Chapitre I - Développements limités

M. GUILLERON, UNC

2022

1 Rappels

Il est utile de rappeler les définitions suivantes :

Définition 1. *Un intervalle I est dit non trivial si il est non vide et non réduit à un point. Topologiquement, on parle aussi d'intervalle d'intérieur non vide.*

Rappel 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.*

On dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si :

- si $n = 1$, f est dérivable sur I.

- si $n \geq 2$, alors f est dérivable sur I et f' est $n-1$ fois dérivable sur I.

On dit de plus que f est :

- de classe $\mathcal{C}^1$ si f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

- de classe $\mathcal{C}^n$ si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

- de classe $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout n de $\mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$.

Rappel 2. *Notation de Landau*

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$ s'il existe $\eta > 0$ et une fonction ϵ définie sur $I \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ (on dit aussi définie sur un voisinage de x_0 relatif à I) telle que $\forall x \in I \cap]]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$.

Rappel 3. *On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on note $f(x) = \underset{x \to x_0}{\sim} (g(x))$ s'il existe $\eta > 0$ et une fonction h définie sur $I \cap]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$ (on dit aussi définie sur un voisinage de x_0 relatif à I) telle que $\forall x \in I \cap]]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$, $f(x) = g(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$.*

On dit qu'une fonction f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

On note alors $f'(a)$ cette limite.

Si on pose :

$$\epsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a),$$

on a : $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

On peut alors écrire $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$.

On a alors approximé, au voisinage de a, $f(x)$ par une fonction affine.

Graphiquement, on a approximé la courbe par sa tangente.

Il se pose alors la question naturelle de savoir si on peut approcher des fonctions par des polynômes de degrés supérieurs afin d'avoir une meilleure approximation.

2 Définition et premières propriétés

Définition 2. *Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et soit x_0 un élément ou une borne finie de I. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement si il existe des scalaires a_0, a_1, ..., a_n appartenant à $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n),$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Proposition 1. *Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors ce développement est unique.*

Démonstration : Supposons que f admette deux développements limités à l'ordre n.

On note $(a_l)_{0 \leq l \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_l)_{0 \leq l \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ les coefficients de ces développement limité.

On écrit : $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n) = b_0 + b_1 h + ... + b_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$(*).

Montrons par récurrence forte finie sur $[\![0 \ ; \ n]\!]$ que $\forall i \in [\![0 \ ; \ n]\!]$, $a_i = b_i$.

Initialisation :

En passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient $a_0 = b_0$.

Hérédité :

Soit $i \in [\![0 \ ; \ n-1]\!]$.

On suppose que $\forall l \in [\![0 \ ; \ i]\!]$, $a_l = b_l$.

Montrons que $a_{i+1} = b_{i+1}$.

En simplifiant les premiers termes dans (*), on obtient :

$f(x_0 + h) = a_{i+1}h^{i+1} + a_{i+2}h^{i+2} + ... + a_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n) = b_{i+1}h^{i+1} + b_{i+2}h^{i+2} + ... + b_n h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$(*).

On suppose alors h non nul et on simplifie par $h^{i+1} \neq 0$.

L'équation (*) devient :

$f(x_0+h) = a_{i+1} + a_{i+2}h + ... + a_n h^{n-i-1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-i-1}) = b_{i+1} + b_{i+2}h + ... + b_n h^{n-i-1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-i-1})$ (avec $n-i-1 \geq 0$).

On passe alors à la limite quand h tend vers 0 et on obtient $a_{i+1} = b_{i+1}$.

Conclusion : $\forall i \in [\![0\ ;\ n]\!]$, $a_i = b_i$.

Proposition 2. *Troncature d'un développement limité*

Supposons que $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. *Alors* f *admet un développement limité à l'ordre* k *en* x_0.

Plus précisément, $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^k)$.

Démonstration : On a :

$$a_{k+1}h^{k+1} + ... + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n) = h^k(a_{k+1}h + ... + a_n h^{n-k} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-k})) = \underset{h\to 0}{o}(h^k),$$

en remarquant que $\lim\limits_{h\to 0} a_{k+1}h + ... + a_n h^{n-k} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n-k}) = 0$.

Définition 3. *Lorsque tous les coefficients du développement limité à l'ordre* n *en* x_0 *de* f *ne sont pas tous nuls, on pose* $k = \min\{l \in [\![0\ ;\ n]\!] | a_l \neq 0\}$.

On appelle alors terme prépondérant du développement limité à l'ordre n *de* f *en* x_0 *le terme* $a_k h^k$.

Proposition 3. f *est équivalente en* x_0 *au terme prépondérant du développement limité à l'ordre* n *de* f *en* x_0.

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= 0 + ... + 0 + a_k h^k + a_{k+1}h^{k+1} + ... + o(h^n) \\ &= a_k h^k + o(h^k) \text{ par troncature du développement limité} \\ &= a_k h^k\left(1 + \frac{o(1)}{a_k}\right) \text{ car } a_k \neq 0 \\ &\underset{h\to 0}{\sim} a_k h^k \text{ car } \lim_{h\to 0} 1 + \frac{o(1)}{a_k} = 1. \end{aligned}$$

3 Primitivation d'un développement limité

Proposition 4. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$, *et* $x_0 \in I$ *(où* I *est un intervalle non trivial).*

On suppose que f *est dérivable sur* I *et que* f' *admet un* $dl_n(x_0)$. *On pose donc* $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tels que*

$f'(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$.

Alors f *admet un* $dl_{n+1}(x_0)$ *donné par :*

$f(x_0+h) = f(x_0) + a_0 h + \dfrac{a_1}{2}h^2 + ... + \dfrac{a_n}{n+1}h^{n+1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n+1})$.

Démonstration :
On a : $f'(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$.

1. Cas particulier : $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.
   On a alors : $f'(x_0+h) = o(h^n)$.
   D'où : $f'(x_0+h) = h^n \epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.
   Posons, pour $|k|$ suffisamment petit,

   $$r(k) = \sup_{[-|k|;|k|]} |\epsilon| (= \sup_{h\in[-|k|;|k|]} |\epsilon(h)|).$$

   Rappel 4. *Comme $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, en prenant $\epsilon' = 1$ dans la définition de la limite, $\exists \eta > 0$, $\forall h \in]-\eta;\eta[$, $|\epsilon(h)| < 1$*
   et $\{|\epsilon(h)|, h \in [-\eta;\eta]\}$ est une partie non vide majorée (par $\max(1, |\epsilon(\eta)|, |\epsilon(-\eta)|)$ de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure.

   Comme $\lim\limits_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$, alors $\lim\limits_{k\to 0} r(k) = 0$.
   En effet, $\forall \epsilon' > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall t \in]-\delta;\delta[$, $|\epsilon(t)| \le \epsilon'$.
   Fixons un tel ϵ' et $\delta > 0$ le réel associé dans la définition de la limite.
   Ainsi, $\forall k \in]-\delta;\delta[$, $|r(k)| \le \epsilon'$.
   On a donc bien montré que : $\forall \epsilon' > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall k \in]-\delta;\delta[$, $|r(k)| \le \epsilon'$.
   Sur $[0,|k|]$, on a : $-r(k)h^n \le f'(x_0+h) \le r(k)h^n$.
   Or, l'application g définie sur $[0,|k|]$ par $g : h \mapsto f(x_0+h) - r(k)\dfrac{h^{n+1}}{n+1}$ décroît sur $[0,|k|]$ (car $g' \le 0$).
   On a donc : $g(x_0+|k|) \le g(x_0)$.
   En revenant à la définition de g, on obtient :
   $f(x_0+|k|) - r(k)\dfrac{|k|^{n+1}}{n+1} \le f(x_0) - 0$,
   id est $f(x_0+|k|) - f(x_0) \le r(k)\dfrac{|k|^{n+1}}{n+1}$.
   Un raisonnement analogue montrerait que
   $-r(k)\dfrac{|k|^{n+1}}{n+1} \le f(x_0+|k|) - f(x_0)$ (en remarquant cette fois-ci que $g_2 : h \mapsto f(x_0+h) + r(k)\dfrac{h^{n+1}}{n+1}$ croît sur $[0,|k|]$ (car $g_2' \ge 0$).).
   Sur $[-|k|;0]$, on peut écrire $\forall h \in [-|k|;0]$ $-r(k)(-h)^n \le f'(x_0+h) \le r(k)(-h)^n$ et refaire encore le même raisonnement pour obtenir que, dans tous les cas :

   $$|f(x_0+k) - f(x_0)| \le r(k)\frac{|k|^{n+1}}{n+1}$$

   .

Or, $\lim_{k\to 0}\frac{r(k)}{n+1}=0$,
donc $f(x_0+k)-f(x_0)=o(k^{n+1})$ quand $k\to 0$.

Remarque 1. *Si f est à valeurs complexes, il faudra raisonner sur $\Re(f)$ et $\Im(f)$.*

2. Cas général
On écrit $f'(x_0+h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n+o(h^n)$.
Soit $g : h\mapsto f(x_0+h)-(a_0h+a_1\frac{h^2}{2}+...+a_n\frac{h^{n+1}}{n+1})$,
alors $g'(x_0+h)=f'(x_0+h)-(a_0+a_1h+...+a_nh^n)=o(h^n)$.
Ainsi, par le cas précédent, $g(x_0+h)=g(x_0)+o(h^{n+1})$ quand $h\to 0$,
d'où, en remarquant que $g(x_0)=f(x_0)$, $f(x_0+h)=f(x_0)+a_0h+a_1\frac{h^2}{2}+...+a_n\frac{h^{n+1}}{n+1}+o(h^{n+1})$.

Exemple 1. *On sait que :*

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+\frac{x^{n+1}}{1-x}=(\sum_{k=0}^{n}x^k)+x^n\times\frac{x}{1-x}$$

avec $\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-x}=0$, *d'où*

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)=1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+x^n+o(x^n)\ \textit{quand}\ x\to 0.}$$

On en déduit immédiatement que :

Exemple 2.

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+o(x^n)\ \textit{quand}\ x\to 0.}$$

Appliquons maintenant le théorème de primitivation des dl. Il vient :

Exemple 3.

$$\boxed{\begin{aligned}\ln(1+x)&=\ln(1)+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})\\&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^{n+1})\ \textit{quand}\ x\to 0\end{aligned},}$$

en remarquant que $\ln(1)=0$.

Exemple 4. *Enfin, nous savons que :*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-x^6+...+(-1)^n x^{2n}+o(x^{2n+1}).$$

D'où on tire sans difficulté :

$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$

On retiendra donc :

$$\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \textit{ quand } x \to 0,}$$

en remarquant que $\arctan(0) = 0$.

4 Théorème de Taylor-Young

Théorème 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $x_0 \in I$.*
Si f est n fois dérivable en x_0 ($n \in \mathbb{N}^*$) alors

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + ... + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n) \textit{ quand } h \to 0}.$$

Démonstration : Récurrence et primitivation.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si f est n fois dérivable en x_0, alors $f(x_0+h) = f(x_0)+f'(x_0)h+...+f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!}+o(h^n)$ quand $h \to 0$.

1. Initialisation
   On sait déjà que, si f est dérivable en x_0, alors $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$ quand $h \to 0$.
2. Hérédité
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $n+1$ fois dérivable en x_0.
   Supposons que, pour toute fonction $g : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n fois dérivable en x_0, $g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + ... + g^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$ quand $h \to 0$.
   Alors $f' = g$ est n fois dérivable en x_0. Appliquons l'hypothèse de récurrence à f'.
   Quand $h \to 0$, $f'(x_0+h) = f'(x_0) + (f')'(x_0)h + ... + (f')^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$,
   c'est-à-dire $f'(x_0+h) = f'(x_0) + f''(x_0)h + ... + f^{(n+1)}(x_0)\frac{h^n}{n!} + o(h^n)$.
   Par le théorème de primitivation, on en déduit que :
   $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + ... + f^{(n+1)}(x_0)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n+1}).$

3. Conclusion

   Le théorème est vrai.

Exemple 5. *Si $f(x) = e^{\alpha x}$, alors f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et , $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}$.*

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est n fois dérivable en $x_0 = 0$ et $f^{(n)}(0) = \alpha^n$.

Le théorème de Taylor-Young nous permet donc d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f admet $dl_n(0)$ et que

$$\boxed{e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} x^k + o(x^n) \text{ quand } x \to 0}$$

En particulier, on retiendra aussi le résultat avec $\alpha = 1$:

$$\boxed{e^{x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ quand } x \to 0} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exemple 6. *Si $f(x) = x^\alpha$, en $x_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x_0 = 1$ donc, par le théorème de Taylor-Young, f admet un $dl_n(1)$ et

$(1+h)^\alpha = f(1) + f'(1)h + ... + f^{(n)}(1)\dfrac{h^n}{n!} + o(h^n)$ quand $h \to 0$,

avec $f^{(k)} : x \mapsto \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} = (\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i))x^{\alpha-k}$.

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned}(1+h)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)}{k!} h^k + o(h^n) \text{ quand } h \to 0 \\ &= 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}h^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}h^n + o(h^n) \text{ quand } h \to 0\end{aligned}}.$$

Par exemple, si $\alpha = -1$, on retrouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+h} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)(-1-1)...(-1-k+1)h^k}{k!} + o(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{k!} h^k + o(h^n). \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k h^k + o(h^n).\end{aligned}$$

D'autre part, si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} h^k + o(h^n)$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)...(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} &= (-1)^k \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times ... \times \frac{2k-1}{2} \times \frac{1}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{1 \times 2 \times ... \times (2k-1) \times (2k)}{2^k \times 2 \times 4 \times ... \times (2k)} \times \frac{1}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(2k)!}{2^k \times 2^k \times k!} \times \frac{1}{k!} = \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{4^k}.
\end{aligned}$$

5 Opérations sur les développements limités

5.1 Addition

Proposition 5. *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Soit x_0 *un élément ou une borne finie de* I.

Si $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n)$ *quand* $h \to 0$
et $g(x_0+h) = b_0 + b_1 h + ... + b_n h^n + o(h^n)$ *quand* $h \to 0$,

alors $(f+g)(x_0+h) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)h + ... + (a_n+b_n)h^n + o(h^n)$ *quand* $h \to 0$.

Démontration : Trivial en remarquant que $o(h^n) + o(h^n) = o(h^n)$.

5.2 Produit par une constante

Proposition 6. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Soit x_0 *un élément ou une borne finie de* I.

Si $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n)$ *quand* $h \to 0$, *alors* $\lambda f(x_0+h) = \lambda a_0 + \lambda a_1 h + ... + \lambda a_n h^n + o(h^n)$ *quand* $h \to 0$

Exemple 7. *Comme* $e^{ix} = 1 + ix + \dfrac{i^2x^2}{2!} + ... + \dfrac{i^n}{n!}x^n + o(x^n)$
et $e^{-ix} = 1 - ix + \dfrac{(-i)^2x^2}{2!} + ... + \dfrac{(-i)^n}{n!}x^n + o(x^n)$ *quand* x *tend vers* 0, *il vient :*

Il vient : $(n = 2p+1)$

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\
&= 1 + \frac{i-i}{2}x + \frac{i^2+(-i)^2}{2}\frac{x^2}{2!} + ... + \frac{i^{2p}+(-i)^{2p}}{2}\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{i^{2p+1}+(-i)^{2p+1}}{2}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) \text{ quand } x \to 0\end{aligned}}$$

De même, (n=2p+2)

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{1-1}{2i} + \frac{i-(-i)}{2i}x + ... + \frac{i^{2p} - (-i)^{2p}}{2i}\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \frac{i^{2p+1} - (-i)^{2p+1}}{2i}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &+ \frac{i^{2p+2} - (-i)^{2p+2}}{2i}\frac{x^{2p+2}}{(2p+2)!} + o(x^{2p+2})\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) \text{ quand } x \to 0\end{aligned}}$$

De même :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2p+1}) \text{ quand } x \to 0 \\ \mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2p+2}) \text{ quand } x \to 0\end{aligned}}$$

5.3 Produit

Proposition 7. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Soit x_0 un élément ou une borne finie de I.

Si $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n)$ quand $h \to 0$ et $g(x_0+h) = b_0 + b_1 h + ... + b_n h^n + o(h^n)$ quand $h \to 0$,

alors $(fg)(x_0+h) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)h + ... + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0)h^n + o(h^n)$ quand $h \to 0$.

Ainsi, avec un $dl_n(x_0)$ de f et un $dl_n(x_0)$ de g, on obtient un $dl_n(x_0)$ de fg, dont la partie polynomiale est le produit des parties polynomiales, tronqué à l'ordre n.

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} f(x_0+h)g(x_0+h) &= \sum_{0\leq i,j\leq n} a_i b_j h^{i+j} + \sum_{i=0}^{n} a_i h^i o(h^n) + \sum_{i=0}^{n} b_i h^i o(h^n) + (o(h^n))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} a_i b_j h^k + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} a_i b_j h^k + \sum_{i=0}^{n} a_i o(h^{n+i}) + \sum_{i=0}^{n} b_i o(h^{n+i}) + (o(h^n))^2. \end{aligned}$$

Or, les termes de la seconde somme sont de la forte Cte $\times\, h^k$ avec $k \geq n+1$.
Ce sont donc des $o(h^n)$.
Ceux des troisième et quatrième somme sont des $o(h^n)$.
Donc :

$$fg(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) h^k + o(h^n).$$

Remarque 2. *En général, pour obtenir un dl_n d'un produit, il faut un dl_n de chaque facteur. Mais si les k premiers coefficients d'un facteur sont nuls, le dl à l'ordre $n-k$ du second facteur suffira.*

Exemple 8. *Pour obtenir un $dl_4(0)$ de $x \mapsto \sin(x)e^x$, il suffit d'un $dl_3(0)$ de $x \mapsto e^x$ car le premier coefficient du dl de* $\sin$ *est nul.*

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sin(x)e^x &= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) + o(x^4) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

De même, pour obtenir un $dl_4(0)$ de $\sin^2(x)$, il suffit d'un $dl_3(0)$ de $\sin(x)$.

5.4 Puissances

Calculons le $dl_7(0)$ de $x \mapsto \cos^4(x)$.
Méthode 1 Calcul par récurrence

Exemple 9.

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))^4\\
&= (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))^2\times(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))^2\\
&= (1+(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2})+(\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{24})+(-\frac{x^6}{720}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{720})+o(x^7))\\
\times&(1+(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2})+(\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{24})+(-\frac{x^6}{720}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{720})+o(x^7))\\
&= (1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+o(x^7))\times(1-x^2+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{45}x^6+o(x^7))\\
&= 1-2x^2+(\frac{2}{3}+1)x^4+(-\frac{4}{45}-\frac{2}{3})x^6+o(x^7)\\
&= 1-2x^2+\frac{5}{3}x^4-\frac{34}{45}x^6+o(x^7)
\end{aligned}$$

Remarque 3. *On a ici utilisé l'exponentiation rapide $f^4=(f^2)^2$ plutôt que $f^4=f\times(f\times(f\times(f))$.*

Méthode 2 On peut également se représenter la puissance comme un produit de facteurs identiques et chercher les manières d'obtenir une puissance de x donnée :

$$\cos^4(x)=(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))\times(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))\times(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7))$$

$$\times(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^7)).$$

- Pour obtenir le terme en x^0 il faut et il suffit d'utiliser le terme 1 dans chaque parenthèse.
- L'obtention d'un terme en x^1 est impossible.
- Pour obtenir le terme en x^2, il faut choisir 1 dans chaque parenthèse et choisir $-\frac{x^2}{2}$ dans la restante. 4 possibilités car 4 choix possibles de parenthèse pour $-\frac{x^2}{2}$.
  D'où : $4\times1\times1\times1\times-\frac{1}{2}=-2$ est le terme devant x^2.
- L'obtention d'un terme en x^3 est impossible.
- Pour obtenir le terme en x^4, on peut :
  - choisir 1 dans chaque parenthèse et choisir $\frac{x^4}{24}$ dans la restante. 4 possibilités car 4 choix possibles de parenthèse pour $\frac{x^4}{24}$.

— choisir $-\frac{x^2}{2}$ dans 2 parenthèses et 1 dans les 2 autres : 6 possibilités($=\binom{4}{2}$).

D'où : $4 \times \frac{1}{24} \times 1 \times 1 \times 1 + 6 \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times 1 \times 1 = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ est le terme devant x^4.

— L'obtention d'un terme en x^5 est impossible.

— Pour obtenir le terme en x^6, on peut :

— choisir 1 dans chaque parenthèse et choisir $-\frac{x^6}{720}$ dans la restante. 4 possibilités car 4 choix possibles de parenthèse pour $-\frac{x^6}{720}$.

— choisir $\frac{x^4}{24}$ dans 1 parenthèses, $-\frac{x^2}{2}$ dans une autre parenthèse, et 1 dans les 2 autres : 4×3 possibilités.

— choisir $-\frac{x^2}{2}$ dans 3 parenthèses, et 1 dans les trois autres : 4 possibilités (il faut et il suffit de choisir la parenthèse où il y a le 1).

D'où : $4\times(-\frac{1}{720})\times1\times1\times1+12\times\frac{1}{24}\times(-\frac{1}{2})\times1\times1+4\times(-\frac{1}{2})^3\times1 = -\frac{1}{180}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1+45+90}{180} = -\frac{136}{180} = -\frac{34}{45}$ est le terme devant x^4.

5.5 Composition

Pour obtenir un $dl_n(x_0)$ de $g \circ f$, on écrit un $dl_n(x_0)$ de f :

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + ... + o(h^n),$$

puis un dl_n de g **en** a_0 :

$$g(a_0 + u) = b_0 + b_1 u + ... + o(u^n).$$

Alors

$$(g \circ f)(x_0 + h) = b_0 + b_1 u + ... + o(u^n),$$

avec $u(h) = a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_n h^n + o(h^n)$.

Il est clair, en factorisant par h dans l'expression de u, que $\lim_{h \to 0} u(h) = 0$

(car $u = h(a_1 + a_2 h + ... + a_n h^{n-1} + o(h^{n-1})) = hf(h)$ où on a posé $f(h) = a_1 + a_2 h + ... + a_n h^{n-1} + o(h^{n-1})$).

et le $o(u^n)$ s'écrivant $u^n \epsilon(u)$ avec $\lim_{u \to 0} \epsilon(u) = 0$, d'où :

$$o(u^n) = (h \times f(h))^n \epsilon(u(h)) = h^n f^n(h) \epsilon(u(h)),$$

où $f^n(h) = (a_1 + a_2 h + ... + a_n h^{n-1} + o(h^{n-1}))^n$ est bornée au voisinage de $h = 0$ et $\epsilon(u(h))$ est de limite nulle en 0 en composant les limites.

Ainsi, $o(u^n) = o(h^n)$.

Remarque 4. *Si, par exemple,* $a_1 = 0$*, alors* $u = a_2h^2 + ... + a_nh^n + o(h^n)$ *se factorise par* h^2 *et le même raisonnement prouve alors que* $o(u^k) = o(h^{2k})$*.*

Il suffit alors de pousser le développement de g *au premier ordre* k *tel que* $2k \geq n$*.*

Si, de plus, $a_2 = 0$*, il suffira que* $3k \geq n$*, etc...*

Exemple 10. $dl_5(0)$ *de* $\sqrt[3]{\cos(x)} = (\cos(x))^{\frac{1}{3}}$*.*

On a :

$$\begin{aligned}\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\\ &= 1 + u(x) \textit{ avec } u(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \underset{x\to 0}{\to} 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}(\cos(x))^{\frac{1}{3}} &= (1+u(x))^{\frac{1}{3}}\\ &= 1 + \frac{1}{3}u(x) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\frac{(u(x))^2}{2!} + cte \times \frac{(u(x))^3}{3!} + (u(x))^3 \times \epsilon(u(x)) \textit{ avec } \epsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0\end{aligned}$$

Donc, puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$*,* $\epsilon(u(x)) \underset{x\to 0}{\to} 0$*.*

$$\begin{aligned}(\cos(x))^{\frac{1}{3}} &= 1 + \frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) - \frac{1}{9}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 + cte \times x^6 \times (1 + o(1)) + x^6 \times (1 + o(1))\\ &= 1 + \frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) - \frac{1}{9}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 + cte \times x^6 \times (1 + o(1)) + x^6 \times (1 + o(1))\\ &= 1 + \frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)) - \frac{1}{9}(\frac{x^4}{4} + o(x^5)) + o(x^5)\\ &= 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{x^4}{72} + o(x^5)\end{aligned}$$

5.6 Quotient

1$^{\text{er}}$ cas : Cas où le terme constant du dl du dénominateur est non nul.

Pour obtenir un dl_n du quotient, on écrit un dl_n du numérateur et du dénominateur :

- $f(x_0 + h) = a_0 + a_1h + ... + a_nh^n + o(h^n)$
- $g(x_0 + h) = b_0 + b_1h + ... + b_nh^n + o(h^n)$ avec $b_0 \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x_0+h)} &= \frac{1}{b_0(1 + \frac{b_1}{b_0}h + ... + \frac{b_n}{b_0}h^n + o(h^n))}\\ &= \frac{1}{b_0}\frac{1}{1+u(h)}\end{aligned}$$

avec $u(h) = \dfrac{b_1}{b_0}h + ... + \dfrac{b_n}{b_0}h^n + o(h^n) \to 0$ quand h tend vers 0.

En composant avec le $dl_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$, on en déduit le $dl_n(x_0)$ de $\dfrac{1}{g}$.

Remarque 5. *Si $b_1 = 0$, il suffit d'un $dl_k(0)$ de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $2k \geq n$.*

Il ne reste plus qu'à multiplier les $dl_n(x_0)$ de f et de $\dfrac{1}{g}$ entre eux.

<u>2nd cas</u> :$b_0 = 0$.

Si $a_0 \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en $x = 0$ donc pas de dl.

Si $a_0 = 0$, on simplifie par h, etc...

Exemple 11. *$dl_3(0)$ de $\dfrac{sh(x)}{\sqrt{1+x}-1} = k(x)$.*

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)\frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1} \\
&= \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{x(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))}{x(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{128}x^3 + o(x^3))} \\
&= \frac{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{128}x^3 + o(x^3)} \\
&= (1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))\frac{1}{\frac{1}{2}}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{64}x^3 + o(x^3)} \\
&= (1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3))\frac{1}{\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{64}x^3 + o(x^3) + u(x)^2 - u(x)^3 + u(x)^3\epsilon(u(x)))
\end{aligned}$$

où l'on a posé $u(x) = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{5}{64}x^3 + o(x^3)$ et $\lim\limits_{0} \epsilon = 0$.

On a donc $\epsilon(u(x)) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

De plus, $u(x) = x(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{5}{64}x^2 + o(x^2))$, d'où

$u(x)^3\epsilon(u(x)) = x^3(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}x - \dfrac{5}{64}x^2 + o(x^2))^3\epsilon(u(x)) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
k(x) &= (1+\frac{x^2}{6}+o(x^3))\times 2\times(1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{64}x^3+o(x^3)+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{-1}{64}x^3+o(x^3))\\
&= 2(1+\frac{x^2}{6}+o(x^3))(1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x^3+o(x^3))\\
&= 2(1+\frac{1}{4}x+x^2(\frac{1}{6}-\frac{1}{16})+x^3(\frac{1}{32}+\frac{1}{24})+o(x^3))\\
&= 2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{24}x^2+\frac{7}{48}x^3+o(x^3)
\end{aligned}
$$

6 Dérivation

Proposition 8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soit $x_0 \in I$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que f' admet un $dl_n(x_0)$.

Si $f(x_0+h) = a_0 + a_1h + ... + a_{n+1}h^{n+1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n+1})$, alors le $dl_n(x_0)$ de f' est :

$$f'(x_0+h) = a_1 + 2a_2h + ... + (n+1)a_{n+1}h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Démonstration : C'est le théorème de primitivation.

Remarque 6. *Pour appliquer ce théorème, il faut justifier l'existence du $dl_n(x_0)$ de f' (par exemple avec le théorème de Taylor-Young).*

7 Application des *dl* à la recherche d'équivalents

On rappelle que si f admet un $dl_n(x_0)$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls, alors $f(x_0+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_kh^k$,

où a_k désigne le premier coefficient non nul du $dl_n(x_0)$.

a_kh^k est appelé partie principale du développement limité.

Exemple 12. *Déterminer un équivalent de $\sin(x) - sh(x)$ quand $x \to 0$.*

On écrit un dl à un ordre suffisamment grand de manière à obtenir un coeffiient non nul.

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

$sh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Ainsi :

$\sin(x) - sh(x) = -\frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{3}$.

8 Calculs de limites à l'aide de *dl*

Pour calculer la limite d'un quotient, il est bon de chercher un équivalent du numérateur et du dénominateur.

Exemple 13.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1}.$$

On écrit, au voisinage de 0 *:*

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1} = \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{1-\frac{x^2}{2}-1+o(x^2)} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{2}} = -1 \underset{x\to 0}{\to} -1.$$

Donc

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\cos(x)-1} \underset{x\to 0}{\to} -1.$$

9 Position locale de la courbe représentative d'une fonction par rapport à une tangente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$.

Pour déterminer la position locale de $(x, f(x))$ par rapport à la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$, il est bon de calculer un équivalent de

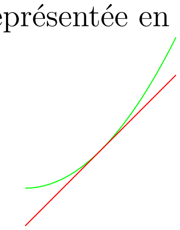
$f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ quand $x \to x_0$,

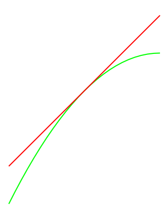
ou de $f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ quand $h \to 0$.

Supposons que $f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h \sim a_k h^k$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ et $a_k \neq 0$.

Si k est pair, la différence ci-dessus est de signe constant pour h voisin de 0.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ (représentée en vert) reste d'un même côté de la tangente (représentée en rouge).

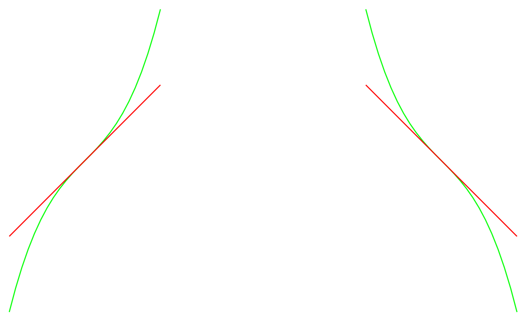




À gauche, on a représenté le cas $a_k > 0$ et à droite le cas $a_k < 0$.

Si k est impair, au voisinage de 0, $f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ est du signe de $a_k h^k$, c'est-à-dire du signe de $a_k h$.

On dit que $(x_0, f(x_0))$ est un <u>point d'inflexion</u>.



À gauche, on a représenté le cas $a_k > 0$ et à droite le cas $a_k < 0$.

Exemple 14. *On sait que :* $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

Ainsi :$\sin(x) - x \sim -\dfrac{x^3}{6}$ *quand* x *tend vers* 0.

On en déduit l'existence de $\epsilon > 0$ *tel que l'on ait* $\sin(x) - x > 0$ *pour tout* $x \in]-\epsilon; 0[$ *et* $\sin(x) - x < 0$ *pour tout* $x \in]0; \epsilon[$.