Chapitre I - Relations binaires

M. GUILLERON, UNC

2022

1 Relations binaires

Définition 1. *Soit E un ensemble. Une relation binaire sur E est une assertion dont la valeur de vérité dépend de deux variables dans E.*

Notation 1. *Etant donné une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, x, $y \in E$, On écrira $x\mathcal{R}y$ ssi $\mathcal{R}$ est vraie en (x, y).*

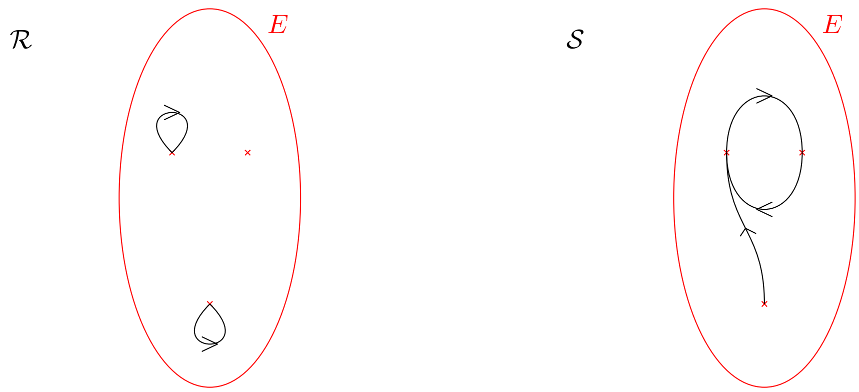
Définition 2. *Dans les mêmes notations, $\mathcal{R}$ est dite :*
- *réflexive ssi $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$.*
- *symétrique ssi $\forall x$, $y \in E$, $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.*
- *transitive ssi $\forall x$, y, $z \in E$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.*
- *antisymétrique ssi $\forall x$, $y \in E$, $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$.*

Exemple 1.
- *$\leq$ sur $\mathbb{R}$ est :*
  - *réflexive*
  - *non symétrique*
  - *transitive*
  - *antisymétrique*
- *$<$ sur $\mathbb{R}$ est :*
  - *non réflexive*
  - *antisymétrique (l'hypothèse de départ $(x < y) \wedge (y < x)$ étant toujours fausse, l'implication est vraie).*
- *Le parallélisme sur l'ensemble des droites du plan est :*
  - *réflexive*
  - *symétrique*
  - *transitive*
  - *non antisymétrique*

Remarque 1. *« symétrique »et « antisymétrique »ne sont pas antithétiques.*

Dans les schémas suivant, on trace une flèche de x à y pour signifier $x\mathcal{R}y$.

Illustrations :



La relation $\mathcal{R}$ de gauche est symétrique et antisymétrique, et la relation $\mathcal{S}$ de droite n'est ni symétrique, ni antisymétrique.

2 Relations d'équivalence

2.1 Définition

Définition 3. *Une relation d'équivalence est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.*

2.2 Exemples

Exemple 2. *Le parallélisme sur l'ensemble des droites du plan est une relation d'équivalence.*

Exemple 3. *« $=$ »est une relation d'équivalence pour tout ensemble.*

Exemple 4. *Soit n un entier.*
La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.
C'est aussi le cas de la relation de congruence module 2π.

2.3 Classes d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

Définition 4. *Soit $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x selon $\mathcal{R}$ (ou modulo $\mathcal{R}$) l'ensemble*

$$cl_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E | x\mathcal{R}y\}.$$

Notation 2. *On note aussi $cl_{\mathcal{R}}(x)$ sous la forme $\overline{x}$, $cl(x)$ ou $\dot{x}$.*

Proposition 1. *Les classes d'équivalence selon $\mathcal{R}$ sont deux à deux disjointes (d'intersection vide) :*

$$\forall x, x' \in E,\ cl(x) \neq cl(x') \Longrightarrow cl(x) \cap cl(x') = \emptyset,$$

et leur réunion est E.

Démonstration :
Montrons que, étant donnés deux éléments x et x' de E tels que $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(x')$, alors $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(x') = \emptyset$.
Raisonnons par contraposée :
Supposons que $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(x') \neq \emptyset$.
Alors : $\exists y \in \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(x')$.
$y \in \mathrm{cl}(x)$ donc $x\mathcal{R}y$.
De même, $x'\mathcal{R}y$.
Montrons que $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(x')$.
Soit $z \in \mathrm{cl}(x)$.
On a : $x\mathcal{R}z$.
Comme $\mathcal{R}$ est symétrique et que $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.
Puisque $\mathcal{R}$ est transitive et que $x'\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}z$, on a :$x'\mathcal{R}z$.
Donc $z \in \mathrm{cl}(x')$.
Ainsi $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(x')$.
Les rôles de x et x' étant permutables, on a aussi $\mathrm{cl}(x') \subset \mathrm{cl}(x)$.
Donc $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(x')$.
D'où le résultat...

Remarque 2. *Une classe d'équivalence est classe d'équivalence de chacun de ses membres :*

$$\forall x \in E,\ \forall x' \in cl(x),\ cl(x) = cl(x').$$

Démonstration laissée en exercice.

Définition 5. *Soit E un ensemble. On appelle* <u>*partition*</u> *de E tout ensemble Ω de parties de E telles que :*

$$\begin{cases} \forall \omega \in \Omega,\ \omega \neq \emptyset \\ \bigcup\limits_{\omega \in \Omega} \omega = E \\ \forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \omega \neq \omega' \Longrightarrow \omega \cap \omega' = \emptyset \end{cases} \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \exists! \omega \in \Omega,\ x \in \omega.$$

Proposition 2. *L'ensemble des classes d'équivalence d'une relation $\mathcal{R}$ sur E forme une partition de E.*
Cette partition est appelée <u>*l'ensemble quotient*</u> *de E par $\mathcal{R}$, noté $E/\mathcal{R}$.*

<u>Démonstration</u> :
Montrons que $\bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}(x) = E$.
$\subset$: $\forall x \in E$, $\mathrm{cl}(x) \subset E$,
donc $\bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}(x) \subset E$.
$\supset$: Soit $x' \in E$.
$x' \in \mathrm{cl}(x')$ car $x'\mathcal{R}x'$ puisque $\mathcal{R}$ est réflexive.
Donc $x' \in \bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$.
Donc $E \subset \bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$.

Les classes d'équivalence sont deux à deux disjointes par la proposition précédente.
Enfin, fixant $x \in E$, toute classe d'équivalence $\mathrm{cl}(x)$ contient au moins un élément : x
Elle est donc est non vide.

Remarque 3. *Étant donné une partition Ω de E, il existe une et une seule relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que $\Omega = E/\mathcal{R}$, à savoir celle définie par :*

$$\forall x,\ y \in E,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists \omega \in \Omega,\ x \in \omega \wedge y \in \omega.$$

Remarque 4. *Moins formellement, prenons l'exemple d'un puzzle. L'ensemble des pièces forme une partition de l'image. Si on prend l'ensemble des pixels, en les supposant suffisamment petits pour être entièrement contenus dans chacune des pièces, on peut définir la relation d'équivalence entre les pixels « figurer sur la même pièce du puzzle ». On a bricolé une relation d'équivalence dont l'ensemble des classes partitionne l'image selon la découpe du puzzle.*

3 Relations d'ordre

3.1 Définition

Définition 6. *Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation binaire réflexive, antisymétrique, transitive.*

Définition 7. *Une relation d'ordre $\leq$ sur un ensemble E sera dite totale ssi*

$$\forall x \in E,\, \forall y \in E,\, x \leq y \vee x \geq y,$$

c'est-à-dire ssi 2 éléments de E sont toujours comparables au sens de $\leq$.
Dans le cas contraire, on parle de relation d'ordre partielle.

Définition 8. *Un ensemble ordonné est un couple $(E, \leq)$ où E est un ensemble et $\leq$ est une relation d'ordre sur E.*

3.2 Exemples

Exemple 5. *$\leq$ sur $\mathbb{R}$ est un ordre total (relation d'ordre totale) car :*
- $\forall x \in \mathbb{R},\, x \leq x$ *(réflexive)*
- $\forall x,\, y \in \mathbb{R},\, (x \leq y) \wedge (y \leq x) \Longrightarrow x = y$ *(antisymétrie)*
- $\forall x,\, y,\, z \in \mathbb{R},\, (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$ *(transitivité)*
- $\forall x,\, y \in \mathbb{R},\, x \leq y$ *ou* $y \leq x$ *(l'ordre est total).*

Exemple 6. *Divisibilité dans $\mathbb{N}$*
On définit sur $\mathbb{N}$ la relation $|$ par :
$\forall a,\, b \in \mathbb{N},\, a|b \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\, b = ka.$
- $|$ *est réflexive :*
  Soit $a \in \mathbb{N}$.
  Posons $k = 1 \in \mathbb{N}$.
  Alors $a = ka$ donc $a|a$.
- $|$ *est antisymétrique :*
  Soient $a,\, b \in \mathbb{N}$.
  On suppose que $a|b$ et $b|a$.
  Par définition, il existe donc $k,\, k' \in \mathbb{N}$ tels que $b = ka$ et $a = k'b$.
  Il vient alors : $a = k'ka$.
  Ainsi deux cas se distinguent :
  - *Si $a = 0$, alors $b = k * 0 = 0$ donc $a = b$.*
  - *Si $a \neq 0$, $kk' = 1$, donc $k = k' = 1$.*
    (si $kk' \neq 1$, alors, comme $kk' \neq 0$ (sinon ceci impliquerait $a = 0$, cas déjà traité), $k \geq 1$ et $k' \geq 1$, avec une inégalité stricte.
    Autrement dit : $(k \geq 1 \wedge k' > 1) \vee (k > 1 \wedge k' \geq 1)$.
    Ainsi, on a bien $kk' > 1$, et, puisque $a = kk'a$ avec $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a > a$: contradiction.)

  Donc(dans tous les cas) $a = b$.
- $|$ *est transitive : Soient $a,\, b,\, c \in \mathbb{N}$ tels que $a|b$ et $b|c$.*
  Soient $k,\, k' \in \mathbb{N}$ tels que $b = ka$, $c = k'b$.
  Alors $c = kk'a$, donc ($kk' \in \mathbb{N}$) $a|c$.

Ainsi, $|$ est un ordre sur $\mathbb{N}$.

— *$|$ n'est pas un ordre total car, par exemple, 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2.*
  Ainsi, 2 et 3 sont incomparables au sens de $|$.
  $|$ est donc un ordre partiel.

Exemple 7. *Inclusion dans $\mathscr{P}(E)$: Étant donné un ensemble E, $\subset$ est un ordre partiel sur $\mathscr{P}(E)$ (total si E est vide ou un singleton).*

3.3 Majorants, minorants

Définition 9. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonnée.*
Soit A une partie de$E$.
Un élément M de E est appelé un majorant de A si et seulement si $\forall a \in A$, $a \leq M$.
Un élément m de E est appelé un minorant de A si et seulement si $\forall a \in A$, $a \geq m$ (i.e. $m \leq a$).

Définition 10. *A est dite majorée ssi elle admet au moins un majorant dans E.*
A est dite minorée ssi elle admet au moins un minorant dans E.
A est dite bornée ssi elle est majorée et minorée.

3.4 Plus grand et plus petit élément

Définition 11. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.*
Un élément M de E est appelé plus grand élément de E ssi $\forall a \in E$, $a \leq M$.
(Un plus grand élément de E est un majorant de E appartenant à E).

Propriété-définition 1. *E admet au plus un plus grand élément. Il est noté* $\max(E)$.

Démonstration : Soit M, M' des plus grands éléments dans E.

$$\forall a \in E,\ a \leq M \text{ donc } M' \leq M.$$

$$\forall a \in E,\ a \leq M' \text{ donc } M \leq M'.$$

Ainsi, par antisymétrie, $M = M'$.

Définition 12. *On définit de même le plus petit élément. Il en existe au plus un, que l'on note* $\min(E)$.

3.5 Bornes supérieure et inférieure d'une partie

Définition 13. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.*
Soit A une partie de E.
On appelle borne supérieure de A (dans E) le plus petit des majorants de A dans E, lorsqu'il existe (le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A dans E).
On la note $\sup(A)$.

$\boxed{\sup(A) = \min\{\textit{majorants de } A \textit{ dans } E.\}}$

Définition 14. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.*
Soit A une partie de E.
On définit de même la borne inférieure de A (dans E) comme le plus grand des minorants de A dans E.
On la note $\inf(A)$.

$\boxed{\inf(A) = \max\{\textit{minorants de } A \textit{ dans } E.\}}$

Proposition 3. — *Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et* $\sup(A) = \max(A)$.

— *Si A admet une borne supérieure <u>dans A</u>, alors A admet un plus grand élément et* $\max(A) = \sup(A)$.

Même énoncés avec min *et* sup.

Démonstration :

— Supposons que $\max(A)$ existe.
Alors, notant Maj (A) l'ensemble des majorants de A dans E, on a :

$$\max(A) \in \mathrm{Maj}(A) \tag{1}$$

et $\forall M \in \mathrm{Maj}(A)\ \forall x \in A\ x \leq M$.
Ainsi, puique $\max(A) \in A$,

$$\forall M \in \mathrm{Maj}(A)\ \ \max(A) \leq M. \tag{2}$$

De (**??**) et (**??**), on déduit que $\max(A) = \min(\mathrm{Maj}(A))$.
Donc $\sup(A)$ existe et $\sup(A) = \max(A)$.

— Supposons que $\sup(A)$ existe et que $\sup(A) \in A$.
Alors $\sup(A)$ est un majorant de A appartenant à A.
Donc $\sup(A)$ est le plus grand élément de A.

Exemple 8. $[0,1[$, *dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel :*
- admet une borne supérieure égale à 1 : en effet, Maj$([0,1[) = [1;+\infty[$ et $\min([1;+\infty[) = 1$.
- n'admet pas de plus grand élément : s'il y en avait un, il vaudrait sup$([0,1[) = 1$, mais $1 \notin [0,1[$.
- admet un plus petit élément, 0 et admet donc une borne inférieure, à savoir 0.

Exemple 9. *Dans $\mathbb{N}$ muni de « | ».*
On pose : $A = \{4,6\}$.

$$\begin{aligned} \mathit{Maj}(A) &= \{\textit{multiples communs de } 4 \textit{ et } 6\} \\ &= \{\textit{multiples de } 12\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\min(\mathit{Maj}(A)) = 12$.
Donc sup(A) existe et vaut 12.

Remarque 5. $0 = \max(\mathbb{N})$ *au sens de $|$. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 = n.0$ donc $n|0$.*

Cependant, A n'a pas de plus grand élément (car $12 \notin A$) (ou car 4 et 6 ne sont pas comparables au sens de $|$).

$$\begin{aligned} \mathit{Mino}(A) &= \{\textit{diviseurs communs de } 4 \textit{ et } 6\} \\ &= \{1,2\}. \end{aligned}$$

D'où $\max(\mathit{Mino}(A)) = 2$.
Donc inf(A) existe et vaut 2.
$\min(A)$ *n'existe pas.*

Exemple 10. *Dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ muni de l'inclusion, soit $A = \{\{1,\ 2,\ 3\},\ \{3,\ 4,\ 5\}\}$.*

$$\begin{aligned} \mathit{Maj}(A) &= \{X \subset \mathbb{N} | \{1,\ 2,\ 3\} \subset X \textit{ et } \{3,\ 4,\ 5\} \subset X\} \\ &= \{X \subset \mathbb{N} | \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} \subset X\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\min \mathit{Maj}(A) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.
Donc sup$(A) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

$$\begin{aligned} \mathit{Mino}(A) &= \{X \subset \mathbb{N} | X \subset \{1,\ 2,\ 3\} \textit{ et } X \subset \{3,\ 4,\ 5\}\} \\ &= \{X \subset \mathbb{N} | X \subset \{3\}\} \\ &= \{\emptyset,\ \{3\}\} \end{aligned}$$

Donc inf$(A) = \max(Mino(A)) = \{3\}$.
Ni $\min(A)$, *ni* $\max(A)$ *n'existent.*
Généralisation :
Étant donné $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(E)$, *sup*$(\mathcal{A}) = \underset{X\in\mathcal{A}}{\cup} X$ *et inf*$(A) = \underset{X\in\mathcal{A}}{\cap} X$.

Remarque 6. *Si* $\mathcal{A} = \emptyset$ *:*

$$\begin{aligned} Maj(\mathcal{A}) &= \{X \subset E | \forall A \in \mathcal{A}\ A \subset X\} \\ &= \{X \subset E\} \\ &= \mathcal{P}(E). \end{aligned}$$

Donc sup$(\mathcal{A}) = \min(Maj(\mathcal{A})) = \min(\mathscr{P}(E)) = \emptyset$.

$$\begin{aligned} Mino(A) &= \{X \subset E | \forall A \in \mathcal{A}\ X \subset A\} \\ &= \mathscr{P}(E). \end{aligned}$$

Donc inf$(\mathcal{A}) = \max(\mathscr{P}(E)) = E$.

Remarque 7. *Lorsque* $A \subset E$ *et que inf*(A) *et sup*(A) *existent, inf*$(A) \leq$ *sup*(A)*, sauf si* $A = \emptyset$.
En effet, si $\exists a \in A$, *inf*$(A) \leq a$ *car inf*(A) *minore* A,
et sup$(A) \geq a$ *car sup*(A) *majore* A.
Par transitivité, inf$(A) \leq$ *sup*(A).

3.6 Applications monotones

Remarque 8. *Si on note* $\leq$ *une relation d'ordre sur un ensemble* E, « $<$ »*signifie* « $\leq$ *et* $\neq$ ».

Définition 15. *Soient* $(E, \leq)$ *et* $(F, \leq)$ *des ensembles ordonnés et* $f : E \to F$ *une application.*
f *est dite croissante si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in E^2\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x').$$

f *est dite strictement croissante si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in E^2\ x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

f *est dite décroissante si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in E^2\ x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

f *est dite strictement décroissante si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in E^2\ x < x' \Rightarrow f(x) > f(x').$$

Définition 16. f *est dite monotone (respectivement strictement monotone) si et seulement si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).*

Propriété 1. *Soient* $(E, \leq)$, $(F, \leq)$ *et* $(G, \leq)$ *des ensembles ordonnés.*
Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ *des applications monotones.*
Alors $g \circ f$ *est monotone (même énoncé avec strictement monotone).*

Remarque 9. *-* f *croissante et* g *croissante ou* f *décroissante et* g *décroissante implique* $g \circ f$ *croissante.*
- f *décroissante et* g *croissante ou* f *croissante et* g *décroissante implique* $g \circ f$ *décroissante.*

La démonstration aisée de ce résultat est laissée en exercice, il est plus simple de retrouver au cas par cas que d'apprendre ce résultat par coeur (cf Première S).

Propriété 2. *Soit $f : E \to F$ une application monotone.*

1. *Si f est de plus injective, alors elle est strictement monotone.*
2. *Si f est strictement monotone, et si l'ordre sur E est total, alors f est injective.*

Propriété 3. *Soit $f : E \to F$ une bijection strictement monotone.*
On suppose l'ordre sur E total.
Alors f^{-1} est strictement monotone, avec la même monotonie que f.