Apuntes Módulo Matemáticas: Análisis de sistemas eléctricos en ciencias

Juan Pablo Guerrero Escudeor

30 abril, 2024

Campos vectoriales

Un campo vectorial $\vec{F}$ es una función que asigna a cada punto (x, y) o (x, y, z) en el espacio un vector $\vec{F}(x, y)$ o $\vec{F}(x, y, z)$. El campo vectorial lo podemos expresar en funciones escalares, una por cada componente i, j, k: $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y)i + Q(x, y)j + R(x, y)k = \vec{F} = Pi + Qj + Rk$. Un campo vectorial se denomina conservativo si es el gradiente de alguna función escalar, es decir existe f tal que $F = \nabla f$. Aquí, f es la función potencial de F.

Integrales de línea

En éstas integrales, en vez de integral en un intervalo (a, b) se integra sobre una curva C dada por ecuaciones paramétricas $x(t)$ y $y(t)$ o por la ecuación vectorial $r(t) = x(t)i + y(t)j$. Por lo tanto, se escribe $\int_C f(x, y)ds$ a la integral de línea de f a lo largo de C.

La longitud de la curva C es $\int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$. Por lo tanto, la fórmula para evaluar una integral de línea es $\int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}$. Si la función es positiva, entonces la integral de línea representa el área de un lado de la figura en la cual la base es C y la altura es $f(x, y)$. Si C es una curva suave por tramos, la integral de f a lo largo de C es la suma de las integrales de cada C_n individual.

Cualquier interpretación física de la integral de línea depende de la interpretación de la función original. Ejemplo, si $p(x, y)$ representa la densidad lineal de un punto (x, y) de un alambre delgado, la masa es la integral de línea de $p(x, y)$ a lo largo de la curva c. Entonces, el centro de masa se puede encontrar en (x, y) donde $x = \frac{1}{m}\int_C x(p(x, y))ds$, y $y = \frac{1}{m}\int_C y(p(x, y))ds$.

La integral de línea original se llama "integral de línea respecto a la longitud de arco", e igual se puede hacer una integral de línea respecto a x o a y. $\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$, y respecto a y: $\int_C f(x, y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$.

Para parametrizar un segmento rectilíneo, que inicia en r_0 y termina en r_1 se hace $r(t) = (1 - t)r_0 + tr_1$ donde $0 \leq t \leq 1$. Tip: el valor de la integral de línea depende tanto los puntos extremos como de la trayectoria, a menos que el campo sea conservativo, así como de la dirección de la curva. Entonces, si integramos respeto a x o a y, la integral si depende de la dirección, pero si integramos respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea no cambia cuando se invierte la dirección.

En 3 dimensiones o en el espacio, la integral de línea a lo larco de $C = \int_c f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}dt$. E igualmente, las integrales respecto a x o a y se escriben, por ejemplo para $\int_C f(x, y, z)dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)dt$, y igual para los casos de dx y dz. En el espacio, evaluamos las integrales de línea de la forma $\int_c P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ expresando todo en términos del parámetro t.

Integrales de línea en campos vectoriales

En un campo vectorial, el trabajo $W = \int_C \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{T}(x,y,z)ds = \int_C F \cdot Tds$, donde $T(x,y,z)$ es el vector unitario tangente en el punto (x,y,z) sobre C. Es decir, el trabajo es la integral de línea respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza. Si la curva C es una curva vectorial, podemos expresar el trabajo como $W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}(t)' dt$, que se puede abreviar como $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Ahora, el trabajo resultante puede ser negativo, lo que puede significar que el campo obstruye el movimiento de la curva. Igual, se sigue cumpliendo que $\int_{-c} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, debido a que el vector tangente T es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazado por $-C$.

La relación entre la integral de línea en un campo escalar, y la integral de línea en un campo vectorial es la siguiente: $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_c Pdx + Qdy + Rdz$, donde F es el campo vectorial $F = Pi + Qj + Rk$. Por ejemplo, la integral de línea $\int_c ydx + zdy + xdz$ se puede expresar como $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $F(x,y,z) = yi + zj + xk$.