Chapitre III - Ensembles finis, dénombrement

M. GUILLERON, UNC

2021

1 Ensembles finis

1.1 Définition

Définition 1. *Un ensemble E est fini s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, ..., n\}$.*

Cet entier n est alors unique et s'appelle le cardinal de E (ou le nombre d'éléments de E).

Notation 1. *Le cardinal n d'un ensemble fini E est note $\#E$ (ou Card E).*

Exemple 1. *$\{$rouge, noir $\}$ est en bijection avec $\{1, 2\}$ et est donc de cardinal 2.*

Remarque 1. *$\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.*

Remarque 2. *Par définition le cardinal de l'ensemble vide est 0.*

1.2 Réunion

Les propriétés suivantes sont immédiates :

Propriétés 1.
1. *SiA est un ensemble fini et $B \subset A$, alors B est aussi un ensemble fini et* $\boxed{\#B \leq \#A}$.
2. *Si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$), alors :*

$$\boxed{\#(A \cup B) = \#A + \#B.}$$

3. *Si A est un ensemble fini et si $B \subset A$, alors :*

$$\boxed{\#(A \setminus B) = \#A - \#B.}$$

Propriété 1. *Soient A, B deux ensembles finis.*

Alors $A \cup B$ est fini et

$$\boxed{\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).}$$

<u>Idée de la démonstration :</u>

Premier cas :

Si A et B sont disjoints, et si $\varphi : [|1, \#A|] \to A$ et $\psi : [|1, \#B|] \to B$ sont des bijections, alors

$$\begin{array}{cccc} p & : & [|1, \#A + \#B|] & \to & A \cup B \\ & & i & \mapsto & \begin{cases} \varphi(i) \text{ si } i \leq \#A \\ \psi(i - \#A) \text{ si } i > \#A \end{cases} \end{array}$$

est bijective.

Deuxième cas :

Si $A \cap B \neq \emptyset$, on écrit $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$.
Or, A et $B \setminus A$ sont disjoints.
En admettant que $B \setminus A$ est fini, il vient :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#(B \setminus A). \tag{1}$$

Or, $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$ avec $B \setminus A$ et $A \cap B$ disjoints.
D'où :

$$\#B = \#(B \setminus A) + \#(A \cap B). \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire la formule voulue.

Propriété 2. *Soit X une partie d'un ensemble fini A.*
Alors : $\boxed{\#\mathcal{C}_A(X) = \#A - \#X.}$

Propriété 3. *Principe des bergers*
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie (c'est-à-dire I est fini) d'ensembles finis (c'est-à-dire $\forall i \in I$, A_i est fini) 2 à 2 disjoints (c'est-à-dire $\forall i, i' \in I$, $i \neq i' \Rightarrow A_i \cap A_{i'} = \emptyset$).
Alors $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i$ *est fini et* $\boxed{\displaystyle\#\bigcup_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I} \#A_i}$.

Démonstration : Il suffit de faire une récurrence sur l'assertion :

$P(n)$: Si $\#I = n$, la formule est vraie.

Corollary 1. *Soit $f : E \to I$ une application qui va d'un ensemble fini noté E dans un autre noté I.*
Alors $\boxed{\displaystyle\#E = \sum_{i \in I} \#f^{-1}(\{i\}).}$

Démonstration : Il suffit de poser $A_i = f^{-1}(\{i\})$ dans la formule précédente.
Pour $i \neq i'$, $f^{-1}(\{i\})$ (qui correspond à l'ensemble des antécédents de i) et $f^{-1}(\{i'\})$(qui correspond à l'ensemble des antécédents de i') sont disjoints car un élément de E ne peut avoir simultanément i et i' pour images.
Enfin, montrons que : $\displaystyle\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\}) = E$.
$\subset$: Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\})$.
On pose $i_0 \in I$ tel que $x \in f^{-1}(\{i_0\})$.
Alors : $x \in E$.
$\supset$: Soit $x \in E$.
On pose $i_0 = f(x) \in I$ (car f a pour ensemble d'arrivée I).
Alors $x \in f^{-1}(\{i_0\}) \subset \displaystyle\bigcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\})$.

Exemple 2. *DESSIN!!!*

$$\#E = \#f^{-1}(\{i_1\}) + \#f^{-1}(\{i_2\}) + \#f^{-1}(\{i_3\}).$$

$$3 = 2 + 1 + 0.$$

1.3 Produit cartésien

Propriété 4. *Soient E, F des ensembles finis.*
Alors $E \times F$ est fini et :

$$\boxed{\#(E \times F) = (\#E).(\#F)}, \text{ où . désigne la multiplication dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration :
Considérons, pour tout e de E :

$$A_e = \{(e, f),\ f \in F\}.$$

Exemple 3. *On pose : $E = \{1, 2\}$ et $F = \{3, 4, 5\}$.*
On pose : $A_1 = \{(1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5)\}$ et $A_2 = \{(2, 3),\ (2, 4),\ (2, 5)\}$.

Cet exemple est là pour donner une idée simple de ce qui se passe. On revient au cas général.
Les A_e, où $e \in E$, sont deux à deux disjoints, leur réunion est $E \times F$ et chaque A_e, étant en bijection avec F, a pour cardinal $\#F$.
Par le principe des bergers,

$$\begin{aligned} \#(E \times F) &= \sum_{e \in E} \#A_e \\ &= \sum_{e \in E} \#F \\ &= \#E.\#F. \end{aligned}$$

Théorème 1. *(Généralisation)*
Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'ensembles finis, $\prod_{i \in I} E_i$ est fini et $\boxed{\# \prod_{i \in I} E_i = \prod_{i \in I} \#E_i}$.

Idée de la démonstration : Récurrence sur la propriété :

$$P(n) : \text{la formule est vraie si } \#I = n.$$

Corollary 2. *Pour E, I finis :*

$$\boxed{\#\mathcal{F}(I, E) = \#(E^I) = (\#E)^{\#I}}.$$

1.4 Nombre de parties d'un ensemble

Propriété 5. *Soit E un ensemble fini. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et*

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E}.$$

Démonstration :
On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ & X & \mapsto & \text{fonction caractéristique de } X \end{array}.$$

Soit $g \in \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.
Il est clair que g admet un antécédent noté X, et un seul par l'application Ψ, à savoir :

$$X = \{x \in e | g(x) = 1\} = g^{-1}(\{1\}).$$

Donc $\#\mathcal{P}(E) = \#\mathcal{F}(E, \{0, 1\}) = (\#\{0, 1\})^{\#E} = 2^{\#E}$.

2 Dénombrement et applications

2.1 Injections, surjections, bijections et ensembles finis.

Propriété 6. *Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.*

1. *Si f est injective, alors $\#E \leq \#F$.*
2. *Si f est surjective, alors $\#E \geq \#F$.*
3. *Si f est bijective, alors $\#E = \#F$.*

Démonstration

1. On suppose f injective.
   On pose : $F' = f(E) = \text{Im } f$.
   Alors la corestriction de f à F' :
   $$f^{|F'} : \begin{array}{ccc} E & \to & F' \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$
   est une bijection.
   Ainsi, à chaque élément y de F' est associé un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.
   Donc E et F' ont le même nombre d'éléments.
   D'où : Card F' = Card E.
   Or, $F' \subset F$.
   Donc $\#E = \#(F') \leq \#F$.
2. Supposons f surjective.
   Pour tout élément $y \in F$, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et donc $\#E \geq \#F$.
3. Cela découle des deux premières propriétés, ou aussi de la preuve de la première.

Propriété 7. *Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.*
Si $\#E = \#F$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

Corollary 3. *(Principe des tiroirs)*
Si l'on range dans k tiroirs $n > k$ paires de chaussettes, alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.

Malgré sa formulation amusante, c'est une propriété souvent utile.

Exemple 4. *Dans une réunion non mixte de 367 personnes, deux personnes sont nées le même jour !*

2.2 Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre

Propriété 8. *Soient E, F des ensembles finis de cardinaux respectifs p et n. Alors le nombres d'injections de E dans F est égal à :*

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n \\ 0 \text{ si } p > n \end{cases}$$

Démonstration : Par récurrence.
Notons $P(p)$ l'assertion : « La formule est vrai lorsque $\#E = p$ (et F quelconque) ».

- Initialisation :
  Si $\#E = 0$, $E = \emptyset$.
  Il y a alors une seule application de E dans F, et elle est injective.
  Par ailleurs, $\dfrac{n!}{(n-0)!} = 1$ (avec $n = \#F$).
  Donc : $P(0)$ est vraie.
- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $P(p)$ vraie.
  Soient E et F des ensembles finis avec $\#E = p+1$.
  On pose : $n = \#F$.
  Deux cas se présentent :
  - Si $p+1 > n$:
    $A_n^{p+1} = 0$ par définition et il n'existe aucune injection de E dans F par théorème.
  - Si $p+1 \leq n$:
    Soit $x_0 \in E$.
    On pose : $E' = E \setminus \{x_0\}$.
    On note $\mathcal{I}(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F (resp. $\mathcal{I}(E',F)$ l'ensemble des injections de E' dans F).
    On pose :
    $$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathcal{F}(E,F) & \to & \mathcal{F}(E',F) \\ & & f & \mapsto & f_{|E'} \end{array}.$$
    Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$ est injective, alors $\Phi(f) = f_{|E'}$ l'est également.
    Ainsi Φ induit une application Ψ de $\mathcal{I}(E,F)$ dans $\mathcal{I}(E',F)$.
    Remarque 3. *On écrit*
    $$\Psi = \Phi_{|\mathcal{I}(E,F)}^{|\mathcal{I}(E',F)},$$
    l'indice signifiant une restriction (on restreint l'ensemble de départ) et l'exposant une corestriction (on corestreint l'ensemble d'arrivée).
    Soit $g \in \mathcal{I}(E',F)$. Résolvons l'équation $\Psi(f) = g$, d'inconnue $f \in \mathcal{I}(E,F)$.

  Analyse : Si $f$convient, alors $f(x_0) \notin g(E') = \mathrm{Im}\ g$.
  Or, g étant injective, elle induit une bijection de E' dans $g(E')$ donc $\#g(E') = \#E' = p$.
  Synthèse : Toute application f prolongeant g telle que $f(x_0) \notin g(E')$ est injective.
  Alors, il y a exactement $\#(F \setminus g(E')) = \#(F) - \#(E') = n - p$ antécédents de g.
  Appliquons la formule des bergers :
  $$\#\mathcal{I}(E,F) = \sum_{g \in \mathcal{I}(E',F)} \#\Psi^{-1}(\{g\})$$
  $$\begin{aligned} \#\mathcal{I}(E,F) &= \sum_{g \in \mathcal{I}(E',F)} \#\Psi^{-1}(\{g\}) \\ &= \sum_{g \in \mathcal{I}(E',F)} n-p \\ &= (n-p)\#\mathcal{I}(E',F). \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} \#\mathcal{I}(E,F) &= (n-p)A_n^p \text{ par hypothèse de récurrence appliquée à } E' \\ &= (n-p)\frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(p+1))!}. \end{aligned}$$
  D'où l'hérédité.

Corollary 4. *Si $\#E = \#F$, l'ensemble des injections de E dans F est égal à l'ensemble des bijections de E dans F.*

Il y a donc $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n!$ bijections de E dans F.

En particulier, dans le cas où $E = F$:

$$\boxed{\#S(E) = n!}.$$

3 Nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments

Propriété 9. *Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.*

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Notons $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E ($\mathcal{P}_p(E) \subset \mathcal{P}(E)$) :

$$\boxed{\#\mathcal{P}_p(E) = \binom{n}{p}} \text{ où l'on a posé } \boxed{\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & si\ p \leq n \\ 0\ si\ p > n \end{cases}}.$$

Remarque 4. $\binom{n}{p}$ *est parfois noté C_n^p.*

Remarque 5. *Éviter d'écrire trop de factoriels.*

Il est souvent plus simple d'écrire

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)(\text{ le produit comprenant } p \text{ facteurs }).$$

Considérons

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : \mathcal{I}([|1,p|], E) & \to & \mathcal{P}_p(E) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Im}\ f \end{array}$$

Soit $A \in \mathcal{P}_p(E)$.

Résolvons l'équation $\Phi(f) = A$, d'inconnue $f \in \mathcal{I}([|1,p|], E)$.

Analyse :

Si f convient, f induit une bijection de $[|1,p|]$ sur A.

Synthèse :

Pour toute bijection g de $[|1,p|]$ sur A,

$$\begin{array}{rccc} f & : [|1,p|] & \to & E \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

est un antécédent de A par Φ.

Ainsi $\Phi^{-1}(\{A\})$ est en bijection avec l'ensemble des bijections de $[|1,p|]$ sur A.

D'où : $\#\Phi^{-1}(\{A\}) = p!$.

Par le principe des Bergers :

$$A_n^p = \#\mathcal{I}([|1,p|], E) = \sum_{A \in \mathcal{P}_p(E)} \#\Phi^{-1}(\{A\}) = \sum_{A \in \mathcal{P}_p(E)} p! = p!\#\mathcal{P}_p(E).$$

D'où :

$$\frac{A_n^p}{p!} = \#\mathcal{P}_p(E).$$

Propriété 10. *Pour $0 \leq p \leq n$,* $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$.

Démonstration :
Soit E un ensemble à n éléments.
Montrons que $\#\mathcal{P}_p(E) = \#\mathcal{P}_{n-p}(E)$, en exhibant une bijection de $\mathcal{P}_p(E)$ sur $\mathcal{P}_{n-p}(E)$.
L'application $\begin{array}{rccc} \Phi & : \mathcal{P}_p(E) & \to & \mathcal{P}_{n-p}(E) \\ & A & \mapsto & E \setminus A \end{array}$ convient.

Propriété 11. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n}.$$

Propriété 12. *(Formule de Pascal) Soit n, $p \in \mathbb{N}$.*

$$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}}.$$

Triangle de Pascal
C'est le tableau de $\binom{n}{p}$.

La formule de Pascal ainsi que la connaissance de $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{0}{p} = 0$ permet par récurrence de calculer tous les $\binom{n}{p}$.

Sommant les valeurs de 2 cases horizontalement voisines, on botient le résultat sous la case de droite.

Propriétés 2. *Formules à ne pas retenir...*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-1-p)!(n-p)} = \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p} \ \textit{si } 0 \leq p \leq n-1,$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \text{ \textit{si} } 1 \leq p \leq n,$$

... mais à savoir établir en cas de besoin !

4 Utilisation des fonctions caractéristiques dans les problèmes de dénombrement

Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors $\boxed{\#A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)}$.