Notas para examen

Juan Pablo Guerrero Escudero

28 abr, 2024

Derivadas parciales

Las derivadas parciales de una función en un punto (x_0, y_0) representan las pendientes de las rectas tangentes a las trazas en los planos $y = y_0$ y $x = x_0$. Geométricamente, representan lo mismo que la derivada univariada, considerando que las otras variables independientes permanecen constantes.
Para el cálculo de derivadas parciales, todas las reglas de derivación aplican, solo teniendo en cuenta que una de las variables fija o constante, y así se trata como una función de una sola variable.

Las derivadas de primer y orden superior nos dan información sobre la función, sobre donde es creciente/decreciente, los puntos críticos y su naturaleza, y dónde es cóncava (hacia arriba o hacia abajo).

Derivadas de orden superior: Para una función de dos variables existen 4 derivadas de orden superior, $D_{xx}f$, $D_{xy}f$, $D_{yx}f$ y $D_{yy}f$. A las derivadas parciales de segundo orden $D_{xy}f$ y $D_{yx}f$ se le llaman mixtas o cruzadas. Ojo, para la notación de Jacobi, el orden de derivación se lee de derecha a izquierda, y en la notación de Euler se lee de izquierda a derecha.

Si la función es continua en su dominio, satisface el Teorema de Clairaut o de Schwarz, que dice que si las funciones $D_{xy}f(x_0, y_0)$ y $D_{yx}f(x_0, y_0)$ son continuas en un disco D que contiene al punto (x_0, y_0), entonces $D_{xy}f(x_0, y_0) = D_{yx}f(x_0, y_0)$. Es decir, el orden de derivación es indistinto. Éste teorema aplica no solo para derivadas de segundo orden, sino para derivadas de orden superior también.

Planos tangentes

Un plano tangente es un plano que contiene a las rectas tangentes a las trazas verticales de una superficie. Hay dos ecuaciones para obtener los planos tangentes. Si la superficie está definida por una función $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{1}$$

En cambio si la superficie está definida por una ecuación $f(x, y, z) = c$:

$$0 = D_x f(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_z f(x_0, y_0, z_0) \tag{2}$$

Para escribir las ecuaciones del plano tangente, a veces conviene reescribir a las funciones despejando para z con el fin de convertirla en una función, y usar la fórmula del plano tangente a una función para obtenerlo.

Aproximaciones lineales: Una aproximación lineal o linearización a una función de dos variables en (x_0, y_0) está definida por:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{3}$$

Se puede ver la linearización como lo mismo que la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0), donde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Diferenciales: Si recordamos que la recta tangente sirve como aproximación lineal, entonces cuando hay un cambio en x de tamaño Δx existe el cambio que experimenta la función $y = f(x)$ denotado por Δy, y el que experimenta la recta tangente denotado por dy. En dos variables, se definen los diferenciales dx y dy como las variables independientes, y el diferencial total dz como:

$$dz = D_x f(x, y)dx + D_y(x, y)dy \tag{4}$$

Derivadas direccionales y vector gradiente

Las derivadas parciales nos dicen el cambio cuando solamente una variable está fija. Es decir, lo podemos pensar como solo movimiento en x o solamente movimiento en y. Las derivadas direccionales en cambio nos dicen el cambio que tiene la función en cierta dirección, dada por un vector $\vec{u}$. Éstas nos permiten conocer el cambio máximo o mínimo de una función.

La derivada direccional $D_u f$ representa la taza o razón de cambio de una función f en cualquier dirección $\vec{u}$, donde $\vec{u} =< a, b >$ un vector unitario. La forma operacional de la derivada direccional es la siguiente, teniendo un vector unitario como $\vec{u}$:

$$D_u f(x_0, y_0) = D_x f(x_0, y_0)a + D_y f(x_0, y_0)b \tag{5}$$

En cambio, si no se da el vector pero un ángulo θ de la dirección del vector, el vector unitario se vuelve $\vec{u} =< \cos(\theta), \sin(\theta) >$. **Ojo**: Si se nos da un vector, y no es unitario, podemos hacerlo unitario calculando su norma o magnitud, y dividiendo a y b entre la norma, de tal manera que el vector se convierta en unitario.
El resultado de una derivada direccional se puede interpretar como que la función f crece o decrece x unidades por cada unidad que nos desplazamos en dirección del vector $\vec{u}$, o bien, desplazándonos en dirección del vector unitario.

Tips: Siempre busca simplificar el vector unitario, y usar el sistema correcto de unidades. De ser posible, traslada el resultado a una forma exacta por medio del álgebra, en vez de meter todo en la calculadora.

Otra forma de expresar la derivada direccional es como el producto punto entre el gradiente de f, $\nabla f =< D_x f(x_0, y_0), D_y f(x_0, y_0) >$ y $u =< a, b >$.:

$$D_u f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} \tag{6}$$
$$D_u f(x_0, y_0) = ||\nabla f(x_0, y_0)|| \cdot ||\vec{u}|| \cos(\theta) \tag{7}$$

Y como el vector $\vec{u}$ es unitario:

$$D_u f(x_0, y_0) = ||\nabla f(x_0, y_0)|| \cdot \cos(\theta) \tag{8}$$

En el proceso anterior, donde θ es el ángulo entre los vectores ∇f y $\vec{u}$. Nota, no es lo mismo que la dirección del vector unitario, no confundir. Simplificamos porque la magnitud de $\vec{u}$ es 1, y por lo tanto notamos que los valores de la direccional en un punto dependen de θ ya que $|||\nabla f||$ es constante en (x_0, y_0). Entonces, podemos deducir 3 cosas:

1. $D_u f(x_0, y_0)$ se maximiza cuando $\cos(\theta) = 1$, o $\theta = 0$.
2. $D_u f(x_0, y_0)$ se minimiza cuando $\cos(\theta) = -1$, o $\theta = \pi$.
3. $D_u f(x_0, y_0)$ se anula cuando $\cos(\theta) = 0$, o $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Por lo tanto, lo anterior quiere decir que si ∇f o vector gradiente es diferente a cero, la dirección de máximo crecimiento es la misma que el vector gradiente evaluado en un punto, y el valor máximo de la direccional es $||\nabla f(x_0, y_0)||$. Además, la dirección de máximo decrecimiento es la dirección opuesta al gradiente, y el valor mínimo de la direccional $-||\nabla f(x_0, y_0)||$. Por último, si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, en las direcciones ortogonales o perpendiculares al vector gradiente no hay cambio.

Para obtener la dirección del vector gradiente teniendo sus coordenadas, se hace $\theta = \tan^- 1(\frac{y}{x})$, donde x y y son las componentes del vector gradiente.

Una última cosa es que si el vector gradiente es igual a cero, entonces la derivada direccional es igual a cero en cualquier dirección.

En realidad el gradiente es un campo vectorial, ya que a cada punto en el plano o espacio asigna un vector que da la máxima razón de cambio en ese punto.

Regla de la cadena para funciones de varias variables

Ver presentación en Canva

Integrales dobles

En integrales dobles, se tiene la noción de que el integrando de éstas se forma haciendo "curva de arriba" menos curva de abajo, o curva a la derecha menos curva a la izquierda, y la variable que se mueve sobre el intervalo tiene límites constantes.
Una región D en el plano es de:

1. Tipo 1: se ubica entre dos gráficas de dos funciones continuas de X. Esto es, D queda definida por $(x, y : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x))$. Es decir, x se mueve entre constantes, y y se ajusta a la variable x por medio de alguna función.
2. Tipo 2: se ubica entre las gráficas de dos funciones continuas de Y, esto es, D queda definida por: $(x, y : h_1(x) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d)$. Es decir, y se mueve entre constantes, y x se ajusta a la variable y por medio de alguna función

Para verificar si es tipo 1 (Curva de arriba - curva de abajo) o tipo 2 (curva de derecha - curva de izquierda), se trazan "flechas" desde una a curva a otra, y buscamos que sean continuas las flechas, es decir, que se todas las flechas empiezen en la misma curva y terminen en otra curva.

Integrales dobles: Si la región de integración D es de Tipo 1, entonces la integral doble resutla:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx \tag{9}$$

Y si la región de integración es tipo 2:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy \tag{10}$$

En cualquier caso, el orden de integración nos debe dar el mismo valor del volumen, y de ahí viene el Teorema de Fubini, que dice que si f es una región continua en D, entonces:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dxdy \tag{11}$$

Y por lo tanto podemos decidir un orden de integración sobre otro para facilitar la evaluación. Ojo: en la integral más externa nunca van variables, solo constantes, en ambos casos (Tipo I y Tipo II).

Área superficial

El área de una superficie S definida por $z = f(x,y)$ en una región D está dada por la integral doble

$$A_s = \int\int_D \sqrt{(D_x f)^2 + (D_y f)^2 + 1} dA \tag{12}$$

. Ésta tiene gran similitud con la fórmula de longitud de arco en funciones univariadas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$. Aquí aplican igualmente los conceptos para determinar la región de integración en el apartado de integrales dobles. Como las integrales dobles resultan muchas veces muy complejas de resolver, se usa software como Wolfram o Matlab para resolverlas.