ci-dessous, que le vecteur angulaire est le même pour tous les points.

Remarque : Tout mouvement peut se décomposer en superposition d'une translation et d'une rotation. Souvent on considère la translation de son centre de masse superposée à une rotation autour de ce centre de masse. Mais cette année, le programme demande de se limiter à la rotation autour d'un axe fixe

On peut alors montrer facilement que le moment cinétique d'un solide est proportionnel à sa vitesse angulaire, le coefficient de proportionnalité étant un facteur géométrique :

Définition : Moment d'inertie d'un solide

Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe vaut $\mathcal{L}^{Oz}(S) = J^{Oz}\omega$ où J^{Oz} (ou I^{Oz}) est le *moment d'inertie* du solide autour de cet axe : $J^{Oz} = \sum_i m_i r_i^2$, en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Démonstration

Notons $\vec{OM}_i = r_i \vec{e}_{r_i} + z_i \vec{e}_z$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{Oz}(S) &= \sum_i m_i (\vec{OM}_i \wedge \vec{v}(M_i)) \cdot \vec{e}_z \\ &= \sum_i m_i ((r_i \vec{e}_{r_i} + z_i \vec{e}_z) \wedge r_i \omega \vec{e}_{\theta_i}) \cdot \vec{e}_z \\ &= \sum_i m_i (r_i^2 \omega \vec{e}_z - z_i r_i \omega \vec{e}_{r_i}) \cdot \vec{e}_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega \end{aligned}$$

Donc $J^{Oz} = \sum_i m_i r_i^2$.

Remarque : Même si on ne vous demandera pas de calculer des moments d'inertie de solides, il est bon de savoir que le moment d'inertie d'un point matériel est le produit de sa masse par le carré de sa distance à l'axe.

Avant de pouvoir aller plus loin, intéressons-nous une nouvelle fois au poids :

Propriété : Moment du poids d'un solide

Pour calculer le moment du poids d'un solide, on considère qu'il s'applique au centre de masse G .

Démonstration

Soit Oz un axe :

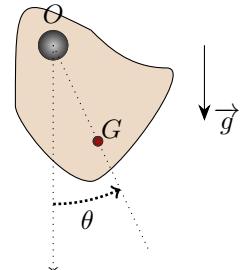
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{poids}}^{Oz} &= \sum_i \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{g} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{g} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \left(M_S \overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \left(\overrightarrow{OG} \wedge M_S \vec{g} \right) \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Exemple : Le pendule pesant

À connaître

Un solide quelconque de masse M est suspendu en un point O et libre de tourner autour d'un axe horizontal (noté Oz). On repère sa position par l'angle entre OG et la verticale, où G est son centre de masse. On note I le moment d'inertie du solide par rapport à Oz .

Par application du théorème du moment cinétique, déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ .



On étudie le solide dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
Étude cinématique : $\mathcal{L}^{Oz} = I\dot{\theta}$

Bilan des actions :

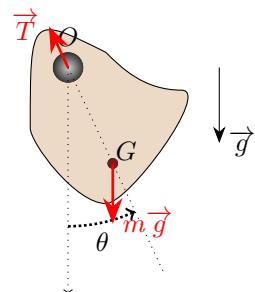
- la réaction de l'axe a un moment nul car elle passe par l'axe
- le poids a un moment non nul ; comme il s'applique en G , on peut montrer que

$$\mathcal{M}_{m\vec{g}}^{Oz} = -OG.M.g.\sin\theta$$

Le TMC appliqué au solide fournit alors l'équation

$$I\ddot{\theta} = -M.OG.g\sin\theta$$

Remarque : dans le cas du pendule simple : $I = M.l^2$ et $OG = l$, on retrouve l'équation habituelle.



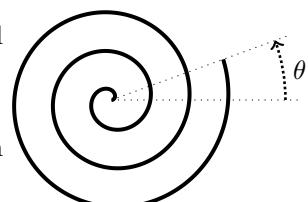
Remarque : Une poulie, un axe,...exercent une force qui passe par l'axe et a un moment nul ; mais ils peuvent aussi exercer un couple, de frottements le plus souvent.

Définition : Ressort spiral, fil de torsion

Un ressort spiral est un ressort qui exerce un couple proportionnel à l'angle dont il a tourné :

$$C = -k.(\theta - \theta_0)$$

où θ_0 est son angle d'équilibre, et k sa raideur. On obtient la même chose avec un fil qu'on tord, qu'on appelle alors *fil de torsion*.



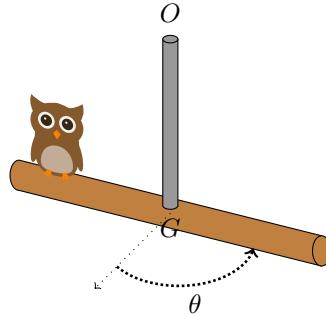
Exemple : Pendule de torsion

À connaître

Une tige est suspendue en son centre de masse G à un fil métallique vertical fixé au plafond en O .

La tige peut tourner autour de l'axe vertical Oz ; on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Lorsqu'elle tourne (rotation mesurée par un angle θ), le fil se tord et exerce un couple de rappel $-C\theta$.

Établir l'équation différentielle du mouvement, et déterminer la caractéristique des oscillations.



On étudie la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La barre a pour moment cinétique $J\dot{\theta}$. Elle est soumise à :

- son poids, qui passe par l'axe et est parallèle à l'axe, donc son moment est nul
- la tension du fil, qui passe par l'axe et est parallèle à l'axe, donc son moment est nul
- le rappel dû à la torsion du fil, de moment $-C\theta$

Le TMC donne alors l'équation

$$J\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

qui donne des oscillations de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$

Remarque : Pour qu'un solide en rotation soit à l'équilibre, la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui (par rapport à un axe quelconque) doit être nul.

C.4. Aspect énergétique d'un solide en rotation

Comme dans le cas d'une translation, avant d'appliquer les théorèmes de l'énergie cinétique ou mécanique, il faut essayer d'exprimer de façon simple l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un avec Oz à la vitesse angulaire ω :

Propriété : Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω est reliée à son moment d'inertie par rapport à cet axe selon la relation

$$E_c = \frac{1}{2} J^{Oz} \omega^2 \quad (\text{M8.5})$$

Démonstration

Avec la notation $\overrightarrow{OM}_i = r_i \overrightarrow{e_r} + z_i \overrightarrow{e_z}$:

$$\begin{aligned} E_c(S) &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \overrightarrow{v}^2(M_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 \text{ car } \overrightarrow{v}(M_i) = r_i \cdot \omega \cdot \overrightarrow{e_\theta} \\ &= \frac{1}{2} J^{Oz} \omega^2 \text{ avec } J^{Oz} = \sum_i m_i r_i^2 \end{aligned}$$

On va alors pouvoir appliquer les théorèmes, à condition de savoir calculer la puissance d'une force, mais aussi d'un couple. Dans le premier cas, on a une formule, mais pas dans le second cas. On va donc établir une formule qui est vraie dans tous les cas :

Propriété : Puissance d'une force sur un solide en rotation

Une force ou un couple de moment \mathcal{M} s'exerçant sur un solide en rotation à la vitesse angulaire ω fournit au solide une puissance mécanique

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}\omega \quad (\text{M8.6})$$

Démonstration

On va le montrer pour une force ; un couple étant une somme de plusieurs force, la relation sera forcément vraie pour un couple.

Soit une force \vec{F} s'exerçant en un point M du solide.

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \vec{F} \cdot \vec{v}(M) \\ &= \vec{F} \cdot r\omega \cdot \vec{e}_\theta \\ &= F_\theta \cdot r \cdot \omega = \mathcal{M} \cdot \omega \text{ où } r \text{ est la distance à l'axe} \end{aligned}$$

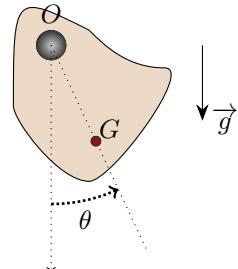
Remarque : Le travail d'un moment peut alors se calculer par les formules $W = \int \mathcal{P} dt = \int \mathcal{M} \cdot \omega dt = \int \mathcal{M} d\theta$ avec $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Exemple : Le pendule pesant

À connaître

Un solide quelconque de masse M est suspendu en un point O et libre de tourner sans frottements autour d'un axe horizontal (noté Oz). On repère sa position par l'angle entre OG et la verticale, où G est son centre de masse. On note I le moment d'inertie du solide par rapport à Oz .

Montrez que ce système est conservatif, exprimez son énergie mécanique en fonction de θ , et déterminez l'ED vérifiée par l'angle θ .



On étudie le solide dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Étude cinématique : $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

Bilan des actions :

- la réaction de l'axe a un moment nul car elle passe par l'axe, donc sa puissance est nulle
- le poids est conservatif, son énergie potentielle vaut $E_{pp} = Mgz(G) = -M.g.OG \cdot \cos \theta$

Donc le système est conservatif et $E_m = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - M.g.OG \cdot \cos \theta = cst.$

En dérivant et en simplifiant par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation

$$I\ddot{\theta} = -M.OG.g \sin \theta$$

Un couple de forces possède un moment, donc une puissance (ou un travail) ; il peut être conservatif ; par exemple, un ressort spiral :

Propriété : Énergie potentielle d'un ressort spiral ou d'un fil de torsion

Un ressort spiral, ou un fil de torsion, exerce un couple conservatif d'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2 \quad (\text{M8.7})$$

Démonstration

Calculons le travail d'un ressort spiral de moment $-k(\theta - \theta_0)$:

$$\begin{aligned} W^{t_1 \rightarrow t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}.dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}.d\theta \\ &= \int_{t_1}^{t_2} -k(\theta - \theta_0).d\theta = -\left[\frac{1}{2}k(\theta - \theta_0)^2\right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

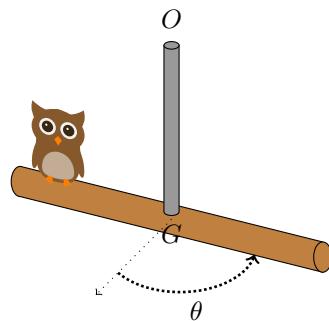
Exemple : Pendule de torsion

À connaître

Une tige est suspendue en son centre de masse G à un fil métallique vertical fixé au plafond en O .

La tige peut tourner autour de l'axe vertical Oz ; on note J son moment d'inertie par rapport à cet axe. Lorsqu'elle tourne (rotation mesurée par un angle θ), le fil se tord et exerce un couple de rappel $-C\dot{\theta}$.

Établir l'équation différentielle du mouvement, et déterminer la caractéristique des oscillations.



On étudie la barre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La barre a pour énergie cinétique $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$. Elle est soumise à :

- son poids, d'énergie potentielle $E_{pp} = cst$ car le centre de masse ne monte ni ne descend
- la tension du fil, qui a une puissance nulle (il y a 3 ou 4 façons de le justifier)
- le rappel dû à la torsion du fil, conservatif, d'énergie potentielle $\frac{1}{2}C\theta^2$

Le système est donc conservatif, d'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = cst$.

En dérivant par rapport au temps et en simplifiant par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation

$$J\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

M8.D. Conservation du moment cinétique

On a déjà parlé de la conservation de l'énergie, et la conservation de la quantité de mouvement selon un axe fixe. On va voir maintenant la conservation du moment cinétique par rapport à un axe fixe. Dans ce paragraphe, on ne parlera pas seulement de solides, mais aussi de systèmes déformables.

Propriété : Conservation du moment cinétique

Si un système soumis à des forces dont les moments par rapport à un axe Δ sont tous nuls, alors le moment cinétique de ce système par rapport à Δ est constant. C'est le cas en particulier :

- d'un système isolé,
- d'un système soumis uniquement à des forces selon \vec{e}_r en coordonnées cylindriques d'axe Δ .
- d'un système soumis uniquement à des forces parallèles à l'axe Δ .

Exemple : Patinage artistique

Un patineur se met en rotation, les bras et/ou une jambe écartés, à une vitesse de rotation initiale ω_1 . Puis il ramène tous ses membres vers son corps, et on constate que sa vitesse de rotation augmente. Voir [cette vidéo](#).

1. On note J_1 son moment d'inertie avec les membres écartés, et J_2 avec les membres contre son corps. Justifiez qualitativement que $J_1 > J_2$.
2. On suppose que le contact du patineur avec la glace est sans frottements ; justifier que le moment cinétique du patineur est constant.

3. En déduire la vitesse de rotation ω_2 à la fin ; justifier que $\omega_2 > \omega_1$.
4. Exprimez l'énergie mécanique du patineur au début et à la fin ; justifiez qu'il a gagné de l'énergie. D'où provient-elle ?

1. J est la somme des masses de chaque partie du corps, multipliée par la distance par rapport à l'axe au carré. Or la masse totale du patineur ne change pas, mais ses membres sont plus éloignés de l'axe au début qu'à la fin, ce qui explique que $J_1 > J_2$.
2. Le patineur est soumis à son poids et à la réaction du sol. Les deux sont verticales, donc parallèles à l'axe de rotation, donc de moment nul. Le moment cinétique du système est donc conservé.
3. On en déduit que $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ donc $\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 > \omega_1$ puisque $J_1 > J_2$.
4. $E_{c1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2$ et $E_{c2} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_2\left(\frac{J_1\omega_1}{J_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{J_2^2}{J_2}\omega_1^2 = \frac{J_1}{J_2}E_{c1}$: l'énergie cinétique du patineur a augmenté. Son énergie potentielle de pesanteur n'a quasiment pas varié. Le gain d'énergie provient donc du travail des forces intérieures : pour ramener ses membres près de son corps, le patineur a dû exercer un effort qui a fourni du travail.

Cette loi de conservation du moment cinétique a de nombreuses applications : par exemple, le moment cinétique du système Terre-Lune est conservé ; comme la rotation de la Terre ralentit, la Lune, pour compenser, s'éloigne de la Terre. On peut encore citer la physique des particules, où elle joue un rôle très important.

M8.E. Annexe : Calculs de moments d'inertie par intégration (Hors programme)

Un solide peut être décomposé en un très grand nombre d'atomes ; le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ est alors donné par $J^\Delta = \sum_{\text{atomes } i} m_i r_i^2$ avec r_i le rayon de rotation de l'atome i en coordonnées cylindriques. Mais en pratique, le nombre d'atomes est tellement grand qu'un tel calcul est impossible.

Pour calculer J^Δ , on va donc utiliser une modélisation continue : on découpe le solide en tout petits morceaux possédant chacun une petite masse dm , et donc un moment d'inertie dJ^Δ ; on somme ces dJ^Δ pour obtenir le moment d'inertie total.

Suivant la forme du solide, 3 modélisations sont possibles :

- pour un objet filiforme, on prend une modélisation 1D : on pose $\lambda = \frac{dm}{d\ell}$ la *masse linéique*, où dm est la petite masse d'un petit morceau de longueur $d\ell$, et on effectue alors une intégrale simple : $J^\Delta = \int_{\text{solide}} r^2 dm = \int_{\text{solide}} r^2 \lambda \cdot d\ell$
- pour un objet plat, on prend une modélisation 2D : on pose $\sigma = \frac{dm}{dS}$ la *masse surfacique*, où dm est la petite masse d'un petit morceau de surface dS , et on effectue alors une intégrale double : $J^\Delta = \iint_{\text{solide}} r^2 dm = \iint_{\text{solide}} r^2 \sigma \cdot dS$
- pour un objet en volume, on prend une modélisation 3D : on pose $\mu = \frac{dm}{dV}$ la *masse volumique*, où dm est la petite masse d'un petit morceau de volume dV , et on effectue alors une intégrale triple : $J^\Delta = \iiint_{\text{solide}} r^2 dm = \iiint_{\text{solide}} r^2 \mu \cdot dV$

Un peu de maths : Intégrales doubles et triples

Une intégrale double n'est rien d'autre que l'intégrale d'une intégrale. Par exemple,

$$\int_{x=1}^2 \int_{y=0}^{1/x} e^{xy} dx dy = \int_{x=1}^2 \left(\int_{y=0}^{1/x} e^{xy} dy \right) . dx = \int_{x=1}^2 \left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_0^{1/x} dx = \int_{x=1}^2 \frac{e^1 - 1}{x} dx = (e^1 - 1) \ln 2$$

Si les bornes des intégrales sont indépendantes, et si le contenu à intégrer se factorise, alors on peut factoriser l'intégrale double (ou triple) sous forme d'un produit d'intégrales :

$$\int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x).g(y).dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) . \left(\int_c^d g(y) dy \right)$$

Méthode : Élément d'intégration

Pour déterminer les éléments d'intégration $d\ell$, dS ou dV , il faut :

- déterminer le système de coordonnées permettant de décrire facilement l'objet sur lequel on intègre
 - déterminer la ou les variables qui varient lorsqu'on parcourt l'objet sur lequel on intègre
 - écrire le petit déplacement dans le système de coordonnées choisi, et faire le produit des normes des petits déplacements selon les variables qui varient

Par exemple, si on veut intégrer sur les bords d'un cylindre, on se place en coordonnées cylindriques. Dans ce système, lorsqu'on se déplace sur le bord du cylindre, c'est θ et z qui varient (r reste constant). Comme le petit déplacement en cylindriques vaut $dr\vec{e}_r + r.d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$, la petite surface vaudra $dS = r.d\theta.dz$.

Exemple : Moment d'inertie d'une tige inhomogène

On considère une tige rectiligne de longueur 2ℓ . Cette tige est plus dense au centre qu'aux bords : en repérant les points par rapport au centre O de la tige, la masse linéique s'écrit $\lambda(r) = \lambda_0 \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)$.



1. Exprimez le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe Oz (z étant orthogonal à la figure), en fonction de λ_0 et ℓ .
 2. Exprimez le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe Az (A étant à une extrémité de la tige), en fonction de λ_0 et ℓ .
 3. Exprimez ces moments d'inertie en fonction de la masse totale m de la tige, et de ℓ .

1. On repère un point P de la tige par $r = OP \in [-\ell; +\ell]$. Alors

$$J^{Oz} = \int_{-\ell}^{+\ell} \lambda(r) \cdot r^2 \cdot dr = \int_{-\ell}^{+\ell} \lambda_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{\ell^2} \right) dr = \lambda_0 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5\ell^2} \right]_{-\ell}^{+\ell} = \frac{4\lambda_0 \ell^3}{15}$$

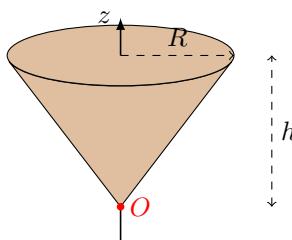
2. Un point P situé à une distance $r \in [0; 2\ell]$ de A est à une distance $(r - \ell)$ de O , donc

$$J^{Az} = \int_0^{2\ell} \lambda(r - \ell) \cdot r^2 \cdot dr = \int_0^{2\ell} \lambda_0 r^2 \left(1 - \frac{(r-\ell)^2}{\ell^2}\right) dr = \int_0^{2\ell} \lambda_0 \left(\frac{2r^3}{\ell} - \frac{r^4}{\ell^2}\right) dr = \lambda_0 \left[\frac{r^4}{2\ell} - \frac{r^5}{5\ell^2}\right]_0^{2\ell} = \frac{8\lambda_0 \ell^3}{5}$$

3. On a la masse totale de la tige en intégrant : $m = \int_{-\ell}^{+\ell} \lambda(r).dr = \lambda_0 \left[r - \frac{r^3}{3\ell^2} \right]_{-\ell}^{+\ell} = \frac{4\lambda_0 \ell}{3}$. On en déduit que $\lambda_0 = \frac{3m}{4\ell}$ d'où $J^{Oz} = \frac{1}{5}m\ell^2$ et $J^{Az} = \frac{6}{5}m\ell^2$.

Exemple : Moment d'inertie d'un cône homogène

On considère un cône homogène de masse volumique μ , de hauteur h , de rayon à la base R . On note Oz son axe avec O le sommet.



1. Exprimez le rayon r à une altitude z donnée.
 2. Déterminez le moment d'inertie J^{Oz} .
 3. Exprimez ce moment d'inertie en fonction de R et de sa masse totale m .

1. Par une règle de proportionnalité : $r(z) = \frac{z}{h}R$

2. Quand on parcourt le volume du cône, les trois variables cylindriques r , θ et z varient. Or le petit déplacement vaut $dr\vec{e}_r + r.d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$ donc $dV = dr.r.d\theta.dz$. Pour l'intégration, on constate que les bornes de r dépendent de z , donc l'intégrale selon r doit être à l'intérieur de celle en z ; quant à celle selon θ , elle est indépendante. Donc :

$$\begin{aligned} J^{Oz} &= \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{zR}{h}} \mu r^2 .dr.r.d\theta.dz = \mu \left(\int_{z=0}^h \left(\int_{r=0}^{\frac{zR}{h}} r^3 dr \right) dz \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= \mu \left(\int_{z=0}^h \frac{z^4 R^4}{4h^4} dz \right) 2\pi = \frac{\pi \mu h R^4}{10} \end{aligned}$$

3. La masse totale du cube est donnée par $m = \mu \times \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (on peut le retrouver par une intégrale : $m = \iiint \mu.dV$). Donc $\mu = \frac{3m}{\pi R^2 h}$. En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve $J^{Oz} = \frac{3}{10}mR^2$

Dynamique des solides

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers	
Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.
Translation. Rotation autour d'un axe fixe.	Reconnaitre et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire. Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe	
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté. Moment d'une force par rapport à un axe orienté. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Relier le signe du moment cinétique aux caractéristiques du mouvement. Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.
Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
Couple. Liaison pivot.	Définir un couple. Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.
Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté	
Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie. Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.
Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.	Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Dynamique des solides

QCMs

réponses page 746

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Un solide est en translation si pour tous points A et B du solide :

- | | |
|---|---|
| (a). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{cst}$ | (b). $AB = cst$ |
| (c). $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$ | (d). $\vec{v}(A) \parallel \overrightarrow{AB}$ |

Q2.

Un solide est en rotation autour d'un axe Δ si :

- | | |
|---|---|
| (a). toutes les vitesses sont parallèles à Δ | (b). tous les points de Δ sont immobiles |
| (c). tous les points du solide ont une vitesse différente | (d). il n'est pas en translation |

Q3.

La poids d'un solide :

- | | |
|---|--|
| (a). est égal à la masse totale multipliée par \overrightarrow{g} | (b). a pour énergie potentielle $M_S g z(G)$ |
| (c). s'applique au centre de gravité G | (d). est conservatif |

Q4.

Pour un solide, la puissance totale des forces intérieures est nulle :

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Vrai | (b). Faux |
|-----------|-----------|

Q5.

L'énergie cinétique d'un solide en translation s'écrit :

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| (a). $\frac{1}{2}Jv(G)^2$ | (b). $\frac{1}{2}J\omega^2$ |
| (c). $\frac{1}{2}M_S v(G)^2$ | (d). $\frac{1}{2}M_S \omega^2$ |

Q6.

L'énergie cinétique d'un solide en rotation s'écrit :

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| (a). $\frac{1}{2}M_S v(G)^2$ | (b). $\frac{1}{2}Jv(G)^2$ |
| (c). $\frac{1}{2}J\omega^2$ | (d). $\frac{1}{2}M_S \omega^2$ |

Q7.

La puissance d'un couple de moment M s'écrit :

- | | |
|----------------------|-----------------|
| (a). $\frac{dM}{dt}$ | (b). $M.\omega$ |
| (c). $M.v$ | (d). M |

Q8.

Le moment cinétique d'un système est constante si :

- | | |
|---|--|
| (a). le système est isolé | (b). le système est pseudo-isolé |
| (c). le système n'est soumis qu'à des couples de forces | (d). toutes les forces extérieures appliquées au système ont un moment nul |

Dynamique des solides

Exercices

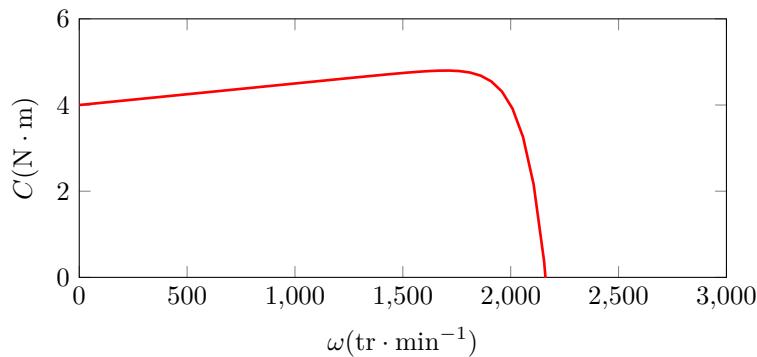
réponses page 747

Exercice M8.1 : Mise en rotation [*]

Un moteur met en rotation un disque de moment d'inertie $I = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. À $t = 0$, le disque était immobile ; on note $\omega(t)$ sa vitesse de rotation.

On néglige les frottements ; le centre de masse est sur l'axe.

1. On suppose que le moteur exerce un couple constant C ; calculez $\omega(t)$ et commentez.
AN : pour $C = 4,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, calculez le temps nécessaire pour atteindre $2500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.
2. En réalité, le moteur possède une courbe de couple $C(\omega)$ représentée ci-dessous :



Quelle équation différentielle relie $\dot{\omega}$ et $C(\omega)$?

[***] Montrez que le temps mis pour atteindre une vitesse de rotation donnée ω est relié à $\frac{1}{C(\omega)}$ d'une manière à préciser.

Exercice M8.2 : Intérêt du volant d'inertie d'un moteur de voiture [**]

Dans un moteur de voiture à essence, l'arbre moteur est soumis à un couple moteur $C_m(t)$ fourni par les explosions de l'essence dans les pistons. Ce couple n'est pas régulier, il varie périodiquement en fonction du temps avec une période égale à la période des explosions.

On note J le moment d'inertie de l'arbre moteur et $r(t)$ sa vitesse de rotation. On supposera qu'il est soumis à une action de frottements exerçant un couple $-K \cdot r$ avec K une constante. Le centre de gravité de l'arbre moteur est sur son axe de rotation.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par r en appliquant le théorème du moment cinétique à l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation.
2. Si le couple moteur vaut la valeur constante $C_0 = 180 \text{ N} \cdot \text{m}$, l'arbre atteint la vitesse limite $r_{lim} = 8000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Calculer numériquement K .
3. On s'intéresse au régime sinusoïdal forcé. On pose $\underline{H} = \frac{\underline{r}}{\underline{c}_m}$ où \underline{r} et \underline{c}_m sont les images complexes respectives de r et C_m .

Établir l'expression de \underline{H} sous la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1 dont on exprimera la pulsation de coupure ω_0 . Tracer l'allure du diagramme de Bode correspondant.

4. Quel est l'intérêt d'augmenter J ?

En pratique, on place sur l'arbre moteur un disque très lourd appelé volant d'inertie. Le moment d'inertie de l'ensemble vaut alors $J = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Calculer numériquement la fréquence de coupure f_0 en tr/min . Est-ce adapté pour filtrer les vibrations d'un moteur de voiture ?

Exercice M8.3 : Ventilateur [**]

Un ventilateur est un solide de moment d'inertie $J = 2,2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ qui peut tourner autour d'un axe horizontal passant par son centre de masse. Il est mû par un moteur de puissance \mathcal{P} . Lors de sa rotation, il est soumis à deux couples de frottements :

- les frottements solides sur les paliers de l'axe, de la forme $-C$ (constants)
- les frottements avec l'air, de la forme $-\lambda \omega^2$ où ω représente sa vitesse de rotation.

1. Déterminez l'équation différentielle vérifiée par ω .
2. Il existe 2 positions de la commande de vitesse :

- si $\mathcal{P} = 30 \text{ W}$ alors le ventilateur tourne (en régime permanent) à $600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$
- si $\mathcal{P} = 60 \text{ W}$ alors le ventilateur tourne (en régime permanent) à $900 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$

En déduire deux équations numériques vérifiées par C et λ .

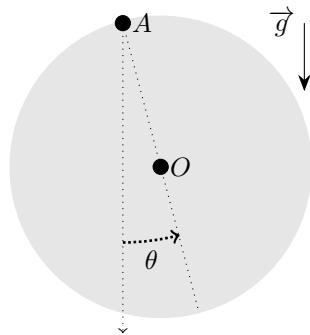
Calculez numériquement C et λ .

3. Résoudre numériquement $\omega(t)$, à l'aide d'un schéma d'Euler durant 10 s, pour un ventilateur initialement à $\omega(0) = 600 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ dont on passe la puissance à $\mathcal{P} = 60 \text{ W}$.
- Mesurez le temps mis pour atteindre $850 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Exercice M8.4 : Oscillations d'un cylindre [**]

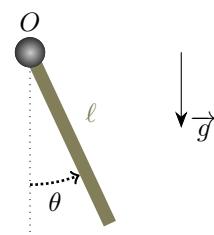
Un cylindre homogène horizontal de rayon a et de masse m est libre de tourner autour de l'axe horizontal passant par un point A (situé en périphérie). On note θ l'angle entre \overrightarrow{AO} et la verticale. On néglige les frottements.

1. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe passant par O vaut $I_O = \frac{1}{2}ma^2$. Le théorème de Huygens indique que $I_A = I_O + mA\theta^2$. Déduisez-en I_A .
2. Par application du théorème du moment cinétique, trouvez l'équation différentielle vérifiée par θ .
Déduisez-en la période de ses petites oscillations.
3. Reprenez la question précédente à l'aide de l'énergie.



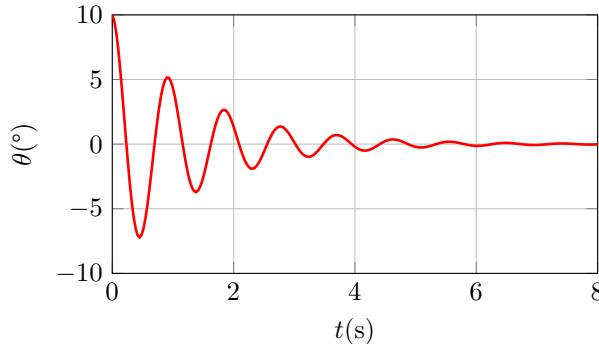
Exercice M8.5 : Oscillation d'une tige autour d'un axe mal graissé [**]

Une tige homogène, de masse $m = 82 \text{ g}$ et de longueur $\ell = 32 \text{ cm}$, peut tourner autour d'une de ses extrémités O (axe Oz) ; néanmoins, il y a des frottements sur cet axe, qui exercent un couple de frottements qu'on modélisera sous la forme $-k\dot{\theta}$, avec θ l'angle entre la verticale et la tige.
Le moment d'inertie de la tige par rapport à Oz vaut $I = \frac{1}{3}m\ell^2$. Le centre de masse de G de la tige est en son milieu.



1. Appliquez le théorème du moment cinétique à la tige ; déduisez-en l'ED vérifiée par θ .
2. Retrouvez cette ED par application du théorème de la puissance mécanique.
3. Linéarisez l'équation pour de petites oscillations ; calculez numériquement la pulsation propre, et la période propre correspondante.

4. On relève la courbe suivante :

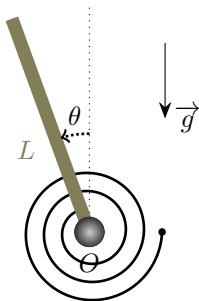


Mesurez le temps caractéristique τ de décroissance de l'enveloppe. En déduire la valeur de k .

Exercice M8.6 : Équilibre d'une tige verticale soutenue par un ressort spiral [**]

Une tige de masse m et de longueur L pouvant tourner sans frottements autour de l'axe Oz horizontal est maintenue par un ressort spiral d'axe Oz , de raideur k et d'angle au repos 0° (l'angle θ est pris pas rapport à la verticale ascendante).

Le moment d'inertie de la tige par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{3}mL^2$; son centre de masse est en son milieu. Pour les AN : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $m = 12 \text{ g}$ et $L = 14 \text{ cm}$.



1. Étude par le TMC

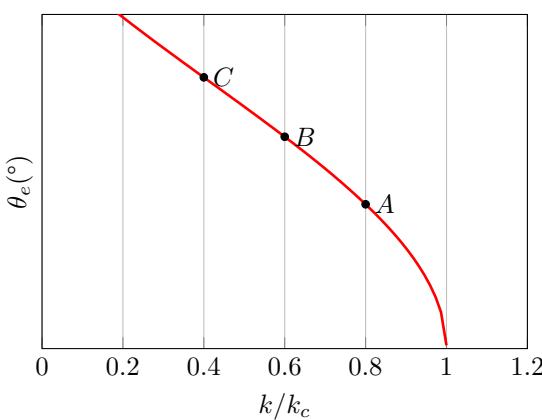
- En appliquant le TMC à la tige, établissez l'ED vérifiée par θ ; on ne linéarisera pas $\sin \theta$ pour le moment..
- Établissez l'équation donnant l'angle θ à l'équilibre. Vérifiez que $\theta = 0^{\circ}$ est une position d'équilibre.
- En linéarisant l'ED, montrer que cette position d'équilibre est stable si et seulement si k est supérieur à une valeur k_c à exprimer et à calculer.

2. Étude par l'énergie

- Montrer que ce système est conservatif, et exprimer son énergie mécanique.
- Retrouver, à partir de l'expression de E_p , l'équation qui donne les positions d'équilibre.
- Retrouver, à partir de E_p , le résultat trouvé sur la stabilité de la position $\theta = 0^{\circ}$.

3. On peut montrer que, pour $k < k_c$, l'équation donnant les positions d'équilibre admet trois solutions : $\theta = 0^{\circ}$ et $\theta = \pm\theta_e$ avec $\theta_e \in [0^{\circ}; 180^{\circ}]$. Mais cet angle θ_e ne peut se trouver que numériquement.

Implémentez un programme sous Python qui cherche θ_e à $0,1^{\circ}$ près (attention, Python travaille avec des radians). Indiquez alors les coordonnées de A , B et C dans le graphique ci-dessous :

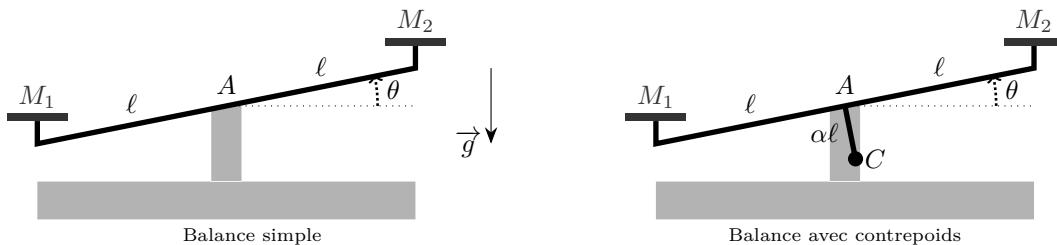


4. [***] Pour $k = 0.8k_c$, déterminez la période des petites oscillations de la tige autour de sa position d'équilibre.

Exercice M8.7 : Étude de quelques balances [**]

Une tige verticale est fixée sur un socle. En un point A de cette tige est fixée une autre tige t de longueur 2ℓ qui peut pivoter librement autour de l'axe passant par A et orthogonal à la figure; son centre de masse est en A . Aux deux extrémités de cette seconde tige se trouvent les deux plateaux qu'on modélisera ici simplement par deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 . Le moment d'inertie de la tige horizontale par rapport à l'axe de rotation est noté J .

On repère par l'angle θ avec l'horizontale la position de la tige M_1M_2 . De par la construction du système, θ peut varier entre deux valeurs $-\theta_{max}$ et $+\theta_{max}$ avec $\theta_{max} \ll 1$; on simplifiera donc les expressions pour de petits angles.



1. Premier essai

On teste dans un premier temps cette balance sans rien ajouter, avec deux masses a priori différentes (figure de gauche).

- En appliquant le TMC par rapport l'axe, au système formé de la tige et des deux masses, établissez l'ED vérifiée par θ (si la balance n'est pas en butée).
- Quelle valeur prend θ si $m_1 > m_2$? si $m_1 < m_2$?
- Quelle valeur peut prendre θ à l'équilibre si $m_1 = m_2$?

2. Ajout d'un contrepoids

Cette première solution ne permet donc pas vraiment de savoir si les deux masses sont égales.

On se propose donc d'ajouter un contrepoids. On accroche donc à la tige M_1M_2 une autre tige plus courte, au bout de laquelle est accrochée un contrepoids C de masse m_C . Le contrepoids est placé de telle sorte que $\vec{AC} \perp \vec{M_1M_2}$ et $AC = \alpha \cdot \ell$ (figure de droite).

- En appliquant le TMC à un nouveau système, trouvez la nouvelle ED vérifiée par θ .
- Montrez que le système peut atteindre une position d'équilibre θ_{eq} . Dans quel cas vaut-elle 0° ?
- On prend $m_1 = 500 \text{ g}$, $m_C = 210 \text{ g}$, $\ell = 20 \text{ cm}$, $\alpha = \frac{1}{4}$, et $\theta_{max} = 5^\circ$. Calculez la masse m_2 telle que la position d'équilibre vaille $-\theta_{max}$; puis $+\theta_{max}$. Commentez la précision de cette balance.
- Calculez la période des oscillations dans le cas où $m_2 = m_1$ (mêmes valeurs numériques, et $J = \frac{1}{3}m_{tige}\ell^2$ avec $m_{tige} = 180 \text{ g}$).

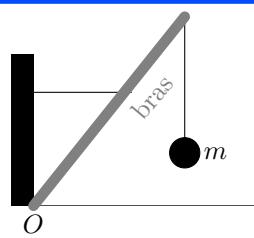
3. Frottements solides [***]

On prend la même balance avec contrepoids, mais avec le temps, l'axe a rouillé. On a donc en plus à tenir compte d'un couple de frottements exercé au point A sur la tige. Celui-ci est caractérisé par une valeur maximale C_m . La tige reste immobile tant que le moment C du couple peut rester inférieur à C_m en valeur absolue; sinon, la tige tourne, et le couple vaut $C = \pm C_m$ (opposé au mouvement).

- À quelles lois vous fait penser le modèle choisi?
- Établir la nouvelle ED du mouvement.
- On pose d'un côté une masse m_1 inconnue. Après divers essais, on constate que, pour une masse m_2 posée de l'autre côté comprise entre 251 g et 258 g , la balance peut rester horizontale à l'équilibre. Déterminez m_1 et C_m

Exercice M8.8 : Grue portuaire [**]

Un bras de grue (en gris sur la figure) de longueur 25 m est fixé au point O au sol ; il est libre de tourner autour de l'axe Oz passant par ce point et perpendiculaire à la feuille. Un câble horizontal retient ce bras en le reliant à un mât vertical ; ce câble est fixé sur le bras à 15 m de l'axe. On suspend au bout du bras une masse $m = 4 t$ et on néglige les autres masses ; on prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

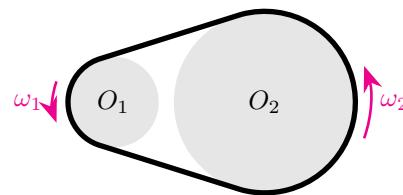


- Le bras est immobile ; en appliquant le TMC en Oz au système {bras+masse suspendue}, exprimez la tension du câble horizontal en fonction de mg et de l'angle θ entre le bras et l'horizontale.
AN pour $\theta = 50^\circ$.
- Pour que le mât ne bascule pas, on le fixe dans le sol au point O . En appliquant le TMC au système {bras+masse suspendue + câble + mât}, calculez le couple exercé par le sol sur le mât.

Exercice M8.9 : Entraînement d'un disque par une courroie [***]

Un moteur de puissance $\mathcal{P} = 5 \text{ W}$ entraîne un disque de rayon R_1 et de masse m_1 ; on notera ω_1 sa vitesse de rotation. Une courroie (inextensible et de masse négligeable) transmet le mouvement de ce premier disque à un autre disque de rayon R_2 et de masse m_2 , tournant à la vitesse angulaire ω_2 . Un couple de frottements $-\lambda \cdot \omega_2$ s'applique sur ce disque.

Le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2}mR^2$. On néglige la masse de la poulie.

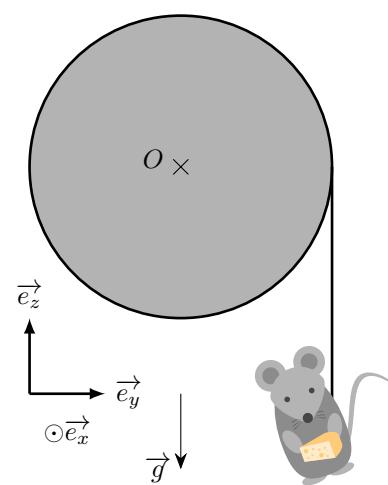


- La courroie avance à la vitesse v . En traduisant que la vitesse des bords des deux disques est égale à v , établissez une relation entre ω_1 , ω_2 , R_1 et R_2 .
- On considère le système S formé des deux disques et de la courroie. Exprimez son énergie cinétique uniquement en fonction de ω_2 et des constantes.
- On suppose que les deux disques sont équilibrés, donc le poids de chacun s'applique en son axe. Par un bilan énergétique, établissez l'ED vérifiée par ω_2 .
- On constate que ω_2 tend vers $6500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$; sachant que $R_1 = 1,5 \text{ mm}$, $R_2 = 9 \text{ mm}$, $m_1 = 90 \text{ mg}$, $m_2 = 15 \text{ g}$, calculez numériquement λ .
- Résolvez l'ED et établissez l'expression de $\omega_2(t)$ si $\omega_2(0) = 0$.

Exercice M8.10 : Ascenseur à souris [***]

Sur une poulie d'axe Ox horizontal, de masse $M = 200 \text{ g}$ et de rayon $R = 20 \text{ cm}$, on enroule un fil inextensible. Au bout de ce fil est suspendue une souris (avec un morceau de fromage) de masse $m = 50 \text{ g}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{2}MR^2$. On note \vec{e}_z le vecteur unitaire vertical ascendant. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pour le moment, la poulie tourne sans frottements ; le fil a une masse négligeable. On note z l'altitude de la souris, et ω la vitesse angulaire de la poulie. On définit le système $S = \{\text{poulie+fil+souris}\}$.



- Justifiez que $\dot{z} = R\omega$
- Étude du mouvement à l'aide du TMC**
 - Exprimez le moment cinétique de S par rapport à Ox en fonction de \dot{z} et des constantes.
 - Par application du TCM par rapport à l'axe de la poulie, exprimez \ddot{z} en fonction des constantes.
Faire l'AN.

- (c) Pour trouver \ddot{z} , on n'a pas eu besoin de connaître la tension T du fil. Supposons qu'on ait quand même besoin de la connaître (pour dimensionner le fil). Quel théorème permettrait de trouver T ? Appliquez ce théorème et calculez T .

3. Étude du mouvement à l'aide de l'énergie

- (a) Écrivez l'énergie mécanique de S en fonction uniquement de z , \dot{z} , et les constantes.
(b) Déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par z .

4. On suppose que la poulie est mal graissée, il y a un couple résistant Γ constant opposé à la rotation de la poulie (donc positif ici).

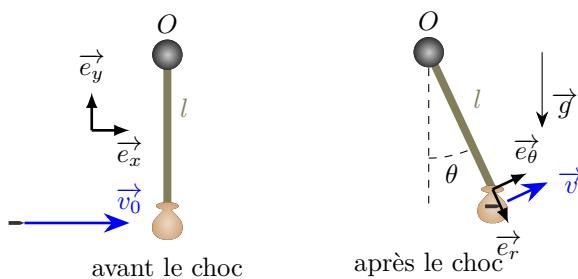
Exprimez la nouvelle équation reliant \ddot{z} aux constantes, en utilisant le TMC ou l'énergie.

On mesure $\ddot{z} = -2,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; calculez Γ .

5. On souhaite faire remonter la souris. Un moteur branché sur la poulie fournit un couple Γ' . Quelle doit être la puissance \mathcal{P} du moteur pour arriver à faire remonter la souris à $8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ (on tient compte des frottements de la question précédente, mais ils ont changé de signe, puisque le sens du mouvement a changé)?

Exercice M8.11 : Pendule ballistique [***]

On suspend un petit sac de sable de masse M (on négligera sa taille) au bout d'un fil de longueur l . Il est initialement au repos. On tire une balle de fusil dans le sac de sable. La balle, de masse m , arrive avec une vitesse horizontale \vec{v}_0 ; elle pénètre dans le sac de sable à un instant pris comme référence ($t = 0$) et s'y arrête quasi instantanément (c'est-à-dire que, à $t > 0$, la vitesse de la balle et celle du sac sont identiques).



On note $\Sigma = \{\text{balle, sac}\}$; le référentiel terrestre est galiléen.

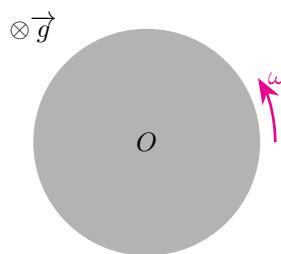
- Montrez que le moment cinétique L_Σ de Σ par rapport à l'axe Oz est conservé entre $t = 0^-$ (juste avant le choc) et $t = 0^+$ (juste après le choc).
- Exprimez L_Σ avant le choc puis après le choc, et déduisez-en la vitesse angulaire $\dot{\theta}(0^+)$ de l'ensemble juste après le choc.
- Que peut-on dire de Σ après le choc (du point de vue énergétique)? Calculez alors l'angle maximum θ_{max} atteint par le sac, en fonction de v_0 et des masses, et déduisez-en comment la mesure de θ_{max} peut permettre de connaître v_0 .
- AN : $m = 11 \text{ g}$, $M = 5 \text{ kg}$, $\theta_{max} = 17^\circ$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $l = 50 \text{ cm}$. Calculez v_0 .
- Calculez numériquement l'énergie cinétique de Σ juste avant le choc, puis juste après le choc. Déduisez-en la quantité d'énergie dissipée au cours du choc.

Exercice M8.12 : Couples exercés par les forces de frottements [****]

On considère un objet de masse m , en forme de disque de rayon R (pour simplifier les calculs, mais les résultats qu'on va obtenir se généralisent à n'importe quelle forme) en rotation sur un support fixe. La figure ci-contre représente une vue de dessus.

On suppose que le disque est en rotation à la vitesse angulaire ω autour de son centre, et on cherche à déterminer le couple dû aux forces de frottements entre le disque et le support.

Le moment d'inertie du disque par rapport à son axe vaut $\frac{mR^2}{2}$.



1. Frottements secs

On suppose pour le moment que les frottements entre le disque et le support sont modélisable par la loi de Coulomb avec un coefficient de frottements f .

- Soit P un point du disque, repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . On considère une surface infinitésimale dS autour de P . Exprimez dS en fonction de r et θ (ou leurs différentielles).
- Que vaut la réaction normale totale du support sur le disque (sans justification) ?
En supposant que cette réaction normale est répartie uniformément sur toute la surface du disque, exprimez la petite réaction normale $d\vec{N}$ s'exerçant sur la petite surface dS autour de P .
- En appliquant les lois de Coulomb, exprimez la petite force de frottement (réaction tangentielle) $d\vec{T}$ correspondante, puis le moment $d\mathcal{M}$ de cette force dT par rapport à l'axe passant par le centre.
- Par intégration sur toute la surface, exprimez le moment total des forces de frottements en fonction de m , g , f et R .
- Supposons que le solide n'est soumis qu'au moment des forces de frottements ; déterminez $\omega(t)$ en fonction de $\omega(0)$ et des données.

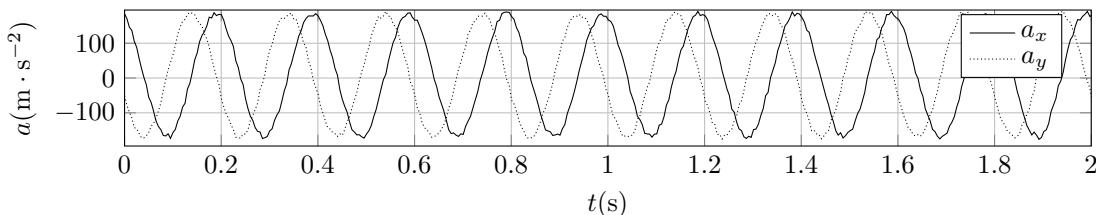
2. Frottements fluides

Supposons maintenant que le disque est une pierre de curling posée sur la glace. La fine couche d'eau liquide qui se forme entre la pierre et la glace modifie les lois de frottements, qui deviennent de type frottements fluides.

- Soit P un point du disque de coordonnées polaires (r, θ) . Exprimez sa vitesse.
- La force de frottements qui s'exerce sur la petite surface dS autour de P est proportionnelle à cette surface dS et à la vitesse de P ; elle s'écrit donc $d\vec{F} = -\lambda \vec{v}(P)dS$ avec λ une constante.
Exprimez $d\vec{F}$, puis le moment $d\mathcal{M}$ de cette force par rapport à l'axe.
- Exprimez le moment total des forces de frottements sous la forme $-C\omega$ avec C à déterminer.
- Supposons que le solide n'est soumis qu'au moment des forces de frottements ; déterminez $\omega(t)$ en fonction de $\omega(0)$ et des données.

Exercice M8.13 : Courbe d'accélération [**]

En un point fixe d'un solide en rotation, on a relevé les courbes suivantes d'accélération :

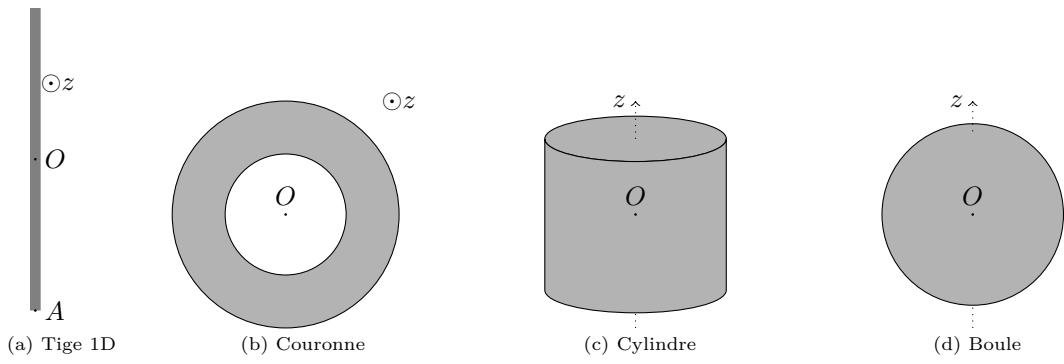


- Mesurez la pulsation à laquelle tourne le solide.
- À partir de la courbe, déterminer à quelle distance de l'axe est placé l'accéléromètre.
- Quelle est la vitesse linéaire d'un point situé à 30 cm de l'axe de rotation ?

Exercice M8.14 : Calculs de moments d'inertie [***]

Exercice hors programme, avec des intégrales simples puis triples.

- On considère une tige homogène de masse m et de longueur ℓ (figure (a)). Exprimez son moment d'inertie I^{Oz} par rapport à un axe Oz passant par son centre.
- Même question par rapport à l'axe passant par son extrémité (Az).



3. On considère une couronne plate homogène de masse m et comprise entre les rayons R_1 et R_2 (figure (b)). Exprimer son moment d'inertie par rapport à son axe Oz .
Indication : exprimer d'abord la masse surfacique σ en fonction de m et des rayons.
4. Exprimez de même le moment d'inertie par rapport à son axe d'un cylindre inhomogène de rayon R , de hauteur h , de masse m , de masse volumique $\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2R} \right)$ (figure (c)).
5. Exprimez de même le moment d'inertie par rapport à son axe d'une boule homogène de masse m et de rayon R (figure (d)).

Dynamique des solides

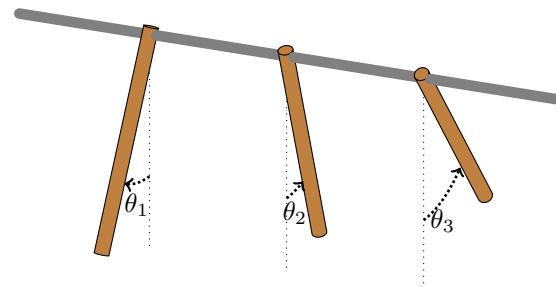
TDs numériques

réponses page 750

TD numérique : Pendules couplés

On considère des pendules pesants placés l'un à la suite de l'autre sur un fil de torsion : le pendule numéro i est repéré par son angle θ_i par rapport à l'axe vertical. Il y a N pendules, et les extrémités du fil de torsion sont fixées, de sorte qu'on posera $\theta_0 = \theta_{N+1} = 0^\circ$. Les pendules sont identiques : masse $m = 300\text{ g}$, longueur $\ell = 25\text{ cm}$, centre de masse en leur centre, moment d'inertie par rapport au bord $J = \frac{1}{3}m\ell^2$.

Le fil de torsion compris entre le pendule n et le pendule $n+1$ exerce sur le pendule $n+1$ un couple de rappel $-k(\theta_{n+1} - \theta_n)$ (avec $k = 0,05\text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$) et un couple opposé sur le pendule n .



1. Retrouvez rapidement la période d'un de ces pendules si on néglige le fil de torsion.
2. On considère pour le moment le cas $N = 2$. Écrivez les équations différentielles vérifiées par θ_1 et θ_2 .
3. Résolvez le système sur une durée de 20 périodes propres, avec pour les CI suivantes consistant à mettre un choc au dernier pendule : $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\text{ rad}$, $\dot{\theta}_1(0) = 0\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\dot{\theta}_2(0) = 0,5\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Tracez $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
4. Reprenez la même étude avec $N = 3$; c'est le dernier pendule qui subit le choc à $t = 0$.
5. Programmez la résolution générale dans le cas N quelconque, et simulez par exemple $N = 10$. Quel genre de solutions obtient-on ?
6. On suppose en plus que chaque pendule subit un couple de frottements $-\lambda \cdot \dot{\theta}_n$ avec $\lambda = 3 \times 10^{-4}\text{ USI}$. Retracez les courbes.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(a) ET (c)

Q2.(b)

Q3.(a) ET (b) ET (c) ET (d)

Q4.(a)

Q5.(c)

Q6.(c)

Q7.(b)

Q8.(a) ET (d)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M8.1 : Mise en rotation [*]

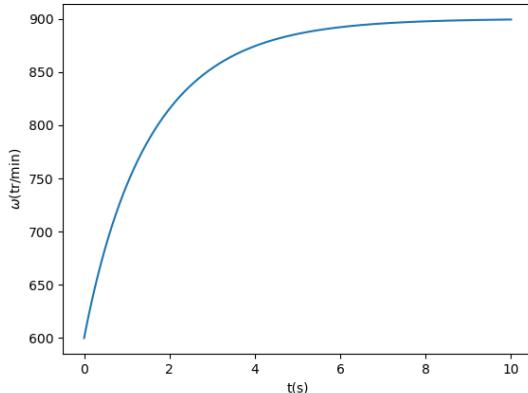
1. $t = \frac{I\omega}{C} = 11 \text{ s}$
2. $t = I \int_0^\omega \frac{1}{C(\omega)} d\omega$ donc on trace la courbe de $\frac{1}{C(\omega)}$ et le temps nécessaire pour atteindre une vitesse ω donnée est proportionnelle à l'aire sous la courbe entre 0 et ω .

Réponses de l'exercice M8.2 : Intérêt du volant d'inertie d'un moteur de voiture [**]

1. $J\ddot{\theta} + Kr = C_m$
2. $K = 0,22 \text{ USI}$
3. $H = \frac{1/K}{1+i\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = \frac{K}{J}$: c'est un passe-bas d'ordre 1 avec un gain à l'origine $G_{dB0} = -20 \log K = 13 \text{ dB}$ et une coupure à $\omega_0 = \frac{K}{J}$.
4. On calcule $f_0 = 0,085 \text{ Hz} = 5 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Par conséquent, les vibrations dues au moteurs, tournant à plus de $1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, vont être efficacement filtrées (-40 dB environ).

Réponses de l'exercice M8.3 : Ventilateur [**]

1. $J\ddot{\omega} = -C - \lambda\omega^2 + \frac{P}{\omega}$
2. En régime permanent : $C + \lambda\omega^2 = \frac{P}{\omega}$. Avec les valeurs proposées, en les combinant, on trouve $\lambda = \frac{1}{1000\pi^3} = 3,2 \times 10^{-5} \text{ USI}$ et ensuite $C = \frac{11}{10\pi} = 0,35 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 3.



Il faut environ 2,8 s pour atteindre les $850 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Réponses de l'exercice M8.4 : Oscillations d'un cylindre [**]

1. $I_A = \frac{3}{2}ma^2$
 2. $\ddot{\theta} + \frac{2g}{3a} \sin \theta = 0$.
- Pour les petites oscillations : $T = 2\pi\sqrt{\frac{3a}{2g}}$.
3. On part de $E_m = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = cst$

Réponses de l'exercice M8.5 : Oscillation d'une tige autour d'un axe mal graissé [**]

1. $I\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{m\ell g}{2} \sin \theta = 0$
2. Par le théorème de la puissance mécanique : $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg\frac{\ell}{2} \cos \theta \right] = -k\dot{\theta}^2$ ce qui redonne la même équation.
3. $\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} = 6,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $T_0 = 0,9 \text{ s}$.

4. On matérialise l'enveloppe exponentielle, puis on trace la tangente à l'origine à cette enveloppe, qui coupe l'axe à environ $\tau = 1,5 \text{ s}$. On en déduit que $k = \frac{2m\ell^2}{3\tau} = 0,0037 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$

Réponses de l'exercice M8.6 : Équilibre d'une tige verticale soutenue par un ressort spiral [**]

1. Étude par le TMC

- $J\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta - k\theta$
- À l'équilibre : $mg\frac{L}{2}\sin\theta = k\theta$. Il est évident que $\theta = 0^\circ$ est une solution de cette équation.
- Pour de petits angles $J\ddot{\theta} + \left(k - \frac{mgL}{2}\right)\theta = 0$. Elle est stable si $k > k_c = \frac{mgL}{2} = 8,2 \times 10^{-3} \text{ USI}$

2. Étude par l'énergie

- $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$.
 - On résout $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$.
 - On regarde le signe de $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta + k$ en $\theta = 0^\circ$.
3. On utilise la dichotomie : on trouve $A(k = 0,8k_c, \theta_e) = 64,8^\circ$, $B(k = 0,6k_c, \theta_e) = 91,1^\circ$, et $C(k = 0,4k_c, \theta_e) = 121,8^\circ$,
4. Après linéarisation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{J} \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_e)} = \sqrt{\frac{k-mg\frac{L}{2}\cos\theta_e}{J}} = 6,26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $T_0 = 1,0 \text{ s}$

Réponses de l'exercice M8.7 : Étude de quelques balances [**]

1. Premier essai

- $(J + (m_1 + m_2)\ell^2)\ddot{\theta} = (m_2 - m_1)g\ell\cos\theta \approx (m_2 - m_1)g\ell$
- Si $m_1 > m_2$ alors $\theta = +\theta_{max}$; si $m_1 < m_2$ alors $\theta = -\theta_{max}$.
- Si $m_1 = m_2$ alors tous les angles sont position d'équilibre.

2. Ajout d'un contre-poids

- $(J + (m_1 + m_2 + \alpha^2 m_C)\ell^2)\ddot{\theta} + \alpha m_C g\ell\theta = (m_2 - m_1)g\ell$
- $\theta_{eq} = \frac{m_2 - m_1}{\alpha m_C}$. Cet angle ne vaut 0° que si $m_1 = m_2$.
- $m_2 = 500 \pm 4,5 \text{ g}$ soit $0,9\%$ d'écart.
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha m_C g\ell}{J + (m_1 + m_2 + \alpha^2 m_C)\ell^2}}$ d'où $T = 4,0 \text{ s}$

3. Frottements solides [***]

- Ce sont des lois de coulomb de frottements solides, mais pour la rotation.
- $(J + (m_1 + m_2 + \alpha^2 m_C)\ell^2)\ddot{\theta} + \alpha m_C g\ell\theta = (m_2 - m_1)g\ell + C$
- $m_1 = 254,5 \text{ g}$ et $C = 8,8 \text{ mN} \cdot \text{m}$

Réponses de l'exercice M8.8 : Grue portuaire [**]

- $T = \frac{5mg}{3\tan(\theta)} = 56 \text{ kN}$
- $C = 640 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Réponses de l'exercice M8.9 : Entraînement d'un disque par une courroie [***]

- $\omega_1 = \frac{R_2}{R_1}\omega_1$.
- $E_c = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)R_2^2\omega_2^2$
- $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)R_2^2\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mathcal{P} - \lambda\omega_2^2$
- En régime permanent : $\mathcal{P} = \lambda(\omega_2^{lim})^2$ donc $\lambda = 1,1 \times 10^{-5} \text{ USI}$.
- $\omega_2(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{\lambda}(1 - e^{-t/\tau})} = \omega_2^{lim}\sqrt{1 - e^{-t/\tau}}$ avec $\tau = \frac{(m_1 + m_2)R_2^2}{4\lambda} = 28 \text{ ms}$.

Réponses de l'exercice M8.10 : Ascenseur à souris [***]

1. Quand le fil s'enroule de $R.d\theta$ la souris monte de $dz = R.d\theta$.

2. Étude du mouvement à l'aide du TMC

(a) $\mathcal{L}(S) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R\dot{z}$
 (b) $\ddot{z} = -\frac{mg}{\frac{M}{2}+m} = -3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

(c) Théorème du centre de masse à la souris : $T = m(g + \ddot{z}) = 0,33 \text{ N}$

3. Étude du mouvement à l'aide de l'énergie

(a) $E_m = \frac{1}{4}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$
 (b) $\ddot{z} = -\frac{mg}{\frac{M}{2}+m} = -3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

4. $\left(\frac{1}{2}M + m\right)R\ddot{z} = -mgR + \Gamma$ donc $\Gamma = 0,029 \text{ N} \cdot \text{m}$

5. $\mathcal{P} = \Gamma \frac{\dot{z}}{R} + mg\dot{z} = 0,05 \text{ W}$

Réponses de l'exercice M8.11 : Pendule ballistique [***]

1. Entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$, le système n'est soumis qu'à des actions extérieures dont le moment par rapport à l'axe est nul.

2. $\dot{\theta}(0^+) = \frac{mv_0}{(M+m)l}$

3. Après, le système est conservatif; on en tire que $v_0 = \sqrt{2 \frac{(m+M)^2}{m^2} gl(1 - \cos \theta_{max})}$

4. $v_0 = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

5. On a perdu 99,78 % de l'énergie initiale.

Réponses de l'exercice M8.12 : Couples exercés par les forces de frottements [****]

1. Frottements secs

(a) $dS = dr.r.d\theta$

(b) $\vec{N} = -m\vec{g}$ donc $d\vec{N} = mg \frac{r.dr.d\theta}{\pi R^2} \vec{e}_z$ avec \vec{e}_z vertical vers le haut.

(c) $d\mathcal{M} = -r.dT = fmg \frac{r^2.dr.d\theta}{\pi R^2}$

(d) Par intégration : $\mathcal{M} = \frac{2fmgR}{3}$

(e) $\dot{\omega} = -\frac{4fg}{3R}$ donc $\omega(t) = \omega(0) - \frac{4fg}{3R}t$: le disque va s'arrêter de tourner au bout d'un temps $t = \frac{3R\omega(0)}{4fg}$.

2. Frottements fluides

(a) $\vec{v}(P) = r\omega\vec{e}_\theta$

(b) $d\mathcal{M} = -\lambda\omega r^3.dr.d\theta$

(c) Après intégration : $\mathcal{M} = -\frac{\pi\lambda R^4}{2}\omega$

(d) On trouve $\dot{\omega} + \frac{\pi\lambda R^2}{m}\omega = 0$ soit $\omega(t) = \omega(0) \exp\left[-\frac{\pi\lambda R^2}{m}t\right]$. Dans ce modèle le disque ne s'arrête jamais de tourner.

Réponses de l'exercice M8.13 : Courbe d'accélération [**]

1. $\omega = 31,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

2. $d = 18 \text{ cm}$

3. $v = 9,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M8.14 : Calculs de moments d'inertie [***]

1. $I_{Oz} = \frac{m\ell^2}{12}$.

2. $I_{Az} = \frac{m\ell^2}{3}$.

3. $I_{Oz} = \iiint_{cylindre} r^2 dm = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h \frac{m}{\pi R^2 h} r^3 . dr . d\theta . dz = \frac{mR^2}{2}$

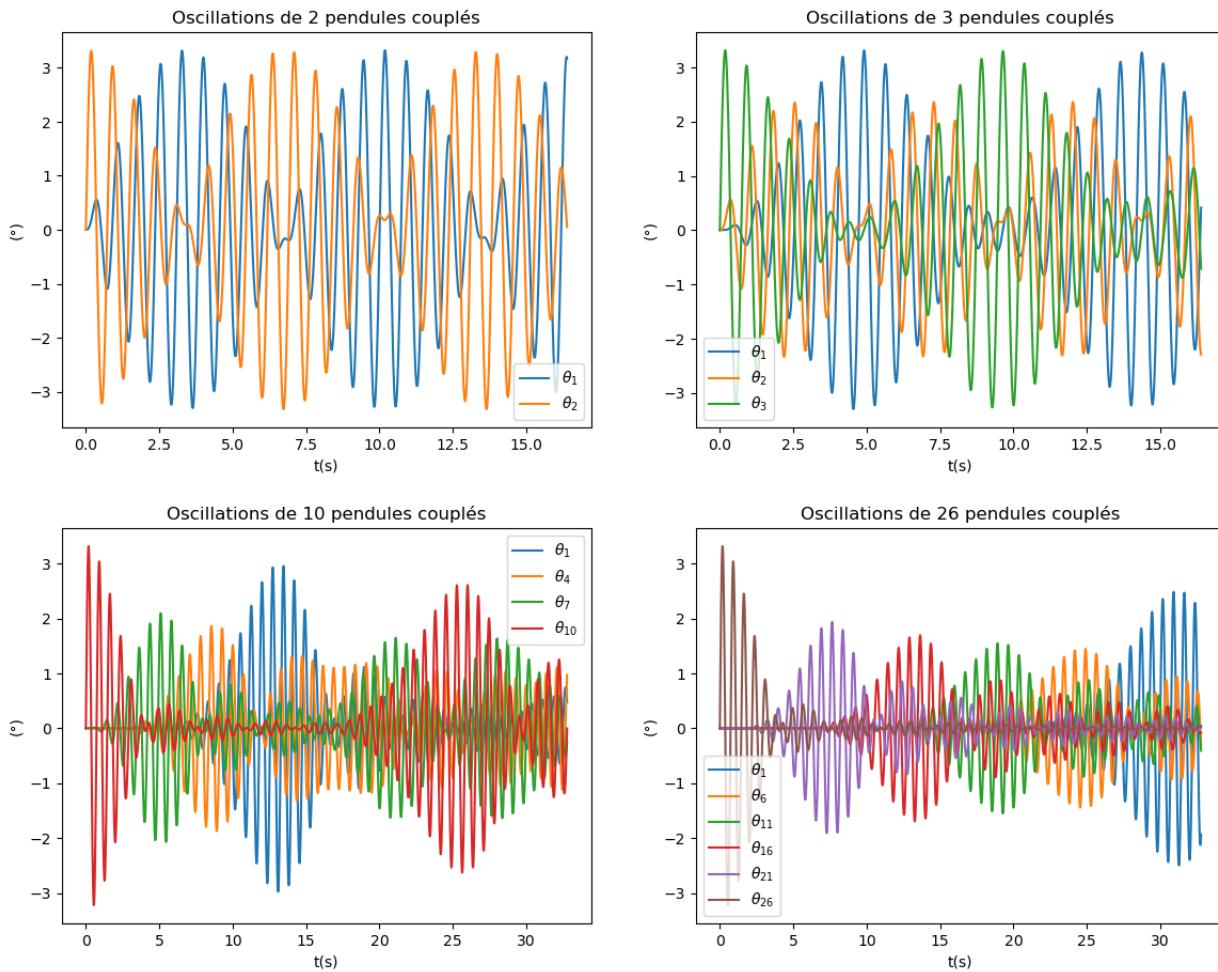
Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Pendules couplés

Pour un pendule sans fil de torsion : $J\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_1$ ce qui donne aux petits angles $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mgl}}$.

Pour deux pendules on obtient $\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_1 - 2k\theta_1 + k\theta_2 \\ J\ddot{\theta}_2 = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_2 - 2k\theta_2 + k\theta_1 \end{cases}$

Pour N pendules on obtient $\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_1 - 2k\theta_1 + k\theta_2 \\ J\ddot{\theta}_i = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_i - 2k\theta_i + k\theta_{i+1} + k\theta_{i-1} \text{ pour } 1 < i < N \\ J\ddot{\theta}_N = -mg\frac{\ell}{2} \sin \theta_N - 2k\theta_N + k\theta_{N-1} \end{cases}$



On voit que l'oscillation initiale traverse le système de pendules, puis revient : on a des ondes qui se propagent en se déformant.

Mouvements à force centrale

Cours

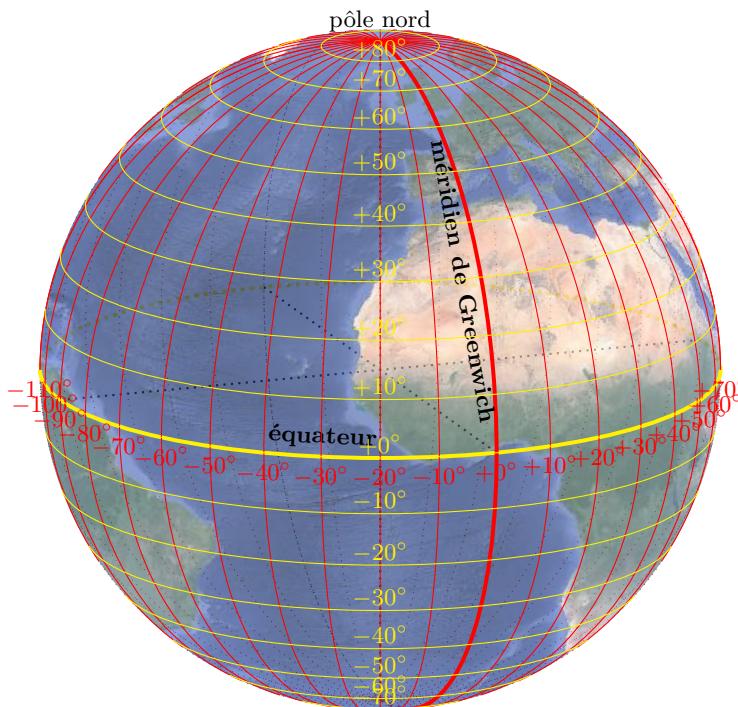
Ce chapitre commence une série de 2 chapitres ayant pour but d'étudier les mouvements des planètes autour d'une étoile. L'étoile, c'est le centre autour duquel se fait le mouvement. Il faut donc repérer la position des la planète par rapport à un point central fixe. Les coordonnées cartésiennes ne sont pas adaptées pour cela ; les coordonnées cylindriques non plus, car elles nécessitent un axe particulier. Nous allons donc introduire les coordonnées sphériques, qui sont plus adaptées. Elles sont aussi plus compliquées. Mais la bonne nouvelle, c'est qu'on ne va que très peu s'en servir.

Ensuite, nous allons nous préparer à l'étude des mouvements autour d'un point central. Nous l'appliquerons dans le prochain chapitre à l'étude des planètes en orbite autour d'une étoile, mais pour le moment, nous ferons l'étude générale de n'importe quel mouvement d'un point attiré (ou repoussé) par un point central.

M9.A. Coordonnées sphériques

A.1. Repérage d'un point à la surface de la Terre

Avant de comprendre les coordonnées sphériques, il faut faire un détour du côté du repérage d'un point à la surface de la Terre. On suppose que la Terre est une sphère (eh oui, la Terre n'est pas ronde, elle est approximativement sphérique !) ; en haut, le pôle nord ; en bas, le pôle sud (figure M9.1).



les méridiens (rouges) repèrent la **longitude**
 les parallèles (jaunes) repèrent la **latitude**

FIGURE M9.1 – Repérage d'un point à la surface de la Terre : parallèles et méridiens.

Pour repérer si un point est plutôt près du pôle nord ou du pôle sud, on découpe (par la pensée) la Terre en tranches horizontales ; les traits de coupe s'appellent des parallèles (en jaune sur le schéma). Ces parallèles sont numérotés ; celui à mi-chemin entre les deux pôles s'appelle l'équateur, il correspond à la **latitude** 0° . Ensuite, les autres parallèles sont repérés par l'angle dont il faut monter (ou descendre) depuis l'équateur pour les atteindre. Par exemple, Saint-Étienne est proche du parallèle de latitude $+45^\circ$, donc à mi-chemin entre l'équateur et le pôle nord. Le pôle nord a pour latitude $+90^\circ$, le pôle sud a pour latitude -90° .

Il faut aussi repérer si un point est plutôt à l'est ou à l'ouest. Pour cela, on découpe la Terre en quartiers, comme un melon. Chaque trait de coupe s'appelle un méridien (en rouge sur le schéma). On a choisi un méridien particulier :

au départ, celui de Paris, puis finalement celui de Greenwich¹. Le méridien de Greenwich est donc celui qui a la **longitude** 0° . Les autres méridiens sont repérés par l'angle dont il faut tourner à partit du méridien de Greenwich pour les atteindre : elle est positive pour les méridiens à l'est de celui de Greenwich, et négative pour ceux à l'ouest.

Chaque point de la Terre est situé à l'intersection d'un seul parallèle avec un seul méridien. On repère donc sa position par une latitude et une longitude. La figure M9.2 quelques exemples. Les angles dessinés en rouge correspondent à la rotation de la longitude, ceux en jaune à la rotation de la latitude.

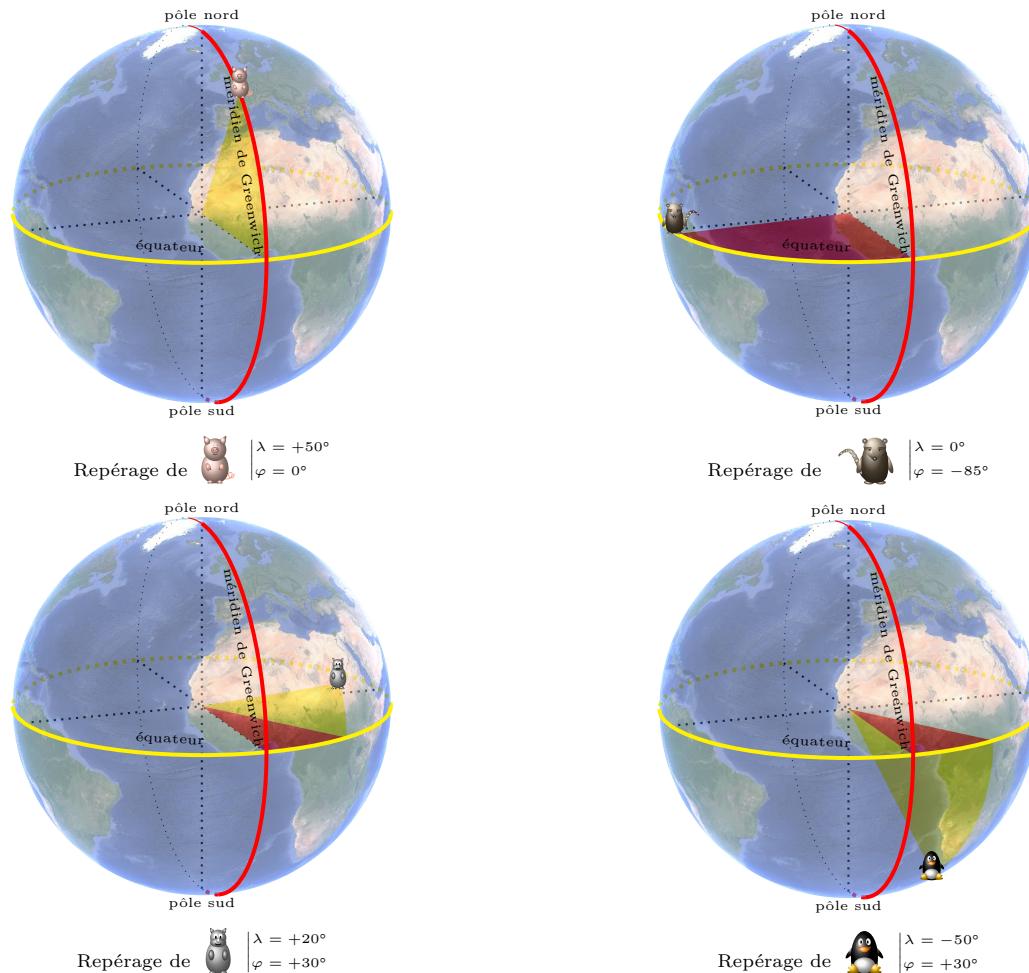


FIGURE M9.2 – Exemple de repérage de quelques-uns de nos amis.

Si vous voulez creuser la question, ou bien mieux comprendre ces notions à l'aide de vidéos, regardez le premier chapitre de la série [Dimensions](#) faite par des chercheurs de l'ENS Lyon et de l'université d'Anvers.

A.2. Coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques vont utiliser le même principe pour repérer un point dans l'espace, avec deux différences :

- au lieu de prendre la latitude variant entre -90° et $+90^\circ$, on a préféré repérer les angles depuis le pôle nord, de manière à avoir un angle compris entre 0° et 180° qu'on appelle la *colatitude*
- tout point à la surface de la Terre est situé à une distance du centre égale au rayon de la Terre ; mais dans le cas général, cette distance peut varier, il faudra donc l'indiquer.

Pour repérer un point à la surface de la Terre, il a fallu choisir des axes particuliers : l'axe des pôles, puis le méridien de Greenwich. De même, pour repérer un point en coordonnées sphériques, il faut avoir défini au préalable un repère *Oxyz* orthonormé qui servira à mesurer les angles.

1. En échange de la promesse de la part des anglais qu'ils adopteraient le système métrique. Mais ils n'ont jamais dit quand...

Définition : Coordonnées sphériques d'un point

On repère un point M dans l'espace par trois coordonnées (r, θ, φ) représentant le rayon, la colatitude et la longitude, représentées sur la figure M9.3 :

- le rayon est la distance entre le centre et le point : $r = OM$, appartenant à \mathbb{R}^+
- la colatitude est l'angle entre l'axe Oz et le vecteur position : $\theta = (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM})$, appartenant à $[0^\circ : 180^\circ]$
- la longitude est l'angle entre le plan Oxz et le plan OMz en rouge sur la figure : en notant H le projeté orthogonal de M sur le plan xOy on peut définir $\varphi = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH})$, appartenant à $[0^\circ : 360^\circ]$

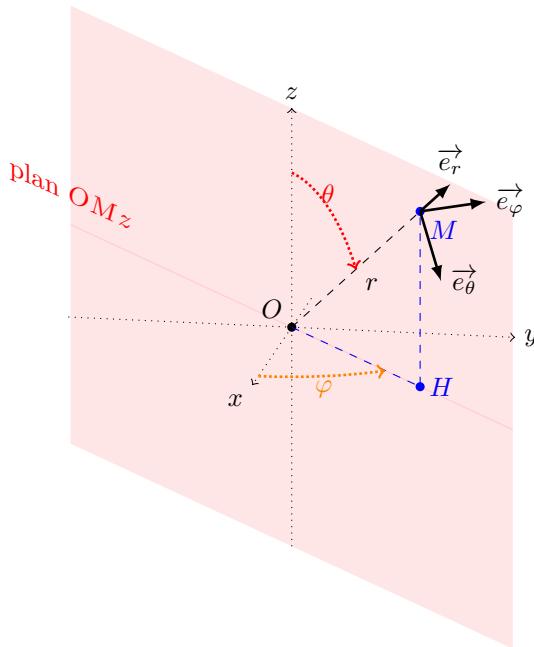


FIGURE M9.3 – Coordonnées et base sphériques.

Pour pouvoir repérer des vecteurs, on introduit alors la base sphérique.

Définition : Base sphérique

En tout point M , on introduit la base sphérique locale $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ définie ainsi :

- $\overrightarrow{e_r}$ est le vecteur unitaire colinéaire au vecteur position \overrightarrow{OM} ; à la surface de la Terre, c'est le vecteur vertical vers le haut
- $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ dans le plan OMz ; à la surface de la Terre, c'est le vecteur horizontal vers le sud
- $\overrightarrow{e_\varphi}$ est le vecteur unitaire qui est perpendiculaire au plan OMz ; à la surface de la Terre, c'est le vecteur horizontal vers l'est

Évidemment, sur le schéma de la figure M9.3, on n'y voit rien. Donc pour comprendre quelque chose, il faut dessiner des schémas en projection dans certains plans (figure M9.4). Prenez du temps pour comprendre le lien entre ces deux figures.

Il devient alors possible d'établir quelques formules importantes des coordonnées sphériques :

Propriété : Lien entre les coordonnées sphériques et cartésiennes

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (M9.1)$$

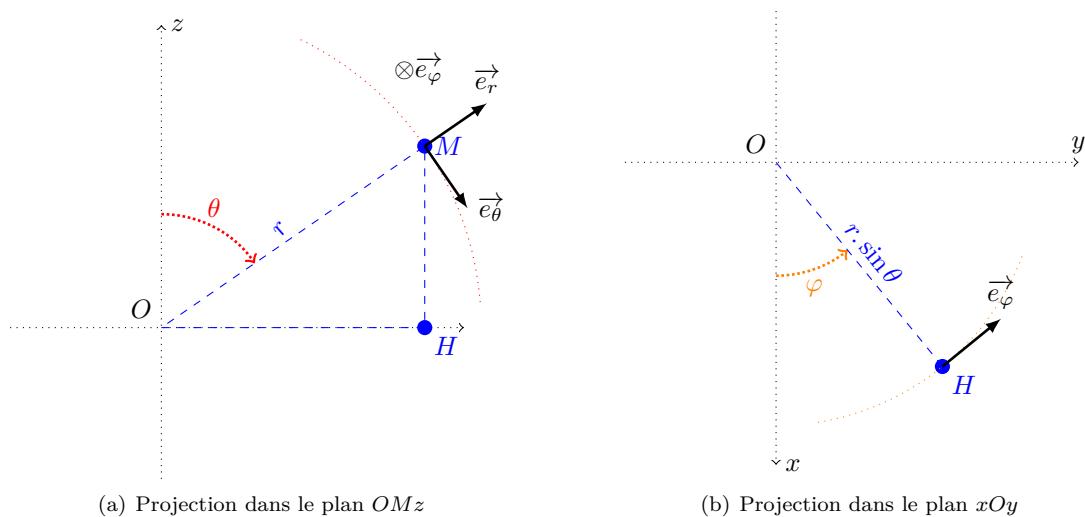


FIGURE M9.4 – Projection du schéma des coordonnées sphériques.

Démonstration

$z = r \cos \theta$ se trouve à partir de la figure en projection dans le plan OMz ; cette même figure permet de trouver aussi $OH = r \cdot \sin \theta$. À l'aide de l'autre figure, on établit alors que $x = OH \cdot \cos \varphi$ et $y = OH \cdot \sin \varphi$.

Propriété : Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad (\text{M9.2})$$

Démonstration

En effet, pour aller de O à M , il suffit de se déplacer dans la direction du vecteur \vec{e}_r sur une distance $OM = r$

Remarque : Attention ! pas de termes suivant \vec{e}_θ ni suivant \vec{e}_φ pour la position !

Pour obtenir la vitesse, il suffit de dériver. Il suffit...en théorie, car le vecteur \vec{e}_r n'étant pas fixe, sa dérivée va être compliquée. On peut se contenter d'établir la vitesse en exprimant d'abord le vecteur petit déplacement.

Propriété : Petit déplacement

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{M9.3})$$

Démonstration

Soit $M(r, \theta, \varphi)$ un point.

Si r varie de dr sans que θ ni φ ne varient, alors, sur la figure M9.4 dans le plan OMz , on imagine M s'éloignant de O en ligne droite : il se déplace de $dr \cdot \vec{e}_r$.

Si θ varie de $d\theta$ sans que r ni φ ne varient, alors, sur la figure M9.4 dans le plan OMz , on imagine M décrivant un arc de cercle de rayon r (en pointillés rouges) et d'angle $d\theta$, donc de longueur $r \cdot d\theta$; ce mouvement se fait dans la direction perpendiculaire à \overrightarrow{OM} , donc selon \vec{e}_θ . Le point se déplace donc de $r \cdot d\theta \vec{e}_\theta$.

Si φ varie de $d\varphi$ sans que r ni θ ne varient, alors, sur la figure M9.4 dans le plan xOy , on imagine M décrivant un arc de cercle de rayon $OH = r \sin \theta$ (en pointillés oranges) et d'angle $d\varphi$, donc de longueur $r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi$; ce mouvement se fait dans la direction perpendiculaire à \overrightarrow{OH} , donc selon \vec{e}_φ . Le point se déplace donc de $r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \vec{e}_\varphi$.

Pour avoir le petit déplacement complet, on ajoute les 3 termes.

Propriété : Vitesse

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{M9.4})$$

Démonstration

Il suffit de diviser le petit déplacement :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

On s'arrêtera là ; l'expression de l'accélération est très difficile à établir et impossible à retenir :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\theta + (r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2 \cos \theta r \dot{\theta}\dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

Intéressant, n'est-ce pas...

A.3. Résumé des différents systèmes de coordonnées

Toutes les cases du tableau ci-dessous sont à connaître par cœur, sauf celles entre crochets.

Coordonnées	Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
Variables	x, y, z	r, θ, z	r, θ, φ
Coord. cartésiennes	—	$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
Vecteurs de base	$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ base fixe	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ base variable $\begin{cases} \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0} \end{cases}$	$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ base variable
Position	$x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$	$r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$	$r \vec{e}_r$
Petit déplacement	$dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$	$dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$	$dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$
Vitesse	$\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$	$\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$	$\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$
Accélération	$\ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$	$\left[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z \right]$	—
Gradient	$\frac{\partial A}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z$	$\left[\frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{e}_z \right]$	$\left[\frac{\partial A}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right]$

TABLEAU M9.1 – Résumé des différents systèmes de coordonnées

M9.B. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Pour étudier les rotations autour d'un axe, nous avons introduit le théorème du moment cinétique autour d'un axe fixe. Ici, nous allons étudier la rotation autour d'un point, pas d'un axe, donc il faut introduire un outil un tout petit peu différent.

! Les notions de ce paragraphe (moment cinétique par rapport à un point, moment d'une force par rapport à un point,...) ressemblent beaucoup à celles définies par rapport à un axe fixe. Mais dans le cas d'un point fixe, les grandeurs manipulées sont **des vecteurs** et non plus des scalaires.

B.1. TMC pour un point matériel

Définition : Moment cinétique d'un point par rapport à un point fixe

Soit M un point matériel de masse m de vitesse \vec{v} . Le moment cinétique de M par rapport à un point O fixe est défini par $\vec{\mathcal{L}}^O(M) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$

Remarque : Que signifie ce vecteur ? Par rapport à un axe, le moment cinétique indique la quantité de rotation du point ; par rapport à un point, la norme du moment cinétique indique toujours la quantité de rotation du point, et sa direction indique l'axe autour duquel il est en train de tourner à l'instant t .

Définition : Moment d'une force par rapport à un point fixe

Le moment d'une force par rapport à un point O fixe est défini par $\vec{\mathcal{M}}_F^O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

Remarque : La direction du vecteur moment indique l'axe autour duquel la force cherche à faire tourner le point.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point fixe O , est égale à la somme des moments des forces qui s'exercent dessus, pris par rapport à ce même point fixe O :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}^O(M)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_i}^O \quad (M9.5)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}^O(M)}{dt} &= m \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})}{dt} = m \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a} \text{ car } O \text{ est fixe} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \vec{F}_i \text{ par le PFD} \\ &= \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_i}^O \end{aligned}$$

B.2. TMC pour un système

Définition : Moment cinétique d'un système par rapport à un point

Le moment cinétique d'un système est la somme des moments cinétiques des points qui le constituent : $\vec{\mathcal{L}}^O(S) = \sum_i \vec{\mathcal{L}}^O(M_i)$

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système par rapport à un point fixe O , est égale à la somme des moments des forces **extérieures** qui s'exercent dessus, pris par rapport à ce même point fixe O :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}^O(S)}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{i,ext}}^O \quad (M9.6)$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}^O(S)}{dt} &= \sum_i \frac{d\overrightarrow{\mathcal{L}}^O(M_i)}{dt} \\ &= \sum_i \sum_k \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_k}^O \text{ par le TMC appliqué à chaque point} \\ &= \sum_i \left[\sum_k \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{k,ext}}^O + \sum_{j \neq i} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{M_j \rightarrow M_i}}^O \right] \\ &= \sum_i \sum_k \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{k,ext}}^O + \sum_{\text{paire}(i,j)} \left[\overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{M_j \rightarrow M_i}}^O + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{F_{M_i \rightarrow M_j}}^O \right] \end{aligned}$$

Or $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{M_j \rightarrow M_i}}^O + \vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}_{M_i \rightarrow M_j}}^O = \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{M_j \rightarrow M_i}} + \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{F_{M_i \rightarrow M_j}}$ (il faut faire attention, les deux forces ne s'appliquent pas au même point). Par la première partie de la troisième loi de Newton, cela donne $(\overrightarrow{OM_j} - \overrightarrow{OM_i}) \wedge \overrightarrow{F_{M_i \rightarrow M_j}}$. La parenthèse vaut $\overrightarrow{M_i M_j}$, qui est parallèle à la force d'après la seconde partie de la troisième loi de Newton. La somme de ces deux moments est donc nulle, et il en va de même pour toutes les paires de forces intérieures.

Méthode : TMC par rapport à un axe ou à un point ?

Faut-il appliquer le TMC par rapport à un point fixe ou par rapport à un axe fixe, pour résoudre un problème ? Pour un point matériel (par exemple le pendule simple), c'est absolument pareil, il faut juste être rigoureux dans la rédaction (par rapport à un point, les moments sont des vecteurs ; par rapport à un axe, ce sont des scalaires). Pour un système de points, c'est la même chose. Pour un solide, par contre, il faut toujours appliquer le TMC par rapport à **un axe fixe**. En effet, par rapport à un axe, on a la relation simple $\mathcal{L} = I \cdot \omega$; mais par rapport à un point, la relation devient $\vec{\mathcal{L}} = \bar{I} \vec{\Omega}$ où $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation, et \bar{I} un tenseur d'ordre 2, c'est-à-dire une matrice. Évidemment, c'est hors programme.

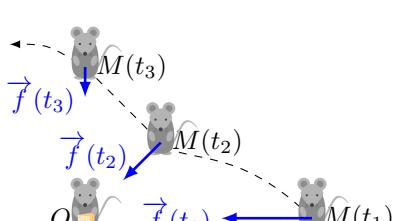
En pratique, mon conseil, c'est de ne jamais utiliser le TMC autour d'un point fixe en physique, sauf pour l'étude des mouvements à force centrale (section C.).

M9.C. Principe de l'étude d'un mouvement à force centrale conservative

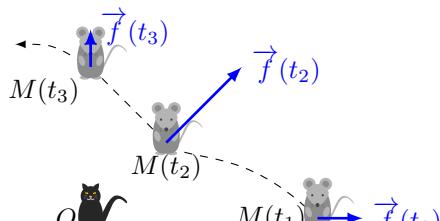
C.1. Description d'une force centrale

Définition : Force centrale

Une force \vec{f} qui s'applique à un point M est dite *centrale* s'il existe un point O fixe tel que, quelle que soit la position du point M , la force \vec{f} est parallèle à \overrightarrow{OM} (ou, de manière équivalente, la droite d'action de \vec{f} passe par O)



(a) Force centrale attractive



(b) Force centrale répulsive

FIGURE M9.5 – Exemples de forces centrales.

Par conséquent, une force centrale sera toujours, en coordonnées sphériques de centre O , parallèle à \vec{e}_r .

Propriété : Caractère conservatif d'une force centrale

Toute force centrale ne dépendant que de la position (ni de la vitesse, ni explicitement du temps) est保守的 (conservative).

Démonstration

On l'admet ; la démonstration de cette propriété est basée sur une loi qu'on verra plus tard : le second principe de la thermodynamique.

Soit $U(r)$ l'énergie potentielle associée à la force centrale \vec{f} . Alors $\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(U) = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$. Or \vec{f} est parallèle à \vec{e}_r , donc $\vec{\text{grad}}(U)$ aussi, donc $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ ce qui signifie que U ne dépend que de la variable r . On en déduit facilement qu'il en est de même pour la force :

Propriété : Forme générale d'une force centrale conservative

Une force centrale conservative s'écrit de manière générale sous la forme $\vec{f} = f(r)\vec{e}_r$; son énergie potentielle associée $U(r)$ ne dépend que de r ; elles sont reliées par la loi $f(r) = -\frac{dU}{dr}$.

Les forces centrales conservatives (indépendantes du temps) que l'on va rencontrer le plus souvent sont :

- la force de gravitation
- la force électrique entre deux charges
- la force d'un ressort

mais il y en a beaucoup d'autres.

Définition : Mouvement à force centrale conservative

On dit que le mouvement d'un point matériel M est un mouvement à force centrale conservative, si le point M n'est soumis qu'à une seule force, et que cette force est une force centrale conservative.

Remarque : Il est sous-entendu le plus souvent que la force est indépendante du temps...

C.2. Conservation du moment cinétique et conséquences

Pour le moment, nous allons établir le schéma d'étude d'un mouvement à force centrale conservative. Ces propriétés seront générales, bien que les mouvements des planètes autour d'une étoile en soient une des applications les plus courantes.

Dans la suite, M est un point matériel de masse m , soumis à une force centrale \vec{f} d'énergie potentielle U ; le centre est noté O , c'est un point fixe.

Propriété : Conservation du moment cinétique par rapport au centre

Le moment cinétique de M par rapport à O est constant : $\vec{\mathcal{L}}^O(M) = \vec{cst}$

Démonstration

Le TMC appliqué à M par rapport à O indique que $\frac{d\vec{\mathcal{L}}^O(M)}{dt} = \vec{M}_{\vec{f}}^O = \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0}$ puisque la force est parallèle à \vec{OM} .

Remarque : Si $\vec{\mathcal{L}}^O(M) = \vec{0}$ alors \vec{OM} et \vec{v} sont toujours colinéaires : le mouvement est alors selon une droite, comme par exemple un objet qu'on lache sans vitesse initiale et qui tombe en ligne droite vers le centre de la Terre. Ce cas étant peu intéressant, on supposera dans la suite que $\vec{\mathcal{L}}^O(M) \neq \vec{0}$.

Cette propriété fondamentale des mouvements à force centrale a deux conséquences importantes.

Propriété : Planéité du mouvement

M a un mouvement plan ; il se déplace dans le plan passant par O et orthogonal au moment cinétique (cf. figure M9.6).

Démonstration

Il existe deux justifications possibles de ce résultat.

Justification sans coordonnées : par définition, $\vec{\mathcal{L}}^O(M) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}$. Par propriété du produit vectoriel, \vec{OM} est orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}^O(M)$; donc M appartient au plan perpendiculaire à $\vec{\mathcal{L}}^O(M)$ et contenant O . Comme O est fixe et $\vec{\mathcal{L}}^O(M)$ constant, ce plan est un plan fixe, dans lequel se déplace le point M .

Justification avec coordonnées : on va repérer le point M en coordonnées cylindriques en prenant O comme origine et $\vec{e}_z \parallel \vec{\mathcal{L}}^O(M)$ (ainsi \vec{e}_z est constant). On peut alors faire l'étude cinématique : $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$. Or par propriété du produit vectoriel, \vec{OM} est orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}^O(M)$ donc à \vec{e}_z ; cela nécessite $z = 0$: le point se déplace donc dans le plan $z = 0$, c'est-à-dire le plan orthogonal au moment cinétique et contenant O .

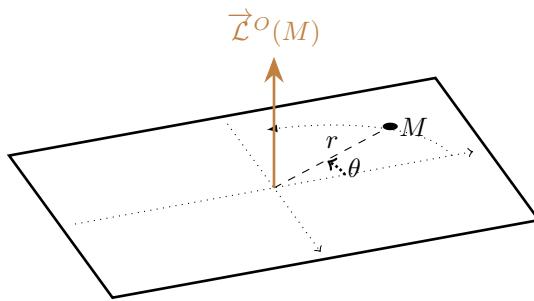


FIGURE M9.6 – Schéma du mouvement.

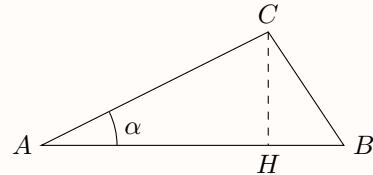
Pour la suite, on repèrera donc le point M en coordonnées cylindriques avec \vec{e}_z le vecteur unitaire selon $\vec{\mathcal{L}}^O(M)$.

Propriété : Loi des aires

Le rayon-vecteur \overrightarrow{OM} , au cours du mouvement, balaye des aires égales en des temps égaux. Plus précisément, en un temps Δt , il balaye une aire $\mathcal{A} = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}^O(M)\|}{2m} \Delta t$

Un peu de maths : Aire d'un triangle

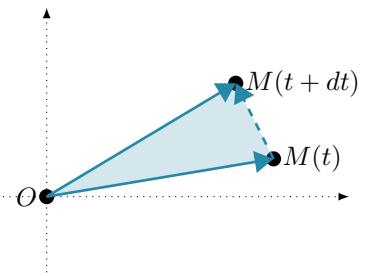
Soit un triangle ABC , et H le pied de la hauteur issue de C . Soit α l'angle en A . Alors l'aire du triangle vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} AB \times CH = \frac{1}{2} AB \times AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$



L'aire d'un triangle est donc égale à la moitié de la norme du produit vectoriel de deux de ses côtés, n'importe lesquels.

Démonstration

Faisons un schéma de M aux instants t et $t + dt$. Le rayon-vecteur a balayé le triangle rouge en une durée dt . Grâce à la formule magique établie ci-dessus pour l'aire d'un triangle, on peut écrire que $d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM(t)} \wedge \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OM(t)} \wedge \vec{v} dt\|$. Or le produit vectoriel est égal, à un facteur m près, au moment cinétique de M . On a donc $d\mathcal{A} = \frac{1}{2m} \|\vec{\mathcal{L}}^O(M)\| dt$. On peut alors intégrer entre t et $t + \Delta t$ pour retrouver la propriété énoncée.



Cette loi des aires rejoint la bien connue **deuxième loi de Képler**. Ce qu'on a montré ici, c'est que cette loi est vraie pour tout mouvement à force centrale (contrairement à la troisième).

On voit apparaître dans cette loi le rapport $\frac{\|\vec{\mathcal{L}}^O(M)\|}{m}$; ce rapport va être très utile, on va lui donner un nom.

Définition : Constante des aires

On note $C = \frac{\vec{\mathcal{L}}^O(M) \cdot \vec{e}_z}{m}$ la *constante des aires*; en une durée Δt , le rayon-vecteur balaye une aire $\mathcal{A} = \frac{|C|}{2} \Delta t$.

Remarque : La définition $C = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}^O(M)\|}{m}$ est légèrement fausse, car on omet alors le signe de cette constante, qui indique pourtant le sens de rotation.

Propriété : Expression de la constante des aires

$$C = r^2 \dot{\theta} \quad (\text{M9.7})$$

Démonstration

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \text{ et } \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ donc } \vec{\mathcal{L}}^O(M) = m.r\vec{e}_r \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

C.3. Conservation de l'énergie et conséquences

Nous avons utilisé jusqu'au bout la conservation du moment cinétique, dû au fait que la force est centrale. Mais elle est aussi conservative : le système est donc conservatif, on peut exprimer son énergie mécanique.

Propriété : Expression de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique de M peut s'écrire de deux façons :

$$* E_m = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r) \text{ où } U(r) \text{ est l'énergie potentielle de } M$$

$$* E_m = \frac{1}{2}mr^2 + E_{p,eff}(r) \text{ où } E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + U(r) \text{ est l'énergie potentielle effective de } M.$$

Démonstration

On a établi que $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Si on y ajoute l'énergie potentielle $U(r)$ de la force, on trouve que l'énergie mécanique du point s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = cst$.

Cette énergie dépend de r et de θ ; on sait mieux utiliser les énergies mécaniques lorsqu'elles ne dépendent que d'une seule variable. Or ici, on sait que $C = r^2\dot{\theta} = cst$ donc $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$. On en déduit que $\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mr^2\frac{C^2}{r^4} = \frac{mC^2}{2r^2}$.

Qu'est-ce que cette énergie potentielle effective ? Un artifice mathématique, permettant de ramener l'étude du mouvement radial (selon r) à l'étude d'un point de masse m dans une énergie potentielle $E_{p,eff}(r)$ à une seule dimension. En effet, du point de vue radial, le mouvement est soumis à deux effets :

- la force, associée à $U(r)$, qui attire M vers le centre ou au contraire le repousse
- la conservation de $C = r^2\dot{\theta}$ qui implique que, lorsque le point s'approche trop du centre, il est obligé d'augmenter $\dot{\theta}$ (donc de tourner plus vite autour du centre), ce qui l'oblige à transférer de l'énergie sous forme d'énergie cinétique, ce qui lui laisse moins d'énergie disponible pour le reste.

Méthode : Étude d'un mouvement à force centrale conservative

Il faut absolument connaître les calculs précédents, qui correspondent toujours aux mêmes questions dans les problèmes sur les mouvements à force centrale conservative :

- démonstration de la conservation du moment cinétique
- justification de la planéité du mouvement
- justification de la loi des aires
- étude cinématique, et expression de la constante des aires
- expression de l'énergie potentielle effective et de l'énergie mécanique

Ensuite, tout dépend de ce qu'on vaut faire. Parfois, on peut vouloir résoudre numériquement le mouvement. Dans ce cas-là, on procède ainsi :

- on dérive l'expression $E_m = \frac{1}{2}mr^2 + E_{p,eff}(r) = cst$ par rapport au temps, de manière à obtenir une équation différentielle d'ordre 2 portant sur l'inconnue r
- on résout cette ED par une méthode d'Euler ou par `odeint`
- on en déduit que $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ qui est une équation différentielle d'ordre 1 qu'on résout
- on trace alors la courbe $r(\theta)$ en coordonnées polaires.

La résolution de l'équation d'ordre 2 en r et de celle d'ordre 1 en θ peut se faire d'un coup avec `odeint`.

D'autres fois, on va chercher une analyse qualitative du mouvement : borné ou pas, périodique, ... Pour cela, il faut tracer le graphe de $E_{p,eff}(r)$ pour voir s'il y a des barrières de potentiel, si le mouvement est borné ou non,...

Ainsi, la figure M9.7 montre une simulation de mouvement dans une énergie potentielle $U(r) = A.r^3$ avec A une constante. On observe une trajectoire non-périodique mais bornée, avec le rayon qui oscille entre deux valeurs, ce qui est en accord avec la courbe d'énergie potentielle effective tracée à gauche.

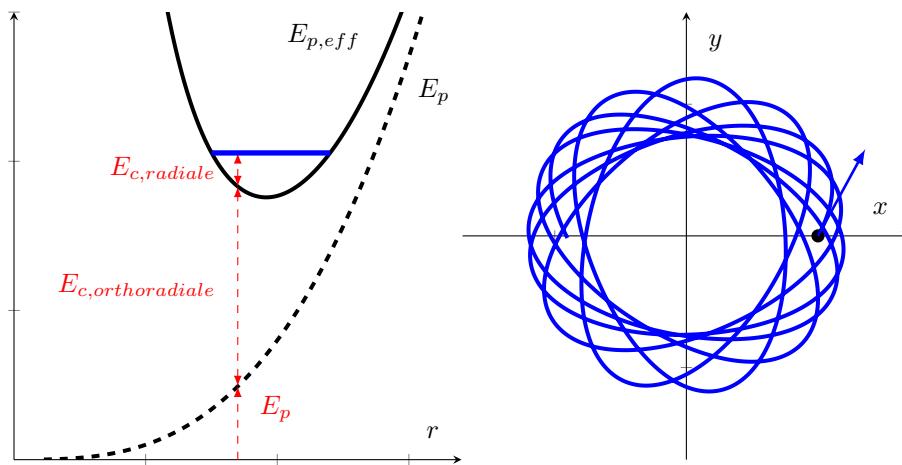


FIGURE M9.7 – Exemple de mouvement sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^3 ; la courbe, non périodique, s'inscrit entre deux cercles dont les rayons correspondent aux solutions de l'équation $E_{p,eff}(r) = E_m$.

Mais en fait l'analyse n'est pas toujours simple, car $E_{p,eff}(r)$ dépend de C ...qui dépend des conditions initiales.

La figure M9.8 montre un cas simple. On y simule la trajectoire d'une masse m dans une énergie potentielle $U(r) = A \cdot r^2$, avec différentes conditions initiales correspondant à changer l'angle initial de lancement, mais en gardant la même constante de aires². L'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mv^2(0) + E_{p,eff}(r(0))$ est donc différente, mais la courbe d'énergie potentielle effective est la même, puisqu'elle dépend de C . On constate alors que, lors du mouvement, le rayon reste borné entre deux valeurs, mais ces valeurs sont différentes suivant les conditions initiales car l'énergie mécanique n'est pas la même. Cette oscillation du rayon entre deux valeurs s'accompagne d'une rotation : en effet, $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ ne s'annule jamais, donc le point tourne en permanence autour du centre.

Dans le cas particulier d'un ressort, le mouvement qui en résulte est périodique, mais ce n'est pas toujours le cas.

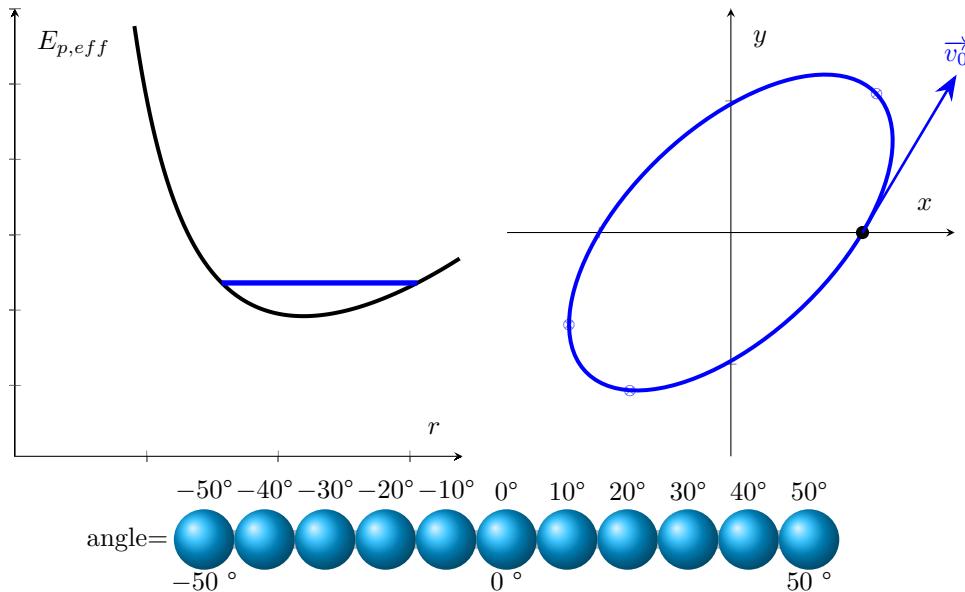


FIGURE M9.8 – Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2 , pour différents angles de vitesse initiale, à constante des aires constante.

Maintenant, la figure M9.9 montre la même simulation, mais la variation de l'angle initial se fait maintenant à norme de vitesse constante : ainsi, l'énergie mécanique est la même, mais la constante des aires change, donc l'énergie potentielle effective aussi. Ainsi, malgré la même énergie mécanique, les différents mouvements ont des bornes différentes.

2. Les courbes partent du même point (donc $r(0)$ est le même) et avec la même valeur de $\dot{\theta}(0)$, ce qui implique la même valeur de C ; par contre, r est différent.

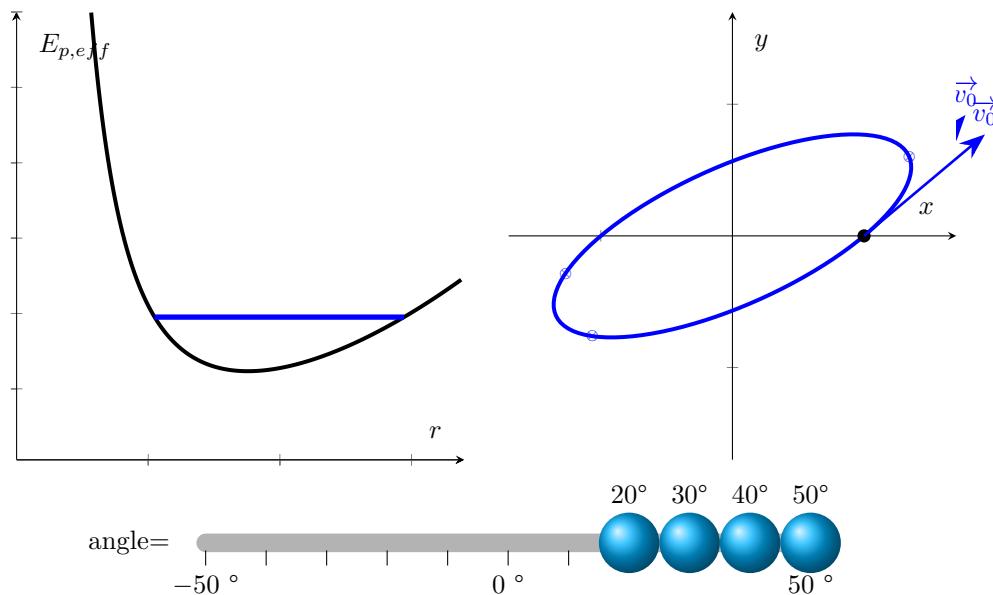


FIGURE M9.9 – Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2 , pour différents angles de vitesse initiale, à énergie cinétique constante .

Enfin, la figure M9.10 simule le même système avec un lancement selon une vitesse orthogonale à \overrightarrow{OM} mais de norme variable. Dans ces conditions, on peut espérer un mouvement circulaire, mais uniquement si le rayon initial correspond au minimum d'énergie potentielle effective; or cette énergie potentielle effective varie avec la constante des aires, donc avec la vitesse initiale. Les unités arbitraires de vitesse ont été choisies pour que le mouvement soit circulaire lorsque la vitesse initiale vaut 1.

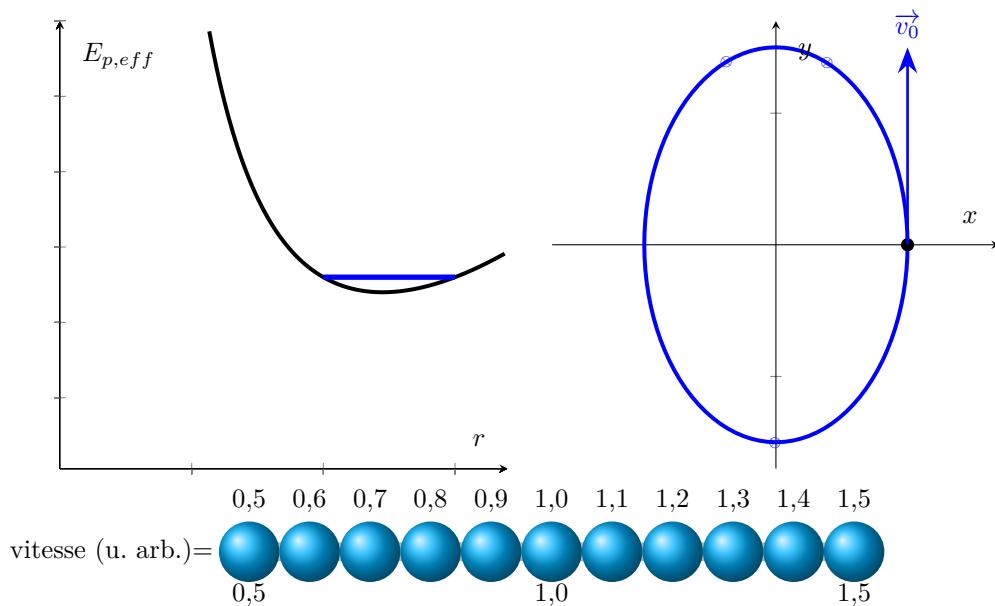


FIGURE M9.10 – Exemples de mouvements sous l'action d'une force centrale d'énergie proportionnelle à r^2 , pour différentes vitesses initiales orthogonales au rayon.

Il est difficile également d'imaginer ce qui se passe en présence de frottements, car au cours du mouvement, l'énergie mécanique diminue, mais en même temps C varie aussi (il diminue le plus souvent) donc la courbe de $E_{p,eff}$ se déforme au fur et à mesure du mouvement. L'analyse, même qualitative, est difficile.

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Coordonnées sphériques	
Système de coordonnées sphériques.	<p>Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire et vitesse dans le cas des coordonnées sphériques.</p> <p>Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel).</p>
Moment cinétique par rapport à un point	
<p>Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point.</p> <p>Moment d'une force par rapport à un point.</p> <p>Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.</p>	<p>Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.</p> <p>Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.</p> <p>Conservation du moment cinétique.</p> <p>Identifier les cas de conservation du moment cinétique.</p>
Mouvements à force centrale conservative	
<p>Point matériel soumis à un champ de force centrale. Conservation du moment cinétique et conséquences.</p> <p>Conservation de l'énergie mécanique.</p> <p>Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.</p>	<p>Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique.</p> <p>Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.</p> <p>Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.</p> <p>Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.</p> <p>Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.</p>

Mouvements à force centrale

Exercices

réponses page 774

Exercice M9.1 : Noyau de deutérium [*]

Un noyau de deutérium est constitué d'un proton P et d'un neutron N ayant approximativement la même masse $m = 1,7 \times 10^{-27}$ kg. Ils sont liés, dans le modèle classique, par une force centrale dérivant du potentiel de Yukawa :

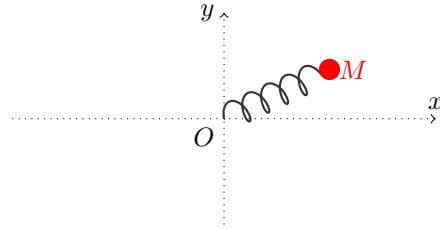
$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \text{ avec } \alpha = 6 \times 10^{15} \text{ m}^{-1} \text{ et } g \approx 1$$

On admet qu'on peut simplifier le problème en considérant que le proton P est fixe tandis que le neutron N se déplace comme s'il avait une masse $\frac{m}{2}$.

1. Montrez que le moment cinétique du neutron par rapport à P est constant. Déduez-en que le mouvement est plan.
2. On repère le neutron par ses coordonnées polaires dans le plan. Montrez que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante.
3. Exprimez l'énergie mécanique du neutron sous la forme $E_m = \frac{1}{4}m\dot{r}^2 + U_f(r)$ avec U_f à préciser.
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par r . Sait-on la résoudre ?
5. Sachant que, dans un noyau de deutérium au repos, le neutron se déplace selon un cercle à une distance $r_0 \approx 2,1$ fm du proton, déterminez la valeur de C , puis la vitesse du neutron. Commentez.

Exercice M9.2 : Lancement d'un ressort en rotation [**]

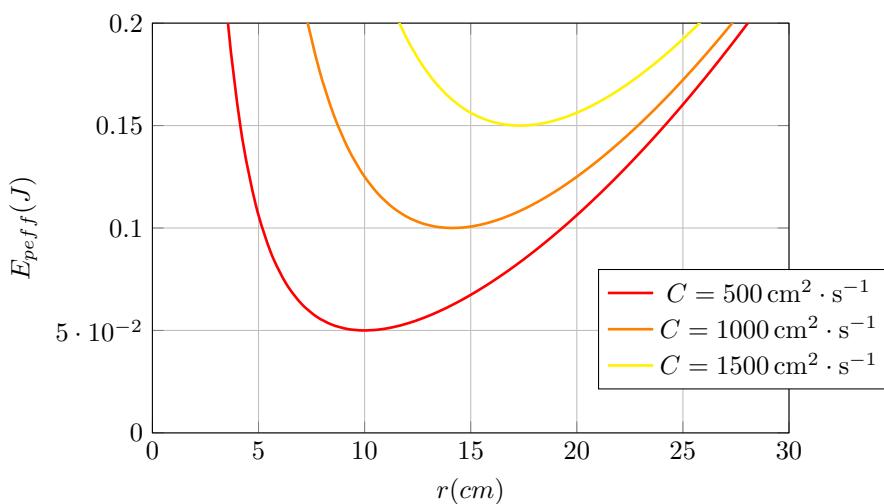
On s'intéresse à l'exercice abstrait où une masse est reliée au centre O par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Cette masse se déplace sans frottements dans le plan xOy .



1. Entraînez-vous à remontrer les résultats du cours :

- Conservation de $C = \frac{\|\vec{\ell}^O(M)\|}{m}$
- Expression de C en fonction de r et $\dot{\theta}$.
- Expression de l'énergie mécanique sous la forme $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{m}\dot{r}^2 + E_{peff}(r) = cst$ avec $E_{peff}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$; on rappellera l'expression de $E_p(r)$.

2. On trace ci-dessous des courbes de $E_{peff}(r)$ pour un objet de 200 g :



Déduire de la courbe orange la valeur de $E_p(14\text{ cm})$.

3. On lance l'objet depuis $r = 14\text{ cm}$ dans la direction \vec{e}_θ ; quelle vitesse doit-on lui communiquer pour obtenir un mouvement circulaire?

Indication : quelle valeur de C doit-il avoir?

4. On le lance maintenant depuis $r = 14\text{ cm}$ avec une vitesse de $107\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ selon \vec{e}_θ ; entre quelles valeurs le rayon va-t-il osciller?

Indication : calculez C et E_m .

5. On le lance depuis $r = 14\text{ cm}$ avec une vitesse de $71\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ faisant un angle de 60° avec la direction \vec{e}_θ ; entre quelles valeurs le rayon va-t-il osciller?

Exercice M9.3 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène [**]

On s'intéresse au modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène (proposé en 1894, avant la découverte du noyau atomique) : la charge positive de l'atome est répartie dans une grande sphère occupant la taille de l'atome; un électron de masse $m = 9,1 \times 10^{-31}\text{ kg}$ est libre de s'y déplacer, tout en étant soumis à une force $\vec{f} = -k\vec{OM}$ (k une constante positive) avec O le centre de la sphère, qui est fixe dans le référentiel d'étude galiléen,

- Montrer que la force \vec{f} est conservative, et exprimer son énergie potentielle $E_p(r)$.
- On admet les résultats vus en cours et que vous devez savoir remontrer : le mouvement de l'électron est plan, $C = r^2\dot{\theta} = cst$ et l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$. Tracez un tableau de variations de $E_{p,eff}(r)$ sur \mathbb{R}^{+*} . En déduire que le mouvement de l'électron est toujours borné. Exprimez le rayon de la trajectoire circulaire si C est fixé.
- Dans un atome d'hydrogène, l'état fondamental est circulaire de rayon $r_0 = 53\text{ pm}$ et possède un moment cinétique $L = \hbar = 1,05 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}$. En déduire :
 - la valeur de k .
 - la vitesse v_0 de l'électron sur sa trajectoire, puis la fréquence f_0 de rotation de l'électron; quelle est la longueur d'onde de la lumière à cette fréquence?
- Supposons que l'électron soit perturbé par un champ électrique; imaginons par exemple qu'à l'instant $t = 0$, il ait un rayon $r_0 = 53\text{ pm}$ et une vitesse $\vec{v}_1 = 3,0 \times 10^6 \vec{e}_\theta$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$).
 - Calculez numériquement sa constante des aires C et son énergie mécanique E_m .
 - En déduire l'équation à résoudre pour trouver les rayons minimum et maximum que va atteindre sa trajectoire.

Indication : que vaut \dot{r} lorsque le rayon est min/max?

 - Résoudre cette équation et trouvez r_{min} et r_{max} .

Exercice M9.4 : Formules de Binet [**]

Les formules de Binet sont des formules permettant de résoudre les mouvements à force centrale. Elles sont hors programme, mais les problèmes de concours vous demandent parfois de les montrer.

On considère un point matériel M de masse m soumis à une force centrale $f(r)\vec{e}_r$; on note O le centre.

- Justifiez que le moment cinétique \vec{L} du point M par rapport à O est constant. En déduire que le mouvement est plan.

- On pose l'axe \vec{e}_x tel que $\vec{L} = L\vec{e}_z$; on pose $C = \frac{L}{m}$.

On repère le point M par ses coordonnées cylindriques. Exprimez sa position \overrightarrow{OM} , sa vitesse \vec{v} , et la constante C en fonction de ces coordonnées.

- On pose $u = \frac{1}{r}$ considéré comme une fonction de l'angle θ ; on notera donc u' la dérivée $\frac{du}{d\theta}$.

Exprimez $\dot{\theta}$ en fonction de C et u . Montrez alors que $\dot{r} = -Cu'$; on utilisera le fait que $r = \frac{1}{u}$ et la loi des dérivées de fonctions composées : $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$.

En déduire l'expression de \vec{v} en fonction de C , u et u' .

- À partir de ces expressions, exprimez l'accélération \vec{a} de M et montrez qu'elle peut se mettre sous la forme $\vec{a} = -C^2u^2(u'' + u)\vec{e}_r$

5. Application au mouvement d'une planète

- O représente le soleil de masse m_O , et M une planète de masse m . Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $f(r)$.

- En déduire que u vérifie une équation différentielle de la forme $u'' + u = u_0$ avec u_0 à préciser.

Quelle est la forme générale des solutions de cette ED ?

Remarque : on a l'habitude, dans ce problème, d'utiliser la forme utilisant un seul cosinus avec un déphasage, plutôt qu'un cosinus et un sinus.

- En déduire que le rayon r peut s'exprimer en fonction de l'angle θ sous la forme $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$ avec p et e deux constantes.

- Le programme suivant permet de tracer la courbe polaire $r(\theta) = 1 - \cos \theta$:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 theta=np.linspace(0,2*np.pi,100)
4 r=1-np.cos(theta)
5 x=r*np.cos(theta)
6 y=r*np.sin(theta)
7 plt.plot(x,y)
8 plt.text(0,0,"O")
9 plt.axis('equal')
10 plt.show()
```

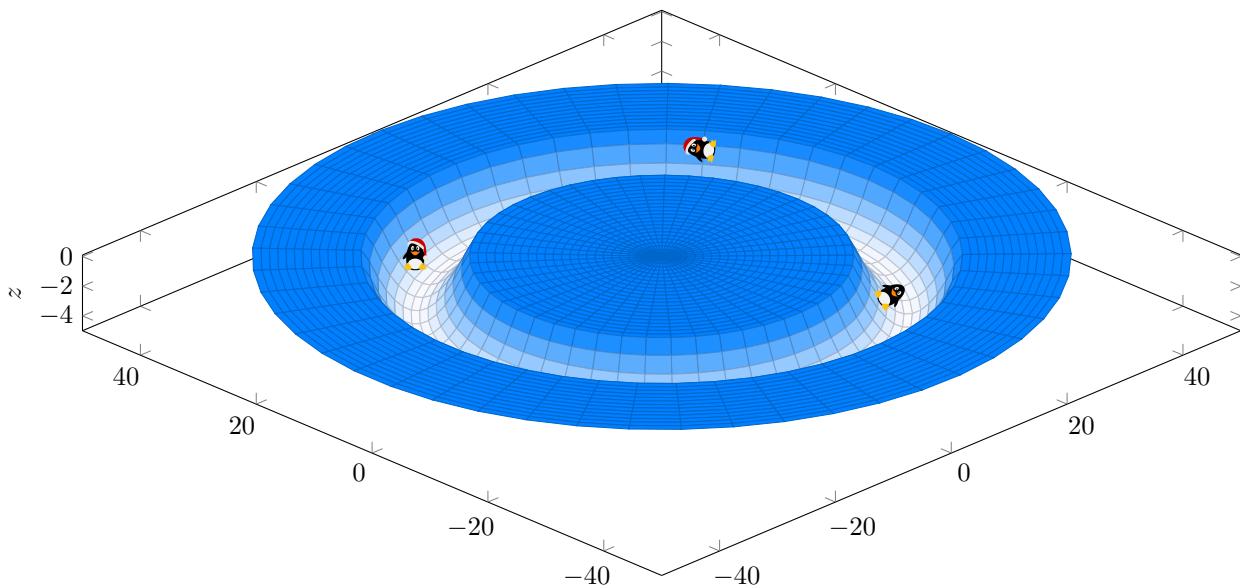
Adaptez ce programme pour tracer sur la même figure les trajectoires correspondant aux paramètres suivants (avec $\theta_0 = 0$) :

- $p = 1$ et $e = 0$
- $p = 1$ et $e = 0,25$
- $p = 1$ et $e = 0,5$
- $p = 1$ et $e = 0,75$

Conclure quand à la la signification physique de e ; que se passe-t-il lorsque $e \rightarrow 1$?

Exercice M9.5 : Manchots dans un donut-pipe [***]

Enthousiasmés par les figures des snowboardeurs sur le half-pipe lors des derniers JO, les manchots ont décidé de fabriquer leur propre version, rebouclée sur elle-même : le donut-pipe.



Il s'agit d'une piste creusée en cercle sur laquelle les manchots glissent dans frottements. Si on repère un manchot par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) , alors son altitude z est reliée au rayon par la relation $z = -h + \alpha(r - r_0)^2$ où $h = -5$ m est l'altitude du fond de la piste, $r_0 = 30$ m le rayon correspondant au fond de la piste, et $\alpha = 0,1 \text{ m}^{-1}$ une constante.

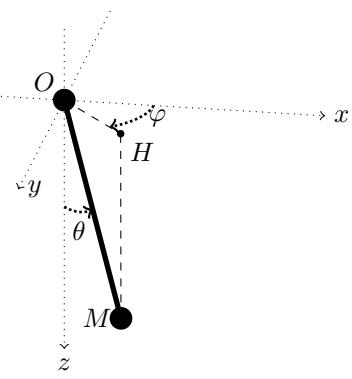
1. On considère un manchot de masse m dans le donut-pipe. Exprimez sa position et sa vitesse en fonction de r , θ et leurs dérivées.
2. On admet que, vu la géométrie de donut-pipe, la réaction du sol est toujours dirigée vers l'axe Oz . Justifiez que le moment cinétique L^{Oz} du manchot par rapport à l'axe Oz est constant.
3. On pose $C = \frac{L^{Oz}}{m}$; exprimez C en fonction de r et $\dot{\theta}$.
4. Justifiez que le manchot est un système conservatif. Exprimez son énergie mécanique. Montrez qu'elle peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}\mu(r)\dot{r}^2 + U(r)$ avec $\mu(r)$ et $U(r)$ à exprimer en fonction de r , C et des constantes.
5. Un manchot souhaite avoir un mouvement circulaire de rayon $r = 34$ m sur le bord extérieur du donut. Calculez la vitesse qu'il doit avoir.
Indication : pour un mouvement circulaire, $\dot{r} = 0$ donc r correspond à un minimum de $U(r)$.
6. Un autre manchot de masse $m = 8$ kg est lancé depuis $r = r_0$ avec une vitesse initiale $15\vec{e}_\theta + 3\vec{e}_r$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) :
 - (a) Calculez son énergie mécanique E_m et sa constante C .
 - (b) Calculez les rayons r_{min} et r_{max} extrêmes de son mouvement, et les altitudes correspondantes.

Exercice M9.6 : Pendule sphérique [***]

On a l'habitude d'étudier le mouvement d'un pendule dans un plan. Mais ici, on va voir ce qui se passe si on lance le pendule avec des conditions initiales quelconques, induisant une trajectoire en 3D.

On étudie donc le mouvement d'un point matériel M , de masse m , dans un référentiel galiléen R caractérisé par les axes (Ox, y, z) avec z vertical vers le bas. On note $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'intensité de la pesanteur. Ce point matériel est relié au point O fixe par un fil de longueur constante a , supposé toujours tendu. On repère le point M par ses coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$ de centre O . On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base locale en coordonnées sphériques.

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, le point matériel M est en M_0 repéré par $r = a, \theta = \theta_0, \varphi = 0^\circ$ et que sa vitesse initiale vaut $v_0 \vec{e}_\varphi$.



1. On considère un point M de coordonnées (a, θ, φ) avec a fixé. Exprimer dans la base locale le vecteur position \vec{OM} et le vecteur vitesse \vec{v} du point M par rapport au référentiel R .
2. Faire le bilan des actions s'exerçant sur le point matériel M . Préciser si ces actions travaillent et si elles dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de cette énergie potentielle en fonction de la variable θ uniquement. On choisira l'origine des énergies potentielles en O .
3. (a) Exprimez le moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M)$ du point matériel M par rapport au point O . On l'exprimera dans la base locale.
(b) En utilisant le théorème du moment cinétique **par rapport à l'axe Oz** , montrer que $\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = C$ où C est une constante que l'on exprimera en fonction des conditions initiales.
Indication : on pourra remarquer que $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = -\sin \theta$ (cf. schémas du chapitre sur les coordonnées sphériques).
4. On suppose **dans toute la suite** que C est non nul.

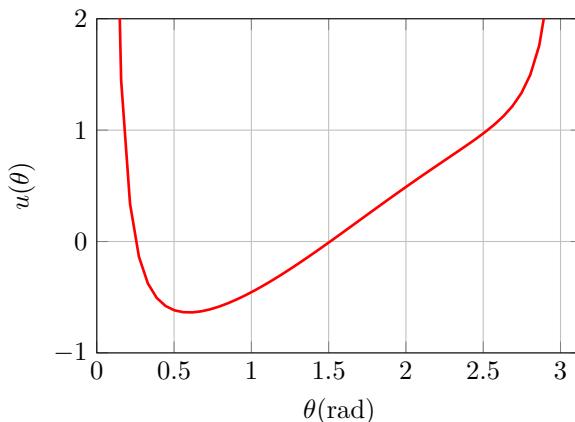
- (a) Exprimer l'énergie cinétique en fonction de m , a , C , $\dot{\theta}$ et θ uniquement.
(b) On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}$ et $D = \frac{C^2}{2\omega_0^2}$. Montrer alors que

$$\frac{1}{2\omega_0^2} \dot{\theta}^2 + u(\theta) = e \quad (\text{M9.8})$$

où $e = \frac{E_m}{mga}$ est une constante et $u(\theta) = -\cos \theta + \frac{D}{\sin^2 \theta}$.

5. On choisit comme conditions initiales $a = 50 \text{ cm}$, $\theta(0) = 1,3 \text{ rad}$ et $v_0 = 80 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ selon \vec{e}_φ .

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction $u(\theta)$. Cette courbe présente un minimum en $\theta = \theta_m$.



- (a) Calculez numériquement C , D et e .
(b) Que peut-on dire du mouvement selon $\theta(t)$? Décrire alors le mouvement du point M sur la sphère.
(c) Que se passerait-il si $e = u(\theta_m)$?
6. A partir de l'équation (M9.8), montrer que $\theta(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta + 2\omega_0^2 D \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

Mouvements à force centrale

TDs numériques

réponses page 776

TD numérique : Précession du périhélie de Mercure

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de $r(t)$, puis de $\theta(t)$, puis tracer la courbe correspondante.

La planète Mercure est proche du Soleil et est sensible au fait que le Soleil n'est pas exactement sphérique, mais aplati aux pôles comme la Terre. Par conséquent, on admet que la planète Mercure (de masse $m = 3,3 \times 10^{23}$ kg), est soumise à une force centrale qui dérive d'une énergie potentelle

$$U(r) = -\frac{GmM_S}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{r^2}\right)$$

avec $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI la constante de gravitation universelle, $M_S = 1,99 \times 10^{30}$ kg la masse du Soleil, et α une constante qui traduit l'aplatissement du Soleil ; sa vraie valeur est $8,7 \times 10^{10}$ m² mais on prendra ici $\alpha = 2 \times 10^{19}$ m² pour que l'effet soit bien visible (les valeurs de décalage angulaire obtenues seront du coup exagérées).

- À son périhélie (point le plus proche du Soleil), pris comme référence $t = 0$, Mercure se trouve à 46×10^6 km du Soleil et sa vitesse est de $59 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ et orthoradiale (c'est-à-dire selon \vec{e}_θ en coordonnées polaires dans son plan de révolution).

Déduisez-en $\dot{r}(0)$ et $\dot{\theta}(0)$ puis la valeur de la constante des aires C de Mercure.

- Montrez que $E_m = \frac{1}{2}mr^2 + U_{eff}(r) = cst$ en exprimant l'énergie potentielle effective $U_{eff}(r)$.

- Déduisez-en l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par r .

- Résolvez-la avec `odeint` pendant 1 an. Tracez $r(t)$ et commentez. Mesurez la période de révolution.

- Quelle est la relation entre $\dot{\theta}$ et C et r ?

On pourrait primitiver $\dot{\theta}$ à l'aide de la fonction `scipy.integrate.cumulative_trapezoid`, mais on va plutôt faire autrement : pour calculer θ , on considère que le système est décrit non plus par une équation différentielle, mais par un système de la forme $\begin{cases} \ddot{r} = \dots \\ \dot{\theta} = \dots \end{cases}$ qu'on peut résoudre par `odeint` en posant comme inconnues r , \dot{r} et $\dot{\theta}$.

Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de θ en plus des valeurs de r et \dot{r} ; on posera $\theta(0) = 0$.

- La fonction `plt.polar(theta,r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement et observez le décalage du périhélie à chaque tour.

TD numérique : Mouvement d'une bille dans un bol

On va voir dans ce TD comment on peut résoudre, pour un mouvement à force centrale, l'évolution de $r(t)$, puis de $\theta(t)$, puis tracer la courbe correspondante.

On considère donc une bille de masse m se déplaçant sans frottements dans un bol parabolique d'équation en coordonnées cylindriques

$$z = \frac{r^2}{R}$$

avec $R = 20$ cm, O le bas du bol et z l'axe vertical ascendant. On tient compte du poids, avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Comme le profil du bol est invariant par rotation autour de Oz , on peut montrer que la réaction passera toujours par l'axe Oz .

Montrez que le moment cinétique L de la bille par rapport à l'axe Oz est conservé.

- On pose $C = L/m$. Exprimez C en fonction de r , θ , z et/ou leurs dérivées.

3. Justifier que le système est conservatif, et que

$$E_m = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{4r^2}{R^2} \right) \dot{r}^2 + U_{eff}(r) = cst$$

avec U_{eff} à exprimer en fonction de C et du reste.

4. On lance la bille depuis $r(0) = 8\text{ cm}$ avec une vitesse $v(0) = 10\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ orthoradiale (c'est-à-dire selon \vec{e}_θ). Que valent alors $\dot{r}(0)$ et $\dot{\theta}(0)$?

Calculez (dans un programme Python) sa constante C . Tracez $u_{eff}(r) = U_{eff}(r)/m$ entre $0,02R$ et R , et commentez.

5. À partir de $E_m = cst$, déduisez l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par r .

6. Résolvez-la avec `odeint` pendant 5 s. Tracez $r(t)$ et commentez.

7. Quelle est la relation entre $\dot{\theta}$ et C et r ?

Modifiez donc le programme précédent pour qu'il calcule le tableau des valeurs de θ en plus des valeurs de r et \dot{r} .

8. La fonction `plt.polar(theta,r)` permet de tracer une courbe en coordonnées polaires. Tracez la courbe du mouvement.

9. Vous pouvez alors essayer avec d'autres valeurs initiales. Vous pouvez aussi essayer de tracer la trajectoire en 3D.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

- Q1.(a)
- Q2.(b)
- Q3.(b)
- Q4.(d)
- Q5.(c)
- Q6.(a)
- Q7.(b) ET (d)
- Q8.(a) ET (d)
- Q9.(d)
- Q10.(a)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M9.1 : Noyau de deutérium [*]

1. Cours
2. Cours
3. $U_f(r) = \frac{mC^2}{4r^2} - g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$
4. $\frac{m}{2} \ddot{r} - \frac{mC^2}{2r^3} + g^2 e^{-\alpha r} \frac{1+\alpha r}{r^2}$
5. On en déduit que $C = \sqrt{\frac{2g^2}{m} r(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}} = 10\,600 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ soit une vitesse $v = 5 \times 10^{18} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: on voit que, à cette petite échelle, tout est relativiste, et que nos lois de mécanique newtonienne ne s'appliquent plus du tout.

Réponses de l'exercice M9.2 : Lancement d'un ressort en rotation [**]

1. Vu en cours.
2. $E_p(14 \text{ cm}) = 49 \text{ mJ}$
3. $C = 1000 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ donc $v = \frac{C}{r} = 71 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$
4. On trace la droite horizontale $E_m = 0,16 \text{ J}$ et on regarde les intersections avec la courbe jaune : r oscille entre 14 cm et 22 cm
5. Entre 5 cm et 19 cm.

Réponses de l'exercice M9.3 : Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène [**]

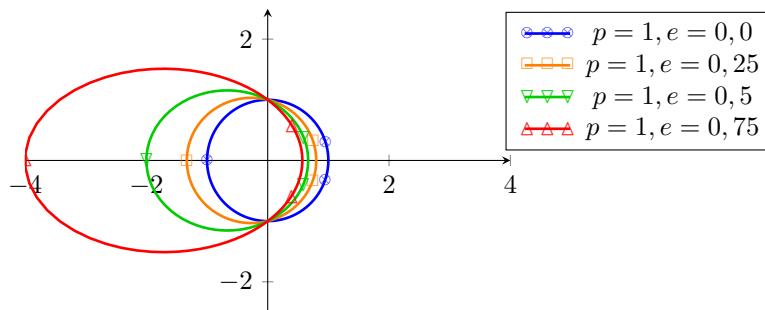
1. Le travail de \vec{f} entre deux points A et B s'écrit $W = -[\frac{1}{2}kr^2]_A^B$
donc la force est conservative et $E_p = \frac{1}{2}kr^2$
2.

r	0	$\sqrt[4]{\frac{mC^2}{k}}$	$+\infty$
$\frac{dE_{p,eff}}{dr}$	-	+	
$E_{p,eff}$	$+\infty$	$\sqrt{kmC^2}$	$+\infty$
3.
 - (a) $k = \frac{L^2}{mr_0^4} = 1535 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
 - (b) Le mouvement se fait avec pour période $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 1,5 \times 10^{-16} \text{ s}$ soit une fréquence $f_0 = 6,5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ ce qui correspond à $\lambda_0 = 46 \text{ nm}$: ultraviolet lointain.
4. $C = r_0 v_1 = 159 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kr_0^2 = 6,25 \times 10^{-18} \text{ J} = 39 \text{ eV}$
Lorsque le rayon est minimum ou maximum, $\dot{r} = 0$ donc $E_m = E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{1}{2}kr^2$. On résout : $r_{min} = 53 \text{ pm}$ et $r_{max} = 73 \text{ pm}$

Réponses de l'exercice M9.4 : Formules de Binet [**]

1. Vu en cours.
2. $C = r^2 \dot{\theta}$.
3. $\vec{v} = C(-u' \vec{e}_r + u \vec{e}_\theta)$
4. $\vec{a} = -C^2 u^2 (u'' + u) \vec{e}_r$
5. **Application au mouvement d'une planète** Par le PFD appliqué à la planète et projeté sur \vec{e}_r , on trouve $u'' + u = \frac{Gm_O}{C^2}$

On en tire $r = \frac{1}{u} = \frac{1}{\frac{Gm_O}{C^2} + A \cos(\theta + \phi)} = \frac{\frac{C^2}{Gm_O}}{1 + \frac{AC^2}{Gm_O} \cos(\theta + \phi)}$ ce qui correspond bien à la forme proposée.



Réponses de l'exercice M9.5 : Manchots dans un donut-pipe [***]

1. $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + 2\alpha\dot{r}(r - r_0)\vec{e}_z$.

2. TMC : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$.

3. $C = r^2\dot{\theta}$

4.

$$\begin{cases} \mu(r) &= m[1 + 4\alpha^2(r - r_0)^2] \\ U(r) &= m[-gh + g\alpha(r - r_0)^2 + \frac{C^2}{2r^2}] \end{cases}$$

5. $C = \sqrt{2g\alpha(r - r_0)r^3} = 555 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ d'où on tire la vitesse $\frac{C}{r} = 16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 59 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

6. $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = 544 \text{ J}$ et $C = r_0 \times 15 = 450 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Les rayons min et max sont caractérisés par $\dot{r} = 0$ donc ils sont solution de l'équation $U(r) = E_m$. Il s'agit d'une équation non-linéaire qu'on peut résoudre numériquement ; on trouve :

$$r_{min} = 29,4 \text{ m} \text{ (altitude } z = -4,96 \text{ m)}$$

$$r_{max} = 36,5 \text{ m} \text{ (altitude } z = -0,78 \text{ m)}$$

Réponses de l'exercice M9.6 : Pendule sphérique [***]

1. $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta + a \sin \theta \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

2. M est soumis à son poids, conservatif, d'énergie potentielle $-mga \cos \theta$ et à la tension du fil, qui ne travaille pas car elle est orthogonale au mouvement.

3. $\vec{\sigma}_O(M) = ma^2\dot{\theta}\vec{e}_\theta - ma^2 \sin \theta \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

Or par le TMC : $\frac{d\sigma_{Oz}(M)}{dt} = 0$ donc $\sin^2 \theta \dot{\varphi} = cst = C = \frac{v_0 \sin \theta_0}{a}$

4. $E_c = \frac{1}{2}m(a^2\dot{\theta}^2 + a^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$ or $\dot{\varphi} = \frac{2}{\sin^2 \theta}$ donc $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{mC^2}{2\sin^2 \theta} - mga \cos \theta$. En divisant par mga on trouve bien l'équation demandée.

5.

(a) Avec les CI : $C = \frac{0.8 \sin(1,3)}{0.5} = 1,54 \text{ s}^{-1}$ et $D = 0,06$ d'où on tire $e = u(\theta_0) = -0,2$ (sans unité).

(b) En traçant la droite horizontale $e = -0,2$ on constate que l'angle θ oscille entre 0,3 rad et 1,4 rad. Le point M va donc tourner autour de l'axe Oz tout en ayant son angle θ qui oscille entre ces deux valeurs, mais sans jamais atteindre le point le plus bas ($\theta = 0$ rad).

(c) Si $e = u(\theta_m)$ alors $\theta = cst$: on a une rotation circulaire autour de l'axe Oz .

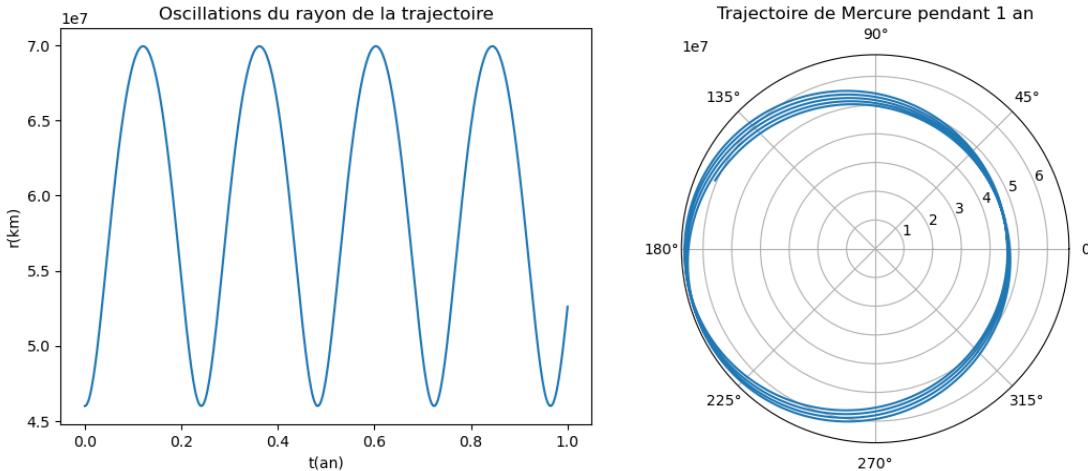
6. Il suffit de dériver l'équation (1) et de simplifier par $\dot{\theta}$.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Précession du périhélie de Mercure

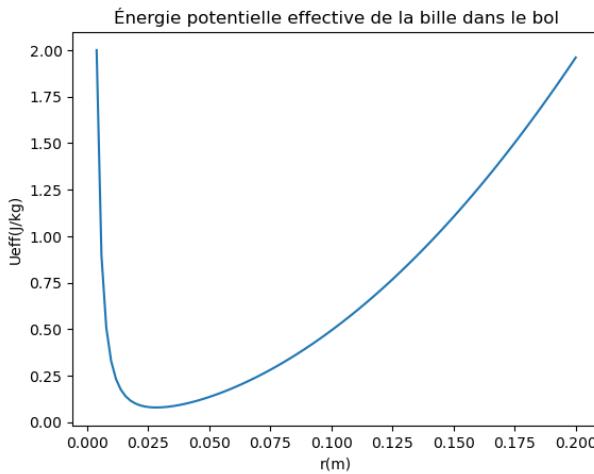
On a $U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + U(r)$. On dérive l'énergie mécanique par rapport au temps, on divise par \dot{r} et on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - GM_s \left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^4} \right) \\ \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \end{cases}$$



Réponses au TD d'info : Mouvement d'une bille dans un bol

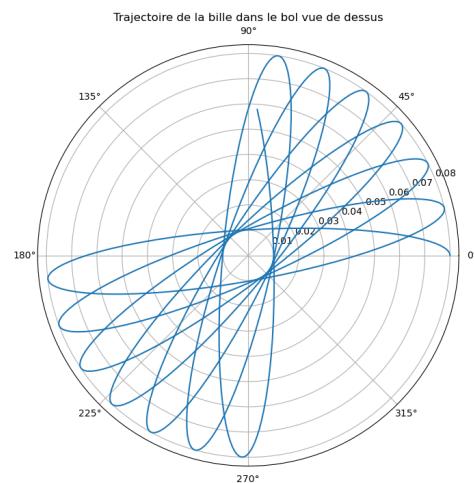
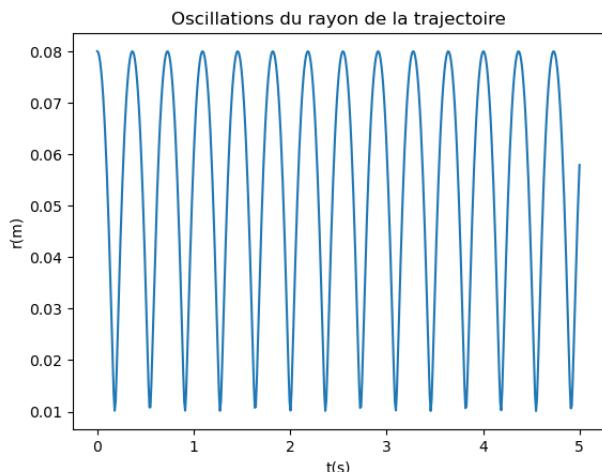
La conservation de E_m et $C = r^2\dot{\theta}$ permet d'obtenir $E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz(r)$ et comme $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ et $\dot{z} = \frac{2r\dot{r}}{R}$ on obtient $U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + mg\frac{r^2}{R}$:



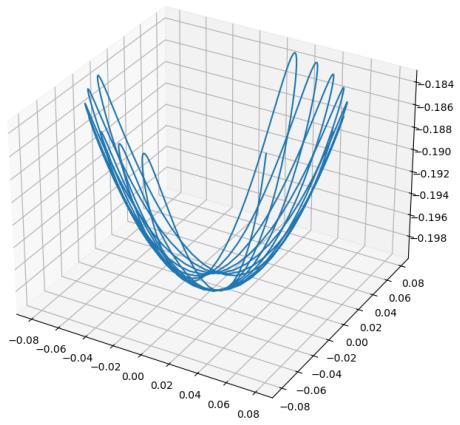
On voit que le mouvement radial sera borné.

En dérivant E_m par rapport au temps, et en simplifiant par $m\dot{r}$, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{2gr}{R} - \frac{4r\dot{r}^2}{R^2} \\ \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \end{cases}$$



Trajectoire de la bille dans le bol en 3D



Mouvements képlériens

Cours

Les mouvements des planètes sont des mouvements à force centrale, la force étant la force de gravitation. Ils ont été étudié expérimentalement par Képler, puis théoriquement par Newton. En fait, leur étude s'étend à tout mouvement d'un astre soumis à la gravitation : satellites autour de la Terre, étoiles autour du centre de la galaxie,...mais aussi à d'autres mouvements avec des forces qui ont la même forme mathématique, en particulier la force électrique de Coulomb.

Dans tout ce chapitre, on étudie le mouvement d'un point M de masse m soumis à une seule force, centrale, de la part d'un point O de masse m_O supposé fixe. En réalité le point O ne peut pas être fixe, puisqu'il est soumis lui aussi à la force de M . Mais :

- si $m_O \gg m$, le point O bouge très peu car il est plus lourd ; c'est le cas du Soleil soumis à l'attraction de la Terre, ou de la Terre soumise à l'attraction des satellites
- sinon, il existe une théorie hors programme, dite **théorie du mobile fictif**, qui montre que, via un artifice mathématique, on peut se ramener à l'étude du point M en faisant comme si le point O était immobile, à condition de modifier légèrement la masse de M : dans les équations, il faut remplacer m par la masse réduite $\mu = \frac{m_O m}{m + m_O}$

Dans ce chapitre, on supposera la première hypothèse, sachant que, s'il le faut, on peut toujours utiliser la masse réduite dans les applications numériques.

M10.A. Potentiel newtonien

Propriété : Énergie potentielle de la force de gravitation

La force de gravitation entre deux points O et M est conservative, et son énergie potentielle est

$$E_p = -\frac{Gm_O m}{OM} \quad (\text{M10.1})$$

où m_O et m sont les masses deux points, OM la distance qui les sépare et $G = 6,67 \times 10^{-11}$ USI (constante de gravitation universelle).

Démonstration

On se place dans le cas où O est immobile pour simplifier. En coordonnées sphériques de centre O , la force s'écrit $\vec{f} = -\frac{Gm_O m}{r^2} \vec{e}_r$ donc son travail entre deux points M_1 et M_2 vaut

$$\begin{aligned} W &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \int_{M_1}^{M_2} -\frac{Gm_O m}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + rd\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi) \\ &= \int_{M_1}^{M_2} -\frac{Gm_O m}{r^2} dr = \left[\frac{Gm_O m}{r} \right]_{M_1}^{M_2} \end{aligned}$$

! La force varie comme $\frac{1}{\text{distance}^2}$ mais l'énergie varie comme $\frac{1}{\text{distance}}$

En fait, quand on étudie les phénomènes gravitationnels, on pense rarement à des points matériels, mais à des objets célestes. Dans ce cas la force gravitationnelle (et son énergie potentielle) sont plus compliquées. On admet néanmoins un théorème que vous serez capables de démontrer l'an prochain :

Théorème de Newton

La force gravitationnelle exercée par un astre à symétrie sphérique (c'est-à-dire dont la masse se répartit sous forme de sphères concentriques) sur un point matériel situé à l'extérieur de cet astre, est la même que si toute la masse de cet astre était placée en son centre.

Le Soleil, la Terre, ...sont approximativement des astres à symétrie sphérique, même si la sphère n'est pas parfait à cause de l'aplatissement aux pôles ; la Terre, par exemple, contient un noyau sphérique, entouré d'un manteau sphérique, entouré d'une croûte sphérique. Ainsi, pour exprimer l'attraction gravitationnelle (ou l'énergie potentielle

correspondante) de la Terre sur un satellite, on fera comme si la Terre était ramenée à un point matériel en son centre.

Propriété : Énergie potentielle électrique

La force électrique entre deux charges O et M est conservative, et son énergie potentielle est

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_O q}{OM} \quad (\text{M10.2})$$

où q_O et q sont les charges deux points, OM la distance qui les sépare et $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}$ USI soit $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI.

Démonstration

Identique, à partir de la force $\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_O q}{r^2} \vec{e}_r$

Définition : Potentiel newtonien

On appelle potentiel newtonien une énergie potentielle centrale de la forme $E_p(r) = \frac{K}{r}$, $K \in \mathbb{R}$, qui donne donc lieu à une force centrale $\vec{f} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$.

Si $K > 0$, la force est répulsive ; si $K < 0$, la force est attractive.

Remarque : La force gravitationnelle est toujours attractive (car $K = -Gm_O m$) ; la force électrique ($K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_O q$) est attractive pour des charges de signes opposés, et répulsive pour des charges de même signe.

Définition : Mouvement képlérien

On appelle mouvement képlérien le mouvement d'un point matériel soumis uniquement à une force dérivant d'un potentiel newtonien.

Dans la suite du chapitre, nous allons donc étudier les lois générales des mouvements képlériens, mais certains résultats particuliers ne s'appliqueront qu'aux potentiels gravitationnels.

M10.B. Étude qualitative du mouvement

On peut appliquer tout d'abord tous les résultats vus dans le chapitre précédents à un mouvement képlérien :

- la trajectoire est plane
- la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$ est constante
- l'énergie mécanique s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$ avec $E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$

Le deuxième résultats correspond d'ailleurs à la seconde loi de Képler.

Pour en savoir plus, on peut étudier l'énergie potentielle effective et tracer sa courbe :

Calcul : Étude de l'énergie potentielle effective

On calcule la dérivée : $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} - \frac{K}{r^2}$

On distingue alors deux cas suivant le signe de K (car toutes les autres constantes sont positives) :

- si $K > 0$, alors $\frac{dE_{p,eff}}{dr} < 0$:

x	0	$+\infty$
$\frac{dE_{p,eff}}{dr}$	—	
$E_{p,eff}$	$+\infty$	0

On constate que, quelle que soit l'énergie mécanique, la trajectoire a une barrière de potentiel pour les petits rayons, mais aucune barrière pour les grands rayons : la trajectoire est non bornée ; on peut remarquer, en passant, que puisque $E_m > E_{p,eff}$ et que l'énergie potentielle est toujours positive, alors $E_m > 0$ dans ce cas-là.

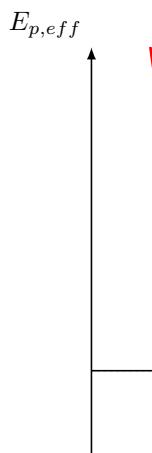
- si $K < 0$, on écrit $\frac{dE_{p,eff}}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{|K|}{r^2}$; alors $\frac{dE_{p,eff}}{dr} > 0 \Leftrightarrow \frac{|K|}{r^2} > \frac{mC^2}{r^3} \Leftrightarrow r > \frac{mC^2}{|K|}$ d'où le tableau de

valeurs :

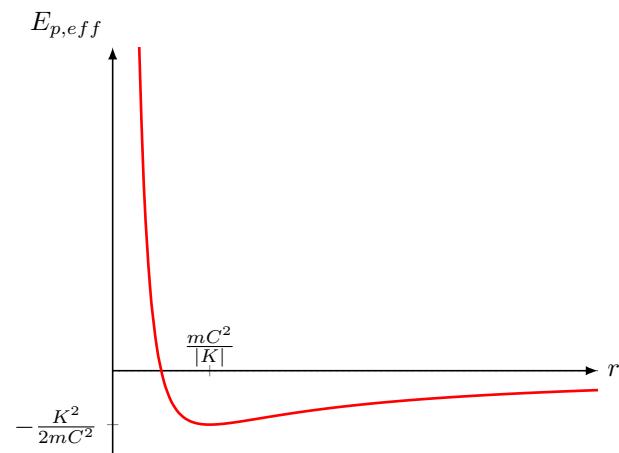
x	0	$\frac{mC^2}{ K }$	$+\infty$
$\frac{dE_{p,eff}}{dr}$	—	+	
$E_{p,eff}$	$+\infty$	$-\frac{K^2}{2mC^2}$	0

On voit alors apparaître un creux qui va donner des trajectoires bornées dans le cas où l'énergie mécanique est négative ; si elle est positive, la trajectoire est non bornée.

Les deux comportements sont illustrés sur la figure M10.1).



(a) Force répulsive : $K > 0$



(b) Force attractive : $K < 0$

FIGURE M10.1 – Énergie potentielle effective du point M .

Cela nous permet d'affirmer la première propriété des trajectoires :

Propriété : Trajectoires bornées

Les trajectoires sont bornées si et seulement si leur énergie mécanique est négative. Cela n'est possible que pour une force attractive.

Pour aller plus loin, il faut résoudre les équations du mouvement. Ce n'est plus au programme, même si vous pourrez lire, en annexe, un exemple de démonstration si ça vous intéresse. On va donc simplement admettre le résultat :

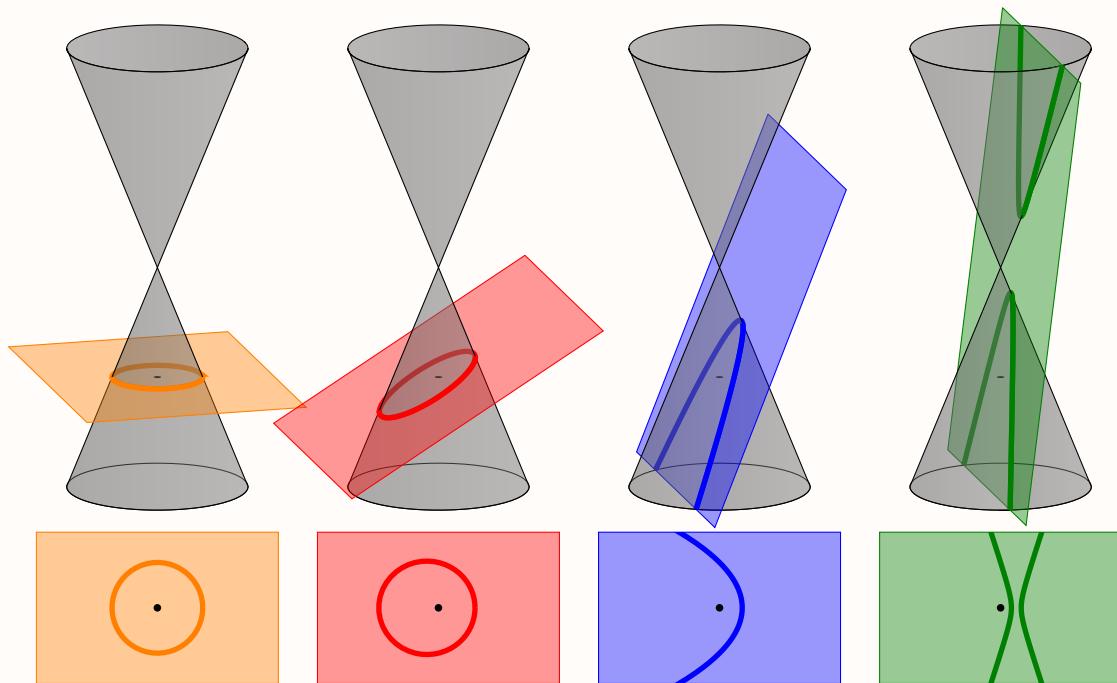
Propriété : Nature géométrique des trajectoires

Les trajectoires sont des coniques : ellipses si $E_m < 0$, parabole si $E_m = 0$ ou hyperboles si $E_m > 0$. Le point central est un foyer de la conique.

Un peu de maths : Qu'est-ce qu'une conique ?

Une conique est une courbe obtenue par l'intersection d'un cône avec un plan. Suivant l'inclinaison du plan par rapport à l'axe du cône, on peut avoir :

- un cercle
- une ellipse
- une parabole
- une hyperbole (en deux branches)



Une conique est caractérisée par deux **foyers**, dont l'un est l'intersection du plan avec l'axe du cône, et par son **excentricité** e , un paramètre sans dimension que vaut 0 pour un cercle, est compris entre 0 et 1 pour une ellipse, est égal à 1 pour une parabole, et est supérieur à 1 pour une hyperbole.

Dans le cas d'un potentiel newtonien attractif, on a vu que le mouvement peut être borné ou pas. On peut montrer que :

- si $E_m < 0$, le mouvement est un cercle ou une ellipse
- si $E_m > 0$, le mouvement est une branche d'hyperbole, celle qui s'enroule autour du foyer
- le cas limite (théorique) $E_m = 0$ correspond à une parabole

Les différents cas sont illustrés sur la figure M10.2.

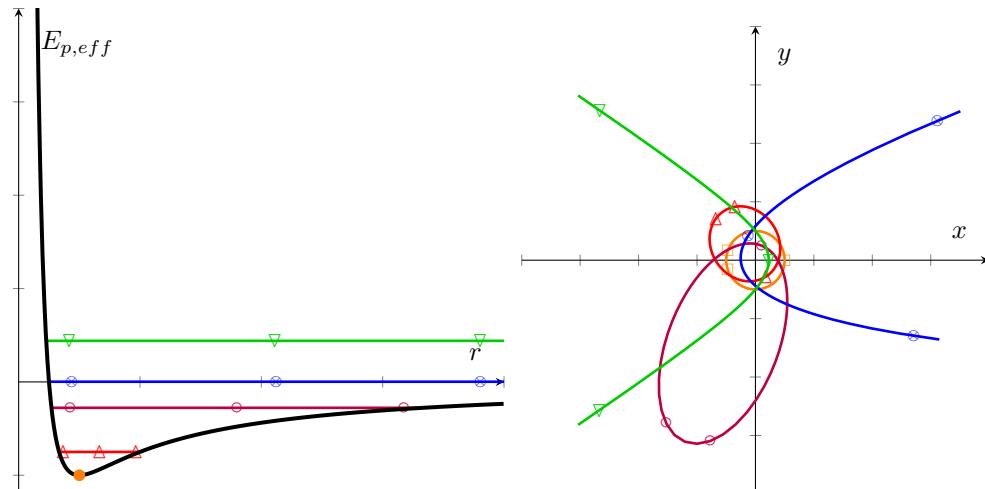


FIGURE M10.2 – Exemples de mouvements sous l'action d'un potentiel newtonien attractif.

Au contraire, dans le cas répulsif, les trajectoires sont toujours non bornées : ce sont des hyperboles, ou plus précisément la branche d'hyperbole qui ne s'enroule pas autour du foyer (figure M10.3) :

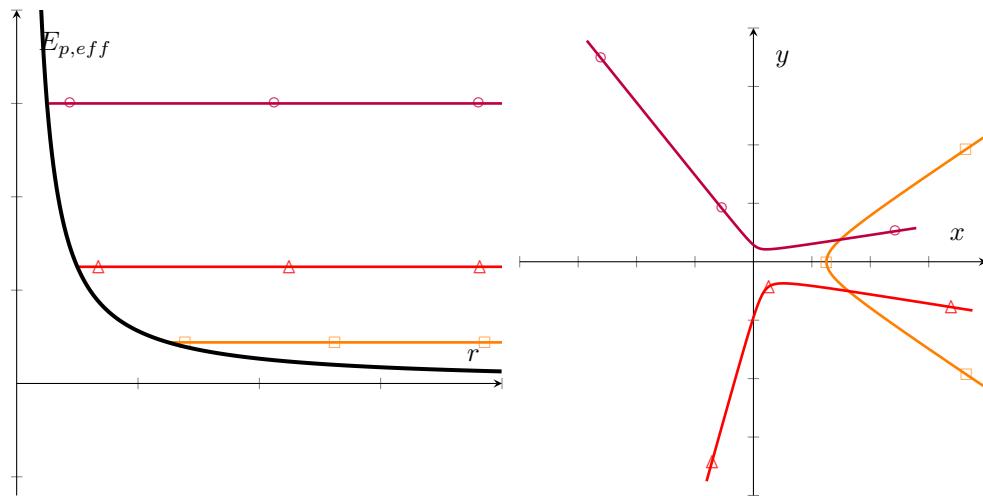


FIGURE M10.3 – Exemples de mouvements sous l'action d'un potentiel newtonien répulsif.

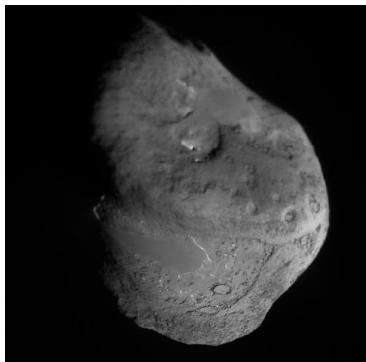
(a) La comète 9P/Tempel, sur laquelle la sonde Deep Impact s'est écrasée, a une orbite peu elliptique ($e = 0,510$) (Crédit : Wikipedia/NASA)(b) La comète Hale-Bopp, vue en 1995, est une comète périodique à l'orbite très elliptique ($e = 0,994$) (Crédit : Wikipedia/P.Salzgeber)(c) La comète Morehouse, vue en 1908, est une comète apériodique à l'orbite hyperbolique ($e = 1,007$) (Crédit : Wikipedia/E.E.Barnard)

FIGURE M10.4 – Exemples de trajectoires de comètes.

Exemple : Vitesse de libération terrestre**À connaître**

On tire un obus depuis la surface de la Terre. Quelle vitesse minimale v_{lib} doit-on lui communiquer pour qu'il puisse s'échapper jusqu'à l'infini ?

Données : le rayon terrestre vaut $R_T = 6400 \text{ km}$ et la pesanteur au niveau du sol $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pour que l'obus puisse aller à l'infini, il faut que sa trajectoire soit non bornée, donc que son énergie mécanique soit positive. Or son énergie mécanique initiale vaut $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(R_T) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$ où m est la masse de l'obus et M_T celle de la Terre. L'obus part donc à l'infini si $\frac{1}{2}mv^2 > \frac{GM_Tm}{R_T}$ soit $v > v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$.

Pour faire l'AN, on se retrouve devant une situation courante dans les exercices : l'énoncé ne connait pas G et M_T , mais g_0 et R_T . Or g_0 est la pesanteur au niveau du sol, qui apparaît dans le poids sous la forme $-mg_0\vec{e}_z$ avec \vec{e}_z vertical ascendant. Mais on se souvient que le poids n'est qu'une approximation, à la surface de la Terre, de la force gravitationnelle $-\frac{GM_Tm}{R_T^2}\vec{e}_r$ où \vec{e}_r est aussi vertical et ascendant. En identifiant les deux expressions, on en déduit que $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$.

On en déduit donc que $v_{lib} = \sqrt{2g_0R_T} = 11,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

M10.C. Étude des orbites circulaires

L'étude générale des orbites d'un mouvement képlérien est compliquée. Mais il existe un cas simple qu'il faut absolument connaître : les orbites circulaires.

Exemple : Étude des trajectoires circulaires dans un potentiel gravitationnel

À connaître

On suppose que l'objet M décrit autour de O une orbite circulaire de rayon r . En appliquant le PFD à M , exprimez en fonction de r et des constantes :

- la vitesse angulaire $\dot{\theta}$
- la vitesse v
- la période T ; déduisez-en le rapport $\frac{T^2}{r^3}$
- l'énergie mécanique E_m

Pour une orbite circulaire, l'étude cinématique se simplifie : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ d'où $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$. La seule force qui s'applique est la force gravitationnelle $-\frac{Gm_O m}{r^2}\vec{e}_r$. Le PFD projeté sur les deux axes donne donc deux équations :

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 &= -\frac{Gm_O m}{r^2} \\ mr\ddot{\theta} &= 0 \end{cases}$$

La seconde indique que $\dot{\theta} = cst$; la première permet d'exprimer sa valeur : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm_O}{r^3}}$.

On en déduit la vitesse $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm_O}{r}}$.

La période est $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$ (on peut aussi écrire $T = \frac{2\pi r}{v}$) donc $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_O}}$. On en déduit facilement que $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$: c'est la troisième loi de Képler.

Enfin, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{Gm_O m}{r}$ et $E_p = -\frac{Gm_O m}{r}$ donc en sommant les deux : $E_m = -\frac{Gm_O m}{2r}$: l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle prise à une distance égale à deux fois le rayon.

Remarque : Tous les résultats précédents se généralisent pour une force newtonienne autre que la gravitation, sauf la troisième loi de Képler.

M10.D. Étude des orbites elliptiques

Les orbites sont rarement circulaires ; elles sont le plus souvent elliptiques. Il faut connaître quelques résultats importants sur les trajectoires elliptiques.

Les ellipses, comme toutes les coniques, ont de nombreuses propriétés.

Propriété : Définition bifocale d'une ellipse

Une ellipse possède deux foyers ; elle est constituée de l'ensemble des points tels que la somme des longueurs jusqu'aux deux foyers est constante (figure M10.5) :

$$\text{ellipse} = \{M, F_1M + F_2M = 2a = cst\}$$

L'ellipse est symétrique par rapport à la médiatrice de $[F_1F_2]$; la dimension de l'ellipse selon la droite (F_1F_2) est le grand-axe de l'ellipse, il vaut $2a$; la dimension de l'ellipse selon la médiatrice de $[F_1F_2]$ est le petit-axe de l'ellipse, on le note $2b$.

On note $2c$ la distance entre les foyers de l'ellipse, et on définit l'excentricité de l'ellipse par

$$e = \frac{c}{a} < 1 \quad (\text{M10.3})$$

Démonstration

Pourquoi le grand-axe AP vaut-il $2a$? D'après la définition bifocale, $F_1A + F_2A = 2a$, or $F_2A = PF_1$ par symétrie, donc $PF_1 + F_1A = PA = 2a$

Remarque : Les deux données essentielles décrivant une ellipse sont son demi grand-axe a et son excentricité e . On peut en déduire $c = e.a$, puis b si c'est nécessaire, en remarquant que, de par la définition bifocale, $F_1B = F_2B = a$; ou par le théorème de Pythagore, $F_1A^2 = CB^2 + CF_1^2 = b^2 + c^2 = b^2 + e^2a^2$ donc $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Remarque : Un cercle est simplement une ellipse dont les deux foyers sont confondus.

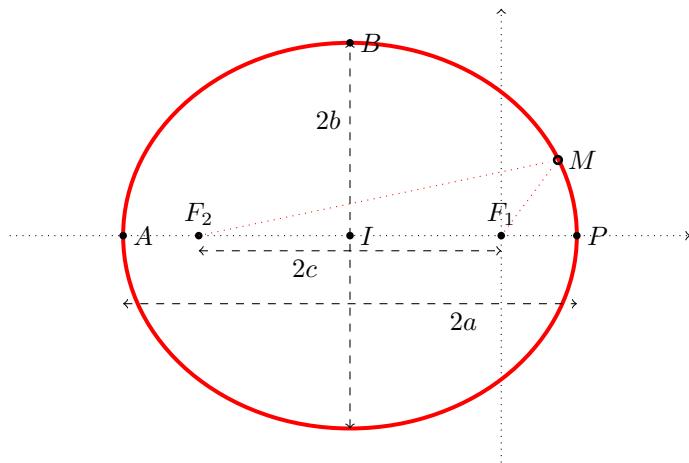


FIGURE M10.5 – Caractéristiques d'une ellipse.

La définition de l'ellipse fait apparaître deux foyers, mais un seul a un sens physique, celui où se trouve le centre attracteur ; l'autre est invisible. Dans la suite, on supposera que ce centre est en F_1 .

Définition : Points particuliers

Le point de la trajectoire le plus proche du centre attracteur s'appelle le périgée (si le centre est la Terre), ou le périhélie (si le centre est le Soleil), ou le périastre.

Le point de la trajectoire le plus loin du centre attracteur s'appelle l'apogée (si le centre est la Terre), ou l'aphélie (si le centre est le Soleil), ou l'apoastre.

Un calcul classique en exercices consiste à exprimer le rayon minimum $r_{min} = F_1P$ et le rayon maximum $r_{max} = F_1A$ en fonction de a et e , ou bien l'inverse.

Calcul : Relations entre a , e , r_{min} et r_{max}

Il est facile de voir que $F_1P = IP - IF_1 = a - c$ donc $r_{min} = a(1 - e)$.

De même $F_1A = F_1I + IA = c + a$ donc $r_{max} = a(1 + e)$.

En ajoutant les deux expressions, on trouve $a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}$.

Enfin, on peut vérifier que $e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$

On va alors établir les deux relations déjà vues sur les trajectoires circulaires et valables pour les trajectoires elliptiques.

Calcul : Énergie mécanique

Aux points P et A , le rayon est minimum/maximum donc $\dot{r} = 0$. L'énergie mécanique est donc égale à l'énergie potentielle effective, ce qui signifie que r_{max} et r_{min} sont solutions de l'équation $E_m = E_{p_{eff}}(r)$ soit $E_m = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{K}{r}$. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$E_m r^2 - Kr - \frac{mC^2}{2} = 0$$

polynôme d'ordre 2 qui a deux racines, r_{max} et r_{min} . Or la somme de ces deux racines vaut $r_{max} + r_{min} = -\frac{-K}{E_m} = \frac{K}{E_m}$. De plus, $r_{max} + r_{min} = 2a$, donc on en déduit que $E_m = \frac{K}{2a}$.

Propriété : Relation énergie - demi-grand axe

L'énergie mécanique du point M parcourant une trajectoire elliptique est égale à l'énergie potentielle prise à une distance égale à 2 fois le demi grand-axe :

$$E_m = \frac{K}{2a} \quad (\text{M10.4})$$

Calcul : Période du mouvement

On peut réécrire l'énergie en A : $\frac{K}{2a} = \frac{mC^2}{a^2(1+e)^2} + \frac{K}{a(1+e)}$ donc $\frac{mC^2}{2a^2(1+e)^2} = \frac{K}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e} \right) = \frac{K(e-1)}{2a(1+e)}$ d'où on tire l'expression de la constante des aires : $C = \sqrt{\frac{K(1-e)(1+e)a}{m}} = \sqrt{\frac{K(1-e^2)a}{m}}$

Or le rayon-vecteur balaye une aire $\frac{C}{2}\Delta t$ en une durée Δt . En une période, il balaye l'ellipse toute entière, dont l'aire vaut (d'après les formulaires de maths) $\mathcal{A} = \pi ab$. Donc $\pi ab = \frac{C}{2}T$ où T est la période du mouvement, soit $\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K(1-e^2)a}{m}} T$. En éllevant au carré et en simplifiant, on trouve $\pi^2 a^3 = -\frac{K}{4m} T^2$ soit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{-K}$. Dans le cas gravitationnel, $K = -Gm_O m$ donc $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$.

Propriété : Troisième loi de Képler

Pour un point matériel parcourant une trajectoire elliptique dans un potentiel gravitationnel, le rapport entre la période au carré et le demi grand-axe de l'ellipse au cube ne dépend que de la masse de l'objet situé au centre :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O} \quad (\text{M10.5})$$

Remarque : Dans le cas du système solaire, on sait que la Terre tourne en 1 an à une distance moyenne du Soleil égale à une unité astronomique : $1 \text{ u.a.} \approx 150 \times 10^6 \text{ km}$. Donc $\frac{4\pi^2}{Gm_{\text{Soleil}}} = 1 \text{ an}^2 \cdot \text{u.a.}^{-3}$

Méthode : Démonstration des lois des orbites elliptiques

Les deux lois précédentes – relation énergie / demi grand-axe et troisième loi de Képler – sont à connaître par cœur ; leurs démonstrations ne sont à connaître que dans le cas d'un mouvement circulaire (section C.). Les énoncés demandent souvent la démonstration dans le cas circulaire, puis indiquent : *on admettra que ces relations restent valables dans le cas d'orbites elliptiques.*

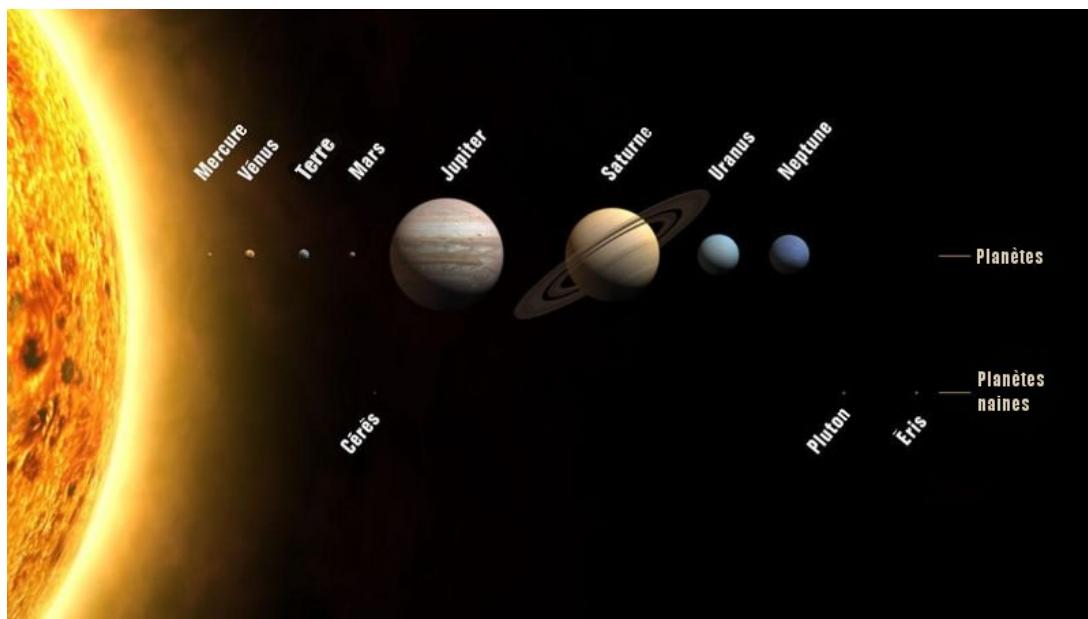


FIGURE M10.6 – Les planètes du système solaire (Crédit : NASA).

Astre	Masse(10^{24} kg)	Rayon(km)	Demi-grand axe(u.a.)	Excentricité	Inclinaison($^{\circ}$)
Soleil	1 989 100	695 990	-	-	-
Mercure	0,330 22	2439,7	0,387 10	0,2056	7,00
Vénus	4,8690	6052,9	0,723 33	0,0068	3,39
Terre	5,9742	6378,140	1,000 00	0,0167	0,00
Mars	0,641 91	3397	1,523 69	0,0933	1,85
Jupiter	1898,8	71 492	5,202 83	0,048	1,31
Saturne	568,50	60 268	9,538 76	0,056	2,49
Uranus	86,625	25 559	19,191 39	0,046	0,77
Neptune	102,78	24 764	30,061 07	0,010	1,77

TABLEAU M10.1 – Données concernant les principaux corps du système solaire. L'inclinaison est l'angle entre le plan de révolution de la planète, et celui de la Terre.

M10.E. Annexe : établissement de l'équation des trajectoires (hors programme)

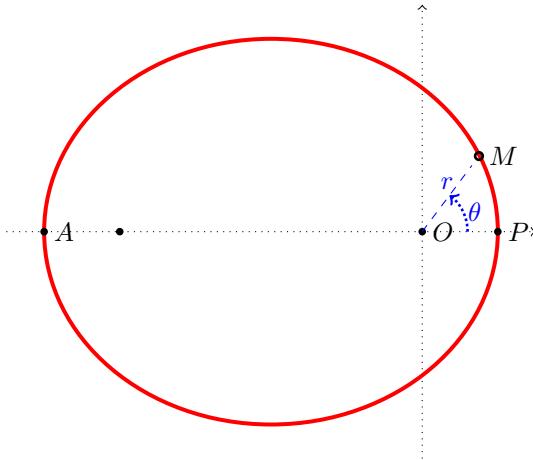
On va établir dans cette section l'équation polaire de la trajectoire et montrer que c'est une conique.

Propriété : Équation polaire d'une conique (admis)

Une conique est définie par l'équation polaire

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

- p est le *paramètre* de la conique
- e est l'*excentricité* de la conique
- θ_0 est l'angle entre le grand-axe et l'axe Ox



Il existe 3 méthodes pour démontrer que la trajectoire d'un point soumis à un potentiel newtonien est une conique :

- par les formules de Binet (cf. exercice du chapitre précédent)
- par le vecteur excentricité
- par le vecteur de Runge-Lenz

Calcul : Établissement de l'équation polaire de la trajectoire par la méthode du vecteur excentricité

Le PFD appliquée au point M donne $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$. Or $C = r^2 \dot{\theta}$ donc $\frac{1}{r^2} = \frac{\dot{\theta}}{C}$. On peut donc écrire $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{K}{C} \dot{\theta} \vec{e}_r$.

Dans $\dot{\theta} \vec{e}_r$, on reconnaît la dérivée de $-\vec{e}_\theta$ par rapport au temps. On peut donc écrire l'équation sous la forme $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d(-\frac{K}{C}\vec{e}_\theta)}{dt}$.

En intégrant, on obtient $m\vec{v} = -\frac{K}{C}\vec{e}_\theta + \vec{cst}$. On a l'habitude de poser $\vec{cst} = -\frac{K}{C}\vec{e}$ où \vec{e} est un vecteur constant appelé *vecteur excentricité*. On a donc $m\vec{v} = -\frac{K}{C}(\vec{e} + \vec{e}_\theta)$.

On multiplie cette équation par \vec{e}_θ : $m\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{K}{C}(\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta + 1)$. Or $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ donc $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = r\dot{\theta} = \frac{C}{r}$. De plus, $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = \|\vec{e}\| \cos((\vec{e}, \vec{e}_\theta))$ car $\|\vec{e}_\theta\| = 1$. Or $(\vec{e}, \vec{e}_\theta) = (\vec{e}_x, \vec{e}_\theta) - (\vec{e}_x, \vec{e}) = (\theta + \frac{\pi}{2}) - (\vec{e}_x, \vec{e})$. En posant $\theta_0 = -\frac{\pi}{2} + (\vec{e}_x, \vec{e})$, on a $(\vec{e}, \vec{e}_\theta) = \theta - \theta_0$ donc $\vec{e} \cdot \vec{e}_\theta = \|\vec{e}\| \cos(\theta - \theta_0)$.

En mettant toutes ces simplifications ensembles, on trouve $m\frac{C}{r} = -\frac{K}{C} (\|\vec{e}\| \cos(\theta - \theta_0) + 1)$ d'où on tire

$$r = \frac{-\frac{mC^2}{K}}{1 + \|\vec{e}\| \cos(\theta - \theta_0)}$$

La norme du vecteur excentricité est donc l'excentricité de la conique, et sa direction indique la direction orthogonale à l'axe de la conique ; le paramètre vaut $-\frac{mC^2}{K}$.

Calcul : Établissement de l'équation polaire de la trajectoire par la méthode du vecteur de Runge-Lenz

Le vecteur de Runge-Lenz est défini par $\vec{A} = \vec{p} \wedge \vec{L} - Km\vec{e}_r$ où $\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$ est le moment cinétique du point.

On va d'abord montrer que ce vecteur est constant (ça ne saute pas aux yeux...). Pour cela, on dérive (on note $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$ la force) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L} + m\vec{v} \wedge \frac{d\vec{L}}{dt} - Km \frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \vec{F} \wedge \vec{L} + \vec{0} - Km\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ en appliquant le PFD (1^{er} terme) et le TMC (2^{e me} terme)} \\ &= \frac{K}{r^2}\vec{e}_r \wedge mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z - Km\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= Km\dot{\theta}\vec{e}_\theta - Km\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0} \end{aligned}$$

Exprimons donc $\vec{A} \cdot \vec{e}_r = (m\vec{v} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{e}_r - Km$. Pour le terme de gauche : $\vec{A} \cdot \vec{e}_r = \|\vec{A}\| \cdot \cos((\vec{A}, \vec{e}_r)) = \|\vec{A}\| \cos(-(e_x, \vec{A}) + \theta) = \|\vec{A}\| \cos(\theta - \theta_0)$ en posant $\theta_0 = (e_x, \vec{A})$.

À droite : $(m\vec{v} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{e}_r = (m(i\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \wedge mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_r = m^2r^3\dot{\theta}^2$.

On en déduit que $\|\vec{A}\| \cos(\theta - \theta_0) = m^2r^3\dot{\theta}^2 - Km = m^2r^3\frac{C^2}{r^4} - Km = m^2\frac{C^2}{r} - Km$. On en tire

$$r = \frac{\frac{mC^2}{K}}{1 + \frac{\|\vec{A}\|}{Km} \cos(\theta - \theta_0)}$$

On retrouve bien $e = \frac{\|\vec{A}\|}{Km}$ et $p = \frac{mC^2}{K}$ si $K > 0$ (sinon il faut changer les signes des deux, car l'excentricité doit toujours être positive).

Enfin, on peut effectuer un dernier calcul. On a expliqué auparavant que :

- pour une trajectoire elliptique, $e < 1$ et $E_m < 0$
- pour une trajectoire parabolique, $e = 1$ et $E_m = 0$
- pour une trajectoire hyperbolique, $e > 1$ et $E_m > 0$

Il semble donc qu'il y a une relation entre énergie mécanique et excentricité. On va l'établir.

Calcul : Relation entre l'énergie mécanique et l'excentricité

On pourrait partir de la relation $E_m = \frac{K}{2a}$; mais cette relation n'est vraie que pour les ellipses !

On a donc $r = \frac{p}{1+e \cos(\theta - \theta_0)}$ comme seule relation générale (les demi grand-axe et demi petit-axe ne sont définis que pour les ellipses). Il est évident que ce rayon est minimal lorsque le cosinus est égal à 1 : $r_{min} = \frac{p}{1+e}$. Or en r_{min} , la dérivée de r par rapport au temps est nulle. Donc $E_m = E_{p,eff}(r_{min}) = \frac{mC^2}{2r_{min}^2} + \frac{K}{r_{min}} = \frac{mC^2(1+e)^2}{2p^2} + \frac{K(1+e)}{p}$. Or on a montré dans les démonstrations précédentes que $p = -\frac{mC^2}{K}$, donc $E_m = \frac{mC^2(1+e)^2K^2}{2m^2C^4} - \frac{K^2(1+e)}{mC^2} = \frac{K^2(1+e)}{mC^2} \left(\frac{1+e}{2} - 1\right) = \frac{K^2(1+e)}{mC^2} \frac{e-1}{2}$ d'où on tire

$$E_m = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2 - 1)$$

On retrouve donc que E_m est du signe de $e^2 - 1$, ce qui est cohérent avec les résultats précédents.



Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
<p>Point matériel soumis à un champ de gravitation newtonien.</p> <p>Conservation du moment cinétique. Conservation de l'énergie mécanique.</p> <p>Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.</p>	<p>Établir la conservation du moment cinétique. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.</p> <p>Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.</p> <p>Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.</p>
<p>Mouvement des satellites et des planètes.</p> <p>Lois de Képler.</p> <p>Période de révolution.</p> <p>Satellite géostationnaire.</p>	<p>Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien.</p> <p>Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire.</p> <p>EXPLOITER, À L'AIDE D'UN LANGAGE DE PROGRAMMATION, DES DONNÉES ASTRONOMIQUES OU SATELLITAIRES POUR TESTER LES DEUXIÈME ET TROISIÈME LOIS DE KEPLER.</p>

Mouvements képlériens

QCMs

réponses page 801

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

L'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle entre deux masses m et m' à la distance r s'écrit $E_p =$

(a). $\frac{Gmm'}{r^2}$

(c). $\frac{Gmm'}{r}$

(b). $-\frac{Gmm'}{r^2}$

(d). $-\frac{Gmm'}{r}$

Q2.

Un mouvement Képlérien est borné si et seulement si :

(a). E_m est constant

(c). $E_m < 0$

(b). $E_m > E_p$

(d). le potentiel est attractif

Q3.

Pour un mouvement képlérien elliptique :

(a). $E_m = \frac{K}{a}$

(c). $E_p = -\frac{K}{2a}$

(b). $E_c = \frac{K}{a}$

(d). $E_m = \frac{K}{2a}$

Q4.

Un mouvement képlérien dans un potentiel attractif est toujours périodique :

(a). Faux

(b). Vrai

Q5.

L'excentricité d'une ellipse est définie par :

(a). $e = \frac{r_{max}}{r_{min}}$

(c). $e = \frac{c}{a}$

(b). $e = \frac{\text{distance entre foyers}}{\text{grand axe}}$

(d). $e = \frac{\text{petit axe}}{\text{grand axe}}$

 QCM : Nature et énergie de la trajectoire

— masse de la Terre : $M_T = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$

— rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$

— constante de gravitation : $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ USI}$

Dans cet exercice, c'est le signe de E_m qui compte. Si on ne connaît pas la masse de l'objet, on calcule E_m pour 1 kg, ça suffit pour avoir le signe.

Q6.

On tire un obus depuis la surface de la Terre avec une vitesse égale à $600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Sa trajectoire (en oubliant les frottements au départ) est :

(a). parabolique

(c). elliptique

(b). hyperbolique

Q7.

Une fusée lâche un satellite à 15 000 km du centre de la Terre. Pour que le satellite n'échappe pas à l'attraction terrestre, il faut que sa vitesse soit inférieure à

(a). $5200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(c). $53 000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(b). aucune limite

(d). $7300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Q8.

En fait, on le lance avec une vitesse égale à $5000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Son orbite sera une ellipse de demi grand-axe :

- | | |
|----------------|----------------|
| (a). 28 200 km | (b). 15 000 km |
| (c). 19 600 km | (d). 14 100 km |

Q9.

Une sonde spatiale de 900 kg est lâchée à 13 000 km du centre de la Terre avec une vitesse égale à $7000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour pouvoir s'éloigner indéfiniment de la Terre et explorer d'autres planètes, ses moteurs devront fournir une énergie égale au minimum à :

- | | |
|--------------|----------------|
| (a). 5700 MJ | (b). 27 700 MJ |
| (c). 6 MJ | (d). 22 000 MJ |

QCM : Application de la 3ème loi de Képler

Rappel : la Terre tourne autour du Soleil en $T = 1 \text{ an}$ à une distance moyenne $a = 1 \text{ u.a.} = 150 \times 10^6 \text{ km}$.

Q10.

La planète Vénus tourne autour du Soleil en 224,7 j. Son demi grand-axe vaut :

- | | |
|----------------|----------------|
| (a). 0,72 u.a. | (b). 0,62 u.a. |
| (c). 0,51 u.a. | (d). 0,43 u.a. |

Q11.

Si on suppose sa trajectoire circulaire, sa vitesse vaut :

- | | |
|--|--|
| (a). $14 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ | (b). $3,2 \times 10^{-2} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| (c). $48,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ | (d). $210 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ |

Q12.

La planète Jupiter tourne avec un demi grand-axe égal à 7,20 u.a.. Sa période vaut :

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). 14,2 an | (b). 11,9 an |
| (c). 9,9 an | (d). 10,0 an |

QCM : Lois des ellipses

Aidez-vous d'un dessin !

Q13.

La planète Jupiter tourne avec un demi grand-axe égal à 7,20 u.a.. Son excentricité vaut $e = 0,048$. Sa distance au périhélie vaut :

- | | |
|----------------|----------------|
| (a). 7,20 u.a. | (b). 3,46 u.a. |
| (c). 6,85 u.a. | (d). 7,55 u.a. |

Q14.

La planète Mars décrit une ellipse de rayon compris entre 1,38 u.a. et 1,67 u.a.. Son demi grand-axe vaut :

- | | |
|----------------|----------------|
| (a). 3,04 u.a. | (b). 0,29 u.a. |
| (c). 1,62 u.a. | (d). 1,52 u.a. |

Q15.

et la distance entre ses foyers vaut :

- | | |
|----------------|----------------|
| (a). 0,29 u.a. | (b). 3,04 u.a. |
| (c). 1,52 u.a. | (d). 1,62 u.a. |

Q16.

donc son excentricité vaut :

- (a). 0,191
- (b). 0,095
- (c). 0
- (d). 0,034

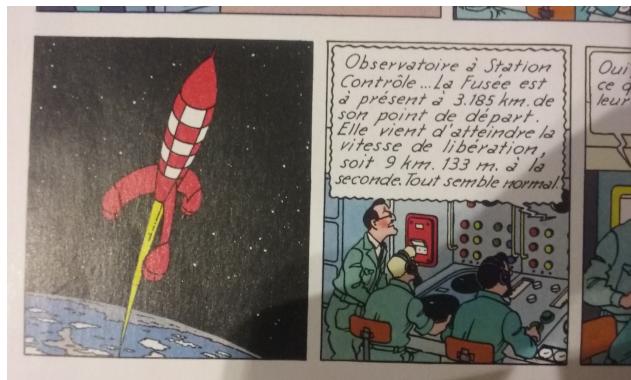
Mouvements képlériens

Exercices

réponses page 802

Exercice M10.1 : Objectif Lune [*]

La vitesse de libération annoncée par l'observatoire de la fusée de Tintin est-elle juste ?



Données : rayon terrestre : $R_T = 6400 \text{ km}$; pesanteur au sol : $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Exercice M10.2 : Trajectoire de la comète de Hale-Bopp [*]

La comète de Hale-Bopp fut la comète la plus visible du XXème siècle. Elle fut découverte le 23 juillet 1995 à une distance de 7,2 u.a. du Soleil. Les caractéristiques de son orbite furent déterminées : orbite elliptique de demi grand-axe $a = 186 \text{ u.a.}$ et d'excentricité $e = 0,995$.

On notera m la masse de la comète, sa valeur est inutile ici. On donne : 1 u.a. = $150 \times 10^6 \text{ km}$, 1 an = $365,25 \text{ j}$ de $86\,400 \text{ s}$, et $GM_S = 4\pi^2 \text{ u.a.}^3 \cdot \text{an}^{-2}$ avec M_S la masse du Soleil.

1. La comète est passée au périhélie en décembre 1996 ; déterminez la distance au Soleil à ce moment-là, et la date de son prochain passage au périhélie.
2. Quelle était sa vitesse au moment où elle a été découverte ? Et à son passage au périhélie ?
3. Calculez sa distance à l'aphélie, et sa vitesse à ce moment-là.

Exercice M10.3 : Orbite de Molnia [*]

Le satellite Molnia-1 lancé en 1965 a été le premier à utiliser une catégorie d'orbite particulières appelées depuis *orbites de Molnia*. Une telle orbite a une apogée à une altitude $h_A = 40\,000 \text{ km}$ et un périgée à une altitude $h_P = 1000 \text{ km}$.

Le rayon de la Terre vaut $R_T = 6400 \text{ km}$; sa masse vaut $M_T = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ et $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ USI}$.

1. Calculez les rayons r_A et r_P de l'orbite à son apogée et à son périgée.
2. Déduisez-en le demi grand-axe a puis la période T de l'orbite.
3. Calculez les paramètres c puis b de l'ellipse, puis l'excentricité e .
4. Calculez l'énergie mécanique du satellite, sachant que sa masse vaut $m = 1650 \text{ kg}$.
5. Calculez les vitesses v_A et v_P du satellite à l'apogée et au périgée.

Exercice M10.4 : Caractéristiques de la trajectoire d'un satellite [*]

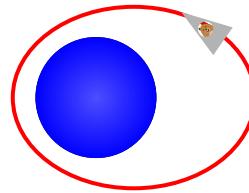
Spoutnik, le premier satellite artificiel, avait une apogée à une altitude au-dessus du sol $h_A = 330 \text{ km}$, et un périgée à $h_P = 180 \text{ km}$.

1. Le rayon terrestre vaut $R_T = 6370 \text{ km}$; en déduire les distances minimale r_{min} et r_{max} entre le satellite et le centre de la Terre au cours de son orbite.

2. Déterminez les caractéristiques géométriques de sa trajectoire (a et e).
3. Calculez sa période connaissant le champ de gravitation $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à l'altitude nulle.

Exercice M10.5 : Le vol de Laïka [**]

La chienne Laïka est le premier être vivant à avoir volé en orbite autour de la Terre, le 3 novembre 1957, dans un satellite Spoutnik-2. Le satellite, de masse $m = 508 \text{ kg}$, a été amené par une fusée jusqu'à son point de lancement, à une altitude $h_0 = 240 \text{ km}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 8130\vec{e}_\theta + 220\vec{e}_r$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Données : rayon terrestre $R_T = 6400 \text{ km}$; pesanteur au sol : $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



1. À partir des CI, calculez numériquement l'énergie mécanique E_m et la constante des aires C du satellite.
Remarque : gardez beaucoup de chiffres significatifs en mémoire dans votre calculatrice.
2. Que vaut r à l'apogée/périgée ? En déduire une équation d'ordre 2 vérifiée par r en ces deux points.
Résoudre cette équation, et déduisez-en les altitudes de Laïka à l'apogée et au périgée.
3. Calculez la période de révolution de Laïka.

Exercice M10.6 : Comète de Halley [**]

La comète de Halley décrit une ellipse autour du Soleil, de période $T = 76,0 \text{ an}$. La distance au périhélie est $r_0 = 0,59 \text{ u.a.}$

1. À l'aide de la troisième loi de Képler, calculez le demi-grand axe a et l'excentricité e .
2. Calculez la vitesse minimale et la vitesse maximale de la comète sur son orbite, dans le référentiel de Copernic.

On donne : 1 u.a. = $150 \times 10^6 \text{ km}$ et 1 an = $365,25 \text{ j}$ de $86\,400 \text{ s}$.

Exercice M10.7 : Lancement manqué d'un satellite [**]

On souhaite lancer un satellite de masse m sur une orbite circulaire autour de la Terre, d'altitude $h_0 = 2100 \text{ km}$.
Données : rayon terrestre $R_T = 6400 \text{ km}$; pesanteur au sol $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Exprimez et calculez la vitesse v_0 qu'il doit avoir sur son orbite.
2. Le lancement est manqué : on le dépose bien à l'altitude h_0 avec une vitesse $\vec{v} = (1 - \varepsilon)v_0\vec{e}_\theta$ avec $\varepsilon \ll 1$.
Déterminez les caractéristiques de la trajectoire : h_{min} , h_{max} , a et e ; AN pour $\varepsilon = 1\%$.
Indication : commencez par exprimer la constante des aires C et l'énergie mécanique E_m du satellite en fonction de $mg_0R_T^2$, $R_T + h_0$ et $1 - \varepsilon$.

Exercice M10.8 : Lancement d'un satellite [**]

Toute l'étude est faite dans le référentiel géocentrique qui est supposé galiléen.

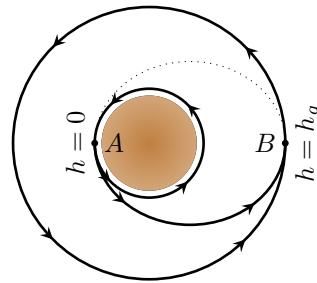
Données : rayon terrestre : $R_T = 6400 \text{ km}$; pesanteur au niveau du sol : $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. **Questions préliminaires**
 - (a) Rappeler la relation entre $G \cdot M_T$, g_0 et R_T où M_T est la masse de la Terre.
 - (b) Exprimez la vitesse v , l'énergie mécanique E_m et la période T d'un satellite terrestre de masse m en orbite **circulaire** à l'altitude h , en fonction de g_0 , R_T et h .
Indication : à l'altitude h , que vaut la distance entre le satellite et le centre de la Terre ?
 - (c) Trouvez le rayon puis l'altitude h_g d'un satellite géostationnaire (qui tourne avec la même période que la Terre), ainsi que sa vitesse v_g dans le référentiel géocentrique.
Indication : la Terre tourne sur elle-même en 1 jour sidéral, soit $86\,164 \text{ s}$.
2. **Lancement du satellite**

Le lancement d'un satellite en orbite géostationnaire se fait en plusieurs étapes.

D'abord, on place le satellite, de masse $m = 1 \text{ t}$, en orbite circulaire basse ($h \approx 0$, vitesse v_1), puis on lui communique brutalement un supplément de vitesse ; sa nouvelle vitesse est alors v'_1 . Il parcourt alors la moitié d'une ellipse qui est à la fois tangente extérieurement à sa trajectoire de départ et tangente intérieurement à la trajectoire géostationnaire.

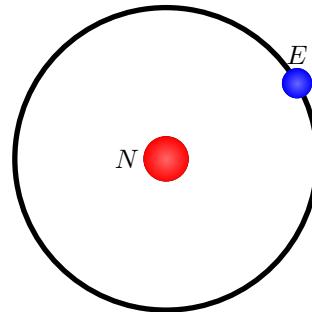
- Calculez la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse, et son énergie mécanique E_1 .
- À partir de la figure, évaluez le demi grand-axe de l'ellipse parcourue (orbite de transfert). Déduisez-en l'énergie mécanique du satellite sur cette trajectoire ainsi que durée du transfert entre les deux orbites (entre A et B).
- En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, calculez le travail W_A fourni au satellite pour le faire passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert.
- Calculez numériquement la vitesse v_2 du satellite sur la trajectoire de transfert au point A . Calculez de même sa vitesse v'_2 sur l'orbite de transfert lorsqu'il atteint le point B .
- Indication :* utilisez la conservation du moment cinétique ou celle de l'énergie mécanique.
- On lui communique alors une nouvelle accélération, et il passe sur l'orbite géostationnaire. Calculez le travail W_B nécessaire pour cette étape.



Exercice M10.9 : Modèle planétaire de l'atome [**]

Après son expérience de bombardement d'une feuille d'or par des particules α , Rutherford a proposé un modèle dit «planétaire» de l'atome d'hydrogène, dans lequel un électron E de masse $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ et de charge $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ tourne autour d'un noyau N immobile et de charge $+e$.

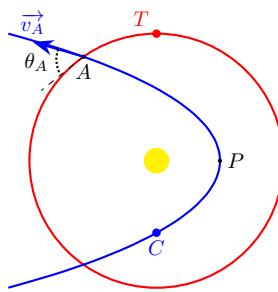
On donne $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ USI}$.



- Rappeler l'expression de la force de N sur E .
- Montrez que le mouvement est plan.
- On suppose que l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon r . Exprimez en fonction de r et des constantes :
 - la vitesse angulaire $\dot{\theta}$
 - la vitesse v
 - l'énergie mécanique E_m
 - le moment cinétique L
- La théorie classique de l'électromagnétisme indique que l'électron en rotation va perdre de l'énergie en émettant de la lumière. La puissance rayonnée vaut $\mathcal{P} = \frac{\dot{\theta}^4 e^2 r^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$
 - Exprimez \mathcal{P} en fonction de r et des constantes. Quel va être l'effet de cette perte d'énergie sur la trajectoire de l'électron ?
 - En appliquant le TEM, montrez que le rayon du cercle obéit à une loi de la forme $r^2 \frac{dr}{dt} = -A$ où A est une constante à exprimer.
 - On suppose que $r(0) = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$; les calculs numériques donnent $A = 4,75 \times 10^{-13} \text{ USI}$. Établir la loi $r(t)$ et calculez le temps que met l'électron à s'écraser sur le noyau. Commentez.
- Pour concilier ce modèle avec l'existence des atomes, Niels Bohr a fait en 1913 un postulat qui a fondé la mécanique quantique : certaines orbites sont stables de manière inexplicable pour le moment. Les orbites stables sont celles dont le moment cinétique est un multiple entier de $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, c'est-à-dire $L = n\hbar$.
 - Montrez que le rayon de l'état n s'écrit $r_n = n^2 r_1$ avec r_1 à exprimer ; on en fera son AN.
 - Montrez que l'énergie mécanique de l'état n s'écrit $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ avec E_1 à exprimer ; on en fera l'AN.

Exercice M10.10 : Trajectoire d'une comète au voisinage de la Terre [**]

La Terre tourne autour du Soleil ; on considérera qu'elle décrit un cercle de rayon $R_0 = 1 \text{ u.a.}$ en $T_0 = 1 \text{ an}$, à une vitesse V_0 . Un jour, une comète approche du Soleil. À son périhélie, elle se trouve à une distance $r_P = \frac{R_0}{2}$ et possède une vitesse $v_P = 1,8V_0$.



1. Reliez V_0 à R_0 et aux constantes.
 2. Exprimez l'énergie mécanique de la comète, et étudiez son signe. Quel est le type de trajectoire ?
 3. On note A le point où la trajectoire de la comète va couper celle de la Terre. Soit v_A la vitesse de la comète en A , et θ_A l'angle entre les 2 trajectoires.
- À l'aide de deux lois de conservation, exprimez v_A puis $v_A \cos \theta_A$. Calculez alors θ_A .

Exercice M10.11 : Effets des frottements sur un satellite [***]

Dans le référentiel géocentrique, un satellite de masse m décrit une orbite quasiment circulaire. Mais sous l'action de l'atmosphère, très raréfiée à son altitude, il subit une force de frottements.

Cette force est très faible dans la pratique. On va donc faire l'approximation suivante : sur une échelle de temps de l'ordre de quelques périodes, son mouvement est toujours circulaire uniforme, comme en l'absence de frottements ; mais sur une échelle de temps longue, le rayon r de sa trajectoire varie lentement.

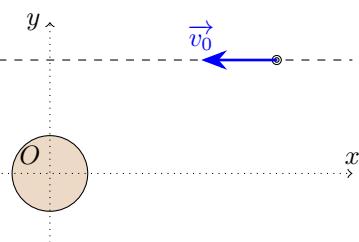
On note M_T la masse de la Terre.

1. Sur un tour, on néglige donc les frottements. Retrouvez rapidement l'expression de la vitesse et de la période du satellite en fonction de r . Retrouvez aussi l'expression de son énergie mécanique E_m .
2. On modélise la force de frottements par une force proportionnelle à la vitesse et opposée : $-\alpha \vec{v}$. Calculez le travail de la force de frottements au cours d'un tour, en fonction de r .
3. Comme r varie lentement, E_m varie aussi très peu sur une période. Par conséquent, on peut effectuer l'approximation suivante : la perte d'énergie mécanique sur une période est égale à $\frac{dE_m}{dt}T$ (il s'agit d'une linéarisation de E_m sur une durée T) : $E_m(t+T) = E_m(t) + \frac{dE_m}{dt}T$. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique sur une durée d'une période, trouvez l'équation différentielle vérifiée par r . Faites-y apparaître une constante τ ayant la dimension d'un temps.
AN : Calculez τ pour $m = 1 \text{ t}$ et $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ USI}$.
4. Résolvez l'ED (en fonction de $r(0)$).
Déduisez-en l'évolution de E_m au cours du temps, puis celle de v . Ce dernier résultat est-il paradoxal ?

Exercice M10.12 : Trajectoire d'un astéroïde [***]

Un astéroïde de masse m inconnue arrive en direction de la Terre de rayon R_T . Alors qu'il est encore loin, il est à une position $\overrightarrow{OM}(0) = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y$ avec une vitesse $-v_0 \vec{e}_x$.

1. Exprimez l'énergie mécanique de l'astéroïde si on suppose qu'il est initialement très loin de la Terre ($x_0 \approx \infty$). Qu'en déduirequant à sa trajectoire ?
2. Exprimez la constante des aires C de l'astéroïde.
3. Établir l'équation permettant de trouver la distance minimale d'approche de l'astéroïde par rapport à la Terre. Donner l'expression de sa racine positive.
4. Montrez que l'astéroïde va éviter la Terre à condition que $v_0 > \frac{v_l}{\sqrt{(y_0/R_T)^2 - 1}}$ où $v_l = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ est la vitesse de libération de la Terre.
AN de cette vitesse limite, sachant que $v_l = 11,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, pour $y_0 = 10R_T$.



Mouvements képlériens

TDs numériques

réponses page 805

TD numérique : Mouvements astronomiques

L'étude du mouvement d'une planète dans un champ de force centrale est simple mais limité ; dès que le modèle se complique un peu, il faut s'atteler à écrire le modèle complet en 3D et à le résoudre.

On rappelle que la force d'un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) de masse m_A sur un point B de coordonnées (x_B, y_B, z_B) de masse m_B s'écrit $\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\frac{Gm_A m_B}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{u}_{AB}$. En remarquant que $\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, on obtient

$$\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\frac{Gm_A m_B}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB} = -\frac{Gm_A m_B}{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)^{3/2}} ((x_B - x_A) \vec{e}_x + (y_B - y_A) \vec{e}_y + (z_B - z_A) \vec{e}_z) \quad (\text{M10.6})$$

Dans tout ce TD on travaillera avec comme unités : l'unité astronomique (u.a.) pour les distances, les années (an) pour les durées et les unités de masses solaires (M_\odot) pour les masses. Dans ce système d'unités, $G = 4\pi^2 u.a.^3 \cdot an^{-2} \cdot M_\odot^{-1}$

- Écrivez une fonction `force(xA,yA,zA,mA,xB,yB,zB,mB)` qui renvoie la liste des trois composantes de la force de A sur B .
- On considère la planète Mars, de masse $m_M = 3,2 \times 10^{-7} M_\odot$, qui tourne autour du Soleil à la distance moyenne $a_M = 1,52$ u.a.. Calculez, à l'aide de la troisième loi de Képler, la période de sa révolution T_M , puis sa vitesse moyenne v_M sur son orbite.
- En utilisant la fonction `force` précédente, résolvez par `odeint`, le mouvement de Mars sur une durée de 5 périodes, avec comme conditions initiales : $\vec{S}(0) = a_M \vec{e}_x$ et $\vec{v}(0) = v_M \vec{e}_y$. Vérifiez que z reste nul ; tracez la trajectoire dans le plan xy et vérifiez qu'elle est quasiment circulaire (utilisez `plt.axis('equal')` pour avoir une figure orthonormée).

Rappel : pour récupérer les trois composantes de la force, écrivez `fx,fy,fz=force(...)`

4. Comète Hale-Bopp

La comète Hale-Bopp (masse $6,6 \times 10^{-15} M_\odot$) a une trajectoire fortement elliptique. À son aphélie, elle se trouve à 371 u.a. du soleil avec une vitesse égale à 24×10^{-3} u.a. · an $^{-1}$. Simulez sa trajectoire sur 5000 an.

5. Précession de la Lune

La Lune a un mouvement plus compliqué car elle est soumise à l'attraction de la Terre et du Soleil. On propose la modélisation suivante :

- le Soleil est toujours immobile au centre du repère (référentiel héliocentrique)
- la Terre (masse $3 \times 10^{-6} M_\odot$) tourne selon un mouvement circulaire de coordonnées

$$\begin{cases} x_T = a_T \cos(\omega_T t) \\ y_T = a_T \sin(\omega_T t) \text{ avec } a_T \text{ et } \omega_T \text{ à connaître} \\ z_T = 0 \end{cases}$$
- la Lune de masse $3,8 \times 10^{-8} M_\odot$ est soumise à l'attraction de ces deux astres ; on prendra comme point de départ la nouvelle lune avec les données : $x(0) = 0,9973$ u.a. (Lune à l'apogée) et comme vitesse initiale $\vec{v}(0) = 6,08 \vec{e}_y + 0,02 \vec{e}_z$ en u.a. · an $^{-1}$ (valeur compliquée à trouver, il faut ajouter la vitesse de la Lune autour de la Terre à celle de la Terre autour du Soleil ; de plus la vitesse selon z n'est pas nulle).

Simulez le mouvement de la Lune, soumise à l'attraction du Soleil et de la Terre, sur une durée de 6 mois pour commencer. Tracez la trajectoire dans le plan xy ; vous devez voir essentiellement un demi-cercle (celui décrit par la Terre) légèrement modifié.

- Calculez les tableaux donnant $x' = x_{\text{Lune}} - x_{\text{Terre}}$, $y' = y_{\text{Lune}} - y_{\text{Terre}}$ et $z' = z_{\text{Lune}} - z_{\text{Terre}}$, c'est-à-dire les coordonnées le référentiel géocentrique. Tracez alors la trajectoire dans le plan $x'y'$.

Pour mieux voir ce qui se passe, tracez en 3D à l'aide du programme :

```

1 fig=plt.figure()
2 ax = fig.add_subplot(projection='3d')
3 ax.plot(tab_xp,tab_yp,tab_zp)
4 plt.show()

```

et essayez d'observer la précession de la Lune (rotation de l'axe de révolution, comme une toupie).

7. La planète Képler-16B, surnommée «Tatooine», tourne autour d'une étoile double. Vous pouvez essayer de simuler sa trajectoire avec les données suivantes :

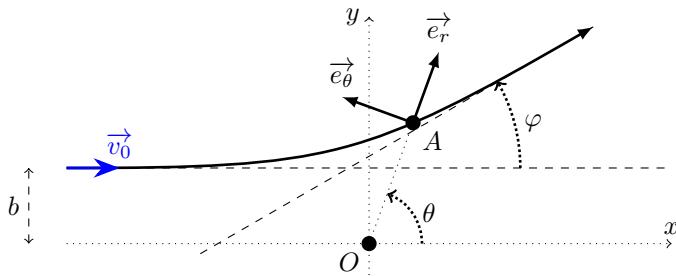
- une première étoile de masse $m_1 = 0,69 M_{\odot}$ tourne autour du centre du système avec un rayon $r_1 = 0,05$ u.a. en $T = 41$ j (à convertir en années)
- une seconde étoile de masse $m_2 = 0,203 M_{\odot}$ tourne autour du centre du système avec un rayon $r_2 = 0,17$ u.a. en $T = 41$ j (pensez au départ à la mettre du côté opposé à la première étoile)
- une planète de masse $m_T = 3,3 \times 10^{-4} M_{\odot}$ tourne autour de l'ensemble avec un demi-grand axe moyen $a_T = 0,705$ u.a. et une période moyenne T_T donnée par la troisième loi de Képler.

en supposant le mouvement plan, une distance initiale égale à a_T et une vitesse initiale égale à la vitesse moyenne de la planète sur son orbite. Observez en zoomant que la perturbation de la trajectoire dû à la présence de 2 étoiles est très faible.

TD numérique : Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford réalisée en 1909 a permis de préciser le modèle de l'atome, car elle a montré qu'un atome est constitué essentiellement de vide. Rutherford a bombardé une mince feuille d'or avec des particules α , c'est-à-dire des noyaux d'hélium issus de désintégrations radioactives, de masse $m_{\alpha} = 6,8 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q_{\alpha} = +2.e$ avec $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C.

On suppose que le noyau d'un atome d'or est quasiment ponctuel (point O), immobile (car très lourd par rapport à une particule α) et chargé avec une charge $Z.e$ où $Z = 79$ est le numéro atomique de l'or. La particule α (repérée par le point A) arrive de l'infini avec une vitesse v_0 selon \vec{e}_x ; le prolongement de sa trajectoire (si elle allait tout droit et n'était pas repoussée par le noyau d'or) passe à une distance b du point O , appelée paramètre d'impact. Mais en réalité la trajectoire de A va être modifiée, et elle va passer à une distance supérieure à b .



Dans ce TD, on va simuler la trajectoire de la particule en fonction du paramètre b . Pour cette simulation, les coordonnées cylindriques sont inadaptées à cause de la forme particulière des conditions initiales. On va donc repérer le point par $\overrightarrow{OA} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ dans le plan. On rappelle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$ USI.

1. Les particules α arrivent avec une énergie cinétique $E_{c0} = 5$ MeV. Calculez la vitesse v_0 dans l'hypothèse non-relativiste ; commentez.
2. Comment s'écrit la force du noyau sur la particule α , en coordonnées polaires puis cartésiennes ?
3. En déduire les expressions de \ddot{x} et \ddot{y} .
4. À l'aide d'une méthode numérique, tracez la trajectoire de la particule avec les conditions suivantes : $b = 4r_0$ où $r_0 = 200^{1/3} \times 1,4$ fm est le rayon du noyau ; $x(0) = -15r_0$; temps de simulation $2\frac{|x(0)|}{v_0}$.
5. Soit \vec{v}_{∞} la vitesse de la particule longtemps après être passée près du noyau. On pose $\vec{v}_{\infty} = v_{x\infty}\vec{e}_x + v_{y\infty}\vec{e}_y$. Reliez théoriquement φ à $v_{x\infty}$ et $v_{y\infty}$. Affichez alors l'angle φ à la fin de la simulation. On rappelle que le dernier élément d'un tableau s'obtient en Python avec l'indice -1 .
6. Pour 50 paramètres d'impacts b compris entre $r_0/10$ et $10r_0$, simulez la trajectoire de la particule, puis :
 - calculez le rayon minimal d'approche r_{min} de la particule (à l'aide de `numpy.min`), et stockez-la dans un tableau
 - calculez l'angle de déviation φ , et stockez-le dans un autre tableau.

Tracez alors $r_{min}(b)$ et $\varphi(b)$. Commentez.

7. Pour déterminer le rayon du noyau, Rutherford a observé le nombre de particules α déviées pour différents angles, et leur répartition.

Modifiez le programme pour avoir 2500 valeurs de b . Utilisez alors la fonction `plt.hist` pour tracer l'histogramme des valeurs de φ .

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(d)

Q2.(c)

Q3.(d)

Q4.(a)

Q5.(b) ET (c)

Réponses au QCM : Nature et énergie de la trajectoire

Q6.(c)

L'énergie mécanique pour 1 kg vaut $\frac{1}{2} \left(\frac{600}{3,6} \right)^2 - \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24}}{6400000} = -63 \text{ MJ} < 0$.

Q7.(d)

Il faut que $\frac{1}{2}v^2 - \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{23}}{15000000} < 0$.

Q8.(d)

$\frac{1}{2}5000^2 - \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{23}}{15000000} = \frac{6,7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{23}}{2a}$

Q9.(a)

L'opposé de son énergie mécanique initiale.

Réponses au QCM : Application de la 3ème loi de Képler

Q10.(a)

Q11.(c)

$v = \frac{2\pi a}{T}$

Q12.(b)

Réponses au QCM : Lois des ellipses

Q13.(c)

$r_{min} = a(1 - e)$.

Q14.(d)

$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2}$

Q15.(a)

$2c = r_{max} - r_{min}$.

Q16.(b)

$e = \frac{c}{a}$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice M10.1 : Objectif Lune [*]

Pour que la fusée s'échappe de la Terre, l'énergie mécanique doit être positive, soit $v > \sqrt{\frac{2g_0R_T^2}{R_T+h}} = < 9150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La différence peut provenir du rayon terrestre, car la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

Réponses de l'exercice M10.2 : Trajectoire de la comète de Hale-Bopp [*]

- $r_{min} = a(1 - e) = 0,93 \text{ u.a.}$

Par la troisième loi de Képler : T=2536 ans et 8 mois environ, donc prochain rendez-vous en août 4533.

- $v = \sqrt{GM_S \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 16,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Par le même calcul au périhélie à une distance de 0,93 u.a. on trouve $v = 45,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

- $r_{max} = a(1 + e) = 371 \text{ u.a. et } v = 0,11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M10.3 : Orbite de Molnia [*]

- $r_P = 7400 \text{ km et } r_A = 46\,400 \text{ km}$

- $a = \frac{r_A+r_P}{2} = 26\,900 \text{ km donc } T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}} = 43\,800 \text{ s} = 12 \text{ h}10 \text{ min}$

- $c = \frac{r_A-r_P}{2} = 19\,500 \text{ km puis } b = \sqrt{a^2 - c^2} = 18\,500 \text{ km et } e = \frac{c}{a} = 0,725$

- $E_m = -\frac{GM_T m}{2a} = -12,3 \text{ GJ}$

- À l'apogée : $\frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GM_T m}{r_A} = E_m$ d'où on tire $v_A = 1,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

De même $v_P = 9,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M10.4 : Caractéristiques de la trajectoire d'un satellite [*]

- $r_{min} = R_T + h_P = 6550 \text{ km et } r_{max} = R_T + h_A = 6700 \text{ km}$

- $a = \frac{r_{min}+r_{max}}{2} = 6630 \text{ km et } e = 0,011$.

- La loi de la gravitation au sol donne $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$. Alors par la troisième loi de Képler : $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{g_0 R_T^2}} = 5400 \text{ s} = 1 \text{ h}30 \text{ min}$

Réponses de l'exercice M10.5 : Le vol de Laïka [**]

- $E_m = -13,9 \text{ GJ et } C = 54 \times 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

- $E_m r^2 + g_0 R_T^2 mr - \frac{mC^2}{2} = 0$ soit $r_A = 8048 \text{ km}$ (altitude 1648 km) et $r_P = 6612 \text{ km}$ (altitude 212 km).

- Troisième loi de Képler : $T = 6223 \text{ s} = 1 \text{ h}44 \text{ min}$

Réponses de l'exercice M10.6 : Comète de Halley [**]

- $a = 76^{2/3} = 17,96 \text{ u.a.} = 2,69 \times 10^{12} \text{ m et } e = 1 - \frac{r_0}{a} = 0,967$.

- $v_{min} = \sqrt{\frac{GM_S}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = 0,18 \text{ u.a.} \cdot \text{an}^{-1} = 910 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{max} = \sqrt{\frac{GM_S}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 145 \text{ u.a.} \cdot \text{an}^{-1} = 54\,400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice M10.7 : Lancement manqué d'un satellite [**]

- $v_0 = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T+h_0}} = 6872 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$2. C = (1 - \varepsilon) \sqrt{g_0 R_T^2 (R_T + h_0)} \text{ et } E_m = \frac{mg_0 R_T^2}{R_T + h_0} \left(\frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - 1 \right).$$

On sait aussi que $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{mg_0 R_T^2}{r}$. Au périgée et à l'apogée, $\dot{r} = 0$. On résout donc $\dot{r} = 0 \Leftrightarrow E_m r^2 + mg_0 R_T^2 r - \frac{mC^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{R_T + h_0} = \frac{-1 \pm (1-(1-\varepsilon)^2)}{(1-\varepsilon)^2 - 2}$

On a donc
$$\begin{cases} h_{min} = \frac{(1-\varepsilon)^2}{2-(1-\varepsilon)^2} (R_T + h_0) - R_T = 1768 \text{ km} \\ h_{max} = \frac{2-(1-\varepsilon)^2}{2-(1-\varepsilon)^2} (R_T + h_0) - R_T = h_0 = 2100 \text{ km} \\ a = \frac{R_T + h_{min} + R_T + h_{max}}{2} = \frac{R_T + h_0}{2-(1-\varepsilon)^2} = 8334 \text{ km} \\ e = \frac{h_{max} - h_{min}}{2a} = 1 - (1 - \varepsilon)^2 = 2\% \end{cases}$$

Réponses de l'exercice M10.8 : Lancement d'un satellite [**]

1. Questions préliminaires

(a) $GM_T = g_0 R_T^2$

(b) — la vitesse vaut $v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + h}}$

— l'énergie mécanique vaut $E = \frac{1}{2} m \frac{g_0 R_T^2}{R_T + h} - \frac{g_0 R_T^2 m}{R_T + h} = -\frac{mg_0 R_T^2}{2(R_T + h)}$

— la période vaut $T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$

(c) $h_g = 35\ 900 \text{ km}$ (ou $R_T + h = 42\ 300 \text{ km}$)

À cette altitude on trouve $v_g = 3100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. Lancement du satellite

(a) On trouve $v_1 = 7900 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $E_1 = -31,4 \text{ GJ}$ avec les formules précédentes.

(b) $a = 24\ 300 \text{ km}$ donc $E_2 = -8,2 \text{ GJ}$ et le transfert dure 5 h 12 min

(c) Par le TEM : $E_2 - E_1 = W_A$ (la force du moteur n'est pas conservative) donc $W_A = 23,2 \text{ GJ}$

(d) $v_2 = 10\ 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ puis $v'_2 = 1600 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(e) L'énergie sur l'orbite géostationnaire vaut $E_g = -4,7 \text{ GJ}$ donc le travail à fournir vaut $E_g - E_2 = 3,5 \text{ GJ}$

Réponses de l'exercice M10.9 : Modèle planétaire de l'atome [**]

1. $\vec{f} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{NE^2} \vec{e}_r$

2. Cours.

3. $v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{mr}}$ puis $E_m = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{2r}$ et enfin $L = mr^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} me^2 r}$

4.

(a) $\mathcal{P} = \frac{e^6}{192\pi^3 \varepsilon_0^3 c^3 m^2 r^4}$

L'électron perdant de l'énergie, le rayon de sa trajectoire va diminuer et il va s'écraser sur le noyau.

(b) Par le TEM : $r^2 \frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 c^3 m^2} = -A = -4,75 \times 10^{-13} \text{ USI}$

(c) On sépare les variables et on intègre : $r(t) = \sqrt[3]{r(0)^3 - 3At}$

On trouve que $r = 0$ lorsque $t = \frac{r(0)^3}{3A} = 8,9 \times 10^{-7} \text{ s}$: autrement dit, en moins d'une microseconde, tous les atomes ont cessé d'exister. Ce modèle pose donc de gros problèmes.

5.

(a) $r_n = n^2 r_1$ avec $r_1 = 53 \text{ pm}$

(b) $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = -2,2 \times 10^{-18} \text{ J} = -13,7 \text{ eV}$

Réponses de l'exercice M10.10 : Trajectoire d'une comète au voisinage de la Terre [**]

1. $V_0^2 = \frac{GM_S}{R_0}$

2. $E_m < 0$ donc la trajectoire est une ellipse.

3. Par conservation de l'énergie : $v_A = V_0 \sqrt{1,8^2 - 2} = 1,1V_0$

Par conservation du moment cinétique : $V_A \cos \theta_A = 0,9V_0$.

On en déduit que $\cos \theta_A = 0,8$ donc $\theta_A = 37^\circ$

Réponses de l'exercice M10.11 : Effets des frottements sur un satellite [***]

1. $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}}$ et $E_m = -\frac{GM_T m}{2r}$.
2. $W = -\alpha \cdot v \cdot 2\pi r = -2\pi\alpha\sqrt{GM_T r}$.
3. D'après le TEC : $\dot{r} = -\frac{r}{\tau}$ avec $\tau = \frac{m}{2\alpha}$.
AN : $\tau = 5 \times 10^7$ s soit 1 an et 7 mois environ.
4. On a alors $r(t) = r(0)e^{-t/\tau}$, d'où $E_m(t) = E_m(0)e^{+t\tau}$ et $v(t) = v(0)e^{+t/2\tau}$.

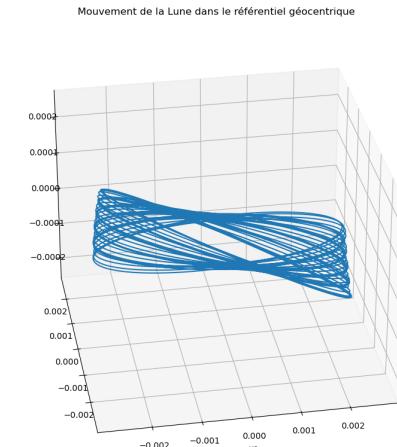
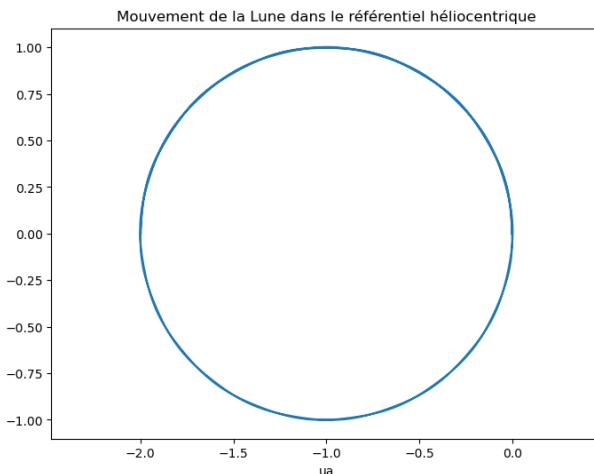
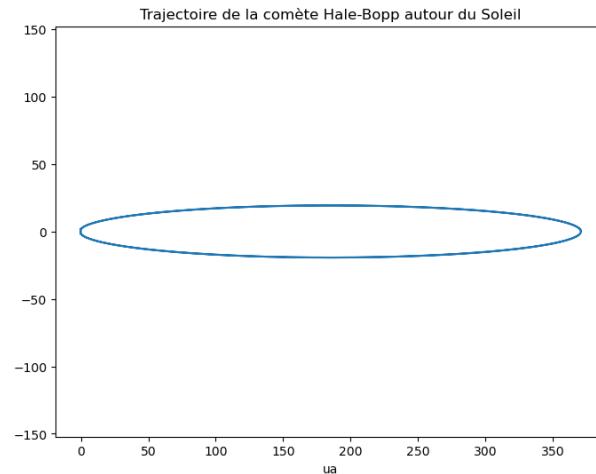
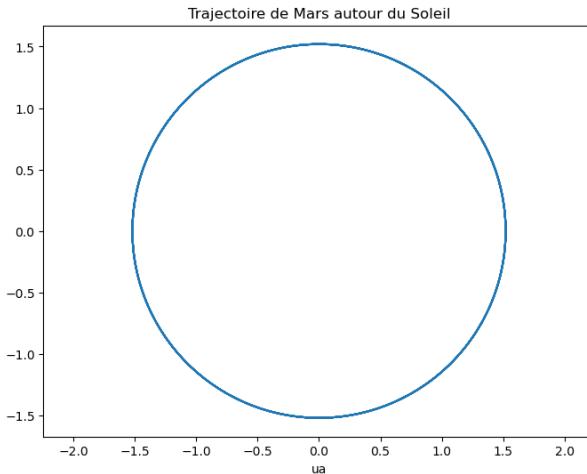
Réponses de l'exercice M10.12 : Trajectoire d'un astéroïde [***]

1. $E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 > 0$ donc la trajectoire est une hyperbole.
2. $C = y_0 v_0$
3. Au plus proche : $\dot{r} = 0$ donc $\frac{1}{2}v_0^2 r^2 + GM_T r - \frac{y_0^2 v_0^2}{2} = 0$.
Solution : $r_{min} = \frac{-GM_T + \sqrt{(GM_T)^2 + y_0^2 v_0^4}}{v_0^2}$. Pour qu'il n'y ait pas collision avec la Terre, il faut que $r_{min} > R_T$ d'où on tire
Avec $y_0 = 10R_T$, on trouve $v_0 > \frac{v_L}{\sqrt{99}} = 1,14 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Mouvements astronomiques

La résolution de ces systèmes ne pose pas de problèmes particuliers, hormis les erreurs de frappe :

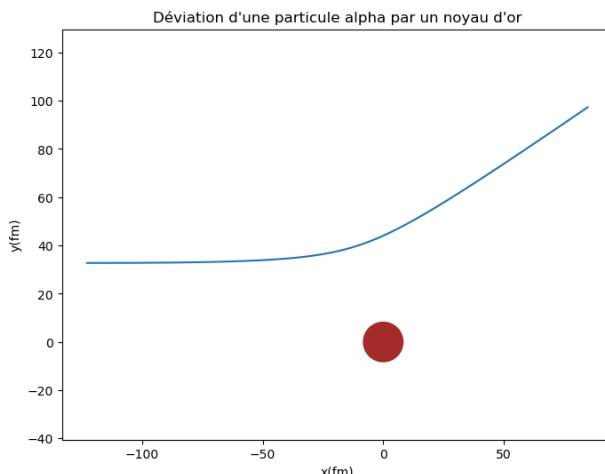


Réponses au TD d'info : Expérience de Rutherford

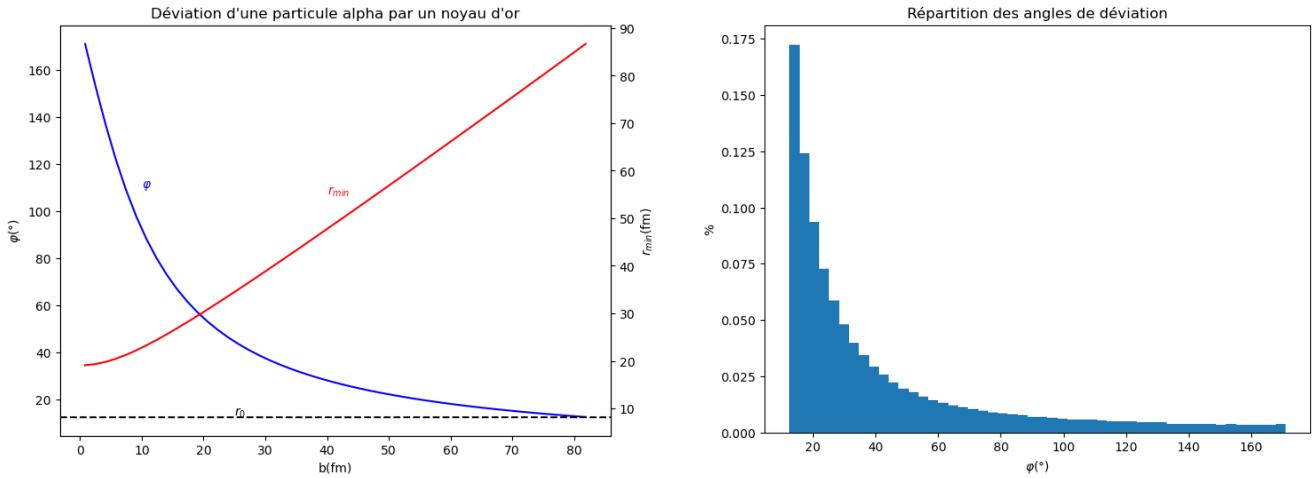
On a $v_0 = 1,5 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc on est en-dessous de la limite relativiste. La particule obéit alors aux équations

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha} \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

qu'on résout avec un schéma d'Euler utilisant 5 tableaux : `tab_t`, `tab_x`, `tab_y`, `tab_dx` et `tab_dy`.



L'angle final se trouve par l'équation $\tan \varphi = \frac{v_{y\infty}}{v_{x\infty}}$ tandis que le rayon minimal se trouve en prenant le minimum de $\sqrt{x^2 + y^2}$.



On constate qu'avec la vitesse initiale choisie, les particules α ne rentrent jamais en collision avec le noyau.

Changements d'état

Cours

T4.A. Description des transitions de phases / changements d'état d'un corps pur

A.1. Description générale

Définition : Phase

On appelle phase une portion d'un système où toutes les variables intensives sont continues mathématiquement.

Par exemple, dans un verre d'eau, on voit clairement à l'œil la séparation entre l'eau, l'air au-dessus de l'eau, et le verre autour de l'eau. Pourquoi ? à cause de la réfraction des rayons lumineux, due à une discontinuité de l'indice optique, elle-même due à une discontinuité de la masse volumique au passage eau/air/verre. On a donc 3 phases différentes. Si on verse de l'huile dans l'eau, celle-ci forme une phase au-dessus de l'eau, et il y a une nouvelle discontinuité de masse volumique au passage eau/huile.

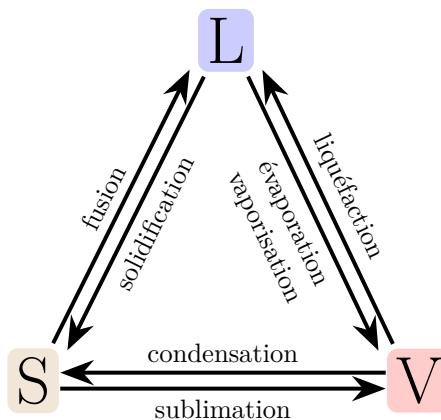
Mais dans cet exemple, on considère différents corps purs : eau, verre, air, huile. Même avec le même corps pur, on peut avoir plusieurs phases, qui correspondent à différents états de ce corps pur : solide, liquide, gaz ou vapeur, mais aussi d'autres états plus spécifiques comme les *formes allotropiques* qu'on n'abordera pas ici.

Remarque : Quand on étudie les changements d'état, en particulier les gaz susceptibles de devenir liquides, on parle de *vapeur* plutôt que de *gaz* ; mais au final, c'est quasiment la même chose.

Définition : Transition de phase / changement d'état

On appelle transition de phase ou changement d'état une transformation au cours de laquelle une partie du système change d'état.

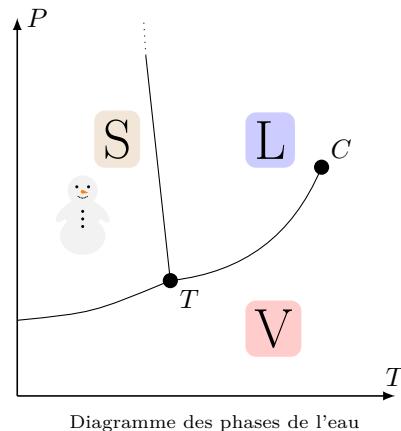
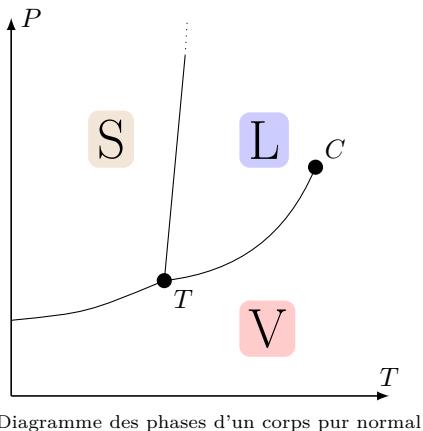
Les changements d'état entre les états Solide/Liquide/Vapeur ont des noms qu'il faut connaître :



L'observation de l'eau, par exemple, nous montre que l'état d'un corps pur dépend des conditions dans lesquelles il se trouve, essentiellement sa température et sa pression. On peut alors observer pour plein de couples (T, P) quel est l'état qui est stable pour un corps pur donné, et noter cela dans un graphique.

Définition : Diagramme des phases

Le diagramme des phases (ou diagramme d'existence des phases) est la représentation dans le plan (T, P) de l'état stable à une température et une pression donnée. Il a la même allure pour tous les corps purs :



On remarque sur ce diagramme :

- 3 domaines correspondant aux domaines d'existence du solide, du liquide et de la vapeur
- 3 courbes qui séparent ces domaines : la frontière S/L s'appelle la **courbe de fusion** ; la frontière S/V s'appelle la **courbe de sublimation** ; la frontière L/V s'appelle la **courbe de vaporisation**
- les trois frontières se retrouvent un seul point T appelé **point triple**. C'est le seul couple (T, P) pour lequel on peut retrouver les 3 états du corps pur à l'équilibre. Par exemple, pour l'eau : $T_T = 0,01\ ^{\circ}\text{C} = 273,16\text{ K}$ (c'est la définition officielle du Kelvin) et $P_T = 611\text{ Pa}$.
- la courbe de vaporisation s'arrête en un point C appelé **point critique**. Plus on s'approche de ce point critique, plus le liquide voit sa masse volumique diminuer tandis que celle du gaz augmente ; en C , les deux phases deviennent identiques. Par exemple, pour l'eau : $T_C = 374,15\ ^{\circ}\text{C}$ et $P_C = 221,2\text{ bar}$.
- la courbe de fusion a une pente positive pour tous les corps purs sauf pour l'eau et quelques rares autres exceptions.

Remarque : Le diagramme précédent décrit l'état **à l'équilibre**. Mais on peut être hors de l'équilibre de deux manières :

- d'abord pour des raisons *cinétiques* : le passage d'un état à l'autre prend du temps. Par exemple, si on pose un verre d'eau sur une table, il est à environ 298 K sous une pression faible (la pression qui compte est la pression partielle en vapeur d'eau dans l'air) : le diagramme des phases indique que l'eau devrait être sous forme de vapeur. Et effectivement, si on attend plusieurs jours, l'eau liquide va s'évaporer ; mais ce phénomène est suffisamment lent pour qu'on ait le temps de boire le verre avant que tout ne soit vaporisé.
- ensuite, pour des raisons *thermodynamiques* : l'état stable correspond à un minimum de l'énergie du système¹. Mais pour atteindre ce minimum, il peut y avoir sur le chemin une *barrière d'énergie* qui empêche le système d'évoluer (comme en chimie). Le système reste alors dans un état *métastable*, c'est-à-dire un minimum local d'énergie ; et il peut y rester longtemps.

Par exemple, le bâtiment où je me trouve est dans un état métastable : il serait dans un état beaucoup plus stable s'il s'écroulait en un tas de ruines. Mais tant qu'on ne lui fournit pas l'énergie nécessaire pour surmonter la barrière d'énergie imaginée par les maçons qui l'ont construite, il restera dans cet état. Par contre, un bon coup d'explosif lui permettrait de franchir cette barrière et d'atteindre un état d'équilibre d'énergie finale plus basse.

On retrouve la même chose avec les changements d'état : un corps pur peut se retrouver dans la zone où il son état est instable, mais il y reste tant qu'on ne l'aide pas à franchir la barrière d'énergie. Trois exemples sont courants :

- l'eau surfondue : de l'eau à une température inférieure à $0\ ^{\circ}\text{C}$ sous 1 bar devrait être solide, mais elle peut rester liquide quelques temps. Par exemple, on ouvre une bouteille d'eau minérale (pour avoir une eau très propre, sans poussières), et on la place au congélateur : elle reste liquide même en-dessous de $0\ ^{\circ}\text{C}$; mais si on la verse, le choc donne l'énergie nécessaire à la transformer en glace. Voir par exemple [cette vidéo](#) (jusqu'à 3min).

1. En fait, de l'énergie libre, mais c'est une notion trop compliquée pour cette année.

C'est le même phénomène qui est responsable des pluies verglaçantes (figure T4.1(a)). Quand l'eau de pluie tombe sur un sol froid, elle a le temps le plus souvent de ruisseler avant de se solidifier, formant ainsi des plaques de glace, mais uniquement dans les creux. Par contre, quand de l'eau surfondue tombe du ciel, elle se solidifie instantanément là où elle touche le sol, provoquant un tapis continu de glace, même sur les pentes.

De même, le brouillard givrant est un brouillard de gouttelettes d'eau surfondue qui, dès qu'elles touchent un obstacle, gèlent, formant des aiguilles de diverses formes sur les plantes (figure T4.1(b)).



(a) Pluie verglaçante sur une voiture



(b) Brouillard givrant

FIGURE T4.1 – Manifestation du phénomène d'eau surfondue.

- les traînées blanches laissées par les avions se forment lorsqu'il y a dans l'air de l'eau sous forme vapeur alors qu'elle devrait être solide ou liquide. Le passage de l'avion crée des tourbillons et dépose des particules, qui entraînent le changement d'état de l'eau.
- dans un four à micro-ondes, l'eau est chauffée par les ondes ; le centre des gouttes d'eau est plus chauffé que le bord. Du coup, une goutte d'eau peut se retrouver un surébullition : le centre devrait être vapeur, mais la transformation effective ne se fait que lorsque le bord de la goutte, en contact avec l'extérieur, atteint la température de vaporisation. À ce moment-là, la goutte se vaporise brutalement, provoquant des jets en tous sens.

Remarque : La pente inversée de la courbe S/L est due à un phénomène remarquable : l'eau est un des rares corps pur pour lequel la phase solide (la glace) est moins dense que la phase liquide ; c'est pour cela que les icebergs ou les glaçons flottent.

La conséquence est la suivante : quand on appuie sur de la glace pas trop froide, l'augmentation de pression fait passer le système dans le domaine du liquide. Quand on marche donc (ou qu'on roule) sur de la glace pas trop froide, la surface de la glace fond, et une pellicule d'eau liquide se forme sous notre pied. Résultat : au lieu que notre pied tienne bien sur le solide (glace) grâce aux lois de frottements de Coulomb, il se retrouve à glisser car le liquide ne le retient pas. Plus la glace est froide, moins ce passage vers le liquide est possible, et moins on glisse.

Remarque : L'ébullition est un phénomène différent de la vaporisation. Un verre d'eau à une température inférieure à 100 °C se vaporise (ou s'évapore) ; le phénomène de changement d'état n'a lieu qu'en surface, là où la pression partielle en vapeur d'eau est faible. Mais quand on atteint 100 °C, le point (100 °C, 1 bar) se retrouve sur la courbe de vaporisation : les bulles de vapeur d'eau qui se forment au fond de la casserole grossissent, et le passage L/V s'effectue dans tout le volume, donc bien plus rapidement.

La courbe de vaporisation correspond aux couples (T, P) pour lesquels on peut avoir coexistence du liquide et de la vapeur à l'équilibre. Cette courbe est monotone, et définit donc une bijection de T vers P ou de P vers T .

Définition : Température de vaporisation

La température de vaporisation $T_{vap}(P)$ d'un corps pur à la pression P est la seule température pour laquelle le liquide et la vapeur peuvent coexister à l'équilibre sous la pression P .

On définit de même la température de fusion et la température de sublimation.

Remarque : Pour l'eau : $T_{vap}(1 \text{ bar}) = 100^\circ\text{C}$ et $T_{fus}(1 \text{ bar}) = 0^\circ\text{C}$.

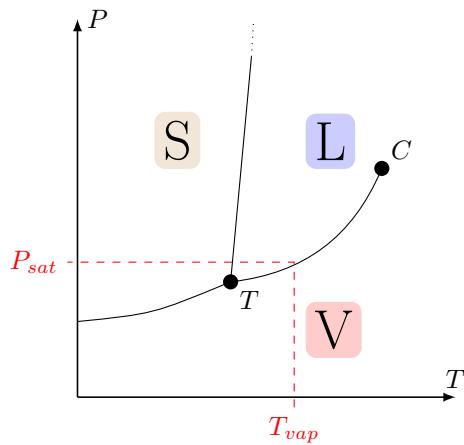


FIGURE T4.2 – Pression de vapeur saturante et température de vaporisation.

Définition : Liquide saturant, vapeur saturante

Lorsque le liquide et la vapeur sont à l'équilibre, on dit qu'on a de la vapeur saturante et du liquide saturant.

Définition : Pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante $P_{sat}(T)$ d'un corps pur à la température T est la seule pression pour laquelle le liquide et la vapeur peuvent coexister à l'équilibre à la température T .

On définit la même chose pour la sublimation à des températures en-dessous du point triple.

Remarque : on parle parfois de *vapeur sèche* pour de la vapeur à une pression inférieure à $P_{sat}(T)$.

A.2. Changement d'état à pression constante

On a tous effectué un jour un changement d'état, en mettant de l'eau dans une casserole sur une plaque chauffante. On va ici considérer l'expérience plus complète où on part de glace (ou de solide en général) qu'on place sur une plaque chauffante qui apporte de l'énergie au système ; le système reste en permanence sous la même pression P . La figure T4.3 montre ce qui se passe.

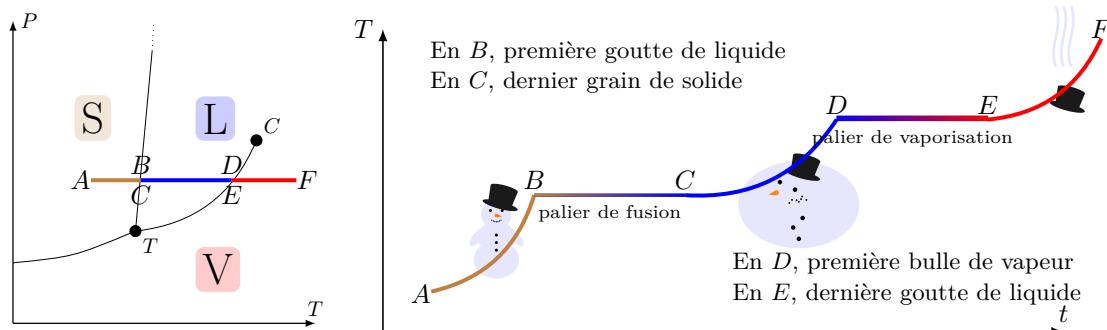


FIGURE T4.3 – Évolution de la température lorsqu'on chauffe un solide à pression constante.

On constate que la courbe se découpe en différents morceaux :

- sur les portions AB , CD et EF , le système est sous forme d'une seule phase ; lorsqu'on le chauffe, sa température augmente.
- sur les portions BC et DE , on observe des *paliers*. En B par exemple, le solide a atteint sa frontière d'existence. Sa température ne peut plus augmenter, car sinon il se retrouve dans le domaine du liquide. Le solide commence donc à fondre. **L'apport d'énergie de la part de la plaque ne se traduit plus par une augmentation de température, mais par un changement d'état.** Tant que tout le solide n'est pas devenu du liquide, la température ne peut pas changer : on appelle cela le **palier de fusion**. De même, entre D et E on observe le palier de vaporisation.

Remarque : Quand on fait cuire des pâtes ou du riz, rien ne sert de chauffer à gros bouillons : quand l'eau bout, que ce soit à gros ou petit bouillon, elle est à $T_{vap}(P)$ et la cuisson des aliments dépend uniquement de la température. Si on veut cuire plus vite, il faut augmenter $T_{vap}(P)$, et pour cela il faut augmenter P : c'est le principe de la cocotte-minute. À l'inverse, à Mexico où la pression est faible, l'eau bout vers 80 °C et il faut faire cuire plus longtemps.

A.3. Changement d'état à température constante

On pense rarement à effectuer des changements d'état par variation de pression. Pourtant, on peut très bien changer l'état d'un corps pur en modifiant sa pression à température constante. On a déjà parlé des glissades sur la glace, dues à une augmentation de la pression qui transforme le solide en liquide. Une diminution de pression peut aussi, par exemple, entraîner la transformation de liquide en gaz ; c'est ce qui se passe quand on fait craquer ses doigts.

Pour étudier ces changements d'état dans le cas L/V, on utilise un dispositif comme celui représenté ci-contre, où une quantité de fluide enfermée dans une ampoule baigne dans un bain thermostatisé à la température T . Un système (le volant en-dessous) permet de faire varier le volume du fluide, et on mesure sa pression. On note alors les couples de valeurs (P, V) et on les rapporte dans un **diagramme de Clapeyron**.



Étude des isothermes de SF₆ (Crédit : Didalab)

Quand on procède ainsi, on observe que les isothermes pour les températures inférieures à la température T_C du point critique ressemblent à celles de l'animation de la figure T4.4 qui permet de faire varier le volume à température constante, et d'observer la variation de la constitution du système dans le cylindre à droite, et le déplacement du point dans le diagramme de Clapeyron à gauche. On observe 3 parties sur cette courbe en partant de la droite :

- tant que le volume est élevé, le système est composé uniquement de vapeur. Plus le volume diminue, plus la pression croît ;
- lorsque la pression augmente, elle atteint la pression de vapeur saturante à la température T . À partir de là, au point A, apparaît la première goutte de liquide ;
- quand on continue de diminuer le volume, de plus en plus de vapeur se liquéfie ; la pression ne varie pas : on a un *palier de liquéfaction* jusqu'au point B où disparaît la dernière bulle de vapeur ;
- après le point B, la pression augmente très vite, traduisant le fait que le liquide est très peu compressible.

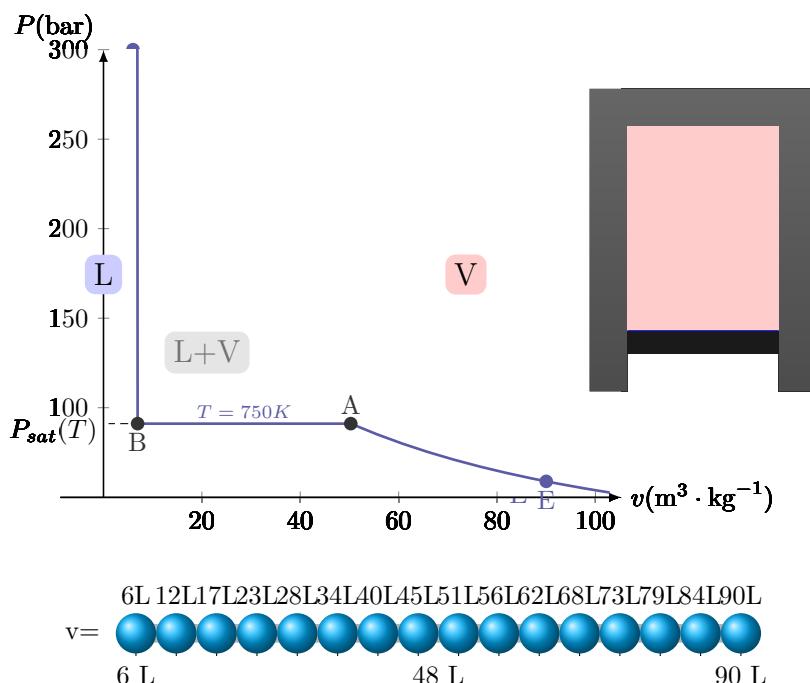


FIGURE T4.4 – Variation de la composition d'un système diphasé de 1 g diazote sous 750 K lorsqu'on fait varier son volume.

Il est important de comprendre, sur cette animation, que pour un point E situé sur le palier, ce point ne représente pas un état homogène, mais un mélange de deux états : du liquide dans l'état B (liquide saturant) et de la vapeur dans l'état A (vapeur saturante). La description du système nécessite alors de connaître les masses de liquide et de vapeur, ou plutôt les fractions molaires w_L de liquide et w_V de vapeur².

On remarque bien, sur l'animation, que, sur un palier, plus le point représentatif du système se trouve à gauche, près du domaine du liquide, plus il contient de liquide ; inversement, plus il est vers la gauche, plus il contient de vapeur. On peut traduire cela par une loi quantitative.

Propriété : Volume massique de l'état E

Dans l'état E constitué de liquide et de vapeur, le volume massique vaut la somme des volumes massiques du liquide et de la vapeur pondérés par leur fraction massique : $v = w_L \cdot v_L + w_V \cdot v_V$

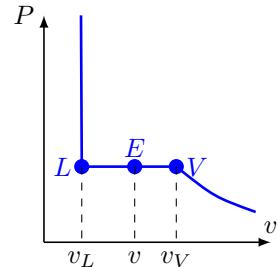
Démonstration

Le volume est une grandeur extensive, donc en notant V le volume total, V_L le volume de liquide et V_V le volume de vapeur, on peut écrire $V = V_L + V_V$. Or le volume massique est défini par le rapport entre le volume et la masse, donc $v = \frac{V}{m}$ soit $V = m \cdot v$ avec $m = m_L + m_V$ la masse totale ; de même $V_L = m_L \cdot v_L$ et $V_V = m_V \cdot v_V$. Donc $(m_L + m_V) \cdot v = m_L \cdot v_L + m_V \cdot v_V$ ce qui donne bien la relation recherchée en divisant par $m_L + m_V$.

Loi des moments

Les fractions (ou titres) molaires/massiques de liquide et de vapeur dans l'état E peuvent être déduites géométriquement selon les lois

$$\begin{cases} w_L = x_L &= \frac{v_V - v}{v_V - v_L} = \frac{EV}{LV} \\ w_V = x_V &= \frac{v - v_L}{v_V - v_L} = \frac{LE}{LV} \end{cases} \quad (\text{T4.1})$$



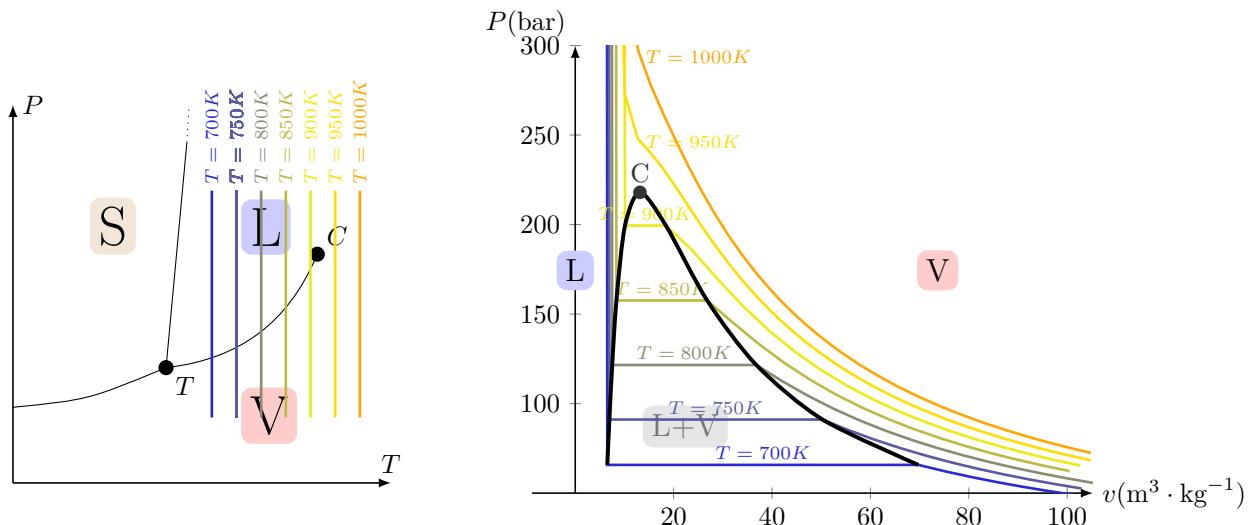
Démonstration

On a vu que $v = w_L \cdot v_L + w_V \cdot v_V$; de plus on sait que $w_L + w_V = 1$ (la somme des fractions de tous les constituants fait 1 par définition). Donc $w_V = 1 - w_L$ ce qui donne $v = w_L \cdot v_L + (1 - w_L) \cdot v_V$ donc $v - v_V = w_V(v_L - v_V)$ d'où on tire $w_L = \frac{v - v_V}{v_L - v_V}$ ce qui correspond bien à la formule proposée.

De même en remplaçant w_L par $1 - w_V$ on trouve la formule de w_V .

Propriété : Diagramme de Clapeyron d'un système diphasé L/V

Si on reporte dans le diagramme de Clapeyron les isothermes mesurées sur le fluide (on ne trace quasiment jamais l'état solide dans ce diagramme), il fait apparaître 3 zones : liquide, vapeur, et coexistence des deux phases, séparées par la **courbe de saturation**. Voici par exemple celui du diazote :



2. On pourra remarquer que, dans le cas d'un corps pur, fractions (ou titres) massiques et molaires sont identiques.

- chaque isotherme à une température T inférieure à la température T_C du point critique possède un palier à la pression $P_{sat}(T)$;
- l'ensemble des paliers pour différentes températures délimite la zone de coexistence L/V. Cette zone est limitée par une courbe en forme de cloche, appelée **courbe de saturation**. Le sommet de cette courbe est le **point critique** ; la partie à droite du point critique s'appelle la **courbe de rosée**, la partie de gauche la **courbe d'ébullition**.
- les isothermes de températures plus élevées sont situées plus haut dans la diagramme que les isothermes de température plus faible.
- les isothermes à une température supérieure à T_C ne présentent plus de palier : on passe continument de la vapeur au liquide. Le fluide situé au-dessus de C est appelé **fluide supercritique**.

Remarque : En réalité, le diagramme des phases et le diagramme de Clapeyron ne sont que de projections du diagramme d'état en 3D du corps pur (figure T4.5).

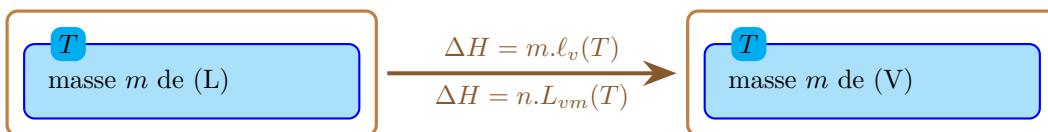
FIGURE T4.5 – Diagramme des phases en 3D : on y retrouve la courbe de saturation S/L et L/V (entre S et L, le palier est trop petit pour être visible) ; on a aussi tracé des isobares et des isothermes.

T4.B. Enthalpie de changement d'état

Les changements d'états à température constante sont aussi à pression constante. L'enthalpie est donc le bon outil pour décrire les échanges énergétiques lors des changements d'état.

Définition : Enthalpie (ou chaleur latente) de vaporisation/fusion/sublimation

On définit l'enthalpie (ou chaleur latente) massique (resp. molaire) de vaporisation d'un corps pur à la température T , noté ℓ_v (resp. L_{vm}), comme la variation d'enthalpie d'un kilogramme (resp. 1 mole) de ce corps lorsqu'il passe de l'état liquide à l'état vapeur à la température constante T . Sa valeur dépend de la température.



On définit de même les enthalpies de fusion et de sublimation.

Remarque : D'où vient ce nom de «chaleur latente» ? De ce que, le plus souvent, quand on veut vaporiser un liquide, on le chauffe à pression constante, dans une casserole par exemple. Dans ce cas, le premier principe appliqué à

la transformation isobare indique que $\Delta H = Q$ (s'il n'y a pas d'autres travaux) donc $Q = m.\ell_v$: ℓ_v indique la quantité de chaleur à fournir pour vaporiser 1 kg de liquide.

Remarque : Si on effectue les transformations dans l'autre sens (liquéfaction, solidification, condensation) alors la variation d'enthalpie interne est la même **au signe près**.

Remarque : La chaleur latente de vaporisation diminue lorsque la température augmente, et s'annule à la température critique (cf. figure T4.6).

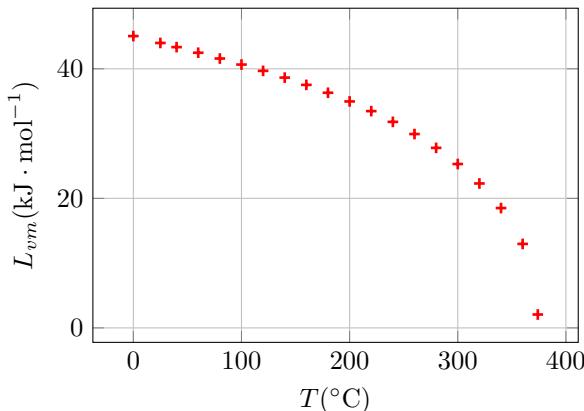


FIGURE T4.6 – Chaleur latente de vaporisation de l'eau en fonction de la température (source : *CRC Handbook of Physics and Chemistry*).

Exemple : Solidification d'une brame d'acier

Une brame de 30 t d'acier liquide à 1400 °C qui se solidifie en restant à cette température, à pression constante. Calculez la chaleur Q qu'elle a reçue.

Données : $\ell_f(\text{acier}, 1400^\circ\text{C}) = 250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Par le premier principe isobare appliqué à la brame lors de son refroidissement : $Q = \Delta H = -30 \times 10^3 \times 250 = -7500000 \text{ kJ} = -7,5 \text{ GJ}$

À partir de maintenant, il faut faire attention pour calculer une variation d'enthalpie, car on dispose de deux formules :

- $\Delta H = C_p \cdot \Delta T$ si le système change de température sans changer d'état
- $\Delta H = m \cdot l$ si le système change d'état sans changer de température

Si la température et l'état changent, il faut décomposer en étapes élémentaires.

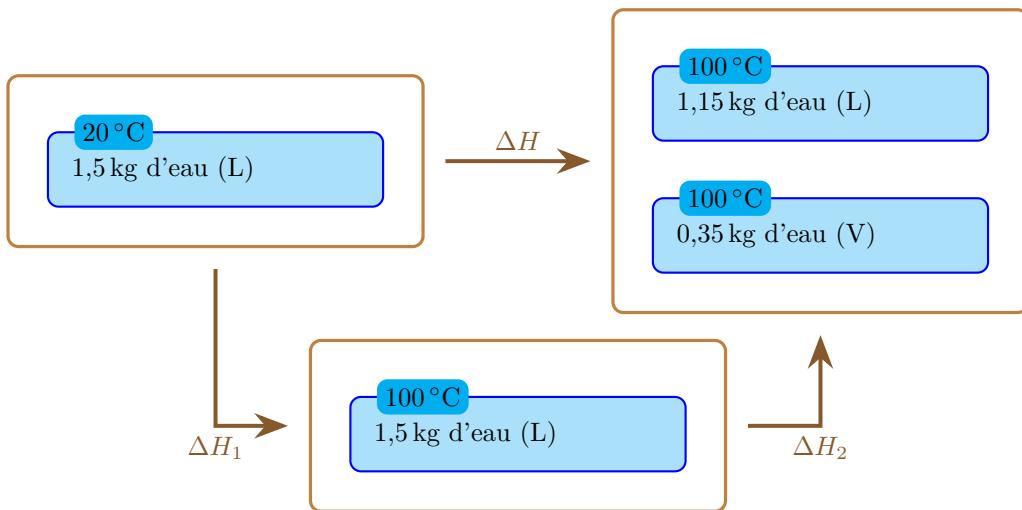
Méthode : Calculs de ΔH avec changement d'état

Si un système évolue et voit son état **et** sa température changer, alors il faut inventer un chemin fictif passant par des étapes intermédiaires, telles que, dans chaque transformation, un seul des paramètres change.

Exemple : De l'eau dans une casserole

On prend 1,5 kg d'eau à 20 °C, et on les fait bouillir à 100 °C sous 1 bar ; on constate qu'à la fin il reste 1,15 kg d'eau dans la casserole, le reste s'est évaporé. Calculez la chaleur apportée à ce système, sachant qu'il n'y a pas de travail utile à côté.

Données : $\ell_v(100^\circ\text{C}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $c_p(\text{eau L}) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$



D'après le premier principe isobare appliqué à l'eau pendant la transformation : $Q = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 1,5 \times 4,2 \times (100 - 20) + 0,35 \times 2260 = 1295 \text{ kJ}$


Changements d'état

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Transition de phase	
Corps pur diphasé en équilibre. Diagramme de phases (P,T). Cas de l'équilibre liquide-vapeur : diagramme de Clapeyron (P,v), titre en vapeur.	Analyser un diagramme de phase expérimental (P,T). Proposer un jeu de variables d'état suffisant pour caractériser l'état d'équilibre d'un corps pur diphasé soumis aux seules forces de pression. Positionner les phases dans les diagrammes (P,T) et (P,v). Déterminer la composition d'un mélange diphasé en un point d'un diagramme (P,v).
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation. Variation d'entropie associée à une transition de phase.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases. Exploiter la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase.

Changements d'état

QCMs

réponses page 828

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

Le passage de liquide à gaz s'appelle

- (a). la vaporisation
- (b). la sublimation
- (c). la gazéification
- (d). l'ébullition

Q2.

Le diagramme qui représente les états d'équilibre d'un corps pur en fonction de P et T s'appelle :

- (a). le diagramme de Clapeyron
- (b). le diagramme d'équilibre
- (c). le diagramme d'état
- (d). le diagramme des phases

Q3.

Qu'est-ce que de l'eau surfondue ?

- (a). de l'eau issue de la fonte d'un glaçon
- (b). de l'eau liquide chaude
- (c). de l'eau en équilibre avec la glace
- (d). de l'eau liquide à des températures < 0 sous 1bar

Q4.

Qu'est-ce que le point triple d'un corps pur ?

- (a). le point où le corps pur a triplé de volume
- (b). le triplet (P, T, V) où les 3 phases co-existent
- (c). un état qui apparaît 3 fois de suite
- (d). le couple (P, T) où les 3 phases co-existent

Q5.

Qu'est-ce que le point critique d'un corps pur ?

- (a). le couple (P, T) où les 3 phases co-existent
- (b). le couple (P, T) au-delà duquel la différence liquide/vapeur disparaît
- (c). l'état de masse volumique maximal
- (d). le couple (P, T) au-delà duquel le système explose

Q6.

Qu'est-ce que de la vapeur saturante ?

- (a). de la vapeur d'eau
- (b). de la vapeur qui remplit tout le système
- (c). de la vapeur qui s'est transformée en liquide
- (d). de la vapeur en équilibre avec son liquide

Q7.

À la pression P , la température d'équilibre solide/liquide s'appelle :

- (a). la température de soliquidation
- (b). la température de liquide saturant
- (c). la température de vaporisation
- (d). la température de fusion

Q8.

Dans le diagramme de Clapeyron, quelles sont les courbes qui présentent un plateau sous la courbe de saturation ?

- (a). les courbes de rosée
- (b). les isothermes $T = cst$
- (c). les isobares $P = cst$
- (d). les isovolumes $V = cst$

Q9.

Qu'est-ce qu'un fluide supercritique ?

- (a). un fluide ultra léger
- (c). un fluide avec des pouvoirs spéciaux
- (b). un fluide qui coule sans viscosité
- (d). un fluide à la pression supérieure à celle du point critique

Q10.

Dans le diagramme de Clapeyron, plus une isotherme correspond à une température élevée,

- (a). plus son palier est long
- (c). plus elle est haute
- (b). plus son palier est court
- (d). plus elle est basse

QCM : Variations d'enthalpie (changements d'état)

Données concernant le mercure sous 1 bar :

masse molaire	$201 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
T_{fus}	$-38,029^\circ\text{C}$
L_{fm}	$2,295 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
T_{vap}	$356,73^\circ\text{C}$
L_{vm}	$56,11 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
$C_{pm}(\text{liq})$	$27,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Q11.

1 kg de mercure liquide à $356,7^\circ\text{C}$ s'évapore entièrement sous 1 bar pour donner de la vapeur de mercure à la même température. La variation d'enthalpie de ce système vaut :

- (a). 55,1 kJ
- (c). 274,2 kJ
- (b). 274,2 J
- (d). 55,1 J

Q12.

3 mol de vapeur de mercure à $356,7^\circ\text{C}$ se liquéfient entièrement sous 1 bar pour donner du mercure liquide à la même température. La variation d'enthalpie de ce système vaut :

- (a). $-168,3 \text{ kJ}$
- (c). $-168,3 \text{ J}$
- (b). $168,3 \text{ kJ}$
- (d). $168,3 \text{ J}$

Q13.

On place 50 g de mercure liquide à $356,7^\circ\text{C}$ dans une enceinte sous 1 bar ; 23 g de mercure s'évaporent, le reste demeure liquide, sous 1 bar. La variation d'enthalpie de ce système (mercure total) vaut :

- (a). 7,4 kJ
- (c). 6,4 kJ
- (b). 13,7 kJ
- (d). 1,1 kJ

Q14.

On met dans une enceinte à $356,7^\circ\text{C}$, sous 1 bar : 45 g de mercure liquide et 65 g de vapeur de mercure. Après transformation, il reste 70 g de liquide et 40 g de vapeur, sous 1 bar. La variation d'enthalpie de ce système (mercure total) vaut :

- (a). $-19,2 \text{ kJ}$
- (c). 17,8 kJ
- (b). $-7,0 \text{ kJ}$
- (d). $30,2 \text{ kJ}$

Changements d'état

Exercices

réponses page 829

Exercice T4.1 : Changements d'état de l'eau [*]

Calculez la variation d'enthalpie d'1 kg d'eau initialement liquide à 25 °C, lorsqu'on l'amène à l'état suivant (la pression vaut toujours 1 bar ; on considère la vapeur comme un gaz parfait) :

1. 1 kg d'eau liquide à 5 °C
2. 300 g d'eau liquide et 700 g de glace, en équilibre
3. 1 kg de glace à -10 °C
4. 1 kg de vapeur d'eau à 150 °C

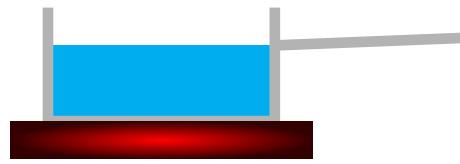
Données :

- Capacité calorifique de la glace : $c_p^s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Capacité calorifique de l'eau liquide : $c_p^l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Capacité calorifique de l'eau vapeur : $c_p^v = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Chaleur latente de fusion de l'eau sous 1 bar à 0 °C : $\ell_{fus} = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Chaleur latente de vaporisation de l'eau sous 1 bar à 100 °C : $\ell_{vap} = 570 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Exercice T4.2 : Chauffage de l'eau dans une casserole [*]

On chauffe 150 g d'eau liquide à 20 °C sous 1 bar. On dispose pour cela d'une source de chaleur pouvant transférer une puissance thermique $\mathcal{P} = 2000 \text{ W}$.

Sachant que $c_p(\text{eau } L) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\ell_V(100 \text{ }^\circ\text{C}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, calculez le temps mis pour obtenir de l'eau vaporisée à 100 °C.

**Exercice T4.3 : Fusion de la glace par un métal chaud [**]**

On plonge un morceau de fer de masse 500 g à 40 °C dans un mélange de 300 g d'eau liquide et 20 g de glace, sous 1 bar.

Calculez la température d'équilibre en supposant que toute la glace fond et que le système est isolé.

Données : $\ell_{fus}(\text{eau}, 0 \text{ }^\circ\text{C}) = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $c(\text{fer}) = 0,449 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $c(\text{eau liq}) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Exercice T4.4 : Solidification de l'aluminium []**

Une fois fabriqué par électrolyse, l'aluminium sort sous forme liquide à 1000 °C. Pour le refroidir, on verse dessus de l'eau liquide à 20 °C. L'eau s'échauffe jusqu'à sa température de vaporisation sous 1 bar, qui vaut $T_{vap,eau} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, puis se vaporise, tandis que l'aluminium se refroidit jusqu'à 100 °C tout en se solidifiant.

Données :

- $c_p(\text{eau}, L) = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $\ell_V(\text{eau}, 100 \text{ }^\circ\text{C}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c_p(\text{alu}, S) = 879 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $c_p(\text{alu}, L) = 1176 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $L_{F,m}(\text{alu}, 660 \text{ }^\circ\text{C}) = 10,71 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{Al} = 27,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

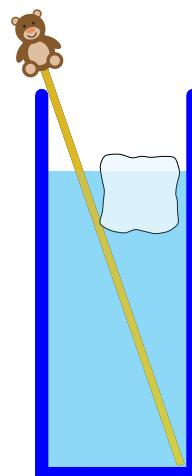
Calculez la masse d'eau nécessaire pour amener 1 kg d'aluminium à la température de 100 °C, si on suppose la transformation isobare et adiabatique.

Exercice T4.5 : Fusion d'un glaçon [**]

1. On met un glaçon de 20 g à -15°C dans un verre d'eau liquide de 200 g à 20°C ; on suppose que le glaçon fond entièrement et rapidement, la transformation est donc isobare et adiabatique. Calculez la température de l'état final. On donne :

- $c_p(\text{eau } L) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c_p(\text{eau } S) = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $\ell_f(T_{fus} = 0^{\circ}\text{C}) = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

2. Même question avec un glaçon de 50 g; que penser de la température obtenue? Déterminez alors le véritable état final.



Exercice T4.6 : Un bonhomme de neige sous la pluie [**]

Un bonhomme de neige (2,4 kg de glace à -3°C en moyenne) est attaqué par de la pluie (eau liquide à 7°C). En deux heures d'averse, il reçoit 1,3 L d'eau sur la tête. On suppose que :



- l'eau de pluie se refroidit au contact du bonhomme jusqu'à 0°C
- une masse m du bonhomme de neige fond et s'écoule sous forme d'eau liquide à 0°C tandis que le reste est toujours glacé à -3°C
- les échanges thermiques sont négligeables, on supposera donc l'ensemble comme isolé.

Calculez la masse m de bonhomme de neige qui a fondu.

- $\ell_{fus}(\text{eau}, 0^{\circ}\text{C}) = 334 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c_p(\text{eau } liq) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $c_p(\text{eau } sol) = 2,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Exercice T4.7 : Liquéfaction du diazote par compression [**]

On place 71,4 mol de diazote (soit 1 kg) dans une enceinte maintenue à 104 K.

Le diazote gazeux est modélisé par un gaz parfait diatomique.

1. Initialement, la pression vaut 1 bar. On comprime de façon réversible le diazote à l'aide d'un piston ; la température reste tout le temps égale à 104 K.
 - (a) Pour quelle pression la première goutte de diazote liquide apparaît-elle ?
 - (b) Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le diazote entre le début et l'apparition du liquide.
2. On continue à comprimer le système de façon isotherme, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que du liquide. Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le diazote au cours de cette seconde étape. On considérera pour le calcul de W que le volume final du liquide est tellement petit, qu'on peut le prendre nul sans faire trop d'erreur.

Données pour le diazote : $P_{sat}(104\text{ K}) = 10 \text{ bar}$; $L_{vap,m}(104\text{ K}) = 4482 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Exercice T4.8 : Temps de fusion d'un glaçon [**]

On considère un verre contenant initialement $m_0 = 145\text{ g}$ d'eau liquide en équilibre avec $m_1 = 18\text{ g}$ de glace, à 0°C . On suppose que le système échange de la chaleur avec l'extérieur à $T_e = 20^\circ\text{C}$ via son enveloppe de résistance thermique totale R_{th} .

Données : $\ell_f(\text{glace}, 0^\circ\text{C}) = 330\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

1. On note $m(t)$ la masse de glace à l'instant t . Par application du premier principe entre t et $t+dt$, montrez que m obéit à l'équation différentielle $\frac{dm}{dt} = -K$ avec K une constante à préciser.
2. On constate que le glaçon met 169 s à fondre complètement. Déduisez-en R_{th} .

Exercice T4.9 : Mesure d'une chaleur latente [**]

On place sur une balance un récipient calorifugé contenant de l'eau, maintenue en ébullition par une résistance électrique parcourue par un courant constant. La vapeur s'échappe par un orifice dans l'atmosphère extérieure dont la pression est normale. La balance indique l'évolution de la masse de l'ensemble {récipient+eau liquide}.

1. La tension aux bornes de la résistance vaut $V_1 = 5\text{ V}$ et l'intensité qui la traverse vaut $I_1 = 2,5\text{ A}$. On constate qu'en une durée $t_1 = 400\text{ s}$, la masse a diminué de $m_1 = 2\text{ g}$. Calculez l'enthalpie massique de vaporisation ℓ_v de l'eau à 100°C , en négligeant les pertes de chaleur.
2. Les intensités sont mesurées à $1 \times 10^{-3}\text{ A}$ près, les tensions à $1 \times 10^{-2}\text{ V}$ près, les masses à $1 \times 10^{-3}\text{ g}$ près et les temps à 2 s près ; à l'aide d'une modélisation de Monte-Carlo, déterminez l'incertitude-type sur ℓ_v .
3. On tient maintenant compte de pertes thermiques ; on suppose que la puissance thermique correspondant à la fuite de chaleur est constante, donc que le système reçoit un transfert thermique $\mathcal{P}_{th} < 0$ par unité de temps.

On effectue alors une deuxième expérience, pour laquelle $V_2 = 6\text{ V}$, $I_2 = 3\text{ A}$, et au bout d'un temps $t_2 = 269\text{ s}$ la masse a diminué de $m_2 = 2\text{ g}$.

À l'aide des résultats des deux expériences, donnez une nouvelle évaluation de ℓ_v , plus précise.

Exercice T4.10 : Système diphasé [**]

On introduit 1 kg d'eau dans un récipient fermé de volume V . On porte l'ensemble à 180°C . On constate qu'à l'équilibre, il reste 640 g de liquide.

1. Déduisez-en le volume V du récipient.
2. Que vaut la pression dans l'enceinte ? L'eau gazeuse se comporte-t-elle comme un gaz parfait ?

Données :

- $P_{sat}(180^\circ\text{C}) = 10\text{ bar}$
- $\rho_{liq}(180^\circ\text{C}, 10\text{ bar}) = 887\text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$
- $\rho_{vap}(180^\circ\text{C}, 10\text{ bar}) = 5,15\text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$
- masse molaire de l'eau : $18,0\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Exercice T4.11 : Système diphasé liquide-vapeur [***]

On introduit 1 kg d'eau dans une enceinte indéformable de volume égal à 100 L . Calculez la masse d'eau liquide et d'eau vapeur à 20°C , puis à 60°C .

Données : la masse volumique de l'eau liquide sera prise constante et égale à $1\text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$; l'eau vapeur sera assimilée à un gaz parfait en première approximation ; la pression de vapeur saturante de l'eau vaut 2340 Pa à 20°C et $19\,900\text{ Pa}$ à 60°C ; la masse molaire de l'eau vaut $M_e = 18\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Indication : commencez par faire une hypothèse sur l'état final, par exemple qu'il reste du liquide et de la vapeur. Vous avez alors une information sur la pression. Calculez alors les masses de liquide et de vapeur, puis vérifier que c'est cohérent (pas de masse négative!). Si c'est incohérent, l'hypothèse de départ est fausse, donc on suppose autre chose, par exemple qu'il n'y a plus que de la vapeur ; on calcule alors la pression, et on vérifie que c'est cohérent.

Exercice T4.12 : Tubes de Natterer [**]

Un tube de Natterer est un tube scellé, de volume constant, qui contient une masse m d'un corps pur sous forme liquide et/ou gazeuse. En changeant la température de ce tube, on modifie les proportions de liquide et de gaz.

Dans ce TD, on prendra comme corps pur du mercure. La masse volumique du liquide sera pris constante sur la plage de température atteinte, égale à $13,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Le gaz de mercure sera considéré comme un gaz parfait, de masse molaire $200,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On s'intéresse à un tube de Natterer de volume 20 cm^3 dans lequel on a introduit 20 mg de mercure.

On donne les pressions de vapeur saturante de mercure pour quelques températures :

$T(\text{°C})$	42,0	76,6	120,0	175,6	250,3	355,9
$P_{\text{sat}}(\text{Pa})$	1	10	1×10^2	1×10^3	1×10^4	1×10^5



- Le tube est porté à la température de $76,6 \text{ °C}$; l'équilibre est atteint. On cherche à déterminer les masses m_l et m_v de liquide et de vapeur, à l'équilibre.
On fait pour cela une hypothèse : le liquide et le gaz coexistent dans le tube.
 - À l'aide de la loi de conservation de la masse, écrivez une première relation entre m_l et m_v .
 - Que vaut la pression du gaz ? Calculez donc le volume massique du gaz dans le tube.
 - À l'aide de l'extensivité du volume, écrivez alors une seconde relation entre m_l et m_v .
 - Calculez m_l et m_v .
- On porte le tube à $175,6 \text{ °C}$; calculez les nouvelles masses de liquide et de vapeur.
- On porte maintenant le tube à $355,9 \text{ °C}$.
 - Appliquez le calcul précédent et montrez qu'on aboutit à une aberration.
 - Quelle est l'hypothèse à revoir ? Quelle hypothèse plausible peut-on faire à la place ?
 - Calculez alors la pression dans le tube. L'hypothèse est-elle valide ?
- Le chauffage d'un tube de Natterer n'aboutit pas forcément à un état final où il ne reste plus que du gaz ; parfois, il ne reste que du liquide. On peut le prévoir grâce au diagramme de Clapeyron.
 - Dessinez l'allure de la courbe d'équilibre liquide-vapeur dans le diagramme de Clapeyron. Placez le point critique ; on appelle v_c son volume massique.
Données : pour le mercure, la température critique vaut 1750 °C , la pression critique vaut 1720 bar et le volume massique critique vaut $0,214 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$.
 - Le système initial est un système diphasé : il contient la phase liquide et la phase vapeur. Dans quelle zone du diagramme de Clapeyron se situe son point représentatif ?
 - Calculez le volume massique du système étudié précédemment. Placez alors le point initial dans le diagramme de Clapeyron ; sans chercher à être précis, vous ferez attention à bien placer le volume massique initial par rapport à v_c .
Tracez alors l'évolution du point représentatif du système lorsqu'on chauffe.
Indication : quelle grandeur de ce diagramme reste constante lorsqu'on chauffe ?
 - Déduisez-en vers quel état va évoluer le tube à haute température ; est-ce en accord avec le calcul précédent ?
 - Quelle est la condition sur la masse et le volume initial du système pour qu'il devienne entièrement gazeux à haute température ? pour qu'il devienne entièrement liquide ? pour qu'il passe par l'état critique ?

Changements d'état

TDs numériques

réponses page 831

TD numérique : Formation des nuages

Ce TD est assez difficile.

Lorsqu'une masse d'air s'élève dans l'atmosphère, elle se détend car la pression P décroît avec l'altitude. En première approximation, on peut admettre qu'elle subit une détente adiabatique (car rapide) et réversible (équilibre des pressions). On va considérer comment cela explique la formation des nuages.

On admet que, à l'équilibre, l'atmosphère voit sa pression diminuer avec l'altitude z selon la loi :

$$P_{atm}(z) = P_0 (1 - \alpha z)^\beta \text{ avec } P_0 = 1 \text{ bar}, \alpha = 22,5 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1} \text{ et } \beta = 5,2 \quad (\text{T4.2})$$

et sa température varie selon la loi

$$T_{atm}(z) = T_0(1 - \alpha z) \text{ avec } T_0 = 300 \text{ K} \quad (\text{T4.3})$$

On modélise l'air par un GP ; on note μ sa masse volumique et $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ sa masse molaire.

1. Air sec

On considère pour le moment une mole d'air sec, au sol, à la pression P_0 , mais chauffée à la température $T_1 = 310 \text{ K}$. On le considérera comme un GP diatomique de capacité calorifique molaire à volume constant $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.

Lorsque l'air s'élève, sa pression varie selon la loi (T4.2). L'ascension est rapide mais pas trop, donc on la considérera adiabatique et réversible.

- (a) Écrivez le premier principe appliqué à 1 mol pendant une transformation infinitésimale, reliant la variation de température dT à la variation de volume molaire dV_m ; déduisez-en $\frac{dT}{dP}$ en fonction de $\frac{d\mu}{dP}$.
- (b) La loi du GP indique que $\mu = \frac{PM}{RT}$; en dérivant par rapport à la pression, exprimez $\frac{d\mu}{dP}$ en fonction de M, R, T, P et $\frac{dT}{dP}$.
- (c) En déduire le système d'équations différentielles :

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T}{P + \frac{\mu^2 RT^2 C_{vm}}{PM^2}} \quad (\text{T4.4a})$$

$$\frac{d\mu}{dP} = \frac{\frac{M}{RT}}{1 + \frac{P^2 M^2}{\mu^2 RT^2 C_{vm}}} \quad (\text{T4.4b})$$

- (d) À l'aide d'un schéma d'Euler, calculez la température et la masse volumique pour P variant de P_0 à $\frac{P_0}{2}$ par pas de $-\frac{P_0}{1000}$. Calculez aussi, à partir du tableau des pressions obtenu, le tableau des altitudes par la formule inversée $z = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/\beta}$. Tracez alors $T(z)$ et $\mu(z)$ au cours de l'ascension, ainsi que $T_{atm}(z)$ et $\mu_{atm}(z)$.

À quelle hauteur cet air va-t-il arrêter son ascension ?

2. Air humide

On considère maintenant de l'air sec contenant en plus un peu de vapeur d'eau à la même température T_1 et la même pression P_0 . La quantité d'eau contenue dans l'air est tellement petite qu'on considérera que :

- la capacité calorifique molaire n'est quasiment pas modifiée
- la variation de masse volumique apportée par cette vapeur d'eau est négligeable aussi

La pression de vapeur saturante de l'eau est modélisée en fonction de la température par la loi

$$P_{sat}(\text{bar}) = e^{(14,49 - \frac{5350}{T})} \quad (\text{T4.5})$$

L'enthalpie de vaporisation molaire à la température T est donnée approximativement par

$$L_{vm}(\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}) = 49,92 - 6,64 \times 10^{-5} \cdot T^2 \quad (\text{T4.6})$$

À une température T , la fraction molaire d'eau à saturation est donc donnée par $x_{sat} = \frac{P_{sat}}{P}$. On considère que l'air est chargé initialement de 30 % d'humidité, c'est-à-dire que $x_1 = 0,3x_{sat}(T_1)$.

- (a) Calculez x_1 .
- (b) Au cours de l'ascension, T diminue donc $P_{sat}(T)$ diminue, par conséquent x_{sat} aussi. Si x devient égal à x_{sat} , l'air est saturé en humidité, et l'eau va se liquéfier pour former des gouttelettes : un nuage se forme.
- À partir des tableaux obtenus avec l'air sec, tracez $x_{sat}(z)$. Déduisez-en l'altitude où le nuage va se former.
- (c) On va maintenant simuler l'évolution de T et μ ainsi que x lors de la détente. On admet que les équations sont les suivantes :
- si $x < x_{sat}(T)$ alors rien ne change : $\frac{dT}{dP}$ et $\frac{d\mu}{dP}$ sont identique à l'air sec et $\frac{dx}{dP} = 0$
 - sinon, une partie de l'eau se liquéfie, ce qui réchauffe l'air ; les équations deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{dT}{dP} = \frac{T + \frac{P_{sat}(T).(L_{vm}(T)-RT).\mu^2 RT^2}{P^3 M^2}}{P + \frac{\mu^2 RT^2 C_{vm}}{PM^2} + \frac{5350 P_{sat}(T).(L_{vm}(T)-RT).\mu^2 R}{P^2 M^2}} \\ \frac{d\mu}{dP} = \frac{M}{RT} - \frac{PM}{RT^2} \frac{dT}{dP} \\ \frac{dx}{dP} = P_{sat}(T). \left(\frac{5350}{PT^2} \cdot \frac{dT}{dP} - \frac{1}{P^2} \right) \end{cases}$$

Simulez la nouvelle détente et tracez les deux courbes (air sec + air humide) sur le même schéma. Commentez.

3. Lorsque l'air est chauffé au sol, sa masse volumique est plus faible que la masse volumique $\mu_{atm} = \frac{P_{atm} M}{R T_{atm}}$ de l'atmosphère qui l'entoure. Il monte alors jusqu'à ce que ces deux masses volumiques deviennent égales. Tracez sur un même graphique la masse volumique de l'atmosphère, de l'air sec et de l'air humide. Déterminez dans chaque cas l'altitude d'équilibre atteinte. Commentez.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

- Q1.(a)
- Q2.(d)
- Q3.(d)
- Q4.(d)
- Q5.(b)
- Q6.(d)
- Q7.(d)
- Q8.(b)
- Q9.(d)
- Q10.(b) ET (c)

Réponses au QCM : Variations d'enthalpie (changements d'état)

- Q11.(c)
- Q12.(a)
- Q13.(c)
- Q14.(b)

Le bilan net est le suivant : 25 g de mercure se sont liquéfiés (soit 0,124 mol).

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T4.1 : Changements d'état de l'eau [*]

1. $\Delta H = m \times c_p^l \times (5 - 25) = -84 \text{ kJ}$
2. $\Delta H = 1 \times c_p^l \times (0 - 25) - 0,7 \times l_{fus} = -339 \text{ kJ}$
3. $\Delta H = 1 \times c_p^l \times (0 - 25) - 1 \times l_{fus} + 1 \times c_p^s \times (-10 - 0) = -460 \text{ kJ}$
4. $\Delta H = 1 \times c_p^l \times (100 - 25) + 1 \times l_{vap} + 1 \times c_p^v \times (150 - 100) = 990 \text{ kJ}$

Réponses de l'exercice T4.2 : Chauffage de l'eau dans une casserole [*]

Le premier principe donne $\Delta H_1 + \Delta H_2 = \mathcal{P}.t$

$$\text{On en tire } t = \frac{mc_p\Delta T + m\ell_v}{\mathcal{P}} = 3 \text{ min}15 \text{ s}$$

Réponses de l'exercice T4.3 : Fusion de la glace par un métal chaud [**]

$$\Delta H = \Delta H_{Fe} + \Delta H_{H_2O} = W' + Q = 0 ; \text{ on en tire } T_e = \frac{-0,02 \times 334 + 0,5 \times 0,449 \times 40}{0,32 \times 4,2 + 0,5 \times 0,449} = 1,5^\circ\text{C}$$

Réponses de l'exercice T4.4 : Solidification de l'aluminium [**]

$$m = \frac{c_p(alu,L) \times (1000 - 660) + \frac{L_{F,m}}{M_{Al}} + c_p(alu,S) \times (660 - 100)}{c_p(eau,L) \times (100 - 20) + \ell_v(eau)} = 0,5 \text{ kg}$$

Réponses de l'exercice T4.5 : Fusion d'un glaçon [**]

$$1. T_e = \frac{m_L c_{pL} 20 - m_S c_{pS} 15 - m_S \ell_f}{m_S c_{pL} + m_L c_{pL}} = 10,4^\circ\text{C}$$

$$2. T_e = -1,3 \text{ g} < T_{fus} \text{ ce qui est impossible.}$$

On suppose qu'il reste une masse m de glace non fondue ; à la fin, il y a coexistence de glace et d'eau liquide à l'équilibre sous 0°C donc $\Delta H = m_S c_{pS} 15 + (m_s - m) \ell_F - m_L c_{pL} 20 = 0$ d'où on tire $m = 3,6 \text{ g}$.

Réponses de l'exercice T4.6 : Un bonhomme de neige sous la pluie [**]

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = W' + Q = 0 ; \text{ on en tire } m = \frac{1,3 \times 4,2 \times 7}{4,2 \times 3 + 334} = 0,11 \text{ kg}$$

Réponses de l'exercice T4.7 : Liquéfaction du diazote par compression [**]

1. Le liquide apparaît lorsque la pression atteint 10 bar.

On a $W = nRT \ln \frac{P_{finale}}{P_{initiale}} = 142 \text{ kJ} = -Q$ la température ne varie pas. Donc $Q = \Delta U - W = -142 \text{ kJ}$: la chaleur est évacuée vers l'extérieur.

$$2. Q = \Delta H = -320 \text{ kJ.}$$

Réponses de l'exercice T4.8 : Temps de fusion d'un glaçon [**]

$$1. \frac{dm}{dt} = \frac{T - T_e}{\ell_v \cdot R_{th}}$$

$$2. R_{th} = \frac{t(T_e - T)}{m_1 \ell_v} = 0,57 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Réponses de l'exercice T4.9 : Mesure d'une chaleur latente [**]

$$1. \Delta H = m_1 \ell_v = U_1 I_1 t_1 \text{ donc } l_v = 2500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$2. \text{ On trouve } u(\ell_v) = 13,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$3. \ell_v \left(\frac{m_1}{t_1} - \frac{m_2}{t_2} \right) = U_1 I_1 - U_2 I_2 \text{ d'où } \ell_v = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On est plus éloigné de la première valeur que $2u(\ell_v)$. On voit ainsi qu'avant de faire des calculs d'incertitude compliqués, il faut d'abord éliminer les sources d'erreur dans les expériences.

Réponses de l'exercice [T4.10](#) : Système diphasé [**]

$$1. V = 0,72 + 69,90 = 70,6 \text{ L}$$

2. $P = 10 \text{ bar}$; la loi du GP est vérifiée à 7 % près.

Réponses de l'exercice [T4.11](#) : Système diphasé liquide-vapeur [***]

$m_v = 0,0017 \text{ kg}$ et $m_l = 0,998 \text{ kg}$ à 20°C .

$m_v = 0,013 \text{ kg}$ et $m_l = 0,98 \text{ kg}$ à 60°C .

Réponses de l'exercice [T4.12](#) : Tubes de Natterer [**]

1. $P = 10 \text{ Pa}$ à l'équilibre liquide/vapeur. On obtient deux équations sur les masses : $m_l + m_v = 2 \times 10^{-5}$ et $\frac{m_L}{13400} + 1450m_V = 2 \times 10^{-5}$ (en kg) d'où on tire $m_V = 0,014 \text{ mg}$ et $m_L \approx 20 \text{ mg}$.

2. La pression vaut désormais 1000 Pa . On en tire par les mêmes calculs : $m_v = 1,1 \text{ mg}$ et $m_l = 18,9 \text{ mg}$

3. On trouve par le même calcul : $m_v = 80 \text{ mg}$ et $m_l = -60 \text{ mg}$: c'est problématique ; l'hypothèse de coexistence des deux phases est fausse, il ne reste en réalité que du gaz à la pression $P = \frac{mRT}{MV} = 26000 \text{ Pa} < P_{sat}(355,9^\circ\text{C})$. Par un schéma sur le diagramme de Clapeyron, on montre que, si part d'un état tel que $v < 0,214 \text{ cm}^3 \cdot \text{g}^{-1}$ alors on obtient en chauffant une ampoule pleine de liquide ; dans le cas contraire une ampoule pleine de gaz.

Réponses aux TDs numériques

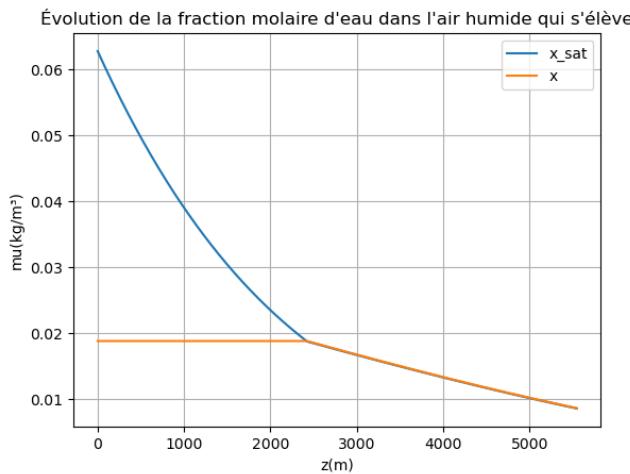
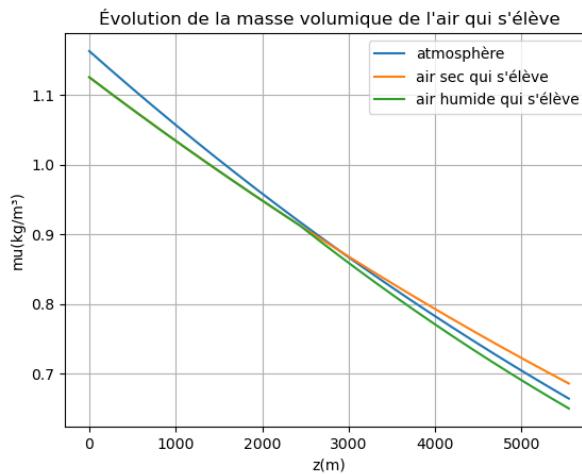
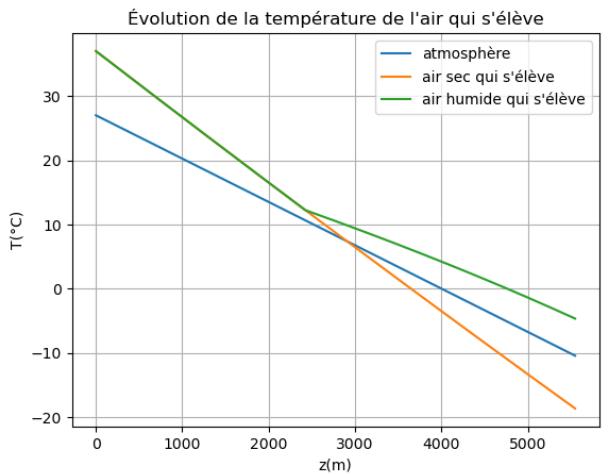
Réponses au TD d'info : Formation des nuages

Pour l'air sec, le premier principe s'écrit $C_{vm}dT = -P.dV_m$ d'où on tire $C_{vm}\frac{dT}{dP} = \frac{P.M}{\mu^2} \frac{d\mu}{dP}$

La dérivation de la loi du GP indique que $\frac{d\mu}{dP} = \frac{M}{RT} - \frac{PM}{RT^2} \frac{dT}{dP}$ car T varie avec P .

En combinant les deux, on trouve le système d'équations demandé qu'on résout par la méthode d'Euler ou par odeint.

De même, on résout le cas de l'air humide en ajoutant un troisième tableau pour x . Les résultats comparés sont ci-dessous :



L'air sec monte et se refroidit, et sa masse volumique se rapproche de celle de l'atmosphère à l'équilibre. Il continue de monter (à cause de la poussée d'Archimède) dans qu'il est plus léger que l'air environnant, mais on voit sur la courbe qu'il s'arrête vers 2900 m.

Pour l'air humide, on constate que l'eau commence à se condenser à 2400 m environ ; c'est l'altitude où se forme le bas du nuage. À partir de là, la condensation de l'eau libère de la chaleur qui réchauffe l'air, qui du coup se refroidit moins vite. Ainsi, on voit que cet air va pouvoir continuer à s'élever. À partir de 4700 m, la température devient inférieure à 0,1 °C, température du point triple de l'eau, et la vapeur d'eau va directement se condenser en glace : le modèle est alors à changer.

Machines thermiques

Cours

La thermodynamique a connu sa première véritable théorie sur les machines thermiques avec les *Réflexions sur la puissance motrice du feu* de Sadi Carnot. Néanmoins, lorsque ce mémoire fut publié en 1824, il ne connut que peu de retentissement, car les connaissances de l'époque concernant les lois de la thermodynamique étaient trop peu avancées pour en tirer tout son potentiel.

Nous avons posé les bases de la thermodynamique, en particulier le premier principe. Il est temps maintenant de reprendre les raisonnements de Carnot.

Pour étudier les machines thermiques, il est juste nécessaire de définir la notion de thermostat :

Définition : Thermostat

Un thermostat est un système thermodynamique en contact thermique avec le système étudié, qui échange donc de la chaleur avec le système étudié, mais dont la température reste constante :

- soit parce qu'il a une capacité thermique beaucoup plus grande que celle du système étudié, de telle sorte que les échanges thermiques influent peu sur sa température
- soit parce que sa température est maintenue constante par un élément extérieur

Par exemple, l'air atmosphérique sera souvent pris comme un thermostat dans nos études : sa température varie peu sous l'effet de la chaleur dégagée par un simple moteur, car l'atmosphère est très grande, elle appartient donc à la première catégorie des thermostats. Dans la seconde catégorie, on peut citer le foyer d'une machine à vapeur, dans lequel la combustion du charbon maintient une température constante.

T5.A. Avancement historique de l'étude des machines thermiques

! Tous les raisonnements de cette section sont présentés pour leur intérêt historique, et aussi pour rendre moins abstrait le second principe qu'on va introduire ci-après ; mais ils ne sont pas à connaître, hormis le calcul du rendement de la machine de Carnot.

A.1. Les idées de Carnot sur les machines à feu

Du temps de Carnot, on avait déjà construit des machines à feu, principalement des machines à vapeur, qui étaient employées essentiellement pour les mines. Dans de telles machines, on trouve un foyer où on brûle le charbon. Ce foyer sert à chauffer de l'eau et à former de la vapeur d'eau sous pression. Elle est alors envoyée vers un cylindre où elle pousse un piston, provoquant un mouvement qui va être utilisé pour faire tourner une roue, par exemple (cf. figure T5.1). Ces machines sont **cycliques**, c'est-à-dire qu'elles décrivent un cycle qui se répète.

FIGURE T5.1 – Animation d'une machine à vapeur. C'est par le tiroir (6) que la vapeur est admise dans le cylindre (7) et agit alternativement sur chacune des faces du piston. La tige de piston actionne la bielle couplée au train de roues motrices par l'intermédiaire de la crosse articulée (5). Les roues couplées deviennent toutes motrices. Par l'intermédiaire de la contre-manivelle (2) calée à 90° de la manivelle motrice, une bielle fait osciller la coulisse (1) de distribution dans laquelle glisse la bielle de commande de tiroir (3) couplée au levier d'avance (4). ([Crédit : Wikipedia/Panther](#))

Une telle machine, perfectionnée par différents ingénieurs dont le célèbre James Watt, était analysée ainsi : la combustion du charbon produit de la chaleur, et la machine à vapeur convertit cette chaleur en travail. Les questions qui se posaient alors étaient :

- quel est le meilleur gaz pour produire le plus possible de travail ?
- quelle est la meilleure géométrie (sections, courses,...) pour produire le plus de travail ?
- quel est travail maximal qu'on peut tirer d'une certaine quantité de charbon ?

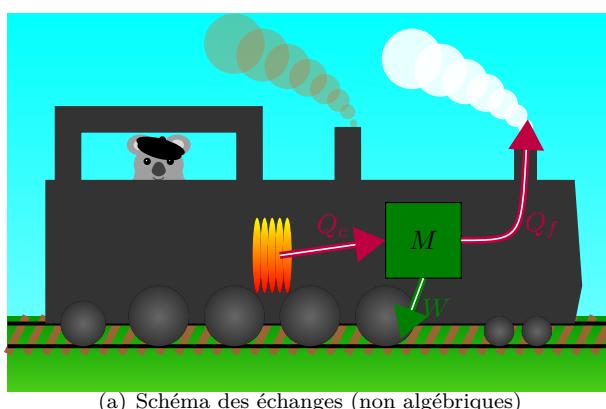
L'analyse révolutionnaire de Carnot provient d'abord du repérage d'un élément essentiel : l'atmosphère. Alors qu'on analysait simplement le fonctionnement de la machine à vapeur comme :

- le foyer (thermostat) communique de la chaleur à la machine
- la machine produit du travail

formant ce qu'on appellera bientôt une **machine cyclique monotherme**, Carnot insiste sur l'importance de l'atmosphère dans laquelle on rejette la vapeur une fois détendue. Il y a donc non pas 1 mais 2 thermostats (**machine cyclique ditherme**), et c'est le transfert de chaleur du thermostat chaud vers le thermostat froid qui permet de produire du travail¹. Ainsi, avec les notations qui sont les nôtres, on peut décrire le fonctionnement d'une machine à vapeur comme sur la figure T5.2 (où les sens des flèches indiquent le sens réel des échanges) :

- la machine reçoit une quantité de chaleur Q_c de la part du foyer
- elle produit un travail W qui fait avancer la locomotive, par exemple
- elle rejette une quantité de chaleur Q_f dans l'atmosphère.

ces grandeurs étant considérées sur 1 cycle de la machine.



(a) Schéma des échanges (non algébriques)



(b) Loco à vapeur ; distingue bien la cheminée d'où sort la fumée de combustion du charbon, et les sorties d'où s'échappe la vapeur d'eau, qui a servi pour refroidir l'eau du moteur. (Crédit : Wikipedia)

FIGURE T5.2 – Machine à vapeur de locomotive.

Dans cette machine à vapeur, on fournit du charbon ; du point de vue thermodynamique, on fournit Q_c , c'est ce que cela nous coûte ; et en retour, la machine nous fournit un travail W . On peut donc définir le rendement de cette machine comme

$$r = \left| \frac{\text{ce qu'on récupère}}{\text{ce qu'on fournit}} \right| = \left| \frac{W}{Q_c} \right|$$

1. Carnot avait des notions inexactes sur la nature de la chaleur. En fait, on verra un peu plus loin qu'il ne s'agit pas d'un transfert de chaleur, mais d'entropie.

Autrement dit, au cours d'un cycle, on fournit une quantité de chaleur Q_c , on en transforme une quantité $r.Q_c$ en travail (cela, c'est utile) et on en rejette le reste $Q_f = (1 - r).Q_c$ dans l'atmosphère (cela, c'est perdu, sauf pour chauffer les oiseaux en hiver).

Maintenant, la question est : comment maximiser r ? Peut-on le rendre aussi proche que possible de 1?

Pour cela, il faut d'abord analyser rapidement ce qui se passe dans la machine à vapeur : on chauffe la vapeur d'eau pour augmenter sa pression ; elle se détend alors dans le cylindre en poussant sur le piston, ce qui produit la force motrice ; elle se refroidit alors au contact de l'atmosphère. En inversant le principe, Carnot imagine la première machine frigorifique : si, dit-il, on prend de l'eau à une pression suffisamment faible pour que sa température de vaporisation soit, disons, de 10°C ; on la met en contact thermique avec l'atmosphère à 20°C , elle s'évapore en refroidissant l'atmosphère; on la comprime alors, elle s'échauffe, et avec cette vapeur d'eau très chaude, on revient chauffer le foyer. On a donc pu, en fournissant un travail, transférer de la chaleur du thermostat froid (l'atmosphère) vers le thermostat chaud (le foyer), à l'encontre du cours naturel des choses. C'est le principe de la climatisation, du réfrigérateur,...

Maintenant, imaginons que toutes ces transformations se fassent avec des différences de températures entre le gaz et les thermostats très petites : c'est la notion de **réversibilité** que Carnot introduit. Alors cette machine **réversible** peut fonctionner dans les deux sens ; en notant r_{rev} son rendement, on a deux possibilités (figure T5.3) :

- fonctionnement comme **moteur** : elle reçoit une quantité de chaleur Q de la part du thermostat chaud, produit un travail $W = r_{rev}.Q$ et rejette une quantité de chaleur $(1 - r_{rev}).Q$ dans le thermostat froid ;
- fonctionnement comme **récepteur** : elle reçoit un travail $r_{rev}.Q$, prélève une quantité de chaleur $(1 - r_{rev}).Q$ dans le thermostat froid, et rejette une quantité de chaleur Q dans le thermostat chaud.

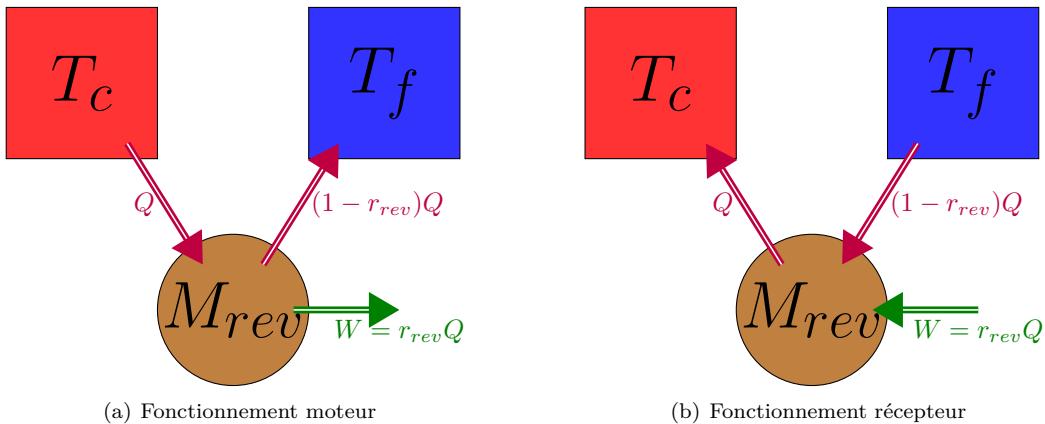


FIGURE T5.3 – Machine réversible de Carnot (échanges non algébriques).

Imaginons alors, propose Carnot, une seconde machine qui fonctionne comme un moteur **entre les mêmes thermostats** ; notons r son rendement, et supposons que $r > r_{rev}$. Alors, en les mettant ensemble, on peut réaliser le fonctionnement de la figure T5.4 :

- On fait fonctionner un cycle du moteur de rendement r ; il prélève une quantité de chaleur Q au thermostat chaud de température T_c , produit un travail $r.Q$ et réchauffe le thermostat froid de température T_f d'une quantité $(1 - r).Q$.
- On prélève une partie $r_{rev}.Q$ du travail fourni pour faire fonctionner un cycle de la machine réversible à l'envers. Elle prélève alors une quantité de chaleur $(1 - r_{rev}).Q$ au thermostat froid et rejette une quantité Q dans le thermostat chaud.

À la fin de ces opérations :

- les machines M et M_{rev} ont effectué un cycle, elles sont revenues dans leur état initial ;
- le thermostat chaud a regagné la chaleur qu'il avait fournie, il est revenu dans son état initial ;
- le thermostat froid a perdu une quantité de chaleur $(r - r_{rev}).Q$;
- un travail $W = (r - r_{rev}).Q$ a été récupéré.

Mettons les deux machines et le thermostat chaud dans une grosse boîte : on a fabriqué une grosse machine $\{M + M_{rev} + T_c\}$ qui décrit un cycle, et qui, au cours de ce cycle, produit du travail. Ce travail, elle l'a puisé simplement dans le thermostat froid. Super, allons breveter ça : un moteur qui fait avancer notre voiture, et pour cela se contente de refroidir l'atmosphère ! Eh bien, non, depuis Galilée, on ne croit plus à l'existence du **mouvement perpétuel**, de cette machine géniale qui permettrait de produire tout le travail qu'on veut sans source de chaleur particulière².

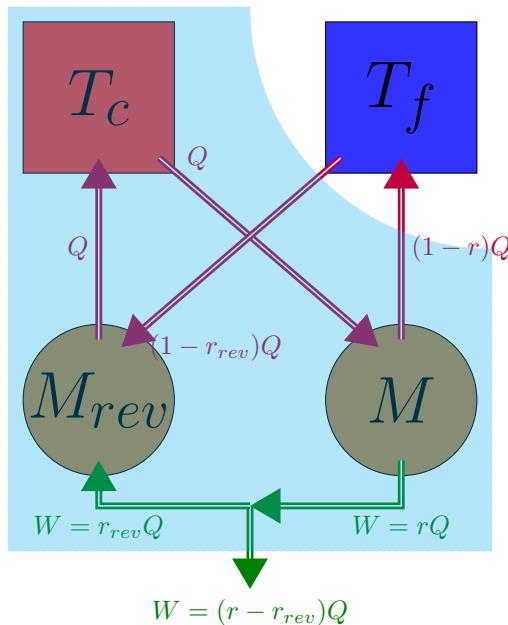


FIGURE T5.4 – Démonstration du théorème de Carnot (échanges non algébriques).

Le théorème de Carnot est donc la traduction en thermodynamique du postulat sur l'impossibilité du mouvement perpétuel. Il dit que, dans le cas qui nous a intéressé, la condition $r > r_{rev}$ est impossible ; on a donc obligatoirement $r \leq r_{rev}$; et si la seconde machine est réversible elle aussi, alors l'égalité peut être renversée, ce qui implique que $r = r_{rev}$.

Théorème de Carnot

Le rendement d'une **machine cyclique ditherme** est toujours inférieur à un rendement maximal (appelé parfois *rendement de Carnot*) r_C qui ne dépend que des températures des deux thermostats.

Toute machine cyclique ditherme **réversible** fonctionnant entre ces deux thermostats a pour rendement le rendement maximal r_C .

Toute machine cyclique ditherme **irréversible** fonctionnant entre ces deux thermostats a un rendement strictement inférieur à r_C .

Remarque : Tous les termes sont importants : pour que le théorème s'applique, la machine doit être :

- cyclique : il existe plein de machines à mouvement quasiment perpétuel, dont le fonctionnement est presque cyclique, mais pas exactement. La plupart sont basées sur des aimants, car on omet de dire que, lors du fonctionnement, les aimants se désaimantent lentement.
- ditherme : tous les moteurs ne fonctionnent pas forcément entre deux thermostats ; par exemple, dans un moteur à explosion, la chaleur est apportée directement par la combustion de l'essence.
- entre les mêmes thermostats : si on change les thermostats, on change le rendement maximal.

Carnot est allé aussi loin qu'il a pu pour essayer de trouver ce rendement. Il a postulé qu'il doit augmenter avec la différence de températures $T_c - T_f$. Il a aussi proposé une machine imaginaire pour réaliser ce cycle ; la machine de Carnot. Il n'avait pas les outils pour calculer son rendement, mais nous, nous les avons.

Exemple : Machine de Carnot

À connaître

La machine de Carnot est une machine imaginaire constituée d'un gaz parfait qui décrit le cycle *ABDE* suivant :

- de A à B : détente isotherme à T_c ;
- de B à D : détente adiabatique réversible ;
- de D à E : compression isotherme à T_f ;
- de E à A : compression adiabatique réversible ;

2. Plus précisément, sans différence de température

- Exprimez les quantités de chaleur reçues par le gaz lors des 4 phases, en fonction de n , T_c , T_f , et des volumes V_A , V_B , V_D et V_E .
- Quelle est la phase où le gaz reçoit de la chaleur ? En déduire Q_c .

En appliquant le premier principe à un cycle, exprimez W en fonction des quantités de chaleur précédentes. Quel est son signe ?

- On définit $r_C = -\frac{W}{Q_c}$. Montrez que $r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} \frac{\ln \frac{V_E}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$
- En appliquant deux fois les lois de Laplace, reliez $\frac{V_D}{V_E}$ à $\frac{V_A}{V_B}$. Déduisez-en que le rendement de la machine de Carnot vaut

$$r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (\text{T5.1})$$

- AB est isotherme à T_c , donc $Q_{AB} = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$
 DE est isotherme à T_f , donc $Q_{DE} = nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}$
 BD et EA sont des adiabatiques donc $Q_{BD} = Q_{EA} = 0$
- $V_B > V_A$ et $V_D > V_E$ donc $Q_{AB} > 0$ et $Q_{DE} < 0$. Le gaz reçoit donc de la chaleur dans la phase AB , donc $Q_c = nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}$.

Sur un cycle, $\Delta U = 0$ car U est une fonction d'état. Le travail W reçu au cours du cycle vérifie donc $W + Q_{AB} + Q_{BD} + Q_{DE} + Q_{EA} = 0$ soit $W = -nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} - nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}$. Il est négatif car le cycle est moteur (rotation dans le sens horaire dans le diagramme de Watt).

- On en déduit donc facilement que $r_C = \frac{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_f \ln \frac{V_E}{V_D}}{nRT_c \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 + \frac{T_f}{T_c} \frac{\ln \frac{V_E}{V_D}}{\ln \frac{V_B}{V_A}}$
- Les transformations BD et EA sont adiabatiques et réversibles, donc on peut appliquer les lois de Laplace : $T_A V_A^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1}$ et $T_B V_B^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$. Or $T_A = T_B = T_c$ et $T_D = T_E = T_f$ (à cause des isothermes) donc en divisant terme à terme les deux équations, on trouve $\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_E}{V_D}\right)^{\gamma-1}$ ce qui implique que $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_E}{V_D}$. On en déduit que $\ln \frac{V_B}{V_A} = -\ln \frac{V_E}{V_D}$ ce qui donne bien $r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$

On analysera ce résultat plus loin, une fois qu'on l'aura rétabli à partir des principes de la thermodynamique.

A.2. Analyse par Clausius des résultats de Carnot

Plusieurs autres physiciens ont analysé les résultats de Carnot ; celui qui a laissé son nom associé à une formule est Clausius. Dans les années 1860, les connaissances de la thermodynamique sont suffisamment avancées pour ressembler à ce que nous connaissons maintenant. Dans son livre *Théorie mécanique de la chaleur*, Clausius établit alors une formule traduisant en termes mathématiques l'impossibilité du mouvement perpétuel introduit par Carnot. Nous ne pouvons pas reprendre exactement son raisonnement, assez complexe, mais nous supposerons que nous connaissons l'expression du rendement maximal de Carnot : $r_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ pour un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre deux thermostats T_f et $T_c > T_f$.

Calcul : Inégalité de Carnot-Clausius

On considère un moteur cyclique ditherme **recevant** (en convention thermodynamique) au cours d'un cycle :

- une quantité de chaleur $Q_c > 0$ de la part de la source chaude
- une quantité de chaleur $Q_f < 0$ de la part de la source froide
- un travail $W < 0$

D'après le théorème de Carnot, $\left| \frac{W}{Q_c} \right| = -\frac{W}{Q_c} < 1 - \frac{T_f}{T_c}$. Or d'après le premier principe appliqué à un cycle : $W + Q_c + Q_f = \Delta U = 0$ car U est une fonction d'état. Donc $W = -Q_c - Q_f$.

On en déduit que $\frac{Q_c + Q_f}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ d'où $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$. On peut transformer cette équation sous la forme $\frac{Q_f}{T_f} \leq -\frac{Q_c}{T_c}$ et en déduire l'inégalité de Carnot-Clausius :

$$\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \leq 0 \quad (\text{T5.2})$$

Remarque : Clausius a généralisé cette équation à plusieurs thermostats : si au cours d'un cycle, un système échange des quantités de chaleur Q_i avec des thermostats à la température T_i , alors $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$

T5.B. Le second principe de la thermodynamique

B.1. Le second principe

Le terme 0 qui apparaît à droite dans l'inégalité de Carnot-Clausius peut s'interpréter comme la variation d'une fonction d'état sur le cycle. Mais quelle fonction d'état ? Pas l'énergie, puisque les termes $\frac{Q_i}{T_i}$ n'ont pas l'unité d'une énergie. Il faut donc en introduire une nouvelle, ce que Clausius a fait en 1865.

Propriété : Second principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une **fonction d'état extensive** S appelée **entropie**, en J/K . Lorsqu'un système fermé évolue entre deux états d'équilibre en recevant des quantités de chaleur Q_i de la part de thermostats à la température T_i , sa variation d'entropie vaut

$$\Delta S = S_{ech} + S_{cr} \text{ avec } S_{ech} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \text{ (entropie échangée) et } S_{cr} \geq 0 \text{ (entropie créée)} \quad (\text{T5.3})$$

L'entropie créée est nulle si et seulement si la transformation est réversible.

Remarque : Le second principe se démarque du premier par cette propriété fondamentale : **l'énergie se conserve**, tandis que **l'entropie se crée et n'est jamais détruite**. C'est l'entropie qui est responsable de toute irréversibilité dans l'univers. Si, au cours d'une transformation, de l'entropie est créée, alors la transformation n'est pas réversible, car sinon on détruirait de l'entropie en la renversant.

Propriété : Sources de création d'entropie (admis)

En pratique les principales sources de création d'entropie sont :

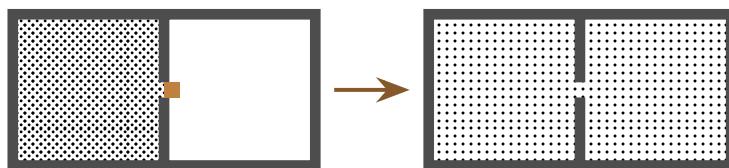
- les échanges thermiques entre deux objets à des températures différentes ; plus la différence de température est grande, plus l'entropie créée est importante
- les frottements mécaniques, qui se traduisent par un non-équilibre des forces de pression de chaque côté d'une paroi mobile
- il en existe d'autres : cycles d'aimantation, mélanges, ...

Remarque : Lors d'une transformation adiabatique réversible, $S_{cr} = 0$ (réversible) et $S_{ech} = 0$ (adiabatique) donc $\Delta S = 0$: une telle transformation est **isentropique**. Dans le cas d'un gaz parfait, les lois de Laplace s'appliquent.

Remarque : L'entropie se crée, mais elle **s'échange** aussi. Cet échange peut être un gain ou une perte d'entropie. Dans beaucoup de magazines de vulgarisation (peu) scientifique, on lit souvent ceci : «l'entropie d'un système augmente toujours». Eh bien, si vous lisez ça, jetez le livre au feu, car son auteur n'a rien compris :

- l'entropie d'un système isolé augmente (car alors $S_{ech} = 0$)
- l'entropie d'un système isolé thermiquement augmente (car alors $S_{ech} = 0$)
- l'entropie d'un système qui échange de la chaleur peut augmenter et diminuer

Les énoncés faux sur l'entropie sont souvent accompagnés d'explications fumeuses : «l'entropie, c'est le désordre». C'est un peu plus compliqué que ça. Sans entrer dans les détails, on peut dire que l'entropie a été reliée par Boltzmann à un manque d'information sur le système. Reprenons par exemple la détente de Joule-Gay Lussac :



Dans l'état de gauche, il y a un gaz à la température T , dans un volume V , à la pression P : c'est l'état macroscopique. À cet état macroscopique correspondent beaucoup d'états microscopiques ; et moi, je suis incapable de savoir lequel de ces états microscopiques est l'état réel du système : cela correspond à un manque d'information. En réduisant la description du système à T, V, P , on a énormément perdu d'informations sur le système. Boltzmann, intuitant à l'avance la théorie de l'information et l'entropie statistique introduites par Shannon dans les années 1940, a prouvé que l'entropie correspond, à une constante près (la constante de Boltzmann), au logarithme du nombre d'états microscopiques possibles correspondant à l'état macroscopique du système. Plus il y a d'états microscopiques possibles, plus l'entropie est grande, et cela traduit le fait que je ne sais pas grand chose sur mon système. Ainsi, en **physique statistique**, on redémontre les équations de la thermodynamique en dénombrant le nombre d'états microscopiques de manière à calculer l'entropie du système, et on en déduit toutes ses propriétés.

Une fois la détente effectuée, le gaz a pris plus de volume. Les particules peuvent occuper plus d'espace, elles ont donc encore plus d'états possibles. Le nombre d'états microscopiques possibles du système est donc encore plus grand, donc l'entropie est plus grande : $\Delta S > 0$. Or $S_{ech} = 0$ ici (car le système est calorifugé) donc $S_{cr} > 0$: cette transformation est irréversible.

Dans un système isolé, on perd de l'information, et l'entropie augmente. Si on veut gagner de l'information, il faut faire un effort : recevoir du travail, qu'on évacue sous forme de chaleur une fois utilisé. Recevoir du travail n'échange aucune entropie ; l'évacuation de chaleur, par contre, évacue de l'entropie, et au final, on a perdu de l'entropie donc gagné de l'information sur le système.

Dans tous les cas, il ne faut pas trop chercher, pour une première étude de la thermodynamique, à comprendre les secrets de l'entropie. Il faut surtout retenir l'expression du second principe, ses conséquences et son utilisation.

 Si vous comprenez bien l'anglais, je vous conseille les excellents films de George Porter : [The Laws of Disorder](#) ([épisode 1 : Entropy](#) – [épisode 2 : The 2nd law of thermodynamics](#) – [épisode 3 : Molecules at works](#) – [épisode 4 : Equilibrium](#)).

Étudions maintenant les conséquences du second principe sur les machines thermiques.

B.2. Étude des machines thermiques cycliques monothermes

Définition : Machine cyclique monotherme

Une machine cyclique monotherme décrit un cycle au cours de laquelle elle n'échange de la chaleur qu'avec un seul thermostat. Elle reçoit une quantité de chaleur Q et un travail W (figure T5.5).

Énoncé de Kelvin du second principe

Il est impossible de construire un moteur cyclique monotherme.

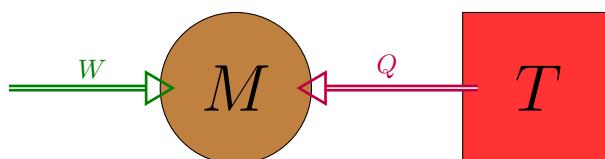


FIGURE T5.5 – Machine cyclique monotherme (notations algébriques).

Démonstration

Sur un cycle, $\Delta U = 0$, $\Delta E_{macro} = 0$ et $\Delta S = 0$ car ce sont des fonctions d'état. En appliquant le premier et le second principe, cela implique que $W + Q = 0$ et $\frac{Q}{T} + S_{cr} = 0$. Donc $Q = -T \cdot S_{cr} \leq 0$ puisque l'entropie créée est toujours positive. On en déduit donc que $W = -Q \geq 0$: la machine reçoit forcément du travail.

Remarque : Attention aux hypothèses de l'énoncé :

- il existe des moteurs monothermes, mais non cyclique ; par exemple, une bombe qui explose produit du travail, mais elle n'est pas cyclique.
- il existe des machines cycliques monothermes, mais ce sont des récepteurs ; par exemple, une résistance chauffante.

B.3. Étude des machines thermiques cycliques dithermes

Définition : Machine ditherme et diagramme de Raveau

Une machine thermique ditherme reçoit, au cours d'un cycle, un travail W , une quantité de chaleur Q_c de la part de la source chaude de température T_c , et une quantité de chaleur Q_f de la part de la source froide de température T_f .

Un diagramme de Raveau représente les chaleurs échangées par une machine cyclique ditherme au cours d'un cycle dans un diagramme (Q_c, Q_f) (figure T5.6). On y traduit :

- le second principe sous forme d'une *zone interdite*
- le premier principe sous forme d'une séparation entre les moteurs et les récepteurs

Démonstration

Le second principe s'écrit, sur un cycle, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S_{cr} = \Delta S = 0$, car l'entropie est une fonction d'état. Donc $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ puisque l'entropie créée est positive. On en déduit que

$$Q_c \leq -\frac{T_c}{T_f} Q_f$$

ce qui correspond, dans le diagramme de Raveau, à être en-dessous de la droite d'équation $y = -\frac{T_c}{T_f}x$ qui est une droite de pente inférieure à -1 .

Le premier principe s'écrit, sur un cycle, $W + Q_c + Q_f = \Delta U = 0$ car l'énergie interne est une fonction d'état ^a. Donc $W = -Q_c - Q_f$. La machine est un moteur si et seulement si $W < 0$ soit $Q_c + Q_f > 0$ soit encore $Q_c > -Q_f$, ce qui correspond, dans le diagramme de Raveau, à être situé au-dessus de la droite d'équation $y = -x$.

a. $\Delta E_{macro} = 0$ également.

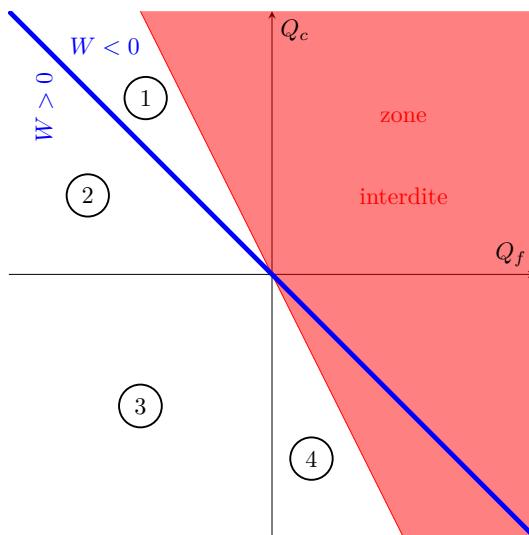


FIGURE T5.6 – Diagramme de Raveau.

On voit apparaître alors 4 zones distinctes dans la partie autorisée du diagramme. On va les étudier.

Zone ① : les moteurs

Théorème de Carnot pour un moteur cyclique diatherme

Le rendement $r = \left| \frac{W}{Q_c} \right|$ d'un moteur cyclique diatherme est inférieur à

$$r_C = \frac{T_c - T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \quad (\text{T5.4})$$

Ce maximum est atteint si le moteur est réversible.

Démonstration

Dans la zone ①, on a un moteur ($W < 0$) qui prend de la chaleur à la source chaude ($Q_c > 0$) et en renvoie dans la source froide ($Q_f < 0$). Ce qui nous intéresse, c'est le travail ; ce qui nous coûte, c'est la chaleur Q_c .

On définit donc le rendement comme $r = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = \frac{-W}{Q_c}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $W = -Q_c - Q_f$ donc $r = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$. On manipule cette expression en faisant bien attention aux signes : $T_f > 0$ et $Q_c > 0$ donc on peut écrire $\frac{T_f}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{Q_c}$ soit $\frac{Q_f}{Q_c} \leq -\frac{T_f}{T_c}$. On en déduit donc que $r \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

Remarque : Les températures sont en Kelvins ! sinon, si le thermostat chaud est un glaçon, il y a un problème....

Remarque : Pourquoi le rendement maximal n'est-il pas égal à 1 ? Pourquoi est-il impossible de transformer toute la chaleur en travail ? C'est à cause de l'entropie. Observons la figure T5.7. Sur la figure de gauche, on a un fonctionnement réversible entre des thermostats à 500K et 1000K. Supposons que la machine préleve 1000J au thermostat chaud ; alors elle préleve aussi $1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ d'entropie. Or, au bout d'un cycle, la machine doit être revenue à son état initial, donc elle doit avoir évacué cette entropie. Pour cela, il faut la renvoyer dans la source froide. Comme celle-ci est à 500K, il suffit de lui renvoyer 500J et cela correspond bien à $1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ d'entropie évacuée. Il reste alors 500J disponibles pour être transformés en travail, d'où un rendement de $\frac{500}{1000} = 50\%$ qui correspond bien au rendement maximal entre ces deux thermostats.

Sur le schéma de droite, on suppose que la machine n'est pas réversible : elle crée $0,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ d'entropie par cycle. Il faut désormais évacuer $1,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ d'entropie dans la source froide, au moyen de 750J de chaleur ; du coup, il ne reste que 250J disponibles pour le travail : le rendement n'est plus que de 25%.

Si la machine est fortement irréversible (frottements,...) et produit trop d'entropie, alors elle a trop d'entropie à évacuer vers la source froide, et elle s'arrête de tourner.

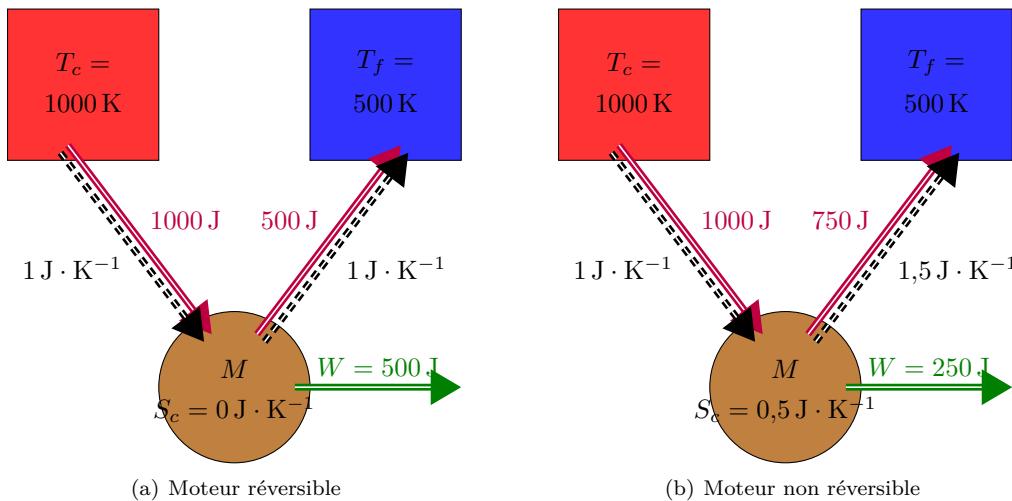


FIGURE T5.7 – Deux exemples de machines fonctionnant entre les mêmes thermostats (échanges non algébriques).

Remarque : Le plus souvent, on prend l'atmosphère comme source froide, fixée à environ 300K (pour les ordres de grandeur). Pour avoir le meilleur rendement possible, il faut alors avoir la source chaude la plus chaude possible.

Le tableau T5.1 donne les rendements théoriques de différents types de centrales électriques. On constate que, plus la température chaude est élevée, plus le rendement maximal est élevé. Les machines qui tirent leur énergie du soleil sont donc celles qui ont le plus de potentiel, car le soleil atteint une température irréalisable sur terre (sauf peut-être

dans les centrales à fusion). Néanmoins, dans ces domaines, on est loin d'avoir atteint les meilleurs rendements. Les centrales solaires à concentration, comme THEMIS, ont été le plus souvent abandonnée du fait de la difficulté à trouver des matériaux qui résistent aux fortes températures ; les panneau photovoltaïques sont encore en progrès, le rendement record de 47 % a été atteint avec une cellule très complexe, mais la plupart des panneaux actuels ont un rendement aux alentours de 20 %.

Pour les centrales thermiques, fonctionnant sur des cycles bien connus de production de vapeur / turbine, on voit que le rendement réel atteint est de l'ordre de 2/3 du rendement maximal théorique. C'est une règle utile à retenir : dans beaucoup de domaines, les rendements atteints sont de l'ordre de 2/3 du rendement théorique.

Pourquoi ne s'approche-t-on pas plus du rendement maximal ? Pour s'en approcher, il faut une machine fortement réversible ; or on a vu qu'une transformation réversible est très lente. Si on veut avoir de la puissance en sortie, il ne faut pas aller trop lentement. Tout est donc une affaire de compromis : pas trop lent pour avoir de la puissance, pas trop rapide pour avoir un bon rendement.

Type	T_c	Rendement maximum théorique	Rendement maximal atteint
À charbon	600°C	66 %	45 %
À gaz (cycle combiné)	1500°C	85 %	60 %
Nucléaire	320°C	52 %	34 %
Four solaire (THEMIS)	1000°C	77 %	25 %
Centrale photovoltaïque	6000K	95 %	47 %

TABLEAU T5.1 – Ordre de grandeur des rendements de différentes centrales électriques.

Remarque : Le rendement défini par $r = \left| \frac{W}{Q_c} \right|$ est un rendement purement thermodynamique. Du point de vue de la thermodynamique, Q_f est perdue ; mais pour l'ingénieur qui conçoit le système, cette chaleur peut être utilisée à bon escient. À Pierrelatte, par exemple, l'eau chaude qui sort de la centrale du Tricastin, au lieu d'être simplement rejetée dans le Rhône, sert à chauffer des serres de culture. Dans d'autres endroits, des unités de cogénération en ville produisent de l'électricité à partir de biomasse, et le surplus de chaleur est rejeté dans le circuit de chauffage urbain.

Remarque : On définit le rendement à partir du rapport d'énergies échangées pendant 1 cycle, mais on pourrait de même le définir comme un rapport d'énergies échangées pendant 1s, c'est-à-dire de puissances : en définissant la puissance mécanique $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\delta t}$, la puissance thermique échangée avec la source chaude $\mathcal{P}_c = \frac{\delta Q_c}{\delta t}$ et la puissance thermique échangée avec la source froide $\mathcal{P}_f = \frac{\delta Q_f}{\delta t}$, on aurait $r = \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_c} \right|$.

Zone ②

Dans la zone ②, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour prendre de la chaleur à la source chaude ($Q_c > 0$) et la rejeter dans la source froide ($Q_f < 0$). C'est assez peu utile, puisque la chaleur va déjà naturellement des températures les plus élevées vers les températures les plus basses.

Zone ③

Dans la zone ③, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour chauffer la source chaude ($Q_c < 0$) et la source froide ($Q_f < 0$). Deux bonnes résistances chauffantes ou des frottements font le même effet, inutile de créer une machine thermique ditherme compliquée.

Zone ④

Dans la zone ④, on a une machine qui reçoit du travail ($W > 0$) pour chauffer la source chaude ($Q_c < 0$) en prenant de la chaleur à la source froide ($Q_f > 0$). C'est intéressant, car c'est le contraire du sens normal de circulation de la chaleur. On peut en tirer deux utilisations.

Théorème de Carnot pour un réfrigérateur cyclique ditherme

Un réfrigérateur (ou une climatisation) est une machine cyclique qui reçoit du travail pour refroidir une source déjà froide en évacuant de la chaleur vers une source déjà chaude. Son efficacité $\eta = \left| \frac{Q_f}{W} \right|$ est inférieure à

$$\eta_{max} = \frac{T_f}{T_c - T_f} \quad (T5.5)$$

Ce maximum est atteint si la machine est réversible.

Démonstration

Pour un réfrigérateur, on a $W > 0$, $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$. On a donc $\eta = \left| \frac{Q_f}{W} \right| = \frac{Q_f}{W}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $W = -Q_c - Q_f$ donc $\eta = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{-1 - \frac{Q_c}{Q_f}}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$. Or $Q_f > 0$ donc $\frac{Q_c}{Q_f} \leq -\frac{T_c}{T_f}$ soit $-1 - \frac{Q_c}{Q_f} \geq -1 + \frac{T_c}{T_f}$. En prenant l'inverse : $\eta \leq \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$.

Théorème de Carnot pour une pompe à chaleur cyclique ditherme

Une pompe à chaleur est une machine cyclique qui reçoit du travail pour réchauffer une source déjà chaude en prenant de la chaleur dans une source froide. Son efficacité $\eta = \left| \frac{Q_c}{W} \right|$ est inférieure à

$$\eta_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f} \quad (T5.6)$$

Ce maximum est atteint si la machine est réversible.

Démonstration

Pour une pompe à chaleur, on a $W > 0$, $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$. On a donc $\eta = \left| \frac{Q_c}{W} \right| = -\frac{Q_c}{W}$.

D'après le premier principe sur un cycle : $W = -Q_c - Q_f$ donc $\eta = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$. D'après le second principe, $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = -S_{cr} \leq 0$ donc $\frac{Q_c}{T_c} \leq -\frac{Q_f}{T_f}$. Or $-Q_c > 0$ donc $-\frac{T_f}{T_c} \leq \frac{Q_f}{Q_c}$ soit $1 + \frac{Q_f}{Q_c} \geq 1 - \frac{T_f}{T_c}$. En prenant l'inverse : $\eta \leq \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$.

Remarque : Pompe à chaleur et réfrigérateur / climatisation sont en fait la même machine thermique ; la seule chose qui change, c'est l'utilisation qu'on en fait : soit on est au chaud dans notre maison l'hiver et on veut encore chauffer l'intérieur ; soit on est au frais l'été (ou bien nos aliments sont au frais dans le réfrigérateur) et on veut encore refroidir cette source froide.

Remarque : On parle pour ces machines d'efficacité et non de rendement, car il ne s'agit pas de transformer du travail en chaud ou en froid, mais de se servir du travail pour pomper de la chaleur d'une source vers une autre. Du coup, il n'y a pas de problème à ce que cette efficacité soit supérieure à 1. En pratique, les efficacités théoriques maximum de Carnot sont souvent très grandes (supérieures à 10), mais les systèmes réels atteignent des efficacités de 2,5 environ pour les réfrigérateurs, et 3,5 environ pour les pompes à chaleur.


Machines thermiques

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Deuxième principe, bilans d'entropie	
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie, entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{ech} + S_{créée}$ avec $S_{ech} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité.
Machines thermiques	
Application du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique aux machines thermiques cycliques dithermes : rendement, efficacité, théorème de Carnot.	Donner le sens des échanges énergétiques pour un moteur ou un récepteur thermique ditherme. Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme. Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot. Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles. Expliquer le principe de la cogénération. Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.

Machines thermiques

QCMs

réponses page 858

QCM : Compréhension du cours

Q1.

L'entropie a pour unité :

- | | |
|--|---|
| (a). $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
(c). J | (b). $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
(d). K |
|--|---|

Q2.

L'entropie créée est toujours positive :

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q3.

L'entropie échangée reçue par un système vaut :

- | | |
|---|---|
| (a). 0 pour une évolution adiabatique
(c). $W - Q$ | (b). $\frac{Q}{T_{\text{système}}}$
(d). $\sum_{\text{thermostats } i} \frac{Q_i}{T_{\text{thermostat } i}}$ |
|---|---|

Q4.

Une machine thermique monotherme ne peut pas être un moteur.

- | | |
|-----------|-----------|
| (a). Faux | (b). Vrai |
|-----------|-----------|

Q5.

Un moteur cyclique ditherme fonctionnant entre deux thermostats de températures 300 K et 900 K peut avoir comme rendement :

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (a). 74 %
(c). 67 % | (b). 42 %
(d). 33 % |
|------------------------|------------------------|

Q6.

Le diagramme de Raveau représente le fonctionnement d'une machine cyclique ditherme dans le plan :

- | | |
|--|--|
| (a). Q_f en ordonnées, Q_c en abscisses
(c). Q_c en ordonnées, W en abscisses | (b). Q_f en ordonnées, W en abscisses
(d). Q_c en ordonnées, Q_f en abscisses |
|--|--|

QCM : Rappels : travaux et chaleurs reçus par des gaz

Un QCM de révision sur le chapitre T3, car les calculs d'échanges d'énergies avec des gaz sont essentiels pour de nombreux exercices.

Q7.

Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression isobare à $P = 3 \text{ bar}$ de $V_i = 32 \text{ L}$ à $V_f = 16 \text{ L}$. Le travail reçu par le gaz vaut :

- | | |
|--|--|
| (a). -3200 J
(c). -48 J | (b). 48 J
(d). 4800 J |
|--|--|

Q8.

et la chaleur reçue par le gaz vaut :

- | | |
|---|--|
| (a). -4800 J
(c). -16800 J | (b). -6720 J
(d). -1230 J |
|---|--|

Q9.

Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression isotherme à $T = 18^\circ\text{C}$ de $V_i = 32\text{ L}$ à $V_f = 16\text{ L}$. Le travail reçu par le gaz vaut :

- | | |
|------------|--------------|
| (a). 39 J | (b). 1680 J |
| (c). 104 J | (d). -1200 J |

Q10.

et la chaleur reçue par le gaz vaut :

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). -4200 J | (b). 0 J |
| (c). -1680 J | (d). -5580 J |

Q11.

Une mole de gaz parfait diatomique subit une compression adiabatique réversible de l'état $T_i = 18^\circ\text{C}$, $V_i = 32\text{ L}$ vers l'état $V_f = 16\text{ L}$. La température finale vaut :

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). 42,1 °C | (b). 47,5 °C |
| (c). 23,8 °C | (d). 111 °C |

Q12.

et le travail reçu par le gaz vaut :

- | | |
|--------------|-------------|
| (a). 1930 J | (b). 1400 J |
| (c). -1910 J | (d). 1680 J |

Q13.

et la chaleur reçue par le gaz vaut :

- | | |
|-------------|--------------|
| (a). 0 J | (b). -230 J |
| (c). 4630 J | (d). -1680 J |



QCM : Rendement d'une machine thermique X

Le rendement (ou efficacité) d'une machine thermique est toujours défini comme le rapport de ce qu'on récupère sur ce qu'on fournit. Il faut comprendre l'utilisation de la machine pour pouvoir le définir.

Dans le cas d'une machine ditherme recevant un travail W , une quantité de chaleur Q_f d'une source froide et une quantité de chaleur Q_c d'une source chaude, on a majoritairement trois cas :

- pour un moteur, on fournit la chaleur Q_c et on récupère le travail W ;
- pour une pompe à chaleur, on fournit le travail W et on récupère la chaleur Q_c ;
- pour une climatisation ou un réfrigérateur, on fournit le travail W et on récupère la chaleur Q_f .

On peut aussi exprimer le rendement comme un rapport de puissances plutôt qu'un rapport d'énergies.

Remarque : dans ce QCM, on prend les valeurs absolues des énergies ou des puissances.

Q14.

Un moteur est chauffé par une chaudière de 30 kW. Son rendement vaut 23 %. La puissance mécanique produite par ce moteur vaut :

- | | |
|-------------|--------------|
| (a). 23 kW | (b). 30 kW |
| (c). 6,9 kW | (d). 33,1 kW |

Q15.

Un moteur produit 6,4 kW de puissance motrice (travail) avec un rendement de 31 %. La puissance thermique apportée par la source chaude vaut :

- | | |
|--------------|--------------|
| (a). 27,0 kW | (b). 14,6 kW |
| (c). 20,6 kW | (d). 2,0 kW |

Q16.

Un réfrigérateur consomme en moyenne 120 W d'électricité (travail électrique) ; son efficacité vaut 2,4. La puissance thermique extraite de l'intérieur du réfrigérateur vaut :

- (a). 240 W
(c). 290 W

- (b). 50 W
(d). 120 W

Q17.

Un réfrigérateur d'efficacité 3,1 consomme 195 W. Il rejette dans la pièce (source chaude) une puissance thermique égale à :

- (a). 800 W
(c). 195 W

- (b). 605 W
(d). 410 W

QCM : Énergies et puissances

Il est important de savoir passer du travail/transfert thermique sur un cycle à des puissances. Il faut se souvenir que la puissance est le travail en 1 s, et la puissance thermique/calorifique est le transfert thermique en 1 s. Parfois, cela fait intervenir aussi des débit massiques, c'est-à-dire la masse qui circule en 1 s. Dans tous les cas, il n'y a pas de formules à connaître, mais il faut faire fonctionner son cerveau (surtout pour les deux dernières questions!).

Q18.

Un moteur effectue 3000 tours par minute ; à chaque tour, il produit un travail égal à 1100 J. La puissance qu'il fournit vaut :

- (a). 11 kW
(c). 55 kW

- (b). 145 kW
(d). 3300 kW

Q19.

À chaque cycle, une pompe à chaleur fournit 30 kJ par kilogramme de fluide transporté. Le débit massique moyen vaut $180 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$. La puissance calorifique fournie est :

- (a). 420 W
(c). 5400 W

- (b). 1500 W
(d). 1780 W

Q20.

Le réfrigérant d'un réfrigérateur permet d'extraire 31 kJ de chaleur pour chaque kilogramme effectuant le cycle. On souhaite extraire 1600 W de chaleur de la source froide ; le débit massique doit être de :

- (a). $52 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$
(c). $19 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$

- (b). $160 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$
(d). $31 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$

Q21.

Un moteur à explosion produit une puissance mécanique de 12 kW avec un rendement de 28 %. Or un litre de carburant fournit environ 30 GJ de chaleur. La consommation de ce moteur vaut :

- (a). $6,6 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$
(c). $3,2 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$

- (b). $18,3 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$
(d). $5,1 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$

Q22.

Un moteur à explosion de 5600 W consomme 1,9 L d'essence par heure. L'énergie mécanique produite par kilogramme d'essence (masse volumique : $700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) vaut :

- (a). $9,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
(c). $4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

- (b). $8,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
(d). $5,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Machines thermiques

Exercices

réponses page 859

Exercice T5.1 : Moteur de Stirling [**]

Dans un moteur de Stirling, n moles de gaz décrivent de manière réversible un cycle $ABCD$:

- le gaz subit une compression isotherme au contact d'un thermostat, de l'état A : $P_A = 1$ bar, $V_A = 2,50$ L et $T_A = 301$ K à l'état B de volume $V_B = 0,50$ L ;
- il subit alors un chauffage isochore jusqu'à la température $T_C = 903$ K au contact d'un objet appelé régénérateur (objet **interne à la machine**) ;
- il subit alors une détente isotherme au contact d'un autre thermostat, jusqu'à l'état D ;
- il revient alors à A par un refroidissement isochore au contact du régénérateur.

On assimile le gaz à un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$.

1. Représentez le cycle dans le diagramme de Watt.
2. Calculez le nombre de moles de gaz ; calculez les caractéristique de chaque état A, B, C, D .
3. Calculez le travail et le transfert thermique reçus par le gaz au cours des évolutions AB, BC, CD et DA . Que vaut le transfert thermique total échangé avec le régénérateur sur un cycle ?
4. Définissez et calculez le rendement de ce moteur, et comparez avec le rendement idéal selon le théorème de Carnot.

Exercice T5.2 : Cycle de Lenoir [**]

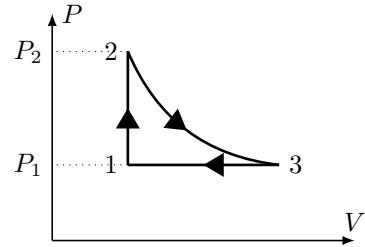
Le premier moteur à combustion interne à 2 temps a été mis au point par Lenoir. Le cycle idéal de Lenoir est le suivant :

- admission du mélange d'air et de carburant en 1, à la pression P_1 , puis explosion isochore jusqu'à la pression P_2 ,
- détente adiabatique réversible jusqu'à la pression P_1 ,
- évacuation isobare des gaz brûlés.

On suppose que le mélange gazeux est modélisé par un gaz parfait de rapport isentropique γ . On appelle *rapport de compression* le rapport $\alpha = P_2/P_1$.

1. Complétez le tableau suivant en fonction de V_3, T_1, α et γ :

État	P	V	T
1	P_1		T_1
2	P_2		
3	P_1	V_3	



2. Exprimez le transfert thermique et le travail reçus par le gaz lors de chaque étape, en fonction de P_1, P_2, V_3 (cylindrée) et T_1 .

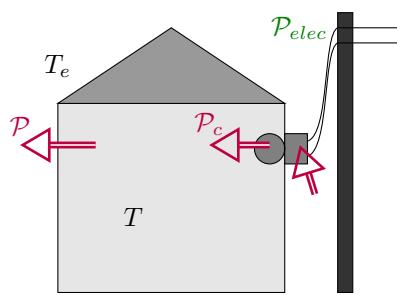
3. Définissez le rendement de ce moteur, et montrez qu'il vaut $1 - \gamma \frac{\alpha^{1/\gamma} - 1}{\alpha - 1}$. AN pour $\gamma = 1,38$ et $\alpha = 5$.

Exercice T5.3 : Chauffage d'une pièce par une pompe à chaleur [**]

Une pièce de volume 200 m^3 est chauffée à l'aide d'une pompe à chaleur. Dans tout cet exercice, on suppose que la température est uniforme dans toute la pièce et la pression constante. La capacité thermique C_p de l'ensemble {pièce+air} vaut $5000 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.

On note T la température de la pièce. La pompe à chaleur a une efficacité (rapport entre la puissance \mathcal{P}_c qu'elle fournit à la pièce sous forme de chaleur, et la puissance \mathcal{P}_{elec} qu'elle reçoit) constante et égale à 1,8. De plus la pièce perd de la chaleur par les murs ; on modélisera cette perte par une puissance thermique $\mathcal{P} = a \cdot C_p \cdot (T - T_e)$ avec $a = 9 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$

La température extérieure vaut $T_e = -5^\circ\text{C}$.



1. On souhaite obtenir dans la pièce $T = 19^\circ\text{C}$.

Calculez la puissance perdue par les murs à cette température-là. Déduisez-en la puissance électrique moyenne \mathcal{P}_{elec} à fournir à la pompe à chaleur.

2. En réalité, la pompe à chaleur fonctionne en mode tout ou rien : soit elle ne fait rien, soit elle fonctionne à sa puissance électrique nominale, qui vaut $\mathcal{P}_n = 1 \text{ kW}$.

Calculez la fraction de temps où la pompe doit fonctionner.

3. Un jour, quand on met en route la pompe à chaleur, la température de la pièce vaut $T_i = 10^\circ\text{C}$. La pompe à chaleur se met alors à fonctionner à plein régime ; elle consomme \mathcal{P}_n .

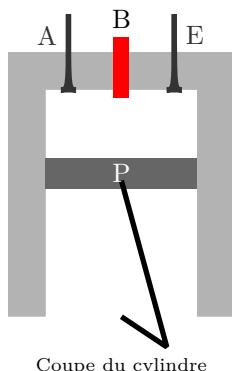
Par un bilan d'énergie entre deux instants séparés d'une durée courte dt , établissez l'équation différentielle vérifiée par la température T de la pièce.

4. Déduisez-en $T(t)$ à partir du moment où on allume la pompe à chaleur.

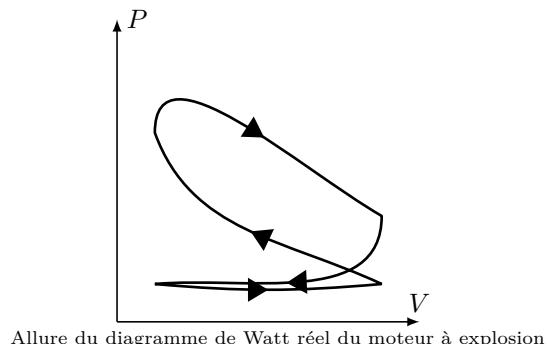
5. Calculez le temps mis pour atteindre 19°C .

Exercice T5.4 : Étude d'un moteur à explosion (Petites Mines) [***]

Afin de simplifier le problème, on suppose que le moteur est constitué d'un seul cylindre dont le schéma en coupe est représenté sur la figure ci-dessous :



Coupe du cylindre



Allure du diagramme de Watt réel du moteur à explosion

L'allure du diagramme de Watt du moteur réel est représentée figure de droite.

Pour l'étude, on va considérer que le moteur fonctionne suivant un cycle idéal appelé cycle d'Otto-Beau de Rochas. Le système {gaz dans le cylindre} suit le cycle suivant :

- $O \rightarrow A$: admission du gaz par la soupape d'admission. Initialement, le piston est tout en haut. Il descend tandis que la soupape A est ouverte. Un mélange gazeux constitué d'air et de $n' = 1 \times 10^{-4} \text{ mol}$ d'essence entre alors dans le cylindre, à la pression constante P_A .
À la fin de l'admission, lorsque la soupape d'admission se ferme, le mélange air-carburant se trouve dans les conditions : $V_A = 0,5 \text{ L}$, $P_A = 1 \text{ bar}$, $T_A = 293 \text{ K} = 20^\circ\text{C}$.
- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible ; le volume final vaut V_B . On note $V_B = V_A/a$ où a est un nombre sans dimension appelé *taux de compression*.
- $B \rightarrow C$: une étincelle provoque l'explosion isochore du mélange (le piston n'a pas le temps de bouger) ; toute l'essence réagit avec l'oxygène, et la température augmente fortement.
- $C \rightarrow D$: détente adiabatique réversible jusqu'à $V_D = V_A$.

- $D \rightarrow A$: refroidissement isochore : l'ouverture de la soupape d'échappement E met en contact l'intérieur du cylindre avec l'atmosphère, ce qui refroidit rapidement le gaz jusqu'à ce que sa pression atteigne P_A .
- $A \rightarrow O$: refoulement isobare du gaz vers l'extérieur à la pression P_A .

Les contraintes de fabrication et d'utilisation imposent de ne pas dépasser une pression de 50 bar dans le cylindre.

Dans tout le problème, les gaz, quels qu'ils soient, sont assimilés à des gaz parfaits de rapport isentropique $\gamma = 1,34$; on rappelle que $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. Les transformations seront considérées comme mécaniquement réversibles.

1. Fonctionnement général

- Représenter l'ensemble des transformations du cycle d'Otto-Beau de Rochas sur un diagramme de Watt. Indiquez le sens de parcours; est-ce bien un moteur ?
- Pourquoi parle-t-on de moteur à combustion interne ?
- Justifier pourquoi, pour l'étude théorique du système, on peut oublier les étapes $A \rightarrow O$ et $O \rightarrow A$, et considérer simplement qu'on a un système fermé de n_A moles de gaz qui décrit un cycle $ABCD$. Calculer le nombre n de moles de gaz présentes dans le système.
- Suggérer une explication à la valeur $\gamma = 1,34$.

2. Bilan énergétique

- Déterminer la pression P_B du mélange en B en fonction de P_A et a . AN pour $a = 8$.
- Déterminer la température T_B du mélange en B . AN pour $a = 8$.
- Le mélange air-essence explose spontanément à $T_e = 330^\circ\text{C}$. Si l'explosion a lieu avant que la compression soit terminée, le gaz chaud cherche à repousser le piston, ce qui abîme le moteur. Calculer le taux de compression maximal permettant d'éviter cet autoallumage, en fonction de T_A , T_e et γ . AN .
- L'étude détaillée de l'explosion ne sera pas faite ici. On admettra simplement que $T_C = 2100 \text{ K}$. Calcuper P_C pour $a = 8$. Respecte-t-on la contrainte de pression mentionnée en introduction ? En réalité, la pression maximale est légèrement inférieure. Proposer une explication.
- Calculer la température T_D en fonction de T_C et a . AN pour $a = 8$.
- Exprimer, en fonction de C_{vm} , n , T_B , T_C et a , le travail W reçu par le gaz au cours d'un cycle.
- Définir le rendement du cycle, et l'exprimer en fonction de a . AN pour $a = 8$. Comment le rendre maximal ?
- Un moteur avec $a = 8$ effectue 2500 cycles par minute. Combien de tours par minute effectue-t-il ? Calculer la puissance mécanique de ce moteur.

3. Bilan entropique

On rappelle que pour un gaz parfait, $\Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_{pm} \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i}$

- Le refroidissement isochore $D \rightarrow A$ s'effectue au contact de l'atmosphère à la température T_A . Exprimer, pour cette transformation, la variation d'entropie ΔS , l'entropie échangée S_e et l'entropie créée S_c , en fonction des températures et de C_{vm} . Faire l'AN pour S_c . Quelle est la cause de l'irréversibilité ?
- Y a-t-il eu création d'entropie au sein du gaz lors des évolutions $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow D$? Dans l'affirmative, d'où provient l'irréversibilité ?

Exercice T5.5 : Étude d'un moteur Diesel [***]

Le rendement d'un moteur à explosion augmente avec le taux de compression, lequel est limitée par le problème d'autoexplosion du mélange air-essence. Pour contourner cet obstacle, le moteur Diesel n'injecte le carburant (gazole) qu'une fois la phase de compression terminée.

On adopte le modèle idéal dans lequel une même quantité de gaz parfait (de coefficient isentropique constant $\gamma = 1,40$) décrit de manière quasi-statique un cycle *ABCD* :

1. *AB* : le gaz est comprimée de manière adiabatique et réversible ;
2. *BC* : le gazole est injecté et brûle tandis que le gaz se détend de façon isobare ;
3. *CD* : le gaz se détend de manière adiabatique et réversible ;
4. *DA* : l'ouverture de la soupape d'échappement permet une détente isochore du gaz.

Il y a bien évidemment ensuite un aller-retour du piston qui permet l'échappement du gaz usé puis l'introduction du gaz frais, mais cela ne joue pas de rôle dans l'étude thermodynamique et on l'oublie ici. La combustion du gazole est modélisée du point de vue thermodynamique par un transfert thermique Q_c reçu par le gaz.



Moteur Diesel construit en 1904 par MAN AG

1. Tracez l'allure du cycle dans le diagramme de Watt.
2. Complétez le tableau ci-dessous, et calculez aussi le nombre de moles de gaz :

	A	B	C	D
<i>p</i> en bar	1,00			
<i>T</i> en K	323	954		
<i>V</i> en L	2,40		0,24	

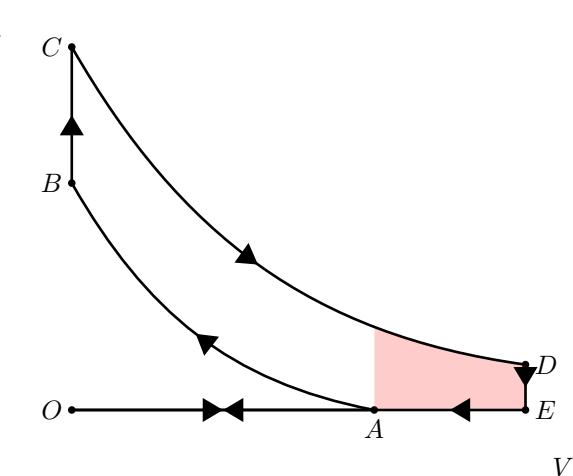
3. Calculez numériquement les transferts thermiques et les travaux reçus lors des évolutions *AB*, *BC*, *CD* et *DA*.
4. Calculez le rendement de ce moteur.

Exercice T5.6 : Cycle d'Atkinson [***]

Dans un moteur à explosion fonctionnant suivant le cycle d'Otto-Beau de Rochas, une partie du travail de détente des gaz chauds est perdue par le fait qu'on arrête la détente des gaz au point mort haut pour des raisons mécaniques. Pour améliorer le rendement, une idée est de fabriquer des systèmes permettant des compressions/détentes avec des rapports de compression différents lors des deux tours d'un cycle moteur.

Le schéma ci-contre représente un cycle idéal dans le diagramme de Watt (la partie colorée représente le travail supplémentaire récupéré par rapport à un cycle d'Otto-Beau de Rochas) :

- $O \rightarrow A$: admission de l'air à pression P_0 , T_A , jusqu'au volume V_A
- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible jusqu'au volume minimal V_B
- $B \rightarrow C$: explosion isochore
- $C \rightarrow D$: détente adiabatique réversible jusqu'à un volume $V_D > V_A$
- $D \rightarrow E$: refroidissement isochore à l'ouverture de la soupape d'échappement
- $E \rightarrow O$: échappement isobare



Pour simplifier, on oubliera dans la suite les étapes $O \rightarrow A$ et $A \rightarrow O$ et on considérera n moles de gaz parfait

de rapport isentropique $\gamma = 1,35$ effectuant le cycle $ABCDEA$. On notera $a = \frac{V_A}{V_B}$ et $b = \frac{V_D}{V_A}$. On notera T_i la température au point i .

1. Retrouvez l'expression de C_{vm} du gaz en fonction de R et γ .
2. Exprimez T_B en fonction de T_A , a et γ .
3. Exprimez T_C en fonction de T_D , a , b et γ .
4. Exprimez la quantité de chaleur Q_c reçue lors de l'explosion en fonction de n , C_{vm} , T_A et T_D .
5. Exprimez les travaux W_{AB} et W_{CD} en fonction de n , C_{vm} , T_A , T_D , a , b et γ .
6. Exprimez le travail W_{EA} en fonction de n , R , T_A et b .
7. Montrez alors que le rendement vaut $r = 1 - \frac{T_D + (\gamma b - \gamma - b)T_A}{T_D b^{\gamma-1} - T_A} a^{1-\gamma}$
8. Simplifiez l'expression de r si $V_D = V_A$; que retrouve-t-on ? AN pour $a = 8$.
9. Calculez T_D puis r pour les valeurs suivantes : $T_A = 20^\circ\text{C}$, $T_C = 1800^\circ\text{C}$, $a = 6$, $b = 2$.
10. Pour tirer le maximum de travail possible de la détente, il faut la poursuivre jusqu'à avoir comme pression en D la pression P_0 .

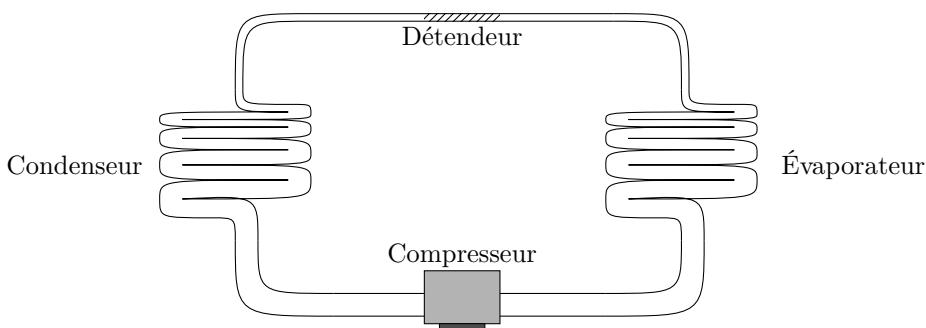
Montrez que dans ce cas $b = \left(\frac{T_C}{T_A} a^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

AN pour $T_A = 20^\circ\text{C}$, $T_C = 1800^\circ\text{C}$ et $a = 8$, calculez b puis r . Commentez.

Exercice T5.7 : Étude d'un réfrigérateur (CCINP) [**]

Le cycle représenté par la figure ci-dessous dans le diagramme de Clapeyron constitue un modèle de fonctionnement d'une machine de réfrigération dans laquelle une masse de fluide frigorigène subit les transformations suivantes :

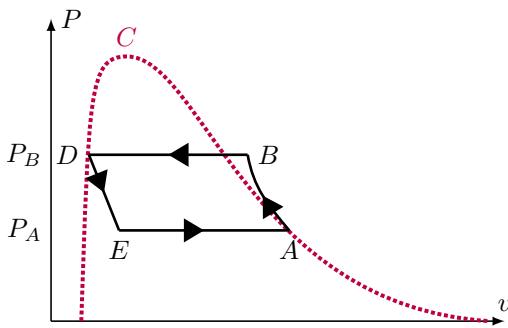
- $A \rightarrow B$: compression adiabatique dans le compresseur.
- $B \rightarrow D$: refroidissement et liquéfaction isobares dans le condenseur.
- $D \rightarrow E$: détente adiabatique et isenthalpique (l'enthalpie massique reste constante) dans le détendeur.
- $E \rightarrow A$: vaporisation isobare dans l'évaporateur.



Les sources froides Σ_F (intérieur de l'enceinte à réfrigérer) et chaude Σ_C (air ambiant) sont assimilées à des thermostats de températures respectives T_F et T_C constantes. Les variations d'énergie potentielle et cinétique du fluide sont négligeables.

Données :

- $T_F = 278\text{ K}$, $T_C = 293\text{ K}$;
- enthalpie massique du liquide saturant : $h_{LS}(T_A) = 281,3\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $h_{LS}(T_D) = h_D = 286,4\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- enthalpie massique de la vapeur saturante : $h_{VS}(T_A) = h_A = 390,2\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- enthalpie massique de l'état B : $h_B = 448,6\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.



Remarque : l'étude plus précise des systèmes en écoulement, tels celui-ci, sera vue dans un chapitre ultérieur.

1. Performances de l'installation

- Lorsqu'une masse de fluide subit une transformation isobare au cours de laquelle elle ne reçoit pas de travail autre que celui des forces de pression, quelle est la relation entre sa variation d'enthalpie massique Δh et la quantité de chaleur q qu'elle reçoit par unité de masse ?
- Reliez l'enthalpie massique h_E au point E à $h_{LS}(T_A)$, $h_{VS}(T_A)$ et w_V (fraction massique de vapeur au point E). En déduire la valeur de w_V .
- On désigne par q_F et q_C les quantités massiques d'énergie reçues par le fluide par transfert thermique au contact de la source froide et au contact de la source chaude respectivement, au cours du cycle défini ci-dessus.
Exprimez q_F et q_C en fonction des données. Faites l'application numérique.
- On désigne par w le travail massique reçu par le fluide au cours d'un cycle.
Exprimez w en fonction des données, et faites l'application numérique.
- Calculez l'efficacité μ de cette installation.
Comparez à l'efficacité maximale entre les mêmes thermostats.
- Sachant que la puissance P_F à extraire de la source froide pour maintenir sa température constante est de 500 W, calculez le débit massique qu'on doit imposer au fluide frigorigène.

2. Étude entropique

On note par s_F et s_C les valeurs algébriques des entropies massiques échangées par le fluide avec la source froide et avec la source chaude respectivement.

Calculez s_F et s_C , puis l'entropie massique créée au cours du cycle. Conclusion ?

Exercice T5.8 : Machine à vapeur [***]

Exercice pas forcément compliqué mais très long avec beaucoup de calculs numériques.

On adopte le modèle suivant pour une machine à vapeur : un système fermé constitué de 1 kg d'eau sous les phases liquide et vapeur décrit le cycle $ABCD$ tel que BC et DA sont des adiabatiques réversibles, AB et CD sont isothermes et isobares. On note x le titre massique en vapeur. Les données concernant les différents états sont :

	A	B	C	D
p en bar	20	20	1	1
T en K	485	485	373	373
x	0	1	x_C	x_D

On donne les extraits suivants des tables thermodynamiques de l'eau :

T (K)	P (bar)	Liquide saturé			Vapeur saturée		
		v_L ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	h_L ($kJ \cdot kg^{-1}$)	s_L ($kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$)	v_V ($m^3 \cdot kg^{-1}$)	h_V ($kJ \cdot kg^{-1}$)	s_V ($kJ \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$)
485	20	$1,18 \times 10^{-3}$	909	2,45	0,0998	2801	6,35
373	1	$1,04 \times 10^{-3}$	418	1,30	1,70	2676	7,36

- Dessinez l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.
- Calculez les titres en vapeur x_C et x_D , puis les volumes massiques v , les enthalpies massiques h , les énergies internes massiques u et les entropies massiques s aux points A , B , C et D .

3. Calculez les travaux et les transferts thermiques reçus par l'eau au cours de chacune des évolutions AB , BC , CD et DA , puis le travail total W . Calculez alors le rendement, et comparer au rendement idéal selon Carnot.
4. Calculez pour chaque étape ΔS , S_{ech} et S_c .

Exercice T5.9 : Relation de Clapeyron [***]

Le théorème de Carnot permet d'établir de nombreuses relations portant sur les dérivées de certaines grandeurs. On va établir ici l'évolution de P_{sat} en fonction de la température pour un corps pur.

On imagine une masse m de corps pur qui décrit le cycle suivant :

- Initialement, on a du liquide saturant à la température T ; on le chauffe très légèrement pour obtenir du liquide saturant à la température $T + dT$;
- on vaporise ce liquide de façon isobare et isotherme; on obtient de la vapeur saturante à $T + dT$;
- on refroidit alors et on obtient de la vapeur saturante à la température T ;
- on liquéfie alors cette vapeur de façon isobarde et isotherme, à la température T .

Lorsque T passe à $T + dT$, la pression de vapeur saturante augmente de dP_{sat} ; on cherche à évaluer ce dP_{sat} .

1. Dessinez le cycle dans le diagramme de Clapeyron.
2. Calculez le travail fourni par ce moteur, en évaluant l'aire du cycle en fonction de m , $v_V(T)$ (volume massique de la vapeur saturante à T), $v_L(T)$ (volume massique du liquide saturant) et dP_{sat} .
3. La variation de température entre T et $T + dT$ est tellement petite qu'on peut négliger la chaleur échangée lors des phases correspondantes. Quelle est alors la phase où de la chaleur est reçue de la source chaude ? Que vaut-elle en fonction de m et $l_V(T)$?
4. En appliquant le théorème de Carnot, montrez que $\frac{dP_{sat}}{dT} = \frac{l_V}{T(v_V - v_L)}$ (relation de Clapeyron)
5. Cette relation est vraie aussi pour l'équilibre solide/liquide. En l'appliquant à l'eau, que retrouve-t-on qu'on a vu sur le diagramme des phases (P, T) de l'eau ?

Machines thermiques

TDs numériques

réponses page 863

TD numérique : Moteur à explosion

Un moteur à explosion à 4 temps, comme déjà vu en exercice, est un moteur cyclique effectuant 1 cycle tous les 2 tours de l'arbre moteur (vilebrequin). La rotation de l'arbre moteur entraîne une oscillation du piston dans le cylindre (on n'en considère qu'un seul ici), de sorte que le volume contenu dans le cylindre oscille entre deux valeurs V_{max} (point mort bas, à partir duquel est définie la cylindrée) et V_{min} (point mort haut). Le rapport $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$ est une caractéristique essentielle du moteur, appelé taux de compression.

Les étapes de ce cycle sont (en partant du point mort haut) :

- une phase d'admission du mélange air frais + carburant
- une phase de compression au cours duquel le gaz, enfermé dans le cylindre, est comprimé de V_{max} à V_{min}
- une explosion qui a lieu juste après le passage au point mort haut, alors que le volume recommence à croître
- une détente du gaz dans le cylindre, jusqu'à V_{max}
- une phase d'échappement qui éjecte les gaz brûlés vers le pot d'échappement

Dans un premier temps, on peut n'étudier que les phases compression+explosion+détente et oublier l'admission et l'échappement, bien que ces phases jouent un rôle très important.

On va modéliser un moteur de 2cv ; on donne les caractéristiques suivantes :

- cylindrée totale : $V_t = 425 \text{ cm}^3$ répartie sur 2 cylindres
- taux de compression : $a = 7,75$
- consommation à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $4000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$: $5,5 \text{ L}/100 \text{ km}$
- pouvoir calorifique de l'essence : $35 \text{ MJ} \cdot \text{L}^{-1}$
- coefficient isentropique du mélange air-essence : $\gamma = 1,34$
- pression extérieure : $P_0 = 1 \text{ bar}$; température extérieure $T_0 = 293 \text{ K}$
- constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

1. Définissez dans un fichier Python les données du problème. Calculez le volume maximal V_{max} d'un cylindre (cylindrée divisée par le nombre de cylindres) ; déduisez-en le nombre de moles n d'air aspiré (sous les conditions P_0 et T_0) puis la capacité calorifique C_v du gaz.

2. Le piston est relié par le moteur au moyen d'un système bielle-manivelle. On admet que le volume $V(t)$ du piston soit la loi

$$V(t) = r \cdot \cos \theta + \sqrt{\ell^2 - r^2 \sin^2 \theta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ell &= \frac{a+1}{2a} V_{max} \\ r &= \frac{a-1}{2a} V_{max} \\ \theta &= \frac{2\pi}{T_{mot}} t \end{cases} \quad (\text{T5.7})$$

où T_{mot} représente la période de rotation du moteur.

Définir une fonction `t,Tmot` qui renvoie le volume, ainsi qu'une fonction `dVdt(t,Tmot)` qui renvoie la dérivée temporelle du volume.

Tracez $V(t)$ sur une période, pour un moteur tournant à $2000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

3. À partir des données de l'énoncé, calculez la quantité de chaleur Q_c fournie par l'explosion de l'essence à chaque cycle.

On va choisir une durée arbitraire $T_{expl} = 3 \text{ ms}$ pour l'explosion et on va modéliser la puissance thermique fournie par l'essence sous la forme :

$$\mathcal{P}_c(t) = \begin{cases} \frac{Q_c}{T_{expl}} \text{ si } \frac{T_{mot}}{2} \leq t \leq \frac{T_{mot}}{2} + T_{expl} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (\text{T5.8})$$

car l'explosion a lieu juste après le milieu du cycle. Implémentez une fonction `Pc(t,Tmot)` qui renvoie cette puissance.

4. La modélisation de ce système consiste à faire varier le volume $V(t)$ et à calculer pas à pas la pression $P(t)$ et la température $T(t)$; pour cela, écrire le premier principe appliqué au gaz pendant une durée dt , et relier $\frac{dT}{dt}$ à P , $\frac{dV}{dt}$ et aux autres données.

5. Le moteur tourne à $2000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Résolvez cette équation sur un tour et 10000 points avec une méthode d'Euler ^a (on prendra P_0 et T_0 comme conditions initiales ; on modélisera le gaz par un gaz parfait pour le calcul de la pression) et tracez le diagramme de Watt $P(V)$. On remarquera qu'il n'est pas fermé, car on n'a pas modélisé les phases d'échappement et d'admission.
6. Tracez sur la même figure plusieurs diagrammes correspondant à des régimes moteurs allant de $1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ à $4000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Observez l'évolution du cycle.
7. Le travail fourni sur un cycle est l'aire du cycle, qu'on peut calculer à l'aide de la fonction `scipy.integrate.trapezoid(y,x)`. En divisant ce travail par la période, on obtient la puissance du moteur. En divisant la puissance par la pulsation, on obtient le couple moteur.
Calculez, pour des régimes moteurs entre $1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ et $4000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, la puissance et le couple moteur ; tracez les courbes correspondantes.
La notice indique une puissance maxi de 13,5 chevaux vapeur à 4000 tr/min (1 cheval vapeur correspond à 736 W). Commentez.
8. Quelles sources de perte de puissance a-t-on négligées ici ?

a. `odeint` n'y arrive pas bien à cause des discontinuités de \mathcal{P}_c . Attention à ne pas utiliser `n` comme variable de boucle, c'est déjà le nombre de moles !

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(b)

Q3.(a) ET (d)

Q4.(a)

Si la machine n'est pas cyclique, alors elle peut être un moteur.

Q5.(b) ET (c) ET (d)

$r \leq 1 - \frac{300}{900} = 0,67$ est le rendement **maximal**.

Q6.(d)

Réponses au QCM : Rappels : travaux et chaleurs reçus par des gaz

Q7.(d)

$W = -P(V_f - V_i)$ avec la pression en bar et le volume en m³.

Q8.(c)

$$Q = \Delta H = nC_{pm}(T_f - T_i) = n \frac{\gamma R}{\gamma-1} \left(\frac{PV_f}{nR} - \frac{PV_i}{nR} \right).$$

Q9.(b)

$$W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Q10.(c)

$$Q = \Delta U - W = -W.$$

Q11.(d)

$$\text{Loi de Laplace : } T_f = T_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1}.$$

Q12.(a)

$$W = \Delta U - Q = \Delta U = n \frac{R}{\gamma-1} (T_f - T_i).$$

Q13.(a)

Réponses au QCM : Rendement d'une machine thermique

Q14.(c)

$$W = r.Q_c \text{ donc } \mathcal{P} = r.\mathcal{P}_c$$

Q15.(c)

$$\mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}}{r}$$

Q16.(c)

$$\mathcal{P}_f = \eta \cdot \mathcal{P}$$

Q17.(a)

$$Q_c = -W - Q_f = -W - \eta W \text{ donc } \mathcal{P}_c = -(1 + \eta)\mathcal{P}$$

Réponses au QCM : Énergies et puissances

Q18.(c)

$$3000 \text{ tr/min} = 50 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1} \text{ donc } \mathcal{P} = 1100 \times 50.$$

Q19.(b)

$$\frac{\text{chaleur}}{\text{temps}} = \frac{\text{chaleur}}{\text{masse}} \times \frac{\text{masse}}{\text{temps}} = \frac{30\,000 \text{ J}}{1 \text{ kg}} \times \frac{180 \text{ kg}}{3600 \text{ s}}$$

Q20.(a)

$$1600 \text{ W} = \frac{1600 \text{ J}}{1 \text{ s}} = \frac{31\,000 \text{ J}}{1 \text{ kg}} \times \frac{\text{masse}}{\text{temps}}$$

Q21.(d)

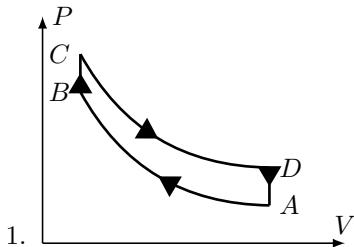
$$\mathcal{P}_c = \frac{\mathcal{P}}{r} = 42,9 \text{ kW} = \frac{30 \times 10^9 \text{ J}}{1 \text{ L}} \times \frac{\text{volume}}{\text{temps}} \text{ d'où une consommation de } 1,43 \text{ mL} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q22.(c)

$$\frac{5600 \text{ J}}{1 \text{ s}} = \frac{\text{énergie}}{1 \text{ kg}} \times \frac{0,7 \text{ kg}}{1 \text{ L}} \times \frac{1,9 \text{ L}}{1 \text{ s}}$$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T5.1 : Moteur de Stirling [**]



2. A partir de l'état A, on trouve facilement que $n = \frac{P_A V_A}{RT_A} = 0,10 \text{ mol}$ (attention aux unités).

État	A	B	C	D
Volume (L)	2,50	0,50	0,50	2,50
Température (K)	301	301	903	903
Pression (bar)	1	5	15	3

3. On trouve $W = -806 \text{ J} < 0$, $Q_{BC} + Q_{DA} = 0$, $Q_{AB} = -403 \text{ J}$ et $Q_{CD} = 1209 \text{ J}$.

4. $r = \frac{-W}{Q_{CD}} = 67\%$. C'est égal au rendement idéal de Carnot : $\frac{903-301}{903} = 67\%$.

Réponses de l'exercice T5.2 : Cycle de Lenoir [**]

État	P	V	T
1	P_1	$V_3 \alpha^{-1/\gamma}$	T_1
2	P_2	$V_3 \alpha^{-1/\gamma}$	$T_1 \alpha$
3	P_1	V_3	$T_1 \alpha^{1/\gamma}$

Étape	W	Q	ΔU
1 → 2	0	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (\alpha - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (\alpha - 1)$
2 → 3	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (\alpha^{1/\gamma} - \alpha)$	0	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (\alpha^{1/\gamma} - \alpha)$
3 → 1	$-P_1 V_3 (\alpha^{-1/\gamma} - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (1 - \alpha^{1/\gamma}) + P_1 V_3 (\alpha^{-1/\gamma} - 1)$	$\frac{nR}{\gamma-1} T_1 (1 - \alpha^{1/\gamma})$

$$3. r = 1 - \gamma \frac{\alpha^{1/\gamma} - 1}{\alpha - 1} = 24\%$$

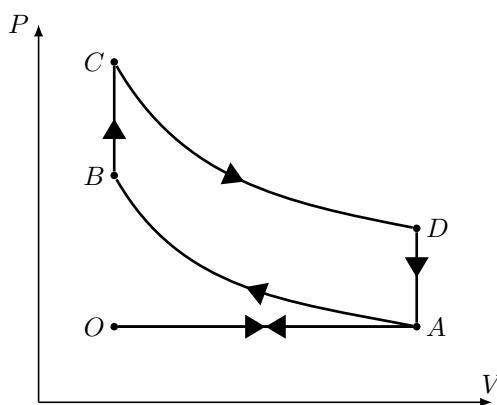
Réponses de l'exercice T5.3 : Chauffage d'une pièce par une pompe à chaleur [**]

- $\mathcal{P}_c = 1,08 \text{ kW}$, donc $\mathcal{P}_{elec} = 600 \text{ W}$.
- Le pompe doit donc fonctionner 60 % du temps.
- $\frac{1}{a} \frac{dT}{dt} + T = T_e + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a \cdot C_p}$.
- $T(t) = T_e + \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a \cdot C_p} + \left(T_i - T_e - \frac{1,8\mathcal{P}_n}{a \cdot C_p} \right) e^{-aT} = 35 - 25e^{-9 \times 10^{-5}t}$ (en °C et en s).
- $t = 50\,000 \text{ s} = 13 \text{ h} 45 \text{ min}$ environ.

Réponses de l'exercice T5.4 : Étude d'un moteur à explosion (Petites Mines) [***]

1. Fonctionnement général

- (a) Le cycle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, donc c'est bien un moteur.



- (b) On parle de moteur à combustion interne parce que la source de chaleur se trouve à l'intérieur du cylindre.
 (c) $n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 20,5 \times 10^{-3}$ mol
 (d) À cause de l'essence (molécules avec beaucoup d'atomes).

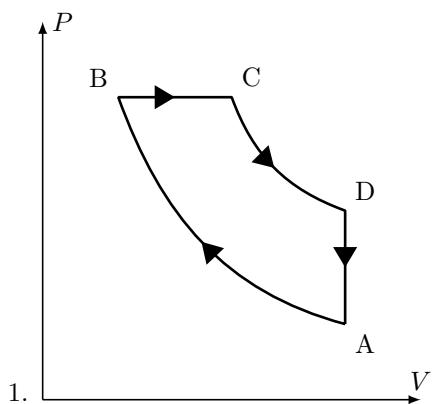
2. Bilan énergétique

- (a) $P_B = a^\gamma P_A = 16,2$ bar
 (b) $T_B = a^{\gamma-1} T_A = 594$ K
 (c) $a < \left(\frac{T_e}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 8,35$
 (d) $P_C = P_B \frac{T_C}{T_B} = 57,3$ bar
 (e) $T_D = a^{1-\gamma} T_C = 1036$ K
 (f) $W = -Q_{BC} - Q_{DA} = -nC_{vm}(T_C - T_B)(1 - a^{1-\gamma})$
 (g) $r = 1 - a^{1-\gamma} = 51\%$: le rendement s'approche de 1 quand le taux de compression a augmente.
 (h) 15,9 kW.

3. Bilan entropique

- (a) $\Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_A}{T_D} = -0,63 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $S_e = \frac{nC_{vm}(T_A - T_D)}{T_A} = -1,27 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ donc $S_c = \Delta S - S_e = 0,64 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
 (b) BC a toutes les chances d'être irréversible, car il y a une réaction chimique.

Réponses de l'exercice T5.5 : Étude d'un moteur Diesel [***]



2. $n = 0,0894$ mol

	A	B	C	D
p en bar	1,00	44,3	44,3	1,76
T en K	323	954	1432	569
V en L	2,40	0,16	0,24	2,40

3. $C_v = 1,86 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

- $Q_{A \rightarrow B} = 0 \text{ J}$; $W_{A \rightarrow B} = C_v(T_B - T_A) = 1,17 \text{ kJ}$
- $W_{B \rightarrow C} - P(V_C - V_B) = -0,35 \text{ kJ}$; $Q_{B \rightarrow C} = C_v(T_C - T_B) - W_{B \rightarrow C} = 1,24 \text{ kJ}$
- $Q_{C \rightarrow D} = 0 \text{ J}$; $W_{C \rightarrow D} = C_v(T_D - T_C) = -1,60 \text{ kJ}$
- $Q_{D \rightarrow A} = C_v(T_A - T_D) = -0,46 \text{ kJ}$; $W_{D \rightarrow A} = 0 \text{ J}$

4. $W = -0,78 \text{ kJ}$ donc $\eta = 63\%$.

Réponses de l'exercice T5.7 : Étude d'un réfrigérateur (CCINP) [**]

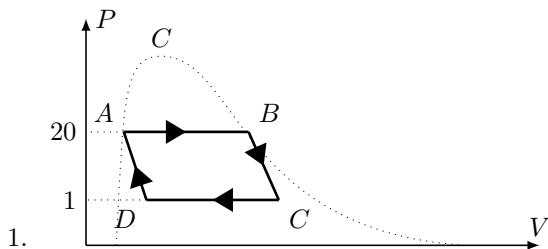
1. Performances de l'installation

- $\Delta H = Q$ donc en divisant par la masse : $\Delta h = q$
- $T_E = T_A$ donc $H_E = m_V h_{VS}(T_A) + m_L h_{LS}(T_A)$ d'où on tire $h_E = w_V h_{VS}(T_A) + (1 - w_V) h_{LS}(T_A)$. Or DE est isenthalpique donc $w_V = \frac{h_D - h_{LS}(T_A)}{h_{VS}(T_A) - h_{LS}(T_A)} = 4,7\%$
- Le réfrigérateur prend de la chaleur à la source froide et en donne à la source chaude. Donc $q_F = h_A - h_D = 103,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $q_C = h_D - h_B = -162,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $w = -(q_C + q_F) = 58,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ par le premier principe sur un cycle.
- $\mu = \frac{q_f}{w} = 1,78 < \frac{T_f}{T_c - T_f} = 18,5$
- $D_m = 4,81 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1} = 17,3 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$

2. Étude entropique

$s_F = \frac{q_F}{T_F} = 373 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $s_C = \frac{q_C}{T_C} = -554 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ or $\Delta s = 0$ sur un cycle donc $s_{cr} = 181 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

Réponses de l'exercice T5.8 : Machine à vapeur [***]



2.

État	x	$v(\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$	$h(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	$u(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$	$s(\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$
A	0	$1,18 \times 10^{-3}$	909	907	2,45
B	1	0,0998	2801	2601	6,35
C	0,83	1,42	2300	2157	6,35
D	0,19	0,32	846	815	2,45

3. Pour $m = 1 \text{ kg}$:

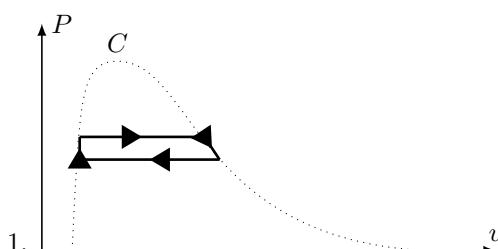
- $W_{AB} = -P_A \cdot m(v_B - v_A) = -198 \text{ kJ}; Q_{AB} = m(u_B - u_A) - W_{AB} = 1892 \text{ kJ}$
- $W_{BC} = -444 \text{ kJ}; Q_{BC} = 0 \text{ J}$
- $W_{CD} = 112 \text{ kJ}; Q_{CD} = -1454 \text{ kJ}$
- $W_{DA} = 92 \text{ kJ}; Q_{DA} = 0 \text{ J}$

Le rendement vaut alors $r = -\frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}}{Q_{AB}} = 23\%$: c'est égal au rendement idéal de Carnot entre 485 K et 373 K.

4. $\Delta S_{AB} = 3,90 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$; $S_{ech,AB} = \frac{1892}{485} = 3,90 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$; $S_{c,AB} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On trouve de même $\Delta S_{BC} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $\Delta S_{CD} = -3,90 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\Delta S_{DA} = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. À chaque étape, l'entropie créée est nulle, d'où le rendement idéal.

Réponses de l'exercice T5.9 : Relation de Clapeyron [***]



2. Le cycle peut être approché par un rectangle : $W = -\text{largeur} \times \text{hauteur} = -m(v_V - v_L)dP_{sat}$

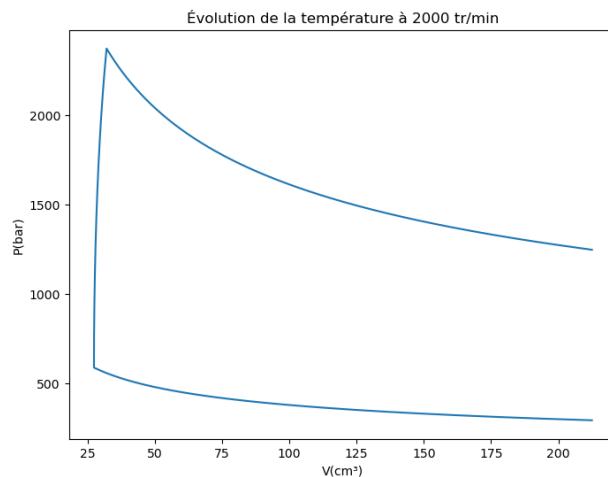
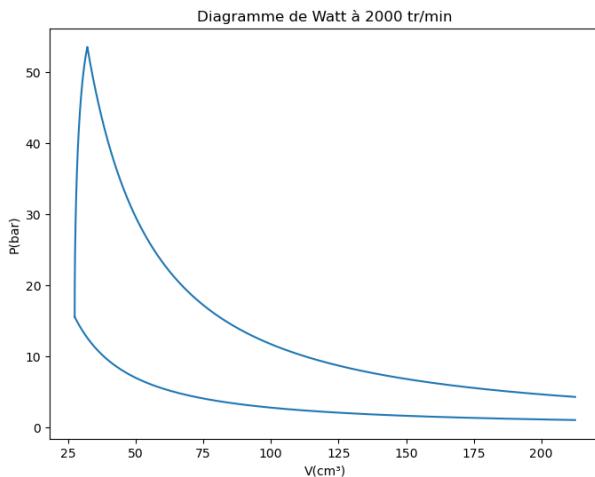
3. La chaleur est reçue principalement lors de la vaporisation. Celle-ci est isobare, donc $Q_c = ml_V$.
4. $\frac{-W}{Q_c} = \frac{T+dT-T}{T+dT} \approx \frac{dT}{T}$ donc $\frac{m(v_V-v_L)dP_{sat}}{ml_V} = \frac{dT}{T}$, d'où on tire $\frac{dP_{sat}}{dT} = \frac{l_V}{T(v_V-v_L)}$
5. Pour l'eau, $v_L < v_S$ donc $\frac{l_F}{T(v_L-v_S)} < 0$, ce qui explique pourquoi la pente de la frontière solide/liquide dans le diagramme (P,T) est négative pour l'eau.

Réponses aux TDs numériques

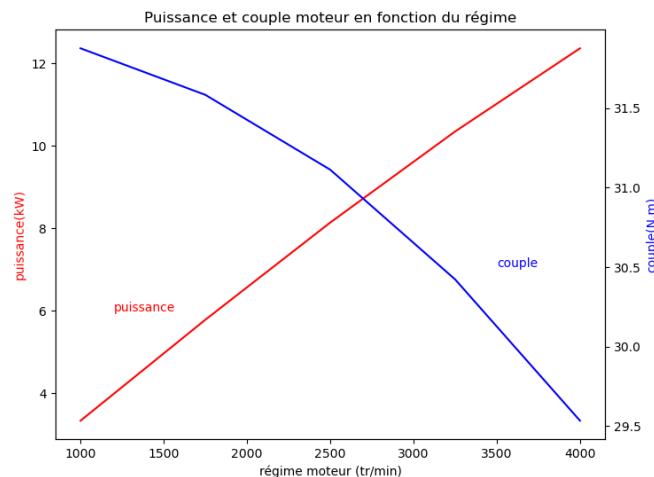
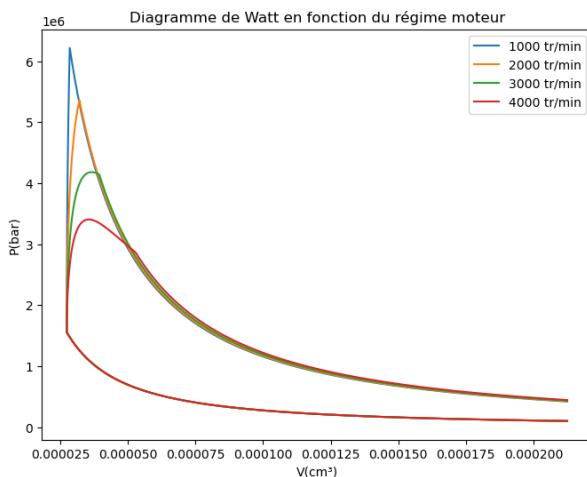
Réponses au TD d'info : Moteur à explosion

Le début demande plusieurs relations numériques, en particulier $V_{max} = \frac{V_t}{2}$ puis $n = \frac{P_0 V_{max}}{R T_0}$ et $C_v = \frac{R}{\gamma - 1} n$. On trouve aussi que la consommation vaut $5,5 \text{ L}/100 \text{ km} = 45,8 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ soit $11,46 \mu\text{L}$ par cycle, d'où $Q_c = 401 \text{ J}$ à chaque cycle.

L'équation à résoudre est alors $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C_v} (\mathcal{P}_c - P \frac{dV}{dt})$:



Quand le régime est plus rapide, l'explosion prend une part plus grande de la détente et le travail diminue :



En réalité, les pertes thermiques doivent être prises en compte et, à bas régime, elles diminuent le travail. Il y a aussi les frottements qui diminuent le travail à haut régime. Au final, la courbe réelle du couple moteur présente un maximum aux régimes moyens.

Bilans d'entropie

Cours

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, si on veut obtenir une machine thermique avec un bon rendement, il faut :

- partir de la plus grande différence de température possible entre la source chaude et la source froide
- limiter au maximum les sources d'irréversibilité, c'est-à-dire de création d'entropie

Dans ce chapitre, nous allons donc faire des bilans d'entropie sur des transformations, c'est-à-dire calculer l'entropie créée lors d'une transformation. La valeur trouvée n'aura pas un intérêt en elle-même, mais la comparaison des entropies créées par deux transformations différentes allant du même état initial au même état final nous permettra de choisir la transformation la moins irréversible.

T6.A. Le second principe de la thermodynamique (rappel)

Propriété : Second principe de la thermodynamique

Pour tout système thermodynamique à l'équilibre, on peut définir une **fonction d'état extensive** S appelée **entropie**, en J/K . Lorsqu'un système fermé évolue entre deux états d'équilibre en recevant des quantités de chaleur Q_i de la part de thermostats à la température T_i , sa variation d'entropie vaut

$$\Delta S = S_{ech} + S_{cr} \text{ avec } S_{ech} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \text{ (entropie échangée) et } S_{cr} \geq 0 \text{ (entropie créée)} \quad (\text{T6.1})$$

L'entropie créée est nulle si et seulement si la transformation est réversible.

On retient donc que l'entropie échangée se calcule une fois Q connu ; par contre l'entropie créée ne se calcule qu'à l'aide du second principe : $S_{cr} = \Delta S - S_{ech}$. Pour calculer l'entropie créée lors d'une transformation, il faut donc savoir calculer la variation d'entropie du système entre deux instants. Il existe des formules pour cela.

T6.B. Bilans d'entropie sans changement d'état

Les calculs de variations d'entropie utilisent les identités thermodynamiques qui ne sont plus au programme. On va donner ci-dessous deux cas particuliers qui ne sont pas au programme, mais il est bon de retenir le premier.

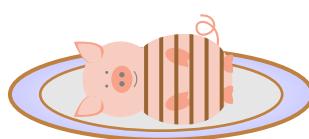
Variation d'entropie d'un solide ou liquide

Lorsqu'un solide ou un liquide incompressible et indilatable de capacité thermique C passe d'un état (T_i, P_i, V_i) à un état (T_f, P_f, V_f) , son entropie varie de

$$\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i} \quad (\text{T6.2})$$

Exemple : Cuisson au four

1. On prend un rôti de porc de capacité calorifique $C = 3200 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, à 20°C , et on le place dans un four à 200°C sous 1 bar ; il se réchauffe jusqu'à atteindre 90°C . Calculez l'entropie créée, sachant que la variation d'entropie du rôti s'écrit $\Delta S = C \ln \frac{T_{final}}{T_{initial}}$.



2. On chauffe maintenant en deux étapes :
 - dans un four à 100°C , le rôti se réchauffe jusqu'à 50°C ;
 - puis dans un four à 200°C , il se réchauffe jusqu'à 90°C .

Calculez de nouveau l'entropie créée.

1. $\Delta S = C \ln \frac{363}{293} = 685,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Pour avoir l'entropie échangée, il faut Q qu'on trouve par le premier principe isobare : $Q = \Delta H = C.(90 - 20) = Q = 3200 \times 70 = 224\,000 \text{ J}$ soit $S_{ech} = \frac{224\,000}{473} = 473,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ (dans l'entropie échangée, c'est la température du **thermostat** qui compte).

Alors par le second principe : $S_{cr} = \Delta S - S_{ech} = 212 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: la transformation est irréversible.

2. On a toujours $\Delta S = 685,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. Mais pour calculer S_{ech} il faut calculer les quantités de chaleur échangées à chaque étape. On trouve $Q_1 = 96\,000 \text{ J}$ et $Q_2 = 128\,000 \text{ J}$ donc $S_{ech} = \frac{96\,000}{373} + \frac{128\,000}{473} = 528 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On en déduit que $S_{cr} = 157,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: l'entropie créée est moindre, donc la transformation est moins irréversible.

Remarque : Dans cet exemple, la transformation réversible correspond à la limite où on monte très graduellement la température du thermostat, de manière à ce que le rôti chauffe quasiment en même temps.

Variation d'entropie d'un GP(Hors programme)

Lorsqu'un GP (n moles) passe d'un état (T_i, P_i, V_i) à un état (T_f, P_f, V_f) , son entropie varie de

$$\Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nC_{pm} \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i} \quad (\text{T6.3})$$

À partir de cette formule, on peut redémontrer les lois de Laplace ; cette démonstration, ainsi que la formule précédente, sont hors programme.

Calcul : Lois de Laplace

Si un gaz parfait subit une transformation adiabatique et réversible, alors $S_{ech} = 0$ (adiabatique) et $S_{cr} = 0$ (réversible) donc $\Delta S = 0$.

D'après la formule de variation d'entropie d'un gaz parfait, $nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 0$; or $C_{vm} = \frac{R}{\gamma-1}$ d'où on tire $\frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 0$ soit $\ln \frac{T_f}{T_i} + (\gamma-1) \ln \frac{V_f}{V_i} = 0$ ou encore $\ln \frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}} = 0$ ce qui montre que

$$T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

On redémontre ensuite les deux autres lois : $P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma$ et $P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma = P_i^{1-\gamma} T_i^\gamma$.

Remarque : Une transformation adiabatique et réversible est aussi appelée *transformation isentropique* (= à entropie constante).

T6.C. Bilans d'entropie avec changement d'état

Variation d'entropie associée à un changement d'état

Lorsqu'une masse m de corps pur passe de l'état liquide à la pression P et à la température $T_v(P)$, à l'état vapeur à la même température et à la même pression, alors son entropie varie de

$$\Delta S = m \frac{l_v}{T_v} \quad (\text{T6.4})$$

Démonstration

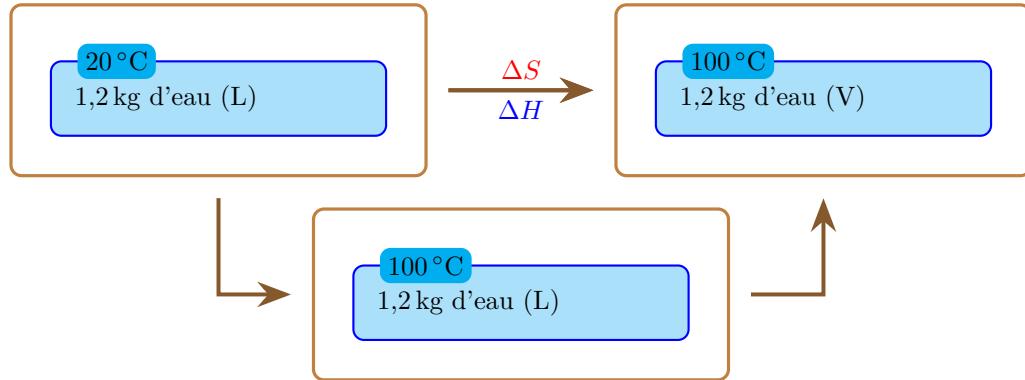
Une telle transformation peut se faire de diverses manières ; la plus simple est de la faire de façon isobare et isotherme. Dans ce cas, elle est réversible donc $S_{cr} = 0$, et $\Delta S = S_{ech} = \frac{Q}{T_v}$ puisque, pour qu'elle soit réversible, il faut que la température du thermostat soit très proche de la température du système. Or, d'après le premier principe isobare, $Q = \Delta H = m.l_v$. On a donc bien $\Delta S = \frac{m.l_v}{T_v}$.

Exemple : Vaporisation d'une casserole d'eau

On place une casserole contenant 1,2 L d'eau à 20 °C sur une plaque chauffante à 140 °C, le tout à pression constante sous 1 bar. L'eau s'évapore, et on obtient de la vapeur d'eau à 100 °C.

Calculez l'entropie créée lors de cette transformation.

Données : capacité thermique massique de l'eau : $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; chaleur latente de vaporisation de l'eau : $l_v(100^\circ\text{C}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.



On commence par calculer $\Delta S = m.c \ln \frac{373}{293} + m \frac{l_v}{373} = 8,487 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$: attention, dans le calcul de variation d'entropie avec changement d'état, c'est la température de changement d'état qui compte, et non la température du thermostat, qui comptera par contre pour l'entropie échangée.

Pour calculer S_{ech} avec le thermostat à la température 413 K, il faut connaître Q . Par le premier principe isobare : $Q = \Delta H = m.c.(100 - 20) + m.l_v = 3115 \text{ kJ}$. Donc $S_{ech} = \frac{Q}{T_{therm}} = \frac{3115}{413} = 7,543 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.

Alors $S_{cr} = \Delta S - S_{ech} = 945 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Remarque : Comme on trace l'évolution d'un système dans le diagramme de Watt (P, V), on peut aussi la tracer dans le **diagramme entropique** (T, S). La figure T6.1 montre par exemple le cycle d'Otto-Beau de Rochas dans le diagramme de Watt et dans le diagramme entropique ; dans ce dernier, les adiabatiques réversibles (isentropiques) sont des segments verticaux, tandis que les isochores sont des exponentielles.

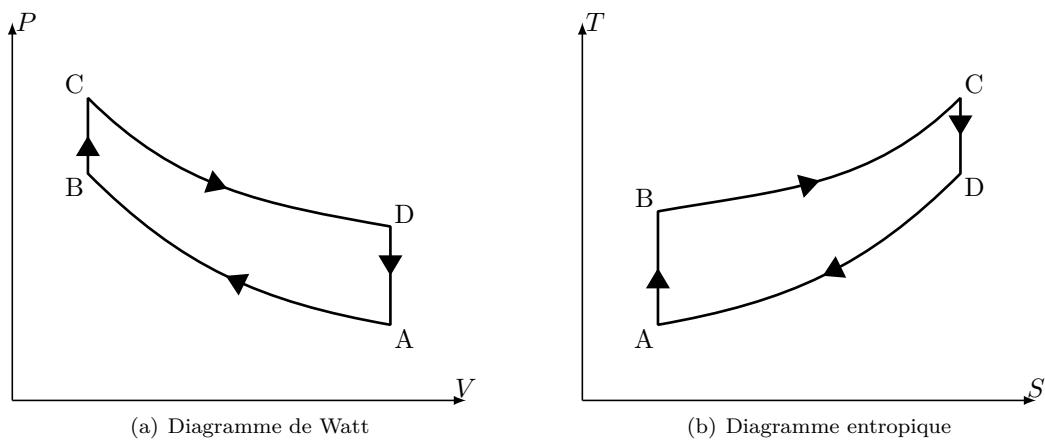


FIGURE T6.1 – Cycle idéal d'Otto-Beau de Rochas.


 Bilans d'entropie

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Deuxième principe, bilans d'entropie	
Deuxième principe de la thermodynamique : entropie, entropie créée, entropie échangée. $\Delta S = S_{ech} + S_{créée}$ avec $S_{ech} = \sum \frac{Q_i}{T_i}$.	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan entropique. Relier la création d'entropie à une ou plusieurs causes physiques de l'irréversibilité. Analyser le cas particulier d'un système en évolution adiabatique.
Variation d'entropie d'un système.	Utiliser l'expression fournie de la fonction d'état entropie. Exploiter l'extensivité de l'entropie.
Lois de Laplace.	Citer et utiliser la loi de Laplace et ses conditions d'application.
Variation d'entropie associée à une transition de phase.	Exploiter la relation entre les variations d'entropie et d'enthalpie associées à une transition de phase.

Bilans d'entropie

QCMs

réponses page 876

 QCM : Compréhension du cours

Q1.

L'entropie a pour unité :

Q2.

L'entropie créée est toujours positive :

Q3.

Lors d'une vaporisation, l'entropie d'un corps pur varie de :

- (a). 0
 (b). $m \ln \frac{T_f}{T_i}$
 (c). $m \frac{l_v}{T_{vap}}$

Q4.

L'entropie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température :

 QCM : Variations d'entropie avec changements d'état 

Données concernant le mercure sous 1 bar :

masse molaire	$201 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
T_{fus}	-38,029 °C
L_{fm}	2,295 kJ · mol ⁻¹
T_{vap}	356,73 °C
L_{vm}	56,11 kJ · mol ⁻¹
$C_{pm}(liq)$	27,1 J · K ⁻¹ · mol ⁻¹

Q5.

1 kg de mercure liquide à 356,7 °C s'évapore entièrement sous 1 bar pour donner de la vapeur de mercure à la même température. La variation d'entropie de ce système vaut :

- (a). 0,78 J · K⁻¹
 (b). 0,44 J · K⁻¹
 (c). 443 J · K⁻¹
 (d). 783 J · K⁻¹

Q6.

3 mol de vapeur de mercure à 356,7°C se liquéfient entièrement sous 1 bar pour donner du mercure liquide à la même température. La variation d'entropie de ce système vaut :

- (a). $472 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
 (c). $-472 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Q7.

On place 50 g de mercure liquide à 356,7 °C dans une enceinte sous 1 bar ; 23 g de mercure s'évaporent, le reste demeure liquide, sous 1 bar. La variation d'entropie de ce système (mercure total) vaut :

- (a). $21,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ (b). $1,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
(c). $11,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ (d). $10,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Q8.

On met dans une enceinte à $356,7^{\circ}\text{C}$, sous 1 bar : 45 g de mercure liquide et 65 g de vapeur de mercure. Après transformation, il reste 70 g de liquide et 40 g de vapeur, sous 1 bar. La variation d'entropie de ce système (mercure total) vaut :

(a). $-30,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
(c). $47,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

(b). $28,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
(d). $-11,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Bilans d'entropie

Exercices

réponses page 877

Exercice T6.1 : Changements d'état de l'eau [*]

Cet exercice fait simplement travailler les calculs d'entropie utilisant le fait que l'entropie est une fonction d'état, donc on peut créer un chemin au choix pour aller de l'état initial à l'état final.

Calculez la variation d'entropie d'1 kg d'eau initialement liquide à 25 °C, lorsqu'on l'amène à l'état suivant (la pression vaut toujours 1 bar ; on considère que l'énergie de la vapeur ne dépend que de la température) :

1. 1 kg d'eau liquide à 5 °C
2. 300 g d'eau liquide et 700 g de glace, en équilibre
3. 1 kg de glace à -10 °C
4. 1 kg de vapeur d'eau à 150 °C

Données :

- Température de fusion de l'eau sous 1 bar : à connaître
- Température d'ébullition de l'eau sous 1 bar : à connaître
- Capacité calorifique massique de la glace : $c^s = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; de l'eau liquide : $c^l = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; de l'eau vapeur : $c_p^v = 2,1 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Enthalpie de fusion de l'eau sous 1 bar : $l_f = 333 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Enthalpie de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $l_v = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Pour l'eau solide ou liquide : $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$; pour l'eau vapeur : $\Delta S = C_P \ln \frac{T_f}{T_i} - nR \ln \frac{P_f}{P_i}$

Exercice T6.2 : Refroidissement du zinc dans de l'eau [*]

On plonge un morceau de 100 g de zinc à 80 °C dans 300 g d'eau liquide à 15 °C; l'ensemble est isolé thermiquement, sous pression constante.

Données :

- $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$; $c_{\text{Zn}} = 0,38 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$
- pour un solide ou un liquide de capacité thermique C , on a approximativement $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$
- 1. Par un bilan d'enthalpie, calculez la température à l'équilibre.
- 2. Calculez la variation d'entropie du zinc et de l'eau, puis l'entropie créée.

Exercice T6.3 : Refroidissement d'une brame d'acier [**]

Dans une aciéries, une brame d'acier solide de 30 t sort à 800 °C d'une coulée continue. Pour la refroidir, on la met en contact avec de l'eau liquide à 15 °C. Toutes les transformations se passent sous 1 bar. On suppose que les échanges entre l'eau et l'acier sont suffisamment rapides pour qu'on puisse considérer le système comme isolé thermiquement.

Données :

- température de vaporisation de l'eau sous 1 bar : $T_v = 100 \text{ }^\circ\text{C}$
- chaleur latente de vaporisation de l'eau : $l_v(100 \text{ }^\circ\text{C}) = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- capacités thermiques : $c(\text{eau}, L) = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $c(\text{acier}) = 460 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- variation d'entropie d'un liquide ou d'un solide de capacité thermique C et dont la température passe de T_i à T_f : $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$
- 1. Tant que la température de la brame reste supérieure à 100 °C, l'eau s'évapore à son contact et on obtient de l'eau gazeuse à 100 °C.
En appliquant le premier principe, déterminer la masse m_1 d'eau nécessaire pour amener la brame à 100 °C.
En appliquant le second principe, calculez l'entropie créée lors de cette première étape.

2. On continue de verser de l'eau, jusqu'à obtenir une température d'équilibre acier/eau à 60 °C.
Calculer la masse m_2 d'eau utilisée lors de cette seconde étape, et l'entropie créée.

Exercice T6.4 : Chauffage de l'air ; utilisation de tables thermodynamiques [***]

On prend 1 kg d'air sous 2 bar et 300 K dans une chaudière. On chauffe cet air jusqu'à l'état $P = 10$ bar et $T = 600$ K en le mettant en contact avec un thermostat à 900 K ; au cours de cette transformation, il reçoit un travail $W = 190$ kJ. Calculez l'entropie créée.

		T	200 K	300 K	500 K	1000 K
		P				
Énergies en $\text{J} \cdot \text{g}^{-1}$:		1 bar	142,4	214,2	359,7	759,2
		10 bar	139,1	212,4	358,9	759,1
		100 bar	102,1	194,4	349,6	754,9

		T	200 K	300 K	500 K	1000 K
		P				
Entropies en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$:		1 bar	6,463	6,871	7,389	8,138
		10 bar	5,766	6,204	6,727	7,477
		100 bar	4,949	5,486	6,048	6,812

Exercice T6.5 : Taux de création d'entropie [**]

On considère deux solides de capacités thermiques C_1 et C_2 , de températures T_1 et T_2 , mis en contact ; on note R_{th} la résistance thermique entre ces deux solides. Les transformations sont isobares, l'ensemble est calorifugé.

- Exprimez les variations dT_1 et dT_2 des températures des deux solides en un temps dt .
- On rappelle que la variation d'entropie d'un solide entre deux températures T_i et T_f s'écrit $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$. En utilisant ces expressions et en faisant un DL à l'ordre 1 du logarithme, montrez que le taux de création d'entropie $\frac{\delta S_{cr}}{dt}$ vaut $\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2 R_{th}}$. Commentez le résultat obtenu.

Exercice T6.6 : Compression ou détente isotherme [***]

Une détente isotherme est une détente tellement lente que le gaz a à chaque instant le temps de quasiment équilibrer sa température avec le thermostat extérieur. Cette détente est infiniment lente et idéalisée ; on peut essayer de la modéliser par une détente en N étapes. On propose le modèle suivant :

- on travaille sur un gaz parfait de n moles, de coefficient isentropique γ ; on rappelle que, lorsqu'il passe d'un état i à un état f , son entropie varie de $\Delta S = nC_{vm} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}$
- la détente se fait de l'état (V_A, T_0) à l'état (V_B, T_0) où T_0 est la température du thermostat extérieur et $V_B > V_A$
- le détente se fait en N étapes de variation de volume $dV = \frac{V_B - V_A}{N}$. Lors de l'étape k , le gaz est initialement à $(V_{k-1} = V_A + (k-1).dV, T_0)$; il subit d'abord une détente adiabatique et réversible (rapide) jusqu'à l'état $(V_k = V_A + k.dV, T_k)$, puis un refroidissement isochore jusqu'à (V_k, T_0) .

Dans la suite, on supposera que $N \gg 1$ donc on fera des développements limités à l'ordre 2 par rapport à $\frac{dV}{V_k} \ll 1$.

- Exprimez la température T_k en fonction de T_0 , V_A , dV et k .
- On va d'abord exprimer le travail reçu par le gaz lors de cette transformation. Exprimez le travail δW_k lors de la k -ième étape. Par sommation, montrez que le travail total tend, lorsque $N \rightarrow \infty$, vers celui d'une isotherme.
- On s'intéresse maintenant à l'entropie créée. Exprimez, en effectuant à chaque fois un DL à l'ordre 2, l'entropie créée lors de l'étape k

Montrer alors que l'entropie totale créée lors de la transformation tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Exercice T6.7 : Création d'entropie par des frottements solides [*]**

On considère un gaz parfait enfermé dans un cylindre de section S fermé par un piston, le tout étant calorifugé ; au départ, tout est à la température T_i . Quand le piston bouge, des frottements solides appliquent sur lui une force constante F opposée à son mouvement.

1. Soit P la pression du gaz. Que doit valoir au moins la pression extérieure P_{ext} pour que le piston se mette en mouvement et comprime le gaz ?
2. On suppose que P_{ext} vaut cette valeur, et on l'augmente de dP_{ext} . On suppose que la puissance dissipée par les frottements est transmise au piston de capacité thermique C sous forme de chaleur, et que le gaz subit une transformation adiabatique réversible. En notant T_p la température du piston, exprimez la variation dT_p en fonction de dP_{ext} .
3. Exprimez alors l'entropie créée pour comprimer le gaz petit à petit de la pression P_i à la pression P_f (l'expression de la variation d'entropie d'un solide n'est pas rappelée ici). Commentez.

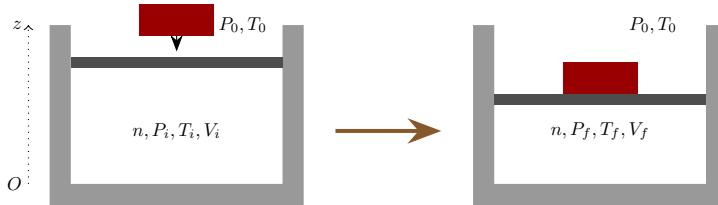
Bilans d'entropie

TDs numériques

réponses page 879

TD numérique : Irréversibilité liée aux frottements

Dans un cylindre vertical de section $S = 30 \text{ cm}^2$, on enferme $n = 1 \times 10^{-2} \text{ mol}$ moles d'air (considéré comme un gaz parfait diatomique) à l'aide d'un piston de masse $m = 400 \text{ g}$. Il y a équilibre mécanique avec l'extérieur (pression $P_0 = 1 \text{ bar}$, température $T_0 = 293 \text{ K}$) et la température initiale de tout vaut T_0 . L'extérieur du cylindre et du piston sont calorifugés.



À l'instant $t = 0$ on pose une masse $m' = 2 \text{ kg}$ sur le piston. Le piston oscille puis se stabilise sous l'effet de forces de frottements de la forme $-\lambda \vec{v}$ avec $\lambda = 40 \text{ USI}$.

Données :

- constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- le piston et le cylindre sont en acier de capacité calorifique massique $c_a = 502 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1. Calculez numériquement les variables initiales : P_i , T_i et V_i ainsi que l'altitude z_i du bas du piston.
2. On note $P(t)$, $T(t)$, $V(t)$ et $z(t)$ les grandeurs du gaz au cours du temps. On admet que la pression extérieure P_0 et la température extérieure T_0 ne varient pas.

En appliquant le PFD au piston de masse totale $m + m'$, déterminez l'équation différentielle reliant z à P et aux autres grandeurs.

3. On suppose dans un premier temps un modèle simpliste : toute l'énergie dissipée par les frottements est transmise sous forme de chaleur au gaz, et il n'y a pas d'échanges de chaleur entre le gaz et le piston ou le cylindre.

En appliquant le premier principe au gaz sur une durée dt , exprimez \dot{T} en fonction de \dot{z}

4. Résolvez alors à l'aide d'un schéma d'Euler ou de `odeint` ce système d'équations sur une durée de 2 s. Tracez $z(t)$ et $T(t)$ et observez qu'ils se stabilisent après des oscillations.

5. La variation d'entropie d'un GP entre deux états s'écrit $\Delta S^{1 \rightarrow 2} = nC_{vm} \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$. Calculez le tableau donnant à chaque instant l'entropie créée entre l'état initial et l'instant t , et tracez-le. Commentez le résultat obtenu.

6. Changez légèrement la valeur de λ ; qu'est ce qui change ? qu'est-ce qui ne change pas ?

7. En fait les frottements ont plutôt lieu entre les solides, donc c'est plutôt le piston et le cylindre qui chauffent. Dans un second modèle, on considère que toute la puissance dissipée par les frottements est transmise sous forme de chaleur au piston (on pourrait aussi tenir compte du cylindre, ça changerait juste une capacité thermique mais pas grand chose d'autre). On notera dans la suite $T_a(t)$ la température de l'acier qui compose le piston.

Établir les 3 équations différentielles vérifiées par z , T et T_a . Résolvez-les sur 10 s, tracez $z(t)$, $T(t)$, $T_a(t)$ puis $S_{cr}(t)$ sachant que la variation d'entropie d'un solide s'écrit $\Delta S^{1 \rightarrow 2} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$. Commentez.

8. Dans un troisième modèle on ajoute les transferts thermiques entre le gaz et le piston, via une résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{hS}$ avec $h = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Reprenez la même étude.

Pour aller plus loin, il faudrait tenir compte du fait que la température des solides n'est pas homogènes, et découpant les solides en cubes de petite taille ayant chacun sa propre température : c'est la méthode des éléments finis, que vous verrez un peu l'année prochaine.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b)

Q2.(a)

Q3.(c)

Q4.(b)

Elle dépend aussi du volume et/ou de la pression ; pensez par exemple à la détente de Joule-Gay Lussac, à température constante, qui crée de l'entropie.

Réponses au QCM : Variations d'entropie avec changements d'état

Q5.(c)

$\Delta S = \frac{m}{M} \frac{L_{vm}}{T_{vap}}$; mettez bien la température en Kelvins !

Q6.(b)

$\Delta S = -3 \cdot \frac{L_{vm}}{T_{vap}}$

Q7.(d)

Il n'y a que les $\frac{23}{201} = 0,114$ mol de mercure qui s'évaporent qui comptent dans le calcul.

Q8.(d)

Le bilan net est le suivant : 25 g de mercure se sont liquéfiés (soit 0,124 mol).

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T6.1 : Changements d'état de l'eau [*]

1. $\Delta S = -292 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
2. $\Delta S = -1222 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
3. $\Delta S = -1666 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
4. $\Delta S = +7266 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Réponses de l'exercice T6.2 : Refroidissement du zinc dans de l'eau [*]

1. $\Delta H = 0$ donc $T_f = 16,9^\circ\text{C}$
2. $S_c = \Delta S = +0,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses de l'exercice T6.3 : Refroidissement d'une brame d'acier [**]

1. $m_1 = 3700 \text{ kg}$ et $S_{cr1} = 113,3 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$
2. $m_2 = 2920 \text{ kg}$ et $S_{cr2} = 215 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: c'est beaucoup plus faible. La première transformation est beaucoup plus irréversible, car elle faisait intervenir des écarts de température très grands.

Réponses de l'exercice T6.4 : Chauffage de l'air ; utilisation de tables thermodynamiques [***]

Par interpolation, on trouve : au départ, $U(2 \text{ bar}, 300 \text{ K}) = 214,0 \text{ kJ}$ et $S(2 \text{ bar}, 300 \text{ K}) = 6797 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$; à la fin, $U(10 \text{ bar}, 600 \text{ K}) = 438,9 \text{ kJ}$ et $S(10 \text{ bar}, 600 \text{ K}) = 6877 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

On trouve donc $\Delta S = 6877 - 6797 = 80 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et $Q = \Delta U - W = 34,9 \text{ kJ}$ d'après le premier principe, donc d'après le second principe : $S_c = 41 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Réponses de l'exercice T6.5 : Taux de création d'entropie [**]

1. $C_1 dT_1 = \frac{T_2 - T_1}{R_{th}} dt$ et $C_2 dT_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} dt$.
2. Le système est isolé, donc $\delta S_{cr} = dS = dS_1 + dS_2 = C_1 \ln \left(1 + \frac{dT_1}{T_1}\right) + C_2 \ln \left(1 + \frac{dT_2}{T_2}\right) = \frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 T_2 R_{th}}$
On voit d'abord que ce taux est positif, c'est correct. On voit aussi qu'il augmente avec l'écart de température, comme cela a été vu en cours : plus l'écart est grand, plus on crée d'entropie. Par contre, l'isolation thermique augmente R_{th} et diminue le taux de création d'entropie : il faut isoler les bâtiments !

Réponses de l'exercice T6.6 : Compression ou détente isotherme [***]

1. Par la loi de Laplace : $T_k = T_0 \left(1 - (\gamma - 1) \frac{dV}{V_A + k \cdot dV} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)(\gamma - 2) \left(\frac{dV}{V_A + k \cdot dV}\right)^2\right)$
2. $\delta W_k = nRT_0 \left(-\frac{dV}{V_A + k \cdot dV} + \frac{1}{2}(\gamma - 2) \left(\frac{dV}{V_A + k \cdot dV}\right)^2\right)$. La somme des premiers termes tend vers $-nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_A}$ (somme de Riemann), la seconde est dominée par $\frac{cst}{N}$ donc tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.
3. $\delta S_{cr,k} = \frac{1}{2}nR(\gamma - 1) \left(\frac{dV}{V_A + k \cdot dV}\right)^2$ donc $S_{cr} = \leq \frac{NnR(\gamma - 1)(V_B - V_A)^2}{2N}$ donc $S_{cr} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$: la transformation devient réversible à la limite isotherme.

Réponses de l'exercice T6.7 : Création d'entropie par des frottements solides [***]

1. $P_{ext} > P + \frac{F}{S}$.
2. $CdT_p = \frac{F \cdot dP_{ext}}{\gamma S}$.
3. $S_{cr} = C \ln \left(1 + \frac{F \cdot (P_f - P_i)}{\gamma S C T_i}\right)$.

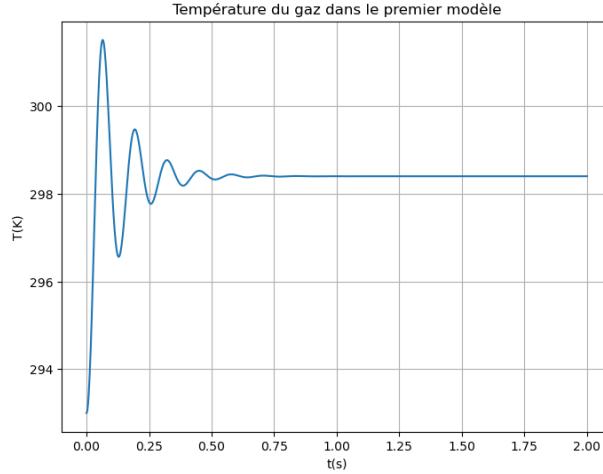
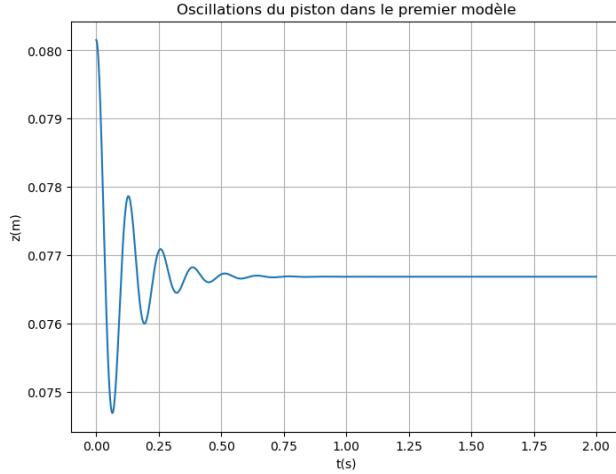
D'abord, on voit qu'elle est positive ; si on faisait une détente elle serait encore positive car la force deviendrait $-F$. On voit qu'elle augmente avec la force de frottements (d'où la nécessité de diminuer au maximum ces frottements), diminue avec S (donc un gros cylindre rend la transformation moins irréversible, même si F augmente un peu avec la taille, mais moins). Quant à la masse du piston (et donc sa capacité thermique C) elle joue peu car si on fait un DL à l'ordre 1 on voit que C disparaît, mais le terme d'ordre 2 sera en $\frac{1}{C}$ donc on retrouve le fait que pour un gros système l'entropie créée par les frottements est moindre.

Réponses aux TDs numériques

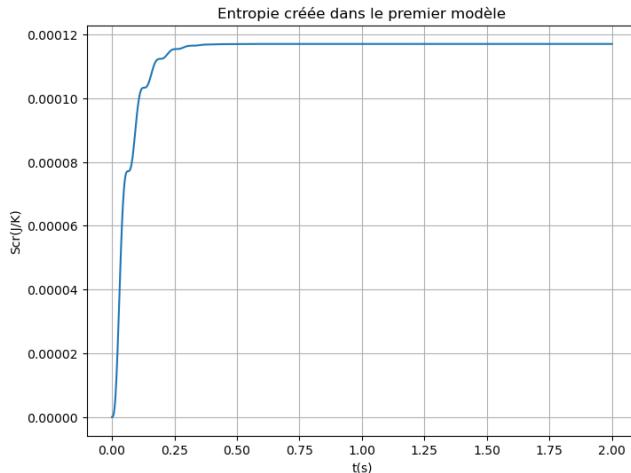
Réponses au TD d'info : Irréversibilité liée aux frottements

Initialement, $T_i = 293 \text{ K}$, $P_i = P_0 + \frac{mg}{S} = 1,013 \text{ bar}$, $V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = 0,24 \text{ L}$ et $z_i = \frac{V_i}{S} = 8,0 \text{ cm}$.

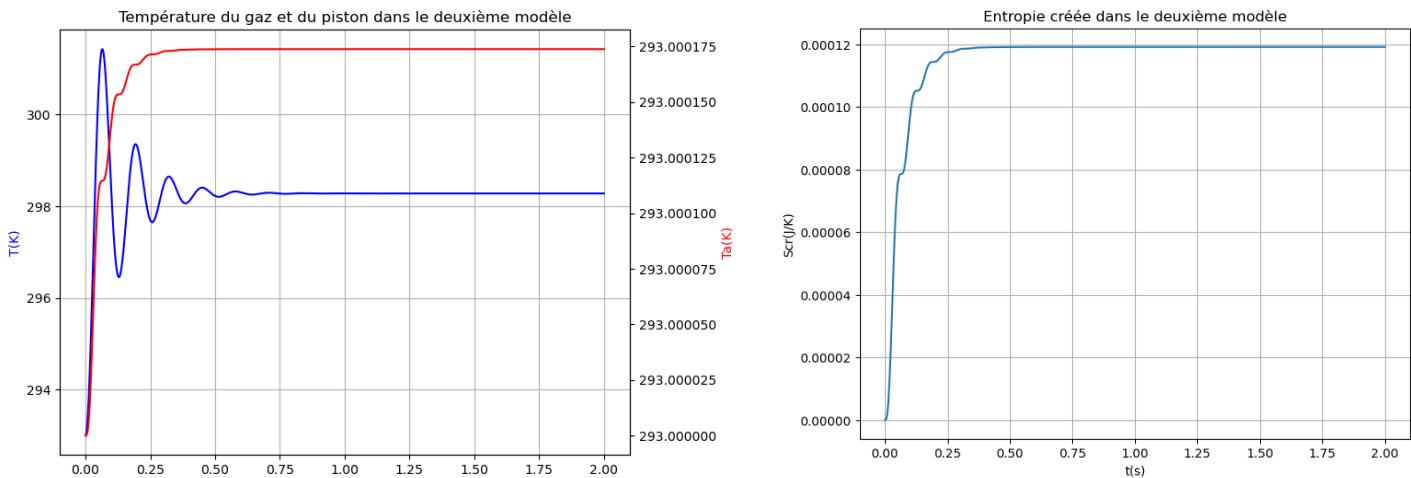
On a dans le premier modèle les équations $\begin{cases} \ddot{z} &= \frac{(P-P_0)S-\lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} &= \frac{-PS\dot{z}+\lambda\dot{z}^2}{nC_{vm}} \end{cases}$ avec $C_{vm} = \frac{5}{2}R$.



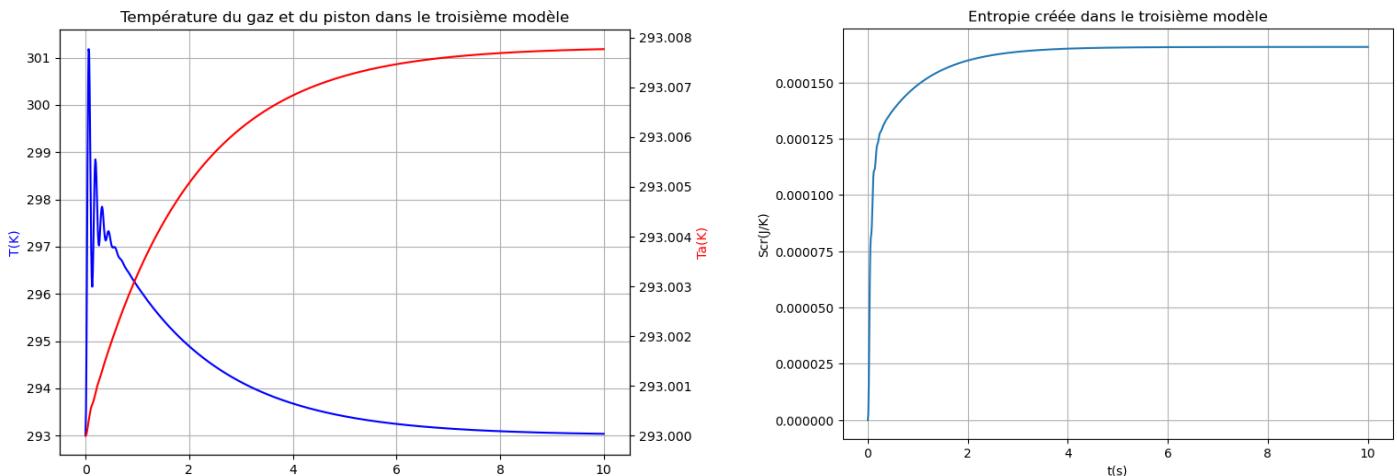
Une fois $z(t)$ et $T(t)$ obtenus, alors comme le système est isolé thermiquement, on a simplement $S_{cr} = nC_{vm} \ln \frac{T}{T_i} + nR \ln \frac{z}{z_i}$. La transformation crée une entropie d'environ $117 \mu\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$; elle ne varie pas si λ change, car l'état final est le même donc la variation d'entropie aussi.



Avec le deuxième modèle, les équations deviennent $\begin{cases} \ddot{z} &= \frac{(P-P_0)S-\lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} &= \frac{-PS\dot{z}}{nC_{ym}} \\ \dot{T}_a &= \frac{\lambda\dot{z}^2}{mc_a} \end{cases}$ et l'entropie créée est quasiment la même. Le piston chauffe peu car l'énergie dissipée par les frottements est somme toute assez faible.



Avec le troisième modèle, on a $\begin{cases} \ddot{z} = \frac{(P-P_0)S-\lambda\dot{z}}{m+m'} - g \\ \dot{T} = \frac{-PS\dot{z}+\frac{T_a-T}{R_{th}}}{nCvm} \\ \dot{T}_a = \frac{\lambda\dot{z}^2+frac{T-T_a}{mc_a}}{mc_a} \end{cases}$. Cette fois, l'élévation de température du gaz, due à la compression, se transmet au piston, ce qui crée de l'entropie supplémentaire.



Cours

Les deux premiers principes de la thermodynamique s'appliquent à des systèmes **fermés**. Nous avons donc jusqu'ici étudié des machines thermiques fermées, où la même quantité de gaz effectue des cycles. Mais la plupart des machines sont des systèmes où le fluide s'écoule d'un composant vers un autre. Par exemple, dans un réfrigérateur, le fluide frigorigène décrit un cycle au cours duquel il traverse successivement un compresseur, un échangeur, un détendeur et un autre échangeur.

Nous allons donc voir dans ce chapitre comment on peut appliquer le premier (et éventuellement le second) principe de la thermodynamique à un système en écoulement, appelé aussi **système ouvert**.

T7.A. Étude de la détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin)

La première étude d'un système ouvert a été l'étude d'une détente en écoulement : la détente de Joule-Thomson. Il s'agit d'une détente qu'on effectue souvent : quand on utilise un réchaud à gaz par exemple, le gaz est comprimé dans la bouteille ; il faut le faire sortir de la bouteille en continu, mais pas à la pression de plusieurs bars auquel il est conservé (le but n'est pas de faire un lance flamme, mais juste une petite flamme qui chauffe). On doit donc détendre en continu le gaz ; pour le détendre sans dangers, il faut créer des frottements à l'aide d'un bouchon qui laisse passer lentement le gaz.

Joule et Thomson (ou Lord Kelvin) ont réalisé cela en mettant un «bouchon poreux» dans un tuyau ; il s'agit par exemple d'un bloc de coton bien tassé, à travers lequel le fluide peut passer lentement en percolant (figure T7.1). On peut aussi le réaliser en faisant passer le fluide à travers un tout petit trou, c'est comme cela que fonctionne un détendeur de réchaud à gaz.

Nous allons donc étudier cette détente pour commencer à voir comment on peut effectuer un bilan sur un système ouvert.

FIGURE T7.1 – Détente de Joule-Kelvin.

Exemple : Détente de Joule-Thomson

À connaître

On considère une détente idéale dans lequel un fluide circule **lentement** dans une **conduite horizontale, calorifugée**. Le fluide arrive dans un état initial (dont les variables seront indiquées par i), traverse un bouchon poreux, et repart dans un état final différent (variables indiquées par f) dont la pression est inférieure à la pression initiale : $P_f < P_i$. L'écoulement est en **régime permanent** (c'est-à-dire que les caractéristiques du fluide en un point fixé ne changent pas au cours du temps).

Montrer que l'enthalpie massique du fluide est conservée au cours de la détente : $h_f = h_i$.

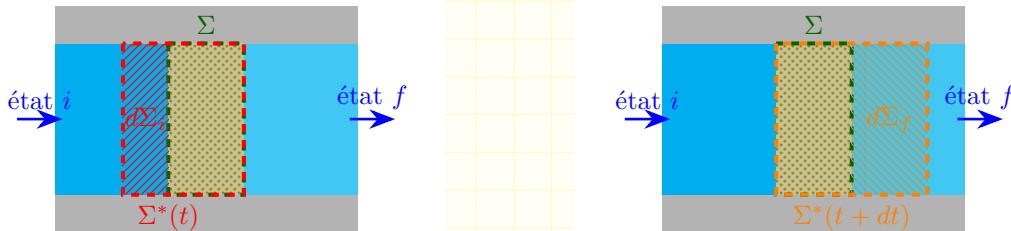
Pour comprendre le problème qui se pose ici, il faut bien observer l'animation de la figure T7.1. Appelons Σ le système constitué du bouchon poreux (pointillé vert). Lorsque le fluide circule, il y a du fluide qui traverse le système Σ : il s'agit d'un système **ouvert** sur lequel il est **IMPOSSIBLE D'APPLIQUER LE PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE**. Ce système n'est donc pas adapté.

Sur la même figure T7.1, on voit aussi un système Σ^* qui avance avec le fluide : il contient toujours la même quantité de fluide, et bouge quand le fluide bouge. Ce système est fermé. Mais sa description est compliquée. La solution est de n'étudier ce système Σ^* qu'entre deux instants très proches t et $t + dt$. On va donc définir ainsi le système Σ^* :

- à l'instant t , le système $\Sigma^*(t)$ est constitué du bouchon poreux Σ et de la quantité $d\Sigma_i$ de fluide qui va rentrer dans le bouchon pendant le temps dt (en  sur le schéma) ;

- à l'instant $t + dt$, le système $\Sigma^*(t + dt)$ est constitué du bouchon poreux Σ et de la quantité $d\Sigma_f$ de fluide qui est sortie du bouchon pendant le temps dt (en  sur le schéma).

Le système est représenté ci-dessous aux deux instants. Il faut imaginer qu'entre les deux instants, le fluide a bougé vers la droite et a entraîné le système avec lui.



Ce système est bien **FERMÉ**, on peut commencer par lui appliquer la conservation de la masse : $m = cst$; en notant $m(t)$ la masse de $\Sigma^*(t)$ et $m(t+dt)$ celle de $\Sigma^*(t+dt)$, on peut écrire $m(t) = m(t+dt)$. Mais le problème, c'est que le système Σ^* est inhomogène ; plus précisément, le fluide en amont du bouchon est homogène (état i) ; le fluide en aval est homogène (état f) ; mais dans le bouchon, on ne sait pas trop ce qui se passe. On va donc découper le système : à l'instant t , le système $\Sigma^*(t)$ est formé de deux morceaux : le bouchon $\Sigma(t)$ plus le petit morceau  de masse $dm_{d\Sigma_i}$; donc $m(t) = m_{\Sigma(t)} + dm_{d\Sigma_i}$; de même à l'instant $t + dt$, un découpage semblable permet d'écrire que $m(t + dt) = m_{\Sigma(t+dt)} + dm_{d\Sigma_f}$ où $dm_{d\Sigma_f}$ est la masse de la portion . Or l'écoulement est permanent ; cela implique que la masse contenue dans le système fixe Σ est constante : $m_{\Sigma(t)} = m_{\Sigma(t+dt)}$. On en déduit facilement que $dm_{d\Sigma_i} = dm_{d\Sigma_f}$, qu'on notera désormais simplement dm : la masse qui entre est égale à la masse qui sort. On aurait pu admettre ce résultat.

Ce raisonnement, assez évident quant à la masse, va être appliqué de la même manière quant à l'énergie. Le système Σ^* étant **FERMÉ**, on peut lui appliquer le premier principe : $dE_{macro} + dU = \delta W + \delta Q$.

Commençons par évaluer le terme de gauche. D'abord, la circulation du fluide est lente, ce qui élimine l'énergie cinétique, et horizontale, ce qui élimine l'énergie potentielle de pesanteur. Donc $dE_{macro} = 0$.

dU représente la variation d'énergie interne du système Σ^* entre t et $t + dt$. On peut simplement l'écrire comme $dU = U(t+dt) - U(t)$. Pour l'évaluer, on va procéder, comme avec la masse, par découpage : $U(t) = U_{\Sigma(t)} + dU_{d\Sigma_i}$ et $U(t + dt) = U_{\Sigma(t+dt)} + dU_{d\Sigma_f}$. Or le régime est permanent, donc l'énergie interne du système fixe Σ est constante : $U_{\Sigma(t)} = U_{\Sigma(t+dt)}$. On en déduit que $dU = dU_{d\Sigma_f} - dU_{d\Sigma_i}$. Or le morceau  est un morceau de masse dm de fluide dans l'état final f ; en notant u_f l'énergie interne massique dans l'état f , on peut écrire $dU_{d\Sigma_f} = dm \cdot u_f$; de même $dU_{d\Sigma_i} = dm \cdot u_i$. On arrive donc à cette conclusion : $dU = dm \cdot (u_f - u_i)$: la variation d'énergie interne du système est égale à la masse qui circule multipliée par la variation d'énergie interne massique entre l'entrée et la sortie.

Considérons maintenant le terme de droite : $\delta W + \delta Q$. Il est évident que $\delta Q = 0$ car le système est calorifugé. Dans les travaux, il n'y a que le travail des forces de pression à considérer, car il n'y a pas de pièces mobiles dans le système. Néanmoins, il faut faire attention avec la formule $\delta W = -P_{ext} \cdot dV$, car ici il y a 2 pressions extérieures. On va donc considérer séparément l'amont en l'aval. En aval, le système gagne un volume $dV_{d\Sigma_f}$ puisqu'on voit bien, en comparant les deux schémas, qu'entre t et $t + dt$ le volume à droite a **augmenté** de la partie . En notant v_f le volume massique dans l'état final, on peut écrire $dV_{d\Sigma_f} = dm \cdot v_f$; le travail des forces de pression en aval vaut donc $-P_f \cdot v_f \cdot dm$. On peut procéder de même en amont, à une différence importante près : entre le schéma de gauche et celui de droite, le volume $dV_{d\Sigma_i} = v_i \cdot dm$ de  a **disparu**, il est perdu par le système (attention, on ne parle pas de la masse de fluide qui était contenue, laquelle est restée dans le système ; mais le volume est perdu). Par conséquent la variation de volume en amont vaut $-dV_{d\Sigma_i}$ donc le travail des forces de pression en amont vaut $+P_i \cdot v_i \cdot dm$. Le travail total vaut donc $\delta W = dm (P_i \cdot v_i - P_f \cdot v_f)$. Remettons tous les morceaux ensemble : le premier principe s'écrit finalement pour ce système $dU = \delta W$ soit $dm \cdot (u_f - u_i) = dm \cdot (P_i \cdot v_i - P_f \cdot v_f)$. On simplifie par dm , on passe tous les termes à gauche : $u_f + P_f \cdot v_f - u_i - P_i \cdot v_i = 0$ soit

$$h_f - h_i = 0 \quad (\text{T7.1})$$

l'enthalpie du fluide est conservée lors d'une détente de Joule-Thomson (détente isenthalpique).

Comme dans le cas de la détente de Joule-Gay Lussac, Joule a testé cette détente sur beaucoup de fluides, et a constaté que certains fluides voyaient leur température rester constante lors de la détente, alors que d'autres subissaient un changement de température.

Définition : Seconde loi de Joule

On dit qu'un fluide vérifie la seconde loi de Joule si sa température ne varie pas lorsqu'il subit une détente de Joule-Thomson (ou Joule-Kelvin).

Remarque : Pour un GP dont l'enthalpie ne dépend que de T , on peut écrire $\Delta h = c_p \cdot \Delta T$. Donc $\Delta h = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$: si un gaz se comporte comme un gaz parfait, alors il vérifie la seconde loi de Joule ; la réciproque est presque vraie : la grande majorité des gaz qui ne se comportent pas comme des gaz parfaits voient leur température varier lors d'une telle détente.

La figure T7.2 montre les courbes isenthalpiques $h = cst$ tracées dans le diagramme (T, P) pour un gaz modélisé par le modèle de Van der Waals (ici le diazote). On constate que, aux températures usuelles (proches de 300 K), les courbes ont une allure croissante puis décroissante. Considérons par exemple la courbe bleue : elle croît jusqu'à environ 250 bar, puis décroît. Si on part d'un fluide dans un état représenté par un point de cette courbe, en-dessous de 250 bar, et qu'on lui fait subir une détente de Joule-Thomson, alors, lors de cette détente :

- sa pression baisse, donc le point représentatif se déplace vers la gauche
- son enthalpie massique reste constante, donc il suit la courbe $h = cst$

par conséquent, sa température diminue. Par contre, si on part d'une pression trop forte, cette loi n'est plus vraie.

En pratique, on constate que la plupart des gaz, à température ambiante, subissant une détente de Joule-Thomson avec une chute de pression raisonnable, se refroidissent. C'est le cas par exemple de la cartouche de butane qui sert à alimenter le réchaud à gaz (quoique dans ce cas, l'évaporation du liquide en gaz joue aussi un rôle).

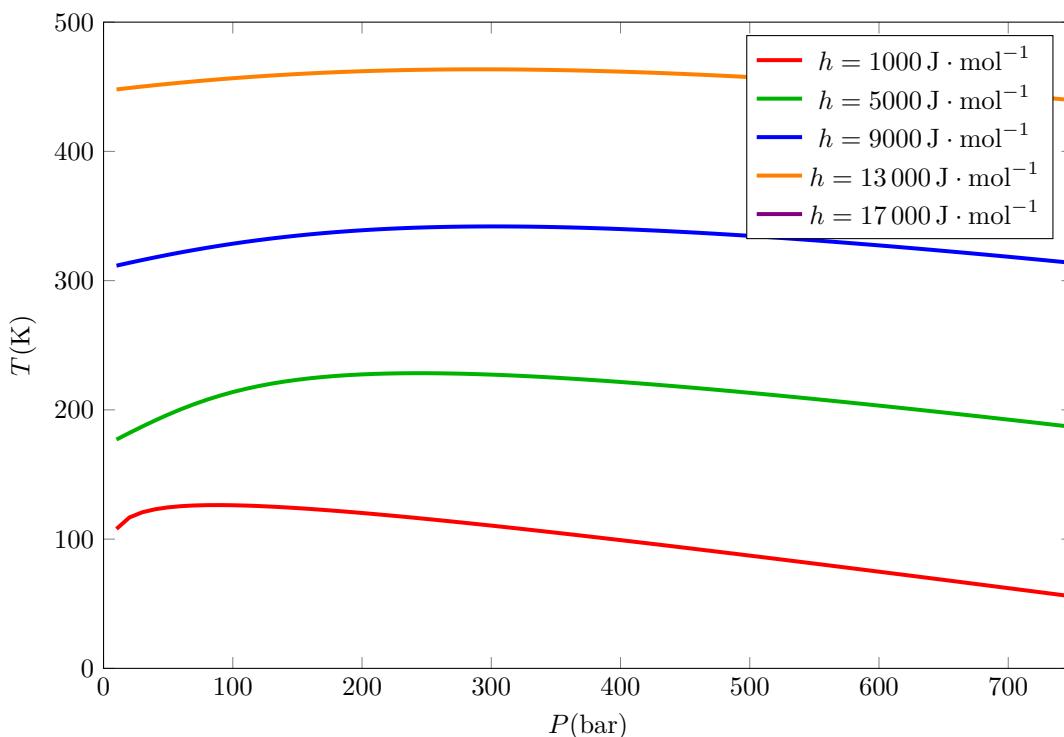


FIGURE T7.2 – Enthalpie d'un gaz de Van der Waals.

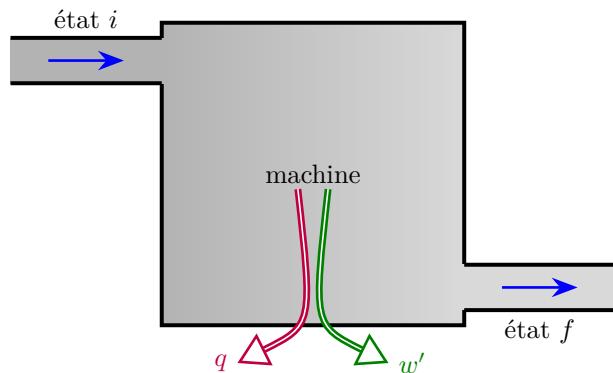
T7.B. Étude énergétique d'un système quelconque en écoulement

La détente de Joule-Thomson est un exemple très simple de système en écoulement. Dans cette section, nous allons établir l'équation générale des systèmes en écoulement.

Premier principe industriel, ou équation des machines

Considérons une machine traversée par un fluide circulant dans un régime permanent avec un débit massique D_m . Le fluide arrive dans un état initial i et ressort dans un état f après avoir reçu :

- un travail utile de la part de pièces mobiles, caractérisé par une puissance mécanique \mathcal{P}_{meca} ou par un travail utile massique w'
- un transfert thermique caractérisé par une puissance thermique \mathcal{P}_{th} ou par un transfert thermique massique q



Alors le bilan énergétique de cette machine s'écrit

$$\Delta \left[h + gz + \frac{1}{2}k^2 \right] = w' + q \quad (\text{T7.2a})$$

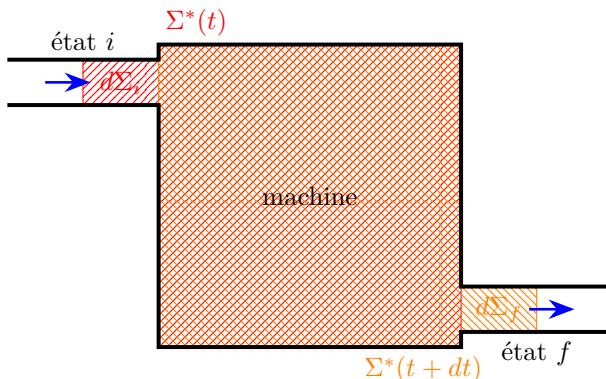
$$D_m \Delta \left[h + gz + \frac{1}{2}k^2 \right] = \mathcal{P}_{meca} + \mathcal{P}_{th} \quad (\text{T7.2b})$$

où h représente l'enthalpie massique, g l'accélération de la pesanteur, z l'altitude du fluide et k sa vitesse ^a; enfin Δ représente la variation de ces grandeurs entre l'état initial (entrée) et l'état final (sortie).

a. Eh oui, v , w et c sont déjà pris en thermo !

Démonstration

On prend les notations proposées dans l'énoncé de cette loi, et ajoutant la pression P , le volume massique v et l'énergie interne massique u . On notera avec un indice i les caractéristiques dans l'état initial et avec un f celles de l'état final.



On définit un système Σ^* ainsi :

- à l'instant t , le système est formé de la machine plus la quantité $d\Sigma_i$ qui va entrer dans la machine en un temps dt
- à l'instant $t + dt$, le système est constitué de la machine plus la quantité $d\Sigma_f$ qui est sortie de la machine en un temps dt .

Ce système est fermé; par conservation de sa masse, il est évident que $dm_{d\Sigma_i} = dm_{d\Sigma_f}$, qu'on notera dm .

Le premier principe appliqué à ce système indique que $d(E_{macro} + U) = \delta W + \delta Q$.

Or $d(E_{macro} + U) = [E_{macro} + U](t + dt) - [E_{macro} + U](t)$

$$\begin{aligned} &= [E_{macro} + U]_{\text{machine}(t+dt)} + [E_{macro} + U]_{d\Sigma_f} \\ &\quad - [E_{macro} + U]_{\text{machine}(t)} - [E_{macro} + U]_{d\Sigma_i} \\ &= [E_{macro} + U]_{d\Sigma_f} - [E_{macro} + U]_{d\Sigma_i} \quad (\text{régime permanent}) \\ &= dm \left([e_{macro} + u]_f - [e_{macro} + u]_i \right) \\ &= dm \left(\frac{1}{2}k_f^2 + gz_f + u_f - \frac{1}{2}k_i^2 - gz_i - u_i \right) \end{aligned}$$

car e_{macro} est la somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie potentielle de pesanteur massique.

Le terme δQ peut simplement s'écrire $\delta Q = dm \cdot q$ où q est le transfert thermique par unité de masse. Pour le travail, $\delta W = \delta W_{\text{pression}} + \delta W' = \delta W_{\text{pression en entrée}} + \delta W_{\text{pression en sortie}} + w' \cdot dm$

$$= +dm \cdot P_i \cdot v_i - dm \cdot P_f \cdot v_f + w' \cdot dm$$

En mettant tous ces résultats dans le premier principe, et en simplifiant par dm , on trouve $u_f + gz_f + \frac{1}{2}k_f^2 - u_i - gz_i - \frac{1}{2}k_i^2 = P_i \cdot v_i - P_f \cdot v_f + w' + q$. En passant les termes $P \cdot v$ à gauche, on les combine avec les termes u

pour former l'enthalpie massique $h = u + P.v$. On obtient alors bien

$$\Delta \left[h + gz + \frac{1}{2}k^2 \right] = w' + q$$

La seconde équation s'obtient simplement en remarquant que w' est le travail utile par unité de masse et \mathcal{P}_{meca} par unité de temps, c'est-à-dire que $w' = \frac{\delta W'}{dm} = \frac{\mathcal{P}_{meca}.dt}{dm} = \frac{\mathcal{P}_{meca}}{D_m}$ et de même $q = \frac{\mathcal{P}_{th}}{D_m}$.

! Dans l'équation des machines, les termes $g.z$ et $\frac{1}{2}k^2$ ont pour unité SI des $J \cdot kg^{-1}$, donc il faut absolument mettre les enthalpies en $J \cdot kg^{-1}$ et non pas en $kJ \cdot kg^{-1}$.

Remarque : Considérons un kilogramme d'eau liquide.

- si sa température augmente de $1^\circ C$ alors son enthalpie augmente $4200 J$.
- pour obtenir la même variation d'énergie potentielle de pesanteur, il faut avoir $m.g.\Delta z = 4200$ soit environ $\Delta z = 420 m$
- pour obtenir la même variation d'énergie cinétique, en partant d'une vitesse initiale nulle, il faut atteindre en sortie une vitesse $k = \sqrt{2 \times 4200} = 92 m \cdot s^{-1} = 330 km \cdot h^{-1}$

Ces ordres de grandeur permettent de voir que les variations d'énergie mécanique sont le plus souvent négligeables devant les énergies mises en jeu lors de changements de températures, et à plus forte raison devant des changements d'état. En pratique :

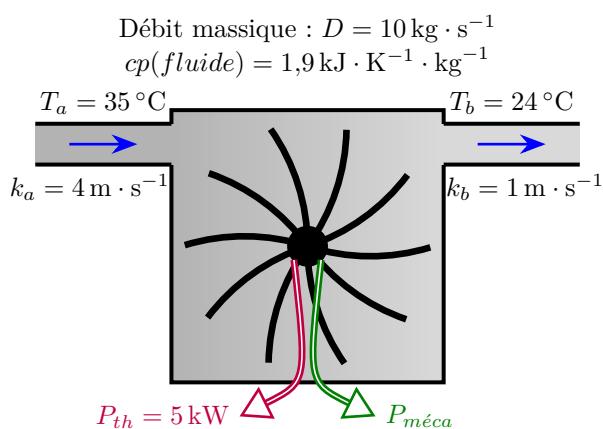
- on ne tient compte des variations d'altitudes que lorsqu'elles sont très importantes, à savoir dans les barrages
- on ne tient compte des variations d'énergie cinétique que lorsque la vitesse en sortie est très grande, à savoir dans les réacteurs d'avions ou les tuyères d'hélicoptères.

De manière générale, si l'énoncé d'un problème ne donne pas d'indication concernant les variations d'altitude ou de vitesse, c'est qu'on les néglige.

Remarque : Le travail utile est apporté par des pièces mécaniques mobiles dans la machine : pales, turbine, Si l'énoncé indique : «il n'y a aucune pièce mécanique mobile», cela signifie que $w' = 0$.

Exemple : Bilan énergétique d'une turbine

On considère une turbine traversée par un fluide dont l'enthalpie ne dépend que de la température ; toutes les données sont sur la figure (attention au sens des flèches), les variations d'altitude sont négligeables.



En appliquant l'équation des machines, calculez la puissance mécanique utile P_{meca} produite par cette turbine.

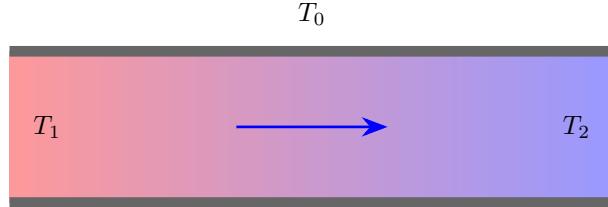
L'équation des machines s'écrit ici $D \left[\Delta h + \frac{1}{2} \Delta k^2 \right] = -\mathcal{P}_{meca} - \mathcal{P}_{th}$. Or $\Delta h = c_p \cdot \Delta T$ donc on peut écrire $\mathcal{P}_{meca} = D.c_p (T_b - T_a) + \frac{D}{2} (k_b^2 - k_a^2) - P_{th} = 204 kW$

T7.C. Bilans entropiques des systèmes en écoulement (Hors programme)

Les bilans entropiques des systèmes en écoulement ne sont pas au programme de première année. On va donc simplement se contenter d'un exemple illustrant comment on effectue un tel bilan.

Exemple : Création d'entropie par refroidissement d'un fluide chaud

On considère un tuyau dans lequel circule un fluide de capacité thermique massique $c = 1,4 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Ce fluide entre à la température $T_1 = 40^\circ\text{C}$ et circule dans le tuyau tout en se refroidissant au contact de l'air extérieur qui est à $T_0 = 8^\circ\text{C}$; en sortie, le fluide n'est plus qu'à $T_2 = 21^\circ\text{C}$. L'écoulement est permanent, sans pièces mécanique mobile, lent et horizontal.



1. Calculez la quantité de chaleur massique q reçue par le fluide, en appliquant l'équation des machines.
 2. Calculez l'entropie créée s_{cr} par unité de masse. On rappelle que la variation d'entropie d'un fluide de capacité C dont la température passe de T_i à T_f s'écrit $\Delta S = C \ln \frac{T_f}{T_i}$.

- En appliquant l'équation des machines : $\Delta(h + g.z + \frac{1}{2}k^2) = w' + q$; or ici $k = 0$ (écoulement lent), $z = 0$ (écoulement horizontal), $w' = 0$ (par de pièces mobiles), donc $q = \Delta h = c(T_2 - T_1) = -26,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 - On reprend un raisonnement sur un système fermé comme dans le cas de l'équation des machines. On définit le système fermé Σ^* :
 - à l'instant t , le système est formé de la machine plus la masse dm_i qui va entrer dans la machine en un temps dt
 - à l'instant $t + dt$, le système est constitué de la machine plus la masse dm_f qui est sortie de la machine en un temps dt .

Par conservation de la masse en régime permanent, il est évident que $dm_i = dm_f$, noté dm .

Le second principe appliqué à ce système indique que $dS = \delta S_{ech} + \delta S_{cr}$.

Or $dS = S(t+dt) - S(t) = S_{machine(t+dt)} + dm.s_2 - S_{machine(t)} - dm.s_1 = dm(s_2 - s_1)$ en notant s_1 et s_2 les entropies massiques en entrée et en sortie du tuyau. De plus, $\delta S_{ech} = \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{dm.q}{T_0}$ et $\delta S_{cr} = dm.s_{cr}$ avec s_{cr} l'entropie créée massique. En mettant tout ensemble : $dm.\Delta s = dm\frac{q}{T_0} + dm.s_{cr}$ soit $s_{cr} = \Delta s - \frac{q}{T_0} = c \ln \frac{T_2}{T_1} - c \frac{T_2 - T_1}{T_0} = 192 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

T7.D. Utilisation d'un diagramme enthalpique

Avec le premier principe industriel, on en vient à étudier des fluides circulant dans des machines réelles, avec très souvent des changements d'états (liquide/vapeur). Dans ces conditions, les gaz ne se comportent plus vraiment comme des gaz parfaits. On utilise alors des mesures expérimentales sur les fluides qui sont regroupées dans des graphiques ; un des plus utilisés est le diagramme enthalpique (ou diagramme de Mollier).

Définition : Diagramme enthalpique, ou diagramme de Mollier

Un diagramme enthalpique représente les variables d'états d'un fluide dans un diagramme $(\log P, h)$. On y trace les isobares ($P = cst$, horizontales), les isenthalpiques ($h = cst$, verticales), les isothermes ($T = cst$), les isochores ($v = cst$), les isentropiques ($s = cst$) et la courbe de saturation (cf. figure T7.3).

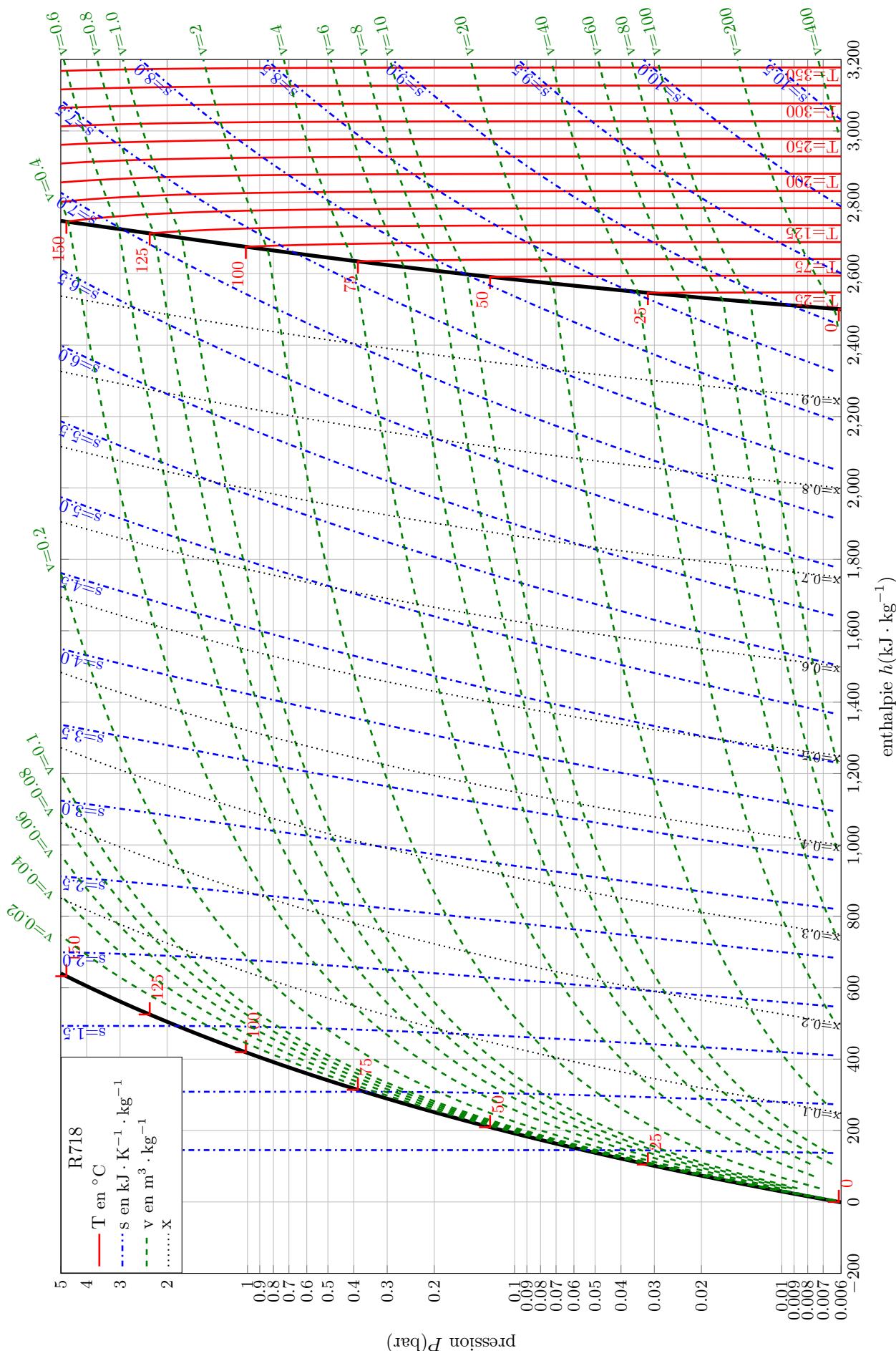


FIGURE T7.3 – Diagramme enthalpique de l'eau entre 0,006 bar et 5 bar.

Quelques remarques sur ce diagramme enthalpique de l'eau :

- le code R718 en haut à gauche est le code du fluide étudié (ici de l'eau) selon la norme 34-1992 d'ANSI/ASHRAE utilisée par l'IUPAC (cf la [liste ici](#)) ;
- l'enthalpie massique en abscisse est graduée de $-200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à $3200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; les courbes isenthalpiques correspondantes sont des droites verticales ;
- la pression en ordonnée est graduée de 0,006 bar à 5 bar en échelle logarithmique ; les courbes isobares correspondantes sont des droites horizontales ;
- la courbe en noir épais est la courbe de saturation (tronquée en haut sur ce diagramme, mais souvent on la voit jusqu'au point critique).
- l'état de l'eau est liquide à gauche de la courbe d'ébullition et vapeur à droite de la courbe de rosée. Entre les deux courbes, il y a coexistence liquide/vapeur. Des courbes en pointillé noir, graduées en bas $x = 0, 10$ jusqu'à 0,90, indiquent les fractions massiques de vapeur (calculées grâce à la loi des moments) ;
- les courbes en rouge sont les isothermes. Elles sont représentées à droite dans la zone vapeur, de 0°C à 360°C ; une fois arrivées à la courbe de rosée, on ne voit plus qu'un petit trait horizontal; en effet, sous cette courbe, les isothermes sont aussi des isobares, donc on ne les dessine plus pour ne pas surcharger le dessin. On reprend ce petit trait en face, au même niveau sur la courbe d'ébullition, prolongée par un petit trait vertical : en effet, dans la partie liquide, les isothermes sont quasiment verticales ;
- les courbes en tirets verts sont les isochores ($v = cst$); le volume massique y est indiqué dessus en $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ (c'est écrit en haut à gauche) ;
- les courbes en tirets-points bleus sont les isentropiques ($s = cst$); l'entropie massique y est indiquée en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ (pareil, c'est écrit en haut à gauche).

On peut tracer de tels diagrammes à l'aide du logiciel freeware Coolpack ou de la librairie CoolProp.

La figure T7.4 montre par exemple un cycle moteur avec de l'eau (les isochores ont été supprimées pour plus de lisibilité) :

- AB : compression isentropique du mélange liquide/vapeur de 0,075 bar, 40°C à 2 bar, 120°C
- BC : chauffage et évaporation isobare de l'eau sous 2 bar
- CD : détente isotherme de la vapeur jusqu'à 0,075 bar
- DA : refroidissement isobare de la vapeur.

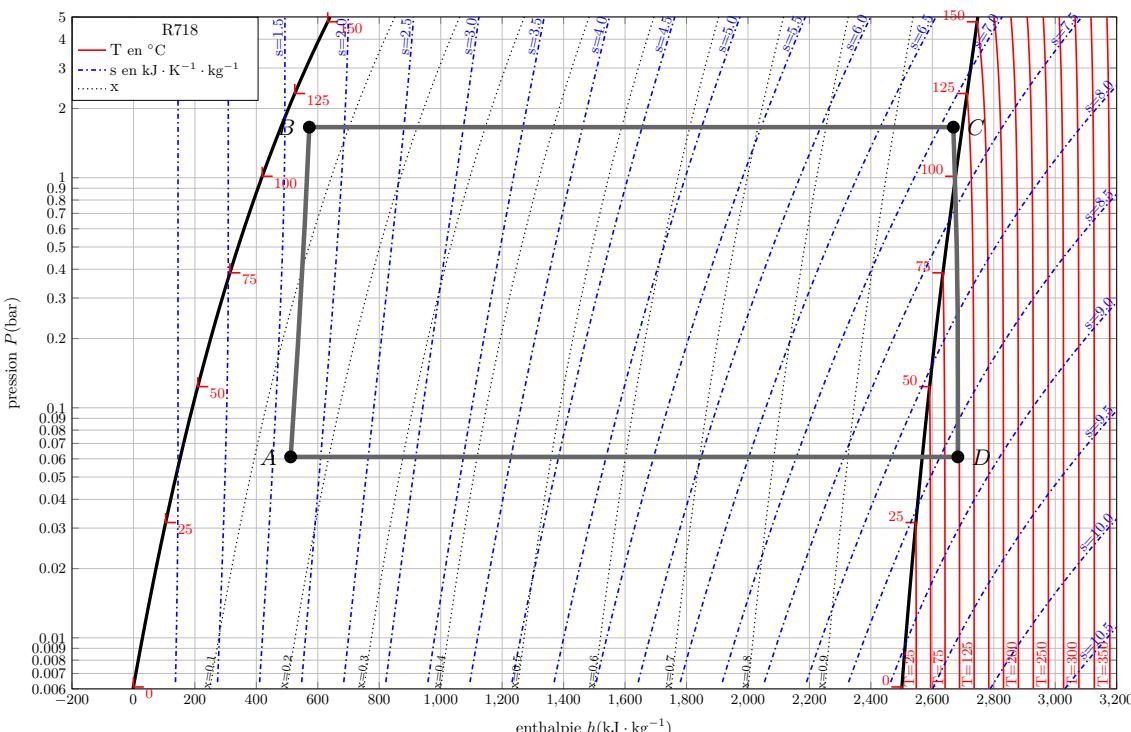


FIGURE T7.4 – Exemple de cycle moteur de l'eau.

Systèmes en écoulement

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Machines thermiques	<p>Analyser un dispositif concret et le modéliser par une machine cyclique ditherme.</p> <p>Définir un rendement ou une efficacité et les relier aux énergies échangées au cours d'un cycle. Justifier et utiliser le théorème de Carnot.</p> <p>Citer quelques ordres de grandeur des rendements des machines thermiques réelles actuelles.</p> <p>Expliquer le principe de la cogénération.</p> <p>Mettre en œuvre une machine thermique cyclique ditherme.</p>



QCMs

réponses page 900

 QCM : Bilans énergétiques sur des systèmes en écoulement 

Dans chaque question, il faut appliquer l'équation des machines en notant bien quels sont les termes nuls ou non nuls. On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Q1.

Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 2,3 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ circule à faible vitesse dans un tuyau horizontal où il n'échange aucun travail utile. Il entre à 28°C et ressort à 21°C . Les pertes thermiques par kilogramme de fluide transféré valent :

- (a). $640 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ (b). $16 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
 (c). $640 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (d). $16 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

Q2.

Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 0,6 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ circule à faible vitesse dans un tuyau horizontal où il n'échange aucun travail utile. Il entre à 11°C et ressort à 39°C . Le débit massique vaut $35 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$. La puissance thermique reçue vaut :

- (a). 480 kW (b). 588 mW
 (c). 480 W (d). 588 W

Q3.

Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de masse volumique $\rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, arrive à l'entrée d'une tuyère horizontale avec une température de 600°C et une vitesse négligeable. Après une détente adiabatique sans échange de travail utile, il ressort avec une température de 130°C . Sa vitesse en sortie vaut :

- (a). $31 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (b). $690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (c). $970 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (d). $940 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Q4.

Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, arrive à l'entrée d'une conduite forcée à 18°C avec une vitesse négligeable. Après une descente sans échange de travail utile ni de chaleur, il ressort avec $0,1^\circ\text{C}$ de plus, 530 m plus bas. Sa vitesse en sortie vaut :

- (a). $69 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (b). $102 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (c). $106 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (d). $98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

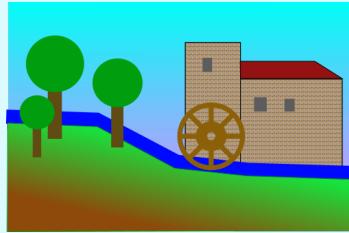
Q5.

Un fluide de capacité thermique à pression constante $c_p = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, arrive à l'entrée d'une machine à 19°C avec une vitesse de $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Après avoir travaillé adiabatiquement dans la machine, il ressort avec la même température, à $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, à la même altitude. Le travail utile échangé par unité de masse vaut :

- (a). $30 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ (b). $13 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$
 (c). $21 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ (d). $5,5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$

Q6.

De l'eau, de capacité thermique à pression constante $c_p = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et de masse volumique $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, arrive à l'entrée d'un moulin avec une vitesse de $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Après avoir travaillé adiabatiquement sur la roue à aubes, elle ressort avec la même température, à $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, et 4 m plus bas. Le débit volumique d'eau vaut $100 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$. La puissance fournie au moulin vaut :



(a). 4,2 kW
(c). 3,6 kW

(b). 8 W
(d). 460 W

Systèmes en écoulement

Exercices

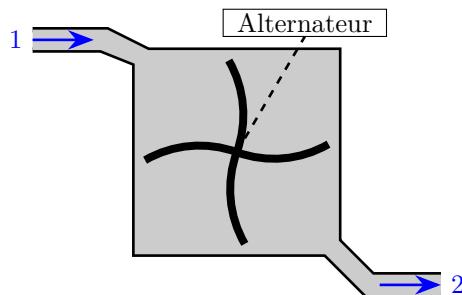
réponses page 901

Exercice T7.1 : Turbine de barrage [*]

Une turbine de barrage sert à transformer l'énergie potentielle de pesanteur de l'eau en énergie mécanique de rotation, pour produire ensuite de l'électricité.

En régime stationnaire, l'eau arrive dans l'état 1 avec un débit massique $D = 3000 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ et une vitesse négligeable. Elle passe dans la turbine calorifugée ; celle-ci récupère une puissance utile \mathcal{P} qui part vers un alternateur. Elle ressort alors $z = 40 \text{ m}$ plus bas dans l'état 2, avec une vitesse $w = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Entre l'état 1 et l'état 2, sa température a augmenté de $\Delta T = 0,01^\circ\text{C}$.

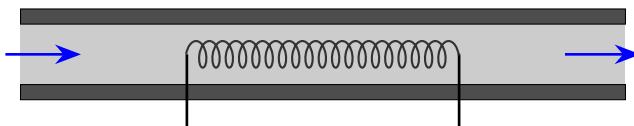
On donne : $c_P(\text{eau}) = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.



1. Calculez la puissance utile reçue par l'alternateur.
2. Calculez la puissance maximale que pourrait récupérer la turbine avec le même débit et la même hauteur de chute. Déduisez-en le «rendement» de la turbine.
3. La turbine entraîne un alternateur qui produit de l'électricité avec un rendement de 85 % ; calculez le rendement de l'ensemble.

Exercice T7.2 : Chauffage d'un fluide en écoulement [*]

On fait entrer lentement un fluide à 15°C dans un tube horizontal très bien calorifugé contenant une résistance de 10Ω parcourue par un courant de $0,5 \text{ A}$.



À l'aide d'un bilan enthalpique, déterminez la capacité thermique massique à pression constante du fluide, sachant qu'il sort à $18,3^\circ\text{C}$ et que le débit massique de fluide est $1 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$.

Exercice T7.3 : Détente du gaz propane [**]

Une «bouteille de gaz» contient du propane liquéfié en équilibre avec son gaz, sous une pression p_1 à $T_1 = 25^\circ\text{C}$. Lorsqu'on ouvre le robinet, le gaz se détend de manière isenthalpique (détente de Joule-Kelvin), jusqu'à la pression $p_2 = 1 \text{ bar}$. À l'aide du diagramme enthalpique du propane (R290) (fig. T7.5 après les énoncés), répondez aux questions suivantes :



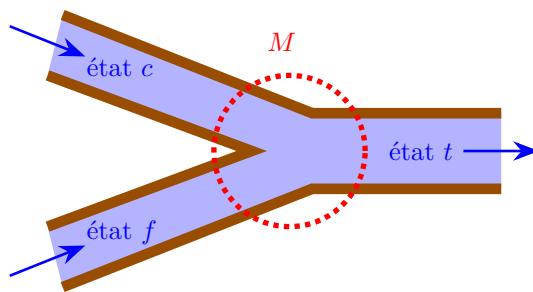
1. Que vaut la pression p_1 ?
2. Dessinez la transformation suivie par le gaz propane.
3. Déterminez la température finale T_2 du gaz.
4. Déterminez l'entropie massique créée lors de cette détente du gaz.
5. Lorsque le gaz s'échappe de la bouteille, une quantité quasiment équivalente de liquide se transforme en gaz. Déterminez l'enthalpie massique puis l'entropie massique de vaporisation du propane à T_1 .

Exercice T7.4 : Mitigeur [**]

Un mitigeur permet de mélanger de l'eau chaude et de l'eau froide pour obtenir de l'eau tiède.

En entrée, l'eau froide arrive dans un état noté f , avec une température T_f et un débit massique d_f . L'eau chaude arrive dans un état c , et l'eau ressort tiède dans un état t . L'écoulement est lent, les changements d'altitude sont faibles. L'eau est considérée comme un liquide incompressible.

On note M le système ouvert entouré en pointillés sur la figure, dans lequel les deux eaux se mélangent ; il ne contient aucune pièce mécanique mobile. On suppose qu'on est en régime permanent.



- Soit M^* le système défini ainsi :

- à l'instant t , $M^* = \{M + \text{les masses } d_f \cdot dt \text{ d'eau froide et } d_c \cdot dt \text{ d'eau chaude qui vont entrer}\}$
- à l'instant $t + dt$, $M^* = \{M + \text{la masse } d_t \cdot dt \text{ d'eau tiède qui est sortie}\}$

Faites un schéma de ce système.

- Par un rapide bilan de masse appliqué à M^* , reliez d_f , d_c et d_t .
- Par une application précise du premier principe à ce système, montrez que $d_t h_t - d_f h_f - d_c h_c = P_{th}$ où P_{th} est la puissance thermique reçue et h les enthalpies massiques.
Réexprimez cette relation en fonction de d_f , d_c , T_f , T_c , T_t , P_{th} et la capacité calorifique c_p de l'eau, qu'on supposera constante.
- On dispose d'eau froide à $T_f = 15^\circ\text{C}$ et d'eau chaude à $T_c = 70^\circ\text{C}$. On souhaite obtenir de l'eau à 35°C avec un débit $d_t = 8 \text{ kg/min}$. Calculer les débits d_f et d_c nécessaires si le mitigeur est parfaitement calorifugé.
- On règle les débits calculés à la question précédente, et on mesure $T_t = 34,7^\circ\text{C}$ en sortie. Calculez les pertes thermiques P_{th} . *Données* : $c_p = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.
- La variation d'entropie massique de l'eau passant d'une température T_1 à une température T_2 s'écrit $\Delta s = c_p \ln \frac{T_f}{T_i}$. Calculez l'entropie créée par minutes lors du fonctionnement adiabatique de la question 4. Reprenez la même question en tenant compte des pertes thermiques (question 5), en supposant que la pièce est à 21°C .

Exercice T7.5 : Compresseur [***]

Un compresseur a pour rôle d'augmenter la pression d'un fluide. On considère ici un compresseur travaillant sur du 1,1,1,2-tétrafluoroéthane ou R134a dont le diagramme enthalpique est donné en figure T7.6 à la fin des énoncés).

1. Compression mono-étagée

En entrée du compresseur, on dispose de vapeur saturante à -10°C sous 2 bar. En sortie, on souhaite obtenir une pression de 20 bar. On définit le rendement isentropique du compresseur comme $\eta_s = \frac{h_{f'} - h_i}{h_f - h_i}$ où h_i désigne l'enthalpie massique au départ, h_f à la fin, et $h_{f'}$ l'enthalpie massique finale si le compresseur était isentropique dans son fonctionnement (avec la même pression d'arrivée).

- Placez sur le diagramme de point de départ I et le point fictif F' qui serait atteint en cas de fonctionnement isentropique.
- Le rendement isentropique vaut $\eta_s = 85\%$. Déduisez-en h_f , et placez le vrai point d'arrivée sur le diagramme. Mesurez le rapport v_f/v_i des volumes massiques, et les températures finales T_f et $T_{f'}$.
- Quel est le travail utile massique fourni par le compresseur si on suppose que les pertes thermiques sont négligeables ?

2. Compression multi-étagée

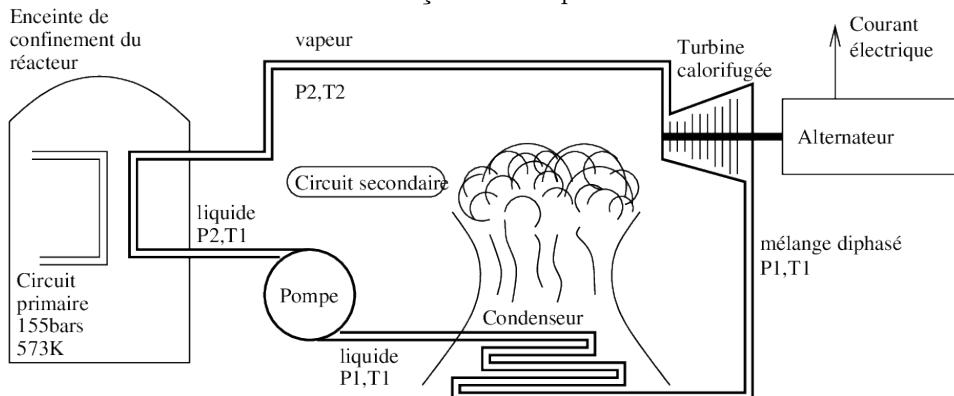
On propose le protocole suivant :

- on comprime la vapeur saturante à -10°C sous 2 bar jusqu'à 7 bar (point A) ; le rendement isentropique vaut 0,85.
- on laisse refroidir jusqu'à obtenir de la vapeur saturante sous 7 bar (point B).
- on comprime jusqu'à 20 bar avec le même rendement isentropique (point C).

Placez les points A et B . Mesurez le travail utile massique fourni, et la température finale.

Exercice T7.6 : Étude d'un réacteur à eau pressurisée [***]

Le parc de production d'électricité nucléaire français est composé de centrales de la filière REP :



On étudie l'eau ($M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) contenue dans le circuit secondaire, qui est un circuit fermé. On se propose de modéliser son évolution au prix de quelques approximations par le cycle suivant :

- $A \rightarrow B$: l'eau sort liquide du condenseur, à la température T_1 et la pression P_1 . Elle subit alors dans la pompe une compression durant laquelle sa température ne varie pratiquement pas. On considérera que les échanges thermiques sont négligeables lors de cette compression, qui l'amène à la pression P_2 .
- $B \rightarrow E$: l'eau passe dans un échangeur qui permet des transferts thermiques entre le circuit primaire (chauffé par le réacteur) et le circuit secondaire. On peut décomposer en deux transformations ce qui se passe alors : l'eau liquide s'échauffe de manière isobare jusqu'à T_2 (état D), où elle se trouve sous forme de liquide saturant ; puis elle se vaporise entièrement jusqu'à l'état E , de manière isobare.
- $E \rightarrow F$: la vapeur d'eau se détend de manière réversible dans une turbine calorifugée jusqu'à l'état F , à P_1 et T_1 . Durant cette détente, une fraction $(1 - x)$ de l'eau redevient liquide, tandis qu'une fraction x reste gazeuse.
- $F \rightarrow A$: la vapeur restante se condense dans le condenseur de manière isobare.

L'écoulement est stationnaire dans tout ce problème. On rappelle que $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. On a extrait les volumes, enthalpies et entropies massiques des tables thermodynamiques :

T	$P_{v,sat}$	$v (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$		$h (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$		$s (\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1})$	
		v_l	v_v	h_l	h_v	s_l	s_v
$T_1 = 293 \text{ K}$	$P_1 = 0,023 \text{ bar}$	$v_l(293)$	$v_v(293)$	85	2540	0,3	8,7
$T_2 = 573 \text{ K}$	$P_2 = 80 \text{ bar}$	$1,31 \times 10^{-3}$	0,026	1290	2890	$s_l(573)$	6,0

1. Calcul des données manquantes

- Quelle est la relation entre la variation d'entropie d'un corps pur et sa variation d'enthalpie lors d'une vaporisation totale à température constante ? En déduire $s_l(573 \text{ K})$.
- Sachant que la vapeur d'eau sous 0,023 bar à 293 K peut être considérée comme un gaz parfait, calculer son volume massique $v_v(293 \text{ K})$.
- Donner sans calcul la valeur de $v_l(293 \text{ K})$.

2. Diagramme de Clapeyron

- Tracer dans le diagramme de Clapeyron l'allure de la courbe de saturation, des deux isothermes T_1 et T_2 , et le cycle décrit par l'eau en précisant les points A , B , D , E et F .
- La pente de AB est très grande (presque verticale) ; à quelle propriété physique cela correspond-il ?

3. Entropie

- Justifier que (EF) est une isentropique.
- Calculer le titre en vapeur x dans l'état F .

- On note w_a le travail reçu par l'alternateur par unité de masse de fluide écoulé ; on négligera tout frottement. La turbine est calorifugée et horizontale, la vitesse de l'eau est négligeable, et on admet que tout le travail utile que reçoit la turbine est transmis à l'alternateur.

Montrer que $w_a = h_E - h_F$. Calculer numériquement w_a .

5. Rendement

- La capacité calorifique massique de l'eau liquide vaut $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Calculer le transfert thermique par unité de masse d'eau écoulée reçu par le système au niveau de l'échangeur avec le circuit primaire, q_{BE} .

- (b) On définit le rendement par $\frac{w_a}{q_{BE}}$. Le calculer. Que néglige-t-on dans cette définition ?
(c) Comparer au rendement maximal qu'on pourrait avoir entre deux sources de température T_1 et T_2 .

Exercice T7.7 : Moteur à réaction(ESIM) [***]

1. Préliminaire

Un gaz s'écoule en régime permanent dans une canalisation [1] ; il traverse ensuite une partie active où il échange avec le milieu extérieur le travail w et la quantité de chaleur q (par unité de masse qui transite), puis il s'écoule dans une canalisation [2]. Les parois des canalisations [1] et [2] sont calorifugées. Dans la canalisation [1], le gaz a pour pression P_1 , pour vitesse v_1 et pour enthalpie massique h_1 ; dans la canalisation [2], le gaz a pour pression P_2 , pour vitesse v_2 et pour enthalpie massique h_2 .

Établir une relation, tirée du premier principe de la thermodynamique appliquée à un système fermé, reliant les enthalpies et les vitesses en entrée et en sortie, et les échanges mécaniques et thermiques.

2. Dans un moteur à réaction, un gaz, assimilé à l'air, supposé parfait, subit des transformations qu'on considérera d'abord comme réversibles. Il pénètre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (point 1). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 , et la température vaut alors T_2 (point 2). Il passe alors dans une chambre de combustion sans parties mobiles où sa température passe de T_2 à T_3 , la pression restant égale à P_2 (la sortie de la chambre de combustion est représentée par le point 3). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à P_4 et T_4 (point 4) ; cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les points 1 et 2. Enfin, le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (point 5). Le gaz est rejeté avec la vitesse v (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1 . On considérera que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

Données numériques :

- $T_1 = 290\text{ K}$; $P_1 = 1\text{ bar} = 1 \times 10^5\text{ Pa}$.
- Le rapport $a = P_2/P_1$ est égal à 5.
- La température du gaz à l'entrée de la turbine vaut 1300 K. L'air est un gaz diatomique de masse molaire $29\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour lequel $\gamma = 1,4$.
- La chaleur massique de l'air à pression constante vaut $c_p = 1000\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Les calculs demandés sont relatifs à l'unité de masse. Les grandeurs extensives correspondantes seront représentées avec une lettre minuscule.

3. Représenter l'allure des transformations subies par le gaz dans le diagramme de Clapeyron.

Dans les questions suivantes, on établira d'abord l'expression littérale, puis on donnera la valeur numérique des résultats demandés.

4. Déterminer l'expression de T_2 en fonction des données.

5. Quelle est le travail fourni à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur ?

6. Quelle est le transfert thermique reçu puis par unité de masse dans la chambre de combustion ?

7. Déterminer T_4 et T_5 .

8. Quelle est la vitesse du gaz à la sortie de la tuyère ?

9. Quel est le rendement de ce moteur ?

Indication : le but d'un réacteur est d'obtenir une poussée qui fait avancer l'avion ; on récupère donc de l'énergie cinétique.

10. En réalité, la tuyère n'a pas un fonctionnement réversible. Le gaz sort de la tuyère à une température T'_5 .

On définit le rendement de la tuyère par rapport à l'isentropique par $\eta = \frac{h'_5 - h_4}{h_5 - h_4}$; il vaut 90 %.

- (a) Quelle est la température de sortie T'_5 des gaz de la tuyère ?

- (b) Quelle est la nouvelle vitesse de sortie de ces gaz ?

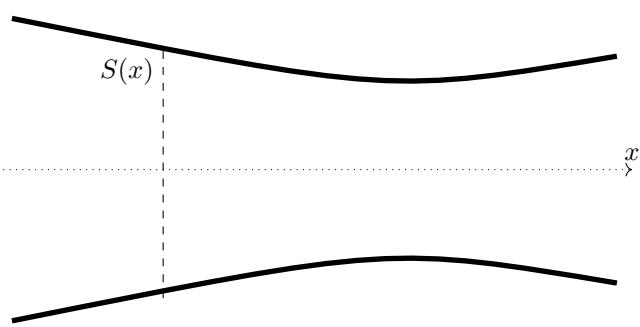
- (c) Quelle est la variation d'entropie massique du gaz à la traversée de la tuyère ? On donne $\Delta s = c_p \ln \frac{T'_5}{T_4} - \frac{R}{M} \ln \frac{P'_5}{P_4}$.

Évaluer alors le travail des forces de frottement interne à la traversée de la tuyère. Quel est le nouveau rendement du cycle ?

Exercice T7.8 : Profil d'une tuyère [****]

Une tuyère est un dispositif sans pièces mobiles visant à convertir de l'énergie interne en énergie cinétique. Un gaz chaud et sous haute pression entre dans la tuyère ; au fur et à mesure qu'il avance, il se détend, se refroidit, et accélère. L'éjection du gaz produit une poussée qui accélère un avion, une fusée, ...

À une abscisse x fixée, on note $S(x), P(x), T(x), \mu(x), h(x)$ la section de la tuyère, la pression du gaz, sa température, sa masse volumique et son enthalpie massique. On note avec un indice 0 la valeur de ces grandeurs au début de la tuyère ($x = 0$).



1. Le débit massique est constant, noté D ; reliez D aux grandeurs du gaz à une abscisse x donnée.
2. On modélise le gaz par un GP de masse molaire M et de rapport isentropique γ . Rappeler l'expression de C_{pm} puis de c_p (massique).
3. La transformation subie par le gaz dans la tuyère est rapide, on la suppose adiabatique. À partir d'un bilan enthalpique, montrez qu'une autre quantité est conservée.
4. On souhaite que la transformation soit réversible. Sous cette hypothèse, quelle loi relie $P(x)$, $T(x)$ et γ ?
5. Différenciez (logarithmiquement ou pas, à vous de voir) les 3 expressions précédentes, ainsi que la loi du GP reliant la pression, la température et la masse volumique. En éliminant dP , $d\mu$ et dT , montrez que

$$\frac{dS}{S} = dv \left[\frac{v}{(\gamma - 1) c_p T} - \frac{1}{v} \right]$$

6. Quel doit être le signe de $\frac{dv}{dx}$? En déduire que la section $S(x)$ doit décroître tant que v est inférieur à une valeur v_{lim} à exprimer, puis croître. Vérifiez que $v_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\mu}}$. Que représente v_{lim} ?

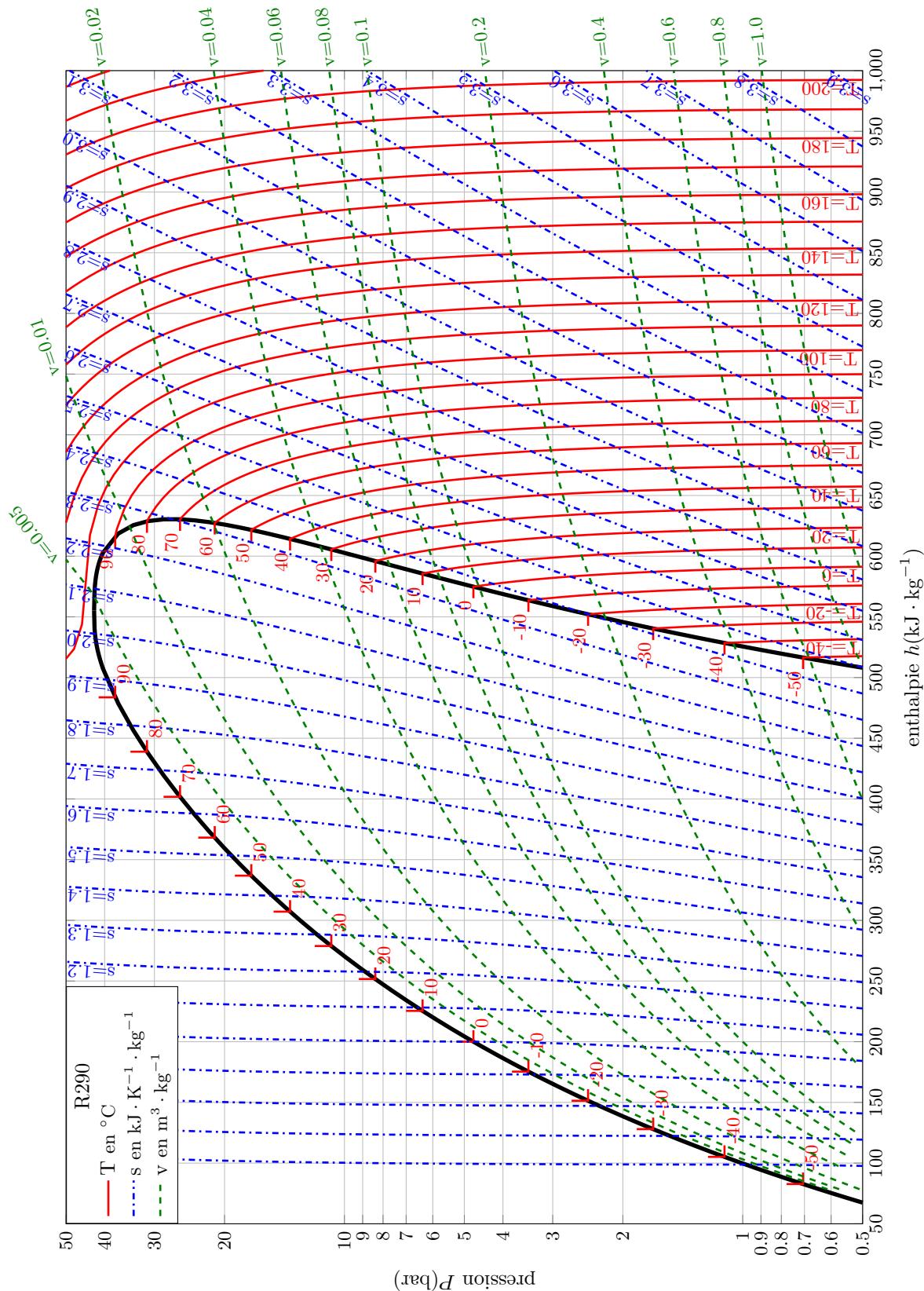


FIGURE T7.5 – Diagramme enthalpique du propane.

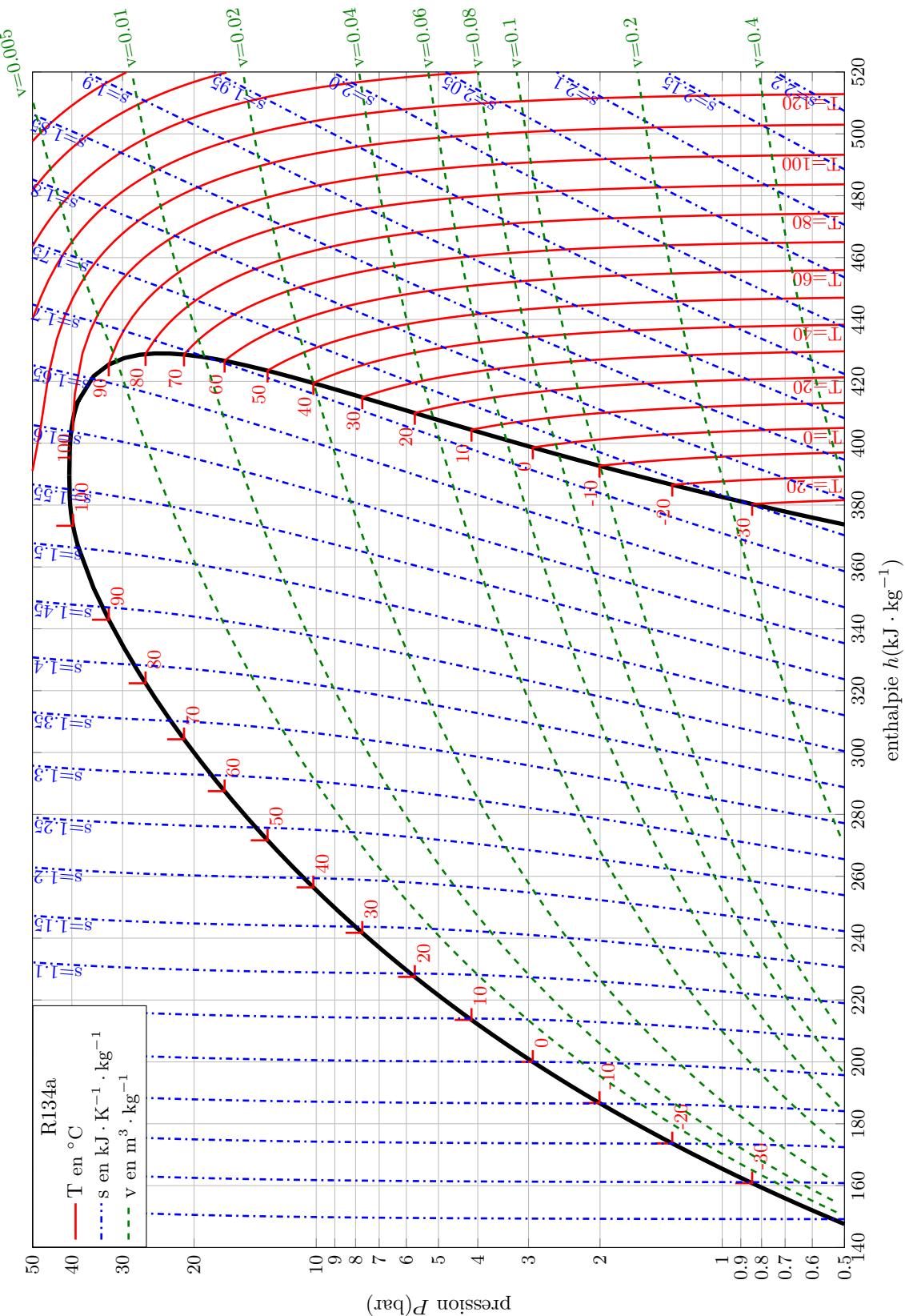


FIGURE T7.6 – Diagramme enthalpique du R134a

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Bilans énergétiques sur des systèmes en écoulement

Q1.(b)

$$\Delta h = c_p \Delta T = q$$

Q2.(d)

$$\mathcal{P}_{th} = q \cdot D_m$$

Q3.(c)

$$\left(\frac{1}{2}v^2 - 0\right) + c_p \Delta T = 0$$

Q4.(d)

$$\left(\frac{1}{2}v^2 + 0\right) - (0 + gh) + c_p \Delta T = 0$$

Q5.(a)

$$w' = \Delta \left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Q6.(a)

$$w' = \Delta \left(\frac{1}{2}v^2 + gh\right) \text{ et } D_m = \rho \cdot D_V$$

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice T7.1 : Turbine de barrage [*]

- $\mathcal{P} = D \left(gz - \frac{1}{2} w^2 - c_P \Delta T \right) = 950 \text{ kW}$

- Rendement : $\frac{\mathcal{P}}{Dgz} = 81\%$

- Le rendement complet vaut 69 %.

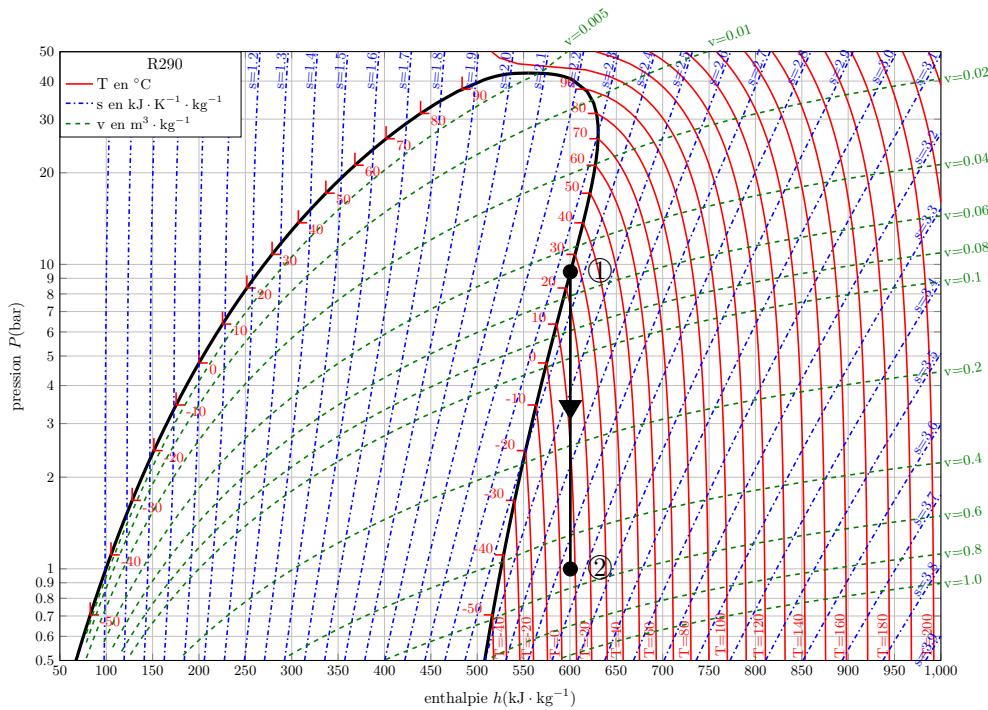
Réponses de l'exercice T7.2 : Chauffage d'un fluide en écoulement [*]

$$c_p = \frac{RI^2}{D_m(T_s - T_e)} = 0,75 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}.$$

Réponses de l'exercice T7.3 : Détente du gaz propane [**]

- À l'équilibre liquide/gaz sous $T_1 = 25^\circ\text{C}$, la pression vaut $p_1 = 9,5 \text{ bar}$.

- 2.

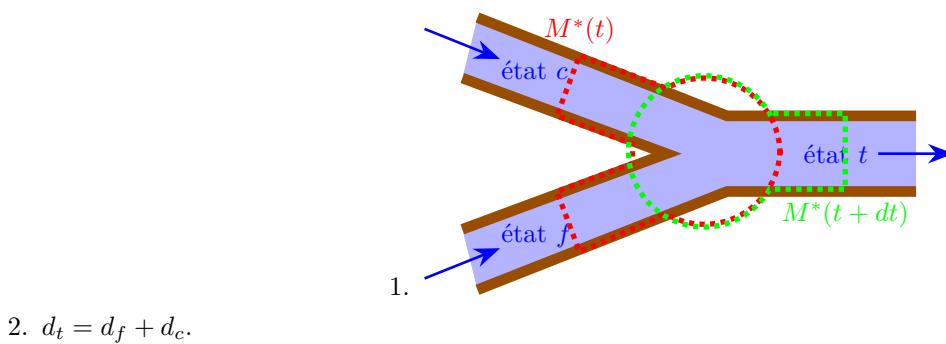


- $T_2 = 5^\circ\text{C}$

- $s_{cr} = 2,73 - 2,35 = 0,38 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$

- $l_v = 600 - 270 = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ soit une entropie $\frac{330000}{273+25} = 1107 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Réponses de l'exercice T7.4 : Mitigeur [**]



3. Il faut faire un raisonnement comme pour la démonstration de l'équation des machines, mais avec 2 morceaux en entrée, on le premier principe donne $d_t \cdot u_t - d_f \cdot u_f - d_c \cdot u_c = -P_t \cdot v_t \cdot d_t + P_f \cdot v_f \cdot d_f + P_c \cdot v_c \cdot d_c + P_{th}$ d'où $d_t h_t - d_f h_f - d_c h_c = P_{th}$.

$$\text{On en tire } c_p d_f (T_t - T_f) + c_p d_c (T_t - T_c) = P_{th}$$

$$4. d_c = d_t \frac{T_t - T_f}{T_c - T_f} = 2,9 \text{ kg/min et } d_f = d_t \frac{T_c - T_t}{T_c - T_f} = 5,1 \text{ kg/min}$$

$$5. P_{th} = c_p d_f (T_t - T_f) + c_p d_c (T_t - T_c) = -170 \text{ W}$$

$$6. \text{ Par le même genre de raisonnement : } c_p \left[d_c \ln \frac{T_t}{T_c} + d_f \ln \frac{T_t}{T_f} \right] = \frac{P_{th}}{T_{ext}} + \frac{\delta S_{cr}}{dt}$$

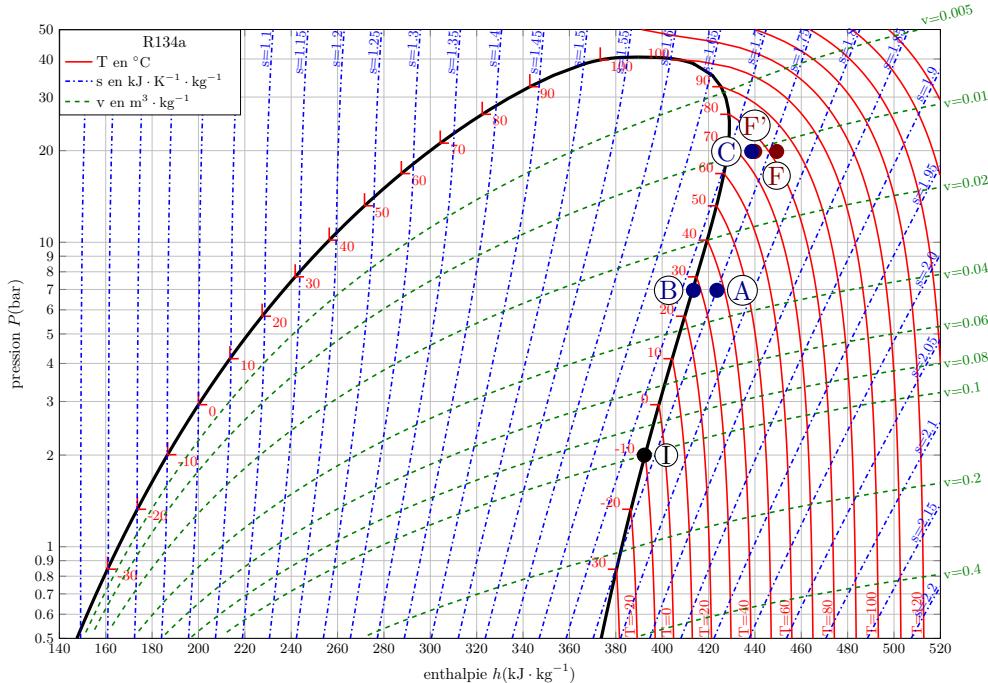
$$\text{Premier cas : } \frac{\delta S_{cr}}{dt} = c_p d_c \ln \frac{T_t}{T_c} + c_p d_f \ln \frac{T_t}{T_f} = 127 \text{ J/K/min : irréversible}$$

$$\text{Second cas : } \frac{\delta S_{cr}}{dt} = 128,1 \text{ J/K/min}$$

Réponses de l'exercice T7.5 : Compresseur [***]

1. Compression mono-étageée

(a)



- (b) $h_f = h_i + \frac{h_{f'} - h_i}{\eta_s} = 448 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $\frac{v_f}{v_i} = \frac{0,011}{0,10} = 11\%$ (ç'aurait été 10% pour un gaz parfait); $T_f = 83^\circ\text{C}$ et $T_{f'} = 75^\circ\text{C}$: l'irréversibilité est souvent due à des frottements internes, qui produisent une élévation de température.

- (c) Sans pertes thermiques, on a simplement $w' = h_f - h_i = 56 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

2. Compression multi-étageée

Les points sont en bleu sur le graphique précédent. On trouve $h_i = 392 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $h_a = 425 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $h_b = 413 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $h_c = 437 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ soit $w' = 45 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$: on gagne 20% (les mesures ne sont pas très précises). $T_c = 73^\circ\text{C}$.

Réponses de l'exercice T7.6 : Étude d'un réacteur à eau pressurisée [***]

1. Calcul des données manquantes

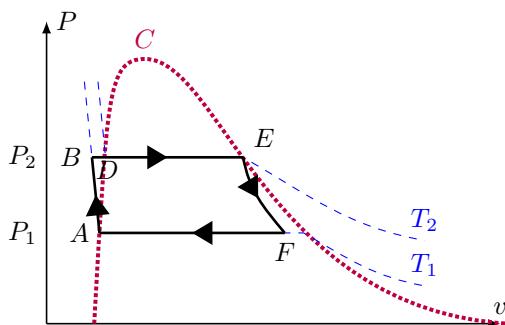
$$(a) s_l(573 \text{ K}) = 3,2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$(b) v_v(293 \text{ K}) = \frac{RT_1}{P_1 M} = 59 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$(c) \text{ On sait que } v_l(293 \text{ K}) = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

2. Diagramme de Clapeyron

(a)



(b) L'eau est un liquide très peu compressible.

3. Entropie

(a) L'évolution EF est adiabatique, et réversible, donc $s_F = s_E$ par le second principe.

$$(b) x = \frac{s_v(573\text{ K}) - s_l(293\text{ K})}{s_v(293\text{ K}) - s_l(293\text{ K})} = 0,68$$

4. On applique l'équation des machines, $w_a = 293\text{ K} = 1136\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

5. Rendement

(a) $q_{BE} = \Delta h_{BD} + \Delta h_{DE} = c(T_2 - T_1) + (h_v(573\text{ K}) - h_l(293\text{ K})) = 2770\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

$$(b) \text{On a alors } \eta = \frac{w_a}{q_{BE}} = 0,41$$

Dans cette définition, on néglige le travail fourni par la pompe au fluide. On ne dispose pas ici des données pour vérifier si cette approximation est justifiée.

(c) Le rendement maximal de Carnot vaut $\eta_{max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 0,49$. On est un peu en-dessous.

Réponses de l'exercice [T7.7](#) : Moteur à réaction(ESIM) [***]

Réponses de l'exercice [T7.8](#) : Profil d'une tuyère [****]

$$1. D = \mu(x).v(x).S(x)$$

$$2. C_{pm} \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \text{ et } c_p \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M}$$

$$3. c_p T(x) + \frac{1}{2} v(x)^2 = cst$$

$$4. P(x)^{1-\gamma} \cdot T(x)^\gamma = cst$$

$$5. \text{On a le système différentiel} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} + \frac{d\mu}{\mu} = 0 \\ c_p dT + v \cdot dv = 0 \\ (1 - \gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \end{array} \right.$$

En combinant, on trouve $\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} - \frac{v \cdot dv}{(\gamma - 1)c_p T} = 0$ ce qui correspond bien à la formule demandée.

6. Le but d'une tuyère est d'accélérer le gaz, donc $\frac{dv}{dx} > 0$. Cela implique que $\frac{dS}{dx}$ est du signe de $\frac{1}{v} \left[\frac{v^2}{v_{lim}^2} - 1 \right]$ avec $v_{lim} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\mu}}$. Autrement dit, la tuyère est convergente ($\frac{dS}{dx} < 0$) tant que l'écoulement est de vitesse inférieure à v_{lim} , puis elle devient divergente ($\frac{dS}{dx} > 0$). On peut montrer par un cours de mécanique des fluides que cette vitesse limite correspond à la vitesse du son dans l'air.

Champs magnétiques et courants

Cours

Nous avons déjà parlé du champ magnétique lors d'un chapitre précédent de mécanique portant sur les mouvements de particules chargées. Nous y avions vu qu'un champ magnétique exerce sur une particule chargée une force magnétique de Lorentz.

Or nous avons vu au début de l'année qu'un courant électrique est un déplacement de charges électriques. Donc un courant placé dans un champ magnétique va ressentir une force magnétique aussi. Mais il va falloir faire attention à une différence majeure : dans le cas d'un courant qui circule dans un conducteur, le mouvement des charges et le mouvement du conducteur ne sont pas identiques, contrairement au cas de la particule qui se déplace.

EM1.A. Généralités sur le champ magnétique

A.1. Propriétés du champ magnétique

On va commencer par rappeler quelques propriétés qu'on a déjà vues.

Propriété : Champ magnétique

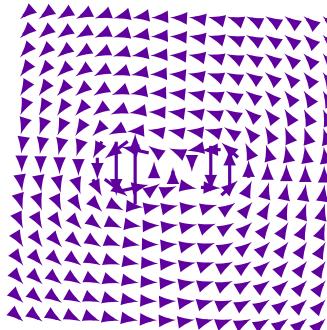
On admet qu'un tout point de l'espace il existe un champ vectoriel appelé **champ magnétique**, noté \vec{B} , qui se mesure en Teslas T. Ce champ est produit par des courants ou par des particules chargées en mouvement.

Remarque : Le Tesla est une unité très grande ; un champ d'1 T est très puissant. On utilise donc souvent le mT, mais on trouve aussi parfois le Gauss : $1 \text{ G} = 1 \times 10^{-4} \text{ T}$.

Force magnétique de Lorentz

Une particule de charge q se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} subit une force $\vec{F}_{magn} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ qui est toujours perpendiculaire à son mouvement, et qui ne travaille jamais.

Pour représenter un champ vectoriel comme un champ magnétique, on peut représenter une carte de champ, comme ci-contre, qui consiste à calculer en différents points d'un maillage le vecteur \vec{B} , puis à le représenter par une flèche. On voit alors apparaître, en suivant ces flèches, des sortes de lignes courbes qui se dessinent ; on voit aussi apparaître des chevauchements dus à la difficulté de choisir une échelle pour les flèches, dont la longueur varie sur ce schéma d'un facteur supérieur à 50. Il est en réalité plus pratique de travailler uniquement avec les lignes imaginaires : on ne tracera donc pas une carte de champ, mais une carte de lignes de champs.



Définition : Ligne de champ

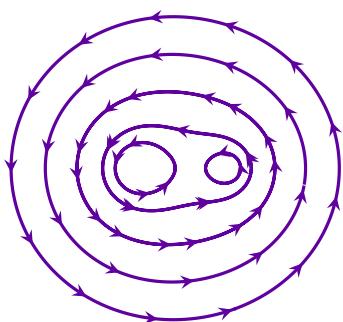
On représente un champ vectoriel par une carte de lignes de champs. Une ligne de champ est une courbe orientée qui, en tout point, est tangente au champ représenté.

La figure EM1.1 montre un exemple de lignes de champ créées par deux fils parallèles. On y voit aussi la visualisation expérimentale des lignes de champ à l'aide de limaille de fer.

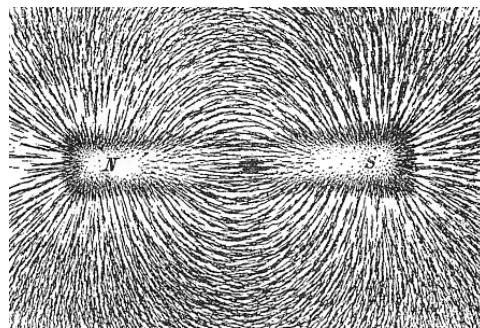
Propriété : Observation des lignes de champ magnétique

Si on saupoudre de la limaille de fer (petits morceaux de fer allongés obtenus en limant un morceau de fer) sur une feuille et qu'on applique un champ magnétique, les morceaux de fer s'alignent et font apparaître les lignes de champ magnétique.

Chaque champ vectoriel a des propriétés qui lui sont propres, et qui aident à lire une carte de lignes de champ. Le champ magnétique a une propriété fondamentale qui dérive d'une équation que vous verrez l'an prochain : l'équation de Maxwell-Thomson.



(a) Calcul théorique du champ créé par deux fils



(b) Observation à l'aide de limaille de fer des lignes de champ créées par un aimant droit. (Crédit : N.H.Black/Wikipedia)

FIGURE EM1.1 – Exemple de carte de lignes de champ magnétique.

Propriété : Lignes de champ et intensité du champ magnétique

L'intensité (ou la norme) du champ magnétique est reliée à la géométrie de ses lignes de champ :

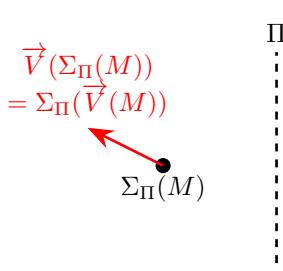
- lorsque les lignes de champ magnétique se resserrent, la norme du champ magnétique augmente
- lorsque les lignes de champ magnétique s'écartent, la norme du champ magnétique diminue
- lorsque les lignes de champ magnétique sont parallèles, la norme du champ magnétique est constante, le champ est uniforme

Enfin, on peut noter que les propriétés géométriques des courants se retrouvent dans le champ magnétique qu'elles créent. Cela concerne deux propriétés, les invariances et les symétries. On va dire un mot seulement des secondes. Si on considère un plan Π , alors on peut définir mathématiquement la symétrie par rapport à Π , notée Σ_Π . Cette symétrie peut laisser une figure inchangée : Π est alors un plan de symétrie de la figure. Dans le cas d'un champ vectoriel, comme le courant ou le champ magnétique, c'est un peu différent, il peut exister deux cas de figures.

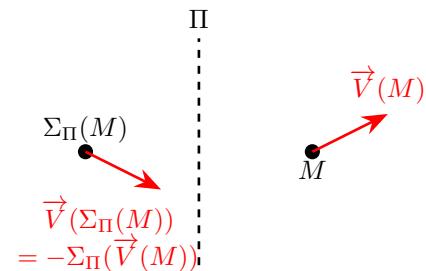
Définition : Plans de symétrie et d'antisymétrie

Soit \vec{V} un champ vectoriel, et Π un plan :

- on dit que Π est un plan de symétrie du champ \vec{V} si l'action de la symétrie Σ_Π laisse le champ inchangé ; autrement dit, pour tout point M , on a $\vec{V}(\Sigma_\Pi(M)) = \Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ (figure EM1.2(a))
- on dit que Π est un plan d'antisymétrie du champ \vec{V} si l'action de la symétrie Σ_Π donne l'opposé du champ initial ; autrement dit, pour tout point M , on a $\vec{V}(\Sigma_\Pi(M)) = -\Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ (figure EM1.2(b))



(a) Plan de symétrie



(b) Plan d'antisymétrie

FIGURE EM1.2 – Plans de symétrie et d'antisymétrie d'un champ vectoriel.

Pour un point appartenant à un plan de (anti)symétrie, cela a des conséquences :

Propriété : Champ vectoriel sur un plan d'(anti)symétrie

Soit \vec{V} un champ vectoriel, et Π un plan :

- si Π est un plan de symétrie de \vec{V} , alors pour tout point $M \in \Pi$, $\vec{V} \parallel \Pi$
- si Π est un plan d'antisymétrie de \vec{V} , alors pour tout point $M \in \Pi$, $\vec{V} \perp \Pi$

Démonstration

On le voit facilement sur la figure EM1.2 : si $M \in \Pi$ alors $\Sigma_\Pi(M) = M$ donc

- si Π est un plan de symétrie, $\vec{V}(M) = \Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ donc $\vec{V}(M)$ appartient au noyau de $\Sigma_\Pi - Id$ qui est le plan Π
- si Π est un plan d'antisymétrie, $\vec{V}(M) = -\Sigma_\Pi(\vec{V}(M))$ donc $\vec{V}(M)$ appartient au noyau de $\Sigma_\Pi + Id$ qui est la droite orthogonale à Π

On admet alors les propriétés de symétrie du champ magnétique :

Propriété : Symétries du champ magnétique

Soit Π un plan :

- si Π est un plan de symétrie des courants, alors c'est un plan d'antisymétrie du champ magnétique créé par ces courants ; en tout point de ce plan, $\vec{B} \perp \Pi$
- si Π est un plan d'antisymétrie des courants, alors c'est un plan de symétrie du champ magnétique créé par ces courants ; en tout point de ce plan, $\vec{B} \parallel \Pi$

Remarque : Cette seconde propriété se déduit de l'équation de Maxwell-Ampère que vous verrez l'année prochaine.

A.2. Champ magnétique créé par des courants

Il est bon de connaître les principales méthodes pour créer un champ magnétique, à l'aide de courants ou d'aimants permanents. Nous allons voir quelques géométries simples, en n'oubliant pas que le champ magnétique vérifie le principe de superposition :

Propriété : Principe de superposition

Pour déterminer le champ créé par plusieurs sources de champ (courants ou aimants), on peut simplement sommer le champ créé par chacune d'elles.

Fil rectiligne

Soit un fil rectiligne parcouru par un courant I . Tout plan contenant le fil est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} ; de même tout plan orthogonal au fil est plan d'antisymétrie des courants, donc plan de symétrie de \vec{B} , donc le champ magnétique est compris dans les plans orthogonaux au fil.

Propriété : Champ magnétique créé par un fil

Le champ s'enroule en cercles autour du fil ; il est proportionnel à I , inversement proportionnel à la distance r en coordonnées cylindriques ; sa valeur vaut $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$. Son sens est donné par la règle de la main droite : si on place le pouce de la main droite dans le sens du courant, l'enroulement des 4 autres doigts indique le sens de \vec{B} .

Remarque : Ce champ est très très faible : pour un fil parcouru par $1A$, à une distance de 10cm cela donne $B = 2 \times 10^{-6}\text{T}$. Pour avoir plus de champ magnétique, il faut mettre plusieurs fils dont les effets s'ajoutent : c'est ainsi qu'on va enrouler du fil pour former une bobine.

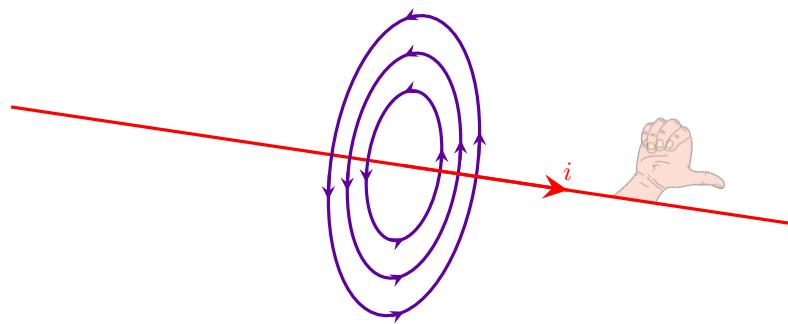


FIGURE EM1.3 – Champ magnétique créé par un fil rectiligne parcouru par un courant

Bobines

Définition : Spire et bobine

Une spire (de courant) est un circuit refermé (une boucle) parcouru par un courant ; elle ne fait qu'un seul tour.
Une bobine est un enroulement de plusieurs spires.

Le plan de la spire est plan de symétrie des courants, donc plan d'antisymétrie de \vec{B} , tandis que tous les plans contenant l'axe de la spire sont plans d'antisymétrie des courants, donc plans de symétrie de \vec{B} .

Propriété : Champ magnétique créé par une spire

Le champ traverse la spire selon la règle de la main droite : si on place la main de manière à ce que le courant tourne dans le même sens que l'enroulement des 4 doigts, alors le pouce indique la direction de \vec{B} . Il est proportionnel à I .

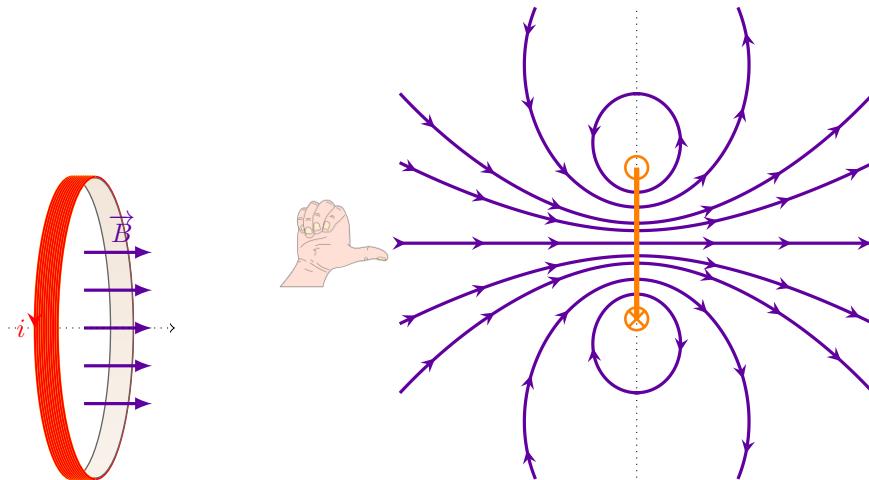


FIGURE EM1.4 – Champ magnétique créé par une spire circulaire ou par une bobine plate circulaire (coupe dans un plan médiateur de la spire).

Remarque : La figure EM1.4 montre le champ créé par une spire. On voit que le champ est maximal au centre de la spire, et décroît quand on s'éloigne. On peut montrer que le champ au centre vaut $\frac{\mu_0 I}{2R}$ ce qui est aussi faible que pour un fil. Mais si on effectue N tours, alors par principe de superposition, le champ au centre vaut $B = \frac{\mu_0 N I}{2R}$. Ainsi, en mettant beaucoup de tours, on peut avoir un champ plus fort. Mais le fil prend de la place. Tant que N n'est pas trop grand, on parle encore de «bobine plate», mais si on met trop de fil, la bobine devient épaisse et son champ est légèrement modifié par rapport à la spire plate.

Si on veut un champ très fort, il ne suffit pas de mettre beaucoup de tours : par exemple, pour une IRM, il faut un champ magnétique pouvant aller jusqu'à 7 T. En plus de faire beaucoup de spires, il faut faire passer un fort courant. Pour éviter de faire fondre les fils, on s'oriente alors vers des bobines supraconductrices.

Le champ magnétique créé par une bobine n'est absolument pas uniforme. Or on a souvent besoin de champs magnétiques uniformes. Il existe alors deux géométries privilégiées :

- les bobines de Helmholtz sont un dispositif simple constitué de deux bobines de même rayon R , parcourues par le même courant I , écartées d'une distance R . Une simulation du champ magnétique créé (figure EM1.5) montre alors une zone de champ uniforme dans la zone à l'intérieur des bobines.
- le solénoïde est une bobine très longue, avec des spires régulièrement espacées. Une simulation du champ magnétique créé (figure EM1.6) montre alors que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme ; on admettra qu'un vaut $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$ avec N le nombre de spires et ℓ la longueur du solénoïde.

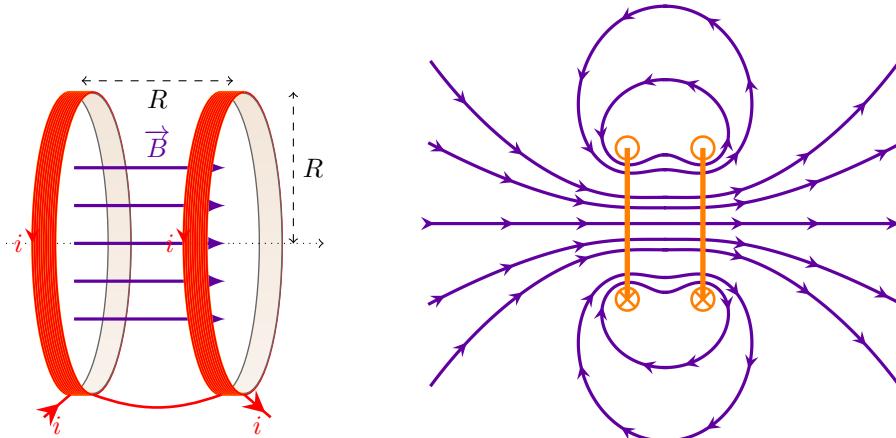


FIGURE EM1.5 – Champ magnétique créé par des bobines de Helmholtz.

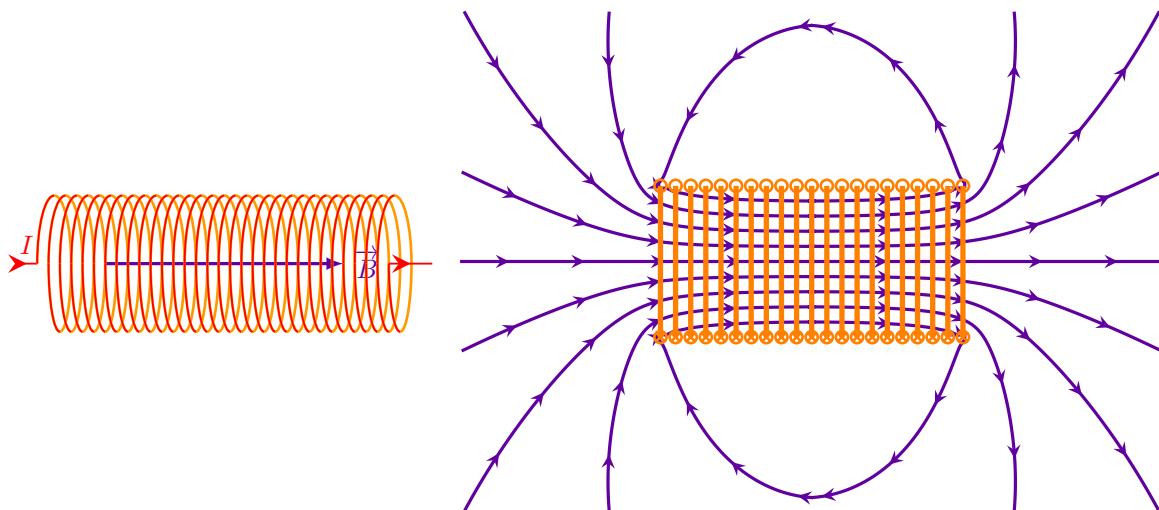


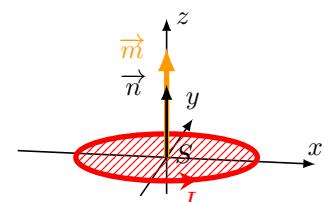
FIGURE EM1.6 – Champ magnétique créé par un solénoïde.

Aimants permanents

Définition : Dipole magnétique

Une spire de courant vue à grande distance est appelée un dipôle magnétique. On lui associe un moment dipolaire magnétique $\vec{m} = S \cdot i \cdot \vec{n}$ où S représente sa surface, i le courant qui circule, et \vec{n} le vecteur unitaire normal à la surface. \vec{m} se mesure en $\text{A} \cdot \text{m}^2$ ou en $\text{J} \cdot \text{T}^{-1}$.

On admet que le champ créé à grande distance ne dépend que de \vec{m} et non pas de la forme de la spire, et que sa norme décroît comme $1/r^3$. La carte de champ magnétique est représentée sur la figure EM1.7.



Remarque : Si le circuit est constitué de N spires, le moment magnétique est multiplié par N .

Or à l'échelle atomique, il existe deux types de moments dipolaires magnétiques :

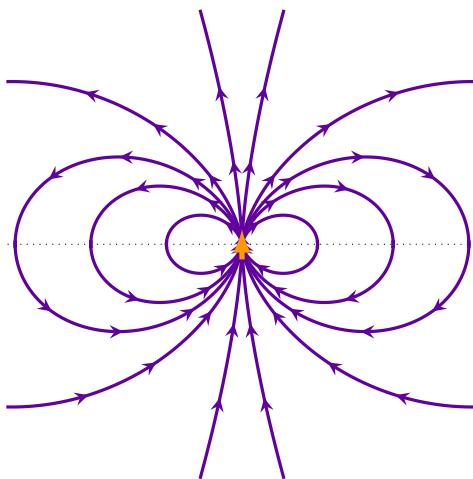


FIGURE EM1.7 – Champ magnétique créé par un dipôle.

- les électrons qui tournent autour des noyaux des atomes créent un **moment dipolaire orbital**. On peut l'évaluer par un modèle classique d'un atome d'hydrogène formé d'un noyau fixe de charge $+e$ autour duquel tourne un électron de charge $-e$ et de masse m_e . Le moment cinétique de l'électron vaut $L = m_e \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}$ en coordonnées cylindriques. Or l'électron tourne autour du noyau avec une période $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$, ce qui correspond à une intensité $i = \frac{-e}{T} = \frac{-e\dot{\theta}}{2\pi}$ soit un moment dipolaire magnétique $m = \pi r^2 i = \frac{-e\dot{\theta}r^2}{2}$. Ainsi, on voit que $m = \frac{-e}{2m_e} L$. Or selon la théorie quantique, le moment cinétique d'un atome d'hydrogène est quantifié et vaut un multiple entier de \hbar . Donc le moment magnétique orbital vaut un multiple entier de $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ appelé **magnéton de Bohr**.
- les électrons tournent sur eux-mêmes : c'est le **spin**, qui se traduit par un moment cinétique $S = \pm \frac{\hbar}{2}$. Là encore, le moment magnétique est relié au moment cinétique, mais avec un facteur 2 : $m = \frac{-e}{m_e} S$ ce qui redonne le magnéton de Bohr : c'est le **moment dipolaire de spin**.

Ces moments magnétiques sont importants : une mole de magnéton de Bohr correspond à un moment magnétique $m = 5,6 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ qui est équivalent à un courant de $5,6 \text{ A}$ tournant autour d'une surface de 1 m^2 .

Dans la plupart des matériaux, on n'observe aucun effet magnétique. En effet, comme vous l'avez vu en chimie, les électrons occupent les états électroniques par paires de spins opposés : leurs moments magnétiques s'annulent alors. Il en va de même pour le magnétisme orbital. Mais pour les éléments avec des couches *d* ou *f* à demi-pleines, ce n'est pas le cas, et des effets magnétiques apparaissent sur le chrome, manganèse, fer, cobalt, nickel par exemple pour la couche 3 ; sur la couche 4, ce sont surtout les terres rares (lanthanides) qui ont des effets magnétiques très forts.

À l'échelle microscopique, ces éléments ont donc des moments magnétiques non nuls. Mais l'agitation thermique a tendance à les orienter dans tous les sens, ce qui fait qu'un morceau de fer quelconque par exemple ne produit pas de champ magnétique. Mais si on chauffe un morceau de fer au-dessus de sa **température de Curie** (770°C), alors un champ magnétique très faible suffit à aligner tous les moments dipolaires dans le même sens. On le refroidit ensuite, les moments magnétiques se figent tous dans la même direction, et on a obtenu un aimant.

Définition : Aimant

Un aimant est un matériau possédant un moment dipolaire macroscopique non nul. Il est caractérisé par son **aimantation** M , qui représente le moment dipolaire par unité de volume, en $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$.

Un aimant possède un pôle Nord (par où sortent les lignes de champ) et un pôle Sud (par où rentrent les lignes de champ).

Si on approche deux aimants, les pôles identiques se repoussent tandis que les pôles opposés s'attirent.

Remarque : On admettra que $\mu_0 M$ est homogène à un champ magnétique, il donne l'ordre de grandeur du champ magnétique créé au voisinage de l'aimant. Il vaut quelques dixièmes de Tesla pour des aimants en ferrite, plus d'un Tesla pour un aimant néodyme fer bore.

Remarque : Le champ magnétique terrestre est dû à la présence en son centre d'un noyau de fer parcouru par des courants très puissants, qui créent un champ magnétique approximativement dipolaire, avec le pôle sud magnétique au pôle nord géographique, et vice-versa (figure EM1.9). La valeur du champ magnétique en surface est de $47 \mu\text{T}$ au centre de la France.

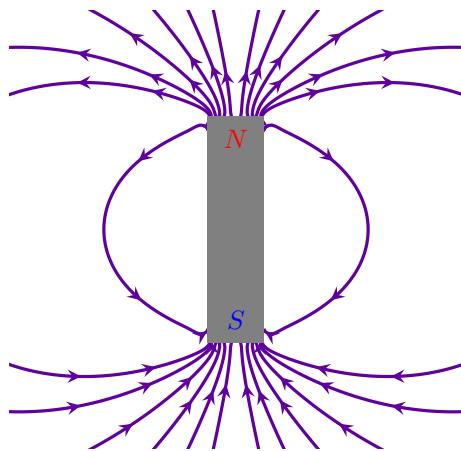


FIGURE EM1.8 – Champ magnétique créé par un aimant droit

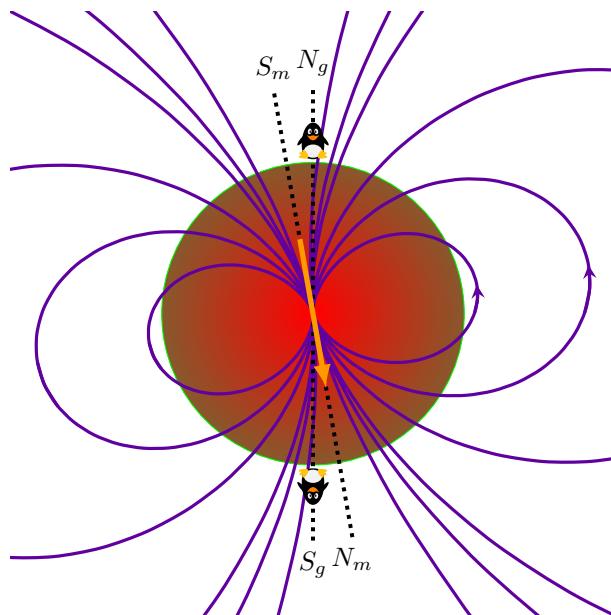


FIGURE EM1.9 – Champ magnétique terrestre.

EM1.B. Action d'un champ magnétique sur un courant

B.1. Force de Laplace

Le champ magnétique créé par un courant est faible ; réciproquement, l'effet d'un champ magnétique sur un courant est lui aussi faible. Pour le mettre en évidence, l'idéal est d'utiliser un dispositif particulier où un conducteur peut se déplacer librement en roulant sur les autres : le rail de Laplace, décrit sur la figure EM1.10. Dans cette expérience, on alimente avec un générateur de courant pouvant débiter plusieurs Ampères, un circuit constitué uniquement de fils de cuivre de faible résistance. Mais l'un des fils est en fait un tube de cuivre qui peut rouler sur les autres tout en maintenant le contact électrique. Ainsi, ce conducteur peut bouger sous l'effet d'une force assez faible.

Lorsqu'on place ce conducteur entre les pôles d'un aimant en U (qui crée un champ vertical de N vers S), on constate que, lorsqu'un courant circule, le tube se déplace perpendiculairement à la fois à la direction du courant et à celle du champ magnétique. De plus, sur la figure EM1.10, on voit qu'on peut inverser le sens du mouvement :

- en inversant le sens du courant
- en inversant le sens du champ magnétique

Ces résultats expérimentaux peuvent être expliqués à l'aide de la force de Laplace :

FIGURE EM1.10 – Expérience du rail de Laplace.

Propriété : Force de Laplace

Sur une portion de conducteur \vec{dl} parcourue par un courant i , soumise à une force \vec{B} , s'exerce une force $d\vec{F} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$.

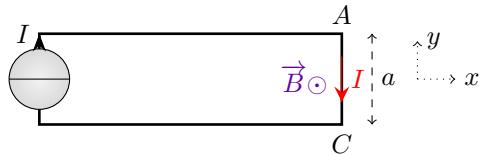
Sur un fil AC parcouru par i et soumis à un champ \vec{B} s'exerce une force $\vec{F} = \int_A^C i\vec{dl} \wedge \vec{B}$; si le champ est uniforme alors $\vec{F} = i\vec{AC} \wedge \vec{B}$.

Remarque : Cette année, on se contentera le plus souvent de champs uniformes et la forme globale sera la plus utilisée.

Exemple : Force sur le rail de Laplace

À connaître

On modélise l'expérience du rail de Laplace vue de dessus :



Exprimez la force de Laplace sur AC . AN pour $B = 0,1T$, $I = 6A$ et $a = 6cm$.

La portion de conducteur considérée est AC avec $\vec{AC} = -ae_y$, parcourue par I , dans un champ magnétique $\vec{B} = Be_z$. La force de Laplace qui s'exerce dessus est $\vec{F} = I \cdot (-ae_y) \wedge Be_z = -IaBe_x$.

On trouve $F = 36mN$: c'est très faible.

Propriété : Point d'application de la force de Laplace

Si un conducteur **rectiligne** AC parcouru par un courant I est plongé dans un champ magnétique \vec{B} **uniforme**, alors tout se passe comme si la force de Laplace $I\vec{AC} \wedge \vec{B}$ s'appliquait au point situé au milieu du segment $[AC]$.

Démonstration

Cette démonstration n'est pas à connaître, il faut seulement retenir la propriété.

On prend l'axe e_x parallèle à \vec{AC} ; on note $a = AC$ et H le milieu de $[AC]$; on note aussi $\vec{B} = B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z$.

Soit P un point situé sur le fil entre A et C , repéré par $\vec{HP} = xe_x$ avec $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$. Le petit morceau $\vec{dl} = dx e_x$ autour de P subit une force de Laplace $d\vec{F} = I \cdot dx e_x \wedge \vec{B}$ qui a un moment par rapport à l'origine O qui vaut $d\vec{\Gamma} = \vec{OP} \wedge d\vec{F}$ (on évite d'utiliser la notation \vec{M} pour les moments de forces, pour ne pas confondre avec les moments magnétiques). Le moment total par rapport à O vaut donc

$$\begin{aligned}
 \vec{\Gamma} &= \int_A^C d\vec{\Gamma} = \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{OP} \wedge (I.dx \vec{e}_x \wedge \vec{B}) \\
 &= \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{OH} \wedge (I.dx \vec{e}_x \wedge \vec{B}) + \int_{-a/2}^{+a/2} \overrightarrow{HP} \wedge (I.dx \vec{e}_x \wedge \vec{B}) \text{ (relation de Chasles)} \\
 &= \overrightarrow{OH} \wedge \left(\int_{-a/2}^{+a/2} I.dx \vec{e}_x \wedge \vec{B} \right) + \int_{-a/2}^{+a/2} x \vec{e}_x \wedge (I.dx.B_y \vec{e}_z - I.dx.B_z \vec{e}_y) \\
 &= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap} + I \int_{-a/2}^{+a/2} x.dx (-B_y \vec{e}_y - B_z \vec{e}_z) \\
 &= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap} + I \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a/2}^{+a/2} (-B_y \vec{e}_y - B_z \vec{e}_z) \\
 &= \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}_{Lap}
 \end{aligned}$$

La force de Laplace ressemble à celle de Lorentz, pourtant elle est différente. En particulier, la force magnétique de Lorentz ne travaille jamais, alors que la force de Laplace travaille.

Définition : Flux du champ magnétique à travers un circuit

Soit un circuit fermé orienté, de surface S et de normale \vec{n} . Le flux de \vec{B} à travers ce circuit est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} . dS$; il caractérise la «quantité de champ \vec{B} qui traverse le circuit».
Si \vec{B} est uniforme, l'expression se simplifie : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S$.

Il faut imaginer le flux à travers un circuit comme si le circuit était une épuisette qui essayait d'attraper du champ magnétique. Sur la figure EM1.11, sur le premier schéma, on attrape du champ ; sur le second, un peu moins, et sur le troisième plus du tout.

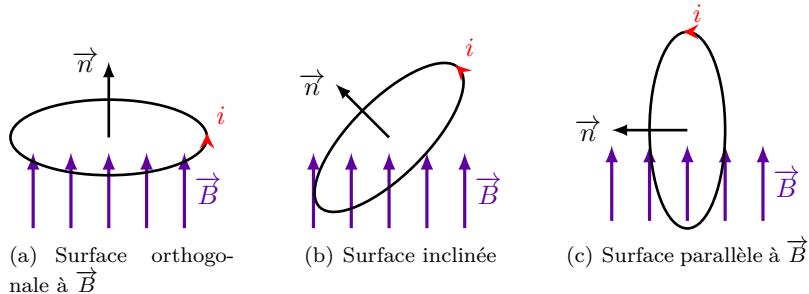


FIGURE EM1.11 – Flux de \vec{B} à travers une surface.

Remarque : C'est le courant qui oriente le circuit et donne le sens du vecteur \vec{n} , par la règle de la main droite.

Remarque : Le flux se mesure en $T \cdot m^2$ ou en Weber (Wb).

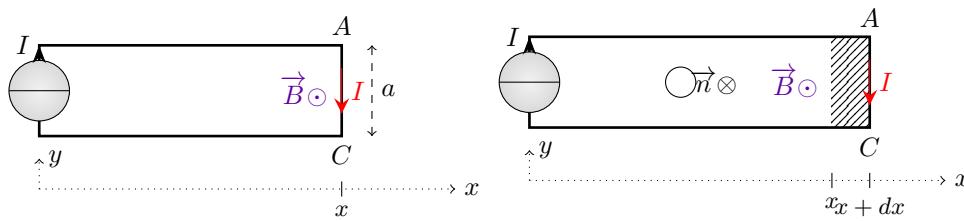
Remarque : Si le circuit est constitué de N spires, le flux est multiplié par N .

Propriété : Puissance des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit fermé

Soit un circuit fermé orienté placé dans un champ magnétique **constant**. Soit Φ le flux de \vec{B} à travers le circuit. Alors la puissance des forces de Laplace s'exerçant sur le circuit vaut $\mathcal{P}_{Lap} = i \frac{d\Phi}{dt}$

Démonstration

On va démontrer ce résultat dans le cas du rail de Laplace, en faisant un bilan entre t et $t + dt$.



On a déjà montré que la force de Laplace s'écrit $\vec{F} = -Ia\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = -IaB\vec{e}_x$. Entre t et $t + dt$, si le rail s'est déplacé de dx , le travail vaut $\delta W = -IaB \cdot dx$ donc la puissance de la force vaut $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = -IaB\dot{x}$.

Or entre l'instant t et l'instant $t + dt$, le circuit a gagné la surface hachurée, ce qui correspond à un flux gagné $d\Phi = -B \times \text{surface hachurée} = -B.a.dx$; pourquoi le signe $-$? car le circuit est orienté par I , qui tourne ici dans le sens horaire, donc le vecteur normal \vec{n} est rentrant, opposé à \vec{B} . On en déduit que $\frac{d\Phi}{dt} = -aB\dot{x}$.

On vérifie donc bien que $\mathcal{P} = I \cdot \frac{d\Phi}{dt}$.

Remarque : Pour le moment, cette propriété ne sert pas beaucoup, mais le flux sera très important dans le chapitre suivant.

B.2. Action d'un champ uniforme sur un circuit fermé

Les circuits électriques sont fermés pour que le courant y circule. Dans certains cas, le champ magnétique qui s'y applique n'est pas uniforme; par exemple dans le cas du rail de Laplace, l'aimant ne couvre pas tout le circuit; néanmoins il existe de nombreux cas où le circuit fermé baigne entièrement dans un champ magnétique à peu près uniforme : c'est le cas des dipôles, mais aussi des moteurs électriques tournants.

Remarque : La définition du moment magnétique $\vec{m} = i.S.\vec{n}$ fonctionne pour tout circuit fermé plan, même s'il est de grande taille. Si on a une bobine avec N tours, il suffit de multiplier le moment magnétique d'un spire par N .

Propriété : Action d'un champ magnétique uniforme sur un moment magnétique

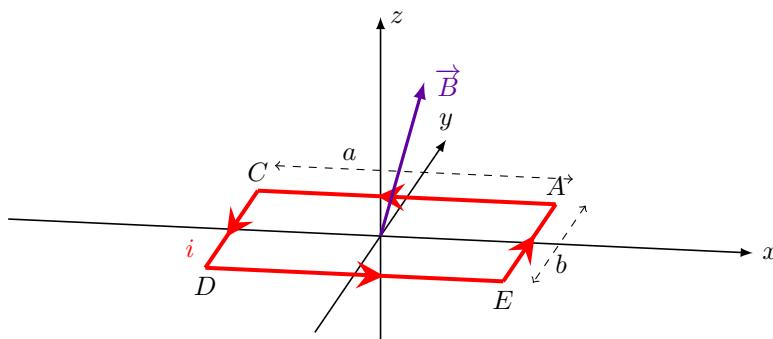
Si on plonge un circuit fermé de moment magnétique \vec{m} dans un champ magnétique uniforme \vec{B} , alors le circuit (pris dans son ensemble) subit :

- une force de Laplace totale nulle : $\vec{F}_{Lap} = \vec{0}$
- un couple de moment $\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

Démonstration

On va faire le calcul sur le cas d'une spire rectangulaire de dimensions $a \times b$ comme sur le schéma ci-dessous.

Pour avoir la force qui s'applique sur le circuit, on somme les forces sur chaque côté : $\vec{F}_{Lap} = \vec{F}_{\rightarrow AC} + \vec{F}_{\rightarrow CD} + \vec{F}_{\rightarrow DE} + \vec{F}_{\rightarrow EA} = i\vec{AC} \wedge \vec{B} + i\vec{CD} \wedge \vec{B} + i\vec{DE} \wedge \vec{B} + i\vec{EA} \wedge \vec{B} = i(\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EA}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$.



On procède de même pour le calcul du moment. On a vu précédemment que, dans un champ magnétique uniforme, la force de Laplace s'applique au milieu d'un segment rectiligne. On l'applique aux 4 segments, en notant $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$:

$$\vec{\Gamma}_{\rightarrow AC} = \frac{b}{2} \vec{e}_y \wedge (-i.a \vec{e}_x \wedge \vec{B}) = \frac{b}{2} \vec{e}_y \wedge (-i.a.B_y \vec{e}_z + i.a.B_z \vec{e}_x) = -\frac{iab}{2} B_y \vec{e}_x$$

$$\vec{\Gamma}_{\rightarrow CD} = -\frac{a}{2} \vec{e}_x \wedge (-i.b \vec{e}_y \wedge \vec{B}) = -\frac{a}{2} \vec{e}_x \wedge (i.b.B_x \vec{e}_z - i.b.B_z \vec{e}_x) = \frac{iab}{2} B_x \vec{e}_y$$

$$\vec{\Gamma}_{\rightarrow DE} = -\frac{b}{2} \vec{e}_y \wedge (i.a \vec{e}_x \wedge \vec{B}) = -\frac{b}{2} \vec{e}_y \wedge (i.a.B_y \vec{e}_z - i.a.B_z \vec{e}_x) = -\frac{iab}{2} B_y \vec{e}_x$$

$$\vec{\Gamma}_{\rightarrow EA} = \frac{a}{2} \vec{e}_x \wedge (i.b \vec{e}_y \wedge \vec{B}) = \frac{a}{2} \vec{e}_x \wedge (-i.b.B_x \vec{e}_z + i.b.B_z \vec{e}_x) = \frac{iab}{2} B_x \vec{e}_y$$

On somme : $\vec{\Gamma} = i.a.b. (B_x \vec{e}_y - B_y \vec{e}_x)$.

Or $\vec{m} = i.a.b.\vec{e}_z$ donc $\vec{m} \wedge \vec{B} = i.a.b.\vec{e}_z \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) = i.a.b. (B_x \vec{e}_y - B_y \vec{e}_x)$.

Remarque : Ce couple a un moment nul lorsque $\vec{m} \parallel \vec{B}$: c'est la position d'équilibre, qui est atteinte à ce moment-là. Une étude plus précise permettrait de montrer que le moment magnétique \vec{m} tend à s'aligner parallèlement à \vec{B} et dans la même direction.



C'est ce couple qui oriente une boussole vers le nord. C'est ce même couple qui oriente la limaille de fer selon les lignes de champ. Et c'est surtout ce couple qui va permettre de construire des moteurs tournants.

Propriété : Énergie potentielle

On admet qu'un moment magnétique \vec{m} placé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme possède une énergie potentielle $F_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

B.3. Exemple : moteur synchrone

On a vu que la force de Laplace tend à faire tourner un circuit fermé de manière à ce qu'il soit orthogonal au champ magnétique (c'est-à-dire \vec{n} parallèle à \vec{B}). Si on arrive à faire tourner le champ magnétique, alors le circuit va essayer de le suivre et va se mettre à tourner : c'est le principe du moteur synchrone.

Comment créer un champ tournant ? Un champ magnétique de norme B_0 tournant à la vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$ dans le plan Oxy a pour coordonnées $\vec{B} = \begin{vmatrix} B_0 \cos(\omega t) \\ B_0 \sin(\omega t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_0 \cos(\omega t) \\ B_0 \cos(\omega t - \pi/2) \end{vmatrix}$. On peut donc le créer avec 2 bobines placées perpendiculairement, l'une d'axe Ox , l'autre d'axe Oy , et traversées par des courants déphasés de $\pm \frac{\pi}{2}$ (fig. EM1.12).

Néanmoins, le champ créé n'est pas uniforme, et cela va créer des vibrations du moteur. On préfère donc une structure à 3 bobines en triphasé, c'est-à-dire orientées à $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ l'une par rapport à l'autre et déphasées de $\frac{2\pi}{3}$.

Calcul : Champ créé par 3 bobines alimentées en triphasé

Notons $\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ le champ magnétique créé par la bobine 1.

La bobine 2 crée un champ déphasé de $\frac{2\pi}{3}$ et incliné du même angle, donc en projetant on obtient

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= B_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \left[-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right] = B_0 \left[-\frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega t \right] \left[-\frac{1}{2} \vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right] \\ &= B_0 \left[\frac{1}{4} \cos \omega t + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \omega t \right] \vec{e}_x + B_0 \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \omega t + \frac{3}{4} \sin \omega t \right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$\text{De même la bobine 3 crée un champ } \vec{B}_3 = B_0 \cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \left[-\frac{1}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y \right]$$

$$= B_0 \left[\frac{1}{4} \cos \omega t - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \omega t \right] \vec{e}_x + B_0 \left[-\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \omega t + \frac{3}{4} \sin \omega t \right] \vec{e}_y$$

(a) Création d'un champ tournant avec 2 bobines

(b) Création d'un champ tournant avec 3 bobines

FIGURE EM1.12 – Création d'un champ tournant.

Quand on fait la somme des trois champs, certains termes s'éliminent et il reste

$$\vec{B} = \frac{3}{2} B_0 (\cos(\omega t) \vec{e}_x + \sin(\omega t) \vec{e}_y)$$

Le principe d'un moteur synchrone est alors simple : on place un moment magnétique \vec{m} (soit un aimant permanent, soit une bobine alimentée en courant) appelé **rotor** dans une zone où on crée un champ magnétique tournant à l'aide d'un **stator**. Le moment magnétique cherche à s'aligner sur \vec{B} (figure EM1.13). Si on arrive à le lancer en rotation à la même vitesse que \vec{B} , alors il va tourner à la poursuite de \vec{B} en faisant un angle qu'on va noter $\theta = (\vec{m}, \vec{B})$. Alors le couple exercé par le champ magnétique sur \vec{m} a pour norme $\|\vec{m} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \sin \theta$.

La valeur du couple Γ va dépendre de la charge du moteur, c'est-à-dire du couple qu'il doit fournir. Si on le fait tourner à vide, il n'y a que les frottements à compenser, et l'angle θ sera presque nul. Si on fait faire un effort au moteur, on lui demande plus de couple, et θ augmente. Le couple maximal est atteint pour $\theta = 90^\circ$ et vaut $\Gamma_{max} = \|\vec{m}\| \cdot \|\vec{B}\|$; au-delà, le moteur décroche.

Les moteurs synchrones sont très puissants, mais il faut les démarrer. On peut le faire, soit avec un moteur asynchrone (qu'on verra plus tard) placé sur le même axe, soit avec des moteurs autosynchrones dans lesquels la vitesse de rotation du champ magnétique augmente lentement au démarrage. C'est ce genre moteurs qui équipe par exemple les bogies de TGV de dernière génération (les AGV).

Le principe décrit ici est celui d'un rotor à 2 pôles, mais on peut construire des moteurs avec plus de pôles, comme sur la figure EM1.14.

FIGURE EM1.13 – Principe d'un moteur synchrone.

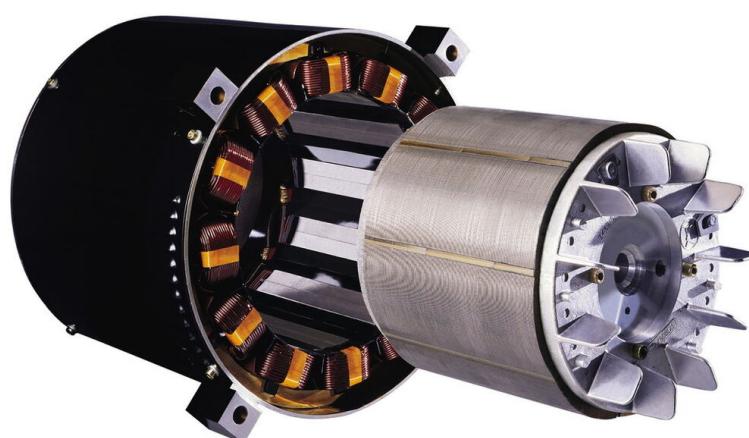


FIGURE EM1.14 – Rotor et stator d'un moteur synchrone multipôles. (Crédit : Leroy-Somer)

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Champ magnétique	
Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique.	<p>Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible et l'emplacement des sources.</p> <p>Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue.</p> <p>Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme.</p> <p>Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.</p>
Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant.	Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.
Moment magnétique.	<p>Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane.</p> <p>Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant.</p> <p>Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.</p>
Actions d'un champ magnétique	
Densité linéique de la force de Laplace dans le Différencier le champ magnétique extérieur subi du cas d'un élément de courant filiforme.	Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	Établir et exploiter l'expression de la résultante et de la puissance des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.
Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.

Champs magnétiques et courants

QCMs

réponses page 927



Q1.

Les lignes de champ magnétique créé par un fil ont la forme :

Q2.

La champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde :

Q3.

Un moment magnétique a pour unité :

Q4.

Le champ magnétique terrestre vaut, en France :

- (a). $47 \mu\text{T}$ (b). $4,7 \text{T}$
 (c). $4,7 \mu\text{T}$ (d). $4,7 \text{mT}$

Q5.

La force de Lorentz et la force de Laplace sont la même chose :

Q6.

La force de Laplace exercée par un champ magnétique uniforme peut déplacer un circuit fermé :

Champs magnétiques et courants

Exercices

réponses page 928

Exercice EM1.1 : Force entre deux fils parallèles [*]

Deux fils très longs parallèles, séparés par $d = 1\text{ cm}$, sont parcourus tous les deux par un courant de 1 A de même sens.

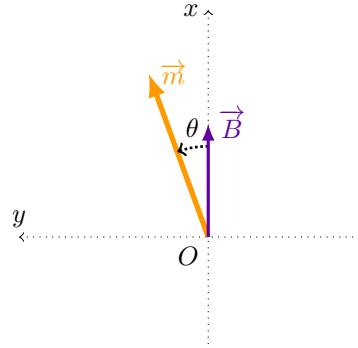
On prend des coordonnées cylindriques, l'axe étant le premier fil, et I orienté suivant \vec{e}_z .

- À l'aide de la formule vue en cours, calculez le champ magnétique créé par le premier fil au niveau du second.
- Déduisez-en la norme de la force exercée sur 1 m du second fil ; commentez.
- Dans les installations électriques classiques, le courant dans deux fils voisins est plutôt en sens opposé. Que peut-il se passer en cas de court-circuit ?

Exercice EM1.2 : Oscillations d'une boussole [**]

Une boussole est un aimant qui est libre de tourner autour d'un axe vertical. Sous l'effet du champ magnétique terrestre, elle s'aligne avec le Nord. Néanmoins, avant d'atteindre cette position, on la voit osciller autour de sa position d'équilibre.

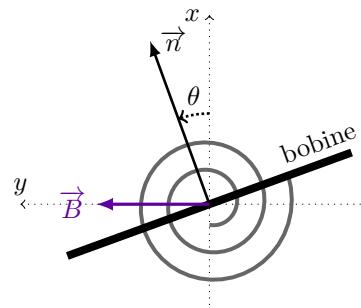
On pose une base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z vertical vers le haut et \vec{e}_x horizontal vers le nord. Le champ magnétique s'écrit alors $\vec{B} = B_h \vec{e}_x + B_v \vec{e}_z$. On repère par θ l'angle entre la boussole et l'axe \vec{e}_x . On note $M = \|\vec{m}\|$ la norme du moment magnétique de la boussole.



- Exprimez le moment par rapport à l'axe Oz du couple exercé par le champ magnétique sur la boussole, en fonction de θ et des constantes.
- Soit I le moment d'inertie de la boussole par rapport à cet axe. Déterminer l'ED vérifiée par θ , et exprimer la période des petites oscillations en fonction de M , B_h et I .

Exercice EM1.3 : Galvanomètre [**]

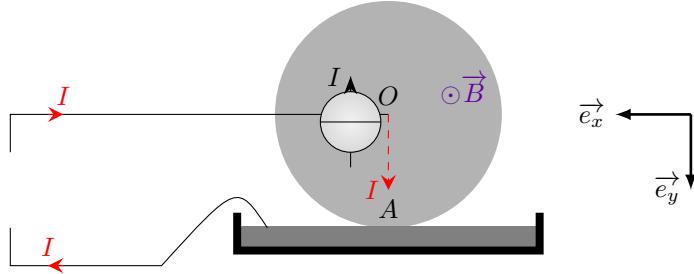
Le galvanomètre, inventé en 1820, est le premier type d'ampèremètre qui a été construit. Il est constitué d'une bobine de surface S et de N tours, dans lequel circule le courant i qu'on veut mesurer. Cette bobine peut tourner autour d'un axe horizontal Oz passant par son centre de masse ; on note J son moment d'inertie. L'axe est soutenu par un ressort spiral qui cherche à ramener la bobine à la position $\theta = 0^\circ$ en exerçant un couple de rappel $\Gamma_r = -C\cdot\theta$ avec C une constante ; la rotation produit aussi un couple de frottements $-f\cdot\dot{\theta}$. Le tout est placé dans l'entrefer d'un aimant produisant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$.



- Exprimez le moment magnétique \vec{m} de la bobine dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .
- Déduisez-en le moment du couple exercé par la force de Laplace.
- En appliquant le TMC, déterminez l'équation différentielle vérifiée par θ . Quelle équation vérifie θ à l'équilibre ? Comment se simplifie cette expression pour de petits angles ? commentez.
- On construit un galvanomètre tel que $S = 8\text{ cm}^2$, $N = 50$, $B = 0,1\text{ T}$ et $C = 3\mu\text{N}\cdot\text{m}$. Si l'angle d'équilibre vaut 1° , que vaut i ? Commentez la sensibilité de cet instrument.

Exercice EM1.4 : Roue de Barlow [**]

La roue de Barlow est un moteur électrique rudimentaire. Une roue métallique de rayon R est libre de tourner autour de son axe. Sa partie inférieure trempe dans du mercure, qui est un métal liquide. On fait alors circuler un courant I dans le disque : il entre par l'axe et ressort par le mercure. On place un aimant qui englobe le disque ; on considérera pour simplifier que le champ \vec{B} est uniforme sur tout le disque, de valeur $B\vec{e}_z$.



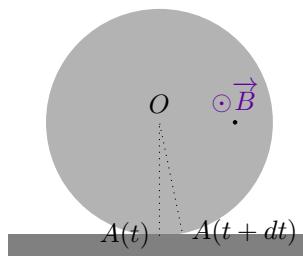
Pour simplifier, on suppose que le courant I circule en ligne droite dans la roue, de O vers A . On note ω la vitesse de rotation de la roue, J son moment d'inertie par rapport à son axe, et on suppose que le mercure exerce sur la roue un couple de frottements $-\Gamma\omega$.

1. Étude par les forces

- Exprimez la force de Laplace sur le segment OA et précisez son point d'application ; déduisez-en le moment M de cette force par rapport à l'axe Oz .
- Question optionnelle* : retrouvez ce moment par intégration :
 - soit P un point situé entre O et A à une ordonnée y ; écrivez la force $d\vec{F}$ de Laplace qui s'exerce sur un petit morceau de courant autour de ce point P . Déduisez-en le moment dM de cette force par rapport à l'axe Oz .
 - déduisez-en le moment total dû aux forces de Laplace par intégration.
- Par application du TMC, établissez l'équation différentielle vérifiée par ω .
- Pour $I = 1,2 \text{ A}$, $B = 0,2 \text{ T}$, $R = 10 \text{ cm}$, on trouve que la vitesse du disque se stabilise à 1 tour en $0,8 \text{ s}$. Calculez numériquement Γ .

2. Étude par l'énergie

- On se place à un instant t : le courant va en ligne droite selon OA ; à l'instant $t + dt$, si la roue a tourné d'un angle $d\theta$, le flux de \vec{B} à travers le circuit a changé.



Évaluez, à partir du schéma, la puissance des forces de Laplace.

Remarque : il y a ensuite une seconde phase : le courant change de trajet pour se remettre selon la droite OA . Cette modification du trajet du courant ne joue pas de rôle ici, mais ce n'est pas évident à justifier.

- Par application du TEC, déduisez-en de nouveau l'équation différentielle vérifiée par ω .
- La roue de Barlow est un moteur qui a un couple très faible. Expliquez ce qui, dans la conception, fait que ce couple est faible, par rapport à un moteur classique (courant continu, synchrone,...).
- Le mercure est toxique. Par quoi peut-on le remplacer ici ?

Exercice EM1.5 : Précession dans un champ magnétique [***]

Un électron a une masse m_e , porte une charge $-e$; il possède aussi un moment magnétique $\mu_B = 9,2 \times 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$. Pour comprendre ce moment, on peut considérer que l'électron tourne sur lui-même comme une toupie. Il possède alors un moment cinétique non nul par rapport à son centre, dirigé suivant son axe de rotation. Si on note \vec{L} le moment cinétique de l'électron par rapport à son centre, et $\vec{\mathcal{M}}$ son moment dipolaire, alors des calculs montrent qu'ils sont reliés par la relation $\vec{\mathcal{M}} = -\frac{g}{2} \frac{e}{m_e} \vec{L}$ avec $g \approx 2$.

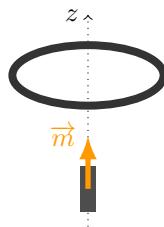
De plus, on a la relation $\|\vec{L}\| = \frac{\hbar}{2}$ avec $\hbar \approx 1 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

On place un électron dans un champ magnétique constant \vec{B} ; on néglige toutes les autres forces.

1. En écrivant le TMC, trouvez l'équation différentielle vérifiée par \vec{L} .
2. Pour résoudre, on prend des coordonnées cartésiennes telles que $\vec{B} = B \vec{e}_z$. On note $\vec{L} = L_x \vec{e}_x + L_y \vec{e}_y + L_z \vec{e}_z$. Projetez l'équation précédente sur les trois axes, et résolvez. Pour les CI, on considérera que $L_y(0) = 0$ et θ_0 est l'angle entre $\vec{L}(0)$ et \vec{e}_z , soit $L_x(0) = \frac{\hbar}{2} \sin \theta_0$ et $L_z(0) = \frac{\hbar}{2} \cos \theta_0$.
3. Indication : pour la résolution, inspirez-vous du mouvement d'une charge dans un champ magnétique uniforme.
4. Décrivez le mouvement de \vec{L} .

Exercice EM1.6 : Force d'un aimant sur une spire [***]

Un aimant, ramené à un moment magnétique $\vec{m} = m \vec{e}_z$, est placé à l'origine O ; une spire circulaire de rayon a , parcourue par un courant I , est placé à une distance d au-dessus.



1. Soit P un point de la spire repéré par ses coordonnées cylindriques (a, θ, d) . Exprimez \vec{OP} puis la distance OP .
2. Le champ créé par l'aimant au point P s'écrit $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi OP^3} \left[3 \frac{\vec{m} \cdot \vec{OP}}{OP^2} \vec{OP} - \vec{m} \right]$ Exprimez $\vec{B}(P)$ sur la base cylindrique.
3. Exprimez le déplacement élémentaire autour de P en coordonnées cylindriques. Déduisez-en l'expression de la force de Laplace élémentaire.
4. Par des considérations simples de symétries, dans quelle direction sera la force de Laplace totale ? Par intégration, calculez cette force.
5. Quel doit être le signe de I pour que la force soit de sens opposé au poids (supposé selon $-z$) ? AN : $I = 4 \text{ A}$, $a = 1 \text{ cm}$, $\mu_0 m = 1,2 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $d = 2 \text{ cm}$: quelle doit être la masse de la spire pour que la force de l'aimant lui permette de l'éviter ?

Champs magnétiques et courants

TDs numériques

réponses page 930

TD numérique : Champs magnétiques

1. Champ magnétique créé par une spire

On considère une spire circulaire de rayon R et d'axe Oz parcourue par un courant I . On admet qu'en un point $P(x, 0, z)$ du plan de la feuille, elle crée un champ magnétique

$$\vec{B}(x, 0, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R (z \cos \theta \vec{e}_x + (R - x \cos \theta) \vec{e}_z)}{(R^2 + x^2 + z^2 - 2Rx \cos \theta)^{3/2}} d\theta$$

On va calculer ce champ pour $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI, $R = 3$ cm, $I = 1$ A, -10 cm $\leq x \leq 10$ cm et -10 cm $\leq z \leq 10$ cm

- (a) Il faut commencer par créer la grille sur laquelle on va calculer le champ magnétique :

```
1 tab_x=np.linspace(-xmax,xmax,Nx) # tableau 1D des abscisses
2 tab_z=np.linspace(-zmax,zmax,Nz) # tableau 1D des ordonnées
3 mesh_x,mesh_z=np.meshgrid(tab_x,tab_z) # grille des abscisses et des ordonnées
```

avec par exemple 20x20 points pour commencer. On dispose alors de deux matrices indiquant, pour chaque point de la grille, l'abscisse et l'ordonnée.

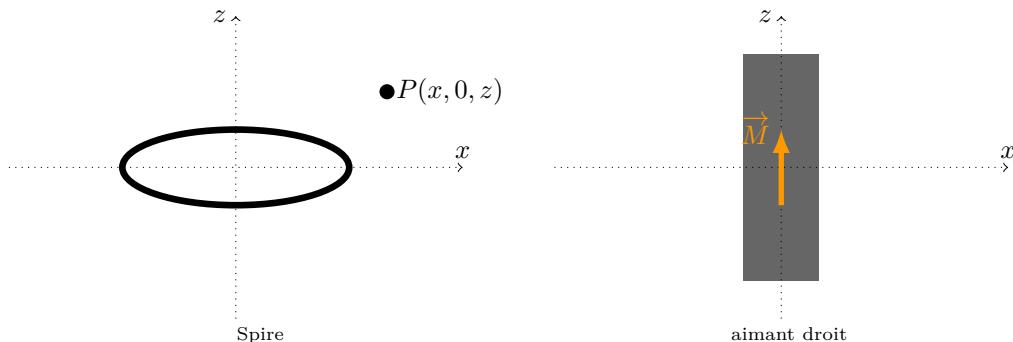
- (b) Définissez les fonctions `fx(x,z,theta)` et `fz(x,z,theta)` renvoyant les fonctions à intégrer, l'une pour avoir le champ magnétique selon \vec{e}_x , l'autre selon \vec{e}_z .
- (c) Par une méthode des rectangles (avec 100 rectangles c'est suffisant), calculez alors le champ magnétique en tout point de la grille. Vous devez obtenir deux matrices `mesh_Bx` et `mesh_Bz`.

Indication : pour créer des matrices de même dimensions que `mesh_x`, on peut utiliser `mesh_Bx=np.zeros_like(mesh_x)`

- (d) Tracez une carte de champ à l'aide du programme suivant ; commentez.

```
1 plt.figure()
2 plt.quiver(mesh_x,mesh_z,mesh_Bx, mesh_Bz)
3 plt.show()
```

- (e) Remplacez `quiver` par `streamplot` et observez la carte de lignes de champ.



2. Champ magnétique créé par un aimant droit

On considère maintenant un aimant droit d'aimantation M comme sur la figure, de dimensions l_x par l_z . Son champ magnétique en un point $P(x, 0, z)$ est donné par (attention aux minuscules et majuscules) :

$$\vec{B}(x, 0, z) = \int_{X=-\frac{l_x}{2}}^{+\frac{l_x}{2}} \int_{Z=-\frac{l_z}{2}}^{+\frac{l_z}{2}} \frac{\mu_0 M (2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \vec{e}_z + 2 \sin \phi \cos \phi \vec{e}_x}{4\pi ((x - X)^2 + (z - Z)^2)^{3/2}} dZ dX \text{ avec } \phi = \arctan \frac{x - X}{z - Z}$$

Procédez de même pour calculer le champ magnétique créé par un aimant tel que $l_x = 1$ cm, $l_z = 6$ cm et $\mu_0 M = 0,2$ USI grâce à une double boucle d'intégration.

Remarque : à l'intérieur de l'aimant, ça fait un peu n'importe quoi. On peut cacher cela en ajoutant

```
1 from matplotlib.patches import Rectangle
2 plt.gca().add_patch(Rectangle((-lx/2,-lz/2), lx, lz,color="black"))
```

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM :

Q1.(a)

Q2.(b) ET (c) ET (d)

Q3.(a)

Q4.(a)

Q5.(a)

Q6.(a)

Si le champ est uniforme et le circuit fermé, alors la force est nulle. Par contre elle peut le faire tourner.

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice [EM1.1](#) : Force entre deux fils parallèles [*]

1. $\vec{B} = 2 \times 10^{-5} \text{ T} \times \vec{e}_\theta$
2. $\vec{F} = 2 \times 10^{-5} \text{ N} \vec{e}_r$: la force est attractive, et très faible.
3. En cas de court-circuit, le courant peut devenir très intense ; il peut arriver que la force entre les fils les arrache à leur support.

Réponses de l'exercice [EM1.2](#) : Oscillations d'une boussole [**]

1. Le couple vaut $-MB_h \sin \theta$.
2. Par le TMC : $I\ddot{\theta} = -MB_h \sin \theta$. Pour de petits angles, on a donc des oscillations de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MB_h}}$

Réponses de l'exercice [EM1.3](#) : Galvanomètre [**]

1. $\vec{m} = i.S.N.(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$
2. $\Gamma_{Lap} = i.S.N.B. \cos \theta$
3. $J\ddot{\theta} = i.S.N.B. \cos \theta - C\dot{\theta} - f\dot{\theta}$; à l'équilibre et pour de petits angles, $\theta = \frac{S.N.B.}{C}i$ est proportionnel au courant mesuré.
4. $\Delta i = \frac{C\Delta\theta}{S.N.B} = 13 \mu\text{A}$

Réponses de l'exercice [EM1.4](#) : Roue de Barlow [**]

1. **Étude par les forces**
 - (a) La force vaut $I\vec{O}\wedge\vec{B} = IRB\vec{e}_x$ et s'applique au milieu du segment, donc son moment vaut $M = -\frac{IR^2B}{2}\vec{e}_z$.
 - (b) La force infinitésimale vaut $d\vec{F} = IBdy\vec{e}_x$ donc $dM = -IBdy$ et par intégration : $M = \int_0^R -IBdy = -\frac{IBR^2}{2}$
 - (c) D'après le TMC : $J\frac{d\omega}{dt} = -\Gamma\omega - \frac{IBR^2}{2}$
 - (d) $\Gamma = \frac{IBR^2}{2\omega} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ USI}$
2. **Étude par l'énergie**
 - (a) $\mathcal{P} = I\frac{d\Phi}{dt} = -I\frac{R^2}{2}\omega B$
 - (b) D'après le TEC : $\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}J\omega^2 \right] = -I\frac{R^2}{2}\omega B - \Gamma\omega^2$ ce qui redonne $J\frac{d\omega}{dt} = -\Gamma\omega - \frac{IBR^2}{2}$ après simplification.
 3. Il n'y a qu'un seul tour dans le circuit.
 4. Une solution ionique (de l'eau salée par exemple).

Réponses de l'exercice [EM1.5](#) : Précession dans un champ magnétique [***]

1. $\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{e}{m_e} \vec{L} \wedge \vec{B}$
2. On obtient les équations :
$$\begin{cases} \dot{L}_x &= -\omega_c L_y \\ \dot{L}_y &= \omega_c L_x \\ \dot{L}_z &= 0 \end{cases} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{eB}{m_e}$$

 On résout les équations selon x et y en posant $u = L_x + iL_y$, et on trouve
$$\begin{cases} L_x(t) &= \frac{\hbar}{2} \sin \theta_0 \cos \omega_c t \\ L_y(t) &= \frac{\hbar}{2} \sin \theta_0 \sin \omega_c t \\ L_z(t) &= \frac{\hbar}{2} \cos \theta_0 \end{cases}$$
3. C'est un mouvement de précession : l'axe de \vec{L} tourne autour de l'axe Oz du champ magnétique, comme une toupie sur une table.

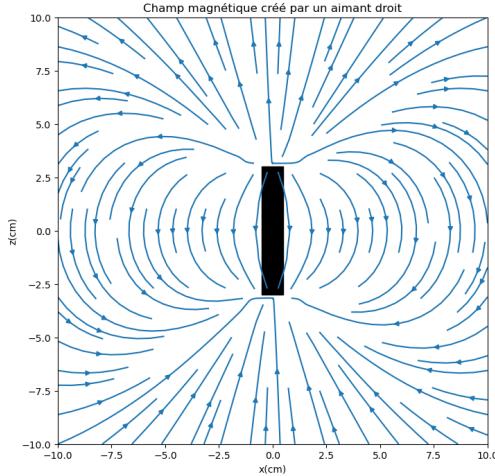
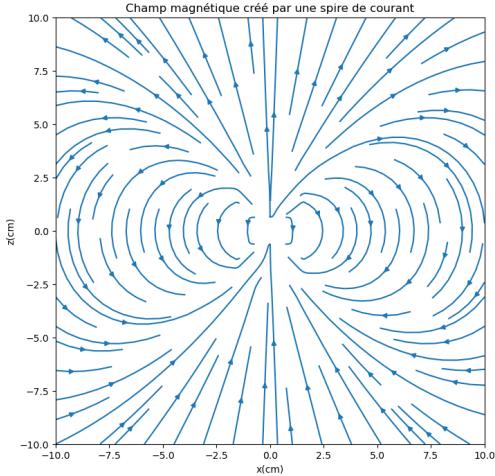
Réponses de l'exercice [EM1.6](#) : Force d'un aimant sur une spire [***]

1. $\overrightarrow{OP} = d\vec{e}_z + a\vec{e}_r$ donc $OP = \sqrt{a^2 + d^2}$
2. $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi(a^2+d^2)^{3/2}} \left[3\frac{d}{a^2+d^2} (\vec{a}\vec{e}_r + d\vec{e}_z) - \vec{e}_z \right]$
3. $d\vec{F} = \frac{\mu_0 m I a}{4\pi(a^2+d^2)^{3/2}} \left[3\frac{d}{a^2+d^2} (-a\vec{e}_z + d\vec{e}_r) - \vec{e}_r \right] d\theta$
4. $\vec{F} = -\frac{3\mu_0 m I a^2 d}{2(a^2+d^2)^{5/2}}$
5. Il faut $I < 0$. On trouve $F = 2,6 \times 10^{-3}$ N soit une masse de 0,26 g.

Réponses aux TDs numériques

Réponses au TD d'info : Champs magnétiques

Il n'y a pas de difficultés particulières dans ce TD :



Phénomènes d'induction

Cours

Nous avons terminé le chapitre précédent sur un paradoxe : comment se fait-il que la force magnétique sur une charge électrique ne travaille jamais, mais la force magnétique sur un courant électrique (beaucoup de charges en mouvement) travaille ? Est-ce que beaucoup de fois 0 peut faire autre chose que 0 ?

En fait, à l'échelle d'une particule, la force magnétique ne travaille pas. Mais à l'échelle macroscopique, l'énergie des charges peut se manifester de deux manières : électriquement (mouvement d'ensemble des charges, c'est-à-dire un courant) ou mécaniquement (mouvement d'ensemble du matériau qui porte les charges), et la force de Lorentz, qui conserve l'énergie, va pouvoir faire passer l'énergie d'une forme vers l'autre. Autrement dit, la force de Laplace n'est qu'une des deux composantes du phénomène de conversion d'énergie mécanique en énergie électrique, et vice-versa.

EM2.A. Les lois de l'induction

A.1. Mise en évidence expérimentale

Reprendons le rail de Laplace, mais cette fois, on remplace le générateur de courant par un ampèremètre très sensible. Alors quand on fait bouger le rail mobile dans le champ magnétique, on observe un mouvement de l'aiguille de l'ampèremètre : un courant apparaît (figure EM2.1).

FIGURE EM2.1 – Expérience du rail de Laplace inversée : on déplace le rail, un courant apparaît.

Ainsi le mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique aboutit à l'observation d'un courant très faible dans le circuit fermé. À l'inverse, si on modifie le champ magnétique vu par le circuit, par exemple en faisant tourner un aimant devant une bobine, on observe aux bornes de cette bobine l'apparition d'une tension alternative de même période que la rotation de l'aimant (figure EM2.2) : c'est le principe de l'alternateur.



(a) Observation de la tension induite à l'oscilloscope

(b) Alternateur industriel ([Crédit : D.S.Dugan](#))

FIGURE EM2.2 – Production d'électricité par rotation d'un aimant : l'alternateur.

A.2. Loi de Faraday

Définition : Flux du champ magnétique à travers un circuit (rappel)

Soit un circuit fermé orienté, de surface S et de normale \vec{n} . Le flux de \vec{B} à travers ce circuit est défini par $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$. Si \vec{B} est uniforme, l'expression se simplifie : $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S$.

Loi de Faraday

Soit un circuit fermé orienté par le sens conventionnel choisi pour le courant. Si le flux Φ du champ magnétique à travers ce circuit varie, alors il apparaît dans le circuit une force électromotrice induite (ou tension induite) orientée dans le même sens que le courant

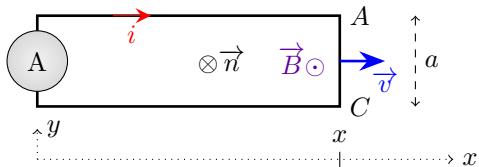
$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{EM2.1})$$

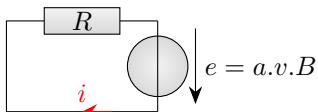
En pratique, cela signifie qu'on ajoute dans le circuit électrique un générateur idéal de tension de fem e .

Exemple : Rail de Laplace

À connaître

On représente le circuit dans lequel on a placé le sens conventionnel i du courant, qui oriente le circuit avec une normale \vec{n} rentrante. Ce circuit est plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme.





Les lois de l'électricité indiquent alors facilement que $i = \frac{a.v.B}{R} = 4,5 \text{ mA}$

Remarque : La loi de l'induction de Faraday indique l'apparition d'une **tension**. Si le circuit est fermé, cette tension va entraîner un courant, mais le courant n'est qu'une conséquence de la tension induite.

Remarque : Le flux $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S$ est défini pour un circuit plat ; pour une bobine de N spires, le flux est multiplié par N , donc les phénomènes d'induction sont plus visibles.

A.3. Aspect énergétique

Propriété : Bilan énergétique d'un couplage inductif par un champ magnétique constant

La force de Laplace et l'induction sont deux phénomènes couplés qui permettent une transformation entre énergie mécanique et énergie électrique ; si le champ magnétique n'est pas variable, ce transfert conserve l'énergie :

$$\mathcal{P}_{Laplace} + \mathcal{P}_{induction} = \mathcal{P}_{Lorentz} = 0$$

Démonstration

La fem induite est orientée dans le même sens que i , donc le produit $e.i$ représente la puissance électrique fournie par l'induction au circuit. On a donc $\mathcal{P}_{\text{induction}} = -i \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{Laplace}}$ si le champ magnétique est constant.

EM2.B. Inductances

La loi de l'induction indique que toute modification du flux du champ magnétique qui traverse un circuit entraîne l'apparition d'une tension induite. Si le circuit est fermé, cette tension entraîne l'apparition d'un courant induit i_{induit} qui va créer un champ magnétique \vec{B}_{induit} , qui lui-même va créer une modification du flux du champ magnétique ; cette modification du flux crée une nouvelle tension induite, etc. On va d'abord énoncer une loi qualitative quand à ce flux, puis définir la notion qui va permettre de traiter ce flux propre : l'inductance.

Loi de Lenz

La tension induite tend à créer un courant qui va créer un champ magnétique s'opposant à la variation du flux.

Par exemple dans le rail de Laplace vu en exercice juste au-dessus, si $v > 0$, le flux diminue (car la surface augmente mais \vec{B} est opposé à \vec{n}). La tension e sera donc positive, le courant i aussi, ce qui, d'après la règle de la main droite, crée un champ magnétique orienté selon \vec{n} , donc une réaugmentation légère du flux.

B.1. Inductance propre d'un circuit

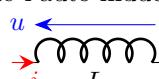
Définition : Inductance propre

Soit un circuit fermé parcouru par un courant i . Ce courant crée un champ magnétique propre proportionnel à i ; le flux du champ magnétique propre à travers le circuit, noté Φ_{propre} , est lui aussi proportionnel à i : on note L le coefficient de proportionnalité, appelé **inductance propre du circuit**, en Henry :

$$\Phi_{propre} = L.i \quad (\text{EM2.2})$$

Considérons de nouveau le rail de Laplace. Le mouvement du conducteur crée une variation du flux $\frac{d\Phi}{dt} = -a.v.B$; mais il faut y ajouter le flux propre : $\Phi_{propre} = L.i$ donc $\frac{d\Phi_{propre}}{dt} = \frac{d(L.i)}{dt}$. La force électromotrice induite totale vaudra donc en fait $e = a.v.B - \frac{d(L.i)}{dt}$. En modélisant le reste du circuit par une résistance R , la loi des mailles permet d'obtenir $R.i = e$ soit $a.v.B = R.i + \frac{d(L.i)}{dt}$: le dernier terme montre que l'inductance propre se comporte comme un composant qu'on aurait introduit dans le circuit et dont l'équation électrique serait $u = \frac{d(L.i)}{dt}$; dans le cas d'un circuit fixe, cela se ramène à une équation bien connue :

Loi électrique d'une inductance constante

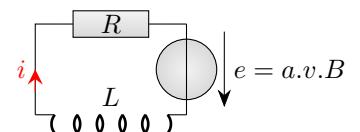
Dans un circuit d'inductance propre constante L , on tient compte de l'auto-induction du circuit (due au flux propre du circuit) en ajoutant dans le modèle électrique un composant  caractérisé en convention **récepteur** par la relation

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{EM2.3})$$

Remarque : À cause de la loi de Lenz, une inductance propre est toujours positive.

Remarque : Le $-L \frac{di}{dt}$ en convention générateur est devenu $+L \frac{di}{dt}$ en convention récepteur.

Remarque : Seul le flux propre est compris dans l'inductance propre ; les flux dus à des champs extérieurs continuent à être intégrés dans le générateur de flux induite. Par exemple, dans le cas du rail de Laplace vu ci-dessus, si on tient compte du flux propre, le modèle électrique devient :



Calcul : Inductance propre et résistance d'un solénoïde

Considérons un solénoïde formé de N spires circulaires de rayon a , parcouru par un courant i . Il crée en son intérieur un champ magnétique $B_{propre} = \mu_0 \frac{N}{l} i$ où l est sa longueur. Ce champ crée à travers chaque spire (de surface πa^2) un flux $\Phi_{1spire} = \pi a^2 \mu_0 \frac{N}{l} i$, donc le flux total créé à travers le solénoïde complet s'écrit $\Phi_{propre} = N \Phi_{1spire} = L.i$ avec $L = \frac{N^2 \pi a^2 \mu_0}{l}$: il est proportionnel à N^2 .

Ce solénoïde est fabriqué en enroulant une longueur $N.2\pi a$ de fil, donc sa résistance, qui est proportionnelle à



la longueur de fil, varie proportionnellement à N .

Propriété : Rapport inductance propre/résistance d'un circuit

Dans une bobine de N tours, le rapport $\frac{L}{R}$ varie proportionnellement à N . Donc si on compare l'impédance $jL\omega$ de l'inductance propre à la résistance R , on constate que :

- à fréquence fixée, si N est faible, l'inductance propre sera négligeable devant la résistance ; si N est grand, la résistance sera négligeable devant l'inductance propre.
- à N fixé, les effets inductifs apparaîtront à haute fréquence, la fréquence de coupure $\frac{R}{L}$ variant proportionnellement à $\frac{1}{N}$.

Enfin, on peut augmenter l'importance de l'inductance propre en introduisant à l'intérieur de la bobine un noyau de matériau magnétique (souvent du **fer doux**) qui augmente considérablement la valeur de μ_0 .

Remarque : Dans le cas du rail de Laplace par exemple, on néglige totalement l'inductance propre du circuit.

Propriété : Énergie emmagasinée par un circuit

Un circuit possédant une inductance propre L et parcouru par un courant i possède une énergie

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 \quad (\text{EM2.4})$$

Démonstration

C'est un rappel du début de l'année : la puissance reçue par l'inductance vaut $\mathcal{P} = u.i = L.i \cdot \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} [\frac{1}{2}Li^2]$

B.2. Inductance mutuelle de 2 circuits

Considérons maintenant deux circuits proches l'un de l'autre. Chaque circuit, parcouru par un courant, crée un champ magnétique qui aura un flux non nul à travers lui-même, mais aussi à travers l'autre circuit.

Définition : Inductances propre et mutuelle

Soit deux circuits fermés orientés par des courants i_1 et i_2 .

Le courant i_1 crée un champ magnétique \vec{B}_1 qui crée :

- un flux $\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1$ à travers lui-même (circuit 1)
- un flux $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} i_1$ à travers le circuit 2

De même le courant i_2 crée un champ magnétique \vec{B}_2 qui crée :

- un flux $\Phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 i_2$ à travers lui-même (circuit 2)
- un flux $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} i_2$ à travers le circuit 1

On admettra que $M_{12} = M_{21}$, qu'on notera M , appelé **inductance mutuelle** des deux circuits, et que $|M| < \sqrt{L_1 L_2}$.

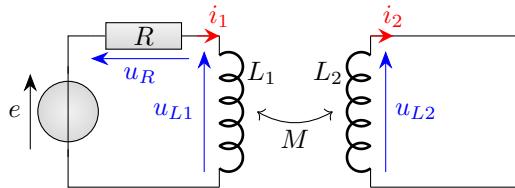
Par conséquent, on peut écrire (en convention récepteur) :

$$\begin{cases} \Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases} \quad (\text{EM2.5a}) \text{ donc } \begin{cases} u_{L1} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ u_{L2} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (\text{EM2.5b})$$

Remarque : Une inductance propre est toujours positive, mais pas forcément une inductance mutuelle, cela dépend des orientations des circuits : si on change le sens conventionnel d'un des courants, on change le signe de M .

Exemple : Exemple de deux circuits couplés par inductance mutuelle

On considère les deux circuits suivants couplés par inductance mutuelle :



1. En appliquant la loi des mailles à la maille de gauche, établissez une ED reliant i_1 , i_2 et e .
2. En appliquant la loi des mailles à la maille de droite, établissez une autre ED reliant i_1 et i_2 . Déduisez-en une relation entre i_1 et i_2 si tous les courants sont nuls à $t = 0$.
3. Déduisez-en l'ED vérifiée par i_1 .
4. La tension e , nulle à $t = 0$, passe à $E = cst$ à $t > 0$. Exprimez $i_1(t)$ puis $i_2(t)$.

1. $e + u_R + u_{L1} = 0$ donc $e - R.i_1 - L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt} = 0$
2. $u_{L2} = 0$ donc $L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$. On intègre : $L_2 i_2 + M i_1 = cst$ et cette constante est nulle d'après les conditions initiales.
3. En remplaçant i_2 par $-\frac{M}{L_2} i_1$ on obtient $e - R.i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M^2}{L_2} \frac{d i_1}{dt} = 0$ soit $\tau \frac{di_1}{dt} + i_1 = \frac{e}{R}$ avec $\tau = \frac{L_1 - \frac{M^2}{L_2}}{R}$.
On voit en passant que, pour que le système soit stable, il faut que $L_1 \geq \frac{M^2}{L_2}$ soit $M^2 \leq L_1 L_2$. On constate aussi que le couplage mutuel modifie le temps caractéristique par rapport au circuit RL classique.
4. On résout et on trouve $i_1(t) = \frac{e}{R} \exp^{-t/\tau}$ puis $i_2(t) = -\frac{M}{L_2} \frac{e}{R} \exp^{-t/\tau}$.

Propriété : Énergie électromagnétique

L'énergie électromagnétique de deux circuits couplés par inductance mutuelle vaut

$$E = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (\text{EM2.6})$$

Démonstration

La puissance reçue par l'ensemble des deux circuits vaut (avec des notations évidentes) :

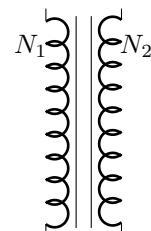
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= u_{L1}.i_1 + u_{L2}.i_2 = L_1.i_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M.i_1 \cdot \frac{di_2}{dt} + M.i_2 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2.i_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M.i_1.i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right] \end{aligned}$$

B.3. Transformateur électrique

Définition : Transformateur idéal

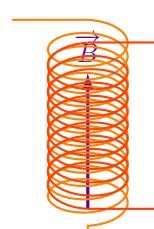
Un transformateur idéal est formé de deux bobines, contenant N_1 et N_2 spires, en induction totale, c'est-à-dire que toute ligne de champ magnétique traversant l'une traverse aussi l'autre. Par conséquent $M^2 = L_1.L_2$: le couplage est maximal.

On le symbolise avec 2 bobines séparées par deux traits verticaux.



Démonstration

Considérons deux bobines imbriquées comme sur le schéma ci-contre. Notons \vec{B}_1 le champ magnétique créé par la bobine 1, et \vec{B}_2 le champ magnétique créé par la bobine 2. Soit Φ_{1s} le flux du champ magnétique \vec{B}_1 à travers une spire ; alors $\Phi_{1 \rightarrow 1} = N_1 \Phi_{1s}$ et $\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1s}$ donc on a $\frac{L_1}{M} = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 1}}{\Phi_{1 \rightarrow 2}} = \frac{N_1}{N_2}$. On procède de même avec le flux créé par la bobine 2 pour trouver $L_2 = \frac{N_2}{N_1} M$. En multipliant les deux, on trouve $L_1 L_2 = M^2$.



Remarque : Les bobines 1 et 2 sont souvent appelées *primaire* et *secondaire* du transformateur.

En pratique, on utilise un noyau de fer doux pour canaliser les lignes de champ électrique à travers les bobines. La géométrie la plus courante est celle de la figure EM2.3, dans laquelle deux bobines sont enroulées sur l'axe central d'un noyau en fer en forme de .

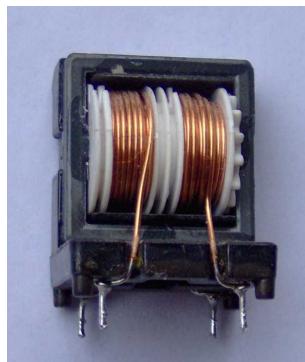


FIGURE EM2.3 – Transformateur.

Propriété : Lois des tensions et des intensités pour un transformateur idéal

Considérons un transformateur idéal (sans pertes) avec N_1 spires au primaire et N_2 spires au secondaire. On note $m = \frac{N_2}{N_1}$, appelé **rappor de transformation**. Alors :

- si la tension aux bornes du primaire vaut u_1 alors la tension aux bornes du secondaire vaut

$$u_2 = \frac{N_2}{N_1} u_1 = m \cdot u_1 \quad (\text{EM2.7a})$$

- si l'intensité à travers le primaire vaut i_1 alors l'intensité à travers le secondaire vaut

$$i_2 = \frac{N_1}{N_2} i_1 = \frac{1}{m} i_1 \quad (\text{EM2.7b})$$

Démonstration

Soit φ le flux total traversant chaque spire, alors la bobine 1 est traversée par un flux $\Phi_1 = N_1 \cdot \varphi$ donc $u_1 = N_1 \dot{\varphi}$ (en convention récepteur) ; de même, $u_2 = N_2 \dot{\varphi}$.

On en déduit que $\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}$ sauf si $\dot{\varphi} = 0$ (régime continu). Si le transformateur est idéal, on néglige ses pertes, alors la puissance en entrée du primaire est égale à la puissance fournie dans le secondaire : $u_1 \cdot i_1 = u_2 \cdot i_2$ donc $\frac{i_2}{i_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{m}$.

En pratique, suivant les orientations des circuits, il peut y avoir un signe – qui apparaît dans ces relations.

Remarque : Le transformateur réel a de nombreuses sources de pertes ; les principales sont :

- les pertes dues à la résistance des fils (effet Joule)
- les pertes dues au matériau magnétique qui constitue le noyau (chaque fois qu'un matériau s'aimante puis se désaimante, cela dissipe de l'énergie)
- les pertes dues au courants induits dans le matériau magnétique (on les diminue en prenant un matériau «feuilleté», constitué de plusieurs couches)
- les pertes dues au champ magnétique qui ne suit pas exactement le noyau de fer.

De manière générale, on peut retenir deux règles pratiques :

- les pertes deviennent prépondérantes en basse fréquence (l'effet Joule surtout) et à haute fréquence (les pertes dans le noyau essentiellement). Un transformateur a donc une plage d'utilisation qui dépend de sa conception. Plus on veut l'utiliser en BF, plus il faut que $L_1 \omega$ soit grand devant la résistance des fils, ce qui impose des noyaux magnétiques lourds et encombrants.
- les pertes dans le transformateur sont moins importantes lorsqu'on demande un fort courant en sortie.

Le transformateur est un composant essentiel de l'électricité et de l'électronique. Voici quelques utilisations courantes (cf. figure EM2.4) :

- isoler électriquement un circuit : on utilise un transformateur de rapport $m = 1$ appelé **transformateur d'isolation**. La tension au secondaire est la même qu'au primaire, mais l'avantage du transformateur c'est qu'il n'y a aucun contact entre les fils des deux circuits. On s'en sert pour résoudre les problèmes de masse, ou pour des questions de sécurité.
- abaisser une tension : pour alimenter les appareils électriques qui fonctionnent en basse tension (ordinateur, chargeur, ...) on utilise une alimentation qui contient un transformateur qui abaisse le 220 V en une tension plus basse, ainsi qu'un étage de hachage/lissage qui transforme la tension alternative en une tension continue.
- éléver une tension : en combinant un circuit RLC résonant, un transformateur et un second circuit résonant, les résonateurs de Tesla permettent d'obtenir des tensions colossales capables de générer des éclairs de plusieurs dizaines de mètres de long.
- diminuer le courant : lors du transport de l'électricité depuis le lieu où elle est produite jusque chez vous, il y a des fils dont la résistance dissipe beaucoup d'énergie par effet Joule. Pour diminuer ces pertes, on élève la tension d'un facteur 2000, jusqu'à 400 000 V, ce qui diminue l'intensité d'un facteur 2000 donc les pertes par effet Joule d'un facteur 2000². En bout de ligne, différents transformateurs rabaissent la tension jusqu'à 220 V pour alimenter les maisons.
- augmenter le courant : un poste de soudage à l'arc est un transformateur abaissleur de tension. L'arc qu'on voit n'est pas une étincelle due à une forte tension, au contraire, la tension est faible, mais quand on touche la pièce à souder avec la baguette de soudure, un courant de plusieurs centaines d'Ampères se met à circuler, qui fait fondre la soudure.



(a) Alimentation 15 V.



(b) Résonateurs de Tesla. (Crédit : Wikipedia/Antivolt)



(c) Transformateur très haute tension. (Crédit : Wikipedia/M. Koch)



(d) Soudage à l'arc ; la température atteint 3000 °C. (Crédit : Wikipedia/Mgschuler)

FIGURE EM2.4 – Quelques utilisations des transformateurs.



Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Lois de l'induction	
Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algébrisation.
Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps	
Flux propre et inductance propre.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en «influence totale». Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.
Étude énergétique.	Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.

Phénomènes d'induction

QCMs

réponses page 946

QCM :

Q1.

Un champ magnétique qui traverse un circuit crée une tension induite :

Q2.

Un champ magnétique variable qui traverse un circuit crée un courant induit :

Q3.

Le flux du champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant i à travers lui-même

- (a). $L \frac{di}{dt}$ (b). L
 (c). $M.i$ (d). $L.i$

Q4.

Soit un circuit parcouru par un courant i , d'inductance propre L , et un circuit voisin parcouru par i_2 et ayant une inductance mutuelle avec le premier circuit. Alors dans le premier circuit on fait apparaître une bobine de tension $u_L =$

- (a). $L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$ (b). $Li_1 + Mi_2$
 (c). $Mi_1 + Li_2$ (d). $L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$

Q5.

Dans un transformateur idéal de facteur de transformation m , on a les relations (aux signes près) :

- (a). $i_2 = \frac{1}{m} \cdot i_1$ (b). $u_2 = \frac{1}{m} \cdot u_1$
 (c). $u_2 = m \cdot u_1$ (d). $i_2 = m \cdot i_1$

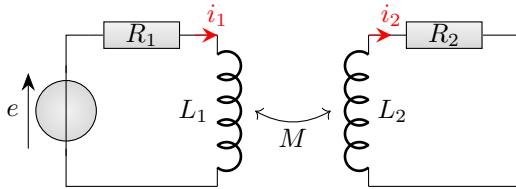
Phénomènes d'induction

Exercices

réponses page 947

Exercice EM2.1 : Étude de deux circuits couplés par inductance mutuelle [**]

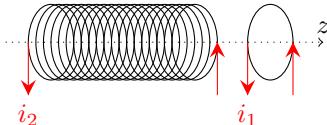
On considère les deux circuits ci-dessous, couplés par inductance mutuelle :



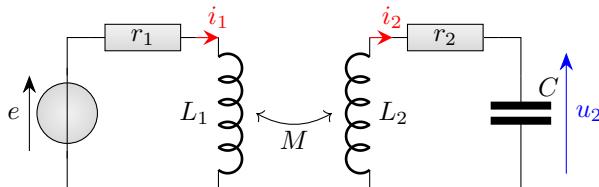
- En appliquant la loi des mailles et les lois des composants à chaque circuits, établissez deux équations couplées vérifiées par i_1 et i_2 .
- Déduisez-en une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par i_2 , en fonction de e et des constantes. Quelle inégalité peut-on en déduire sur L_1 , L_2 et M ?
- Initialement, le générateur est éteint et aucun courant ne circule. À $t = 0$ on allume le générateur : $e = E = cst$. Déterminez $i_2(t)$.
Données : : $L_1 = 40 \text{ mH}$, $L_2 = 23 \text{ mH}$, $M = 12 \text{ mH}$, $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ et $E = 10 \text{ V}$.
- On met maintenant un GBF : $e(t) = E \cos \omega t$ avec $E = 10 \text{ V}$ et $\omega = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminez les caractéristiques de $i_2(t)$.
- Que vaut le rapport $\frac{i_2}{i_1}$ en RSF ? À quel type de comportement cela correspond-il ??

Exercice EM2.2 : Résonateur de Tesla [**]

On considère une spire de rayon a placée juste au bout d'un solénoïde de même rayon a , contenant N spires sur une longueur ℓ .



- Le solénoïde crée en son intérieur un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2 \vec{e}_z$. En supposant que ce champ est celui qui traverse la spire seule, exprimez le flux Φ_1 de ce champ à travers la spire seule. En déduire l'expression de l'inductance mutuelle M .
- Exprimez de même le flux de \vec{B} à travers le solénoïde (formé de N spires), puis l'inductance propre L_2 du solénoïde.
- La spire seule de résistance r_1 est alimentée par un générateur de tension alternative $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Le solénoïde, de résistance interne $r_2 \approx N \cdot r_1$, est rebouclé sur un condensateur de capacité C . Le circuit équivalent est alors :

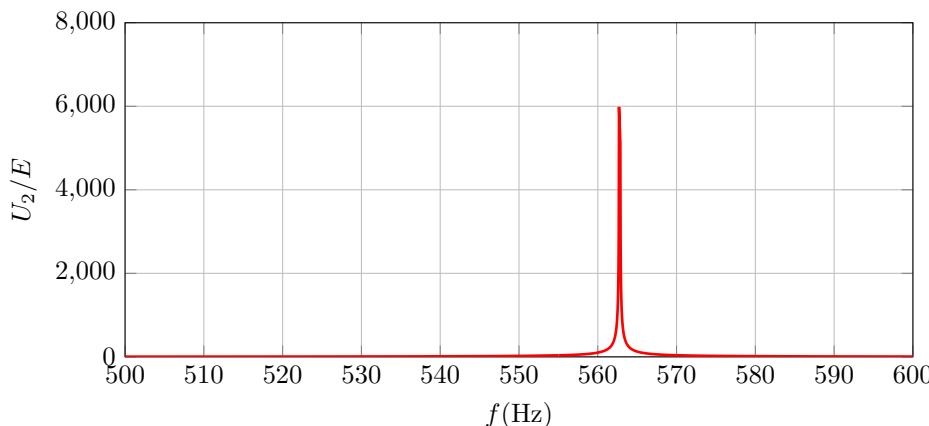


Exprimez une relation entre E , I_1 et I_2 en admettant qu'on peut négliger L_1 .

- En appliquant la loi des mailles à droite, exprimez I_2 en fonction de E et des constantes. Montrez alors que

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{1 + jr_2 C \omega - L_2 C \omega^2 - jM^2 C \omega^3} \underline{E}$$

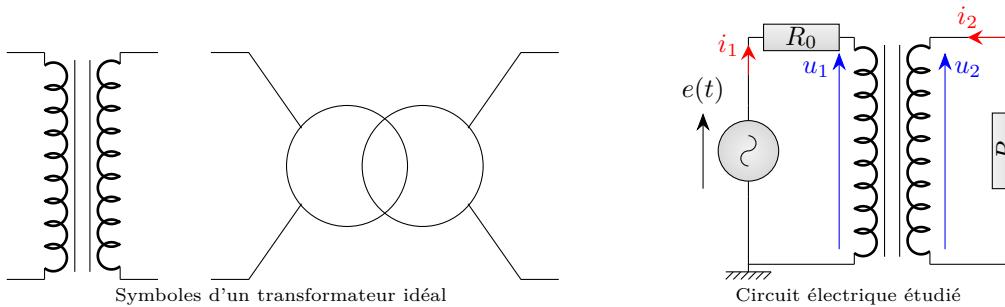
5. On trace ci-dessous la courbe de l'amplitude de u_2 en fonction de la fréquence pour $r_2 = 80 \text{ m}\Omega$, $L_2 = 40 \text{ mH}$, $C = 2 \mu\text{F}$, $N = 500$:



Commentez.

Exercice EM2.3 : Transformateur électrique [**]

Deux bobines d'inductances propres L_1 et L_2 , placées proches l'une de l'autre, sont reliées par une inductance mutuelle M vérifiant $M < \sqrt{L_1 L_2}$. On définit alors le coefficient de couplage $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$. Si $K = 1$, on dit que le couplage est total : les deux bobines forment alors un transformateur idéal.



On considère un transformateur placé dans le circuit de la figure ci-dessus. On travaille en RSF. Le bobinage primaire comprend N_1 spires, le secondaires N_2 spires. On note $m = \frac{N_2}{N_1}$ le rapport de transformation.

1. On admet que toutes les spires (du primaire ou du secondaire) sont traversées par le même flux $\phi(i_1, i_2)$ du champ magnétique.

En supposant que seul le courant i_1 circule, reliez le rapport $\frac{L_1}{M}$ à m .

De même, avec i_2 , reliez $\frac{L_2}{M}$ à m .

Vérifiez que $K = 1$, et exprimez $\frac{L_2}{L_1}$ en fonction de m .

2. Écrire l'ED reliant u_1 à i_1 et i_2 ; passez-la en complexes. De même reliez u_2 à i_1 et i_2 .

Montrez que $\frac{u_2}{u_1} = m$

3. À partir de l'écriture de la loi des mailles dans la maille de droite, exprimez $\frac{i_2}{i_1}$. Dans quelles conditions expérimentales a-t-on $\frac{i_2}{i_1} = \pm \frac{1}{m}$?

4. Dans ces conditions, montrez que $u_1 = \frac{1}{m^2} R i_1$. Que peut-on en conclure sur l'effet d'un transformateur par rapport aux impédances placées en sortie?

5. Dans ces mêmes conditions, montrez que l'ensemble formé du générateur, de R_0 et du transformateur est vu par la résistance R comme un générateur de Thévenin de fem et de résistance interne à préciser. Expliquez l'intérêt de cela, par exemple dans le cas de la soudure à l'arc.

6. On se replace dans le cas général.

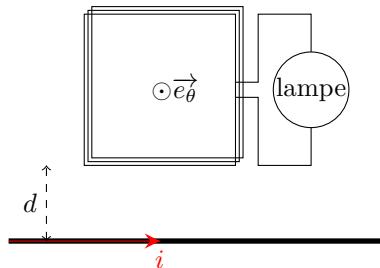
La puissance moyenne en entrée du primaire vaut $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2} \Re \left[i_1 u_1^* \right]$. Exprimez la puissance moyenne en sortie du secondaire \mathcal{P}_2 , en fonction de i_1 , u_1^* , m , R et L_2 .

7. On sait qu'on peut écrire $i_1 u_1^* = I_1 U_1 e^{j\phi_1}$ avec ϕ_1 le déphasage entre intensité et tension d'entrée ($\cos \phi_1$ est le facteur de puissance). Reécrivez \mathcal{P}_1 en fonction de I_1 , U_1 , ϕ_1 . Montrez que $\mathcal{P}_2 = \frac{U_1 I_1}{2} \cos \psi \cos(\phi_1 - \psi)$ avec $\psi = \arctan \frac{R}{L_2 \omega}$.
- Ces deux puissances sont égales. Vérifiez que $\phi_1 = \psi$ permet de vérifier cette condition.
- Dans quel cas particulier u_1 et i_1 sont-ils en phase ?
8. Pour un transformateur donné on a : $L_1 = 0,4 \text{ H}$, $m = 1/5$, et on choisit $R = 25 \Omega$ et $f = 50 \text{ Hz}$. Calculez numériquement le déphasage ϕ_1 en entrée du primaire.

Exercice EM2.4 : Allumage d'une lampe par induction [***]

On dispose d'une lampe qui s'allume si la tension efficace à ses bornes dépasse $U_s = 1,5 \text{ V}$.

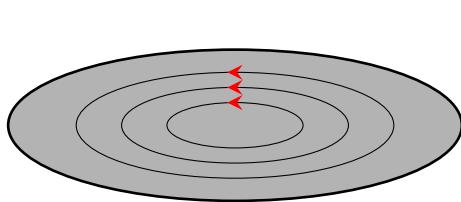
Pour l'allumer, on la relie à une bobine constituée d'un enroulement de $N = 200$ spires carrées de côté $a = 2,5 \text{ cm}$ (cf ci-contre) et on approche l'ensemble à une distance d d'un fil parcouru par un courant alternatif i d'intensité efficace $I_{eff} = 8 \text{ A}$ et de fréquence $f = 50 \text{ kHz}$. Ce fil crée un champ magnétique qui vaut $\frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques, avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.



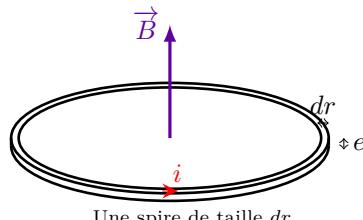
- Le champ magnétique n'étant pas uniforme, il va falloir intégrer pour trouver le flux à travers le circuit. Commencez par poser l'intégrale du flux à travers 1 seule spire ; on remarquera que le vecteur normal vaut \vec{e}_θ , que l'élément de surface vaut $dS = dr \cdot dz$, et on posera les bornes nécessaires pour r et z (on pourra considérer que le côté gauche du circuit est à $z = 0$). Intégrez ensuite par rapport à z (intégration triviale) puis par rapport à r .
 - Déduisez-en la fem créée aux bornes de la lampe.
 - À quelle distance d faut-il approcher la lampe du fil pour qu'elle s'éclaire ?
 - Pour détecter si du courant passe dans un fil d'une installation domestique, il existe des lampes test de ce genre qui s'allument si on les place près d'un fil sous tension.
<http://www.selectronic.fr/testeur-de-tension-sans-contact.html>
- Pensez-vous qu'elles fonctionnent selon le principe de cet exercice ?

Exercice EM2.5 : Chauffage par induction [***]

Un fond de casserole, assimilé à un disque conducteur de rayon $R = 9 \text{ cm}$, d'épaisseur $e = 6 \text{ mm}$, de conductivité électrique $\gamma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, est plongé dans un champ magnétique variable $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ avec $B_0 = 1,4 \text{ mT}$ et $\omega = 2\pi \times 25000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Les courants induits dans la casserole vont la chauffer, ainsi que les aliments qu'elle contient.



Courants dans le fond de la casserole



On admet qu'il crée des courants qui décrivent des cercles d'axe Oz .

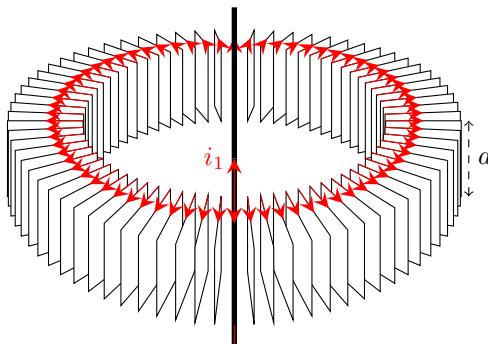
- On va découper par la pensée le fond de la casserole en une multitude de spires concentriques, de rayon $r < R$ et de section $e \times dr$. Déterminez la fem induite dans cette spire. Sachant que sa résistance s'écrit $\frac{2\pi r}{\gamma e dr}$ avec γ la conductivité électrique de l'acier, déduisez-en la puissance moyenne $d\mathcal{P}$ dissipée par cette spire, par effet Joule.
- En intégrant entre 0 et R , déterminez la puissance totale \mathcal{P} dissipée par effet Joule dans le fond de la casserole.

Exercice EM2.6 : Pince ampèremétrique [**]

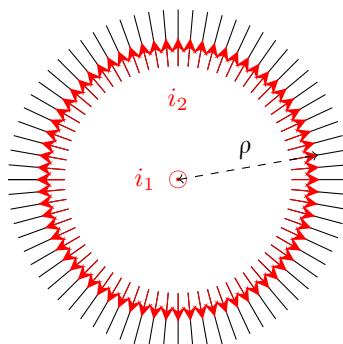
Les ampèremètres usuels ne supportent pas les fortes intensités (en général, $I_{max} = 10 \text{ A}$). Pour mesurer des intensités supérieures, on utilise une pince ampèremétrique, dont on va étudier le principe.

Un fil rectiligne infini d'axe (Oz) est parcouru par un courant (c'est le courant à mesurer) d'intensité $i_1(t) = I_1 \cos \omega t$. On entoure le fil d'un bobinage constitué d'un tore de section carrée de côté a et de rayon moyen $\rho \gg a$, sur lequel sont régulièrement enroulées un grand nombre de spires N .

Ce bobinage est fermé sur un ampèremètre, le circuit ainsi réalisé a une résistance totale R et est parcouru, par induction, par un courant sinusoïdal $i_2(t) = I_2 \cos \omega t$



Vue de côté



Vue de dessus (toutes les spires sont en série)

- Le fil crée un champ $\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques. En supposant que la taille des spires est suffisamment petite pour que le champ soit considéré comme uniforme, exprimez le flux total Φ_1 créé par le champ magnétique du fil, à travers les spires du solénoïde.

- Le solénoïde crée un champ magnétique qui vaut $\frac{\mu_0 N i_2}{2\pi r}$ en son intérieur. En déduire le flux Φ_2 dû au champ propre du solénoïde.

- On suppose que la résistance R du circuit est négligeable ; la tension aux bornes du solénoïde est donc nulle.

Exprimez le rapport $\frac{I_2}{I_1}$. Commenter.

Phénomènes d'induction

TDs numériques

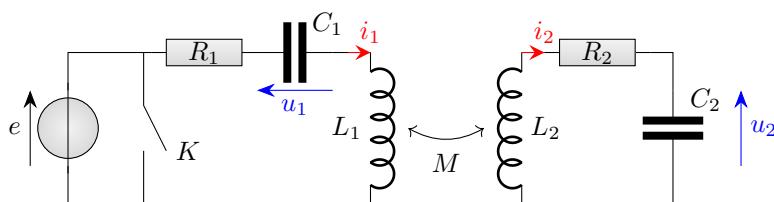
réponses page 949

TD numérique : Résonateur de Tesla

Les résonateurs de Tesla sont des systèmes électriques mis au point par Nicolas Tesla pour créer des décharges électriques surpuissantes ; ils sont capables de créer des différences de potentiel de plusieurs centaines de milliers de Volts. Ils fonctionnent suivant 3 étages :

- un premier étage contient un condensateur et une bobine avec un hacheur rotatif qui coupe régulièrement une branche du circuit, provoquant une surtension aux bornes des bobines. On obtient alors une tension alternative très forte
- un deuxième étage consiste en un transformateur survolté
- un troisième étage consiste en un RLC résonant où se crée l'arc électrique

Le schéma de l'étude est représenté ci-dessous :



Valeurs numériques : $L_1 = 20 \mu\text{H}$, $L_2 = 50 \text{ mH}$, $M = 0.7\sqrt{L_1 L_2}$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$ et $C_2 = 5 \text{ pF}$.

1. Calculez la fréquence théorique de résonance f_0 du second circuit.
Calculez la valeur de C_1 pour que le premier circuit résonne à la même fréquence.
2. On considère pour le moment l'ensemble comme un filtre d'entrée e et de sortie u_2 .
Écrivez 4 équations différentielles reliant u_1 , u_2 , i_1 et i_2 . Passez-les en complexes, et déduisez-en un système de 4 équations à 4 inconnues sous la forme

$$A \cdot \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{i}_1 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix} = B$$

où A est une matrice 4 par 4 et B un vecteur 4 par 1.

3. Résolvez ce système à l'aide de `numpy.linalg.solve` pour $f = 100 \text{ kHz}$ et $\underline{e}(0) = 1 \text{ V}$.
4. Tracez la courbe de $|u_2|$ en fonction de f entre $f_0/2$ et f_0 . Pour quelle fréquence a lieu la résonance ? Mesurez son facteur de qualité Q .
5. On s'intéresse maintenant à la dynamique du circuit : le condensateur C_1 se charge, puis une fois une tension $U_0 = 10000 \text{ V}$ atteinte, l'interrupteur K se ferme.

Au secondaire, il apparaît une telle surtension que des étincelles vont apparaître aux bornes du condensateur ; cette étincelle agit comme un conducteur ohmique entre les deux bornes, dont la résistance R_e varie en fonction de la tension u_2 selon la loi :

$$\begin{cases} R_e = \infty \text{ si } |u_2| < U_e = 5 \times 10^4 \text{ V} \\ R_e = \frac{D}{|u_2| - U_e} \text{ sinon, avec } D = 3 \times 10^8 \Omega \cdot \text{V} \end{cases}$$

Résolvez alors l'évolution du système pour $u_1(0) = U_0$ et les autres CI nulles. Déterminez le nombre d'éclairs, et leur durée.

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM :

Q1.(b)

Ce n'est vrai que si le flux varie.

Q2.(a)

Il crée une tension induite, qui va créer un courant uniquement si le circuit est fermé.

Q3.(d)

Avec L l'inductance propre du circuit.

Q4.(d)

Q5.(a) ET (c)

Réponses aux exercices

Réponses de l'exercice EM2.1 : Étude de deux circuits couplés par inductance mutuelle [**]

1.
$$\begin{cases} R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e \\ R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases}$$
2. $(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_2}{dt^2} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \frac{di_2}{dt} + R_1 R_2 i_2 = -M \dot{e}$

Les solutions ne peuvent pas croître spontanément, ce qui montre que $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

3. On trouve alors $i_2(t) = 2e^{-119t} - 2e^{-43t}$ en A avec t en secondes.
4. $i_2(t) = 0,91 \cos(100t + 2,85)$ A.
5. $\frac{i_2}{i_1} = \frac{-jM\omega}{R_2+jL_2\omega}$: passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{R_2}{L_2} = 87$ rad · s⁻¹

Réponses de l'exercice EM2.2 : Résonateur de Tesla [**]

1. $M = \frac{\pi a^2 \mu_0 N}{\ell}$
2. $L_2 = \frac{\pi a^2 \mu_0 N^2}{\ell}$
3. $\underline{E} = r_1 \underline{I}_1 + M j \omega \underline{I}_2$.
4. $0 = L_2 j \omega \underline{I}_2 + M j \omega \underline{I}_1 + r_2 \underline{I}_2 + \frac{1}{j C \omega} \underline{I}_2$ puis on élimine \underline{I}_1 entre les deux équations.
5. On observe une résonance énorme au voisinage de 563 Hz. Cette résonance est la combinaison d'une amplification par le "transformateur" de rapport N , puis une résonance dans le second circuit. Les tensions obtenues sont énormes et permettent la génération d'éclairs.

Réponses de l'exercice EM2.3 : Transformateur électrique [**]

1. $\frac{L_1}{M} = \frac{1}{m}$ et $\frac{L_2}{M} = m$.
En faisant le produit on obtient $\frac{L_1}{M} \cdot \frac{L_2}{M} = 1$ soit $K = 1$.
En faisant le quotient on trouve $\frac{L_2}{L_1} = m^2$.
2. $\frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{j M \omega \underline{i}_1 + j L_2 \omega \underline{i}_2}{j L_1 \omega \underline{i}_1 + j M \omega \underline{i}_2} = m$
3. $\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = -\frac{1/m}{1-j \frac{R}{L_2 \omega}}$ qui vaut environ $-\frac{1}{m}$ lorsque $L_2 \omega \gg R$: il faut soit être en haute fréquence, soit avoir une résistance faible en sortie.
4. $\underline{u}_2 = -R \underline{i}_2$ avec $\underline{u}_2 = m \underline{u}_1$ et $\underline{i}_2 = -\frac{1}{m} \underline{i}_1$ donc $\underline{u}_1 = \frac{1}{m^2} R \underline{i}_1$.
5. $\underline{u}_2 = m \underline{e} + m^2 R_0 \underline{i}_2$.
6. $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \Re \left[\underline{i}_2 \underline{u}_2^* \right] = \frac{1}{2} \Re \left[\frac{\underline{i}_1 \underline{u}_1^*}{1-j \frac{R}{L_2 \omega}} \right]$
7. $\mathcal{P}_1 = \frac{U_1 I_1}{2} \cos \phi_1$
 $\mathcal{P}_2 = \frac{1}{2} \Re \left[I_1 U_1 e^{-j\phi_1} \cos \psi e^{j\psi} \right] = \frac{U_1 I_1}{2} \cos \psi \cos(\phi_1 - \psi)$
Si $\psi = \phi_1$ alors $\mathcal{P}_2 = \frac{I_1 U_1}{2} \cos \phi_2 \cos 0 = \mathcal{P}_1$.
 u_1 et i_1 sont en phase si $\phi_1 = 0$ soit $\psi = 0$ soit $\frac{R}{L_2 \omega} = 0$ ce qui est atteint à la limite d'une très petite résistance en sortie.
8. $\phi_1 = \psi = 76,8^\circ$

Réponses de l'exercice EM2.4 : Allumage d'une lampe par induction [***]

1. $\Phi = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$
2. La fem vaut $e(t) = \frac{N \mu_0 \sqrt{2} I_{eff} 2\pi f \sin(2\pi f t) a}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$; sa valeur efficace vaut $E_{eff} = N \mu_0 I_{eff} f a \ln \frac{d+a}{d}$
3. $d = \frac{a}{\exp\left(\frac{U_s}{N \mu_0 I_{eff} f a}\right) - 1} = 3$ cm

4. Ces testeurs fonctionnent donc sur un principe différent : par couplage capacitif.

Réponses de l'exercice [EM2.5](#) : Chauffage par induction [***]

$$1. e = \pi r^2 B_0 \omega \sin \omega t \text{ donc } d\mathcal{P} = \frac{\pi r^3 B_0^2 \omega^2 \gamma e dr}{4}$$

$$2. \text{ Par intégration : } \mathcal{P} = \frac{\pi R^4 B_0^2 \omega^2 \gamma e}{16} = 5,6 \text{ kW}$$

Réponses de l'exercice [EM2.6](#) : Pince ampèremétrique [**]

$$1. \Phi_1 = \frac{N \mu_0 i_1 a^2}{2\pi\rho}$$

$$2. \Phi_2 = \frac{N^2 \mu_0 i_2 a^2}{2\pi\rho}$$

3. La fem totale aux bornes du solénoïde vaut donc $e = -\frac{N \mu_0 a^2}{2\pi r} \left(\frac{di_1}{dt} + N \frac{di_2}{dt} \right)$. Si elle est quasiment nulle, alors $\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{N}$: on a donc divisé le courant par N , et on peut le mesurer avec un ampèremètre classique.

Réponses aux TDs numériques

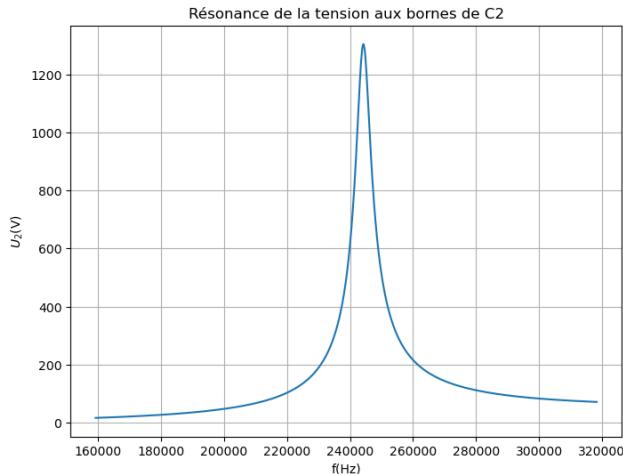
Réponses au TD d'info : Résonateur de Tesla

On choisit $C_1 = 12,5 \text{ nF}$ pour une résonance à $f_0 = 318 \text{ kHz}$.

À partir des lois des mailles et des condensateurs, on obtient le système

$$\begin{cases} u_1 + R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = e \\ u_2 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0 \\ i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} \\ i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} \end{cases}$$

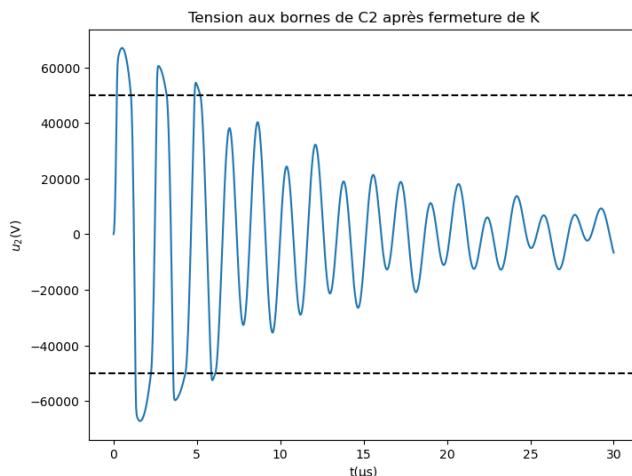
On trace une courbe de résonance centrée en 244 kHz et de largeur à -3 dB égale à $4,7 \text{ kHz}$, d'où $Q = 52$.



La résolution dynamique du système de 4 équations différentielles

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{Mu_2 + MR_2 i_2 - L_2 u_1 - L_2 R_1 i_1}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{Mu_1 + MR_1 i_1 - L_1 u_2 - L_1 R_2 i_2}{L_1 L_2 - M^2} \\ \frac{du_1}{dt} = \frac{i_1}{C_1} \\ \frac{du_2}{dt} = \begin{cases} \frac{i_2}{C_2} & \text{si } |u_2| < U_e \\ \frac{i_2}{C_2} - \frac{u_2}{R_e C_2} & \text{sinon avec } R_e = \frac{D}{|u_2| - U_e} \end{cases} \end{cases}$$

donne des oscillations non-linéaires amorties, avec 6 éclairs en $8 \mu\text{s}$ environ.



Systèmes électromécaniques

Cours

Les deux chapitres précédents nous ont donné les deux équations des couplages électromécaniques :

- le champ magnétique agit sur les circuits traversés par des courants par l'intermédiaire de la **force de Laplace** et modifie leur mouvement ;
- le mouvement du circuit dans le champ magnétique crée une tension induite par la **loi de Faraday** qui modifie le courant.

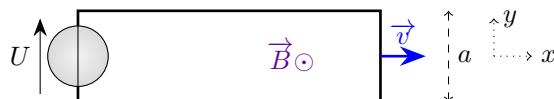
Ces deux phénomènes sont couplés. Ainsi, pour résoudre désormais un problème électromécanique de façon globale, il va toujours falloir procéder de la même manière :

- ORIENTER LE CIRCUIT si ce n'est pas fait dans l'énoncé, en plaçant le sens conventionnel du courant ;
- dessiner le circuit électrique équivalent et appliquer la loi des mailles pour trouver une équation différentielle électrique ;
- appliquer un loi de mécanique (théorème de la quantité de mouvement, du moment cinétique, ou de l'énergie cinétique) pour trouver une équation différentielle mécanique.

Les deux derniers points se font dans l'ordre voulu. Ensuite, suivant ce que demande l'énoncé, on va combiner les deux ED pour en former une seule, soit électrique, soit mécanique.

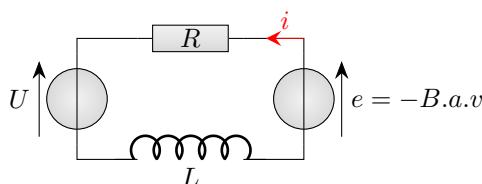
Exemple : Rail de Laplace

On étudie le rail de Laplace déjà observé expérimentalement, mais alimenté cette fois par une tension constante U . On note R sa résistance interne et L son inductance propre. Le côté de droite, de masse m , se déplace avec une vitesse $v\vec{e}_x$; le champ magnétique $B\vec{e}_z$ est supposé uniforme.



1. **ORIENTEZ LE CIRCUIT** en plaçant le sens conventionnel du courant.
2. Exprimez la fem induite en fonction de v , B et des données. Dessinez le schéma électrique équivalent du circuit, et déduisez-en l'équation électrique reliant i et v .
3. Exprimez la force de Laplace sur le segment mobile (segment de droite). Par application du PFD, établissez l'équation mécanique.
4. On suppose que l'inductance propre du circuit est très faible. Simplifiez l'équation électrique, isolez i , puis déduisez-en l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on fera l'AN pour $B = 0,1 \text{ T}$, $a = 6 \text{ cm}$, $m = 45 \text{ g}$ et $R = 3 \text{ m}\Omega$.
5. *Première expérience* : allumage brusque de la tension
À $t < 0$, tout est éteint. On allume la tension, qui vaut donc $U = cst$ à $t > 0$.
Exprimez $v(t)$ puis $i(t)$.
6. *Seconde expérience* : freinage par courants de Foucault
Il n'y a pas de tension imposée : $U = 0$. À $t = 0$ on lance la partie mobile avec une vitesse v_0 . Exprimez $v(t)$ puis $i(t)$.

1. Ici je choisis le sens trigonométrique ; \vec{n} est donc sortant.
2. Le flux vaut $\Phi = B.a.x$ donc $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bav$. Le schéma électrique équivalent est donc :



$$\text{donc } U - Bav - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

3. On a déjà fait ce calcul : $\vec{F} = i.a\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = iaB\vec{e}_x$. Comme on a un mouvement de translation, on va utiliser le théorème de la quantité de mouvement projeté sur \vec{e}_x : $m\frac{dv}{dt} = iaB$
4. Si $L = 0$ alors $i = \frac{U - Bav}{R}$ donc $m\frac{dv}{dt} + \frac{B^2a^2}{R}v = \frac{UaB}{R}$
On peut poser $\tau = \frac{mR}{B^2a^2} = 3,75$ s et $\tau\frac{dv}{dt} + v = \frac{U}{Ba}$
5. La solution particulière vaut $v = \frac{U}{Ba}$ donc après quelques calculs on trouve $v(t) = \frac{U}{aB} [1 - e^{-t/\tau}]$ puis $i = \frac{U}{R}e^{-t/\tau}$
6. Cette fois la solution particulière est nulle donc on trouve $v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$ puis $i = -\frac{Bav(0)}{R}e^{-t/\tau}$
C'est une propriété générale : dans un système essentiellement résistif, le couplage électromécanique a tendance à freiner le mouvement en l'absence de sources de tension ou de courants : on parle de *freinage par courants de Foucault*.

Systèmes électromécaniques**Programme officiel****Programme officiel**

Notions et contenus	Capacités exigibles
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique	
Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation. Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.

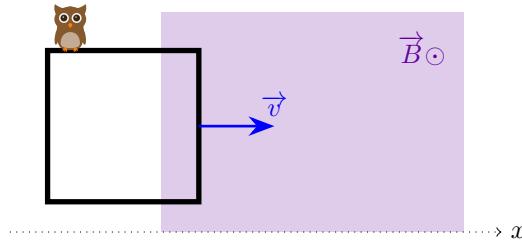
Systèmes électromécaniques

Exercices

réponses page 962

Exercice EM3.1 : Freinage par courants de Foucault [**]

Un circuit carré de côté a se déplace horizontalement avec une vitesse $v(t)\vec{e}_x$; on ne s'intéressera pas aux mouvements verticaux. On note m sa masse, R sa résistance électrique, et on néglige son inductance propre. Il pénètre dans une zone $x > 0$ où règne un champ magnétique $B\vec{e}_z$ uniforme et constant. On note v_0 sa vitesse initiale au moment où il pénètre dans le champ. On repère le circuit par la position x de son côté avant :

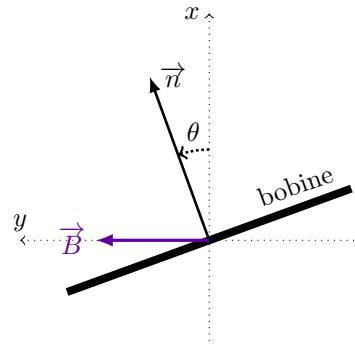


Après avoir orienté le circuit, établissez ses équations mécanique et électrique tant que le circuit se trouve partiellement dans le champ magnétique ($0 < x < a$). Déduisez-en $v(t)$, puis $v_1 - v_0$ où v_1 est la vitesse lorsque le circuit est entièrement dans le champ magnétique.

AN pour $m = 130 \text{ g}$, $a = 10 \text{ cm}$, $B = 0,8 \text{ T}$ et $R = 0,03 \Omega$.

Exercice EM3.2 : Freinage d'une bobine en rotation [**]

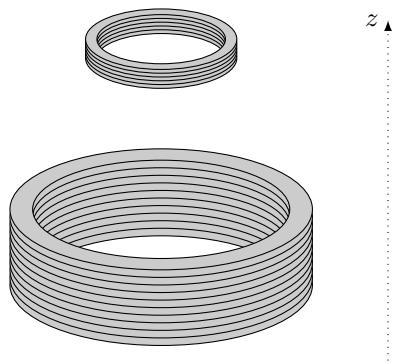
On considère une bobine de surface S et de N tours, d'inductance propre L et de résistance r , rebouclée sur elle-même ; on note i le courant qui la traverse. Cette bobine peut tourner sans frottements autour d'un axe vertical Oz passant par son centre de masse ; on note J son moment d'inertie. Le tout est placé dans l'entrefer d'un aimant produisant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_y$.



1. Par application du TMC, établir une équation différentielle reliant θ à i .
2. Exprimer la force électromotrice induite dans la bobine ; en déduire une équation différentielle vérifiée par i faisant intervenir $\dot{\theta}$.
3. À quelle condition (portant sur N) L est-il négligeable ? Dans ce cas, montrer que la vitesse de rotation est amortie en faisant apparaître un temps caractéristique τ à exprimer.
4. Résoudre numériquement $\dot{\theta}(t)$ et $i(t)$ pour les valeurs : $\theta(0) = 0^\circ$, $\dot{\theta}(0) = 1000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$, $i(0) = 0 \text{ A}$, $S = 8 \text{ cm}^2$, $N = 20$, $L = 4 \mu\text{H}$, $r = 0,9 \text{ m}\Omega$, $B = 8 \text{ mT}$ et $J = 4 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Exercice EM3.3 : Lévitation magnétique [***]

On place l'une au-dessus de l'autre deux bobines circulaires différentes. La bobine du bas est fixe, et alimentée par un générateur de tension sinusoïdale, de pulsation ω . L'axe de la bobine est l'axe Oz vertical vers le haut. On admet que le champ magnétique créé par cette bobine au voisinage de son axe s'écrit en coordonnées cylindriques $\vec{B} = B_r(z, r)\vec{e}_r + B_z(z)\vec{e}_z$ avec $B_z(z) = \frac{\mu_0 N_1 a_1^2 i_1}{2(z^2 + a_1^2)^{3/2}}$ ($i_1 = I_1 \cos \omega t$ est le courant dans la bobine, a_1 son rayon, N_1 son nombre de spires) et $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$.



La seconde bobine est formée de N_2 spires de rayon a_2 , parcourues par un courant i_2 orienté suivant \vec{e}_θ ; elle a une résistance R_2 , une inductance propre L_2 , et est refermée sur elle-même. On note m_2 sa masse, et z_2 son altitude qui peut varier.

1. Exprimez B_r .
2. On suppose que z_2 est constant; on posera $d = \sqrt{z_2^2 + a_1^2}$ pour simplifier les calculs.
Exprimez I_2 , image complexe de $i_2(t)$.
3. Exprimez la projection sur \vec{e}_z de la force de Laplace totale s'exerçant sur la bobine 2, en fonction de i_1 , i_2 et les données.
4. Exprimez la force de Laplace moyenne suivant z , notée F_z , en fonction de I_1 , I_2 et les données.
À partir du résultat de la question 2, montrez que

$$F_z = \frac{3\mu_0^2\pi^2N_1^2a_1^4N_2^2a_2^4z_2}{4d^8}I_{1eff}^2 \frac{L_2\omega^2}{R_2^2 + L_2^2\omega^2}$$

5. On choisit les caractéristiques suivantes : $a_1 = 6$ cm, $N_1 = 1000$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI, $I_{1eff} = 1,5$ A, $z_2 = 5$ cm, $a_2 = 4$ cm, $N_2 = 1$, $R_2 = 0,24$ mΩ, $L_2 = 0,63$ µH.
Calculez F_z à 50 Hz. Quelle masse peut-on soulever ?
6. Comment modifier l'expérience pour améliorer la lévitation ?

Exercice EM3.4 : Modèle électrique équivalent du haut-parleur (CCP) [***]

On se propose de déterminer un modèle électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique en régime sinusoïdal.

Un haut-parleur électrodynamique est un système à symétrie cylindrique constitué :

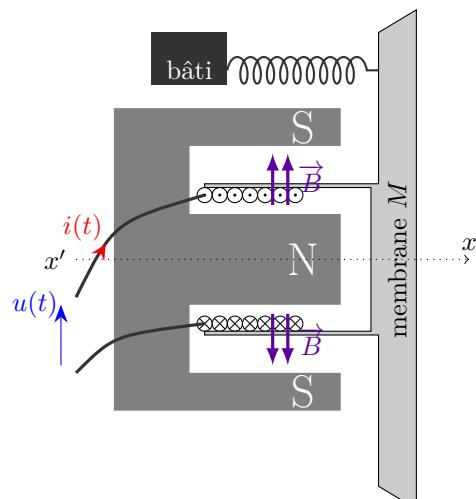
- d'un aimant annulaire, d'axe $x'x$, créant un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_r$ radial et de norme constante dans la région de l'entrefer ;
- d'un solénoïde indéformable de même axe $x'x$, comportant N spires, de rayon ρ , placé dans l'entrefer de l'aimant ;
- d'une membrane M perpendiculaire à l'axe $x'x$ solidaire du solénoïde, et pouvant effectuer de faibles déplacements axiaux autour de sa position d'équilibre $x = 0$, grâce à un système élastique qu'on modélisera par un ressort de raideur k .

Pour cette étude, on ne tiendra compte, ni du poids du dispositif, ni de la réaction du support, car ils se compensent.

On travaillera en coordonnées polaires d'axe $x'x$, c'est à dire avec les vecteurs : \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_x .

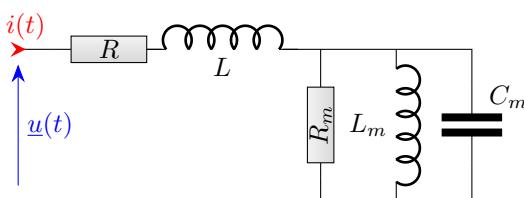
Le courant $i(t)$ est compté positif lorsqu'il circule suivant \vec{e}_θ .

La transmission acoustique de la membrane à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide $\vec{F} = -f \cdot \vec{v}$, opposée à la vitesse \vec{v} de la membrane ($f > 0$), dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.



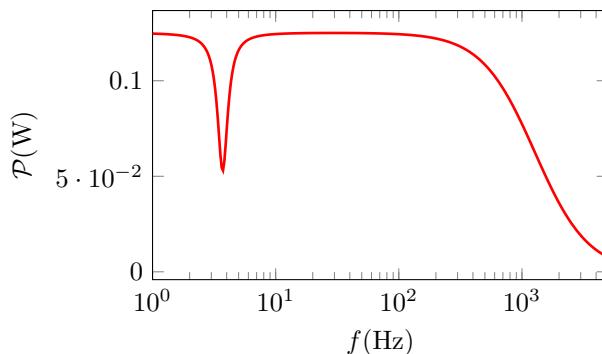
La bobine est assimilable à une inductance pure L , en série avec une résistance R . Elle est alimentée par un amplificateur qui délivre une tension $u(t)$ à ses bornes.

1. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées à l'ensemble (bobine + membrane). En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ qui traduit le comportement mécanique du dispositif (bobine + membrane) de masse m .
2. On admet que le flux de \vec{B} à travers la bobine s'écrit $\Phi = -2\pi\rho NBx + cst$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ qui traduit le comportement électrique du système.
3. Dans le cas où la tension $u(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω , toutes les grandeurs physiques sont des fonctions harmoniques du temps. On peut, donc, définir une impédance complexe : $\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ où $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$ sont les fonctions complexes associées aux fonctions réelles $u(t)$ et $i(t)$
Déterminer l'impédance complexe \underline{Z} en fonction de L , R , ω et des éléments mécaniques du dispositif.
4. Montrer qu'on peut adopter comme modèle électrique du haut-parleur le schéma équivalent suivant. On exprimera chacun des éléments L_m , C_m et R_m de l'impédance motionnelle en fonction de B , m , f , N , ρ et k .
AN : $B = 0,15$ T, $m = 40$ g, $f = 1,1$ USI, $k = 22$ N · m⁻¹, $\rho = 8$ mm et $N = 20$; calculer R_m , L_m et C_m .



5. Exprimer la puissance moyenne reçue par le haut-parleur en fonction de U_{eff} et des constantes.

On a tracé ci-dessous la courbe donnant la puissance reçue en fonction de la fréquence, avec $R = 8\Omega$ et $L = 1\text{ mH}$; commentez.

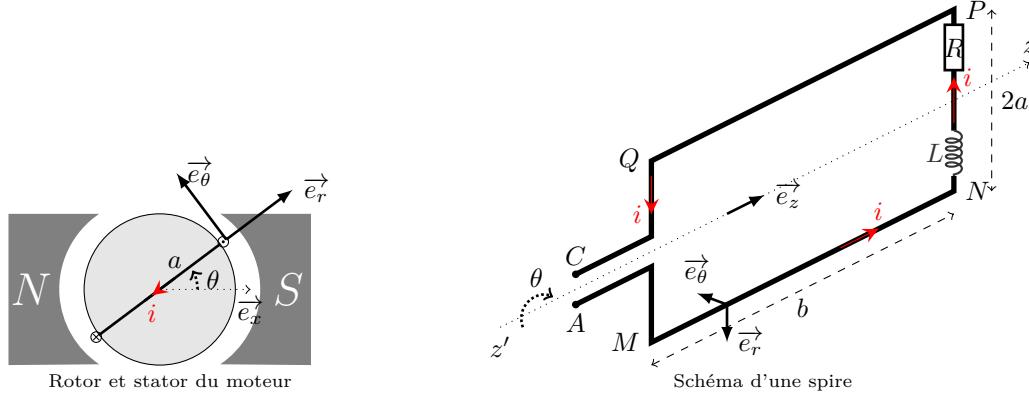


Exercice EM3.5 : Étude d'un moteur à courant continu (E3A) [***]

Le moteur à courant continu (MCC) étudié dans ce problème possède, au point nominal de fonctionnement, les caractéristiques suivantes :

- tension nominale d'induit : $U_{nom} = 12$ V
- intensité du courant dans l'induit : $I_{nom} = 2,5$ A
- fréquence de rotation : $N_{nom} = 3000$ tr/min

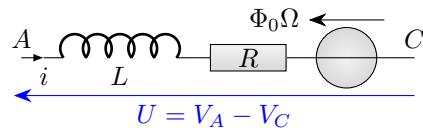
Le *rotor*, ou *induit*, du MCC est constitué de n spires rectangulaires enroulées sur un cylindre de rayon a et de longueur b . L'ensemble tourne à la vitesse angulaire Ω autour de son axe zz' en restant dans l'entrefer d'un aimant permanent (*stator* ou *inducteur*) qui crée un champ magnétique. Normalement, ce champ est plutôt radial, mais pour pouvoir l'étudier avec nos connaissances, on va le prendre uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Les spires sont connectées à l'extérieur par un système balai-collecteur en restant dans la configuration de la figure de gauche.



Le rotor est équilibré pour minimiser les vibrations (c'est-à-dire que son centre de masse est sur l'axe). Le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe du moteur est $J = 1 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; les pertes fer (dans le circuit magnétique) et mécaniques (frottements solides) sont négligés. Lors de sa rotation, le cylindre est soumis à une force de frottements fluides, de couple $C_f = -\beta\Omega$ par rapport à l'axe de rotation, avec $\beta = 1 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

L'induit possède une résistance $R = 0,24\Omega$ et une inductance propre L supposées constantes. Un générateur de tension constante $V_A - V_C = U$ (avec $U > 0$) alimente le moteur. À l'instant t de l'étude, la branche MN est située dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et la branche PQ dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

1. Soit une spire à un instant t , à un angle θ , orientée de A vers C . Exprimer le flux ϕ de \vec{B} à travers cette spire. En déduire la force électromotrice induite aux bornes de cette spire.
2. En réalité, il y a n spires, réparties entre $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = +\frac{\pi}{2}$, placées de telle sorte que leurs fem s'ajoutent. Sachant que la valeur moyenne de $\cos\theta$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ vaut $\frac{2}{\pi}$, exprimer la fem induite totale; on la mettra sous la forme $e = -\Phi_0\Omega$, avec Φ_0 à exprimer.
3. En déduire que le moteur se comporte, du point de vue électrique, selon le schéma équivalent :



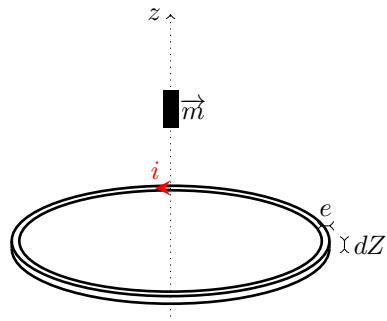
4. Exprimer le couple par rapport à l'axe exercé par la force de Laplace sur la spire à l'angle θ . En déduire le couple total C_{em} exercé sur le rotor, en fonction de Φ_0 et i .
5. Écrire l'équation différentielle reliant J , Ω , i , Φ_0 , β et C_u , le couple utile (c'est le couple que fournit le moteur; par réaction, il s'exerce sur l'axe du moteur un couple $-C_u$).
6. On travaille maintenant au régime nominal, l'intensité est constante. À l'aide des données sur le régime nominal, calculer Φ_0 .
7. En négligeant la faible tension aux bornes de la bobine L , déduire, à partir des deux équations électriques et mécaniques, l'équation différentielle vérifiée par Ω , en fonction de Φ_0 , β , C_u , J , R et U . Déterminer le temps τ caractéristique de la mise en vitesse du moteur, et faire l'AN.
Exprimer aussi la vitesse angulaire limite Ω_{lim} .
8. Calculer le couple utile C_u en régime nominal.
9. Que vaut le courant i_d dans l'induit lorsque le moteur est bloqué, si la tension d'induit est égale à la tension nominale ? Commenter.
10. Quelle est, au démarrage, la tension minimale U_{dmin} nécessaire pour entraîner le moteur ?

Exercice EM3.6 : Freinage de la chute d'un aimant [****]

Un aimant, représenté par un moment magnétique \vec{M} supposé orienté selon l'axe vertical \vec{e}_z ascendant, tombe dans un tube en cuivre de rayon $a = 8 \text{ mm}$ et d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$. On constate qu'il est freiné, et atteint une vitesse limite v_{lim} qu'on va chercher à exprimer.

Le schéma ci-contre illustre le calcul préliminaire qu'on va faire : l'aimant traverse simplement une spire de courant de rayon a .

On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.



1. On considère pour le moment l'aimant, de moment magnétique $\vec{m} = M\vec{e}_z$, à l'altitude z , avec une vitesse \dot{z} (négative, mais peu importe). On admet qu'il crée un champ magnétique dont le flux à travers la spire vaut $\Phi = \frac{\mu_0 M}{2} \left(\frac{a^3}{((Z-z)^2+a^2)^2} - \frac{a}{((Z-z)^2+a^2)} \right)$ où Z est l'ordonnée de la spire et z celle de l'aimant. Déduisez-en la fem induite dans la spire.

Tracez la courbe de la fem pour $Z - z$ allant de $-10a$ à $10a$ en prenant pour le moment $\mu_0 M = 1$ et $\dot{z} = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. On note $\sigma = 5,96 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ la conductivité électrique du cuivre ; on rappelle que la résistance d'un conducteur de longueur ℓ et de section S vaut $R = \frac{\ell}{\sigma S}$. Exprimez la puissance dissipée par effet Joule dans la spire, si on néglige son inductance propre.
3. On considère maintenant le tube complet, infiniment long, comme une juxtaposition de spires d'épaisseur dZ . Montrez que la puissance totale dissipée par le tube vaut $\mathcal{P} = k \cdot \frac{\mu_0^2 M^2 \sigma e}{a^4} \cdot \dot{z}^2$ avec k un facteur numérique à établir.

Indication : en posant $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u^2+a^2)^n} du$, on admet que : $I_3 = \frac{3\pi}{8a^5}$; $I_4 = \frac{15\pi}{48a^7}$; $I_5 = \frac{105\pi}{384a^9}$; $I_6 = \frac{315\pi}{1280a^{11}}$.

4. Établir l'équation différentielle vérifiée par z si on suppose que la puissance électrique dissipée par induction compense la puissance mécanique de la force exercée par le champ induit sur l'aimant. Déduisez-en l'expression de v_{lim} .

5. AN : pour un aimant de masse $m = 35 \text{ g}$ on mesure $v_{lim} = 4,3 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire M .

Systèmes électromécaniques

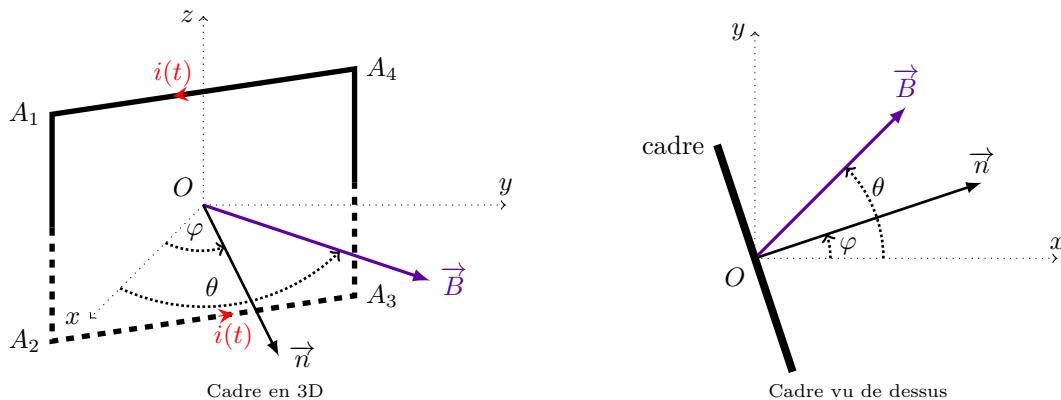
TDs numériques

réponses page 964

TD numérique : Moteur asynchrone

Un moteur asynchrone est constitué d'un rotor et d'un stator. Le stator est constitué d'un ensemble de bobines fixes destiné à créer un champ tournant dans une zone de l'espace, comme dans le moteur synchrone ; la différence est donc dans le stator, qui n'est pas un dipôle magnétique permanent, mais un simple cadre conducteur rectangulaire de surface S , contenant N spires, mobile autour de l'axe Oz . On note \vec{n} sa normale, et ω sa vitesse angulaire de rotation.

Ce cadre est placé dans le champ magnétique tournant qu'on suppose uniforme, de norme B . Les positions angulaires de \vec{B} et \vec{n} sont repérées par les angles $\theta(t) = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{B})} = \omega_s t$ et $\phi(t) = \widehat{(\vec{e}_x, \vec{n})} = \omega t$. Dans toute la suite, on supposera que $0 \leq \omega \leq \omega_s$.



Rappel : $\sin \alpha = \cos (\alpha - \frac{\pi}{2})$

- Déterminer le flux Φ du champ magnétique \vec{B} à travers les N spires du cadre, en fonction de B , N , S , $\omega_r = \omega_s - \omega$ et t . Que vaut sa valeur maximale Φ_M ?
- En déduire la fem d'induction $e(t)$ qui apparaît dans le circuit, en fonction de Φ_M et ω_r .
- On modélise le cadre en tenant compte de sa résistance R et de son inductance L . À l'aide d'un schéma électrique équivalent, exprimez l'image complexe du courant i en régime permanent en fonction de Φ_M , R , L et ω_r .
- Que vaut le moment magnétique \vec{m} du cadre en fonction de i ? Déduisez-en le couple électromagnétique $\gamma(t)$ en fonction de $i(t)$, Φ_M et ω_r .
- Ce couple varie ; on rappelle que la valeur moyenne du produit de deux fonctions oscillantes vaut $\langle a.b \rangle = \frac{1}{2} \Re [a.b^*]$. En déduire l'expression de $\Gamma = \langle \gamma \rangle$.
- On prend les valeurs suivantes : $R = 4,0 \Omega$, $L = 127 \text{ mH}$, $\Phi_M = 5 \text{ T} \cdot \text{m}^2$ et $\omega_s = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$. Tracez Γ pour ω variant entre 0 et ω_s . Mesurez le couple maximum.
- Tracez sur la même figure la courbe de Γ avec $R = 20 \Omega$. Commentez.
- On définit le rendement $e = \frac{P_{meca}}{P_{meca} + P_J}$, avec P_{meca} la puissance mécanique fournie par le moteur et P_J la puissance dissipée par effet Joule. Tracez $e(\omega)$ dans les deux cas précédents. Commentez.
- Tracez, pour R variant entre 1Ω et 35Ω :
 - la courbe $\Gamma_0(R)$ où Γ_0 représente le couple au démarrage
 - la courbe $\omega_{max}(R)$ où ω_{max} représente la pulsation pour laquelle le couple maximal est atteint
 - la courbe $e_{max}(R)$ où e_{max} représente le rendement en ω_{max} .
- En pratique, on construit souvent des moteurs avec une résistance R faible, en ajoutant une résistance plus forte qui se met en série de la première au démarrage. Expliquez pourquoi.
- Simulez l'évolution de la vitesse de rotation du moteur depuis son démarrage, avec les hypothèses suivantes :

- son moment d'inertie vaut $J = 2,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- sa résistance R vaut 25Ω tant que $\omega < 0,7\omega_s$ puis 4Ω ensuite
- il est soumis à un couple de frottements $C_f = -2 \times 10^{-2}\omega - 3 \times 10^{-5}\omega^2$
- il soulève une charge $m = 30 \text{ kg}$ au bout d'une chaîne enroulée sur une poulie de diamètre $d = 12 \text{ cm}$

Réponses aux exercices

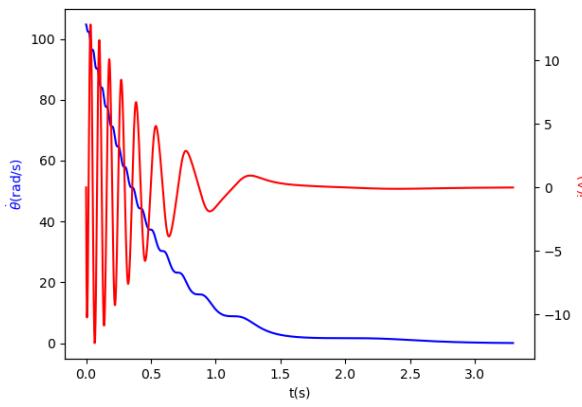
Réponses de l'exercice [EM3.1](#) : Freinage par courants de Foucault [**]

Donc $\tau \ddot{v} + v = 0$ avec $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2} = 0,6s$ et $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$.

Le temps de traversée t vérifie vaut $e^{-t/\tau} = A - \frac{a}{v_0 \tau}$ et on en déduit que $v_1 - v_0 = -\frac{a}{\tau} = 16 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$

Réponses de l'exercice [EM3.2](#) : Freinage d'une bobine en rotation [**]

1. $J\ddot{\theta} = iSBN \cos \theta$
2. $e = -SNB\dot{\theta} \cos \theta$ puis $L\frac{di}{dt} + ri = -SNB\dot{\theta} \cos \theta$
3. Si N est faible alors $\tau\ddot{\theta} + \cos^2 \theta \dot{\theta} = 0$ avec $\tau = \frac{Jr}{S^2 B^2 N^2}$.



4.

Réponses de l'exercice [EM3.3](#) : Lévitation magnétique [***]

1. $B_r(r, z) = \frac{3\mu_0 N_1 i_1 a_1^2 r z}{4(a_1^2 + z^2)^{5/2}}$
2. La tension induite vaut $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3} N_2 \pi a_2^2 \frac{di_1}{dt}$. Donc $I_2 = \frac{-1}{R_2 + jL_2 \omega} \frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3} \pi a_2^2 j\omega I_1$
3. $F_z = -2\pi i_2 a_2 \frac{3\mu_0 N_1 i_1 a_1^2 a_2 z_2}{4d^5}$
4.
$$F_z = \frac{1}{2} \Re e \left[2\pi \frac{3\mu_0 N_1 a_1^2 z_2 a_2^2}{4d^5} \frac{1}{R_2 - jL_2 \omega} \frac{\mu_0 N_1 N_2 a_1^2}{2d^3} \pi a_2^2 (-j\omega) I_1 I_1^* \right]$$

$$= \frac{3\pi^2 \mu_0^2 N_1^2 N_2 a_1^4 a_2^4 z_2}{4d^8} I_{1e\text{ff}}^2 \frac{L_2 \omega^2}{R_2^2 + L_2^2 \omega^2}$$
5. $F_z = 0,034 \text{ N}$ soit la force nécessaire pour faire léviter 3,4 g : c'est faible.
6. Mettre un noyau de fer doux.

Réponses de l'exercice [EM3.4](#) : Modèle électrique équivalent du haut-parleur (CCP) [***]

1. Le TQM appliqué à la membrane dans le référentiel terrestre indique donc que $m\ddot{x} + f\dot{x} + kx = -2\pi Ni\rho B$
2. Loi des mailles : $u = Ri + L\frac{di}{dt} - 2\pi\rho N\dot{x}$.
3. $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{4\pi^2 \rho^2 N^2 j\omega}{-m\omega^2 + j\omega f + k}$
4. $L_m = \frac{4\pi^2 \rho^2 N^2 B^2}{k} = 1 \text{ mH}$, $R_m = \frac{4\pi^2 \rho^2 N^2 B^2}{f} = 0,02 \Omega$ et $C_m = \frac{m}{4\pi^2 \rho^2 N^2 B^2} 1,75 \text{ F}$
5. $\mathcal{P} = U_{eff}^2 \Re e \left[\frac{1}{\underline{Z}} \right]$

La courbe montre que ce HP est efficace entre 8 Hz et 300 Hz environ : il est plutôt fait pour les basses.

Réponses de l'exercice [EM3.5](#) : Étude d'un moteur à courant continu (E3A) [***]

1. $\phi = 2abB \sin \theta$ donc $e = -2abB \cos \theta \Omega$.
2. $e_t = \frac{4abB}{\pi} N \Omega$ donc $\Phi_0 = \frac{4abBN}{\pi}$.
3. Évident en appliquant la loi des mailles.
4. $C_{em} = \frac{4iBabN}{\pi} = \Phi_0 i$.
5. Le TMC donne rapidement $J\dot{\Omega} = \Phi_0 i - \beta\Omega - C_u$
6. $U_{nom} = \Phi_0 \Omega_{nom} + RI_{nom}$. On en tire $\Phi_0 = 36,3 \times 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{s}$
7. $J\dot{\Omega} + \left(\beta + \frac{\Phi_0^2}{R}\right)\Omega = \frac{\Phi_0 U}{R} - C_u$
On trouve donc $\tau = \frac{J}{\beta + \Phi_0^2/R} = 1,82 \text{ ms}$
On trouve aussi $\Omega_{lim} = \frac{\Phi_0 U / R - C_u}{\beta + \Phi_0^2 / R}$
8. En régime nominal : $C_u = \frac{\Phi_0 U}{R} - \Omega_{lim} (\beta + \Phi_0^2 / R) = 87 \text{ mN} \cdot \text{m}$
9. Moteur bloqué : $\Omega = 0$ et $\dot{\Omega} = 0$ donc $U = Ri_d$ soit $i_d = 50 \text{ A}$: c'est trop, le moteur va cramer.
10. Pour que le moteur démarre, il faut que $\frac{\Phi_0 U}{R} - C_u > 0$ donc $U_{dmin} = \frac{RC_u}{\Phi_0} = 0,58 \text{ V}$.

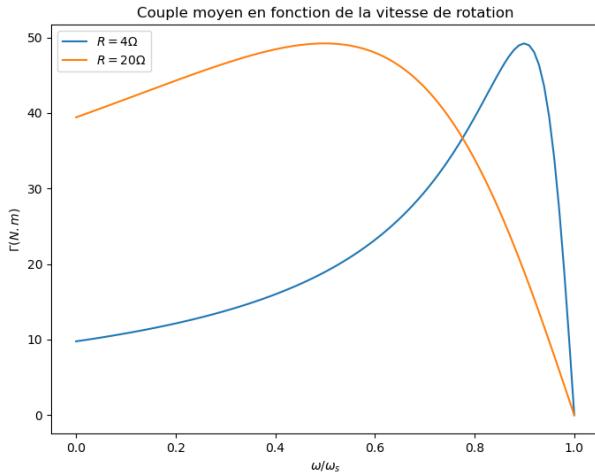
Réponses de l'exercice EM3.6 : Freinage de la chute d'un aimant [****]

1. $fem(t) = \mu_0 M(Z - z) a \frac{a^2 - (Z - z)^2}{((Z - z)^2 + a^2)^3} \dot{z}$
2. $d\mathcal{P} = \frac{fem^2}{R} = fem^2 \frac{\sigma e}{2\pi a} dZ$
3. On intègre en posant $u = Z - z$:
$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\mu_0^2 M^2 \sigma e a}{2\pi} \dot{z}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \frac{(u^2 - a^2)^2}{(u^2 + a^2)^6} du \\ &= \frac{\mu_0^2 M^2 \sigma e}{128 a^4} \dot{z}^2 \end{aligned}$$
4. $\ddot{z} + \frac{\mu_0^2 M^2 \sigma e}{128 ma^4} \dot{z}^2 = -g$.
La vitesse limite vaut donc (en valeur absolue) $v_{lim} = \frac{128ma^4 g}{\mu_0^2 M^2 \sigma e}$
5. AN : $M = \sqrt{\frac{128ma^4 g}{\mu_0^2 \sigma e v_{lim}}} = 6,7 \text{ A} \cdot \text{m}^2$

Réponses aux TDs numériques

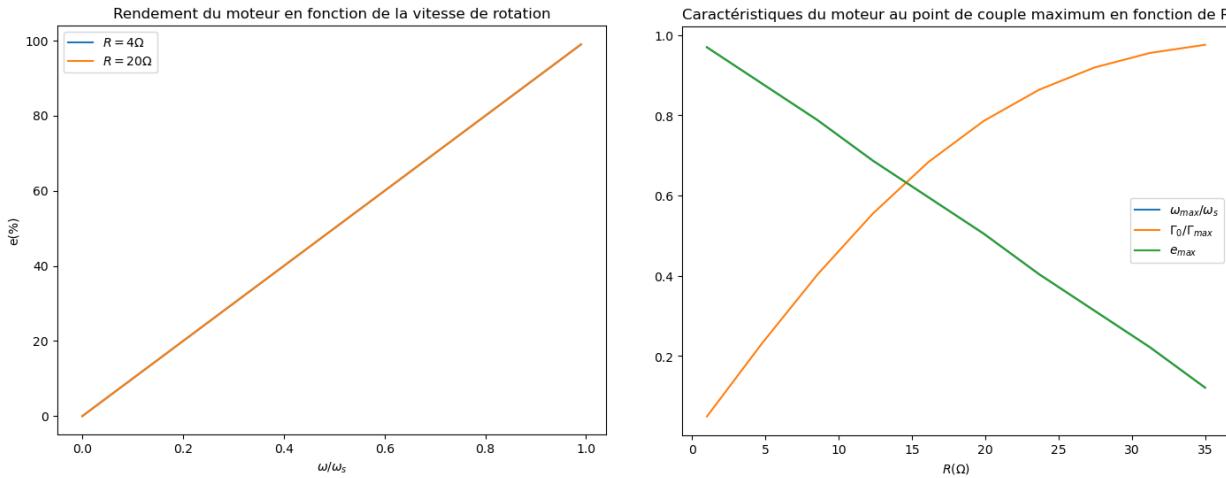
Réponses au TD d'info : Moteur asynchrone

On a $\Phi = \Phi_M \cos(\omega_r t)$ avec $\Phi_M = B.N.S$ donc $e = \omega_r \Phi_M \cos(\omega_r t - \frac{\pi}{2})$. Par la loi des mailles passée en RSF, on obtient $i = \frac{e}{R+jL\omega_r} = \frac{-j\omega_r \Phi_M e^{j\omega_r t}}{R+jL\omega_r}$. Cela crée un moment magnétique et donc un couple $\gamma = i \cdot \Phi_M \cdot \cos(\omega_r t - \frac{\pi}{2})$ soit un couple moyen $\Gamma = \frac{1}{2} \Re [j\Phi_M i(0)]$.



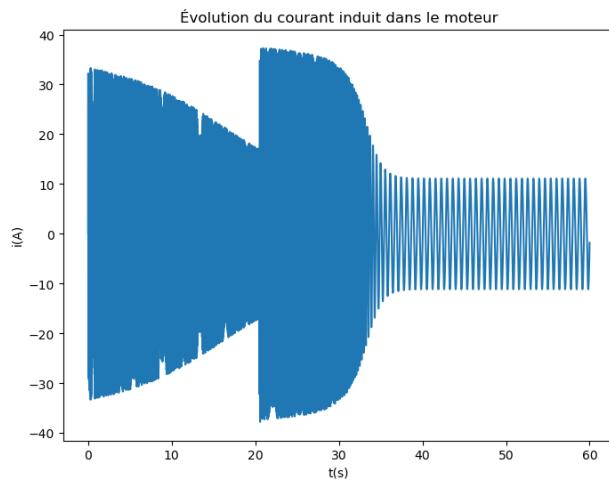
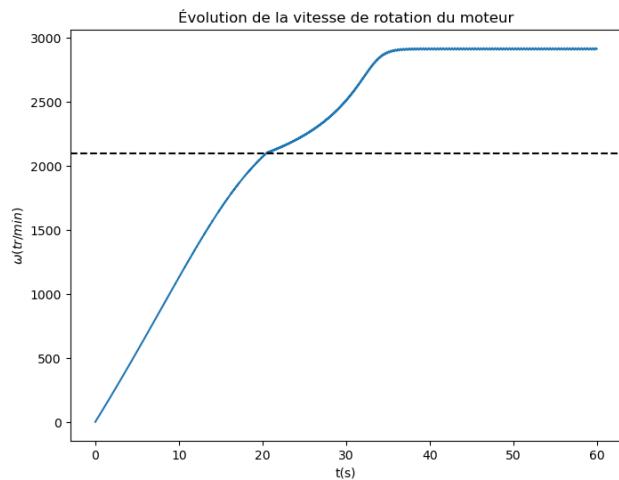
Ce couple passe par un maximum pour une vitesse de rotation située un peu avant ω_s . Par ailleurs, le moteur consomme une puissance moyenne $P_J = \frac{1}{2}R|i|^2$ et restitue une puissance mécanique $P_{meca} = \Gamma \cdot \omega$. En traçant le rendement, on constate qu'il augmente avec la vitesse de rotation. En analysant les courbes en fonction de la résistance (la courbe bleue est confondue avec la verte), on constate donc que :

- le couple maximum ne dépend pas de R
- pour une résistance faible, le couple maximum est atteint pour une vitesse de rotation proche de ω_s , ce qui assure un bon rendement ; par contre le couple au démarrage est faible
- pour une résistance forte, le couple maximum est atteint pour une vitesse de rotation faible, ce qui donne un mauvais rendement ; par contre le couple au démarrage est fort



Pour résoudre temporellement le démarrage du moteur, on met ensemble les équations obtenues précédemment :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} &= \frac{i \cdot \Phi_M \cdot \sin(\omega_s t - \varphi) - C_f(\dot{\varphi}) - mg \frac{d}{2}}{J} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\Phi_M \cdot (\omega_s - \dot{\varphi}) \cdot \sin(\omega_s t - \varphi) - R(\dot{\varphi}) \cdot i}{L} \end{cases}$$



Introduction à la mécanique quantique

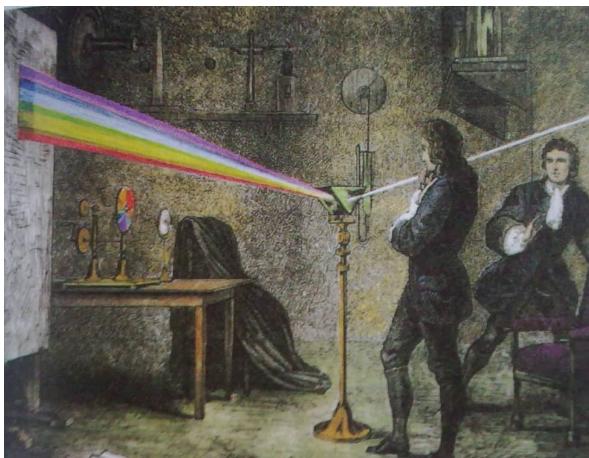
Cours

Les lois de la mécanique, qui régissent les mouvements des objets, ont été établies par Newton puis améliorées au fur et à mesure. Par contre, la lumière est longtemps restée une énigme pour les physiciens. La lumière posait problème, car on sait aujourd’hui qu’elle possède fondamentalement des propriétés à la fois relativistes et quantiques qui rendaient son comportement difficile à expliquer à partir des modèles classiques. Ce sont ces propriétés, et les conséquences qu’elles ont révélé sur le fonctionnement de la matière à l’échelle atomique, que nous allons effleurer dans ce chapitre.

MQ1.A. Quantification de la lumière

A.1. La lumière en 1900

L’analyse de la lumière a commencé au XVII^{ème} siècle avec Newton et Huyghens. Snell et Descartes avaient énoncé les lois de la réflexion et de la réfraction, qui indiquaient comment la lumière changeait de direction sur un dioptre ou un miroir ; dans un même temps, Grimaldi observait la diffraction de la lumière. Huyghens, par des analogies avec les vagues à la surface de l’eau, parvint à expliquer ces lois en supposant que la lumière était une onde. Mais dans le même temps, Newton décomposait la lumière blanche grâce à un prisme, et pensait que les phénomènes observés seraient plus proches d’une description corpusculaire, où des particules de lumière ayant chacune leur couleur se déplaçaient indépendamment les unes des autres.



(a) Isaac Newton décomposant la lumière blanche. (*Crédit : The Spalenka Letters*)



(b) Christian Huyghens. (*Crédit : Wikipedia*)

FIGURE MQ1.1 – Newton et Huyghens, pionniers de l’étude de la lumière.

Dans le même temps, Fermat expliquait les lois de la réflexion et de la réfraction par le principe du plus court chemin : pour aller d’un point A à un point B, la lumière choisit toujours un chemin correspondant à un minimum local du temps de parcours. Ce principe fait plutôt penser à la lumière comme formée de corpuscules, mais n’explique pas comment elles choisissent leur chemin.

Au début du XIX^{ème} siècle, Fresnel publie un mémoire révolutionnaire sur la théorie de la diffraction. La lumière y est traitée comme une onde, et de nombreuses conséquences en sont déduites. Les prédictions de Fresnel se révèlent toutes conformes à l’expérience, et l’opinion des physiciens, jusque-là plutôt favorables à la théorie corpusculaire, commence à changer. Mais c’est dans la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle que la théorie ondulatoire de la lumière triomphe : Maxwell publie les équations de l’électromagnétisme, et montre qu’elles admettent des solutions qui sont les ondes lumineuses. Il prédit des ondes dans d’autres domaines, que Hertz découvre peu après. Il reste juste un problème conceptuel à régler : une onde se déplace dans quelque chose, par exemple le son se déplace dans l’air ; mais là, on a une onde qui se déplace dans rien du tout. On postule l’existence d’un matériau invisible, l’éther, dans lequel se déplacent ces ondes, mais l’expérience de Michelson et Morley dans les années 1880 montre que cet éther n’existe pas, ou du moins ne se comporte pas comme on s’y attend.

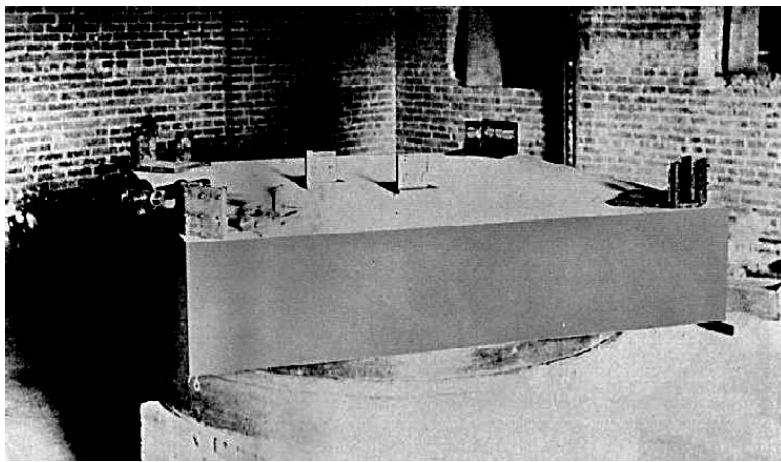
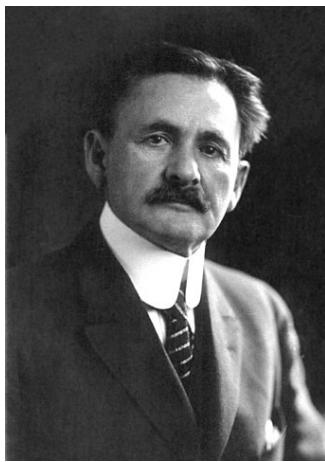
(a) Augustin Fresnel. ([Crédit : Wikipedia](#))(b) James Clerk Maxwell. ([Crédit : Wikipedia](#))(c) Michelson, et la pierre sur laquelle était posée son expérience avec Morley. ([Crédit : Wikipedia](#))

FIGURE MQ1.2 – Au XIX^{ème} siècle, la théorie ondulatoire triomphe avec Fresnel et Maxwell, mais des expériences comme celle de Michelson restent inexpliquées.

A.2. Le photon

Au début du XX^{ème} siècle, outre le problème de l'éther, d'autres phénomènes expérimentaux résistent à toute explication par la théorie ondulatoire de la lumière :

- le rayonnement du corps noir : tout objet à une température T rayonne de la lumière qui vérifie deux propriétés : d'une part l'intensité totale rayonnée varie proportionnellement à T^4 , d'autre part l'émission est maximale pour une longueur d'onde inversement proportionnelle à T . Ainsi, un objet à 300 K émet essentiellement autour de $\lambda = 10 \mu\text{m}$, tandis que le Soleil à 6000 K, soit 20 fois plus chaud, émet à une longueur d'onde 20 fois plus courte, autour de 500 nm.

Wien a expliqué ce spectre émis par un modèle d'interaction entre l'onde lumineuse et la matière. Il explique bien la courbe du côté des grandes longueurs d'ondes, mais aux courtes longueurs d'onde, sa formule diverge. En 1900, Max Planck reprend ces calculs en postulant que la lumière de fréquence f ne peut échanger de l'énergie avec la matière que par paquets d'énergie $E = h.f$ où $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ est la constante de Planck. Les résultats trouvés sont en accord parfait avec l'expérience. À ce moment-là, Planck ne pense pas remettre en question la théorie ondulatoire de la lumière ; il postule uniquement une quantification des **échanges** d'énergie.

- l'effet photoélectrique : un conducteur chargé électriquement peut être déchargé par exposition à un rayonnement lumineux de courte longueur d'onde ; plus exactement, il existe pour chaque matériau une longueur d'onde limite en-dessous de laquelle l'effet a lieu, et au-dessus de laquelle il n'a pas lieu. Cet effet peut s'expliquer par le postulat de Planck sur les échanges d'énergie : il faut que l'énergie $h.f$ soit suffisante pour arracher les électrons au métal.
- l'effet Compton : lorsqu'on envoie de la lumière sur un atome, Compton observe, en 1922, qu'une partie de la lumière diffusée a une fréquence moindre que la lumière incidente, tandis que des électrons sont éjectés. Dans cet effet, la postulat d'échanges de paquets d'énergie $h.f$ ne suffit plus, il faut aussi admettre qu'il y a un échange de quantité de mouvement.

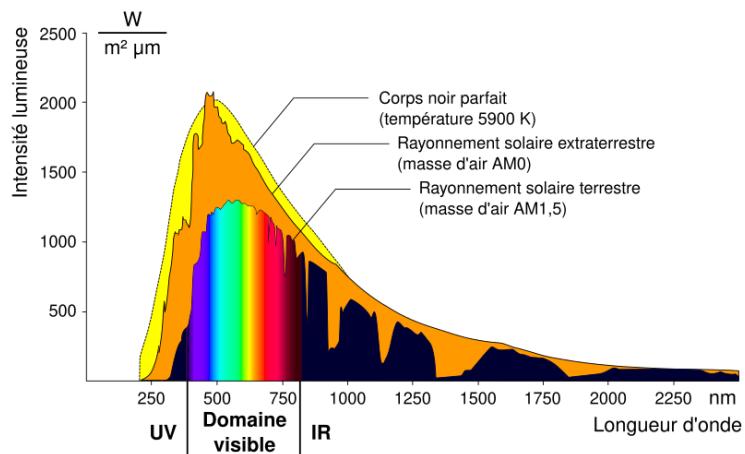
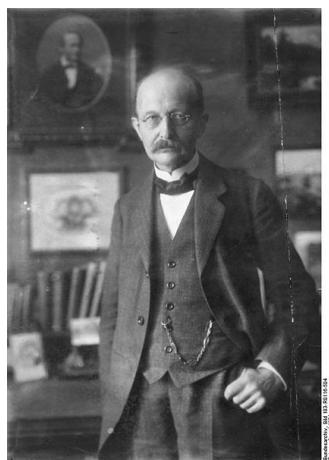
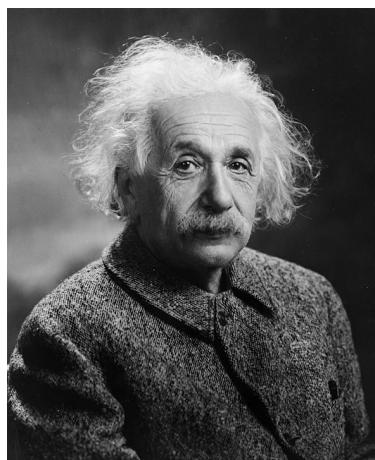


FIGURE MQ1.3 – Le spectre d'émission du Soleil est très proche d'un spectre de corps noir parfait. ([Crédit : Wikipedia/Degreen](#))



(a) Max Planck. ([Crédit : Wikipedia](#))



(b) Albert Einstein. ([Crédit : Wikipedia](#))

FIGURE MQ1.4 – Planck et Einstein, les pères de la théorie des quantas.

En 1905, bien avant la découverte de l'effet Compton, Einstein reprend les calculs de Planck sur le rayonnement du corps noir. En calculant l'entropie de la lumière, il constate qu'elle ressemble beaucoup à l'entropie d'un gaz parfait de particules d'énergie $h.f$. Il publie alors un article révolutionnaire dans lequel il ressuscite la vieille théorie corpusculaire de la lumière : l'échange d'énergie quantifié de Max Planck s'explique simplement, d'après lui, par l'absorption ou l'émission de particules de lumière appelées *photons*. A la fin de son article, Einstein propose d'expliquer de même l'effet photoélectrique.

L'article d'Einstein ne convainc pas grand monde ; mais la même année, Einstein publie 3 autres articles qui ont un bien plus grand retentissement, 2 sur la relativité et un sur le mouvement brownien. Ces autres articles le rendent célèbre, même si la plupart des physiciens pensent qu'il s'est trompé sur les photons. Mais avec le temps, d'autres expériences lui donneront raison, en particulier l'effet Compton en 1922.

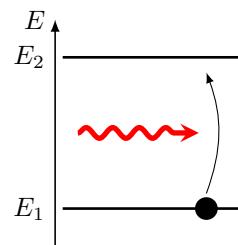
A.3. Absorption et émission de photons

En analysant le rayonnement du corps noir sous l'aspect de photons qui se font absorber ou émettre, Einstein a montré qu'il existe 3 mode d'interaction entre la lumière et la matière.

L'absorption

Définition : Absortion

Un système dans un état d'énergie E_1 peut passer à un autre état d'énergie $E_2 > E_1$ en absorbant un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$.



Remarque : On peut aussi écrire $E_2 - E_1 = \frac{\hbar\omega}{2\pi}$ qu'on note $E = \hbar\omega$ avec $\hbar = \frac{\hbar}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ la constante de Planck réduite.

L'absorption est à la base de beaucoup de phénomènes autour de nous, en particulier la majorité des couleurs que nous observons sont dues à l'absorption de la lumière. L'étude de l'absorption de diverses substances en fonction de la longueur d'onde permet de remonter aux états d'énergie possible de ce système, et particulièrement des électrons car ce sont les plus légers et ceux qui font le plus souvent les transitions par absorption. En étudiant différents spectres, on observe des pics d'absorption étroits, ou bandes d'absorption larges (figure MQ1.5).

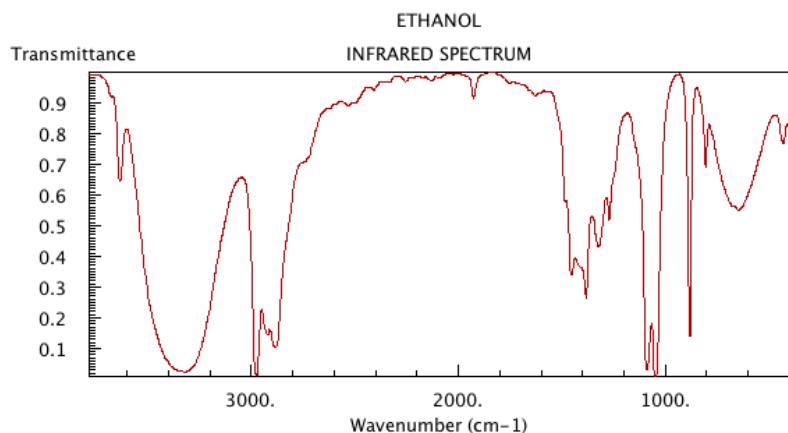


FIGURE MQ1.5 – Spectre d'absorption dans l'infrarouge de l'éthanol. (Crédit : Wikipedia/Sah002)

En comparant ces spectres, on fait apparaître une règle générale que vous démontrerez l'an prochain à partir de l'équation de Schrödinger :

Propriété : Niveaux et bandes d'énergie

Les états que les électrons peuvent occuper dans un système quantique ne peuvent pas prendre toutes les énergies possibles :

- si les électrons sont confinés dans une zone précise de l'espace, alors les états électroniques ont des niveaux d'énergie discrets, séparés les uns des autres
 - si les électrons sont libres de se déplacer, alors les états électroniques appartiennent à des bandes d'énergies continues

Par exemple, les plantes sont vertes car elles contiennent de la chlorophylle qui absorbe la lumière bleue et rouge correspondant à deux transitions énergétiques différentes entre des états différents. Tous les pigments ou colorants fonctionnent de la même manière ; ce qui change de l'un à l'autre, c'est l'énergie qui sépare les états électroniques, donc la fréquence de la lumière absorbée. Du coup, le tracé du spectre d'absorption d'une molécule met en évidence les transitions énergétiques dans cette molécule qui sont une caractéristique de celle-ci : ainsi, par spectroscopie, on peut repérer la présence de certaines molécules dans un gaz (capteurs de CO_2), ou identifier des groupes chimiques dans une molécule....

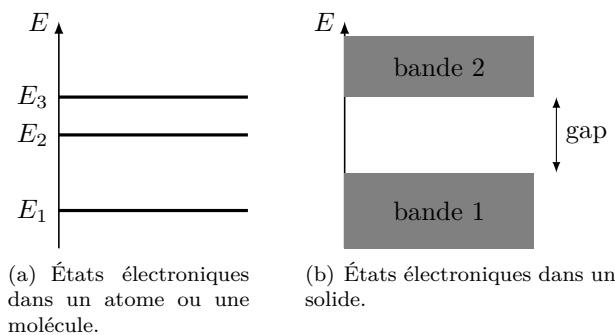


FIGURE MQ1.6 – États électroniques.

Cette absorption donne de l'énergie à un électron du solide ; le plus souvent, il va perdre cette énergie sous forme d'agitation thermique. Parfois, cette énergie permet à un électron d'échapper à un piège. Ainsi, quand on réalise des sandwichs de semiconducteurs, on arrive à créer des profils qui stockent les électrons dans un *puits quantique*. Si un photon avec assez d'énergie arrive, il libère l'électron de son puits, et si on a mis une tension électrique, on récupère cet électron sous forme de courant. Les détecteurs de lumière (capteur d'appareil photo, caméras thermiques,...) fonctionnent selon ce principe (figure MQ1.7).

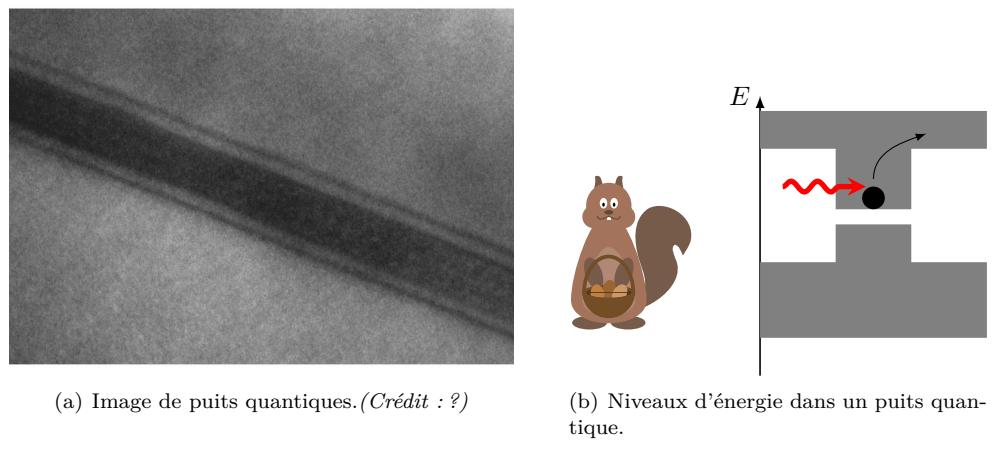
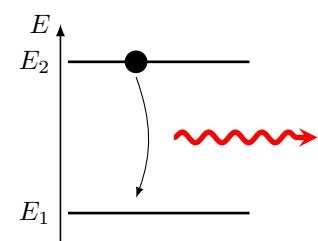


FIGURE MQ1.7 – Puits quantique.

L'émission spontanée

Définition : Émission spontanée

Un système dans un état d'énergie E_2 peut passer à un autre état d'énergie $E_1 < E_2$ en émettant spontanément un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$.



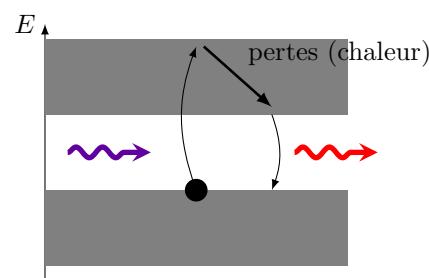
L'émission spontanée est à la base de presque toutes les sources de lumière, dont le principe est de donner de l'énergie à un électron, qui va alors émettre de la lumière. Il existe différentes techniques pour cela :

- dans les objets chauffés, comme les ampoules halogène, c'est l'agitation thermique qui fournit l'énergie aux électrons
- dans les lampes à décharge (comme les lampes au sodium, oranges) c'est une décharge électrique qui ionise les atomes ; les électrons arrachés reviennent alors se fixer sur les ions sur un état excité, puis perdent cette énergie

- dans les LED, on juxtapose deux semiconducteurs qui imposent une énergie différente aux électrons, formant une marche d'escalier. La tension d'une pile donne assez d'énergie aux électrons pour arriver du côté haut de la marche, et quand ils tombent, ils émettent un photon
- la fluorescence combine absorption et émission. On éclaire un solide avec des ultraviolets, rayons de grande énergie. Les électrons les absorbent, passent dans la bande d'énergie supérieure, perdent de l'énergie dans la bande sous forme de chaleur, puis réémettent un photon dont l'énergie correspond exactement au gap.



(a) Fluorescence de la fluorine. (Crédit : Wikipedia/H.Grobe)



(b) Principe de la fluorescence.

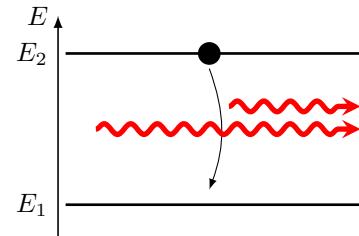
FIGURE MQ1.8 – Fluorescence.

L'analyse du phénomène absorption/émission de lumière est utile pour étudier les fonctionnements de celui-ci à l'échelle microscopique. Si le photon émis a une énergie différente du photon absorbé, c'est qu'il s'est passé quelque chose à l'échelle microscopique.

Les phénomènes d'absorption et d'émission spontanée étaient connus avant Einstein ; mais celui-ci a découvert le troisième type d'interaction lumière-matière :

Définition : Émission stimulée

Un système dans un état d'énergie E_2 peut passer à un autre état d'énergie $E_1 < E_2$ sous l'effet de la stimulation par un photon de fréquence f telle que $E_2 - E_1 = h.f$; dans ce cas, le photon émis aura exactement les mêmes caractéristiques (énergie, direction, phase,...) que le photon stimulant, et l'effet sera d'autant plus fort qu'il y a beaucoup de photons stimulants.



Cette découverte est à la base du LASER, dans lequel, grâce à des miroirs, on provoque une émission stimulée qui s'amplifie jusqu'à obtenir un faisceau de lumière très intense.

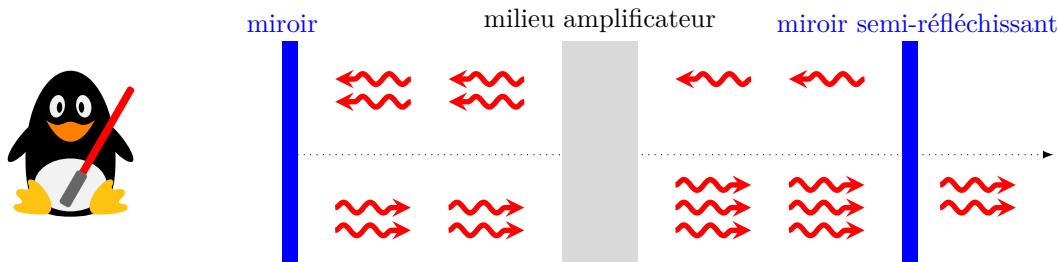


FIGURE MQ1.9 – Cavité LASER.

A.4. L'effet photoélectrique

L'effet photoélectrique consiste en une décharge d'un métal chargé négativement par l'éclairage avec de la lumière de longueur d'onde courte. Il est illustré sur la figure MQ1.10 :

- on charge un métal en électricité statique par contact avec un bâton d'ébonite frotté ; les charges se répartissent partout, et deux feuilles d'aluminium initialement verticales se repoussent car elles se chargent toutes deux négativement

- on éclaire le métal avec de la lumière visible : rien ne se passe
- on éclaire le métal avec de la lumière UV : les charges disparaissent, les feuilles d'aluminium se rapprochent

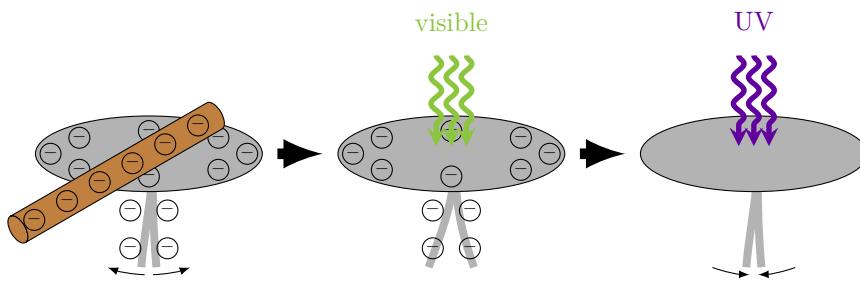


FIGURE MQ1.10 – Effet photoélectrique.

Pour comprendre cet effet, il faut regarder le schéma énergétique de la figure MQ1.11 :

- les électrons se promenant dans le vide ont une énergie $\frac{1}{2}mv^2$ qui peut prendre toutes les valeurs positives
- les électrons dans le métal sont dans des bandes d'énergie qui sont toutes situées au-dessous de 0 car sinon les électrons s'échapperait tous du métal
- on note $-E_p$ l'énergie de l'électron du métal le plus énergétique

Alors tout photon ayant une énergie supérieure à E_p pourra faire passer un électron dans la bande d'énergie des électrons libres du métal : ainsi les rayons de courte longueur d'onde arrivent à arracher des électrons du métal, qui perd ses charges et se décharge.

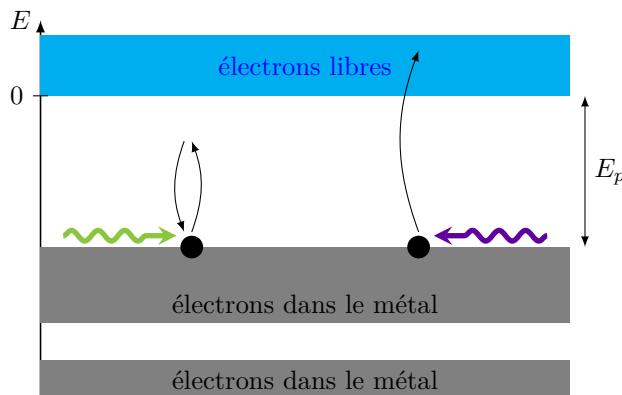


FIGURE MQ1.11 – Explication de l'effet photoélectrique.

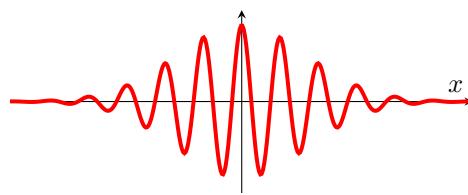
MQ1.B. Description des particules quantiques

B.1. Le photon

L'analyse des différentes expériences faisant intervenir les interactions entre la lumière et la matière permettent de proposer une description quantique du photon.

Propriété : Photon

La lumière est constituée de particules de lumière appelées *photons* qui se comportent comme des ondes localisées ; on parle de *paquets d'onde*. Ces photons possèdent :



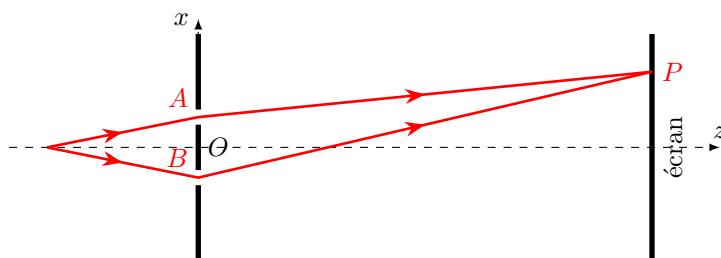
- une fréquence f correspondant à la fréquence de l'onde associée
- une masse nulle
- une énergie donnée par la relation de Planck-Einstein

$$E = h \cdot f = \hbar \cdot \omega \quad (\text{MQ1.1a})$$

- une vitesse qui dépend du milieu traversé ; dans le vide elle vaut $c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- une quantité de mouvement (ou impulsion)

$$p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k \quad (\text{MQ1.1b})$$

Comment se manifeste cet dualité onde-corpuscule, ou le fait que le photon est à la fois une onde et une particule ? L'aspect ondulatoire se voit surtout dans les interférences. Si on réalise l'expérience des fentes d'Young (figure MQ1.12), la figure d'interférence sur l'écran montre que l'onde passe par les deux fentes, puis interfère.



(a) Dispositif des fentes d'Young



(b) Figure d'interférences

FIGURE MQ1.12 – Dispositif des fentes d'Young.

Dans l'interféromètre de Mach-Zehnder, la lumière est séparée en deux dans deux canaux puis recombinaise en sortie après avoir suivi deux chemins différents. En faisant varier ce qu'elle rencontre dans chaque branche, on peut faire varier le déphasage et donc l'interférence. En sortie, une lame semi-réfléchissante recombine les deux branches. L'avantage de ce dispositif microscopique est qu'on peut y envoyer des photons un par un, et placer en sortie un détecteur qui les compte un par un. On constate alors la chose suivante :

- si le déphasage vaut 0, l'interférence est constructive ; alors on capte systématiquement un photon en sortie
- si le déphasage vaut π , l'interférence est destructive ; alors on ne capte jamais de photon en sortie
- si le déphasage est intermédiaire, l'interférence est entre les deux ; alors on capte parfois un photon en sortie, parfois rien, selon une probabilité qui correspond à l'intensité donnée par la loi d'interférence de Fresnel

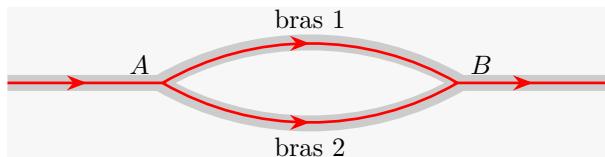


FIGURE MQ1.13 – Interféromètre de Mach-Zehnder.

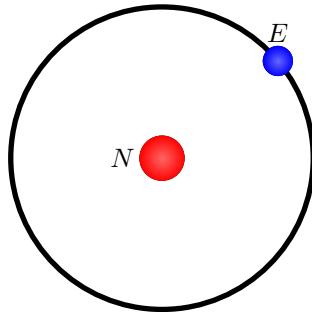
Ainsi, on voit apparaître à la fois l'aspect ondulatoire dans l'existence d'interférences, et l'aspect corpusculaire en ce que le photon ne se coupe pas en 2 : soit il passe, soit il disparaît (en fait ici il repart en arrière), et l'intensité de la lumière correspond à la probabilité qu'il a de sortir.

B.2. Les particules massives

Planck et Einstein ayant postulé que l'énergie de la lumière émise lors d'un processus d'émission était reliée à la différence d'énergie de deux niveaux, le physicien Niels Bohr proposa en 1913 un modèle de l'atome d'hydrogène qui expliquait les spectres observés dans les lampes à décharge à hydrogène. Ce modèle postulait que les électrons, en orbite autour du noyau, possédaient un certain nombre d'orbites stables correspondant à un moment cinétique égal à un entier multiplié par la constante de Planck réduite.

Calcul : Orbites de Bohr

Considérons un atome formé d'un noyau immobile de charge $+e$ et d'un électron de charge $-e$ en orbite autour.



Le PFD projeté sur $\vec{e_r}$ indique que $-mr\dot{\theta}^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-e^2}{r^2}$ soit $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{mr^3}}$. Le moment cinétique vaut donc $L = mr^2\dot{\theta} = \sqrt{\frac{me^2r}{4\pi\varepsilon_0}}$.

Considérons l'état n tel que $L = n\hbar$, alors on tire facilement de l'équation précédente que

$$r_n = n^2 r_1 \text{ avec } r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 53 \text{ pm}$$

Comme l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle prise à 2 fois le rayon, on a aussi

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} \text{ avec } E_1 = \frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

Ce modèle était en excellent accord avec les mesures, mais il restait à expliquer la quantification du moment cinétique. Le physicien Louis de Broglie essaya alors d'appliquer la dualité onde-corpuscule aux électrons. Il proposa d'associer à chaque électron une onde donnée par la relation $p = \frac{\hbar}{\lambda}$.

Calcul : Longueur d'onde de l'onde de matière des électrons dans l'atome de Bohr

Un électron a pour quantité de mouvement $p = mv = mr\dot{\theta} = \frac{L}{r}$, donc dans l'état n on a $p_n = \frac{n\hbar}{r_n} = \frac{n\hbar}{2\pi r_n}$; or $p_n = \frac{\hbar}{\lambda_n}$ donc

$$\lambda_n = \frac{2\pi r_n}{n}$$

Autrement dit, dans l'état n , un tour complet de l'orbite correspond exactement à n longueurs d'onde. La condition de stabilité des orbites s'explique alors simplement par une relation d'interférence constructive après un tour d'orbite.

Propriété : Onde de matière

À toute particule de masse m , on peut associer une onde de matière :

- dont la longueur d'onde est donnée par la relation de De Broglie :

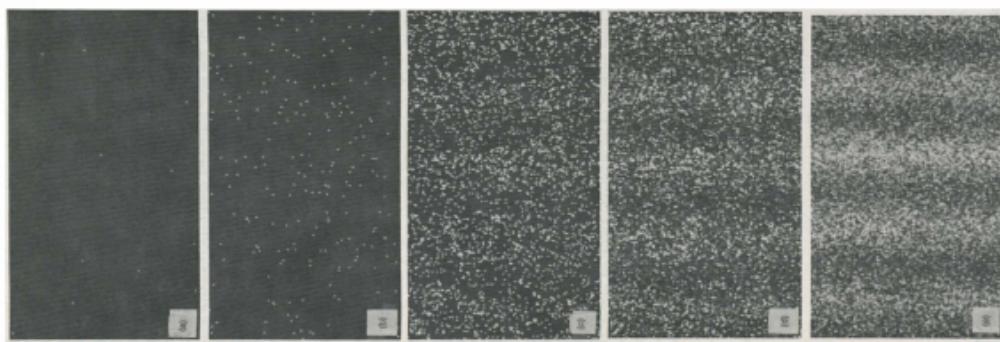
$$p = m.v = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar k \quad (\text{MQ1.2a})$$

- donc la fréquence est donnée par la relation de Planck-Einstein :

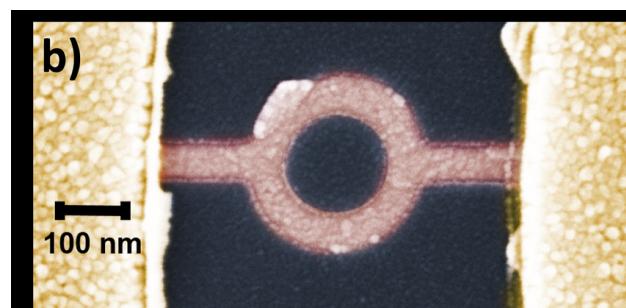
$$E = h.f = \hbar\omega \quad (\text{MQ1.2b})$$

Cette propriété étonnante a été depuis vérifiée expérimentalement ; citons, par analogie avec l'optique, deux exemples (figure MQ1.14) :

- l'expérience des trous d'Young, réalisée en 1961 par Jönsson, montre une figure d'interférence obtenue sur les électrons. En 1989, Tonomura a réalisé cette expérience de nouveau avec quelques électrons ; on voit alors apparaître sur l'écran des impacts localisés correspondant aux électrons, et lorsque ces impacts deviennent suffisamment nombreux, ils forment la figure d'interférence. Cela prouve qu'un seul électron interfère avec lui-même.
- la réalisation d'interféromètres de type Mach-Zehnder montrent également des effets d'interférence, en particulier l'effet Aharonov-Bohm dépendant du champ magnétique situé au milieu de la boucle.



(a) Expérience d'interférence entre électrons : les électrons forment des impacts sur l'écran, mais ces impacts dessinent une figure d'interférence. (Crédit : A. Tomonura)



(b) Interféromètre d'Aharonov-Bohm : les électrons interfèrent après avoir parcouru les deux branches de l'interféromètre. (Crédit : G. Behner)

FIGURE MQ1.14 – Expériences d'interférences sur des électrons.

Programme officiel

Programme officiel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Dualité onde-particule pour la lumière et la matière	
Le photon : énergie, vitesse, masse, impulsion.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence la nécessité de la notion de photon.
Effet photoélectrique.	Interpréter qualitativement l'effet photoélectrique à l'aide du modèle particulaire de la lumière. Établir, par un bilan d'énergie, la relation entre l'énergie cinétique des électrons et la fréquence. Expliquer qualitativement le fonctionnement d'une cellule photoélectrique.
Absorption et émission de photons.	Citer quelques applications actuelles mettant en jeu l'interaction photon-matière (capteurs de lumière, cellules photovoltaïques, diodes électroluminescentes, spectroscopies UV-visible et IR, etc.)
Onde de matière associée à une particule. Relation de de Broglie.	Décrire un exemple d'expérience mettant en évidence le comportement ondulatoire de la matière. Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques. Interpréter une expérience illustrant la dualité onde-particule.

Introduction à la mécanique quantique

QCMs

réponses page 982

 QCM : Compréhension du cours **Q1.**

L'énergie d'un photon est donnée par

- (a). $E = \hbar f$ (b). $E = \frac{hc}{\lambda}$
 (c). $E = \frac{\hbar}{\lambda}$ (d). $E = \hbar\omega$

Q2.

L'impulsion (ou quantité de mouvement) d'un photon est donnée par

- (a). $p = \frac{\hbar}{\lambda}$ (b). $p = \frac{E}{f}$
 (c). $p = \hbar\lambda$ (d). $p = \frac{\hbar}{\lambda}$

Q3.Si un système passe d'un état d'énergie E_1 à un état d'énergie E_2 en absorbant un photon, alors l'énergie de ce photon vaut

- (a). E_2 (b). E_1
 (c). $E_2 - E_1$ (d). $E_1 - E_2$

Q4.Si un système passe d'un état E_2 à un état E_1 par émission stimulée, alors

- (a). le photon émis a une énergie $E_2 - E_1$ (b). le photon émis est dans le spectre visible
 (c). le photon émis a la même phase que le (d). il faut qu'un photon incident ait une
 photon incident énergie $E_2 - E_1$
 (e). le photon émis a la même vitesse que le (f). le photon absorbé a une énergie $E_2 - E_1$
 photon incident

Q5.

La relation de De Broglie donne la longueur d'onde quantique d'une particule :

- (a). $\lambda = \frac{h}{mv}$ (b). $\lambda = \frac{mv}{h}$
 (c). $\lambda = \frac{hm}{v}$ (d). $\lambda = \frac{\hbar}{mv}$

Réponses aux QCMs

Réponses au QCM : Compréhension du cours

Q1.(b) ET (d)

Q2.(b) ET (d)

Q3.(c)

Q4.(a) ET (c) ET (d) ET (e)

Il n'y a pas de photon absorbé.

Q5.(a)