John Finstad NTNU 15. sep 2024
TMA4101

Prosjekt: Newtons avkjølingslov

Hensikt

Finne proporsjonalitetskonstanten α og sammenligne teoretiske og målte verdier.

Teori

I studiet av varmeoverføring er Newtons lov om kjøling en fysisk lov som sier at hastigheten på varmetapet til et legeme er direkte proporsjonal med forskjellen i temperaturene mellom legemet og dets omgivelser. Loven er ofte kvalifisert til å inkludere betingelsen om at temperaturforskjellen er liten og at raten av varmeoverføringsmekanismen forblir den samme. Som sådan tilsvarer det et utsagn om at varmeoverføringskoeffisienten (proporsjonalitetskonstanten), som medierer mellom varmetap og temperaturforskjeller, er en konstant (Wikipedia, 2024).

Når det er angitt i vilkår av temperaturforskjeller, resulterer Newtons lov i en enkel differensialligning som uttrykker temperaturforskjell som en funksjon av tid. Løsningen på den ligningen beskriver en eksponentiell reduksjon av temperaturforskjell over tid (Wikipedia, 2024).

Utstyr

- Termometer
- Kjele
- Glass
- Vann

Fremgangsmåte

Kjelen ble fylt med vann og varmet opp til vannet kokte. Vannet ble overført til glasset. Termometeret ble passert i glasset, slik at spissen var omtrent midt i. Temperaturen i vannet ved start var på 85.0 °C. Temperaturen ble så målt ved ulike tidspunkter, helt til det var omtrent ved romtemperaturen på 24 °C.

Bilde 1: Glass med vann og termometer

Resultat

Tid (minutter)	Temperatur (°C)
0	85.0
1	82.3
2	80.0
3	78.0
4	75.9
5	74.2
7	71. 2
10	67.0
15	61.5
20	57.0
25	53.1
30	50.2
40	44.9
50	41.1
60	38.0
75	34.4
90	32.5
120	28.7
150	26.5
200	24.4

Diskusjon

Vi har differensiallikningen som beskriver temperaturforandringen i vannet over tid (Newtons avkjølingslov):

$$\dot{T}(t) = \alpha(T(t) - T_K)$$

hvor $T(t)$ er temperaturen i vannet som funksjon av tiden t, $T_K = 22$°C er romtemperaturen, og α er proporsjonalitetskonstanten vi ønsker å finne.

Dette er en separabel differensiallikning, og vi kan løse den ved å separere variablene:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_K)dt$$

For å løse denne likningen, deler vi begge sider med $(T - T_K)$ og multipliserer med dt:

$$\frac{1}{T - T_K} dT = \alpha\, dt$$

Vi integrerer begge sider:

$$\int \frac{1}{T - T_K} dT = \int \alpha\, dt$$

Dette gir:

$$ln \mid T - T_K \mid = \alpha t + C$$

Ved å eksponensiere begge sider får vi:

$$\mid T - T_K \mid = e^{\alpha t + C} = e^C e^{\alpha t}$$

Vi kan skrive e^C som en konstant A, og fjerne absoluttverdien ved å anta at temperaturen er større enn romtemperaturen (som er sannsynlig siden $T(0) = 85$°C):

$$T - T_K = Ae^{\alpha t}$$

Dette gir uttrykket for temperaturen:

$$T(t) = T_K + Ae^{\alpha t}$$

Vi vet at når $t = 0$, er $T = 85$. Vi setter inn dette i løsningen:

$$T(0) = T_K + Ae^{\alpha 0}$$
$$85 = 24 + A \cdot 1$$
$$A = 85 - 24 = 61$$

Så løsningen for T(t) er:

$$T(t) = 24 + 61e^{\alpha t}$$

For å bestemme α, trenger vi en ekstra måling, f.eks. temperaturen i vannet etter en viss tid t_1. Hvis du har denne informasjonen (for eksempel temperaturen etter 1 minutt), kan vi bruke den til å finne α ved å sette inn verdiene i uttrykket:

$$T(t_1) = 24 + 61e^{\alpha t_1}$$

Fra tabellen med verdier ser vi at etter 1 minutt var temperaturen på 82.3℃. Setter vi inn denne verdien i uttrykket, kan vi løse for α.

$$T(1) = 24 + 61e^{\alpha} = 82.3$$

$$61e^{\alpha} = 58.3$$

$$e^{\alpha} = \frac{58.3}{61}$$

$$\alpha = \ln\left(\frac{58.3}{61}\right) = -0.0453$$

Funksjonen for temperaturen i vannet er gitt ved:

$$T(t) = 24 + 61e^{-0.0453t}$$

Proporsjonalitetskonstanten α er omtrent $-0.0453\, min^{-1}$.

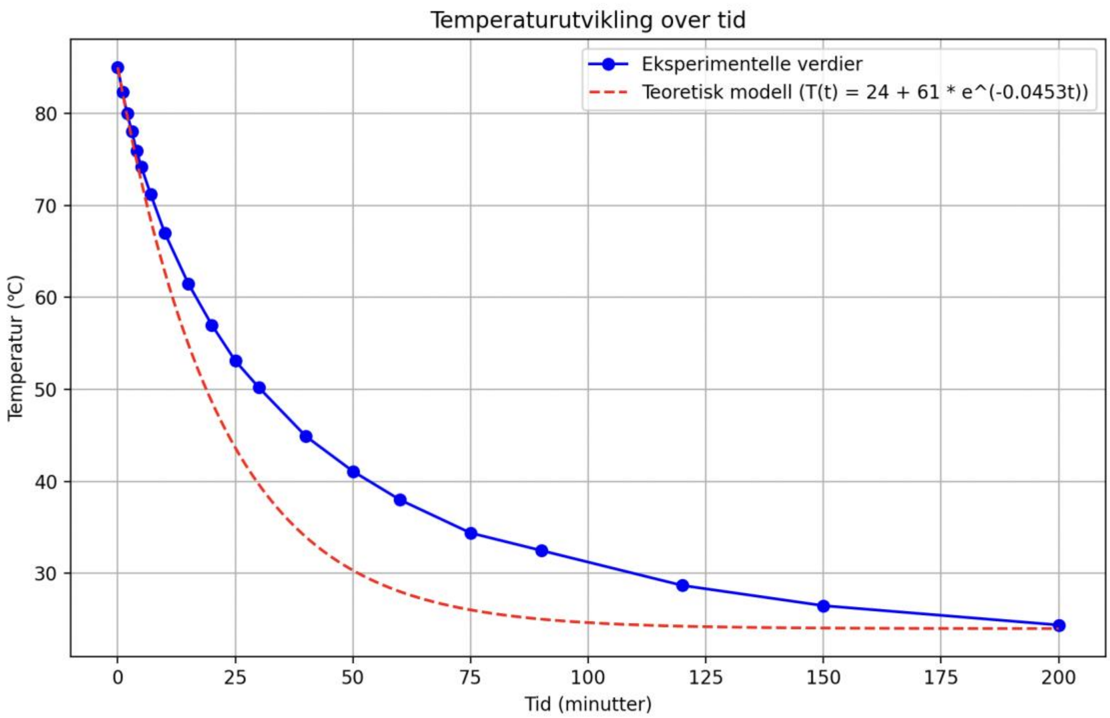
Dette betyr at temperaturen avtar med en hastighet som er proporsjonal med differansen mellom vannets temperatur og romtemperaturen, og α beskriver hvor raskt denne avkjølingen skjer.

Vi kan bruke de målte verdiene og sammenligne de med verdiene som vi får ved å bruke funksjonsuttrykket med $\alpha = -0.0453\, min^{-1}$.

Dette kan gjøres gjennom et python-program:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Data fra eksperimentet
tid = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 90, 120, 150, 200]
temperatur = [85.0, 82.3, 80.0, 78.0, 75.9, 74.2, 71.2, 67.0, 61.5, 57.0, 53.1, 50.2, 44.9, 41.1, 38.0, 34.4, 32.5, 28.7, 26.5, 24.4]

# Funksjonen fra løsningen tidligere
def T_model(t, alpha, TK=24, T0=85):
    A = T0 - TK
    return TK + A * np.exp(alpha * t)

# Parametere fra løsningen
alpha = -0.0453
TK = 24  # Romtemperatur i grader celsius

# Tidspunkter for den teoretiske modellen
t_teori = np.linspace(0, 200, 500)
T_teori = T_model(t_teori, alpha)

# Plotting av eksperimentelle verdier og teoretisk modell
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tid, temperatur, 'o-', label="Eksperimentelle verdier", color="blue")
plt.plot(t_teori, T_teori, label="Teoretisk modell (T(t) = 24 + 61 * e^(-0.0453t))", color="red", linestyle="--")

plt.xlabel("Tid (minutter)")
plt.ylabel("Temperatur (℃)")
plt.title("Temperaturutvikling over tid")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figur I: Python kode for de målte og teoretiske verdiene



Figur II: Graf til målte og teoretiske verdier

Konklusjon

Det er en tydelig forskjell mellom de målte og teoretiske verdiene. Dette betyr først å fremst at proporsjonalitetskonstanten IKKE er konstant. Det kan også/eller bety at det er et par ting Newtons avkjølingslov ikke tar høyde for, for eksempel fordampning.

Kildeliste

Wikipedia. (2024, sep 11). *Newtons law of cooling*. Hentet fra Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_law_of_cooling