Intégration sur un segment

M. GUILLERON, UNC

2021

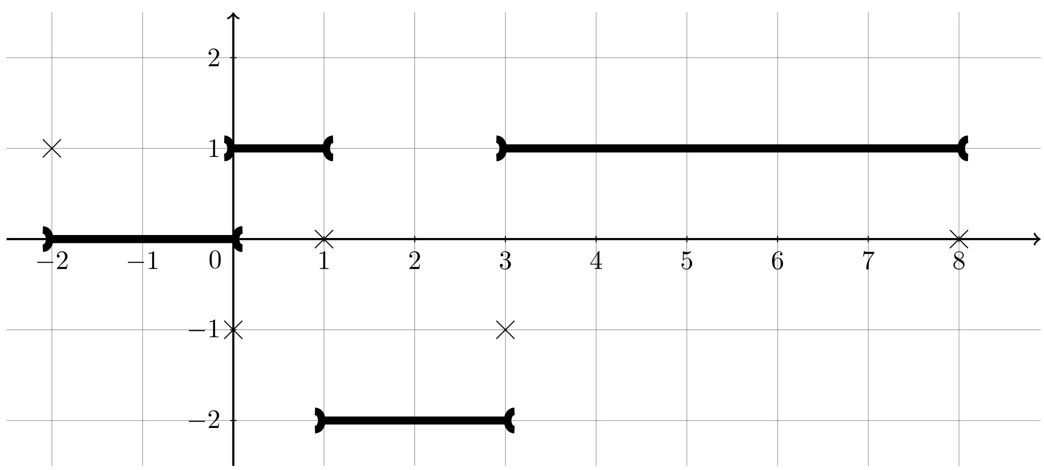
Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
ξ se lit xi, ω se lit omega, μ se lit mu et ν se lit nu.

1 Fonction en escalier

Définition 1. *Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.*
Soit $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de réels.
$(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ est appelé une subdivision de $[a,b]$ ssi

$$a = \xi_0 \leq \xi_1 \leq ... \leq \xi_n = b.$$

Définition 2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$.*
f est dite en escalier si il existe une subdivision $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]\xi_i, \xi_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$.
Une telle subdivision est dite adaptée ou subordonnée à f.



Exemple 1.
Cette fonction f est en escalier ($a = -2$ et $b = 8$), avec par exemple $n = 4$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (-2, 0, 1, 3, 8)$.
On peut aussi prendre $n = 6$ et $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6) = (-2, -1, 0, 1, 3, 6, 8)$: cette subdivision reste adaptée à f.

Remarque 1. *Si $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ est adaptée, toute subdivision plus fine $(\mu_j)_{0\leq j\leq m}$ (ce qui signifie $\{\xi_i,\ 0 \leq i \leq n\} \subset \{\mu_j,\ 0 \leq j \leq m\}$) est encore adaptée.*

Proposition 1. *Notons $\mathcal{E}_{sc}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*
$\mathcal{E}_{sc}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K})$.

Démonstration

$\mathcal{E}_{\text{sc}}([a,b],\mathbb{K})$ est non vide car il contient la fonction constante $x \mapsto 1$ ($(\xi_0,\xi_1)=(a,b)$ est une subdivision adaptée).

Soient $f,\, g \in \mathcal{E}_{\text{sc}}([a,b],\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On pose $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(\omega_j)_{0\leq j\leq m}$ des subdivisions adaptées à f et g.

Soit $(\mu_k)_{0\leq k\leq p}$ la suite des éléments de $\{\xi_i,\ 0\leq i\leq n\}\cup\{\omega_j,\ 0\leq j\leq m\}$ rangés dans l'ordre croissant.

C'est une subdivision adaptée à f et à g (car plus fine que les subdivisions initiales).

On peut alors en déduire que $f+\lambda g$ est en escalier.

2 Définition de l' intégrale

2.1 Intégration des fonctions en escalier

Propriété-définition 1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ en escalier.*

Soit $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.

Pour tout i entier entre 0 et $n-1$, on pose λ_i l'unique valeur prise par f sur $]\xi_i,\xi_{i+1}[$.

La quantité $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)\lambda_i$ ne dépend pas du choix de la subdivision $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ adaptée à f et est appelée intégrale de f sur $[a,b]$ et notée $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)dx$.

Démonstration

Soient $(\xi_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(\omega_j)_{0\leq j\leq m}$ deux subdivisions adaptée à f.

Soit $(\mu_k)_{0\leq k\leq p}$ définie comme ci-dessus.

Notons ν_k la valeur prise par f sur $]\mu_k,\mu_{k+1}[$.

Montrons que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)\lambda_i=\sum_{k=0}^{p-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k (*)$.

Fixons $i \in [\![0,n-1]\!]$.

Fixons $a_i,\ a_{i+1}\in[\![0,p-1]\!]$ tels que $\xi_i=\mu_{a_i}<\mu_{a_i+1}<...<\mu_{a_{i+1}}=\xi_{i+1}$.

Remarquons que $\forall k\in[\![a_i,a_{i+1}-1]\!]$, $\mu_k=\lambda_i$.

D'où :

$$\begin{aligned}(\xi_{i+1}-\xi_i)\lambda_i &= (\mu_{a_{i+1}}-\mu_{a_{i+1}-1})\lambda_i+(\mu_{a_{i+1}-1}-\mu_{a_{i+1}-2})\lambda_i+...+(\mu_{a_i+1}-\mu_{a_i})\lambda_i\\ &=\sum_{k=a_i}^{a_{i+1}-1}(\mu_{k+1}-\mu_k)\nu_k.\end{aligned}$$

En sommant sur i, on obtient bien (*).

En refaisant le même raisonnement avec $\displaystyle\sum_{j=0}^{m-1}(\omega_{j+1}-\omega_j)\times$ valeur prise par f sur $]\omega_j,\omega_{j+1}[$, on obtient l'égalité voulue.

Propriétés 1. *L'intégration des fonctions en escalier est :*

1. *linéaire : $\forall f,\ g$ en escalier, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$*

$$\int_a^b(f+\lambda g)=\int_a^b f+\lambda\int_a^b g.$$

2. *positive : Pour toute fonction en escalier f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_a^b f\geq 0$.*

3. <u>*croissante*</u> *Pour toutes fonctions en escalier f et g vérifiant $\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)$,*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

<u>Idée de la démonstration</u>

1. Prendre une subdivision adaptée à f et g simultanément.
2. Découle directement de la définition.
3. $$\begin{aligned}\int_a^b g - \int_a^b f &= \int_a^b (g-f) \text{ par linéarité}\\ &\geq 0 \text{ par positivité.}\end{aligned}$$

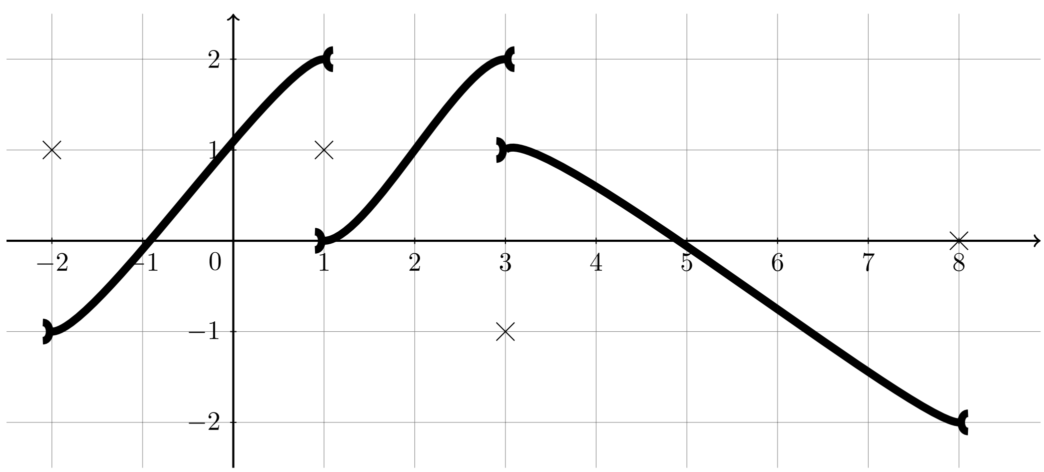
Proposition 2. *Soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ avec $a < b < c$.*
Soit $f : [a,c] \to \mathbb{K}$.
f est en escalier sur $[a,c]$ ssi elle l'est sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, auquel cas :

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \text{ (Relation de Chasles).}$$

<u>Démonstration</u> : Se référer aux définitions.

2.2 Intégration des fonctions continues par morceaux à valeurs réelles

Définition 3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*
f est dite <u>continue par morceaux</u>(c.p.m.) sur $[a,b]$ ssi il existe une subdivision de $[a,b]$ $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ dite adaptée à f telle que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$ f est continue sur $]\xi_i, \xi_{i+1}[$ et admet des limites finies à droite en ξ_i et à gauche en ξ_{i+1}.
Autrement dit, $f_{]\xi_i,\xi_{i+1}[}$ admet une prolongement continue $\tilde{f}_i$ sur $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.



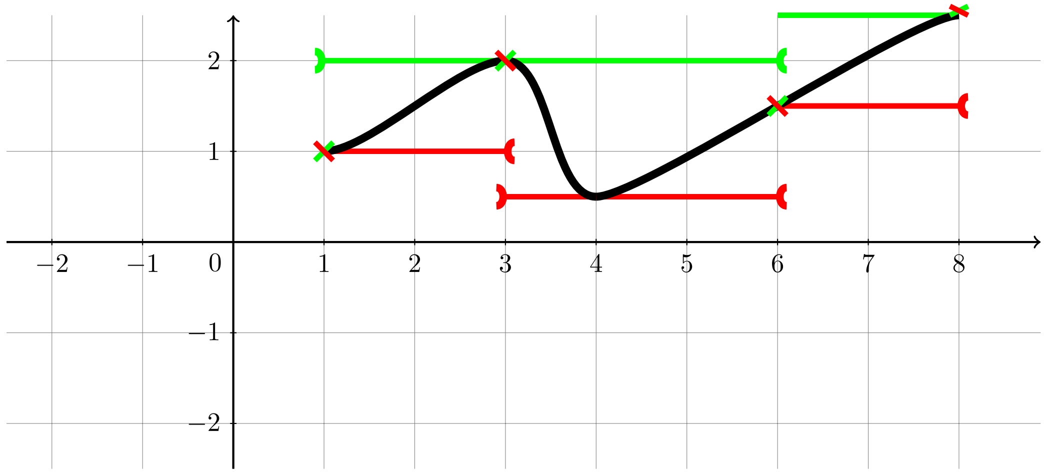
Exemple 2.
La fonction f ci-dessus est continue par morceaux sur $[a,b] = [-2,8]$.
Une subdivision adaptée est $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-2, 1, 3, 8)$.

Proposition 3. *(Théorème d'approximation des fonctions c.p.m. par des fonctions en escalier)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Soit $\epsilon > 0$.
Il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que

1. $\varphi \leq f \leq \psi$

2. $\psi - \varphi \leq \epsilon$

Démonstration
- Premier cas : f continue
Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$.
Ainsi $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$ $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$.
Soit $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision dont le pas, égal à $\max\{\xi_{i+1} - \xi_i,\ 0 \leq i \leq n-1\}$, est inférieur ou égal à δ.



Exemple 3.
Ici, $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 3, 6, 8)$.
On a représenté en rouge la courbe représentative de φ et en vert la courbe représentative de ψ.

Définissons φ par :
Pour tout i de $[\![0, n-1]\!]$, sur$]\xi_i, \xi_{i+1}[$, $\varphi = cte_i = \min f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]}$
En les ξ_i, $\varphi(\xi_i) = f(\xi_i)$.

Remarque 2. $\min f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]}$ *existe car une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

Définissons ψ par :
Pour tout i de $[\![0, n-1]\!]$, sur$]\xi_i, \xi_{i+1}[$, $\psi = cte_i = \max f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]}$.
En les ξ_i, $\psi(\xi_i) = f(\xi_i)$.
Par construction, $\varphi \leq f \leq \psi$.
De plus, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,
$\exists x_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ tel que $f(x_i) = \min f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]}$.
$\exists y_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ tel que $f(y_i) = \max f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]}$.
Comme $\xi_i \leq x_i \leq \xi_{i+1}$ et $-\xi_{i+1} \leq -y_i \leq -\xi_i$,
$\xi_i - \xi_{i+1} \leq x_i - y_i \leq \xi_{i+1} - \xi_i$,
d'où $|x_i - y_i| \leq \xi_{i+1} - \xi_i \leq \delta$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \max f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]} - \min f_{|[\xi_i, \xi_{i+1}]} &= f(y_i) - f(x_i) \\ &\leq |f(y_i) - f(x_i)| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, sur $]\xi_i, \xi_{i+1}[$, $\psi - \varphi \leq \epsilon$.
En les ξ_i, $\psi(\xi_i) - \varphi(\xi_i) = f(\xi_i) - f(\xi_i) = 0$.
Donc $\psi - \varphi \leq \epsilon$ sur $[a, b]$.
- Deuxième cas : f cpm quelconque

Soit $(\mu_j)_{0\leq j\leq m}$ une subdivision adaptée à f.

Par le premier cas, il existe des fonctions φ_0, φ_1, ..., φ_{m-1} et ψ_0, ψ_1, ..., ψ_{m-1} en escalier sur $[\mu_0,\mu_1]$, $[\mu_1,\mu_2]$, ..., $[\mu_{m-1},\mu_m]$ telle que, pour tout $j\in[\![0,m-1]\!]$, sur $[\mu_j,\mu_{j+1}]$, $\varphi_j\leq\tilde{f_j}\leq\psi_j$ et $\psi_j-\varphi_j\leq\epsilon$.

Il suffit de poser $\varphi=\varphi_j$ sur $]\mu_j,\mu_{j+1}[$ et $\psi=\psi_j$ sur $]\mu_j,\mu_{j+1}[$ $(0\leq j\leq m-1)$ ainsi que $f(\mu_j)=\varphi(\mu_j)=\psi(\mu_j)$ $(0\leq j\leq m)$.

Propriété-définition 2. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ c.p.m.*

Notons $E^-=\{\varphi$ en escalier telle que $\varphi\leq f\}$ et $E^+=\{\psi$ en escalier telle que $\psi\geq f\}$.

Notons $I^-(f)=\sup\{\int_a^b\varphi,\ \varphi\in E^-\}$ et $I^+(f)=\inf\{\int_a^b\psi,\ \psi\in E^+\}$.

Alors $I^-(f)=I^+(f)\in\mathbb{R}$.

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ cette valeur commune.

Démonstration

Soit $A^-=\{\int_a^b\varphi,\ \varphi\in E^-\}$ et $A^+=\{\int_a^b\psi,\ \psi\in E^+\}$.

A^- est non vide (appliquer la proposition précédente avec ϵ quelconque) et majoré par tout élément de A^+ par croissance de l'intégrale.

A^+ étant non vide, A^- est majoré.

Ainsi, $I^-(f)$ appartient à $\mathbb{R}$, comme borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

De plus, comme $I^-(f)$ est plus petit que tout majorant de A^-, $I^-(f)$ est plus petit que tout élément de A^+, donc $I^-(f)$ est un minorant de A^+.

$I^-(f)$ est donc plus petit que le plus grand des minorant de A^+, d'où

$$I^-(f)\leq I^+(f).$$

Soit $\epsilon>0$. Soient φ, ψ comme dans la proposition précédente.

Alors $\int_a^b\psi\leq\int_a^b(\varphi+\epsilon)=\int_a^b\varphi+\int_a^b\epsilon=\int_a^b\varphi+\epsilon(b-a)$.

Or $\psi\in E^+$ donc $I^+(f)\leq\int_a^b\psi$.

$\varphi\in E^-$ donc $I^-(f)\geq\int_a^b\varphi$.

Ainsi $I^+(f)\leq\int_a^b\psi\leq I^-(f)+\epsilon(b-a)$.

Donc $I^-(f)=I^+(f)$ (sinon on aurait une contradiction en choisissant $\epsilon\in]0;\dfrac{I^+(f)-I^-(f)}{b-a}[$).

Proposition 4. *L'intégration est fonctions c.p.m. est :*

1. *linéaire.*
2. *positive.*
3. *croissante.*
4. *additive par rapport au segment d'intégration (relation de Chasles).*

Démonstration

1. Soient f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ c.p.m., soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

   Montrons que $\int_a^b(f+g)-\int_a^b f-\int_a^b g=0$.

   Remarque 3. *On vérifie que l'espace des fonctions continues par morceaux est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Soit $\epsilon > 0$.
Soient φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 en escalier telles que $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$, $\psi_1 - \varphi_1 \leq \epsilon$ et $\psi_2 - \varphi_2 \leq \epsilon$.
Alors $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_a^b (f+g) \leq \int_a^b (\psi_1 + \psi_2) &= \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 \text{(linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier)} \\ &\leq \int_a^b \varphi_1 + (b-a)\epsilon + \int_a^b \varphi_2 + (b-a)\epsilon\end{aligned}$$

Or $\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b f$ et $\int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b g$.
Ainsi $\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2 + 2(b-a)\epsilon$
$-\int_a^b f \leq -\int_a^b \varphi_1$
$-\int_a^b g \leq -\int_a^b \varphi_2$
D'où, en sommant ces encadrements :
$\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \leq 0 + 2(b-a)\epsilon$,
d'où $\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \leq 0$ (car sinon, on obtient une contradiction pour $\epsilon \in]0, \frac{\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g}{2(b-a)}[$).
De même, on montre que $\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g \geq 0$.
Donc $\int_a^b (f+g) - \int_a^b f - \int_a^b g = 0$.
<u>Si $\lambda \geq 0$</u>, $\lambda\varphi_1 \leq \lambda f \leq \lambda\psi_1$
D'où : $\lambda \int_a^b \varphi_1 = \int_a^b \lambda\varphi_1 \leq \int_a^b \lambda f \leq \int_a^b \lambda\psi_1 = \lambda \int_a^b \psi_1 \leq \lambda \int_a^b \varphi_1 + \epsilon(b-a)$
De plus : $-\lambda \int_a^b \psi_1 \leq -\lambda \int_a^b f \leq -\lambda \int_a^b \varphi_1$
En sommant ces encadrements, on obtient :
$-\lambda\epsilon(b-a) \leq \int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f \leq \lambda\epsilon(b-a)$.
Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $\int_a^b \lambda f - \lambda \int_a^b f = 0$.
On effectue un raisonnement similaire dans le cas $\lambda < 0$..

2. Si $f \geq 0$, la fonction nulle est une fonction en escalier minorant f.
D'où : $\int_a^b f \geq \int_a^b 0 = 0$.

3 Propriétés de l'intégrale des fonctions cpm réelles

3.1 Inégalité de la moyenne

Proposition 5. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.*

Soient f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ c.p.m.

$$\boxed{|\int_a^b fg| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \int_a^b |g|.}$$

Démonstration

Existence de $\sup |f|$.

Soit $(\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f.

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $f_{|]\xi_i, \xi_{i+1}[}$ se prolonge par une fonction continue $\tilde{f_i}$ sur $[\xi_i, \xi_{i+1}]$.

Pour tout i, $|\tilde{f_i}|$ admet un maximum M_i car elle est continue et $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ est un segment.

Ainsi, $|f|$ est majorée par $\max(M_0, M_1, ..., M_{n-1}, |f(\xi_0)|, |f(\xi_1)|, ..., |f(\xi_n)|)$, donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ (et on peut prouver que cette borne supérieure est le max décrit précédemment).

$-(\sup_{[a,b]} |f|)|g| \leq fg \leq (\sup_{[a,b]} |f|)|g|$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$-(\sup_{[a,b]} |f|) \int_a^b |g| \leq \int_a^b fg \leq \int_a^b (\sup_{[a,b]} |f|)|g| = (\sup_{[a,b]} |f|) \int_a^b |g|$.

D'où :

$|\int_a^b fg| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b |g|$.

Cas particulier$(f = 1)$ $\boxed{|\int_a^b g| \leq \int_a^b |g|.}$

$g = 1 : |\int_a^b f| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_a^b 1 = \sup_{[a,b]} |f|(b-a)$.

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{b-a} |\int_a^b f| \leq \sup_{[a,b]} |f|.}$$

3.2 Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

Proposition 6. *L'intégrale (sur $[a,b]$ avec $a < b$) d'une fonction continue positive est nulle ssi la fonction est identiquement nulle (sur $[a,b]$).*

Remarque 4. *On peut remplacer « positive »par « de signe constant ».*

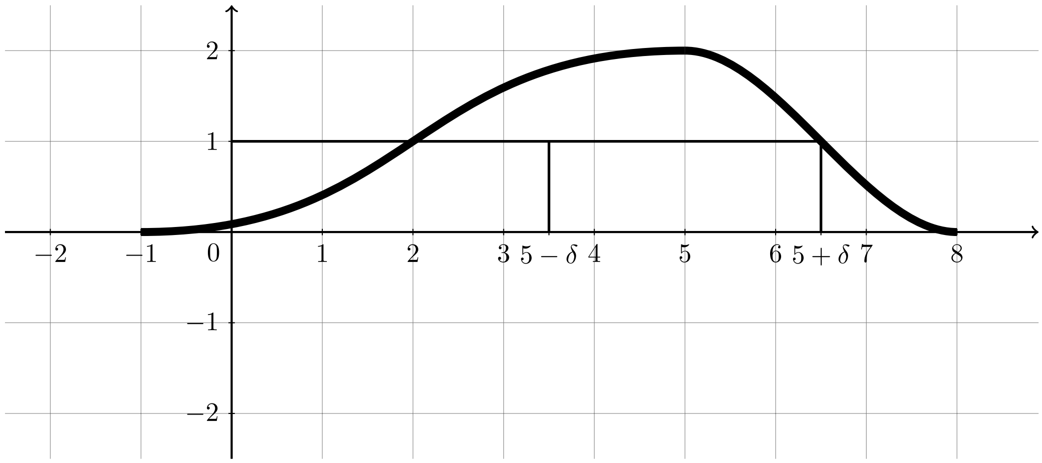
Démonstration

$\Leftarrow$: Trivial.

$\Rightarrow$: Raisonnons par contraposée.

Supposons que f soit non identiquement nulle (et que f est positive continue) et montrons que $\int_a^b f \neq 0$.

Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$.



Exemple 4. *Ici,* $x_0 = 5$, $f(x_0) = 2$ *et* $\dfrac{f(x_0)}{2} = 1$.

On va minorer l'intégrale de f par l'aire du rectangle, ce qui montrera qu'elle est strictement positive donc non nulle.

f étant continue, il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \geq \dfrac{f(x_0)}{2}$ pour tout $x \in [a, b]$ tel que $|x - x_0| \leq \delta$.
(il suffit que $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ avec $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$).
Quitte à diminuer δ, on peut supposer que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$, sauf si $x_0 \in \{a, b\}$.
Ainsi, pour $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f (\text{Chasles}) \\ &\geq 0 + 2\delta \frac{f(x_0)}{2} + 0 \\ &> 0\end{aligned}$$

Si $x_0 = a$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_a^{a+\delta} f + \int_{a+\delta}^b f (\text{Chasles}) \\ &\geq \delta \frac{f(x_0)}{2} + 0 \\ &> 0\end{aligned}$$

On raisonne de même si $x_0 = b$.
Dans tous ces cas, $\displaystyle\int_a^b f \neq 0$.

3.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 7. *Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.*
Soient f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ c.p.m.

Alors $\boxed{|\int_a^b fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.}$

Cas d'égalité *Si f et g sont continues :*

$$|\int_a^b fg| = \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2} \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ sont colinéaires.}$$

Démonstration : cf algèbre.

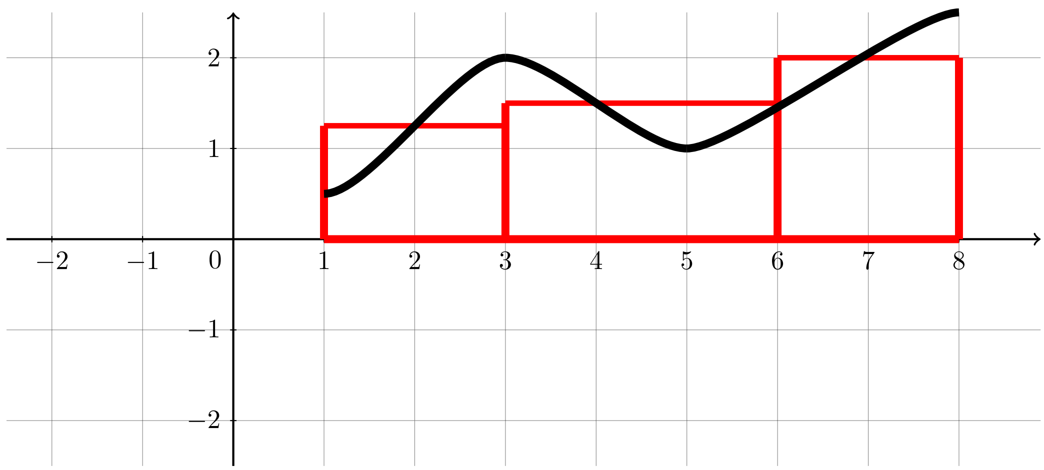
3.4 Sommes de Riemann

Définition 4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

Soit $\xi = (\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$.

Soit $\omega = (\omega_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ une famille de réels telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$.

On note $S(f, \xi, \omega) = \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{i+1} - \xi_i) f(\omega_i)$, nombre qu'on appelle somme de Riemann associée à f, ξ, ω.



Exemple 5.

Ici, $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 3, 6, 8)$.

$(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = (2, 4, 7)$.

$S(f, \xi, \omega)$ correspond à l'aire du domaine colorié en rouge.

Proposition 8. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.*

Soit $\epsilon > 0$.

Il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\xi = (\xi_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ, pour toute famille $\omega = (\omega_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$:

$$|S(f, \xi, \omega) - \int_a^b f| \leq \epsilon.$$

Autre énoncé :

Si (u_n) est une suite de sommes de Riemann associée à une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0, alors (u_n) converge vers $\int_a^b f$.

Démonstration (de la première forme)

$$
\begin{aligned}
|S(f,\xi,\omega) - \int_a^b f| &= |\sum_{i=0}^{n-1}(\xi_{i+1}-\xi_i)f(\omega_i) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f| \\
&= |\sum_{i=0}^{n-1}[(\xi_{i+1}-\xi_i)f(\omega_i) - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f]| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}|(\xi_{i+1}-\xi_i)f(\omega_i) - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f|
\end{aligned}
$$

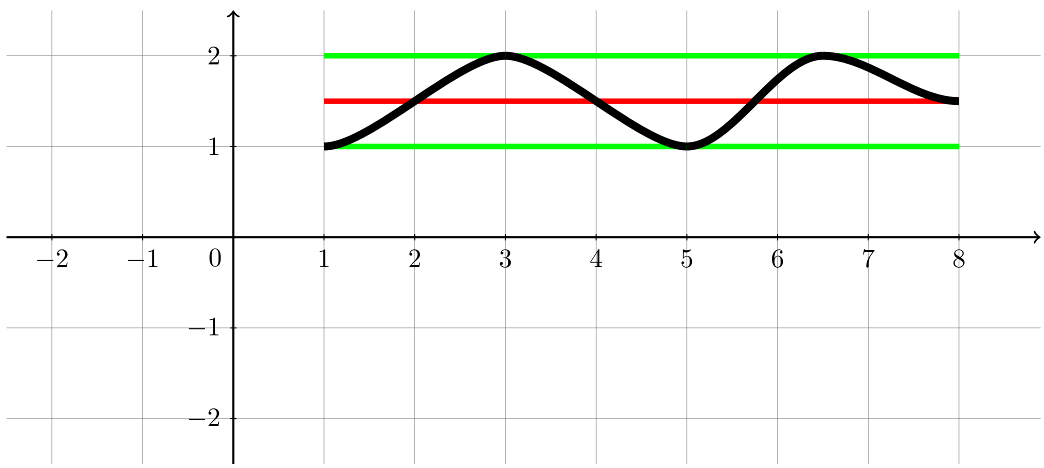
Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f \leq \max f_{|[\xi_i,\xi_{i+1}]} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} 1.$$

Ainsi :

$$(\xi_{i+1}-\xi_i) \min_{[\xi_i,\xi_{i+1}]} f \leq \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f \leq (\xi_{i+1}-\xi_i) \max_{[\xi_i,\xi_{i+1}]} f.$$

Notons α_i un des éléments de $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ où $f_{|[\xi_i,\xi_{i+1}]}$ atteint son min et β_i un des éléments de $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ où $f_{|[\xi_i,\xi_{i+1}]}$ atteint son max.



Exemple 6.

Ici, $\xi_i = 1$, $\xi_{i+1} = 8$, $\omega_i = 4$, $\alpha_i = 5$ *et* $\beta_i = 3$.

$$(\xi_{i+1}-\xi_i)(f(\omega_i) - f(\beta_i)) \leq (\xi_{i+1}-\xi_i)f(\omega_i) - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f \leq (\xi_{i+1}-\xi_i)(f(\omega_i) - f(\alpha_i)).$$

Ainsi :

$$|(\xi_{i+1}-\xi_i)f(\omega_i) - \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} f| \leq (\xi_{i+1}-\xi_i)\max(f(\omega_i) - f(\alpha_i), f(\beta_i) - f(\omega_i)).$$

Or f, étant continue sur le segment $[a, b]$, y est uniformément continue par le théorème de Heine. Ainsi, $\exists \delta > 0$ tel que

$$\forall x,\ y \in [a,b],\ |y - x[\leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Si le pas de ξ est inférieur à δ, alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$|\omega_i - \alpha_i| \leq \delta \text{ et } |\omega_i - \beta_i| \leq \delta.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|S(f,\xi,\omega) - \int_a^b f| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (\xi_{i+1} - \xi_i) \times \frac{\epsilon}{b-a} \\
&\leq \frac{\epsilon}{b-a} \times (\xi_1 - \xi_0 + \xi_2 - \xi_1 + ... + \xi_n - \xi_{n-1}) \\
&\leq \frac{\epsilon}{b-a} \times (\xi_n - \xi_0) \text{ (somme téléscopique)} \\
&\leq \frac{\epsilon}{b-a} \times (b-a) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Exemple 7. *Déterminons* $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \text{ avec } f : x \mapsto \frac{1}{1+x} \\
&= S(f,\xi,\omega).
\end{aligned}$$

avec $\xi = (0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n} = 1)$ *et* $\omega = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n}{n} = 1)$.

Ainsi : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^1 f$ *car le pas de* ξ, *égal à* $\frac{1}{n}$, *tend vers* 0 *et* f *est continue sur* $[0,1]$.

De plus, $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$.

3.5 Interversion des bornes

Définition 5. *Pour* $a > b$, *et* $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ *c.p.m., on pose :*

$$\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f,}$$

et pour $a = b$, $\int_a^a f = 0$.

Proposition 9. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *(*I *intervalle de* $\mathbb{R}$*) continue par morceaux sur tout segment de* I.
Soit a, b, $c \in I$.
Alors

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f \text{ (Chasles).}$$

4 Intégration et dérivation

4.1 Primitives

Définition 6. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ (I : intervalle non trivial).*
Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est appelée une <u>primitive</u> de f ssi $F' = f$.

Proposition 10. *Si f admet une primitive F_0 sur un <u>intervalle</u> I, l'ensemble de toutes ses primitives est $\{F_0 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.*

<u>Démonstration</u> :
Soit $F : I \to \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} F \text{ primitive de } f &\Leftrightarrow F \text{ dérivable et } F' = f \\ &\Leftrightarrow F \text{ dérivable et } (F - F_0)' = 0 \\ &\Leftrightarrow F - F_0 = cte = \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque 5. *Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux.*
Par exemple, $\{$ *primitives de* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^*\} = \{x \mapsto \begin{cases} \ln(x) + \lambda_1 \text{ si } x > 0 \\ \ln(-x) + \lambda_2 \text{ si } x < 0 \end{cases},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$.

4.2 Théorème d'existence de primitives pour une fonction continue

Proposition 11. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction <u>continue</u> sur un intervalle non trivial I.*
Soit $a \in I$ et $\begin{array}{cccc} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$.
Alors F est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Corollary 1. *Toute fonction continue sur un intervalle non trivial admet une infinité de primitives.*

<u>Démonstration de la proposition</u>
$F(a) = 0$ et il existe au plus une primitive de f s'annulant en a puisque de telles primitives diffèrent d'une constante, nulle en a donc nulle partout.
Montrons que F est dérivable et que $F' = f$.
Soient $x_0 \in I$, $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$.

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \\ &= hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \end{aligned}$$

Pour $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)| &= |\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t)-f(x_0))dt| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\int_J |f(t)-f(x_0)| \text{ où } J=[x_0,x_0+h]\cup[x_0+h,x_0] \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{t\in J}|f(t)-f(x_0)|\int_J 1 \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sup_{t\in J}|f(t)-f(x_0)||h| \\
&\leq \sup_{t\in J}|f(t)-f(x_0)|.
\end{aligned}$$

Or, comme $f(t) \underset{t\to x_0}{\to} f(x_0)$ par continuité de f, $\sup_{t\in J}|f(t)-f(x_0)| \underset{h\to 0}{\to} 0$.
Ainsi $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0) \underset{h\to 0}{\to} 0$ par le théorème de l'encadrement.
Donc F est dérivable en x_0 et $F'(x_0)=f(x_0)$.

4.3 Intégration à l'aide d'une primitive

Proposition 12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.*
Soit F une primitive de f.
Soient a, $b \in I$.
Alors $\boxed{\int_a^b f = F(b)-F(a) \text{ noté } [F]_a^b.}$

Démonstration
Soit $\begin{array}{rccc} G & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$.
G est une primitive de f, donc $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $F=G+\lambda$.

$$\begin{aligned}
F(b)-F(a) &= G(b)+\lambda-(G(a)+\lambda) \\
&= G(b)-G(a) \\
&= \int_a^b f
\end{aligned}$$

Corollary 2. *Soit $f : I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*
Soit $a\in I$.
Alors $\forall x\in I$, $\boxed{f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.}$

Démonstration : $\int_a^x f'(t)dt = [f]_a^x = f(x)-f(a)$ car f est une primitive de f'.

4.4 Intégration par parties

Proposition 13. *Soient u, $v : I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*
Soient a, $b\in I$.
$\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.}$

Démonstration : $\int_a^b u'v + \int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$.

4.5 Changement de variables

Proposition 14. *Soit $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle non trivial J.*
Soit $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (intervalle non trivial).
Soient a, $b \in I$.

$$\boxed{\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx &= [F(x)]_{x=\varphi(a)}^{x=\varphi(b)} \text{ où } F \text{ désigne une primitive de } f \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= [(F \circ \varphi)(t)]_{t=a}^{t=b} \\
&= \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)dt \\
&= \int_a^b (F' \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)dt \\
&= \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)dt
\end{aligned}$$

Remarque 6. *Dans la pratique, on confond la variable x et la fonction φ et on remplace dx par :*
- *$\varphi'(t)dt$ en maths*
- *$\frac{dx}{dt}dt$ en physique.*

Exemple 8. *Changements de variables affines $x = \varphi(t) = \lambda t + \mu (\lambda \neq 0)$.*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\frac{\alpha-\mu}{\lambda}}^{\frac{\beta-\mu}{\lambda}} f(\lambda t + \mu)\lambda dt$$

.

On a posé : $\begin{cases} x = \lambda t + \mu \\ dx = \lambda dt \end{cases}$

Cas particulier :

1. $\lambda = -1$, $\mu = 0$.

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(-t)d(-t)$$

.

On a posé : $\begin{cases} x = -t \\ dx = -dt \end{cases}$

Si f est impaire et que $\alpha = -\beta$,

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{-\beta} (-f(t))(-dt) = -\int_{-\beta}^{\beta} f(t)dt.$$

D'où : $2\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx = 0.$

2. $\lambda = 1$, μ *quelconque.*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha-\mu}^{\beta-\mu} f(t+\mu)dt$$

.

On a posé : $\begin{cases} x = t+\mu \\ dx = dt \end{cases}$

Si f *est* μ*-périodique,* $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha-\mu}^{\beta-\mu} f(t)dt.$

Exemple 9. *Soient* $a, b > 1$.

Calculer $I = \int_a^b \frac{\ln(x)^\beta}{x} dx.$ *(*$\beta \neq -1$*)*

On fait le changement de variable : $\begin{cases} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} u^\beta du \\ &= [\frac{u^{\beta+1}}{\beta+1}]_{x=\ln(a)}^{x=\ln(b)} \text{ car } \beta \neq -1 \\ &= \frac{\ln(b)^{\beta+1} - \ln(a)^{\beta+1}}{\beta+1} \end{aligned}$$

Remarque 7. *On pouvait aussi écrire* $\frac{(\ln(x))^\beta}{x} = \frac{d}{dx}(\frac{\ln(x)^{\beta+1}}{\beta+1})$.

(le théorème de changement de variable équivaut au théorème de dérivation de fonctions composées).

Mais il est plus facile d'écrire 10 *changements de variables successifs que de reconnaître la dérivée d'une composée de* 11 *fonctions.*

4.6 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 15. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$.

Soient $a, b \in I$.

Alors $\boxed{f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2} + f'''(a)\frac{(b-a)^3}{6} + ... + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt.}$

<u>Démonstration</u> :

Récurrence sur n et intégration par parties.

Soit $P(n)$:≪ la formule est vraie à l'ordre n pour les fonctions $\mathcal{C}^{n+1}$ ≫.

Vérifions $P(0)$.

Si f est $\mathcal{C}^{0+1}$ on a bien

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\frac{(b-t)^0}{0!}dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $P(n)$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+2}$.
Par hypothèse de récurrence :

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2}+f'''(a)\frac{(b-a)^3}{6}+...+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt.$$

Dans la dernière intégrale, nous allons dériver $f^{(n+1)}(t)$ et primitiver $\dfrac{(b-t)^n}{n!}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt &= [-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt \\ &= -0 + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$.

Remarque 8. *L'intérêt est d'obtenir des encadrements plus précis.*

Exemple 10. $f = \exp$, $a = 0$, $b = 1$.

$$exp(1) = exp(0) + exp'(0)(1-0) + exp''(0)\frac{(1-0)^2}{2!} + ... + exp^{(n)}(0)\frac{(1-0)^n}{n!} + \int_0^1 e^t\frac{(1-t)^n}{n!}dt$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \int_0^1 e^t\frac{(1-t)^n}{n!}dt$$

On pose : $R_n = \displaystyle\int_0^1 e^t\frac{(1-t)^n}{n!}dt$.
Majorons R_n.

$$\begin{aligned}R_n &\leq \int_0^1 e\frac{(1-t)^n}{n!}dt \text{ car } \forall t \in [0,1],\ e^t \leq e^1 = e \text{ puisque exp croît} \\ &\leq e[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_0^1 \\ &\leq e[-0 + \frac{1}{(n+1)!}].\end{aligned}$$

Ainsi, $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$, *à* $\dfrac{e}{(n+1)!}$ *près.*

4.7 Inégalité de Taylor-Lagrange

Proposition 16. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$.
Soient a, $b \in I$.
$f(b) = f(a) + f'(a)\dfrac{b-a}{1!} + ... + f^{(n)}(a)\dfrac{(b-a)^n}{n!} + R_n$
avec $\boxed{|R_n| \leq \sup\limits_{[a,b]\cup[b,a]} |f^{(n+1)}| \times \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.}$

Démonstration
Cas $a \leq b$:

$$\begin{aligned}
R_n &= |\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt| \\
&\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \times \int_a^b |\frac{(b-t)^n}{n!}|dt \text{ (inégalité de la moyenne)} \\
&\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \times \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt \\
&\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \times [-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}]_a^b \\
&\leq \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}| \times \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Cas $a \geq b$:

$$\begin{aligned}
R_n &= |\int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}dt| \\
&\leq \sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}| \times \int_b^a |\frac{(b-t)^n}{n!}|dt \text{ (inégalité de la moyenne)} \\
&\leq \sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}| \times \int_b^a \frac{(t-b)^n}{n!}dt \\
&\leq \sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}| \times [\frac{(t-b)^{n+1}}{(n+1)!}]_b^a \\
&\leq \sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}| \times \frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \sup_{[b,a]} |f^{(n+1)}| \times \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Exemple 11. $f = \sin$, $n = 4$, $a = 0$, $b = x$.
$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0)x + \sin''(0) \times \frac{x^2}{2} + \sin'''(0) \times \frac{x^3}{6} + \sin^{(4)}(0) \times \frac{x^4}{24} + R_4$, *c'est-à-dire*
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_4$ *avec* $|R_4| \leq \sup_{[0,x]\cup[x,0]} |\sin^{(5)}| \times \frac{|x|^5}{5!} \leq \frac{|x|^5}{120}$.

5 Intégration des fonctions à valeurs complexes

5.1 Définition de l'intégrale

Définition 7. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continue par morceaux.*
On appelle intégrale de f *:*

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i\int_a^b Im(f).}$$

Remarque 9. *f est c.p.m. ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ sont c.p.m.*

5.2 Propriétés

On retrouve les propriétés usuelles : Linéarité, relations de Chasles, intégration par parties, changement de variables ($\int (f \circ \varphi)\varphi'$ avec φ à valeurs réelles et f à valeurs complexes).

La positivité et la croissance n'ont plus de sens.

Démontrons l'inégalité

$\boxed{|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \ (a < b).}$

On pose $\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$.

$$\begin{aligned} |\int_a^b f| = \rho = e^{-i\theta} \int_a^b f \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} f \\ &= \mathrm{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f \ (\rho \text{ est réel, donc } \rho = \mathrm{Re}(\rho)) \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \text{ par définition de l'intégrale} \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f| \text{ car } \forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leq |z| \text{ et car l'intégrale est croissante} \\ &= \int_a^b |f| \end{aligned}$$

Remarque 10. *On a utilisé* $\boxed{Re \int f = \int Ref.}$

De même : $\boxed{Im \int f = \int Imf.}$

Sommes de Riemann : même résultat que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Intégrales et primitives, intégrations par parties, formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange : mêmes résultats.