Chapitre II - Fonctions de plusieurs variables

M. GUILLERON, UNC

2020

1 Suites convergentes dans $\mathbb{R}^2$, point adhérent à une partie

1.1 Norme euclidienne

Définition 1. *On note* $||.||_2$ *la norme euclidienne associée à un vecteur* $u = (u_x, u_y)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, c'est-à-dire :*

$$||u||_2 := \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

.

1.2 Suites convergentes

Définition 2. *Une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points de* $\mathbb{R}^2$ *est dite convergente si et seulement si*

$$\exists L = (X, Y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N,$$

$$||a_n - L||_2 = \sqrt{(x_n - X)^2 + (y_n - Y)^2} \leq \epsilon.$$

On note alors :

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

1.3 Point adhérent à une partie

Définition 3. *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^2$*.*

Soit b *un point de* $\mathbb{R}^2$*.*

On dit que b *est un point adhérent à* A *si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* A *telle que* $\lim_{n\to+\infty} a_n = b$*.*

Remarque 1. *Tout point de* $a \in A$ *est adhérent à* A *car il est limite de la suite constante égale à* a*.*

2 Limites de fonction-continuité

A désignera une partie non vide de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Applications partielles

Définition 4. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$.*
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto f(x, y_0)$ est appelée application partielle à y fixé.
Son domaine de définition est $\{x \in \mathbb{R} |\ (x, y_0) \in A\}$.
On définit de même les applications partielles à x fixé.

2.2 Limites

Définition 5. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$.*
Soit b un point adhérent à A.
On dit que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = l$ si et seulement si :
- si l est finie :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ ||b - a||_2 \leq \delta \Rightarrow |f(a) - l| < \epsilon.$$

- si $l = +\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ ||b - a||_2 \leq \delta \Rightarrow f(a) \geq M.$$

- si $l = -\infty$:

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ ||b - a||_2 \leq \delta \Rightarrow f(a) \leq M.$$

Proposition 1. *f admet au plus une limite en b (si b adhère à A).*

Proposition 2. *Les théorèmes sur les limites de sommes, produits, quotients, sur produit d'une fonction de limite nulle et d'une fonction bornée, sur le passage aux limites dans une inégalité large, le théorème de l'encadrement (etc...) restent vrais pour les fonctions de 2 variables.*

Proposition 3. *Soit $f : A \to \mathbb{R}$.*
Soit $a_0(x_0, y_0)$ un point adhérent à A.
Si $\lim\limits_{a \to a_0} f(a) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = l$ et $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = l$.

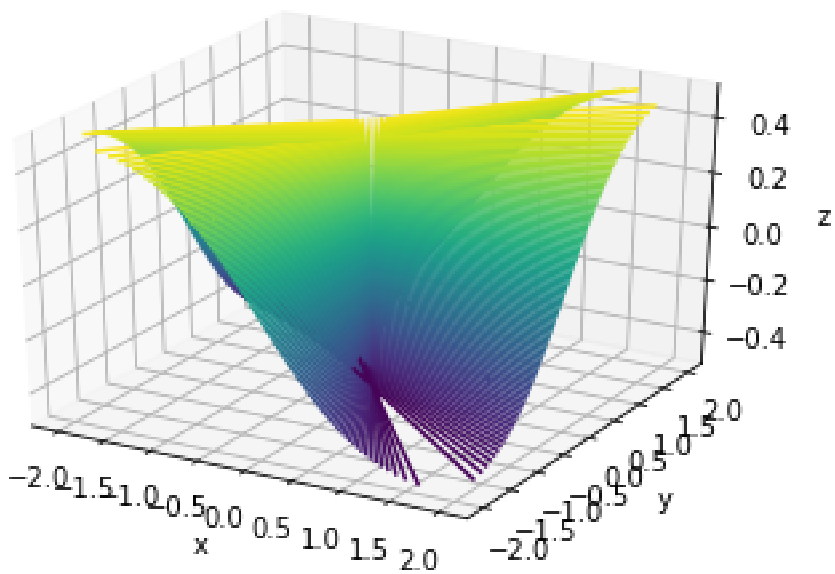
Remarque 2. *La réciproque est fausse : les applications partielles peuvent avoir même limite sans que la fonction de 2 variables en ait une.*

Exemple 1. $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2} \end{array}$$

$(0,0)$ adhère à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(.,0)(x) = 0 \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\to} 0$.
De même, $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ f(0,.)(y) = 0 \underset{\substack{y\to 0\\ y\neq 0}}{\to} 0$.
Toutefois, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.
En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x,x) = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$||(x,y)-(0,0)||_2 < \delta \text{ et } |f(x,y)-0| > \epsilon,$$

(ce qui est la négation que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$).
Il suffit de poser, par exemple, $\epsilon = \frac{1}{4}$ et $(x,y) = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$.



Proposition 4. *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}$ avec $A \subset \mathbb{R}$ ou $A \subset \mathbb{R}^2$ et $B \subset \mathbb{R}$ ou $B \subset \mathbb{R}^2$.*
Soit a un point adhérent à A.
On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = l$.
Alors b est adhérent à B et $\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \lim_{x\to a} g(f(x)) = l$.

2.3 Continuité

Définition 6. *Soit $a \in A$.*

$f : A \to \mathbb{R}$ est dite continue en a si et seulement si f admet une limite en a.

f est dite continue sur A si elle est continue en chaque point de A.

Proposition 5. *Sommes, produits, quotients dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions continues, composées sont continues.*

Remarque 3. *Si f est continue en a, alors la limite de f en a est $f(a)$.*

3 Calcul différentiel

Définition 7. *Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in U$.*

Le point a est dit intérieur à U ssi :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall x \in U,\ ||x-a||_2 < \epsilon \Rightarrow x \in U.$$

Définition 8. *Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite ouverte si et seulement si chaque point de U est intérieur à U.*

Dans toute la suite, U désignera une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$.

3.1 Dérivée selon un vecteur

Définition 9. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.*

On dit que f admet en a une dérivée selon $\vec{v}$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(a+t\vec{v})$ est dérivable en 0.

On appelle alors dérivée de f en a selon $\vec{v}$:

$$\frac{\mathcal{D}f}{\mathcal{D}\vec{v}}(a) = \mathcal{D}_{\vec{v}}f(a) = \frac{df(a+t\vec{v})}{dt} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+t\vec{v})-f(a)}{t}.$$

Interprétation graphique

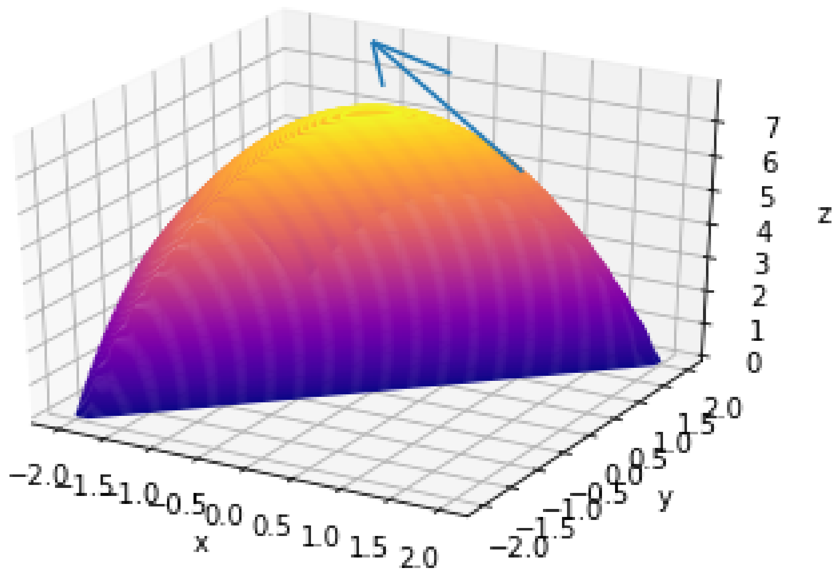
On représente f par une « nappe » :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\}.$$

Dans le cas où $\vec{v}$ est non nul, coupons cette nappe par le plan vertical contenant la droite horizontale passant par a et dirigée par $\vec{v}$: on obtient la courbe représentative de $t \mapsto f(a+t\vec{v})$.

Ainsi, $\mathcal{D}_{\vec{v}}f(a)$ est la pente de la tangente à cette courbe, lorsqu'on choisit $\vec{v}$ comme base de l'horizontale.

La vraie pente est $\dfrac{\mathcal{D}_{\vec{v}}f(a)}{||\vec{v}||}$.



3.2 Dérivées partielles

Définition 10. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$.*

On dit que f admet une dérivée partielle (première) en a par rapport à sa première variable ou par rapport à x ssi, notant $a(x_0, y_0)$, la fonction partielle $f(., y_0)$ est dérivable en x_0.

On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ la quantité $[f(., y_0)]'(x_0)$ la dérivée partielle.

On définit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ de façon analogue.

Remarque 4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = [f(., y_0)]'(x_0) = \dfrac{df(x_0 + t, y_0)}{dt}|_{t=0} = \dfrac{d}{dt} f((x_0, y_0) + t(1, 0)) = \mathcal{D}_{\vec{i}} f(a)$*, où $\vec{i}$ désigne le premier vecteur de base.*

De même, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \mathcal{D}_{\vec{j}} f(a)$.

Exemple 2. $f : (x, y) \mapsto xe^y$*, et* $a = (2, 3)$*.*

On a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = [x \mapsto xe^3]'(2) = [x \mapsto e^3](2) = e^3$,

et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = [y \mapsto 2e^y]'(3) = [y \mapsto 2e^y](3) = 2e^3$.

En posant $\vec{v} = (4, 5)$,

$\mathcal{D}_{\vec{v}} f(a) = [t \mapsto f(a + t\vec{v})]'(0) = [t \mapsto (2 + 4t)e^{3+5t}]'(0)$

$= [t \mapsto (4 + (2+4t) * 5)e^{3+5t}](0) = 14e^3.$

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 11. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$.*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles premières sont définies et continues sur U.

Théorème 1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors f admet un dl_1 en tout point a de U : pour tout $a \in U$, il existe une fonction de deux variables réelles ϵ à valeurs réelles et deux réels λ et μ tels que, au voisinage de $(0,0)$:*

$$f(a + (h,k)) = f(a) + \lambda h + \mu k + ||(h,k)||\epsilon(h,k),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$.

On peut alors écrire : $f(a + (h,k)) = f(a) + \lambda h + \mu k + o(||(h,k)||)$.

Remarque 5. *Les coefficients devant h et k dans le $dl_1(a)$ de f sont les dérivées partielles de f en a :*

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \text{ et } \mu = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Proposition 6. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ ssi pour tout vecteur $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_{\vec{v}}f$ est continue sur U, auquel cas, notant $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$:*

$$\boxed{\mathcal{D}_{\vec{v}}f = x_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial x} + y_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial y}.}$$

Démonstration :

$\Leftarrow$: Si, pour tout vecteur $\vec{v}$, $\mathcal{D}_{\vec{v}}f$ est définie et continue sur U, ceci est vrai pour $\vec{v} = \vec{i}$ et $\vec{v} = \vec{j}$.

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies et continues, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\Rightarrow$: Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$.

Fixons $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Soit $a(x_0, y_0) \in U$. On a :

$f(a+t\vec{v}) = f(a+t(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \times tx_{\vec{v}} + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \times ty_{\vec{v}} + ||(tx_{\vec{v}}, ty_{\vec{v}})||\epsilon(tx_v, ty_v),$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$.

D'où :

$$\begin{aligned} f(a+t\vec{v}) &= f(a) + t(x_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + y_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial y}(a)) + |t|||\vec{v}||\epsilon(t\vec{v}), \\ &= f(a) + t(x_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial x}(a) + y_{\vec{v}}\frac{\partial f}{\partial y}(a)) + \underset{t\to 0}{o}(t), \end{aligned}$$

en notant que $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t\vec{v}) = 0$ car $\lim\limits_{t\to 0} t\vec{v} = (0,0)$.

De ce développement limité à l'ordre 1 en 0 de $t \mapsto f(a+t\vec{v})$, on déduit que $\mathcal{D}_{\vec{v}}f(a)$ existe et vaut $x_{\vec{v}}\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + y_{\vec{v}}\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ (il suffit de revenir au taux d'accroissement).

De plus, $\mathcal{D}_{\vec{v}}f$ est continue comme somme et multiplication par des constantes fixes d'applications continues.

Proposition 7. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.*
Alors f est continue (de classe $\mathcal{C}^0$).

Démonstration : Soit $a \in U$.
$f(a+(h,k)) = f(a) + \lambda h + \mu k + ||(h,k)||\epsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} f(a)$.
Donc : f est bien continue en a.

Remarque 6. *Une fonction f admettant en tout point des dérivées partielles peut fort bien être non continue (si les dérivées partielles sont discontinues).*

Exemple 3.
$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

On a
$$\begin{array}{rccl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} - \dfrac{xy\times 2x}{(x^2+y^2)^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ [f(.,0)]'(0) = [0]'(0) = 0 \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$
est définie sur $\mathbb{R}^2$. Il est est de même de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Or (cf exemple précédent) f est discontinue en $(0,0)$.

3.4 Gradient, différentielle

Définition 12. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $a \in U$.*
On appelle gradient de f en a le vecteur $(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)) \in \mathbb{R}^2$, lorsque les dérivées partielles de f en a existent.
Notation :

$$\boxed{(\overrightarrow{grad} f)(a) = (\overrightarrow{\nabla} f)(a) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)).}$$

Définition 13. *On appelle différentielle de f en a la forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$*
$$\begin{array}{rccl} (df)(a) & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (h,k) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\times h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \times k \end{array}.$$

Notant alors $\begin{array}{cccc} dx & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (h,k) & \mapsto & h \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} dy & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (h,k) & \mapsto & k \end{array}$,

on peut alors écrire

$$(df)(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)dy.$$

Remarque 7.

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ (df)(a)(h,k) = \langle (\overrightarrow{grad} f)(a) | (h,k) \rangle,$$

où $\langle .|. \rangle$ *désigne le produit scalaire canonique dans* $\mathbb{R}^2$.

Définition 14. ***(Plan tangent)*** *Le plan tangent à la surface d'équation* $z = f(x,y)$ *au point* (x_0, y_0, z_0) *est donné par l'équation :*

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0).}$$

Définition 15. ***(Plan tangent)*** *Le plan tangent à la surface d'équation* $f(x,y,z) = 0$ *au point* (x_0, y_0, z_0) *est donné par l'équation :*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0.}$$

3.5 Propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Propriété 1. *L'ensemble* $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ *des fonctions de* U *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *est stable par somme, produit par une constante, produit interne.*

Remarque 8.

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Propriété 2. *Le quotient de deux fonctions* $\mathcal{C}^1$ *dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe* $\mathcal{C}^1$.

Proposition 8. *Soient* $f : U \to V$ *et* $g : V \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$, *avec* U, V *des ouverts de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}^2$.

Alors $g \circ f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et ,* $\forall a \in U$ *:*

$$\boxed{d(g \circ f)(a) = [dg(b)] \circ [df(a)],} \text{ avec } b = f(a).$$

Exemple 4. *Si* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* V *un ouvert de* $\mathbb{R}$,

$(x,y) \overset{f}{\mapsto} u \overset{g}{\mapsto}$,

la formule s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a)=\frac{\partial g}{\partial u}(b)\times\frac{\partial f}{\partial x}(a)\ \textit{et}\ \frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a)=\frac{\partial g}{\partial u}(b)\times\frac{\partial f}{\partial y}(a).}$$

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^2$,

$(x,y)\overset{f}{\mapsto}(u,v)\overset{g}{\mapsto}$,

la formule s'écrit , si on note $f=(f_u,f_v)$ où f_u et f_v sont deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a)=\frac{\partial g}{\partial u}(b)\times\frac{\partial f_u}{\partial x}(a)+\frac{\partial g}{\partial v}(b)\times\frac{\partial f_v}{\partial x}(a)}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a)=\frac{\partial g}{\partial u}(b)\times\frac{\partial f_u}{\partial y}(a)+\frac{\partial g}{\partial v}(b)\times\frac{\partial f_v}{\partial y}(a)}$$

3.6 Extrema locaux et points critiques

Définition 16. *Un point (x_0,y_0) appartenant à U est dit critique pour $f:U\to\mathbb{R}$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et s'annulent en (x_0,y_0), c'est-à-dire si et seulement si $(\overrightarrow{\nabla}f)(x_0,y_0)=\vec{0}$.*

Définition 17. *On dit que f admet un maximum local en (x_0,y_0) si et seulement si*

$$\exists\epsilon>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ ||(x,y)-(x_0,y_0)||<\epsilon\Rightarrow f(x,y)\leq f(x_0,y_0).$$

On dit que f admet un minimum local en (x_0,y_0) si et seulement si

$$\exists\epsilon>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ ||(x,y)-(x_0,y_0)||<\epsilon\Rightarrow f(x,y)\geq f(x_0,y_0).$$

Proposition 9. *Si (x_0,y_0) est un point intérieur à U, si f admet un extremum local en (x_0,y_0), et si f admet des dérivées partielles selon x et y en (x_0,y_0), alors (x_0,y_0) est un point critique pour f.*

Exemple 5. *On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme, composée, produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

On a alors : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Ainsi, $(0,0)$ est le seul point critique de f.

Ainsi, si f admet un extremum, c'est en $(0,0)$.

Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $1+x^2+y^2\geq1$, d'où, en composant avec la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$, croissante sur $[1,+\infty[$, $f(x,y)\geq1$

et f présente bien un minimum égal à 1 en $(0,0)$.

Remarque 9. *Si (x_0, y_0) est critique, f n'admet pas forcément un extremum local en (x_0, y_0).*

Exemple 6. *On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f : (x, y) \mapsto xy$.*

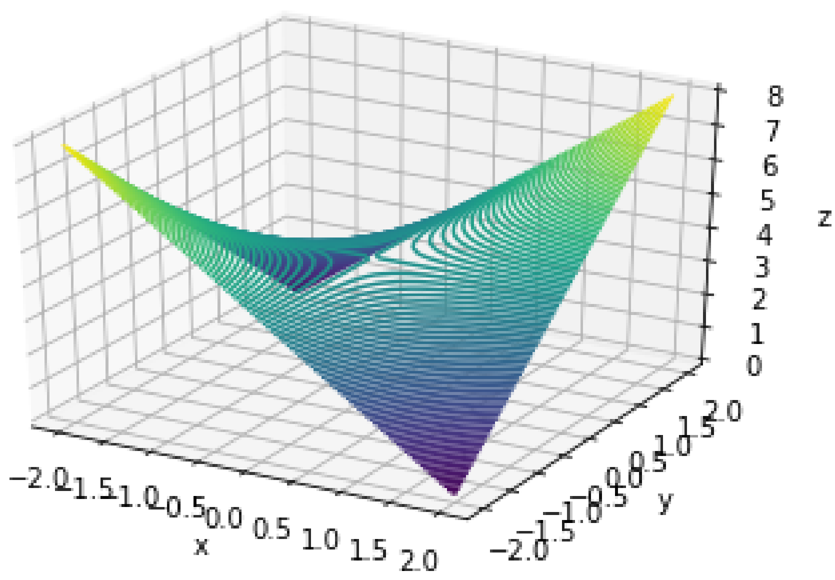
On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x.$$

On a donc : $(\vec{\nabla}(f))(0, 0) = \vec{0}$ mais, pour tout $\epsilon > 0$, f prend des valeurs strictement positives et négatives, car

$$f(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}) = \frac{\epsilon^2}{4} \text{ et } f(\frac{\epsilon}{2}, -\frac{\epsilon}{2}) = -\frac{\epsilon^2}{4}.$$

On dit que $(0, 0)$ est un point selle pour f.



Remarque 10. *Si le point (x_0, y_0) n'est pas intérieur, le résultat est faux.*

Exemple 7. $\begin{array}{cccc} f & : & (\mathbb{R}_+)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$.

est minimale en $(0, 0)$ mais

$$(\vec{\nabla}(f))(0, 0) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})(0, 0) = (1, 1) \neq \vec{0}.$$

En effet, $(0, 0)$ n'est pas intérieur à $(\mathbb{R}_+)^2$. $(\mathbb{R}_+)^2$ n'est donc pas un ouvert.

4 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 2

Définition 18. *On note, pour $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ la dérivée partielle par rapport à y de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ évaluée en a, si elle existe :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}(a).$$

On définit de même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \dfrac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \dfrac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$.

De manière générale, on définit récursivement

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}})}{\partial x_{i_k}}.$$

Définition 19. *f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ ($1 \leq k < \infty$) si et seulement si ses dérivées partielles d'ordre k sont définies et continues sur U.*

Remarque 11. *Il y a 2 dérivées partielles d'ordre 2.*

Il y a 8 dérivées partielles d'ordre 3.

Il y 2^k dérivées partielles d'ordre k.

Théorème 2. *(Théorème de Schwarz) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors en tout point a de U*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

Remarque 12. *Au vu du théorème de Schwarz, pour f de classe $\mathcal{C}^k$ fonction de deux variables, il y a au plus $k+1$ dérivées k-ième distinctes (on compte le nombre de fois où on dérive selon x, ce qui revient à choisir un entier de $[0, k]$.*

Définition 20. *Une fonction est dite $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier naturel k.*

Proposition 10. *Soient $l, p \in \mathbb{N}$.*

f est de classe $\mathcal{C}^{l+p}$ ssi ses dérivées partielles l-ièmes sont définies et de classe $\mathcal{C}^p$ sur U.

(avec la convention f de classe $\mathcal{C}^0$ si et seulement si f est continue).

Proposition 11. *On a les inclusions :*

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) \subset ... \subset \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}).$$

Proposition 12. *Les sommes, produits, quotients à dénominateur non nul, composées de fonctions $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ sont de classe $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.*

Remarque 13. *Sachant que $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit rapidement qu'une fonction donnée a la régularité voulue en les points « non problématiques ».*

5 Intégrales doubles

On admet que l'on peut construire l'intégrale double, telle que, $\forall(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $a<b$, $c<d$:

$$\int\int_{[a,b]\times[c,d]} 1dxdy = (b-a)(d-c).$$

L'intégrale est linéaire : pour toute partie D « convenable »(non pathologique) de $\mathbb{R}^2$, et $f, g : D \to \mathbb{R}$ continues intégrables, on a :

$$\int\int_D (\lambda f + g) = \lambda \int\int_D f + \int\int_D g.$$

Si D est convenable, fermé (= : son complémentaire est ouvert) et borné, toute fonction continue bornée sur D est intégrable sur D.

L'intégrale est positive : pour toute fonction $f : D \to \mathbb{R}$, si $\forall x \in D$, $f(x) \geq 0$, alors $\displaystyle\int\int_D f \geq 0$.

L'intégrale est croissante : soient f et g deux fonctions définies sur D. Si, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\displaystyle\int\int_D f \leq \int\int_D g$.

Définition 21. *On appelle* <u>*aire*</u> *d'un domaine convenable D l'intégrale $\displaystyle\int\int_D 1$, lorsque 1 est intégrable sur D (on dit que D est quarrable ssi cette aire existe).*

Théorème 3. *(Théorème de Fubini)*

Première forme

Soit $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$\int\int_D f = \int_{x=a}^{b} (\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy)dx \text{ (sommation par piles)}$$

$$= \int_{y=c}^{d} (\int_{x=a}^{b} f(x,y)dx)dy. \text{ (sommation par tranches)}$$

Deuxième forme

Soient φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue.

Alos $\displaystyle\int\int_D f = \int_{x=a}^{b} (\int_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} f(x,y)dy)dx..$

Remarque 14. *Supposons que D soit un pavé, c'est-à-dire qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que $D = [a,b] \times [c,d]$, et que f soit de le forme :*

$$f : (x,y) \mapsto g(x)h(y).$$

Alors : $\displaystyle\int\int_D f = \int_{x=a}^{b} (\int_{y=c}^{d} g(x)h(y)dy)dx = \int_{x=a}^{b} g(x)(\int_{y=c}^{d} h(y)dy)dx = (\int_{y=c}^{d} h(y)dy)(\int_{x=a}^{b} g(x)dx).$

Changements de variables

Définition 22. *Un difféomorphisme de classe* $\mathcal{C}^k$ *($k \geq 1$) d'un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *dans un autre est une bijection* f *telle que* f *et* f^{-1} *soient de classe* $\mathcal{C}^k$*.*

Définition 23. *Soit* M *une matrice* 2×2*, c'est-à-dire un tableau de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On appelle déterminant de M*, et on note* $\det(M)$ *ou* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$,
la quantité $ad - bc$*.*

Proposition 13. *Soit* $\varphi : U \to V$ *un difféomorphisme* $\mathcal{C}^1$*.*
On pose, pour tous $(u, v) \in U$*,* $\varphi(u, v) = (\varphi_x(u, v), \varphi_y(u, v))$*.*
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ *intégrable, où* D *désigne une partie convenable de* V*.*
Alors :
$\int\int_D f = \int\int_{\varphi^{-1}(D)} (f \circ \varphi) \times |J_\varphi|,$
où J_φ *désigne le jacobien de* φ*, c'est-à-dire le déterminant*

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi_x}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

Exemple 8. *(Passage en polaire) On a :*$\varphi : (\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$*.*
On a alors :

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(\rho\cos(\theta))}{\partial \rho} & \dfrac{\partial(\rho\sin(\theta))}{\partial \rho} \\ \dfrac{\partial(\rho\cos(\theta))}{\partial \theta} & \dfrac{\partial(\rho\sin(\theta))}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho.$$

On obtient donc la formule :

$$\int\int_D f(x, y) dx dy = \int\int_{\varphi^{-1}(D)} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) \rho d\rho d\theta.$$

(si on se place sur un domaine D *avec* $\rho > 0$ *(et par conséquent* φ *bijective)).*

Exemple 9. *Aire d'un disque.*

On considère $\varphi : U \to V$ *où* $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[$ *et* $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y),\ y \in \mathbb{R}_-\}$.

On considère : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq R^2.\}$

On pose $D' = D \setminus [O,y')$ *où* $[O,y') = \{(0,y) | y \in \mathbb{R}_-\}$.

Appelant $\mathcal{A}$ *l'aire de ce disque, on a :*

$\mathcal{A} = \int\int_D 1 dxdy = \int\int_{D'} 1 dxdy = \int\int_{\substack{\rho\in]0,R[\\ \theta\in]-\pi;\pi[}} 1\rho d\rho d\theta.$

Par Fubini, ceci donne :

$= \int_{\rho=0}^{R} \rho d\rho \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \times 2\pi = \pi R^2.$

6 Intégrales triples

On a les mêmes résultats concernant les intégrales triples. Signalons quelques jacobiens utiles :

- Le passage en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Le jacobien vaut ρ. On écrit donc $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$.

- Le passage en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}$$

Le jacobien vaut $\rho^2\sin(\theta)$. On écrit donc $dxdydz = \rho^2\sin(\theta) d\rho d\varphi d\theta$.

Exemple 10. *Centre de gravité d'un « quartier »de sphère homogène.*

Définition 24. *Le centre de gravité* G *d'un solide de domaine* D *et de densité* $\mu : D \to \mathbb{R}_+$ *est défini par :*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int\int\int_D \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mu \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dxdydz,$$

avec $m = \int\int\int_D \mu.$

Ici, on pose

$$D = \begin{cases} -\alpha \leq \varphi \leq \alpha \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 < \rho \leq R \end{cases}$$

(en coordonnées sphériques) et on suppose μ constante.
On a :

$$\begin{aligned}
m &= \int\int\int_D \mu(x,y,z)dxdydz \\
&= \mu \int\int\int_D dxdydz \text{ car } \mu \text{ ne dépend pas de } x, y \text{ et } z \\
&= \mu \int\int\int_{\substack{-\alpha\leq\varphi\leq\alpha \\ 0<\theta<\pi \\ 0<\rho\leq R}} \rho^2 \sin(\theta) d\rho d\theta d\varphi \\
&= \mu(\int_0^R \rho^2 d\rho)(\int_0^\pi \sin(\theta)d\theta)(\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi) \\
&= \mu\frac{R^3}{3}(\big[-\cos(\theta)\big]_0^\pi)2\alpha \\
&= \mu\frac{4\alpha R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Remarque 15. *Si $\alpha = \pi$, on retrouve le volume de la sphère $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.*

On a alors :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{1}{m}\int\int\int_{\substack{-\alpha\leq\varphi\leq\alpha \\ 0<\theta<\pi \\ 0<\rho\leq R}} \begin{pmatrix} \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \rho^2\sin(\theta)\mu d\rho d\theta d\varphi.$$

D'où on tire :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \frac{\mu}{m}(\int_0^R \rho^3 d\rho) \begin{pmatrix} (\int_0^\pi \sin^2(\theta)d\theta)(\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\varphi)d\varphi) \\ (\int_0^\pi \sin^2(\theta)d\theta)(\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\varphi)d\varphi) \\ (\int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta)(\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi) \end{pmatrix}.$$

Or, si f est une fonction impaire, alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$ (effectuer le changement de variable $u = -x$ pour montrer que cette intégrale vaut son opposé).
Ainsi, $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\varphi)d\varphi = 0$.
De plus, $\int_0^\pi \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = [\frac{\sin^2(\theta)}{2}]_0^\pi = 0$.
On a donc bien $y_G = z_G = 0$.
Enfin,

$$
\begin{aligned}
x_G &= \frac{\mu}{m}\frac{R^4}{4}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta\big[\sin(\varphi)\big]_{-\alpha}^{\alpha} \\
&= \frac{3}{4\alpha R^3}\frac{R^4}{4}(\frac{\pi}{2}-\big[\frac{\sin(2\theta)}{4}\big]_0^{\pi})2\sin(\alpha) \\
&= \frac{3R\sin(\alpha)}{8\alpha}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{3\pi R\sin(\alpha)}{16\alpha}.
\end{aligned}
$$