Chapitre I - Ensembles, applications

M. GUILLERON, UNC

2021

INTRODUCTION

Exercice :

On note $\mathcal{A} = \{a, b, c, ..., y, z\}$ et$\mathcal{P} = \{\text{caractères phonétiques}\}$ désigne l'alphabet phonétique.

On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{A}^n & \rightarrow & \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}^l \\ & & (a_i)_{i\in[|1,n|]} & \mapsto & (p_m)_{m\in[|1,l|]} \end{array}.$$

1. Justifier que f est définie.
2. Montrer que f n'est pas injective.

Indication : Si vous n'arrivez pas à lire cette phrase, rassurez-vous, vous asvez quand même lire !

(d'ailleurs, comment avez-vous prononcé ce dernier asvez ?)

Un grand remerciement à tous les élèves de l'UNC du confinement 2020 qui ont contribué à la relecture du poly.

1 Ensembles

1.1 Définition

Définition 1. *Un ensemble est une collection d'objets appelés ses éléments.*

Notation 1. *On notera $a \in A$ lorsque l'objet a sera un élément de A.*

$\in$ est le symbole d'appartenance, à ne pas confondre avec le symbole $\subset$, symbole d'inclusion qui sera défini plus tard dans ce poly.

La notation $a \notin A$ signifie $\neg(a \in A)$.

Exemple 1.

1. *$\emptyset$ est l'ensemble ne possédant aucun élément.*
2. *On appelle singletons les ensembles possédant un et un seul élément.*
3. *On appelle paires les ensembles possédant exactement deux éléments.*

Notation 2. *Un ensemble fini dont les éléments sont notés a_1, a_2, ..., a_n est noté :*

$$\{a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n\}.$$

Notation 3. *Un ensemble dont les éléments sont les éléments d'un ensemble A vérifiant une propriété $p(.)$ sera noté*

$$\{a \in A \text{ t.q. } p(a)\} \text{ ou encore } \{a \in A | p(a)\}.$$

Exemple 2. $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\} = [1, +\infty[$.

Notation 4. *L'ensemble des images par une application f des éléments d'un ensemble A :*

$$\{f(a),\, a \in A\}.$$

Cet ensemble se lit : « L'ensemble des $f(a)$ quand a parcourt (ou décrit) A ».

Exemple 3. $\{2n,\, n \in \mathbb{Z}\}$ *désigne l'ensemble des entiers relatifs pairs.*

Exemple 4.

$$\{a_1,\, a_2,\, ...,\, a_n\} = \{a_k,\, k \in [|1, n|]\}.$$

1.2 Quantificateurs

Il existe 2 quantificateurs :

1. $\forall$: « pour tout » ou « quelque soit ».
2. $\exists$: « il existe » ou « il existe au moins un ».

Étant donnée une relation unaire (relation dont la valeur de vérité dépend d'un paramètre : c'est une application de X vers l'ensemble $\{VRAI, FAUX\}$) définie sur un ensemble X, on peut former les assertions :

$(\forall x \in X\ p(x))$ et $(\exists x \in X\ p(x))$.

La première est vraie si et seulement si tous les éléments de X vérifient p et la seconde est vraie si et seulement si au moins un x de X vérifie p.

Les élèves n'étant pas en CUPGE peuvent remplacer relation unaire par propriété pour plus de clarté.

Remarque 1.

1. *Toute assertion du type* $\forall x \in \emptyset,\ p(x)$ *est vraie.*
2. *Toute assertion du type* $\exists x \in \emptyset,\ p(x)$ *est fausse.*
3. *L'ordre des quantificateurs n'est pas indifférent :*

   Exemple 5. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y > x$ *est vraie (pour chaque* $x \in \mathbb{R}$*, il suffit de prendre* $y = x + 1$*).*

   $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y > x$ *est fausse : il n'existe pas de réel* y *strictement plus grand que tous les autres.*

   Ainsi, on retiendra que le « y »dans « ∃y »dépend toujours des variables quantifiées à sa gauche mais doit être indépendant de celles quantifiées à sa droite.

Propriété 1. *(Négation d'une assertion quantifiée)*

La négation de $\exists x \in X\ p(x)$ *est* $\forall x \in X\ \neg p(x)$ *:*

$$\neg(\exists x \in X\ p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in X\ \neg p(x)).$$

De même, la négation de $\forall x \in X\ p(x)$ *est* $\exists x \in X\ \neg p(x)$ *:*

$$\neg(\forall x \in X\ p(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in X\ \neg p(x)).$$

Remarque 2. *On pourra remplacer le symbole* $\Leftrightarrow$ *par a.m.v.v.(a même valeur de vérité) pour faire comme dans le cours de logique.*

Exemple 6.

1. $\neg(\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 < 0) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}\ x^2 \geq 0)$.
2. $\neg(\forall z \in \mathbb{C}\ z^2 \in \mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow (\exists z \in \mathbb{C}\ z^2 \notin \mathbb{R}^+)$.

1.3 Sous-ensembles

Définition 2. *Soient* A *et* B *deux ensembles.*

On dit que A *est un sous-ensemble de* B*, une partie de* B*, ou encore que* A *est inclus dans* B *si et seulement si*

$$\forall x \in A,\ x \in B,$$

ce qui se note $A \subset B$*.*

Exemple 7.

1. *$\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.*
2. *Tout ensemble est sous-ensemble de lui-même.*

Définition 3. *A désignant un ensemble, $\emptyset$ et A sont appelés sous-ensembles triviaux de A.*

Proposition 1. *(Transitivité de l'inclusion) Soient A, B et C trois ensembles.*
Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

<u>Démonstration :</u>
Supposons $A \subset B(1)$ et $B \subset C(2)$.
Soit $x \in A$.
Alors $x \in B$ par (1).
Donc $x \in C$ par (2).
En résumé : $\forall x \in A$, $x \in C$.
Conclusion : $\boxed{A \subset C}$.

Remarque 3. *Pour démontrer $\forall x \in X \; p(x)$, on rédige ainsi :*
« Soit $x \in X$
... (raisonnement) ...
Donc $p(x)$. »

Définition 4. *On dit que deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. On écrit alors $A = B$.*

1.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Notation 5. *Soit E un ensemble. On note <u>$\mathcal{P}(E)$</u> l'ensemble des parties de E.*

Exemple 8.

1. *$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.*
2. *$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$! En effet, $\{\emptyset\}$ contient un élément : $\emptyset$.*

1.5 Opérations sur les ensembles

Définition 5. *Soient A et B des ensembles.*
On note $A \cup B := \{x | x \in A$ ou $x \in B\}$ qu'on appelle <u>réunion</u> de A et de B.
On note $A \cap B := \{x | x \in A$ et $x \in B\}$ qu'on appelle <u>intersection</u> de A et de B.
On note $A \setminus B := \{x | x \in A$ et $x \notin B\}$ qu'on appelle <u>différence</u> de A et B.

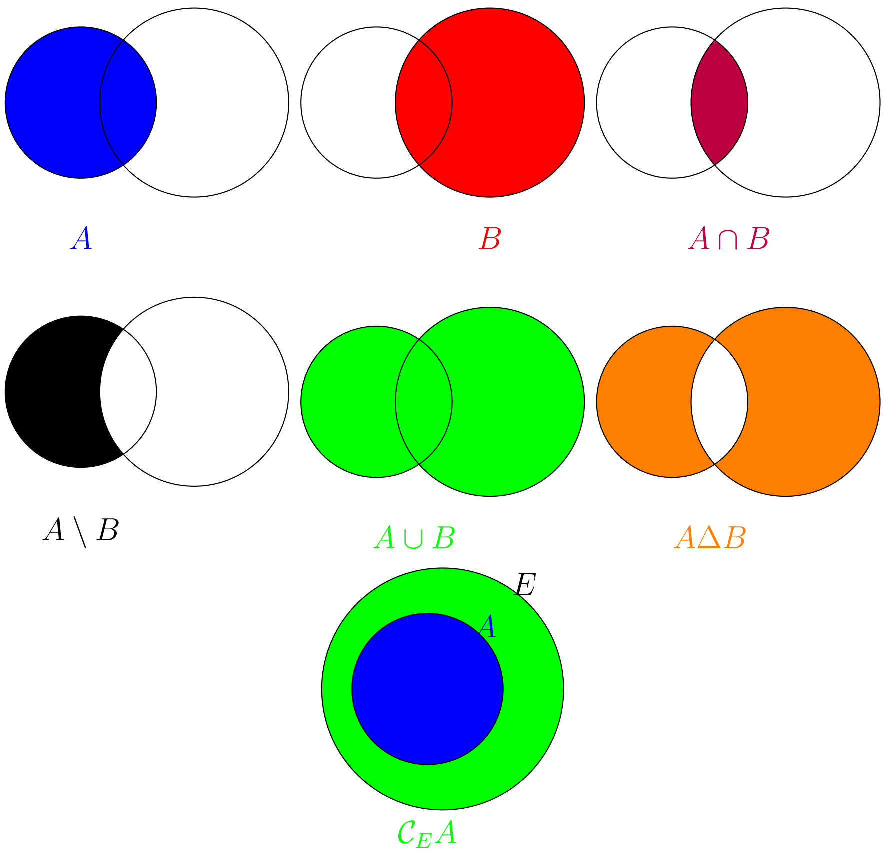
Définition 6. *Soit E un ensemble.*
Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
On appelle complémentaire de A dans E, et on note $\mathcal{C}_E A$ ou $\overline{A}$ (si E est sous-entendu) l'ensemble $E \setminus A$.

Remarque 4. *Soient A, $B \in \mathcal{P}(E)$.*
$B \setminus A = B \cap \overline{A}$.

Définition 7. *Soient A, B des ensembles.*
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble :

$$A \Delta B = \{x | (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin A \cap B\}$$
$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exemple 9. ***Illustrations :***



Propriétés 1.

1. *Soient A, $B \in \mathcal{P}(E)$. On a :*
   (a) $A \cap B = B \cap A$.
   (b) $A \cup B = B \cup A$.
   (c) $A \Delta B = B \Delta A$.

   On dit que $\cap$, $\cup$ et Δ sont commutatives.
2. *Soient A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$. On a :*
   (a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(c) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

On dit que $\cap$, $\cup$ *et* Δ *sont associatives.*

3. *Soient* A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$. *On a :*

   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   On dit que $\cap$ *est distributive sur* $\cup$.

   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   On dit que $\cup$ *est distributive sur* $\cap$.

4. *Soient* A, $B \in \mathcal{P}(E)$. *On a :*

$$A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}.$$

(le passage au complémentaire renverse les inclusions).

5. *Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

On dit que le passage au complémentaire est involutif.

6. *Lois de Morgan :*
   Soient A, $B \in \mathcal{P}(E)$. *On a :*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

<u>Démonstration :</u>

1. (a) Soient A et B deux parties de E.
   On a alors :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\} \\ &= \{x \in E | x \in B \text{ ou } x \in A\} \text{ car « ou »est commutatif} \\ &= B \cup A. \end{aligned}$$

   (b) Soient A et B deux parties de E. On a alors :

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\} \\ &= \{x \in E | x \in B \text{ et } x \in A\} \text{ car « et »est commutatif} \\ &= B \cap A. \end{aligned}$$

(c) Soient A et B deux parties de E.
On a alors :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) \\ &= (B\cup A)\setminus(B\cap A) \\ &= (B\Delta A) \end{aligned}$$

2. (a) On a : $\forall x\in E$,

$$\begin{aligned} x\in A\cap(B\cap C) &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in B\cap C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A)\wedge(x\in B)\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A\cap B)\wedge(x\in C) \\ &\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cap C, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité de ces deux ensembles.

(b) De même, $\forall x\in E$:

$$\begin{aligned} x\in A\cup(B\cup C) &\Leftrightarrow (x\in A)\vee(x\in B\cup C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A)\vee(x\in B)\vee(x\in C) \\ &\Leftrightarrow (x\in A\cup B)\vee(x\in C) \\ &\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cup C, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité de ces deux ensembles.

(c) Démonstration à la fin du chapitre (avec les fonctions caractéristiques).

3. Exercice.
4. Exercice.
5. Exercice.
6. Exercice.

1.6 Relations entre connecteurs logiques et ensembles

Soit E un ensemble, et p et q des relations unaires sur E.
On pose : $A=\{x\in E|p(x)\}$ et $B=\{x\in E|q(x)\}$.
On a :

1. $A\cap B=\{x\in E|p(x)$ et $q(x)\}$.
2. $A\cup B=\{x\in E|p(x)$ ou $q(x)\}$.
3. $A\setminus B=\{x\in E|p(x)$ et $\neg(q(x))\}$.
4. $\overline{A}=\{x\in E|\neg(p(x))\}$.

1.7 Produit cartésien

Définition 8. *On appelle couple la donnée de deux objets, éventuellement égaux, donnés dans un certain ordre.*

On note un couple sous la forme (a, b). a désigne alors le premier terme du couple et b le second terme du couple.

Exemple 10. *Dans un repère du plan, les coordonnées d'un point sont données sous forme de couple. Le premier terme est alors appelé abscisse et le second ordonnée.*

Remarque 5. *(Égalité de deux couples)*

On a, pour tous a, b, c et d appartenant à un ensemble E :

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = c \\ \text{ et} \\ b = d \end{array} \right.$$

Définition 9. *(Produit cartésien de deux ensembles) Soient A et B deux ensembles.*

On appelle produit cartésien de A et B l'ensemble des couples dont le premier terme est dans A et le second terme est dans B :

$$A \times B := \{(a, b),\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Plus formellement :

$$A \times B := \{c | \exists a \in A,\ \exists b \in B\ c = (a, b)\}.$$

Exemple 11. *On pose $A = \{1, 2\}$, $B = \{7, 8, 9\}$.*

Alors : $A \times B = \{(1, 7),\ (1, 8),\ (1, 9),\ (2, 7),\ (2, 8),\ (2, 9)\}$.

Remarque 6. *Pour tout ensemble A,*

$$A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A.$$

Généralisation : Etant donné un entier naturel n non nul, on appelle n-uplet la donnée de n objets (les répétitions sont permises) x_1, ..., x_n, dans un certain ordre.

Ce n-uplet est noté $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Étant donné n ensembles A_1, A_2, ..., A_n, $A_1 \times ... \times A_n$ désignera $\{(x_1, ..., x_n),\ x_1 \in A_1,\ ...,\ x_n \in A_n)\}$.

Si $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, A^n désignera $A \times A \times ... \times A$ (n facteurs).

2 Applications, familles

2.1 Définitions, exemples

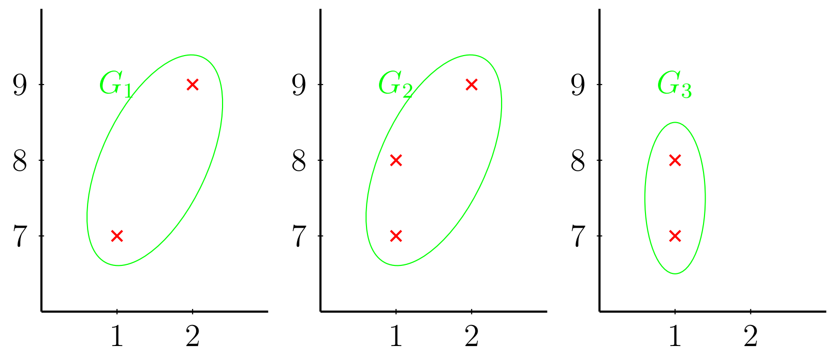
Définition 10. *Une application est un triplet (E, F, G) où E, F sont des ensembles et G est une partie de $E \times F$ (c'est un ensemble de couples) vérifiant :*

$$\forall x \in E\ \exists! y \in F\ (x,y) \in G.$$

E est alors appelé ensemble de départ ou source.
F est appelé ensemble d'arrivée ou but.
G est appelé graphe de l'application.

Rappel 1. *$\exists!$ signifie « il existe un unique »ou « il existe un et un seul ».*

Exemple 12.



Seul G_1 est le graphe d'une application de $\{1,2\}$ dans $\{7,8,9\}$ car c'est le seul graphe contenant un et un seul couple de premier terme 1 et un et un seul couple de premier terme 2.

Notation 6. *Étant donnée une application $f = (E,F,G)$, et un élément x de E, l'unique y de F tel que $(x,y) \in G$ est noté $f(x)$, et est appelé l'image de x par f.*

Définition 11. *Soit $y \in F$. Un élément x de E est appelé un antécédent de y par f si et seulement si $f(x) = y$.*

Remarque 7. *Tout élément de E a exactement une image, mais un élément y de F peut avoir un nombre quelconque d'antécédents.*

Exemple 13. *Applications constantes*

Étant donné deux ensembles E et F, une application f de E dans F est dite constante si et seulement si

$$\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x').$$

Lorsque $F \neq \emptyset$, ceci est équivalent à $\exists c \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = c$.
f est alors appelée application constante de valeur c (et c est unique, sauf si $E = \emptyset$).

Exemple 14. *Identité*

Étant donné un ensemble E, on appelle identité de E l'application :

$$\begin{array}{cccc} Id_E & : & E & \to & E \\ & & x & \mapsto & x \end{array}.$$

Exemple 15. ***Application $i$ème composante d'un produit cartésien***

Étant donné n ensembles A_1, ..., A_n, et un entier i tel que $1 \leq i \leq n$, l'application

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times ... \times A_i \times ... \times A_n & \to & E \\ (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

est appelée $i$ème composante (ou $i$ème projection) d'un produit cartésien.

Exemple 16. ***Applications vides***

Étant donné un ensemble F, l'application vide de F est l'application $(\emptyset, F, \emptyset)$, de graphe vide.

Notation 7. *On notera $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.*

Remarque 8. *- Si $E = \emptyset$, $\mathcal{F}(E, F)$ est un singleton :*

$$\mathcal{F}(E, F) = \{\textit{application vide de } E \textit{ dans } F\}.$$

- Si $F = \emptyset$ et $E \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(E, F) = \emptyset$ car $\forall G \subset E \times F = E \times \emptyset = \emptyset$, l'assertion logique $\forall x \in E\ \exists! y \in \emptyset\ (x, y) \in G = \emptyset$ est fausse !

Définition 12. *Soit $f : E \to F$ une application.*

Soit E' une partie de E.

On appelle <u>restriction</u> de f à E' l'application :

$$f_{|E'} \ : \begin{array}{ccc} E' & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

2.2 Images directes et réciproques de parties

Soit $f : E \to F$ une application.

Définition 13. *Soit E' une partie de E.*

On appelle <u>image directe</u> de E' par f l'ensemble <u>des images des éléments de E' par f</u>, c'est-à-dire l'ensemble <u>des éléments de F qui ont au moins un antécédent dans E'</u>.

Notation 8.

$$f(E') = \{f(x),\ x \in E'\} = \{y \in F | \exists x \in E'\ y = f(x)\}.$$

Définition 14. *Soit F' une partie de F. On appelle <u>image réciproque</u> de F' par f <u>l'ensemble des éléments de E ayant leur image (par f) dans F'</u>.*

Autrement dit, c'est l'ensemble des antécédents des éléments de F'.

Notation 9.

$$f^{-1}(F') = \{x \in E | f(x) \in F'\}.$$

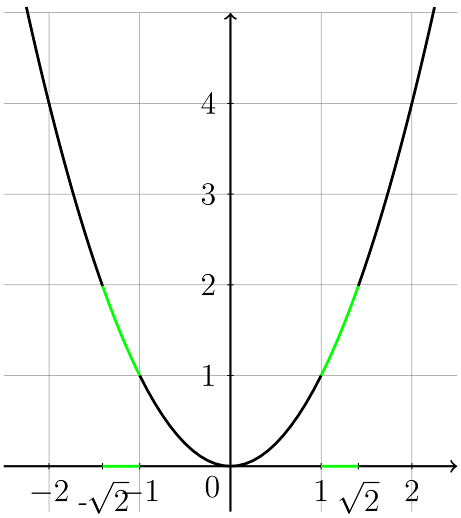
Remarque 9. ***ATTENTION ! ! !*** *F' est une partie de F donc f n'est pas nécessairement bijective.*

Pour écrire f^{-1}(un élément de F), il faut que f soit BIJECTIVE (voir la suite du cours pour la définition de bijective).

Pour écrire f^{-1}(une partie de F), aucune hypothèse sur f n'est nécessaire.

Exemple 17. *On considère l'application :*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$



On a :

- $f([0,2]) = \{f(x),\ x \in [0,2]\} = [0,4]$.
- $f(]-1,3[) = [0,9[$.
- $f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2},-1] \cup [1,\sqrt{2}]$.
- $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$.

Proposition 2. *Soit $f : E \to F$ une application.*
Soient $F_1,\ F_2 \in \mathcal{P}(F)$. Alors :

1. $f^{-1}(F_1 \cup F_2) = f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2)$.
2. $f^{-1}(F_1 \cap F_2) = f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2)$.
3. $f^{-1}(\overline{F_1}) = \overline{f^{-1}(F_1)}$,
   c'est-à-dire : $f^{-1}(\mathcal{C}_F F_1) = \mathcal{C}_E f^{-1}(F_1)$.

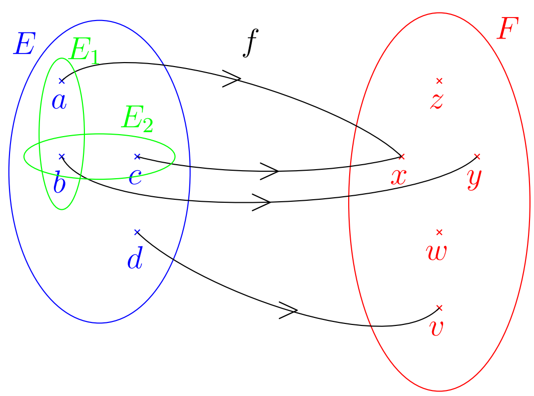
Démonstration :

1.
$$\begin{aligned} f^{-1}(F_1 \cup F_2) &= \{x \in E | f(x) \in F_1 \cup F_2\} \\ &= \{x \in E | f(x) \in F_1 \vee f(x) \in F_2\} \\ &= \{x \in E | f(x) \in F_1\} \cup \{x \in E | f(x) \in F_2\} \\ &= f^{-1}(F_1) \cup f^{-1}(F_2). \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} f^{-1}(F_1 \cap F_2) &= \{x \in E | f(x) \in F_1 \cap F_2\} \\ &= \{x \in E | f(x) \in F_1 \wedge f(x) \in F_2\} \\ &= \{x \in E | f(x) \in F_1\} \cap \{x \in E | f(x) \in F_2\} \\ &= f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2).. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} f^{-1}(\overline{F_1}) &= \{x \in E | f(x) \in \overline{F_1}\} \\ &= \{x \in E | \neg(f(x) \in F_1)\} \\ &= \mathcal{C}_E\{x \in E | f(x) \in F_1\} \\ &= \mathcal{C}_E f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

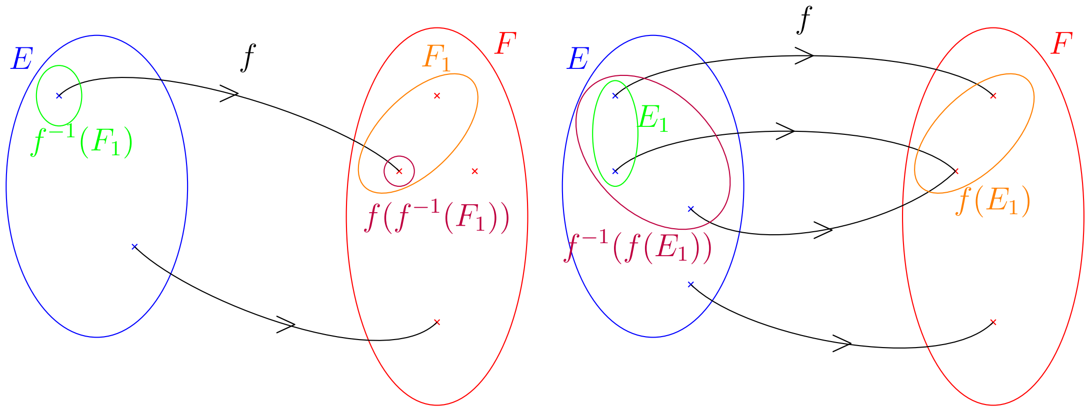
Remarque 10. ***Attention !!!*** *Pas de propriété analogue pour les images, comme le montre le contre-exemple suivant :*



Ici, $f(E_1 \cap E_2) \neq f(E_1) \cap f(E_2)$.
En effet, $f(E_1) = f(E_2) = f(E_1) \cap f(E_2) = \{x, y\} \neq \{y\} = f(\{b\}) = f(E_1 \cap E_2)$.

Remarque 11. *En général, considérant une application* $f : E \to F$, *et* $F_1 \subset F$ *et* $E_1 \subset E$, *on a :*
$f(f^{-1}(F_1)) \neq F_1$ *et* $f^{-1}(f(E_1)) \neq E_1$.

Exemple 18. *Illustrations :*



Définition 15. *Soit $f : E \to F$. Soient $E_1 \in \mathcal{P}(E)$ et $F_1 \in \mathcal{P}(F)$, tel que $f(E_1) \subset F_1$.*
Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \to & F_1 \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

est appelée application de E_1 dans F_1 induite par f.

Définition 16. *Soit $f : E \to E$ une application.*
Une partie E_1 de E sera dite stable par f ou f-stable si et seulement si $f(E_1) \subset E_1$.

2.3 Composition

Définition 17. *Soient E, F, G trois ensembles.*
On considère $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.
On appelle composée de f et g l'application

$$\begin{array}{ccccc} g \circ f & : & E & \to & G \\ & & x & \mapsto & g[f(x)] \end{array}.$$

Remarque 12. *Cette définition s'étend au cas où l'ensemble d'arrivée de f est différent de l'ensemble de départ de g mais où $f(E) \subset$ ensemble de départ de g.*

Propriété 2. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications.*
On a alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
On dit que la composition des applications est associative.

Démonstration : - $h\circ(g\circ f)$ et $(h\circ g)\circ f$ ont même ensemble de départ (E) et d'arrivée (H).

- De plus, soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned}[h \circ (g \circ f)](x) &= h[(g \circ f)(x)] \\ &= h[g(f(x))] \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= [(h \circ g) \circ f](x).\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout x de E, on en conclut que on a bien $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propriété 3. *Soit $f : E \to F$ une application.*

On a : $f \circ Id_E = f = Id_F \circ f$.

On dit que l'identité est l'élément neutre pour la loi $\circ$.

Démonstration :

- $f \circ \mathrm{Id}_E$, $\mathrm{Id}_F \circ f$ et f ont même ensemble de départ (E) et d'arrivée (F).

- De plus, on a :

$\forall x \in E$, $(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f[\mathrm{Id}_E(x)] = f(x)$,

et $\forall x \in E$, $(\mathrm{Id}_F \circ f)(x) = \mathrm{Id}_F[f(x)] = f(x)$.

On en conclut que $f \circ \mathrm{Id}_E = f = \mathrm{Id}_F \circ f$.

Remarque 13. *ATTENTION!!! Nous avons vu ici deux raisonnements équivalents. Soit on dit $\forall x \in E$ et on démarre son calcul, soit on considère $x \in E$ puis on raisonne sur ce x quelconque. Dans tous les cas, lorsqu'on raisonne sur un x, celui-ci DOIT OBLIGATOIREMENT ÊTRE DÉCLARÉ AU PRÉALABLE PAR DES QUANTIFICATEURS OU UNE PHRASE DU TYPE « Soit $x \in E$ »POUR SAVOIR A QUEL ENSEMBLE IL APPARTIENT.*

Définition 18. *Soit $f : E \to E$ une application.*

f est une <u>involution</u> si et seulement si $f \circ f = Id_E$,

c'est-à-dire : $\forall x \in E$, $f[f(x)] = x$.

Exemple 19.

1. *Les symétries centrales et axiales.*
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}$.
3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -z \end{array}$.
4. $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$.
5. *Étant donné un ensemble E :*
   $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \overline{X} \end{array}$.

2.4 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 19. *Soit $f : E \to F$ une application.*
f est dite :

1. *injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent.*
Plus formellement, cela s'écrit :

$$\underline{\forall (x, x') \in E^2 \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'},$$

ou encore (par contraposée) :

$$\underline{\forall (x, x') \in E^2 \ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')}.$$

2. *surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent.*
Plus formellement, cela s'écrit :

$$\underline{\forall y \in F \ \exists x \in E \ y = f(x)}.$$

3. *bijective si et seulement si elle est injective et surjective.*
Plus formellement, cela s'écrit :

$$\underline{\forall y \in F \ \exists! x \in E \ y = f(x)}.$$

Définition 20. *Soit $f : E \to F$. On appelle ensemble image de f et on note $Im\, f$ l'ensemble $f(E)$:*

$$Im\, f := f(E).$$

Propriété 4.

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow Im\, f = F.$$

Démonstration : On commence par remarquer que :
$\text{Im } f = f(E) = \{y \in F | \exists x \in E \ y = f(x)\} \subset F$.
Ceci est toujours vrai, que f soit surjective ou pas.
Montrons donc maintenant l'équivalence logique f est surjective si et seulement si $\text{Im } f \supset F$.
$\text{Im } f \supset F \Leftrightarrow \forall y \in F \ \exists x \in E \ f(x) = y \Leftrightarrow f$ surjective.

Exemple 20. 1. $\begin{array}{cccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}$.

- *f_1 n'est pas injective car 4 a deux antécédents : 2 et -2.*

- *f_1 n'est pas sujective car certains nombres réels n'ont pas d'antécédent (par exemple, -1 n'a pas d'antécédent).*

2. $\begin{array}{rccc} f_2 & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$

   f_2 est injective mais pas surjective.

3. $\begin{array}{rccc} f_3 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$

   f_3 est surjective mais pas injective.

4. $\begin{array}{rccc} f_4 & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$

   f_4 est bijective.

Remarque 14. *Soit $f : E \to F$ une application.*
Alors l'application induite $\tilde{f} : E \to Im\ f$ est surjective.
Si de plus f est injective, alors $\tilde{f}$ est bijective.

Définition 21. *Soit $f : E \to F$ une bijection. On appelle réciproque de f l'application*

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & F & \to & E \\ & & y & \mapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}.$$

Exemple 21. *On considère l'application*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

f est bijective, de réciproque

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_- \\ & & y & \mapsto & -\sqrt{y} \end{array}.$$

Proposition 3. *f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Démonstration :
Soit $x \in E$. Montrons que x admet un et un seul antécédent par f^{-1}. Pour cela, nous allons effectuer un raisonnement par analyse-synthèse. Détaillons brièvement ce type de raisonnement.

Analyse : Dans un premier temps, nous allons supposer que ce que l'on cherche à démontrer existe. Le raisonnement d'analyse nous permet alors de dégager un certain nombre de propriétés sur l'objet, sa valeur, et par conséquent son unicité. Ainsi, nous avons montré, sous réserve d'éxistence d'un tel objet, qu'il est unique.

Synthèse : Une fois qu'on connaît l'objet, il faut vérifier qu'il respecte le « cahier des charges ». On vérifie donc que l'objet dégagé à l'étape d'analyse répond bien au problème posé. On démontre ainsi son existence.

Analyse : Soit y un antécédent de x par f^{-1}.
Alors $f^{-1}(y) = x$.
Donc $f(f^{-1}(y)) = f(x)$.

Ainsi $y = f(x)$.
En effet, $f(f^{-1}(y))$ est l'image par f d'un antécédent de y par f, donc c'est y.
Donc x admet au plus un antécédent y par f^{-1} : $f(x)$.
Synthèse :
Vérifions que $f(x)$ est bien un antécédent de x par f^{-1}.
$f^{-1}(f(x)) =$ l'unique antécédent de $f(x)$ par f
$= x$.
Ainsi, f^{-1} est bien bijective et

$$(f^{-1})^{-1} \begin{array}{ccc} : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

Donc $(f^{-1})^{-1} = f$.

Proposition 4. *Soit $f : E \to F$ une application. Supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors f est bijective et $g = f^{-1}$.*

Démonstration :
Soit $y \in F$. Montrons que y admet un et un seul antécédent par f.
Analyse :
Soit x un antécédent de y par f.
Alors $f(x) = y$.
Donc $g(f(x)) = g(y)$.
D'où $(g \circ f)(x) = g(y)$.
Ainsi $\mathrm{Id}_E(x) = g(y)$.
Donc $x = g(y)$.
Synthèse :
Vérifions que $g(y)$ est bien un antécédent de y par f.

$$\begin{aligned} f(g(y)) &= (f \circ g)(y) \\ &= \mathrm{Id}_F(y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Donc f est bijective et

$$f^{-1} \begin{array}{cccc} : & F & \to & E \\ & y & \mapsto & g(y) \end{array}.$$

Conclusion : $f^{-1} = g$.

Proposition 5. *Soit $f : E \to E$ une application. On a l'équivalence :*

$$f \text{ est involutive} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est bijective} \\ \text{et} \\ f^{-1} = f \end{cases}.$$

Démonstration :
On raisonne par double implication.
$\Leftarrow$: Supposons que f est bijective et que $f^{-1} = f$.
Alors $f \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_E$, donc f est involutive.
$\Rightarrow$: Supposons f involutive.
Alors $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
Posons $g = f$, $F = E$.
On a alors l'existence d'une fonction g telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_F$.
Par la proposition précédente, f est bijective et $f^{-1} = g = f$.

2.5 Fonctions caractéristiques

Définition 22. *Soit E un ensemble.*

Pour tout $A \subset E$, on appelle fonction caractéristique (ou fonction indicatrice) de l'ensemble A (et on note $\mathbb{1}_A$) l'application :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{1}_A & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Proposition 6. *Soient A, B des parties d'un ensemble E.*

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
4. $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \times \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Démonstration :

1. Soit $x \in E$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \notin A \cap B$.
   - Premier cas : $x \in A \cap B$:
   Alors $x \in A$ et $x \in B$.
   Donc $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$.
   Ainsi $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 1 = 1 * 1 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
   - Deuxième cas : $x \notin A \cap B$:
   Alors $x \notin A$ ou $x \notin B$.
   Donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$.
   Premier sous-cas : Si $\mathbb{1}_A(x) = 0$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 = 0 * \mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
   Deuxième sous-cas : Si $\mathbb{1}_B(x) = 0$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = 0 = \mathbb{1}_A(x) * 0 = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
   Ainsi, $\forall x \in E$ $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$.
2. Soit $x \in E$.
   Premier cas : $x \in A$.
   On a : $x \notin \overline{A}$.

D'où : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$ (car $\mathbb{1}_A(x) = 1$).
Deuxième cas : $x \notin A$.
On a : $x \in \overline{A}$.
D'où : $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 = 1 - \mathbb{1}_A(x)$ (car $\mathbb{1}_A(x) = 0$).
Ainsi, $\forall x \in E$ $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

3. **Notation 10.** *Étant donnés deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, on note $A \cup B = A \sqcup B$ pour signifier que l'union de A et de B est une union disjointe.*
Soit $x \in E$. Puisque $E = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup \overline{(A \cup B)}$, nous sommes nécessairement dans l'un des quatre cas suivants :
Premier cas : $x \in A \cap B$:
On a : $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 * 1 = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
Deuxième cas : $x \in A \setminus B$:
On a : $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 * 0 = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
Troisième cas : $x \in B \setminus A$:
On a : $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 + 1 - 0 * 1 = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
Quatrième cas : $x \notin A \cup B$:
On a : $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0 + 0 - 0 * 0 = 0 = \mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
Conclusion : On a bien $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

4. On peut bien évidemment faire comme précédemment. Voyons cependant un lemme utile :
Lemme 1. *Soit $A \subset B$ deux parties de E. Alors $\mathbb{1}_{B\setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.*
Démonstration du lemme :
Premier cas : $x \in A$:
On a : $\mathbb{1}_{B\setminus A}(x) = 0 = 1 - 1 = \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)$ ($\mathbb{1}_B(x) = 1$ car $x \in A \subset B$).
Deuxième cas : $x \in B \setminus A$:
On a : $\mathbb{1}_{B\setminus A}(x) = 1 = 1 - 0 = \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)$ ($\mathbb{1}_A(x) = 0$ car $x \notin A$).
Troisième cas : $x \notin B$:
On a : $\mathbb{1}_{B\setminus A}(x) = 0 = 0 - 0 = \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)$ ($\mathbb{1}_A(x) = 0$ car, si x appartenait à A, il serait dans B).
Conclusion : le lemme est vrai.
Ainsi, puisque $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $(A \cap B) \subset (A \cup B)$, on a bien :
$\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} = \mathbb{1}_{A\cup B} - \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Applications : Démonstration de l'associativité de Δ.
Soient A, B et C trois parties d'un ensembles E.
Montrons que $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

On a d'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\Delta C}\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A \times (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C)\\ &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

D'autre part, le calcul de $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ conduit exactement au même résultat.

On en déduit alors que $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ et on conclut grâce à la proposition suivante :

Proposition 7. *Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$, alors $A = B$.*

Démonstration :

$$\begin{aligned}A &= \{x \in E | \mathbb{1}_A(x) = 1\}\\ &= \{x \in E | \mathbb{1}_B(x) = 1\}\\ &= B.\end{aligned}$$

2.6 Familles

Définition 23. *Une famille est un couple (I, G) d'ensembles tels que :*

- *G est un ensemble de couples de premiers termes dans I.*
- *$\forall i \in I\ \exists! c \in G$ tel que i soit le premier terme de c.*

Notant alors ce couple « c »sous la forme (i, a_i), la famille est notée $(a_i)_{i\in I}$.

Remarque 15. *Le concept de famille est proche de celui d'application, sauf que :*

- *on ne précise pas l'ensemble d'arrivée.*
- *on note a_i au lieu de $f(i)$.*

Notation 11. *Soient F, I des ensembles.*

L'ensemble de toutes les familles d'éléments de F et indexées par I est noté F^I.

$$F^I := \{(a_i)_{i\in I} | \forall i \in I\ a_i \in F\}.$$

Exemple 22.

- *Les suites sont des familles indexées par $\mathbb{N}$.*
- *Les familles indexées par $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ sont assimilées à des n-uplets.*
- *La famille vide est la famille indexée par $\emptyset$ (et son graphe G est vide).*

Définition 24. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles.*

On appelle réunion de cette famille

$$\{x | \exists i \in I\ x \in A_i\} = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

On appelle intersection de cette famille

$$\{x|\forall i \in I \ x \in A_i\} = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

(I est supposé non vide).

On appelle produit cartésien de cette famille l'ensemble

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} | \forall i \in I \ a_i \in A_i\}.$$

Exemple 23. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = [0, n]$.*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x|\exists n \in \mathbb{N} \ x \in [0, n]\} = \mathbb{R}_+.$$

Pour justifier la dernière égalité, l'inclusion de gauche à droite est évidente et, pour l'inclusion de droite à gauche, il suffit de prendre $n = E(x) + 1$ où $E(x)$ désigne la partie entière du réel x.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x|\forall n \in \mathbb{N} \ x \in [0, n]\} = \{0\}.$$

Enfin,

$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq n$.*